STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

1982

CLUJ-NAPOCA

ANUL XXVII 1982

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

Redacţia: 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 61 00

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — INHALT

Cronică — Chronicle — Chronique — Chronik

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

UNIFORM CONVERGENCE STRUCTURES FOR FUNCTION SPACES

VIRGIL BĂLAN

In [5] C. H. Cook and H. R. Fischer introduced and investigated a uniform convergence structure on the set Y^X of all functions from X to Y, taking on X a collection of nonempty subsets of X and on Y a uniform convergence structure.

If this paper we suggest another way to define a uniform convergence structure on Y^X under the assumption that X has a „D — structure" (this concept is introduced in [3]) and Y has a uniform convergence structure, and we investigate some properties of Y^X equipped with this structure.

If the D-structure of X is generated by a convergence structure (or, it is a uniform convergence structure) then we obtain the uniform convergence structure of continuous convergence (see [3]) (respectively, the uniform convergence structure of uniform continuous convergence).

If the D-structure of X is generated by a family Σ of filters on X, then we obtain the uniform convergence structure of „Σ-uniform concergence". If Σ is a family of principal filters on X, then we reobtain the structure of C.H. Cook and H. R. Fischer.

1. **Basic definitions and results.** Given a set X, we denote by $F(X)$ the set of all proper filters on X. For a nonempty $F \subset X$ let $\overline{F}$ be the principal filter on X generated by the set F. If $x \in X$, the $\dot{x}$ denotes the ultrafilter $\overline{\{x\}}$.

If $\tilde{F}$ and $\tilde{G}$ are subsets of the product $X \times X$, then $\tilde{F}^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in F\}$, and $\tilde{F} \circ \tilde{G} = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X, (x, z) \in \tilde{F}, (z, y) \in \tilde{G}\}$.

For $F \subset X$, the diagonal of F will be denoted by Δ_F, that is, $\Delta_F = \{(x, x) \in X \times X : x \in F\}$. We use Δ for Δ_X.

If $\tilde{\mathfrak{F}} \in F(X \times X)$, then $\tilde{\mathfrak{F}}^{-1} = \{\tilde{F}^{-1} : F \in \tilde{\mathfrak{F}}\}$ is again a filter on $X \times X$. For two filters $\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathfrak{G}} \in F(X \times X)$, $\tilde{\mathfrak{F}} \circ \tilde{\mathfrak{G}}$ is the filter on $X \times X$ generated by all $\tilde{F} \circ \tilde{G}$ with $\tilde{F} \in \tilde{\mathfrak{F}}$, $\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{G}}$, provided that each $\tilde{F} \circ \tilde{G}$ is nonempty.

Let X, Y two sets and Y^X be the set of all function from X to Y.

If $\mathfrak{F} \in F(X)$ and $f \in Y^X$ then $f(\mathfrak{F})$ denotes the filter on Y generated by all sets $f(F)$ whith $F \in \mathfrak{F}$. If $\tilde{\mathfrak{F}} \in F(X \times X)$ and $f \in Y^X$ then $(f \times f)(\tilde{\mathfrak{F}})$ is the filter on $Y \times Y$ generated by all sets $(f \times f)(\tilde{F}) = \{(f(x), f(y)) : (x, y) \in \tilde{F}\}$ whith $\tilde{F} \in \tilde{\mathfrak{F}}$.

If $\Phi \in F(Y^X)$ and $\mathfrak{F} \in F(X)$ then $\Phi(\mathfrak{F})$ is the filter on Y generated by the sets $H(F) = \{f(x) : f \in H, x \in F\}$ where $H \in \Phi$ and $F \in \mathfrak{F}$.

If $\tilde{\Phi} \in F(Y^X \times Y^X)$ and $\tilde{\mathfrak{F}} \in F(X \times X)$ then $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathfrak{F}})$ denotes the filter on $Y \times Y$ generated by all sets $\tilde{H}(\tilde{F}) = \{(f(x), g(y)) : (f, g) \in \tilde{H}, (x, y) \in \tilde{F}\}$, where $\tilde{H} \in \tilde{\Phi}$ and $\tilde{F} \in \tilde{\mathfrak{F}}$. If $\mathfrak{F} \in F(X)$ then $\tilde{\Phi}(\mathfrak{F})$ denotes the filter $\tilde{\Phi}(\Delta_{\mathfrak{F}})$, where $\Delta_{\mathfrak{F}}$ is the filter on $X \times X$ generated by all diagonal sets Δ_F, with $F \in \mathfrak{F}$.

A *convergence structure* ([6]) on the set X is a mapping $\tau: X \to \mathfrak{L}(F(X))$ such that for every $x \in X$, τx is an $\bigcap$-ideal in $F(X)$ and $\dot{x} \in \tau x$. The pair (X, τ) is called a *convergence space*. If (X, τ) and (Y, σ) are two convergence spaces, the function $f \in Y^X$ is called *continuous at the point* $x \in X$ if $\mathfrak{F} \in \tau x$ implies $f(\mathfrak{F}) \in \sigma f(x)$. The function f is called *continuous* if it is continuous at every point of X. We shall denote by $\mathfrak{C}(X, Y)$ the set of all continuous functions from X to Y.

A *uniform convergence structure* (*u.c.s.*) ([5]) on X is an $\bigcap$-ideal $\mathfrak{I}$ in $F(X \times X)$ such that

(U_1) $\overline{\Delta} \in \mathfrak{I}$

(U_2) if $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{I}$ then $\tilde{\mathfrak{F}}^{-1} \in \mathfrak{I}$

(U_3) if $\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{I}$ and $\tilde{\mathfrak{F}} \circ \tilde{\mathfrak{G}}$ exists then $\tilde{\mathfrak{F}} \circ \tilde{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{I}$;

An $\bigcap$-ideal $\mathfrak{I}$ in $F(X \times X)$ which satisfies the axioms (U_2), (U_3) and (U_1') $x \in X$ implies $\dot{x} \times \dot{x} \in \mathfrak{I}$, is called (like in [3]) an *almost uniform convergence structure* (*a.u.c.s.*)

If $\mathfrak{I}$ is a u.c.s. (a.u.c.s.) on X, then the pair $(X, \mathfrak{I})$, is called a *uniform convergence space* (*almost uniform convergence space*).

If $\mathfrak{I}$ is a u.c.s. (a.u.c.s.) on X, then $\tau_{\mathfrak{I}}$ denotes the convergence structure on X induced by $\mathfrak{I}$, where for every $x \in X$ $\tau_{\mathfrak{I}} x = \{\mathfrak{F} \in F(X) : \mathfrak{F} \times \dot{x} \in \mathfrak{I}\}$.

A u.c.s. (a.u.c.s.) $\mathfrak{I}$ on X is said to be *separated* if $\dot{x} \times \dot{y}$ implies $x = y$.

A u.c.s. (a.u.c.s.) $\mathfrak{I}$ on X is called *principal* if $\mathfrak{I}$ is a principal $\bigcap$-ideal in $F(X \times X)$. $\mathfrak{I}$ is principal iff there exists a uniform structure (Bourbaki) $\mathfrak{U}$ on X such that $\mathfrak{I} = \{\tilde{\mathfrak{F}} \in F(X \times X) : \tilde{\mathfrak{F}} \supset \mathfrak{U}\} = [\mathfrak{U}]$.

If $(X, \mathfrak{I})$ and $(Y, \mathfrak{K})$ are two (almost) uniform concergence spaces and $f \in Y^X$, f is said to be *uniformly continuous* if $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{I}$ implies $(f \times f)(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{K}$. We shall denote by $\mathfrak{UC}(X, Y)$ the set of all uniformly continuous functions $f \in Y^X$.

In [3] we have shown that if $\mathfrak{I}$ is an a.u.c.s. on X then the family $\mathfrak{I}^* = \{\tilde{\mathfrak{F}}^* \in F(X \times X) : \exists \tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{I}, \tilde{\mathfrak{F}} \cap \overline{\Delta} \subset \tilde{\mathfrak{F}}\}$ is the finest u.c.s. on X such that $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}^*$. Moreover, $\mathfrak{I}$ and $\mathfrak{I}^*$ induce the same convergence structure.

A *D-structure* ([3]) on X is a subset $\mathfrak{D} \subset F(X \times X)$ satisfying the following axioms.

(D_1) If $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ then $\tilde{\mathfrak{F}}^{-1} \in \mathfrak{D}$;

(D_2) For $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ there exist $\tilde{\mathfrak{F}}_1, \tilde{\mathfrak{F}}_2 \in \mathfrak{D}$ such that $\tilde{\mathfrak{F}}_1 \circ \tilde{\mathfrak{F}}_2 \subset \tilde{\mathfrak{F}}$.

The pair $(X, \mathfrak{D})$ is called a *D-space*.

Example 1. Every u.c.s. on X is a D-structure on X.

Example 2. If τ is a convergence structure on X then the family $\mathfrak{D}_\tau = \{\mathfrak{F} \times \mathfrak{G} : \mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in F(X), \exists x \in X, \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} \in \tau x\}$ is a *D*-structure on X.

Example 3. Let $\Sigma \subset F(X)$. For each $\mathfrak{F} \in \Sigma$ let $\Delta_{\mathfrak{F}}$ be the filter on $X \times X$ generated by all diagonals Δ_F, whith $F \in \mathfrak{F}$. Then the family $\mathfrak{D}_\Sigma = \{\Delta_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \in \Sigma\}$

is a D-structure on X. If σ ia a collection of nonempty subsets of X and $\Sigma_\sigma = \{\overline{S} : S \in \sigma\}$ then we have $\mathfrak{D}_{\Sigma_\sigma} = \{\Delta_S : S \in \sigma\}$.

If $(X, \mathfrak{D}_1)$ and $(Y, \mathfrak{D}_2)$ are two D-spaces, then the function $f \in Y^X$ is said to be $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$-*continuous* if $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}_1$ implies $(f \times f)(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{D}_2$. We shall write $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ for the set $\{f \in Y^X : f$ is $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$-continuous$\}$.

In [3] we have shown that if (X, τ) and (Y, σ) are two convergence spaces then $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_\tau, \mathfrak{D}_\sigma) \subset \mathfrak{C}(X, Y)$, and if σ is almost uniformizable (i.e. there exists an a.u.c.s. $\mathfrak{J}$ on X such that $\sigma = \tau_{\mathfrak{J}}$) then $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_\tau, \mathfrak{D}_\sigma) = \mathfrak{C}(X, Y)$.

If $\Sigma \subset F(X)$ and $(Y, \mathfrak{J})$ is a u.c.s. then $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J}) = Y^X$.

Finally, we give a generalization of the classical concepts of equicontinuity and uniform equicontinuity.

Let $(X, \mathfrak{D})$ be a D-space and $(Y, \mathfrak{J})$ be a uniform convergence space. A subset $H \subset Y^X$ is calles $(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$-*equicontinuous* if $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ implies $\overline{\Delta}_H(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$.

If (X, τ) is a convergence space, a subset $H \subset Y^X$ which is $(D_\tau, \mathfrak{J})$-equicontinuous is said to be *equicontinuous*. In the case of a topological space X and a uniform space Y, this definition coincides with the usual concept of equicontinuity.

If $(X, \mathfrak{K})$ is a uniform convergence space, a subset $H \subset Y^X$ which is $(\mathfrak{K}, \mathfrak{J})$-equicontinuous, is said to be *uniformly equicontinuous*. In the case of a uniform space X and a uniform space Y this definition coincides with the definition of the usual concept of uniform equicontinuity.

2. Uniform and almost uniform convergence structures for function spaces.

In [3] we have proved the following result: If $(X, \mathfrak{D})$ is a D-space and $(Y, \mathfrak{J})$ an u.c.s. (not necessarily diagonal, i.e. not necessarily satisfying the axiom U_1) then the family $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}) = \{\tilde{\Phi} \in F(Y^X \times Y^X) : \tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ implies $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}\}$, is a nondiagonal u.c.s. on Y^X.

Moreover, we have the following result

THEOREM 1. *Let $(X, \mathfrak{D})$ be a D-space and $\mathfrak{J}$ be a nondiagonal u.c.s. on Y. Let $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ be the nondiagonal u.c.s. on Y^X defined above. We have*

(1) *If $\mathfrak{J}$ is an a.u.c.s. on Y, then $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ is an a.u.c.s. on $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$.*

(2) *If $\mathfrak{J}$ is a u.c.s. on Y and $H \subset Y^X$ is $(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$-equicontinuous, then $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ is a u.c.s. on H.*

The proof, being trivial, is omitted.

COROLLARY 1. *If (X, τ) is a convergence space and $(Y, \mathfrak{J})$ is an almost uniform convergence space, then $\Gamma(\mathfrak{D}_\tau, \mathfrak{J})$ is an a.u.c.s. on $\mathfrak{C}(X, Y)$.*

It is obvious that $\Gamma(\mathfrak{D}_\tau, \mathfrak{J}) = \{\tilde{\Phi} \in F(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}) : \forall x \in X, \mathfrak{F} \in \tau x \Rightarrow \tilde{\Phi}(F \times \dot{x})\mathfrak{J} \in \}$. In this case $\Gamma(\mathfrak{D}_\tau, \mathfrak{J})$ will be denotes by Γ_c. In [3] we have shown that the convergence structure on $\mathfrak{C}(X, Y)$ induced by the a.u.c.s. Γ_c is exactly the *convergence structure of continuous convergence*, γ_c. If Γ_c^* is the u.c.s. associated with Γ_c the we have evidently $\tau_{\Gamma_c^*} = \gamma_c$.

We call Γ_c^* the *u.c.s. of continuous convergence.*

COROLLARY 2. *Let* $(X, \mathfrak{X})$, $(Y, \mathfrak{J})$ *be uniform convergence spaces. Then* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J})$ *is an a.u.c.s. on* $\mathfrak{UC}(X, Y)$.

In this case we have $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}) = \{\tilde{\Phi} \in F(\mathfrak{UC}, \mathfrak{UC}) : \tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X} \Rightarrow \tilde{\Phi}(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}\}$

The convergence structure induced by $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J})$ is exactly the *convergence structure of uniformly continuous convergence*, γ_{uc} (a filter $\Phi \in F(Y^X)$ is said to be uniform-continuously convergent to $f \in Y^X$ if $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ implies $(\Phi \times \dot{f})(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J})$.

If Γ_{uc}^* is the u.c.s. associated with Γ_{uc}, then, evidently, we have $\tau_{\Gamma_{uc}^*} = \gamma_{uc}$. We call Γ_{uc}^* the *u.c.s. of uniformly continuous convergence.*

COROLLARY 3. *Let* $\Sigma \subset F(X)$ *and* $(Y, \mathfrak{J})$ *a uniform convergence space. Then* $\Gamma(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J})$ *is a u.c.s. on* Y^X.

Proof. It is sufficient to observe that Y^X is a $(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J})$-equicontinuous set.

Indeed, for every $F \subset X$ we have $\Delta_Y \times (\Delta_F) \subset \Delta_Y$. Consequently $\overline{\Delta}_Y \times (\Delta_{\mathfrak{F}}) \supset \overline{\Delta}_Y$. But $\overline{\Delta}_Y \in \mathfrak{J}$, thus $\overline{\Delta}_Y \times (\Delta_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$. Hence Y^X is $(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J})$-equicontinuous.

It is obvious that $\Gamma(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J}) = \{\tilde{\Phi} \in F(Y^X \times Y^X) : \mathfrak{F} \in \Sigma \Rightarrow \tilde{\Phi}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{J}\}$. We denote $\Gamma(\mathfrak{D}_\Sigma, \mathfrak{J}) = \Gamma_\Sigma$ and call Γ_Σ the *u.c.s. of uniform convergence on the members of* Σ, or the *u.c.s. of* Σ — *uniform convergence*. We denote by γ_Σ the convergence structure generated by Γ_Σ and call γ_Σ the *convergence structure of* Σ*-uniform convergence.*

If σ is a collection of nonempty subsets of X then $\Gamma(\mathfrak{D}_\sigma, \mathfrak{J})$ is exactly the u.c.s. of uniform convergence on the members of σ, introduced by *C. H.* Cook and H. R. Fischer in [5].

Now, we present some of the properties of the a.u.c.s. $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ on $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$, where $\mathfrak{D}$ is a D-structure on X and $\mathfrak{J}$ is an a.u.c.s. on Y.

Let Y' be the subset of Y^X composed of the constant functions, i.e $Y' = \{f_y \in Y^X : y \in Y\}$ where $f_y(x) = y$ for each $x \in X$.

Firstly, we remark that $Y' \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$. Indeed, if $f_y \in Y'$ and $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ then $(f_y \times f_y)(\tilde{\mathfrak{F}})$ is the filter on $Y \times Y$ generated by the sets $(f_y \times f_y)(\tilde{F})$ with $\tilde{F} \in \tilde{\mathfrak{F}}$. But, $(f_y \times f_y)(\tilde{F}) = \{(y, y)\}$. Hence $(\dot{f}_y \times \dot{f}_y)(\mathfrak{F}) = \dot{y} \times \dot{y}$. Since $\mathfrak{J}$ is an a.u.c.s., it follows that $\dot{y} \times \dot{y} \in \mathfrak{J}$ and therefore $(\dot{f}_y \times \dot{f}_y)(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$.

Consequently $f_y \in \mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$.

THEOREM 2. *Let* $(X, \mathfrak{D})$ *be a D-space and* $(Y, \mathfrak{J})$ *an almost uniform convergence space. Then the uniform subspace* Y' *of* $(\mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}), \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ *is uniformly isomorphic to* $(Y, \mathfrak{J})$.

Proof. Let $\alpha : Y' \to Y$ be defined by $\alpha(f_y) = y$. It is clear that α is a bijection of Y' onto Y, and $\alpha^{-1}(y) = f_y$ for every $y \in Y$.

In order to prove that α is a uniform isomorphism, it is sufficient to observe that for any $\tilde{\Phi} \in F(Y' \times Y')$, $\tilde{\mathfrak{F}} \in F(X \times X)$ and $\tilde{\mathfrak{G}} \in F(Y \times Y)$ we have $(\alpha \times \alpha)(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathfrak{F}})$ and $[(\alpha^{-1} \times \alpha^{-1})(\tilde{\mathfrak{G}})]\,(\tilde{\mathfrak{F}}) = \tilde{\mathfrak{G}}$.

Indeed, let $\tilde{H} \subset Y' \times Y'$. Then there exists $\tilde{G} \subset Y \times Y$ such that $\tilde{H} = \{(f_y \times f_z) : (y, z) \in \tilde{G}\}$. It is cleat thar $(\alpha \times \alpha)\ (\tilde{H}) = \tilde{G} = \tilde{H}(\tilde{F})$, for any $\tilde{F} \subset X \times X$. Hence for every $\tilde{\Phi} \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ and $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ we have $(\alpha \times \alpha)(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$. Thus α is uniformly continuous.

On the other hand if $\tilde{G} \subset Y \times Y$ and $\tilde{F} \subset X \times X$, we have $[(\alpha^{-1} \times \alpha^{-1})(\tilde{G})](\tilde{F}) = \tilde{G}$. Hence for every $\tilde{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{J}$ and $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$, $[(\alpha^{-1} \times \alpha^{-1})(\tilde{\mathfrak{G}})](\tilde{\mathfrak{F}}) = \tilde{\mathfrak{G}}$. Thus $(\alpha^{-1} \times \alpha^{-1})(\tilde{\mathfrak{G}}) \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$. Hence α^{-1} is uniformly continuous.

THEOREM 3. *Let* $(X, \mathfrak{D})$ *be a D-space and* $(Y, \mathfrak{J})$ *be an almost uniform convergence space.*

(1) *If* $(\mathcal{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}), \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ *is separated then* $(Y, \mathfrak{J})$ *is separated.*

(2) *If* $(Y, \mathfrak{J})$ *is separated and the D-structura has the property* (*A*) *for each* $x \in X$, *there exists* $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ *such that* $\tilde{\mathfrak{F}} \subset \dot{x} \times \dot{x}$, *then* $(\mathcal{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}), \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ *is separated.*

Proof. (1) Suppose that $(\mathcal{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}), \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ is separated. Then the subspace $(Y', \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ is separated. But Y' is uniformly isomorphic to Y. Hence Y is separated.

(2) Suppose that $(Y, \mathfrak{J})$ is separated and $\mathfrak{D}$ has the property (A). Let $f, g \in \mathcal{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$ such that $\dot{f} \times \dot{g} \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$. Let $x \in X$. Then there exists $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$ such that $\tilde{\mathfrak{F}} \subset \dot{x} \times \dot{x}$. But $(\dot{f} \times \dot{g})(\tilde{\mathfrak{F}}) \subset (\dot{f} \times \dot{g})\,(\dot{x} \times \dot{x}) = \dot{\widehat{f(x)}} \times \dot{\widehat{g(x)}}$. Now, since $\dot{f} \times \dot{g} \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$, and $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}$, it follows that $(\dot{f} \times \dot{g})\,(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$. Hence $\dot{\widehat{f(x)}} \times \dot{\widehat{g(x)}} \in \mathfrak{J}$. Then, since $(Y, \mathfrak{J})$ is separated we have $f(x) = g(x)$. Thus we have shown that $f = g$. Consequently $(\mathcal{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}), \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}))$ is separated.

THEOREM 4. *Let* $(X, \mathfrak{D})$ *be a D-space, satisfiyng property* (A) *and* $(Y, \mathfrak{J})$ *a separated almost uniform convergence space. Then* Y' *is closed in* $\mathcal{C}(\mathfrak{F}, \mathfrak{J})$ *with respect to the convergence structure* τ *induced by* $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{J})$.

Proof. Let $\Phi \in F(Y')$ and $\Phi \in \tau_\Gamma f$. We need to show that $f \in Y'$, i.e. for every $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$ we have $f(x') = f(x'')$. Indeed, since the D-structure $\mathfrak{D}$ has property (A) it follows that there exist $\tilde{\mathfrak{F}}', \tilde{\mathfrak{F}}'' \in \mathfrak{D}$ such that $\tilde{\mathfrak{F}}' \subset \dot{x}' \times \dot{x}'$ and $\tilde{\mathfrak{F}}'' \subset \dot{x}'' \times \dot{x}''$. Then we have $(\Phi \times \dot{f})(\tilde{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{J}$ and $(\Phi \times \dot{f}) \cdot (\tilde{\mathfrak{F}}'') \in \mathfrak{J}$. But $(\Phi \times \dot{f})(\tilde{\mathfrak{F}}') \subset (\Phi \times \dot{f})(\dot{x}' \times \dot{x}') = \Phi(x') \times \dot{\widehat{f(x')}}$ and $(\Phi \times \dot{f}) \cdot (\tilde{\mathfrak{F}}'') \subset (\Phi \times \dot{f})(\dot{x}'' \times \dot{x}'') = \Phi(x'') \times \dot{\widehat{f(x'')}}$. Hence $\Phi(x') \times \dot{\widehat{f(x')}} \in \mathfrak{J}$, $\Phi(x'') \times \dot{\widehat{f(x'')}} \in \mathfrak{J}$ and as $\mathfrak{J}$ is an a.u.c.s., it follows that $\dot{\widehat{f(x')}} \times \Phi(x') \in \mathfrak{J}$ and

$(\widehat{f(\dot{x}')} \times \Phi(x')) \circ (\Phi(x'') \times \widehat{f(\dot{x}'')}) \in \mathfrak{I}$. Since $\Phi \in F(Y')$ we infer that $\Phi(x') = \Phi(x'')$. Thus $(\widehat{f(\dot{x}')} \times \Phi(x')) \circ (\Phi(x'') \times \widehat{f(\dot{x}'')}) = \widehat{f(\dot{x}')} \times \widehat{f(\dot{x}'')}$. Hence $\widehat{f(\dot{x}')} \times \widehat{f(\dot{x}'')} \in \mathfrak{I}$. Finally, since $\mathfrak{I}$ is a separated a.u.c.s. it follows that $f(x') = f(x'')$. Consequently $f \in Y'$.

Other results will be proved for the particular cases of structures $\Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{I})$.

3. **The uniform convergence structure of Σ-uniform convergence.** Let X be a nonempty set, $\Sigma \subset F(X)$ and $(Y, \mathfrak{I})$ be a uniform convergence space. Let Γ_Σ be the u.c.s. of uniform convergence on the members of Σ, that is $\Gamma_\Sigma = \{\tilde{\Phi} \in F(Y^X \times Y^X) : \mathfrak{F} \in \Sigma \Rightarrow \tilde{\Phi}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{I}\}$. We have seen that Γ_Σ is a u.c.s. on Y^X.

In this section we present some properties of Γ_Σ.

Remarks: (1) It is easy to see that if Σ_1, Σ_2 are two families of filters on X such that $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ then $\Gamma_{\Sigma_1} \supset \Gamma_{\Sigma_2}$.

(2) If Σ_0 is the $\bigcap$-ideal in $F(X)$ generated by $\Sigma \subset F(X)$ then a simple computation shows that $\Gamma_{\Sigma_0} = \Gamma_\Sigma$.

These remarks show that Σ may be assumed to be an $\bigcap$-ideal of filters on X.

(3) Property (A) for the D-structure $\mathfrak{D}_\Sigma$ given in Theorem 3, is equivalent to the following condition on Σ:

(A′) for each $x \in X$, there exists $\mathfrak{F} \in \Sigma$ such that $\mathfrak{F} \subset \dot{x}$.

Indeed, if the D-structure $\mathfrak{D}_\Sigma$ has Property (A) then for every $x \in X$ there exists $\mathfrak{F} \in \Sigma$ such that $\Delta_{\mathfrak{F}} \subset \dot{x} \times \dot{x}$. Since $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \subset \Delta_{\mathfrak{F}}$ it follows that $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \subset \dot{x} \times \dot{x}$ and hence $\mathfrak{F} \subset x$. Conversely, if Σ has Property (A′) then for every $x \in X$, there exists $\mathfrak{F} \in \Sigma$ such that $\mathfrak{F} \subset \dot{x}$. Hence for every $F \in \mathfrak{F}$ we have $x \in F$. Therefore $(x, x) \in \Delta_F$. But this implies that $\Delta_{\mathfrak{F}} \subset \dot{x} \times \dot{x}$. Thus D_Σ possesses Property (A).

The results obtained in Theorems 2, 3 and 4 may be stated in the followings forms:

COROLLARY 4. *Let $\Sigma \subset F(X)$, $(Y, \mathfrak{I})$ be a uniform convergence space, Y' the subset of Y^X composed of the constant functions. Then the uniform subspace (Y', Σ_Σ) is uniformly isomorphic to $(Y, \mathfrak{I})$.*

COROLLARY 5. *(Y^X, Γ_Σ) is separated if and only if $(Y, \mathfrak{I})$ is separated and Σ has Property* (A′).

Proof. The proof follows from Theorem 4 if we show the necessity of Condition (A).

Indeed, suppose that $(Y^X, \mathfrak{I})$ is separated. In order to prove that Σ satisfies Condition (A′), let $M = \{x_0 \in X : \forall \mathfrak{F} \in \Sigma, \mathfrak{F} \not\subset \dot{x}_0\}$. Let $a, b \in Y$, $a \neq b$ and $f, g \in Y^X$ be defined by: $f(x) = a$ for each $x \in X$, and $g(x) = a$ for each $x \neq x_0$ and $g(x_0) = b$, where x_0 is a fixed point in M. Then, for every

$\mathfrak{F} \in \Sigma$ there exists $F \in \mathfrak{F}$ such that $x_0 \notin F$. Thus, for every $x \in F$ we have $f(x) = g(x)$ and hence $(f \times g)(F) \subset \Delta_Y$. Consequently $(\dot{f} \times \dot{g})(\mathfrak{F}) = (f \times g)(\mathfrak{F}) \supset \supset \overline{\Delta}_Y$ and since $\mathfrak{I}$ is a u.c.s. it follows that $(\dot{f} \times \dot{g})(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{I}$. Thus $\dot{f} \times \dot{g} \in \Gamma_\Sigma$. As (Y^X, Γ_Σ) is supposed to be separated we conclude that $f = g$. Hence the set M is empty and thus Σ satisfies (A′).

COROLLARY 6. *If* (Y_X, Γ_Σ) *is separated then* (Y', Γ_Σ) *is closed in* (Y^X, Γ_Σ).

Proof. Since (Y^X, Γ_Σ) is supposed to be separated, from Corollary 5 it follows that Σ has Property (A′) and $(Y, \mathfrak{I})$ is separated. Then, by Theorem 4, (Y', Γ_Σ) is closed in (Y^X, Γ_Σ).

Remarke. If $\mathfrak{I} = [U]$ is a principal u.c.s. on Y then shall define a principal u.c.s. on Y^X as follows: for $\mathfrak{F} \in \Sigma$ and $U \in \mathcal{U}$ let $W(\mathfrak{F}, U) = \{(f, g) \in Y^X \times \times Y^X : \exists F \in \mathfrak{F},\ (f \times g)(F) \subset U\}$. Then the family $\mathcal{W}_\Sigma = \{W(F, U) : \mathfrak{F} \in \in \Sigma,\ U \in \mathcal{U}\}$ is a base for a uniform structure $\mathcal{U}_\Sigma$ on Y^X, as is easily seen. In addition we have $\Gamma_\Sigma \supset [\mathcal{U}_\Sigma]$. But, in general $[U_\Sigma] \not\supset \Gamma_\Sigma$ i.e. Γ_Σ is not generated by U_Σ.

A sufficient condition in order to have $\Gamma_\Sigma = [\mathcal{U}_\Sigma]$ when $\mathfrak{I}$ is principal, is that Σ be an $\bigcap$-ideal of principal filters. But in this case, if $\Sigma_\sigma = \{\overline{S} : : S \in \sigma\}$, the u.c.s. Γ_{Σ_σ} is exactly the u.c.s. of uniform convergence on the collection σ.

Example. Let (X, τ) be a convergence space and $(Y, \mathfrak{I})$ be a uniform convergence space. Let $\Sigma_\tau = \{\mathfrak{F} \in F(X) : \mathfrak{F} \in \tau x$, for some $x \in X\}$. We denote $\Gamma_{\Sigma_\tau} = \Gamma_{ac}$ and call Γ_{ac} the *uniform convergence structure of almost continuous convergence*. Γ_{ac} is the u.c.s. of uniform convergence on the convergent filters. Let γ_{ac} be the convergence structure generated by Γ_{ac}.

If $\Phi \in F(Y^X)$, $f \in Y^X$ and $\Phi \in \gamma_{ac} f$ then we say that Φ converges to f *almost continuously*. This means that for every $x \in X$ and $\mathfrak{F} \in \tau x$ we have $(\Phi \times \dot{f})(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{I}$. If τ is a principal convergence structure and $\mathfrak{I}$ is a principal u.c.s., i.e. $\mathfrak{I} = [\mathcal{U}]$ where $\mathcal{U}$ is a uniform structure on Y, then $\Phi \in \gamma_{ac} f$ iff: $\forall x \in X,\ \ \forall U \in \mathcal{U},\ \exists H \in \Phi,\ \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x) : g \in H$ implies $(g \times f)(V) \subset U$, where $\mathcal{V}_\tau(x)$ is the neighbourhood filter of x.

In a subsequent paper we shall investigate some properties of the u.c.s. Γ_{ac} and its relation to the continuous convergence.

(Received May 23, 1979)

REFERENCES

1. Bălan, V. *Convergenţa în spaţii de funcţii*, Teză de doctorat, Universitatea din Craiova, 1977.
2. Bălan, V., *La Σ-convergence proximale*, Lucrările Colocviului Naţional de Geometrie şi Topologie, Timişoara, 1977, 63–69.
3. Bălan, V. and Hamburg, P., *Bemerkungen über den Uniformen Limitierung der steligen Konvergenz*. To be published.
4. Cook, C. H. and Fischer, H. R., *On equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann., **159** (1965), 94–104.
5. Cook, C. H. and Fischer, H. R., *Uniform convergence structures*, Math. Ann., **173** (1967), 290–306.
6. Fischer, H. R., *Limesräume*, Math. Ann., **137** (1959), 269–303.

STRUCTURI UNIFORME DE CONVERGENȚĂ PE SPAȚII DE FUNCȚII

(Rezumat)

Se dă o nouă metodă de a înzestra o mulțime de funcții cu o structură uniformă de convergență, dotînd domeniul de definiție al funcțiilor cu o „D — structură" (noțiune introdusă în [1] și [3]). Se studiază unele proprietăți ale structurilor construite și cîteva exemple de structuri obținute prin particularizarea D — structurii : convergența continuă, convergența uniform continuă, convergența uniformă pe o familie de filtre, convergența aproape continuă.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

OBSERVATII ASUPRA ECUATIEI DIFERENTIALE DE TIP FUCHS ÎN ALGEBRE BANACH (II)

M. FRENKEL

Această lucrare constituie partea a doua a lucrării cu acelaşi titlu publicată în [1].

§ 1. Fie $\mathfrak{B}$ o algebră Banach, $F(z)$ o funcţie analitică de variabilă complexă z cu valori $F(z) \in \mathfrak{B}$ şi ecuaţia diferenţială

$$w'(z) = F(z)w(z) \tag{1}$$

Reamintim următoarele proprietăţi cunoscute din teoria ecuaţiilor diferenţiale [2].

Dacă $F(z) = \frac{1}{z} P(z)$, unde $P(z)$ este olomorfă în vecinătatea punctului $z = 0$, zicem că $z = 0$ este un punct singular regular pentru ecuaţia (1).

În acest caz are loc teorema:

TEOREMĂ. *Dacă $a_0 = P(0)$ verifică una din următoarele două condiţii:*

1) *a_0 aparţine centrului algebrei $\mathfrak{B}$,*

2) *oricare două valori proprii ale spectrului $\sigma(a_0)$, nu diferă printr-un număr întreg,*

atunci ecuaţia diferenţială

$$zw'(z) = P(z)w(z) \tag{2}$$

admite soluţie de forma

$$w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+a_0}, \quad c_m \in \mathfrak{B}$$

în vecinătatea punctului singular $z = 0$.

Ecuaţia de tip Fuchs. Dacă

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - \alpha_k}, \quad \underset{k=\overline{1,n}}{a_k \in \mathfrak{B}}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$$

atunci şi numai atunci $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \infty$ sînt puncte singulare regulare şi ecuaţia diferenţială nu admite alte puncte singulare.

O asemenea ecuaţie diferenţială se numeşte de tip Fuchs.

Din teorema enunţată rezultă că natura soluţiilor în vecinătatea punctelor singulare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este legată de proprietăţi ale elementelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, iar în vecinătatea punctului ∞, de $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

§ 2. **Observaţii asupra unor ecuaţii de tip Fuchs.** În continuare se vor face observaţii asupra ecuaţiei de tip Fuchs în anumite cazuri particulare.

1. *Cazul matricial.* Fie $\mathcal{B} = \mathfrak{M}_m$ algebra matricilor cu m linii şi m coloane. Ecuaţia de tip Fuchs cu punctele singulare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \infty$ este

$$w'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-\alpha_k} w(z), \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & \ldots & a_{1m}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}^k & \ldots & a_{mm}^k \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n} A_k \neq 0 \tag{3}$$

Relativ la acest caz se pot face următoarele observaţii:

a) Dacă matricea A_k este scalară (adică aparţine centrului algebrei $\mathfrak{M}_m$ [5]) atunci în vecinătatea punctului α_k există soluţie de forma

$$w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\alpha_k)^{m+A_k}, \quad c_m \in \mathfrak{M}_m$$

Aceasta este o consecinţă imediată a condiţiei 1 din teorema enunţată în § 1.

b) Se consideră ecuaţiile

$$|A_k - \lambda e| = 0 \qquad k = \overline{1,n}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} A_k + \lambda e\right| = 0,$$

numite ecuaţiile indiciale corespunzătoare punctelor singulare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \infty$.

Se observă că suma rădăcinilor tuturor ecuaţiilor indiciale este nulă.

Într-adevăr, fie $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_m^k$ rădăcinile ecuaţiei indiciale $|A_k - \lambda e| = 0$, avem

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ii}^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \quad \text{pentru } k = \overline{1,n}$$

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ rădăcinile ecuaţiei indiciale $\left|\sum_{k=1}^{n} A_k + \lambda e\right| = 0$, avem

$$-\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ii}^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Rezultă deci proprietatea enunţată.

Această proprietate reprezintă o generalizare a unei proprietăţi a rădăcinilor ecuaţiilor determinante în cazul ecuaţiei clasice

$$w''(z) + a(z)w'(z) + b(z)w(z) = 0 \,[3], \qquad a(z) \in \mathbf{C}, \qquad b(z) \in \mathbf{C}$$

c) Pentru $n = 2$ se obţine ecuaţia matricială de tip Gauss; pentru $n = 2$, $m = 2$ şi particularizări convenabile se regăseşte ecuaţia clasică de ordinul al doilea a lui Gauss.

Pentru $n = 1$, $\alpha_1 = 0$ regăsim prin particularizări convenabile ecuaţia diferenţială de ordinul m a lui Euler, cu unele proprietăţi, care au fost puse în evidenţă într-o lucrare a prof. D. V. Ionescu [4].

2. *Cazul ecuaţiei diferenţiale clasice*

$$z^2 w''(z) + zp(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0, \qquad p(z) \in \mathbf{C}, \qquad q(z) \in \mathbf{C} \tag{4}$$

Teorema din § 1 este o generalizare a unei proprietăți [3] legate de ecuația (4), asupra reprezentării soluțiilor în vecinătatea punctului $z = 0$, în ipoteza că funcțiile $p(z)$ și $q(z)$ sînt olomorfe în $z = 0$.

Într-adevăr ecuația diferențială (4) este echivalentă cu ecuația

$$zw'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(z) & 1 - p(z) \end{pmatrix} w(z) \tag{5}$$

Aplicînd teorema din § 1, constatăm că

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(0) & 1-p(0) \end{pmatrix}$$

nu aparține centrului algebrei. În consecință, dacă valorile proprii λ_1 și λ_2 ale matricei a_0, sînt astfel încît

$$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbf{Z}$$

atunci ecuația matricială (5) admite o soluție de forma

$$w(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^{m+a_0}, \; c_m \in \mathfrak{M}_2$$

în vecinătatea punctului $z = 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că ecuația (4) admite două soluții liniar independente de forma $z^{\lambda}\varphi(z)$, $\varphi(z)$ fiind o funcție olomorfă în $z = 0$ și $\lambda \in \mathbf{C}$.

Valorile proprii λ_1, λ_2 sînt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -q(0) & 1 - p(0) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = 0$$

numită ecuație indicială sau ecuație determinantă.

S-a regăsit astfel proprietatea corespunzătoare din cazul ecuației (4).

3. $\mathfrak{B}$ *este o algebră de convoluție.* Fie spațiul $L_2(0,2\pi)$. Se definește produsul de convoluție $f_1 * f_2$ în felul următor

$$f_1 * f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t - s) f_2(s) ds$$

Algebra Banach astfel obținută este comutativă fără element unitate [2], notăm această algebră cu L_B.

Fie $F(z, t)$ o familie de funcții analitice, cu valori în planul complex $\mathbf{C}$, depinzînd de parametrul t, unde $t \in [0,2\pi]$ și pentru orice $z \in \mathbf{C}$ fixat $F(z,.) \in L_2(0,2\pi)$, adică $F(z,.) \in L_B$.

Putem considera ecuația diferențială în L_B.

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z,.) = F(z,.) * w(z,.)$$

unde conform definiţiei produsului de convoluţie avem:

$$F(z,.) * w(z,.)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z,\, t - s)\, w\,(z,s) ds$$

Dacă

$$F(z,.) = \frac{f_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{f_n}{z - \alpha_n}, \quad f_k \in L_B, \quad k = \overline{1,n}, \quad f_1 + f_2 + \ldots + f_n \neq 0$$

atunci ecuaţia

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z,.) = \left(\frac{f_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{f_n}{z - \alpha_n}\right) * w(z,.)$$

este de tip Fuchs în algebra de convoluţie L_B, cu punctele singulare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

Relativ la această ecuaţie se pot face următoarele observaţii:

a) Algebra de convoluţie L_B fiind comutativă, conform condiţiei 1 din teorema § 1, în vecinătatea fiecărui punct singular există o soluţie de forma

$$w(z,.) = (z - \alpha_k)^{f_k} * \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m (z - \alpha_k)^m, \quad \varphi_m \in L_B$$

b) Ecuaţia de tip Fuchs din L_B, cu punctele singulare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \infty$, admite soluţia

$$w(z,.) = (z - \alpha_1)^{f_1} * (z - \alpha_2)^{f_2} * \ldots * (z - \alpha_n)^{f_n}$$

funcţie olomorfă în planul complex, în care s-au efectuat tăieturi de-a lungul unor semidrepte pornind din $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Într-adevăr avem

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z,.) = \left(\frac{f_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{f}{z - \alpha_n}\right) * w(z,.)$$

şi funcţia $(z - \alpha_k)^{f_k} = e^{f_k\, h \circ g(z - \alpha_k)}$ este olomorfă în planul complex din care se scoate o semidreaptă (α_k, ∞)

c) Cazurile $n = 1$ şi $n = 2$

$n = 1$, obţinem ecuaţia lui Euler

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z,.) = \frac{f}{z} * w(z,.)$$

Am considerat aici $\alpha_1 = 0$. Această ecuaţie are soluţia $w(z,.) = z^f$

$n = 2$, obţinem ecuaţia de tip Gauss

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z,.) = \left(\frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{1 - z}\right) * w(z,.)$$

Am considerat $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ şi $f_1 + f_2 \neq 0$. Această ecuaţie are soluţia

$$w(z,.) = z^{f_1} * (1 - z)^{-f_2}$$

olomorfă în planul complex din care s-au scos semidreptele $(-\infty,0)$ şi $(1, +\infty)$.

(Intrat în redacţie la 10 decembrie 1979)

BIBLIOGRAFIE

1. Frenkel, M., *Observații asupra ecuației diferențiale de tip Fuchs în algebre Banach* (I). Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., XXVI, 4 (1981), 9–13.
2. Hille, E., *Lectures on ordinary differential equations*, Massachusetts — London, 1969, 124–125, 210–250.
3. Ionescu, D. V. *Ecuații diferențiale și integrale*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1972, 273–278.
4. Ionescu, D. V. *Le théorème de Fuchs*, Bull. Math. de la Soc. Roum. de Sciences, **T 35** (1933).
5. Kuroș, A. G., *Curs de algebră superioară*, Ed. tehnică, București, 1955.

REMARQUES SUR L'EQUATION DE TYPE FUCHS DANS UNE ALGÈBRE BANACH (II)

(Résumé)

Dans la note présente on considère l'équation du type Fuchs

$$w'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - \alpha_k} w(z), \quad a_k \in \mathfrak{B}$$

$\mathfrak{B}$, comme étant une algèbre Banach. On fait des remarques concernant la liaison entre le comportement des solutions dans un voisinage d'un point singulier et la nature des éléments $a_k \in \mathfrak{B}$. On considère comme exemples l'équation de type Fuchs dans l'algèbre des matrices et l équation du type Fuchs supposant que $\mathfrak{B}$ est une algèbre de convolution.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

FORMULE OPTIMALE DE CUBATURĂ CU ELEMENTE FIXE

DUMITRU ACU

Fie $W_{L_1}(M, D)$ mulţimea funcţiilor f definite pe domeniul $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, absolut continue pe acest domeniu şi satisfăcînd condiţiile $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$, $\|f''_{xy}\|_{L_1} \leqslant M$.

Să presupunem că avem cunoscută formula de cubatură

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} f(x_i, y_j) + r_{m,n}(f) \tag{1}$$

cu evaluarea pentru rest

$$r_{m,n} = \sup_{f \in W_{L_1}(M, D)} |r_{m,n}(f)|. \tag{2}$$

Acum ne punem problema găsirii unei formule de cubatură de tipul

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} f(x_i, y_j) + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} B_{ij} f(\alpha_i, \beta_j) + R_{m,n}(f), \tag{3}$$

astfel încît să fie optimală pe $W_{L_1}(M, D)$, adică să determinăm coeficienţii B_{ij} şi nodurile (α_i, β_j), $i = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{0, q-1}$ astfel ca

$$R_{m,n} = \sup_{f \in W_{L_1}(M, D)} |R_{m,n}(f)| \tag{4}$$

să fie minim.

Formula de cubatură astfel obţinută o numim *formula optimală de cubatură ataşată formulei* (1), pentru clasa de funcţii $W_{L_1}(M, D)$.

Pentru o formulă de cubatură dată (1) se pot obţine diverse variante ale problemei puse, după cum se caută o formulă optimală de cubatură ataşată formulei (1) printre formulele de forma (3) a căror coeficienţi B_{ij} şi noduri (α_i, β_i), $i = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{0, q-1}$ nu sînt arbitrare, ci sînt supuse unor legături dinainte date.

La formulele de cuadratură o astfel de problemă a fost studiată în lucrările [5], [1], [2].

Se ştie că orice funcţie f din $W_{L_1}(M, D)$ se poate scrie astfel

$$f(x, y) = \iint_D f''_{uv}(u, v)\ E(x-u, y-v)dudv,$$

unde

$$E(x-u, y-v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > u \text{ şi } y > v \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Folosind această reprezentare integrală a lui f, pentru restul formulei (3) obținem expresia:

$$R_{m,n}(f) = \iint_D K(u, v) f''_{uv}(u, v) du dv, \tag{5}$$

unde

$$K(u, v) = (1-u)(1-v) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} E(x_i - u, y_j - v) -$$

$$- \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1} B_{ij} E(\alpha_i - u, \beta_j - v). \tag{6}$$

Aplicînd inegalitatea lui Cauchy—Buniakowski, din (5) rezultă:

$$| R_{m,n}(f) | \leq M \left(\iint_D K^2(u, v)\, du dv \right)^{1/2}.$$

Se poate arăta că există o funcție $f_0 \in W_{L_2}(M, D)$ pentru care în inegalitatea precedentă să avem egalitatea, ceea ce ne permite să scriem

$$R_{m,n} = M \left(\iint_D K^2(u, v)\, du dv \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

În acest fel problema pusă s-a redus la determinarea coeficienților B_{ij} și nodurilor (α_i, β_j), $i = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{0, q-1}$ astfel încît integrala

$$I = \iint_D K^2(u, v)\, du dv \tag{8}$$

să fie minimă.

Să considerăm acum drept formulă (1), formula optimală de cubatură pe clasa $W_{L_2}(M, D)$ (vezi [3], [4]):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+2}{2m+1}, \frac{2j+2}{2n+1}\right) + r_{m,n}(f) \tag{9}$$

cu

$$r_{m,n} = \frac{\sqrt{4(m^2+n^2+m+n)+1}}{3(2m+1)(2n+1)} M. \tag{10}$$

În această lucrare ne propunem să construim formula optimală de cubatură atașată formulei (9), considerînd $p = m$, $q = n$ și nodurile (α_i, β_j), $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{0, n-1}$ fixate astfel:

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{2i+1}{2m+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \; x_{-1} = 0, \tag{11}$$

şi

$$\beta_j = \frac{y_{j-1} + y_j}{2} = \frac{2j+1}{2n+1},\ j = \overline{0,\ n-1},\ y_{-1} = 0. \tag{12}$$

Rămîn de determinat coeficienţii B_{ij}, $i = \overline{0,\ m-1}$, $j = \overline{0,\ n-1}$, astfel încît integrala (8) să fie minimă.

Sîntem conduşi astfel la sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial I}{\partial B_{kt}} = 0,\ k = \overline{0,\ m-1},\ t = \overline{0,\ n-1}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} B_{ij} \iint_D E(\alpha_i - u,\ \beta_j - v)\, E(\alpha_k - u,\ \beta_t - v)\,du\,dv =$$
$$= \iint_D (1-u)(1-v)\, E(\alpha_k - u,\ \beta_t - v)\,du\,dv - \tag{13}$$
$$- \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} \iint_D E(x_i - u,\ y_j - v) . E(\alpha_k - u,\ \beta_t - v)\,du\,dv, k = \overline{0,\ m-1},\ t = \overline{0,\ n-1},$$

unde α_i, $i = \overline{0,\ m-1}$ şi β_j, $j = \overline{0,\ n-1}$, sînt date de (11) şi respectiv (12) iar

$$C_{ij} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)},\ i = \overline{0,\ m-1},\ j = \overline{0,\ n-1},$$
$$x_i = \frac{2i+2}{2m+1},\ i = \overline{0,\ m-1}, \tag{14}$$
$$x_j = \frac{2j+1}{2m+1},\ j = \overline{0,\ n-1}.$$

Sistemul de ecuaţii (13), după calcularea integralelor ce intervin în ecuaţiile sale, se poate scrie astfel:

$$\sum_{i=0}^{k} (2i+1)\left[\sum_{j=0}^{t}(2j+1)B_{ij} + (2t+1)\sum_{j=t+1}^{n-1} B_{ij}\right] +$$
$$+ (2k+1)\sum_{i=k+1}^{m-1}\left[\sum_{j=0}^{t}(2j+1)B_{ij} + (2t+1)\sum_{j=t+1}^{n-1} B_{ij}\right] = \tag{15}$$
$$= (2k+1)(2t+1)\left(1 - \frac{2k+1}{2(2m+1)}\right)\left(1 - \frac{2t+1}{2(2n+1)}\right) -$$
$$- \frac{4}{(2m+1)(2n+1)}(-t^2 + 2nt + n)(-k^2 + 2mk + m),\ k = \overline{0,\ m-1},\ t = \overline{0,\ n-1}.$$

Punem

$$X_{it} = \sum_{j=0}^{t} (2j + 1)B_{ij} + (2t + 1) \sum_{j=t+1}^{n-1} B_{ij}, \; i = \overline{0, m - 1}, \; t = \overline{0, n - 1} \tag{16}$$

şi sistemul (15) ia forma:

$$\sum_{i=0}^{k} (2i + 1)X_{it} + (2k + 1) \sum_{i=k+1}^{m-1} X_{it} =$$

$$= (2k + 1)(2t + 1)\left(1 - \frac{2k + 1}{2(2m + 1)}\right)\left(1 - \frac{2t + 1}{2(2n + 1)}\right) - \tag{17}$$

$$- \frac{4}{(2m + 1)(2n + 1)} (-k^2 + 2mk + m)(-t^2 + 2nt + n), \; k = \overline{0, m - 1}, \; t = \overline{0, n - 1}.$$

Rezolvînd sistemul (16), găsim următoarele soluţii:

$$X_{0t} = \frac{4n(2t + 1) - 4t^2 + 3}{4(2m + 1)(2n + 1)},$$

$$X_{1t} = X_{2t} = \ldots = X_{m-2t} = \frac{1}{(2m + 1)(2n + 1)}, \tag{18}$$

$$X_{m-1t} = \frac{3}{2(2m + 1)(2n + 1)}, \; t = \overline{0, n - 1}.$$

Acum, ţinînd seama de (17), relaţiile (18) conduc la m sisteme de n ecuaţii cu necunoscutele B_{ij}, $i = \overline{0, m - 1}$, $j = \overline{0, n - 1}$.

Rezolvînd acest sistem, obţinem:

$$B_{00} = \frac{5}{4(2m + 1)(2n + 1)},$$

$$B_{0t} = \frac{1}{(2m + 1)(2n + 1)}, \; t = \overline{1, n - 2},$$

$$B_{k0} = \frac{1}{(2m + 1)(2n + 1)}, \; k = \overline{1, m - 2}, \tag{19}$$

$$B_{0n-1} = B_{m-10} = \frac{3}{2(2m + 1)(2n + 1)},$$

$$B_{kt} = 0, \; k = \overline{1, m - 1}, \; t = \overline{1, n - 1}.$$

Pentru valorile date de (19) din (7) găsim:

$$R_{m,n} = \frac{\sqrt{4(m^2 + n^2 + m + n) + 1}}{(2m + 1)(2n + 1)} a_{m,n} M, \tag{20}$$

unde

$$a_{m,n} = \sqrt{1 - \frac{3}{2} \, \frac{4m^3 + 4n^3 + 6m^2 + 6n^2 + 12mn + 50m + 50n + 39}{(2m + 1)(2n + 1)(4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 1)}}.$$

În acest mod am demonstrat valabilitatea următorului enunț:

TEOREMA. *Formula optimală de cubatură atașată formulei* (9) *este*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+2}{2m+1}, \frac{2j+2}{2n+1}\right) +$$

$$+ \frac{5}{4(2m+1)(2n+1)} f\left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2n+1}\right) + \tag{21}$$

$$+ \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=1}^{m-2} f\left(\frac{2k+1}{2m+1}, \frac{1}{2n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{j=1}^{n-2} f\left(\frac{1}{2m+1}, \frac{2j+1}{2n+1}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2(2m+1)(2n+1)} \left[f\left(\frac{2m-1}{2m+1}, \frac{1}{2n+1}\right) + f\left(\frac{1}{2m+1}, \frac{2n-1}{2n+1}\right)\right] + R_{m,n}(f).$$

cu restul dat de (20).

(Intrat în redacție la 18 mai 1980)

BIBLIOGRAFIE

1. Acu, D., *Noi formule de cuadratură cu elemente fixe*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., XXVI, 2(1981).
2. Acu, D., *Optimizarea formulei trapezelor*, Bul. șt. Inst. înv. sup., Sibiu, ser. Tehn. Mat., 1979, T2.
3. Coman, Gh., *Asupra unor formule de cubatură cu noduri fixe*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.—Phys., XIII. 2 (1968),51—54.
4. Levin, M., *Ekstremalnaia zadacia dlia adnovo klassa funkția*, Izv. AN. ESSR, ser. Fiz.-mat. i teh. nauk, 2 (1963), 141—145.
5. Levin, M., *O nailucișih kvadraturnî formulah s fiksirovannîmi uzlami*, Izv. AN. ESSR, ser. Fiz. -mat. i teh. nauk, 2 (1964), 110—114.
6. Nikolskii, S. M., *Kvadraturnîe formulî*, Izd. Nauka, Moskva, 1974.

FORMULES OPTIMALES DE CUBATURE A ÉLÉMENTS FIXES

(Résumé)

On pose le problème: étant donné la formule de cubature (1) avec l'évaluation d'erreur (2), on détermine la formule de cubature (3), c'est-à-dire les coefficients B_{ij}, $i = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{0, q-1}$ et les noeuds (α_i, β_j), $i = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{0, q-1}$, ainsi que le reste $R_{m,n}$ soit minimum pour la classe de fonctions $W_{L_2}(M, D)$. La formule de cubature ainsi obtenue est dite *la formule optimale du cubature attachée à la formule* (*1*).

Dans le présent travail, on obtient la formule optimale de cubature attachée à la formule optimale de cubature (9), pour la classe $W_{L_2}(M, D)$, dans la situation $p = m$, $q = n$ et les noeuds (α_i, β_j), $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{0, n-1}$, donnés par (11) et (12). Cette formule est donnée par (21) avec le reste (20).

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

FIXED POINTS THEOREMS FOR MULTIFUNCTIONS

VALERIU POPA

The following theorem was prowed by Jaggi in [1]:

THEOREM 1. *Let f be a continuous self-map defined on a complete metric space (X, d). Further, let f satisfy the following condition:*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{a \cdot d(x, f(x)) \cdot d(y, f(y))}{d(x, y)} + b \cdot d(x, y) \tag{1}$$

for all $x, y \in X$, $x \neq y$ and *$a, b \in [0, 1)$ with $a + b < 1$. Then f has a unique fixed point in X.*

The following theorem is a generalization of theorem 1:

THEOREM 2. *Let f be a continuous self-map defined on a complet metric space (X, d). Further, let f satisfy the following condition:*

$$d(fx, fy) \leqslant k \cdot \max\left[\frac{d(x, fx) \cdot d(y, fy)}{d(x, y)}; \frac{d(x, fy) \cdot d(y, fx)}{d(x, y)}; d(x, y)\right] \tag{2}$$

for all $x, y \in X$, $x \neq y$ and $0 < k < 1$. Then f has a unique fixed point.

Proof. Obviously the condition (2) of theorem 2 implies

$$(2') \quad d(f^2x, fx) \leqslant k \cdot d(x, fx), \quad \forall x \in X.$$

Hence theorem 2 is an immediate consequence of theorem 1 in Kasahara [2].

COROLLARY 1. *Let f be a continuous self-map defined on a complete metric space (X, d). Further, let f satisfy the following condition:*

$$d(fx, fy) \leqslant a \cdot \frac{d(x, fx) \cdot f(y, fy)}{d(x, y)} + b\, \frac{d(y, fx) \cdot d(x, fy)}{d(x, y)} + c \cdot d(x, y) \tag{3}$$

for all $x, y \in X$, $x \neq y$ and $a, b, c \in [0, 1)$ with $a + b + c < 1$. Then f has a unique fixed point in X.

Remark 1. *If $b = 0$ then theorem 1 on obtained.*

There has been written a lot about the conditions in which a multifunction admits fixed points. Some recent results are given by Smithson [3], Rus [4], Avram [5], B. K. Ray [6], [7], Iseki [8], Kaulgud şi Pai [9], Toru [10], Czervik [11], Achari [12], Popa [13] and others.

The weak-continuous multifunctions are defined by us in [14] as a generalization of the univocal weak-continuous applications, defined by Levine in [15]. Smithson also defines the weak-continuous multifunctions in [16]. Some of the applications of the weak-continuous multifunctions are given by Joseph in [17].

DEFINITION 1. Let X and Y be two topological spaces.

(a) The multifunction $F : X \to Y$ is upper weakly continuous (u.w.c.) in the point $x_0 \in X$ is for every open set $G \subset Y$ with $F(x_0) \subset G$, there exists an open set $V \subset X$ containing x_0, so that $F(x) \subset \bar{G}$, $\forall x \in V$. ($\bar{G}$ stands for the closure of G).

(b) The multifunction $F : X \to Y$ is lower weakly continuous (l.w.c.) in the point $x_0 \in X$ if for every open set $G \subset Y$ with $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$, there exists an open set $V \subset X$ containing x_0 and $F(x) \cap \bar{G} \neq \emptyset$, $\forall x \in V$.

(c) The multifunction $F : X \to Y$ is weakly continuous (w.c.) in the point $x_0 \in X$ if it is upper and lower weakly continuous in this point.

(d) The multifunction $F : X \to Y$ is weakly continuous (u.w.c.; l.w.c.) if it has this property in any point $x \in X$.

In [14] we proved that if Y is a T_3 space, then l.w.c. coincides with l.s.c. and if F is also punctually finite, then u.w.c. coincides with u.s.c.

As the paracompact sets can be defined in two ways [18] we shall define the paracompact sets in this way:

DEFINITION 2. The set M from the topological space X is called strictly paracompact if every covering with open sets from X of M is refined by a covering with open sets from X, locally finite in X. ([18]).

It is known from [18] that the notion of strictly paracompact set and that of the paracompact set defined with the help of the relative topology do not coincide.

THEOREM 3. *For the multifunction $F : X \to Y$, with Y T_3 space and for which $F(x_0)$ is a strictly paracompact set, the concept of multifunction u.w.c. in x_0 coincides with the concept of multifunction u.sc.. in x_0.*

Proof. Suppose F u.w.c. in x_0. Let $G \subset Y$ be some open set so that $F(x_0) \subset G$. Space Y being T_3, for any $y_i \in F(x_0)$ there is an open set D_i so that $y_i \in D_i \subset \subset \bar{D}_i \subset G$. So

$$F(x_0) \subset \bigcup_{y_i \in F(x_0)} D_i \subset \bigcup_{y_i \in F(x_0)} \bar{D}_i \subset G.$$

$F(x_0)$ being a strictly paracompact set, there is a family $\{A_j ; j \in J\}$ of open sets so that $A_j \subset D_i$ for an $i \in I$ and $\{A_j ; j \in J\}$ is a local finite covering of $F(x_0)$. We'll have

$$F(x_0) \subset \bigcup_{j \in J} A_j \subset \bigcup_{i \in I} D_i \subset \bigcup_{i \in I} \bar{D}_i \subset G$$

to

$$F(x_0) \subset \bigcup_{j \in J} A_j \subset \bigcup_{j \in J} \bar{A}_j \subset \bigcup_{i \in I} \bar{D}_i \subset G.$$

Let $A = \bigcup_{j \in J} A_j$. The family $\{A_j ; j \in J\}$ being locally finite, then $\bar{A} = \bigcup_{j \in J} \bar{A}_j$. so $F(x_0) \subset A \subset \bar{A} \subset G$. The multifunction F being u.w.c. in x_0 and $F(x_0) \subset A$, there is an open set $V \subset X$ so that $x_0 \in V$ and $F(x) \subset \bar{A}$, $\forall x \in V$, and thus $F(x) \subset G$, $\forall x \in V$, this showing that F is u.s.c. in x_0.

Reciprocally, if the multifunction is u.s.c. in x_0 it is also u.w.c. in x_0.

DEFINITION 3. The multifunction $F : X \to Y$ has a closed graph if for each $(x, y) \overline{\in} G(F)$ there exist the open sets $U \subset X$ and $V \subset Y$ containing x and y, respectively, so that $(U \times V) \cap G(F) = \emptyset$.

An equivalent definition is given by the following lemma:

LEMMA 1. *The multifunction $F : X \to Y$ has a closed graph if and only if for each $x \in X$ and $y \in Y$ so that $(x, y) \overline{\in} G(F)$, there are two open sets $U \subset X$ and $V \subset Y$, containing x any y, respectively, so that $F(U) \cap V = \emptyset$.*

The proof of the equivalence is immediate.

THEOREM 4. *If the multifunction $F: X \to Y$, with Y a T_3 space, is u.s.c. and $F(x)$ is a closed subset of X, $\forall x \in X$, then F has the closed graph.*

Proof. Let $(x, y) \overline{\in} G(F)$, then $y \overline{\in} F(x) \cdot F(x)$ being closed and Y being T_3, there are the open sets U, $V \subset Y$ with $y \in U$, $F(x) \subset V$ and $U \cap V = \emptyset$. F being u.s.c. results that there is an open set $G \subset X$ with $x \in G$ so that $F(G) \subset V$, then $F(G) \cap U = \emptyset$ and from lemma 1 results that F has the closed graph.

We denote by $C_B(X)$ the set of all nonempty closed bounded subsets of (X, d) and by D the Hausdorff—Pompeiu metric on $C_B(X)$:

$$D(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B) ; \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

where A, $B \in C_B(X)$ and

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Let A, $B \in C_B(X)$ and $k > 1$. In what follows, the following well-known fact will be used: For each $a \in A$, there is a, $b \in B$ such that

$$d(a, b) \leqslant k \cdot D(A, B).$$

Let $T : X \to X$ a multifunction. Denote $F(T) = \{x \in X ; x \in T(x)\}$.

THEOREM 5. *Let (X, d) be a nonempty complete metric space and $F: (X, d) \to C_B(X)$ a multifunction. If*

(1) $F : (X, d) \to (X, d)$ *is u.w.c.,*

(2) $D(Fx, Fy) \leqslant k \cdot \max \left[\dfrac{d(x, Fx) \cdot d(y, Fy)}{d(x, y)} ; \dfrac{d(y, Fx) \cdot d(x, Fy)}{d(x, y)} ; d(x, y)\right]$ *for all* $x, y \in X$, $x \neq y$, and $0 < k < 1$, *then F has fixed points.*

Proof. Choose a real number q with

$$1 < q < \frac{1}{k}.$$

Let $x_0 \in X$ and $x_1 \in F(x_0)$. Then there is an $x_2 \in F(x_1)$ so that $d(x_1, x_2) \leqslant q \cdot D(F(x_0), F(x_1))$. We have

$$d(x_1, x_2)] \leqslant q \cdot D(F(x_0), F(x_1)) \leqslant q \cdot k \cdot \max \left[\frac{d(x_0, F(x_0)) \cdot d(x_1, F(x_1))}{d(x_0, x_1)} ; \frac{d(x_0, F(x_1)) \cdot d(x_1, F(x_0))}{d(x_0, x_1)} ; d(x_0, x_1)\right] \leqslant q \cdot k \cdot \max \left[\frac{d(x_0, x_1) \cdot d(x_1, x_2))}{d(x_0, x_1)} ; \frac{d(x^0, x_2) \cdot d(x_1, x_1)}{d(x^0, x_1)} ; d(x_0, x_1)\right] = (qk) \cdot d(x_0, x_1).$$

Suppose $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ could be chosen so that

$$x_n \in F(x_{n-1}) \text{ and } d(x_n, x_{n+1}) \leqslant q \cdot D(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})).$$

Repeating the above argument we obtain

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant (qk)^n d(x_0, x_1).$$

Then by routine calculation can show that x_n is Cauchy sequence and since (X, d) is complete, we have $x_n \to x$.

The space (X, d) being metric, it is paracompact and as $F(x)$ is a closed set, $\forall x \in X$, $F(x)$ is a paracompact set in X and according to theorem 2.6 from [18], $F(x)$ is striclly paracompact. Then, according to theorem 3, F is s.c.s., according to lemma 1, F has a closed graph and then from $x_n \in F(x_{n-1})$ results $x \in F(x)$, so F has fixed points.

Remark 2. During our proof, $x_n \neq x_{n-1}$ was suposed, because if for a certain n, $x_n = x_{n-1}$ results that x_{n-1} is a fixed point.

COROLLARY 2. *Let (X, d) be a nonempty complete metric space and $F : :(X, d) \to C_B(X)$ a multifunction. If*

(1) $F : (X, d) \to (X, d)$ *is u.w.c.,*

(2) $D(Fx, Fy) \leqslant a \cdot \dfrac{d(x, Fx) \cdot d(y, Fy)}{d(x, y)} + \dfrac{d(x, Fy) \cdot d(y, Fx)}{d(y, x)} \cdot b + c \cdot d(x, y)$

for all $x, y \in X$, $x \neq y$ and $a, b, c \in [0, 1)$, with $a + b + c < 1$, then F has fixed points.

Let X be a nonempty set, e and d two metrics on X and $f : X \to X$ a single-valued mapping. For such mappings M a i a [19] proved a fixed point theorem which was generalized in many directions by I s é k i [20], R u s [21], [22], S. P. S i n g h [23], K. L. S i n g h [24] and others.

The following theorem was proved by K. L. S i n g h in [24]:

THEOREM 6. *Let X be a metric space with two metrics e and d. If X satisfies the following conditions:*

(1) $e(x, y) \leqslant d(x, y)$; $\forall x, y$ *in* X,

(2) *X is complete with respect to e,*

(3) *two mappings $f, g : X \to X$ are continuous with respect to the metric e and*

(A) $d(fx, gy) \leqslant k \cdot \max[d(x, y); d(x, fx); d(y, gy); 1/2 \cdot [d(x, gy) + d(y, fx)]]$ *for every x, y in X, where $0 < k < 1$, then f and g have a unique common fixed point.*

We'll give a generalization of theorem 5, weakening at the same time the conditions given in sentence 3 of theorem 5.

LEMMA 2. *Let $F, G : (X, d) \to C_L(X)$ be two multifunctions. If*

(A) $D(Fx, Gy) \leqslant k \cdot \max[d(x, y); d(x, Fx); d(y, Gy); 1/2 \cdot (d(x, Gy) + d(y, Fx))]$, *holds for all $x, y \in X$, $0 < k < 1$ and $T(F) \neq \emptyset$, then $T(G) \neq \emptyset$* and $T(F) = T(G)$.

Proof. Let $u \in T(F)$, then by (A) $d(u, Gu) \leqslant D(Fu, Gu) \leqslant k \cdot \max[d(u, u); d(u, Fu); d(u, Gu); 1/2 \cdot (d(u, Gu) + d(u, Fu))] \leqslant k \cdot d(u, Gu)$, which implies $d(u, Gu) = 0$. Since Gu is closed, this shows that $u \in Gu$, which implies $T(F) \subset T(G)$. Analogous $T(G) \subset T(F)$.

THEOREM 7. *Let X be a metric space with two metrics e and d. If X satisfies the following conditions:*

(1) *$e(x, y) \leqslant d(x, y)$ for all x, y in X,*

(2) *X is complete with respect to e,*

(3) *two multifunctions $F, G : X \to X$ are punctually closed with respect to e and d and punctually bounded with respect to d,*

(4) *F or G is u.w.c. with respect to e,*

(5) *$D(Fx, Gy) \leqslant k \cdot \max[d(x, y); d(x, Fx); d(y, Gy); 1/2 \cdot (d(x, Gy) + d(y, Fx))]$, holds for all $x, y \in X$, $0 < k < 1$, then F and G have common fixed points and $T(F) = T(G)$.*

Proof. Choose a real number q with

$$1 < q < \frac{1}{k}.$$

Let $x_0 \in X$ and $x_1 \in F(x_0)$. Then there is an $x_2 \in G(x_1)$ so that

$$x_2 \in G(x_1) \text{ and } d(x_1, x_2) \leqslant q \cdot D(Fx_0, Gx_1).$$

We have

$d(x_1, x_2) \leqslant q \cdot D(Fx_0, Gx_1) \leqslant q \cdot k \cdot \max[d(x_0, x_1); d(x_0, Fx_0); d(x_1, Gx_1); 1/2 \cdot [d(x_0, Gx_1) + d(x_1, Fx_0)]] \leqslant q \cdot k \cdot \max[d(x_0, x_1); d(x_1, x_2); 1/2 \cdot d(x_0, x_2)] \leqslant q \cdot k \cdot \max[d(x_0, x_1); 1/2 \cdot (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2))] = (qk) \cdot d(x_0, x_1)$.

Suppose $x_3, \ldots, x_{2n}, \ldots$ could be chosen so that

$$x_{2n-1} \in F(x_{2n-2}); \ x_{2n} \in G(x_{2n-1}) \text{ and}$$

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q \cdot D(Fx_{2n-2}, x_{2n-1}); \ d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant q \cdot D(Fx_{2n-2}, Gx_{2n-3})$$

Repeating the above argument we obtain

$$d(x_n, x_{n-1}) \leqslant (q \cdot k)^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Therefore, by $e \leqslant d$

$$e(x_n, x_{n-1}) \leqslant (q \cdot k)^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Then by routine calculation we can show that x_n is Cauchy sequence and since X is complet with respect to e, $x_n \to x$. As F is u.w.c. with respect to e there follows as in theorem 6 that F and G are commun fixed points and by lemma 2, $T(F) = T(G)$.

THEOREM 8. *Let X be ametric space with two metrics e and d. If X satisfies the following conditions:*

(1) *e, d and X satisfy conditions (1) and (2) of theorem 7,*

(2) *The sequence of multifunctions $\{F_n\}_{n \in N}$ is formed by punctually closed multifunctions with respect to both metrics and punctually bounded with respect to d,*

(3) *F_1 is u.w.c. with respect to e,*

(4) *$D(F_1x, F_ny) \leqslant k \cdot \max[d(x, y); d(x, F_1x); d(y, F_ny); 1/2(d(x, F_ny) + d(y, F_1x))]$ for all $x, y \in X$, $0 < k < 1$ and $n \geqslant 2$, then $\{T_n\}_{n \in N}$ has common fixed points and $T(F_1) = T(F_n)$*

It follows by theorem 7 and lemma 2.

(Received October 20, 1980)

REFERENCES

1. J a g g i, D. S., *Some unique fixed points theorems*, Indian J. Pure App. Math., **8**, 2(1977), 223—230.
2. K a s a h a r a, S., *On some generalizations of the Banach contraction theorem*, Punl. RIMS, **12** (1976), 427—437.
3. S m i t h s o n, R. E., *Multifunctions*, Nieuw archief voor Wiskunde, (3), XX, (1972), 31—45.
4. R u s, I. A., *Fixed points theorem for multivalued mappings in complete metric space*, Mathematica Japonicae, **25** (1975), 21—24.
5. A v r a m, M., *Points fixes communs pour les applications multivoques dans les espaces métriques*, Mathematica, **17** (40) (1975), 76—79.
6. R a y, B. K., *A note on multivalued contraction mappings*, Atti Acad. Lincei, Rend, Cl. Fiz. Mat. Natur. (VIII), **LVI**, 4 (1975), 500—503.
7. R a y, B. K., *On Ciric's fixed point theorem*, Fund. Math., **XCIV** (1974), 221—229.
8. I s é k i, K., *Multivalued contraction mappings, in complete metric space* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **55** (1975), 15—19.
9. K a u l g u d, N. N., P a i V. D., *Fixed point theorem for set valued mappings*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **3** (1973), 49—66.
10. T o r u, K., *A common fixed point theorem for multivalued mappings*, Mathematika Japonicae, **33** (1977), 113—116.
11. C z e r w i k, S., *Multivalued contraction mappings in metric space*, Aequationes Mathematicae, **16** (1977). 297—302.
12. A c h a r i, J., *Generalized multivalue contractions and fixed points*, Rev. Roum. Math. pures et appl., **XXIV**, 2, (1979), 179—182.
13. P o p a, V., *A common fixed point theorem for a sequence of multifunctions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **XXIV**, 2 (1979), 39—41.
14. P o p a, V., *Weakly continuous multifunctions*, Boll. U.M.I., (5), **15—A**, (1978), 379—388.
15. L e v i n e, N., *A decomposition of continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), 44—46.
16. S m i t h s o n, R. E., *Almost and weak continuity for multifunctions*, (Preprint).
17. J o s e p h, J. E., *Regularity, normality and multifunctions*, Proc. Amer. Math. Soc., **70**, 2(1978), 203—206.
18. K e s s l e r, P., *Mulţimi paracompacte*, Anal. şt. Mat. Fiz. Chim. Electrotehn., Univ. Craiova, **I** (1970), 39—44.
19. M a i a, D. G., *Un osservazione sulle contrazione metriche*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **40** (1968), 139—143.
20. I s é k i, K. *A common fixed point theqrem*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **55** (1975), 13—14.
21. R u s, I. A., *On a fixed point theorem of Maia*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **XXII**, 1(1977), 40—42.
22. R u s, I. A., *On a fixed point theorem in a set with two metrics*, L'Analyse numerique et la theorie de l'approximation, **6**, 2, (1977), 197—202.
23. S i n g h, S. P., *On a fixed point theorem in metric space*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **43** (1970), 229—232.
24. S i n g h, K. L., *A note on common fixed points*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R., **22** (70), 1 (1978), 95—98.

TEOREME DE PUNCT FIX PENTRU MULTIFUNCŢII

(R e z u m a t)

Folosind noţiunea de multifuncţie superior slab contiuă din [14] şi [16] se demonstrează următoarele teoreme de punct fix:

T e o r e m a 5. *Fie multifuncţia* $F:(X, d) \to C(X)$, *unde* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Dacă:* (1) $F:(X, d) \to (X, d)$ *este superior slab continuă* (*s.s.c.s.*); (2) F *satisface condiţia* 2 *din teorema* 5, *pentru* $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ şi $0 < k < 1$, *atunci* F *are puncte fixe.*

Teorema 7. *Fie X un spațiu cu două metrici e și d. Dacă sînt satisfăcute condițiile ;* (1) $e(x, y) \leqslant d(x, y)$, $\forall x, y \in X$; (2) *(X, e) este complet ;* (3) *Două multifuncții $F, G : X \to X$ sînt punctual închise în raport cu ambele metrici și mărginite în raport cu d ;* (4) *Una dintre cele două multifuncții este s.s.c.s. în raport cu e ;* (5) *Este satisfăcută condiția* (A) *din teorema 7 pentru $\forall x,y \in X$ și $0 < k < 1$, atunci F și G au puncte fixe și $T(F) = T(G)$, unde $T(F) = \{x \in X ;\ x \in F(X)\}$.*

Teorema 8 generalizează teorema 7 pentru un șir de multifuncții. Rezultatele obținute în această lucrare generalizează rezultate cunoscute din [1], [14], [21], [22] și [24].

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

REZOLVAREA NUMERICĂ A UNOR PROBLEME LA LIMITĂ CU AJUTORUL METODEI DE ALTERNATIVĂ

DAMIAN TRIF

Metoda de alternativă este un instrument eficient pentru studierea existenţei soluţiilor diferitelor probleme diferenţiale neliniare. Mai mult, pe baza acestei metode se pot elabora algoritmi pentru evaluarea soluţiilor acestor probleme şi a erorii cu care o anumită funcţie aproximează soluţia exactă. Asemenea algoritmi sînt descrişi în lucrările lui J. Mawhin [2], C. Banfi [3], D. A. Sanchez [4], L. Cesari, T. T. Bowman [5] precum şi în bibliografia citată în acestea.

În prezenta lucrare vom studia un algoritm pentru determinarea soluţiilor periodice ale ecuaţiilor diferenţiale de forma $x'' = q(x, t)$. Vom elabora un procedeu constructiv care permite stabilirea existenţei soluţiilor exacte, aproximarea lor numerică şi delimitarea erorii. Algoritmul se remarcă printr-o precizie bună pentru un efort de calcul redus, el putînd fi programat şi pe calculatoare mici.

1. Fie S spaţiul Banach al funcţiilor $x : R \to R$, continue şi periodice cu perioada 2π, înzestrat cu norma $||x|| = \sup \{|x(t)|, t \in [0, 2\pi]\}$. Fiecărei funcţii $x \in S$ i se ataşează seria sa Fourier

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos (st) + b_s \sin (st)),$$

unde

$$a_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \cos (st)dt, \ b = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \sin (st)dt, \ s = 1, 2, \dots$$

Fie $m \in Z_+$. Definim operatorii $P_m : S \to S$ şi $H_m : S \to S$ prin $P_m x(t) = = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos (st) + b_s \sin (st))$, $H_m x(t) = - \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{s^2} (a_s \cos (st) + b_s \sin (st))$.

Prin calcul direct se demonstrează imediat următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Pentru orice $m \in Z_+$, H_m este liniar şi mărginit,* $H_m x(t) =$

$$= \int_0^{2\pi} \left[- \frac{(t-\tau)^2}{4\pi} + \frac{|t-\tau|}{2} - \frac{\pi}{6} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\cos s(t-\tau)}{s^2\pi} \right] x(\tau)d\tau,$$

$$||H_m|| = \int_0^{2\pi} \left| - \frac{\tau^2}{4\pi} + \frac{\tau}{2} - \frac{\pi}{6} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\cos (s\tau)}{s^2\pi} \right| d\tau \ \text{şi} \ \lim_{m\to\infty} ||H_m|| = 0.$$

Vom nota $S_m^0 = \{x \in S \,|\, P_m x = x\}$, $S_m^1 = \{x \in S \,|\, P_m x = 0\}$.

2. Vom considera ecuaţia diferenţială $x'' = q(x, t)$, unde $q: [-A, A] \times R \to R$ este continuă, periodică cu perioada 2π faţă de t, derivabilă faţă de x, derivata lipschitziană. Fie

$$K = \max\{|q(x, t)|, t \in [0, 2\pi], |x| \leqslant A\}, M = \max\left\{\left|\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}\right|, t \in [0, 2\pi], |x| \leqslant A\right\}$$

şi $M_1 > 0$ încît $\left|\frac{\partial q}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial q}{\partial x}(x_2, t)\right| \leqslant M_1|x_1 - x_2|$ pentru orice $t \in [0, 2\pi]$ şi orice $x_1, x_2 \in [-A, A]$. Vom căuta soluţiile periodice cu perioada 2π a acestei ecuaţii.

3. Fie $m \in Z_+$ suficient de mare, $x_0 \in S_m^0$ încît $||x_0|| < A$ şi $S(x_0) = \{x \in S | P_m x = x_0, ||(I - P_m)x|| \leqslant a\}$ unde $a < A - ||x_0||$. Fie operatorul $T: S(x_0) \to S$ definit prin $Tx(t) = x_0(t) + H_m q(x(t), t)$. Evident $P_m Tx = x_0$ şi $||(I - P_m)Tx|| = ||H_m q(x, \cdot)|| \leqslant ||H_m|| \cdot K \leqslant a/2$ dacă m este suficient de mare, deci $T: S(x_0) \to S(x_0)$. Dacă $x_1, x_2 \in S(x_0)$, atunci $||Tx_1 - Tx_2|| = ||H_m(q(x_1, \cdot) - q(x_2, \cdot))|| \leqslant ||H_m|| |M| |x_1 - x_2||$. Pentru m suficient de mare, $\theta = ||H_m|| \cdot M < 1$ deci T este o contracţie.

Pe baza teoremei de punct fix a lui Banach, există şi este unic $y \in S(x_0)$ încît $y = Ty$. El se va numi *funcţia asociată* lui x_0 şi se poate obţine prin metoda aproximaţiilor succesive $y^0 = x_0$, $y^{k+1} = x_0 + H_m q(y^k, \cdot)$, $k = 0, 1, \ldots$, avînd delimitarea $||y^k - y|| \leqslant \frac{\theta^k}{1 - \theta} ||y^1 - y^0||$.

4. În realizarea numerică a calculului funcţiei asociate vom înlocui procedeul exact de mai sus cu procedeul trunchiat $\eta_0 = x_0$, $\eta^{k+1} = \tilde{T}\eta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ unde $\tilde{T}\eta^k = x_0 - \int_0^{2\pi} \left\{\sum_{s=m+1}^{N} \frac{\cos s(t - \tau)}{s^2 \pi}\right\} q(\eta^k(\tau), \tau) d\tau$ cu $N > m$. Se demonstrează imediat prin inducţie completă că pentru N suficient de mare şirul η^k este fundamental şi $\eta^k \in S(x_0)$. Oprind iteraţiile în momentul cînd $||\eta^{k+1} - \eta^k|| \leqslant \delta$ avem $||T\eta^k - \tilde{T}\eta^k|| = ||H_N q(\eta^k, \cdot)|| = ||H_N(q(\eta^k, \cdot) - \ddot{\eta}^k)|| \leqslant \leqslant ||H_N|| \cdot ||q(\eta^k, \cdot) - \ddot{\eta}^k|| = \varepsilon$ de unde $||y - \eta^{k+1}|| \leqslant ||Ty - T\eta^k|| + + ||T\eta^k - \tilde{T}\eta^k|| \leqslant \theta||y - \eta^k|| + \varepsilon \leqslant \theta||y - \eta^{k+1}|| + \theta||\eta^{k+1} - \eta^k|| + \varepsilon$ şi atunci $||y - \eta^{k+1}|| \leqslant \frac{\varepsilon + \theta\delta}{\varepsilon + \theta} = \Delta$.

În continuare se va lucra cu η^{k+1} notat $\bar{y}$ în locul lui y.

5. Se demonstrează ca în [2] că dacă $x_0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos(st) + b_s \sin(st))$ şi notăm cu α_i, $i = 1, \ldots, 2m + 1$ componentele vectorului $(a_0/2, a_1, b_1, \ldots$

a_m, b_m) atunci y admite derivate parțiale în raport cu α_i, $i = 1, \ldots, 2m+1$ și acestea se pot obține din procedeul iterativ

$$\frac{\partial y^0}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial y^{k+1}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i} + H_m\left[\frac{\partial q}{\partial x}(y^k, \cdot)\frac{\partial y^k}{\partial \alpha_i}\right], \quad k = 0, 1, \ldots$$

și avem $\left\|\frac{\partial y^k}{\partial \alpha_i}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\theta}$. Acest procedeu va fi înlocuit cu

$$z_i^0 = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i}, \quad z_i^{k+1} = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i} + H_m\left[\frac{\partial q}{\partial x}(y, \cdot) z_i^k\right], \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Avem $\left\|\frac{\partial y^{k+1}}{\partial \alpha_i} - z_i^{k+1}\right\| \leqslant \|H_m\| \cdot \left\|\frac{\partial q}{\partial x}(y^k, \cdot) - \frac{\partial q}{\partial x}(y, \cdot)\right\| \cdot \left\|\frac{\partial y^k}{\partial \alpha_i}\right\| +$
$+ \|H_m\| \cdot \left\|\frac{\partial q}{\partial x}(y, \cdot)\right\| \cdot \left\|\frac{\partial y^k}{\partial \alpha_i} - z_i^k\right\| \leqslant \frac{\|H_m\| \cdot M_1 \cdot \theta^k \|y^1 - y^0\|}{(1-\theta)^2} +$
$+ \theta\left\|\frac{\partial y^k}{\partial \alpha_i} - z_i^k\right\| \leqslant \ldots \leqslant \frac{\|H_m\| \cdot M_1 \|y^1 - y^0\|}{(1-\theta)^2}(k+1)\theta^k$

deci pentru $i = 1, \ldots, 2m+1$, $\lim\limits_{k \to \infty} z_i^k = \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}$.

6. Și acest procedeu va fi înlocuit cu procedeul trunchiat

$$\zeta^0 = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i}, \quad \zeta^{k+1} = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i} - \sum_{s=m+1}^{N} \frac{1}{s^2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial q}{\partial x}(\tilde{y}, \tau)\zeta^k(\tau)\cos s(t-\tau)d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

adică $\zeta^{k+1} = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + (H_m - H_N)\left[\frac{\partial q}{\partial x}(\tilde{y}, \cdot)\zeta^k\right]$, de unde $\|\zeta^{k+1} - \zeta^k\| \leqslant (\|H_m\| + \|H_N\|) \cdot M \cdot \|\zeta^k - \zeta^{k-1}\|$. Întrucît pentru N suficient de mare, $\theta' = (\|H_m\| + \|H_N\|)M < 1$ rezultă că $\|\zeta^{k+1} - \zeta^k\| \to 0$ cînd $k \to \infty$. Oprind iterațiile cînd $\|\zeta^{k+1} - \zeta^k\| < \delta'$ și notînd $\varepsilon' = \|H_N\| \cdot \left\|\frac{\partial q}{\partial x}(y, \cdot)\zeta^k - \frac{\partial \tilde{y}''}{\partial \alpha_i}\right\|$, avem după o serie de delimitări $\left\|\frac{\partial y}{\partial \alpha_i} - \zeta^{k+1}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon' + \theta' \delta'}{1-\theta'} + \frac{\|H_m\| \cdot M_1 \cdot \Delta}{(1-\theta)^2} = \Delta'$.

Notăm $\zeta^{k+1} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha_i}$.

7. În [2] se demonstrează următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Ecuația $x'' = q(x(t), t)$ are soluție periodică cu perioada 2π dacă și numai dacă există $m \in Z_+$ și $x_0 \in S_m^0$ încît $x_0''(t) = P_m q(y(t), t)$, unde y este funcția asociată lui x_0.*

Ecuația $x_0''(t) = P_m q(y(t), t)$ se scrie pe componente

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(y(\tau), \tau)d\tau = 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(y(\tau), \tau)\cos(s\tau)d\tau + s^2 a_s = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(y(\tau), \tau)\sin(s\tau)d\tau + s^2 b_s = 0, \quad s = 1, 2, \cdots, m,$$

formînd un sistem de $2m+1$ ecuaţii algebrice numit *sistemul ecuaţiilor determinate* şi notat $F(\alpha)=0$, α fiind vectorul coeficienţilor lui x_0. Funcţia asociată y va fi soluţia periodică a ecuaţiei date.

În calculele efective, acest sistem se va înlocui cu un sistem aproximant $\tilde{F}(\alpha)=0$, obţinut prin înlocuirea funcţiei asociate y cu $\tilde{y}$. Avem $|F_i(\alpha) - \tilde{F}(\alpha)| \leqslant M\,||y-\tilde{y}|| \leqslant M\Delta$, pentru orice $i=1, 2, \ldots, 2m+1$. Analog, $\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j}$ se va înlocui cu aproximarea sa $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \alpha_j}$, obţinută prin înlocuirea lui y cu $\tilde{y}$ şi a lui $\frac{\partial y}{\partial \alpha_i}$ cu $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha_i}$. Avem $\left|\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \alpha_j}\right| \leqslant \frac{M_1\Delta}{1-\theta} + M \cdot \Delta'$. Vom nota cu $W(\alpha)$ Jacobianul lui F în punctul α şi cu $\tilde{W}(\alpha)$ aproximarea sa.

8. Studiul existenţei şi aproximarea unei soluţii a sistemului ecuaţiilor determinante pot fi efectuate cu ajutorul următoarei teoreme date de U r a b e [1]:

TEOREMA 3. *Dacă* $W(\alpha_0) \neq 0$ *şi există* $\gamma > 0$, $k \in [0, 1)$ *încît*

a) $\Omega_\gamma = \{\alpha \mid ||\alpha - \alpha_0|| \leqslant \gamma\} \subset \Omega$, Ω *fiind domeniul de definiţie al lui* F

b) $||W(\alpha) - W(\alpha_0)|| \leqslant k/M'$ *pentru orice* $\alpha \in \Omega_\gamma$

c) $M'r/(1-k) \leqslant \gamma$, *unde* $||F(\alpha_0)|| \leqslant r$, $||W^{-1}(\alpha_0)|| \leqslant M'$,

atunci sistemul $F(\alpha)=0$ *are soluţie* $\bar{\alpha}$ *în* Ω_γ *şi* $||\bar{\alpha} - \alpha_0|| \leqslant M'r/(1-k)$.

Din demonstraţia teoremei rezultă că şirul aproximaţiilor lui Newton $\alpha^{p+1} = \alpha^p - W^{-1}(\alpha_0)F(\alpha^p)$, $p=0, 1, \ldots, \alpha^0 = \alpha_0$, converge către soluţia $\bar{\alpha}$, α^p aparţinînd lui Ω_γ.

Vom alege γ astfel încît $\alpha \in \Omega_\gamma$ să atragă $||x|| \leqslant A$, x fiind elementul din S_m^0 cu coeficienţii daţi de vectorul α. Vom lua drept α_0 coeficienţii unei soluţii aproximative Galerkin de ordin m, îmbunătăţită cu cîteva iteraţii ale metodei lui Newton, m fiind ales conform celor de mai sus. Calculînd $\tilde{r}$ pentru care $||\tilde{F}(\alpha_0)|| \leqslant r$, avem $||F(\alpha_0)|| \leqslant \tilde{r} + ||F(\alpha_0) - \tilde{F}(\alpha_0)|| \leqslant \tilde{r} + \sqrt{2m+1} \cdot M\Delta = r$.

Notînd $C = W(\alpha_0) - \tilde{W}(\alpha_0)$, $D = W^{-1}(\alpha_0) - \tilde{W}^{-1}(\alpha_0)$, din calculul lui $WW^{-1}=E$ prin neglijarea lui $C \cdot D$, obţinem $||\tilde{W}^{-1}(\alpha_0)|| \leqslant ||W^{-1}(\alpha_0)|| \cdot \left(1 + (2m+1)\left(\frac{M_1\Delta}{1-\theta} + M\Delta'\right)\right) = M$. Pentru verificarea condiţiei b) din teorema 3, observăm că pentru funcţiile asociate y_{α_0} şi y_γ corespunzătoare lui α_0 şi $\alpha \in \Omega_\gamma$ avem $||y_{\alpha_0} - y_\alpha|| \leqslant \frac{||x-x_0||}{1-\theta} \leqslant \frac{\sqrt{m+1}\,\gamma}{1-\theta}$, $\left\|\frac{\partial y_{\alpha_0}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha_j}\right\| \leqslant \frac{||H_m||\,M_1\gamma\sqrt{m+1}}{(1-\theta)^3}$ de unde $||W(\alpha) - W(\alpha_0)|| \leqslant (2m+1)\left\|\frac{\partial F_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial F_i(\alpha_0)}{\partial \alpha_i}\right\| \leqslant (2m+1)\left\{M_1||y_\alpha - y_{\alpha_0}|| \cdot \frac{1}{1-\theta} + M\left\|\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial y_{\alpha_0}}{\partial \alpha_j}\right\|\right\} = \frac{(2m+1)M_1\gamma\sqrt{m+1}}{(1-\theta)^3}$, $j = 1, \ldots, 2m+1$, $i = 1, \ldots, 2m+1$.

Condiţiile de verificat pentru γ şi k sînt deci $\frac{(2m+1)M_1\gamma\sqrt{m+1}}{(1-\theta)^3} \leqslant \frac{k}{M'}$ şi $\frac{M'r}{1-k} \leqslant \gamma$, ceea ce este posibil numai dacă $r \leqslant \frac{(1-\theta)^3}{4M'^2(2m+1)\sqrt{m+1}\,M_1}$.

Dacă această condiţie este satisfăcută, sistemul ecuaţiilor determinante are soluţie $\bar{\alpha}$ şi $||\bar{\alpha} - \alpha_0|| \leqslant \frac{M'r}{1-k}$, $||y_{\bar{\alpha}} - y_{\alpha_0}|| \leqslant \frac{\sqrt{m+1}M'r}{(1-k)(1-0)}$ şi în final $||y_{\bar{\alpha}} - \tilde{y}_{\alpha_0}|| \leqslant \frac{\sqrt{m+1}\,M'r}{(1-k)(1-0)} + \Delta$, $y_{\bar{\alpha}}$ reprezentînd soluţia exactă a problemei iar $\tilde{y}_{\alpha_0}$ aproximarea sa generată de funcţia asociată lui x_0.

9. Acest algoritm a fost aplicat pe exemplul lui Cesari $x'' = \sin t - x^3$. S-a ales $m=4$, $M_1 = 9{,}6$; $= 0{,}5$; $M = 0{,}27$; $r=37 \times 10^{-9}$; $k=4{,}18\times 10^{-9}= = 10^{-8}$, $= 1{,}6 \times 10^{-9}$, $N = 17$, obţinînd în final delimitarea $||y_{\bar{\alpha}} - \tilde{y}_{\alpha_0}|| \leqslant \leqslant 52 \times 10^{-9} \cdot \tilde{y}_{\alpha_0}$ coincide cu aproximarea soluţiei acestei probleme obţinută de U r a b e [1] prin rezolvarea unui sistem Galerkin de 15 ecuaţii, algoritmul bazat pe metoda de alternativă conducînd la un sistem format numai din 2 ecuaţii şi oferind o precizie mai bună.

(Intrat în redacţie la 18 noiembrie 1980)

BIBLIOGRAFIE

1. U r a b e, M., *Numerical Computation of Nonlinear Forced Oscillations by Galerkin's Procedure*, J. of Math. Anal. Appl. **14**, 1(1966), 107–140.
2. M a w h i n, J., *Application directe de la méthode generale de Cesari à l'étude des solutions périodiques de systèmes differentiels faiblement nonlinéaires*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **36**, 5–6 (1967), 193–210.
3. B a n f i, C., *Sulla determinazione delle soluzione periodiche di equazioni differenziali nonlineari periodiche*, Boll, U.M.I., Ser. IV, anno I, 4–5, 1968, 608–619.
4. S a n c h e z, D. A., *An Iteration Scheme for Boundary Value Alternative Problems*, Rep.1412, 1974, Univ. Wisconsin.
5. C e s a r i, L., B o w m a n, T.T., *Some Error Estimates by the Alternative Method*, Quart. Appl. Math., **XXXV**, 1(1977), 121–129.

LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE CERTAINS PROBLÉMES AUX LIMITES A L'AIDE DE LA MÉTHODE DE L'ALTERNATIVE

(R é s u m é)

Le travail contient une application de la méthode de l'alternative de C e s a r i à l'étude numérique des solutions périodiques d'équations différentielles $x'' = q(x, t)$.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

PROJECTORS AND COVERING SUBGROUPS

RODICA COVACI

1. It is the aim of this note to prove that the answer to the open problem given in [2] is affirmative: the only π-homomorphs with respect to which the finite π-solvable groups have projectors are the π-Schunck classes. Further, we study some aspects of the connection between projectors and covering subgroups in finite groups and, particularly, in finite π-solvable groups.

All groups considered are finite.

We give the following useful definitions:

DEFINITION 1.1. Let G be a group.

a) If H is a subgroup of G, we call *core* of H in G the subgroup:

$$\mathrm{core}_G H = \bigcap \{H^g / g \in G\}.$$

b) We shall call a *stabilizer* of G a maximal subgroup W of G with $\mathrm{core}_G W = 1$.

c) The group G is said to be *primitive* if G has a stabilizer.

DEFINITION 1.2. a) A class $\mathfrak{H}$ of groups is a *homomorph* if $\mathfrak{H}$ is closed under homomorphisms.

b) A homomorph $\mathfrak{H}$ is a *Schunck class* if it is *primitively closed*, i.e. if any group G, all of whose primitive factor groups are in $\mathfrak{H}$, is itself in $\mathfrak{H}$.

DEFINITION 1.3. Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups and G a group.

a) A subgroup H of G is called *$\mathfrak{X}$-maximal* if:

(i) $H \in \mathfrak{X}$;

(ii) $H \leqslant H^* \leqslant G,\ H^* \in \mathfrak{X} \Rightarrow H = H^*$.

b) ([4]) A subgroup H of G is an *$\mathfrak{X}$-projector* of G if for any $N \trianglelefteq G$, HN/N is $\mathfrak{X}$-maximal in G/N.

c) ([5]] A subgroup H of G is an *$\mathfrak{X}$-covering subgroup* of G if:

(i) $H \in \mathfrak{X}$;

(ii) $H \leqslant K \leqslant G,\ K_0 \trianglelefteq K,\ K/K_0 \in \mathfrak{X} \Rightarrow K = HK_0$.

DEFINITION 1.4. Let π be a set of primes and π' the complement to π in the set of all primes.

a) A group G is *π-solvable* if every chief factor of G is either a solvable π-group or a π'-group. If π is the set of all primes, we obtain the notion of solvable group.

b) Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. We shall say that $\mathfrak{X}$ is *π-closed* if:

$$G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X} \Rightarrow G \in X,$$

where $O_{\pi'}(G)$ denotes the largest normal π'-subgroup of G.

c) We shall call *π-homomorph* a π-closed homomorph and *π-Schunck class* a π-closed Schunck class.

In our considerations, we shall use the following two theorems of R. BAER.

THEOREM 1.5. ([1]) *A solvable minimal normal subgroup of a finite group is abelian.*

THEOREM 1.6. ([1]) *If W is a stabilizer of a finite group G and N is a minimal normal subgroup of G, then $G = WN$ and $W \cap N = 1$.*

2. In this section and the text, all groups considered will be finite π-solvable. We give two lemmas, which will be used in sections 3. and 4. to prove the main theorems.

LEMMA 2.1. *If $\mathfrak{H}$ is a π-homomorph, G a π-solvable group, H a subgroup of G, $H \neq G$, H $\mathfrak{H}$-maximal in G and N is a minimal normal subgroup of G with $HN = G$, then N is abelian.*

Proof. N being a chief factor of G, there are two possibilities:

1. N is a solvable π-group. Applying 1.5., N is abelian.

2. N is a π'-group. Then $N \leqslant O_{\pi'}(G)$, hence $G/O_{\pi'}(G) \simeq (G/N)/(O_{\pi'}(G)/N)$. But $G/N = HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{H}$, because $H \in \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{H}$ is a homomorph. It follows that $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{H}$, which implies, by the π-closure of $\mathfrak{H}$, $G \in \mathfrak{H}$. This is a contradiction with $H \neq G$, H $\mathfrak{H}$-maximal in G.

LEMMA 2.2. *If $\mathfrak{H}$ is a π-homomorph, G a π-solvable group, H a subgroup of G, $H \neq G$, H $\mathfrak{H}$-maximal in G and if there is a minimal normal subgroup N of G with $HN = G$, then:*

a) *H is maximal in G;*

b) *$H \cap N = 1$.*

Proof.

a) Let H^* given with $H \leqslant H^* < G$. Let us suppose that $H < H^*$. It follows that there is an element $h^* \in H^* \setminus H$. Because $G = HN$, $h^* = hn$, with $h \in H$ and $n \in N$. We shall prove that $N \cap H^* = 1$. Then $n = h^{-1}h^*$ is in $N \cap H^*$, so $n = 1$. But this implies $h^* = h \in H$, in contradiction with the choice of h^*. It follows that $H = H^*$.

Let us prove that $N \cap H^* = 1$. We notice that $N \cap H^* \trianglelefteq G$. Indeed, for any $g \in G$ and any $x \in N \cap H^*$, we can take $g = h^*n$, with $h^* \in H^*$, $n \in N$, because $G = HN = H^*N$, and so we have:

$$g^{-1}xg = (h^*n)^{-1}x(h^*n) = n^{-1}(h^{*-1}xh^*)n.$$

Denoting by y element $h^{*-1}xh^*$, it follows that $y \in N \cap H^*$, since $N \cap H^* \trianglelefteq H^*$. So $y \in N$. But, by lemma 2.1., N is abelian. This implies:

$$g^{-1}xg = n^{-1}yn = n^{-1}ny = y \in N \cap H^*.$$

This proves that $N \cap H^* \trianglelefteq G$. Now, $N \cap H^* \neq N$, because $N \cap H^* = N$ leads us to $N \leqslant H^*$, hence the contradiction $G = HN = H^*N = H^*$. From N minimal normal subgroup of G, $N \cap H^* \trianglelefteq G$ and $N \cap H^* \neq N$ follows $N \cap H^* = 1$.

b) From $H^* = H$ in the proof of a), we obtain $H \cap N = 1$.

3. In [2], is given the following result: if $\mathfrak{H}$ is a π-Schunck class, then any finite π-solvable group has H-projectors. We shall prove here the converse

theorem, concluding that the only π-homomorphs respecting to which the finite π-solvable groups have projectors are the π-Schunck classes.

THEOREM 3.1. *A π-homomorph $\mathcal{H}$ with the property that any finite π-solvable group has H-projectors is a Schunck class.*

Proof. We show that $\mathcal{H}$ is primitively closed. Let us suppose the contrary and let G be a finite π-solvable group of minimal order with respect to the conditions: $G \notin \mathcal{H}$ and any primitive factor group of G is in $\mathcal{H}$. Let M be a minimal normal subgroup of G. Then $G/M \in \mathcal{H}$, by the minimality of G. Let H be an $\mathcal{H}$-projector of G. It follows that HM/M is $\mathcal{H}$-maximal in G/M, hence $G = HM$. Applying lemma 2.2., we conclude that H is maximal in G. Suppose G is not primitive. We have then $\mathrm{core}_G H \neq 1$. So that $G/\mathrm{core}_G H \in \mathcal{H}$, by minimality of G. But $H/\mathrm{core}_G H$ is an $\mathcal{H}$-projector of $G/\mathrm{core}_G H$. Hence $H = G$, contradicting the hypotheses $G \notin \mathcal{H}$ and $H \in \mathcal{H}$. Thus G is primitive, in contradiction with the choice of G.

4. The last section of the present note deals with some aspects of the connection between projectors and covering subgroups in finite groups and, particularly, in finite π-solvable groups.

First, some results for finite groups.

Let $\mathcal{H}$ be a homomorph and G a group. It is easy to see that any $\mathcal{H}$-covering subgroup of G is an $\mathcal{H}$-projector of G, but conversely not.

THEOREM 4.1. *If $\mathcal{H}$ is a homomorph and G a group, the subgroup H of G is an $\mathcal{H}$-covering subgroup of G if and only if H is an $\mathcal{H}$-projector in any subgroup K of G with $H \subseteq K$.*

Proof. Let H be an $\mathcal{H}$-covering subgroup of G and K a subgroup of G with $H \subseteq K$. We shall prove that for any $L \trianglelefteq K$, HL/L is $\mathcal{H}$-maximal in K/L. Indeed, $HL/L \simeq H/H \cap L \in \mathcal{H}$ and from $HL/L \leqslant H^*/L \leqslant K/L$, $H^*/L \in \mathcal{H}$, follows $H \leqslant H^* \leqslant G$, $L \trianglelefteq H^*$, $H^*/L \in \mathcal{H}$, which implies $H^* = HL$, that is $HL/L = H^*/L$.

Conversely, let H be a subgroup of G which is an $\mathcal{H}$-projector of any subgroup K of G with $H \subseteq K$. We have $H \in \mathcal{H}$. Let given K and L, with $H \leqslant K \leqslant G$, $L \trianglelefteq K$, $K/L \in \mathcal{H}$. H is an $\mathcal{H}$-projector of K, so that HL/L is $\mathcal{H}$-maximal in K/L. But $K/L \in \mathcal{H}$. It follows that $HL/L = K/L$, hence $K=HL$.

Remark. In [3], P. Förster defines the $\mathcal{F}$-covering subgroups by the condition of theorem 4.1.. Thus, theorem 4.1. shows that the two definitions of the covering subgroups given by W. Gaschütz in [5] and by P. Förster in [3] are equivalently.

An immediate consequence of 4.1. is:

THEOREM 4.2. *If $\mathcal{H}$ is a homomorph, G a group and H an* $\mathcal{H}$-projector of G which *is maximal in G, then H is an $\mathcal{H}$-covering subgroup of G.*

Proof is based on 4.1.. Let K be a subgroup of G with $H \subseteq K$. We distinguish two cases:

1. $K = G$. Then H is an $\mathcal{H}$-projector of $G = K$.

2. $K < G$. From $H \leqslant K < G$, follows, by the hypothesis that H is maximal in G, that $H = K$. But $H \in \mathcal{H}$ is its own $\mathcal{H}$-projector. The tehorem is proved.

COROLLARY 4.3. *If $\mathcal{X}$ is a homomorph and G a group, then any subgroup H of G with the properties:*

(i) *H is an $\mathcal{X}$-projector in G;*

(ii) *H is a stabilizer of G*

is an $\mathcal{X}$-covering subgroup of G.

Let π be a set of primes. From now on, all groups will be finite π-solvable.

Lemma 2.2. has the following two consequences:

THEOREM 4.4. *If $\mathcal{X}$ is a π-homomorph, G a π-solvable group and H an $\mathcal{X}$-projector of G with the property that there is a minimal normal subgroup N of G such that $HN = G$, then H is an $\mathcal{X}$-covering subgroup of G.*

Proof. Two cases are considered:

1. $H = G$. The result is trivial.

2. $H < G$. We are in the hypotheses of lemma 2.2.. It follows that H is maximal in G, hence H is an $\mathcal{X}$-covering subgroup of G, by theorem 4.2..

THEOREM 4.5. *Let $\mathcal{X}$ be a π-homomorph, G a π-solvable group and $H < G$ with the property that H is $\mathcal{X}$-maximal in G. Then, the following are equivalently:*

(1) *For any minimal normal subgroup N of G, we have $HN = G$;*

(2) *H is a stabilizer of G.*

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2). H is maximal in G, by lemma 2.2.. Further, $\mathrm{core}_G H = 1$. Indeed, if we suppose that $\mathrm{core}_G H \neq 1$, it follows the existence of a minimal normal subgroup N of G with $N \leqslant \mathrm{core}_G H$. But this means $G = HN \leqslant H \cdot \mathrm{core}_G H = H$, i.e. $H = G$, in contradiction with $H < G$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Follows from theorem 1.6..

(Received December 12, 1980)

REFERENCES

1. Baer, R., *Classes of finite groups and their properties*, Illinois J. Math., **1**, 4(1957), 115–187.
2. Covaci, R., *Some properties of projectors in finite π-solvable groups*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **XXVI**, 1 (1981), 5–8.
3. Förster, P., *Über Projektoren und Injektoren in endlichen auflösbaren Gruppen*, J. Algebra, **49**, 2(1977), 606–620.
4. Gaschütz, W., *Selected topics in the theory of soluble groups*, Australian National University, Canberra, January–February 1969.
5. Gaschütz, W., *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z., **80**, (1963), 300–305.

PROIECTORI ŞI SUBGRUPURI ACOPERITOARE

(Rezumat)

În prezenta notă se arată că răspunsul la problema deschisă formulată în [2] este afirmativ: singurele π-omomorfe în raport cu care grupurile finite π-resolubile au proiectori sînt π-clasele Schunck. Pe de altă parte, se studiază unele aspecte ale legăturii dintre proiectori şi subgrupurile acoperitoare în grupuri finite şi, în particular, în grupuri finite π-resolubile.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

FUNCTIONS ALPHA—CLOSE—TO—CONVEX OF ORDER γ

DORIN BLEZU and NICOLAE N. PASCU

Let S be the class of functions $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ regular and univalent in the unit disc U. By S^* we note the subclass of starlike functions, by K the subclass of convex functions. We shall use the simbol $\overline{K}(\alpha)$ for the subclass of the α — starlike functions introduced in [9], [10]. By C we shall denote the class of the functions close-to-convex, defined by W. Kaplan [3]. The class of the functions close-to-convex of order γ (or of type γ), denoted by C_γ, have been studied by Rényi [13]. (It is obvious that $C_1 = C$ and $C_0 = K$).

We say that $F(z)$ is close-to-convex of order γ in the unit disc $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ if $F(z)$ is regular in U and there exists a functions $\varphi(z) \in K$, so that:

$$\left|\arg \frac{F'(z)}{\varphi'(z)}\right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad \forall z \in U$$

In [13] (Theorem 3) A. Rényi proves that the above definition for the class C_γ is equivalent to the following definition:

The function $F(z)$ is close-to-convex of order γ in the unit disc if and only if

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[1 + \mathrm{Re}\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right] d\theta > -\pi\gamma$$

where $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$

Remarks

1) For $\gamma = 1$ the above definitions reduced to the characterization of the close-to-convex functions given by W. Kaplan [3].

2) For $\gamma = 0$ it is evident that one obtains the convex functions.

Finaly we note by $C(\alpha)$ the class of alpha-close-to-convex functions introduced in [8], [10] defined in the following way:

The function $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, regular in U belongs to $C(\alpha)$, if the function

$$F(z) = (1 - \alpha) f(z) + \alpha z f'(z) \tag{1}$$

is close-to-convex.

We call operator of Libera type the operator:

$$L_\alpha[F(z)] = \frac{z^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\int_0^z t^{1/\alpha - 2} F(t)dt$$

where $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant |\alpha|^2$. The above operator can be obtained by integrating the differential equation (1). For $\alpha = \frac{1}{2}$ R. J. Libera [4] proves that if $F(z)$ belongs to one of the classes S^*, K, C, then $L_{1/2}(F)$ belongs respectively to the same classes.

In [1] S. D. Bernardi using $\alpha = \frac{1}{n+1}$ obtained the similar results.

It is shown in [8], [10] that if $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant |\alpha|^2$ and $F \in K, S^*, C$ then $L_\alpha(F)$ belongs respectively to the same classes. In [2] the similar results is obtained for functions classes noted $C(a, \gamma, c)$.

DEFINITION 1. We say that the function $f(z)$ is α-close-to-convex of order γ if the function

$$F(z) = (1 - \alpha)f(z) + \alpha z f'(z)$$

belongs to the C_γ class, where α is a complex number and $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

We note with $C_\gamma(\alpha)$ the class of α-close-to-convex of order α functions.

We notice that: $C_1(\alpha) = C(\alpha)$

$$C_\gamma(0) = C_\gamma$$

$$C_1(0) = C(\text{close-to-convex})$$

$$C_0(\alpha) = K(\alpha, K) \;-\; \text{subclass of } \overline{K(\alpha)}$$

both studied in [10]. It is said that $f(z) = z + \ldots$ regular in U belongs to $K(\alpha. K)$ if $f(z)f'(z) \neq 0$ with $z \in U - \{0\}$ and the function

$$G(z) = (1 - \alpha)f(z) + \alpha z f'(z)$$

belongs to K, and α is a complex number.

Finaly $C_0(0) = K$.

In the following we shall use the method of the admissible functions introduced by S. S. Miller and P. T. Mocanu in [5] and developped in [6].

Let be the function $q(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma$ for which we select the branch with $q(0) = 1$ and which is a conformal mapping of unit disc U on to the domain Ω_γ;

$$\Omega_\gamma = \left\{W,\ |\arg W| < \frac{\pi}{2}\gamma,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1\right\}$$

According to the general definition of admissible functions given in [6] we introduce the following definition:

DEFINITION 2. Let $\psi_n(\Omega, q) = \psi_n\left[\Omega_\gamma, \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma\right]$ be the class of admissible functions. $\psi : C^2 \to C$ which satisfy conditions

(A) ψ is continuous in a domain $D \subseteq C^2$

(B) $(1, 0) \in D$ and $|\arg \psi(1, 0)| \leqslant \frac{\pi}{2}\gamma$, $\gamma \in [0, 1]$

(C) $|\arg \psi(r_0, s_0)| > \gamma \frac{\pi}{2}$ for $(r_0, s_0) \in D$

where $r_0 = q(\zeta_0)$; $|\zeta_0| = 1$; $\zeta_0 \neq -1$

and

$$s_0 = m\zeta_0 q'(\zeta_0) = m \cdot \gamma \cdot r_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(r_0^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

where

$$m \geqslant n \geqslant 1.$$

THEOREM 1. *Let* $\psi \in \psi_n\left[\Omega_\gamma, \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma\right]$ *with the coresponding domain* D *and let* $p(z) = 1 + p_n z^n + \ldots$ *be regular in* U, $p(z) \not\equiv 1$. *If*

(i) $(p(z), zp'(z)) \in D$; $\forall z \in U$

(ii) $|\arg \psi(p(z), zp'(z))| \leqslant \frac{\pi}{2}\gamma$ $\forall z \in U$

than $|\arg p(z)| \leqslant \gamma \frac{\pi}{2}$ $\forall z \in U$

This theorem is a special case of theorem 1 of [6]

THEOREM 2. *If the function*

$$F(z) = (1-\alpha)f(z) + \alpha z f'(z)$$

is close-to-convex of order γ *with respect to the convex and univalent function* $H(z)$ *and* $\operatorname{Re}\alpha \geqslant |\alpha|^2$, *then the function* $f(z)$ *is also close-to-convex with respect to the convex and univalent function* $h(z)$, *where*

$$h(z) = L_1[L_\alpha(zH'(z))] \tag{2}$$

In other words $C_\gamma(\alpha) \subset C_\gamma \subset C$

Remark. The function h is given by the system of differential equations:

$$G(z) = zH'(z)$$

$$G(z) = (1-\alpha)g(z) + \alpha z g'(z)$$

$$g(z) = zh'(z)$$

Proof: We have:

$$\left|\arg \frac{F'(z)}{H'(z}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\gamma \tag{3}$$

I s sufficient to show that:

$$\left|\arg \frac{f'(z)}{h'(z)}\right| < \frac{\pi}{2}\gamma \tag{4}$$

we can write

$$\arg \frac{zF'(z)}{zH'(z)} = \arg \frac{zf'(z) + \alpha z^2 f''(z)}{(1-\alpha)g(z) + \alpha z g'(z)} = \arg \frac{\frac{zf'(z)}{g(z)} + \alpha \frac{z^2 f''(z)}{g(z)}}{1 - \alpha + \alpha \frac{zg'(z)}{g(z)}} \tag{5}$$

where $zH'(z) = G(z)$ is a starlike function.
According to the theorem 1 of [9] it follows that

$$g(z) \in \overline{K(\alpha)} \subset S^* \quad \text{since } \operatorname{Re}\alpha \geqslant |\alpha|^2$$

If we put $\frac{zf'(z)}{g(z)} = p(z)$ the egality (5) can be written:

$$\arg \frac{F'(z)}{H'(z)} \frac{p(z) + \alpha\left[zp'(z) + \frac{zg'(z)}{g(z)}\, p(z) - p(z)\right]}{1 - \alpha + \alpha \frac{zg'(z)}{g(z)}} =$$

$$= p(z) + \frac{\alpha}{1 - \alpha + \frac{zg'(z)}{g(z)}} \cdot zp'(z) = r + P(\alpha, g) \cdot s$$

where

$$r = p(z)\,; \quad s = zp'(z) \quad \text{and} \quad P(\alpha, g) = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{zg'(z)}{g(z)}}$$

We will show that $\psi(r, s)$ is an admissible function (definition 2) with $\Delta = c^2$. The conditions (A) and (B) are obvious. In order to verify the condition (C) it is sufficent to show that

$$\psi_0 = \psi(r_0, s_0) \notin \Omega_\gamma$$

or

$$\psi_0 = q(\zeta_0) + m\; P(\alpha, \cdot g)\; \zeta_0 g'(\zeta_0) \in \Omega_\gamma$$

where

$$|\zeta_0| = 1, \zeta_0 \neq -1$$

we hawe

$$\frac{\psi_0 - q(\zeta_0)}{\zeta_0 q'(\zeta_0)} = m \ P(\alpha, g)$$

or

$$\left|\arg \frac{\psi_0 - q(\zeta_0)}{\zeta_0 q'(\zeta_0)}\right| = |\arg \ P(\alpha, g)| \tag{6}$$

Since g is starlike and $\mathrm{Re}\alpha \geqslant |\alpha|^2$ we deduce

$$\mathrm{Re} \ P(\alpha, g) = \frac{\mathrm{Re}(\alpha - |\alpha|^2) + |\alpha|^2 \mathrm{Re} \dfrac{zg'(z)}{g(z)}}{\left|1 - \alpha + \alpha \dfrac{zg'(z)}{g(z)}\right|^2} > 0$$

Hence we have

$$|\arg P(z, g)| < \frac{\pi}{2}$$

From (6) it follows that the angle θ: between the vector $\psi_0 - q(\zeta_0)$ and the outer normal to the boundary of Ω_γ at $q(\zeta_0)$ is less than $\frac{\pi}{2}$.
Since Ω_γ is a convex domain it follows that $\psi_0 \notin \Omega_\gamma$. Hence ψ is an admissible function from theorem 1 we deduce (4) whieh completes the proof of theorem 2.

Remark. In the above proof we have used only the property that $q(U)$ is a convex domain.

THEOREM 3. (INTEGRAL REPREZENTATION FORMULA)
A function $f(z)$ is in $C_\gamma(\alpha)$, $\mathrm{Re}\alpha \geqslant |\alpha|^2$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ *if and only if there exists a function $F \in C_\gamma$ so that*

$$f(z) = L_\alpha[F(z)] \tag{7}$$

Proof. The proof of this theorem is similar to that of theorem 3 on [2] where it shows first that the function $L_\alpha(F)$ is regular and univalent, then through differentiation the equivalence between the relation (6) and the definition 1.

COROLLARY 1. *If $F \in C_\gamma$ then $L_\alpha(F) \in C_\gamma$*
The proof is imediately using the conclusions of theorems 2 and 3.

THEOREM 4. *If $f\ (z) \in C_\gamma(\alpha)$ and $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ then*

$$|a_n| \leqslant \frac{1 + \gamma(n-1)}{|1 + \alpha(n-1)|}$$

for

$$n = 2, 3, \dots$$

Proof. In [13] A. Rényi shows that if $F \in C_\gamma$ and $F(z) = z + b_2z^2 + \ldots$ then

$$|b_n| \leqslant 1 + \gamma(n-1) \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

According to the definition 1 we have

$$b_n = (1-\alpha)a_n + \alpha n a_n$$

or

$$a_n[1 + \alpha(n-1)] \leqslant 1 + \gamma(n-1)$$

therefore

$$|a_n| \leqslant \frac{1+\gamma(n-1)}{|1+\alpha(n-1)|}$$

Remarks

1) If $\alpha = 0$ and $\gamma \in [0,1]$ we obtain the estimation for the coeficients a_n given by A. Rényi in [13].
2) If $\gamma = 1$ we obtain the estimation given in [8], [10].
3) If $\alpha = 0$ and $\gamma = 1$ then we rediscover the estimation given by M.O. Reade in [11] for the coeficients of close-to-convex functions $|a_n| \leqslant n$; and for $\alpha = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$ we obtain the estimation in [12].

(Received January 26, 1981)

REFERENCES

1. Bernardi, S. D. *Convex and Starlike Univalent Functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 135 (1969), 429–446.
2. Blezu, D., Pascu, N. N., *A Generalizations of the class of Close-to-Convex Functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica (to appear).
3. Kaplan, W., *Close-to-Convex schlicht functions*, Michigan Meth. J., 1 (1952), 169–185.
4. Libera, R. I., *Some classes of Regular Univalent Functions*, Proc. Math. Soc., L 16 (1965), 755–758.
5. Miller, S. S., Mocanu, P. T., *Second Order Differential Inequalities in the Complex Plane*, J. of Math. Anal. Appl., 65 (2) (1978).
6. Miller, S. S., Mocanu, P. T., *Differential Subordinations* (to appear).
7. Pascu, N–N., *Janowski Alpha Starlike – Convex Functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., XXI, (1976), 23–27.
8. Pascu, N–N., *Alpha-Close-to-convex functions*, Lucrările celui de-al treilea Seminar româno-finlandez, Bucureşti, 1976.
9. Pascu, N. N., *Funcţii alfa-stelate*, Bul. Univ. Braşov, Seria C (1977).
10. Pascu, N. N., *Contribuţii la teoria reprezentării conforme*, Teză de doctorat, Univ. „Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, 1978.
11. Reade, M. O., *On close-to-convex univalent functions*, Michigan Math. J., 3 (1955), 59–92.
12. Reade, M. O., *On the coefficients of certain univalent functions*, Ann. Acad. Sci Fennicae, Ser A. Nr. 215, 1–6.
13. Rényi, A., *Some Remarks an univalent Functions Bulgar*, Akad. Nauk. Tzv. Mat. Ins., 3 Nr. 2 (1959), 111–121. MR. 22. A(1)–128.

FUNCŢII ALFA-APROAPE-CONVEXE DE ORDIN γ

(Rezumat)

În această lucrare este introdusă o nouă clasă de funcţii notată $C_\gamma(\alpha)$ şi se arată legătura acesteia cu alte clase de funcţii. Este dată reprezentarea integrală a funcţiilor din această clasă şi estimarea coeficienţilor. Pentru valori particulare ale parametrilor se regăsesc rezultate importante cunoscute.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

INDICATEURS INFORMATIONELS DE CLASSIFICATION

ELENA OANCEA

L'article présente deux indicateurs informationels avec leurs propriétés dont il résulte certains procédés qui peuvent être utilisés dans le problème de classification.

1. On sait que *la redondance* [1] est un indicateur informationel associé à deux variables aléatoires — caractéristiques statistiques X et Y, données par

$$R(X|Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{1}$$

où X, Y ont respectivement les répartitions:

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}} \quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j=\overline{1,m}} \tag{2}$$

$H(X)$ c'est l'entropie de Shannon [2]:

$$\begin{aligned} &H(X) = -\sum_1^n p_i \log p_i \\ &H(X|Y) = \sum_{j=1}^m H(X|y_j)q_j \\ &H(X|y_j) = -\sum_{i=1}^n P(X=x_i|Y=y_j)\log P(X=x_i|Y=y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}}{q_j}\log\frac{p_{ij}}{q_j}, \end{aligned} \tag{3}$$

les probabilités $p_{ij} = P(X=x_i \cap Y=y_j)$ caractérisent la répartition bidimensionelle de (X, Y). Il en résulte de (3) que l'entropie conditionée de X par Y: $H(X|Y)$ peut être donnée par:

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}}{q_j}(\log p_{ij} - \log q_j) = H(X \cap Y) - H(Y) \tag{4}$$

où
$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = q_j, \ j = \overline{1, m}.$$

Propriété 1. Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes alors $R(X|Y) = 0$.

On sait que X, Y étant indépendantes $\Leftrightarrow p_{ij} = p_i q_j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. De (3) on a:

$$H(X|y_j) = -\sum_1^n p_i \log p_i, \ \forall j = \overline{1, m}$$
$$H(X|Y) = H(X),$$

par conséquent $R(X|Y) = 0$.

Réciproquement si $R(X|Y) = 0 \Rightarrow H(X) = H(X|Y)$, c'est-à-dire:

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i = -\sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}}{q_j}\log\frac{p_{ij}}{q_j} \tag{5}$$

de cette egalité $\Rightarrow$

$$p_{ij} = p_i q_j, \; i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m},$$

donc X, Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Propriété 2. Si $X = Y$ on a:

$$R(X|Y) = H(X) = H(Y) \tag{6}$$

et réciproquement.

Si $X = Y$ il résulte que les probabilités p_{ij} vérifient

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ p_i = q_i, & i = j \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n} \tag{7}$$

Alors $R(X|Y) = H(X)$.

Si $R(X|Y) = H(X)$, c'est-à-dire $H(X|Y) = 0$, et en tenant compte de (3) il faut que $H(X|y_j) = 0$. On sait [2] que l'entropie d'une répartition discrète est nule si le système des probabilités a la forme $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Par conséquent dans ce cas:

$$p_{ij}/q_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{8}$$

c'est-à-dire $p_{ij} = q_j$, $j = \overline{1, n}$. Et en tenant compte de la répartition bidimensionelle de X, Y, il résulte $q_j = p_j$, $j = \overline{1, n}$ et en supposant $x_i = y_i$, $i = \overline{1, n}$, c'est à dire $X = Y$.

Proprieté 3. Quels que soit X, Y la redondance $R(X|Y)$ vérifie l'inégalité

$$0 \leqslant R(X|Y) \leqslant H(X).$$

De l'inégalité de Shannon: $H(X|Y) \leqslant H(X)$, il résulte immédiatement que $R(X|Y) \geqslant 0$. Aussi de la relation (1) et de la propriété 2, voit-on que $R(X|Y)$ a la valeur maximale $H(X)$, donc:

$$0 \leqslant R(X|Y) \leqslant H(X).$$

Proprieté 4. La redondance est symétrique relativement a X, Y:

$$R(X|Y) = R(Y|X). \tag{9}$$

On sait que [2]

$$H(X \cap Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y),$$

d'oú on a:

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

ou

$$R(X|Y) = R(Y|X).$$

On peut considérer la redondance normée

$$\bar{R}(X|Y) = 1 - \frac{H(X|Y)}{H(X)}, \; X \text{ différant d'une constante.}$$

On voit que

i. $\bar{R}(X|Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ sont indépendantes,
ii. $\bar{R}(X|Y) = 1 \Leftrightarrow X = Y$ (dans le sens des probabilités)
iii. $0 \leqslant \bar{R}(X|Y) \leqslant 1$.

Remarques. 1. La propriété 3 devient $0 \leqslant R(X|Y) \leqslant \log_2 n$ si X a le système de probabilités $(1/n, \ldots, 1/n)$.

2. Dans le cas où la dépendance entre X et Y est de la forme $Y = f(X)$ f étant une fonction detérministe, alors la répartition de Y est

$$Y\begin{pmatrix} f(x_i) \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1, n}}$$

et $R(X|Y) = 0$. C'est-à-dire R est un indicateur qui donne information relativement à la dépendence aléatoire entre les deux variables X et Y.

2. Un autre indicateur informationel pour deux variables aléatoires — — caractéristiques statistiques X et Y est *la distance informationelle*

$$D(X, Y) = \frac{H(X|Y) + H(Y|X)}{H(X \cap Y)}, \quad H(X \cap Y) \neq 0, \tag{10}$$

où $H(X \cap Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}$
et $H(X \cap Y) > 0$, pour X, Y différent d'une constante.

On voit que $D(X, Y) \geqslant 0$ quels que soit X, Y avec $H(X \cap Y) > 0$.

Proprieté 1. Si X et Y sont indépendantes il résulte $D(X, Y) = 1$ et réciproquement.

De la propriété 1, point 1, on a dans ce cas $H(X|Y) = H(X)$ et $H(Y|X) = H(Y)$, et on sait [2] que

$$H(X \cap Y) = \begin{cases} H(X) + H(Y) & \text{pour } X, Y \text{ indépendantes,} \\ H(X) + H(Y|X) & \text{pour } X, Y \text{ quelconques.} \end{cases}$$

Donc si les variables aléatoires X, Y sont indépendantes il résulte

$$D(X,Y) = 1.$$

Réciproquement, quand $D(X,Y) = 1$, c'est-à-dire

$$H(X|Y) + H(Y|X) = H(X \cap Y),$$

mais en tenant compte de (4) on a

$$H(X|Y) + H(Y|X) = H(X) + H(Y|X). \tag{11}$$

Et pour que (11) soit vraie, il faut que $H(X|Y) = H(X)$, et en conformité avec la propriété 1 point 1, il résulte X, Y indépendantes.

Propriété 2. Si $X = Y$ la distance $D(X, Y) = 0$ et réciproquement. On a vu la proprieté 2 point 1, que pour $X = Y$ $H(X|Y) = 0$ et aussi $H(Y|X) = 0$, alors $D(X,Y) = 0$.

Réciproquement si $D(X, Y) = 0$, il faut que

$$H(X|Y) + H(Y|X) = 0,$$

ce qui est possible parce que $H(X|Y) \geqslant 0$, $H(Y|X) \geqslant 0$, seulement quand

$$H(X|Y) = 0 \text{ et } H(Y|X) = 0.$$

Mais de la proprieté 2 point 1, on a dans ce cas: $X = Y$.

Propriété 3. Quels que soit X et Y, la distance $D(X, Y)$ vérifie la rélation:

$$0 \leqslant D(X,Y) \leqslant 1 \tag{12}$$

La première partie de cette inégalité résulte immediatement. Pour la deuxième on a:

$$D(X, Y) = \frac{H(X|Y) + H(Y|X)}{H(X \cap Y)} = \frac{H(X|Y) + H(Y|X)}{H(X) + H(Y|X)}$$

et conformement à l'inégalité de Shannon $H(X) \geqslant H(X|Y)$, on a

$$D(X,Y) \leqslant 1$$

quels que soit X et Y.

Remarques. On voit que $D(X,Y)$ est un indicateur informationel rélativement à la distance aléatoire entre les deux variables. La distance est nule si $X = Y$ et dans le cas ou X, Y sont indépendantes la distance a la valeur maximale un.

La redondance a la valeur maximale dans le cas ou la dépendance aléatoire entre les deux variables est la plus forte ($X = Y$).

3. Ces indicateurs informationels, donnés au point 1, et 2, peuvent être utilisés pour la classification de deux ou plusieurs variables aléatoires (caractéristiques statistiques) aprés leur dépendance aléatoire. C'est-à-dire la critérium de classification est la dépendance aléatoire entre les deux variables aléatoires.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes avec les répartitions données par (2). Alors en calculant $\bar{R}(X|Y)$ on a:

1. Si $\bar{R}(X|Y) = 1 \Leftrightarrow X = Y$.
2. $\bar{R}(X|Y) = 0 \Leftrightarrow X$, Y sont indépendantes.
3. $\bar{R}(X|Y) = c$, $c \in (0,1)$, la dépendance aléatoire entre X, Y est de niveau c.

De façon analogue si on utilise la distance $D(X, Y)$ et ses proprietés.

Dans la pratique statistique X, Y sont des caractéristiques statistiques obtenues par la recherche, avec les distributions statistiques de la forme discrète, données à (2),

L'algorithme pour évaluer la dépendance entre X, Y est:

Avec la redondance $\bar{R}$:

1. On calcule $\bar{R}(X|Y)$.
2. On choisit un niveau de signification $\alpha(\alpha \in (0, 0{,}05])$
3. Si
   a. $\bar{R}(X|Y) \geqslant 1 - \alpha \Rightarrow X = Y$, si on suppose que les valeurs de X et Y sont aussi coincidantes.
   b. $\bar{R}(X|Y) < \alpha$, $\Rightarrow X$, Y indépendantes.
   c. $\bar{R}(X|Y) = \beta$, $\beta \in (\alpha, 1 - \alpha) \Rightarrow X$, Y ont une dépendance aléatoire de niveau β.

Remarque. On peut classifier un nombre quelconque $n > 2$ de variables aléatoires ou caractéristiques statistiques X_i, $i = \overline{1, n}$ après la valeur de $\bar{R}$ par le tableau

$\bar{R}$	X_1	X_2	$\ldots$	X_n
X_1	$\bar{R}_{11}$	$\bar{R}_{12}$	$\ldots$	$\bar{R}_{1n}$
X_2		$\bar{R}_{22}$	$\ldots$	$\bar{R}_{2n}$
$\vdots$			$\ldots$	
X_n				$\bar{R}_{nn}$

(13)

où $\bar{R}_{ij} = \bar{R}(X_i, X_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $\bar{R}_{ij} = \bar{R}_{ji}$ et $\bar{R}_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Avec la distance D

1. On calcule $D(X, Y)$
2. On choisit un niveau de signification $\alpha \in (0, 0.05)$
3. Si
   a. $D(X, Y) \geqslant 1 - \alpha, \Rightarrow X, Y$ indépendantes.
   b. $D(X, Y) < \alpha \Rightarrow X = Y$ (si les valeurs de X et Y sont coincidantes).
   c. $D(X, Y) = \beta$, $\beta \in (\alpha, 1 - \alpha) \Rightarrow X, Y$ ont une dépendance aléatoire de niveau β.

On peut aussi classifier plusieurs variables aléatoires ou caractéristiques statistiques en construisant un tableau du type (13) pour la distance informationelle.

Conclusions. Les indicateurs informationels présentés étant calculés seulement avec les probabilités des leurs répartitions ont aussi l'avantage d'être utilisés avec succès dans le cas des caractéristiques statistiques de type qualitatives (sans des valeurs numériques dans leurs distributions statistiques).

2. Ils donnent une indication aussi dans le problème de la correspondance entre deux distributions statistiques ou répartitions probabilistiques, ce qui est inclus dans la proprieté 2 point 2 et 1.

(Manuscrit reçu le 7 février 1981)

BIBLIOGRAPHIE

1. A., Klichenmann, *L'analyse des caractéres pour dates nominales — une méthode pour analyse de variables qualitatives basée sur un modèle de la théorie de l'information*, Geoforum, **15** (1973), 33–45.
2. A. Renyi, *Calcul des Probabilités avec un appendice sur la Théorie de l'information*, Dunod, Paris, 1966.

INDICATORI INFORMAŢIONALI ÎN CLASIFICARE

(Rezumat)

Articolul prezintă doi indicatori informaţionali: redundanţa şi distanţa informaţională cu proprietăţile lor, din care rezultă anumite procedee utile în problema clasificării.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

CONEXIUNI ŞI SECŢIUNI PARALELE ÎN FIBRATE VECTORIALE

M. ŢARINĂ

§ 1. **Notaţii şi preliminarii asupra fibratelor vectoriale.** Fie $\xi = (E, \pi, B, F)$ un fibrat vectorial, avînd E spaţiul total, B spaţiul de bază, $\pi : E \to B$ proiecţia, F fibra tip (spaţiu vectorial real, dim $F = m$). Vom presupune că E şi B sînt varietăţi C^∞, iar π este o aplicaţie diferenţiabilă C^∞. Fibra în punctul $x \in B$ este varietatea $F_x = \pi^{-1}(x)$, avînd structura de spaţiu vectorial. Notăm cu $\mathcal{F}(B)$ mulţimea funcţiilor C^∞, definite pe B cu valori reale şi cu Sec ξ, $\mathcal{F}(B)$-modulul secţiunilor lui ξ cu valori în R.

Notăm cu ξ^* dualul fibratului ξ, anume $\xi^* = (E^*, \pi, B, F^*)$, unde F^* este dualul spaţiului vectorial F, $E^* = \bigcup\limits_{x \in B} F_x^*$, unde F_x^* este dualul lui F_x, iar $\pi^* : E^* \to B$ este proiecţia.

Ne vom referi în continuare la construcţiile standard efectuate cu unul sau mai multe fibrate vectoriale date peste aceeaşi bază. Anume, fie $\xi_i = (E_i, \pi_i, B, F_i)$ $i = \overline{1, p}$ p fibrate vectoriale peste B. Produsul tensorial al fibratelor ξ_i este fibratul

$$\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p = \{E_1 \otimes \ldots \otimes E_p, \pi^\otimes, B, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\}$$

unde avem $E_1 \otimes \ldots \otimes E_p = \bigcup\limits_{x \in B} (F_1)_x \otimes \ldots \otimes (F_p)_x$, proiecţia $\pi^\otimes$ fiind definită în mod obişnuit. Dacă avem $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_p = \xi$ vom nota cu $\otimes^p \xi = \underbrace{\xi \otimes \ldots \otimes \xi}$, puterea tensorială a fibratului ξ.

Notăm fibratul tensorial de tip (p, q) construit pe ξ prin

$$\xi_q^p = (\otimes^p \xi) \otimes (\otimes^q \xi^*)$$

Fie de asemenea

$$\Lambda^p \xi = (\Lambda^p E, \lambda, B, \Lambda^p F)$$

puterea exterioară a lui ξ dată prin $\Lambda^p E = \bigcup\limits_{x \in M} \Lambda^p F_x$, $(F_x \simeq F)$ şi unde $\lambda : \Lambda^p E \to B$ este proecţia definită în modul obişnuit.

În mulţimea B-morfismelor fibratelor vectoriale de aceeaşi bază B, un rol deosebit îl au B-morfismele liniare, respectiv multiliniare, canonice, ce corespund unor obiecte definite în algebra liniară. În cazul fibratelor de dimensiune finită şi al aplicaţiilor bijective, B-morfismele respective sînt izomorfisme. Referitor la produsul tensorial avem izomorfismele de asociativitate, de comutivitate, de distributivitate, precum şi izomorfisme legate de dualitate, care combinate între ele dau diferitele morfisme canonice referitoare la fibratele tensoriale.

Pe lîngă acestea, avem şi morfismul liniar canonic

$$c_j^i : \xi_q^p \to \xi_{q-1}^{p-1} \quad p \geqslant 1, \ q \geqslant 1$$

numit contracţia în indicii j şi i. $(1 \leqslant i \leqslant p, \ 1 \leqslant j \leqslant q)$.

De asemenea există cîteva B-morfisme remarcabile, legate de algebra exterioară, de proprietățile înmulțirii exterioare și de dualitate. Morfismele menționate mai sus se definesc prin corespondențele indicate între secțiunile corespunzătoare, deasupra unei mulțimi deschise $U \subseteq B$.

Un astfel de morfism se obține considerînd aplicația

$$\sigma : \prod_1^h \mathrm{Sec}\ \xi \times \prod_1^k \mathrm{Sec}\ \xi^* \times \mathrm{Sec}\ \xi_q^p \to \mathrm{Sec}\ \xi_{q-h}^{p-k}$$

definită de

$$\sigma(s_1, \ldots, s_h ; s_1^*, \ldots, s_k^* ; t_1 \otimes \ldots \otimes t_p \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_q^*) = \langle s_1^*, t_1 \rangle \ldots$$

$$\ldots \langle s_k^*, t_k \rangle \langle u_1^*, s_1 \rangle \ldots \langle u_h^*, s_h \rangle u_{h+1}^* \otimes \ldots \otimes u_q^* \otimes t_{k+1} \otimes \ldots \otimes t_p$$

unde $h \leqslant q$, $k \leqslant p$, iar $\langle s_i^*, t_k \rangle$, sînt concepute ca și secțiuni ale fibratului trivial $B \times \mathrm{R} \to B$.

PROPOZIȚIA 1.1. *Aplicația σ induce morfismul de fibrate*

$$\mu_{s_1, \ldots, s_h}^{s_1^*, \ldots, s_k^*} = c_{k+h}^h \ldots c_{k+1}^1 c_k^{h+k} \ldots c_1^{h+1} \cdot i_{s_1 \ldots s_h}^{s_1^* \ldots s_k^*} : \xi_q^p \to \xi_{q-h}^{p-k}$$

unde $i_{s_1 \ldots s_h}^{s_1^* \ldots s_k^*} : \xi_q^p \to \xi_{q+k}^{p+h}$ *este definit local de*

$$i_{s_1 \ldots s_h}^{s_1^*, \ldots s_k^*}(t_1 \otimes \ldots \otimes t_p \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_q^*) = s_1 \otimes \ldots \otimes s_h \otimes t_1 \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes t_p \otimes s_1^* \otimes \ldots \otimes s_k^* \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_q^*$$

Cîteva cazuri particulare vor fi considerate în cele ce urmează.

1. Fie $k = 0$, $p = 0$. O secțiune în fibratul $\xi_q^0 \simeq (\xi^*)_0^q$ se poate concepe local ca o formă q-liniară $\omega : \mathrm{Sec}\ \xi \times \ldots \times \mathrm{Sec}\ \xi \to \mathbf{R}$ și avem

$$\sigma(s_1, s_2, \ldots, s_h ; \omega)(s_{h+1}, \ldots, s_q) = \omega(s_1, \ldots, s_h, \ldots, s_q)$$

Aceasta revine de fapt la fixarea argumentelor $s_1, \ldots, s_h$ în forma considerată. Forma ω corespunzătoare secțiunii lui ξ_q^0 poate fi o formă simetrică sau antisimetrică. Cea de a doua situație ne va furniza o operație cunoscută în algebra formelor diferențiale exterioare pe ξ. Mai precis are loc următoarea situație.

2. Considerînd cazul formelor exterioare și aplicația canonică $\theta : \otimes^q \xi^* \to \Lambda^q \xi^*$ deducem că aplicația σ induce acum un morfism

$$\hat{\mu}_{s_1, \ldots, s_h} : \Lambda^q \xi^* \to \Lambda^{q-1} \xi^*$$

definit de $\mu_{s_1, \ldots, s_h}$ și θ, $(k = 0)$.

Dealtfel putem considera fibratul $\Lambda^q \xi^*$ ca pe un subfibrat al fibratului ξ_q^0. Sîntem conduşi astfel la cunoscuta operaţie de produs interior. Anume, pentru $k = 0$, $p = 0$, $h = 1$, aplicaţia $\hat{\mu}$ revine la

$$\sigma_1 : \text{Sec } \xi \times \Lambda^q \xi^* \to \Lambda^{q-1}\xi^*$$

fiind definită de

$$\sigma_1(s, \omega)(s_1, \ldots, s_{q-1}) = \omega(s, s_1, \ldots, s_{q-1})$$

adică

$$\sigma_1(s, \omega) = i(s)\omega$$

unde $i(s)$ este produsul interior definit pentru orice $x \in B$, pe modulul Sec $\Lambda^q\xi^*$ prin relaţia

$$i(s_x)\omega_x = s_x \lrcorner\, \omega_x$$

Demonstraţia Propoziţiei 1 se face fixînd secţiunile $s_1, s_2, \ldots, s_k \in$ Sec ξ, $s_1^*, s_2^*, \ldots s_k^* \in$ Sec ξ^*, considerînd aplicaţia

$$\sigma_{s_1, \ldots, s_h}^{s_1^*, \ldots, s_k^*} : \text{Sec } \xi_q^p \to \text{Sec } \xi_{q-r}^{p-k}, \quad \tau \in \text{Sec } \xi_q^p$$

unde

$$\sigma_{s_1, \ldots, s_s}^{s_1^*, \ldots, s_k^*}(\tau) = \sigma(s_1, s_2, \ldots, s_r; s_1^*, s_2^*, \ldots, s_k^*; \tau)$$

şi ţinînd seama că în general avem $\xi_q^p \otimes \xi_k^h \simeq \xi_{q+k}^{p+h}$.

Ulterior folosim notaţia

$$\tilde{\tau} = \sigma_{s_1, \ldots, s_r}^{s_1^*, \ldots, s_1^*}(\tau)$$

§ 2. Conexiuni şi secţiuni paralele. O conexiune liniară în fibratul vectorial ξ este definită printr-o aplicaţie $\mathcal{F}(B)$-liniară în primul argument

$$\nabla; \mathcal{T}_0^1(B) \times \text{Sec } \xi \to \text{Sec } \xi \tag{2.1}$$

astfel că pentru orice $X \in \mathcal{T}_1^0(B)$ aceasta defineşte un operator ∇_X pe Sec ξ

$$\nabla_X\sigma = \nabla(X, \sigma)$$

care este R-liniar şi este o derivare, adică

$$\nabla_X(f\, s) = Xf \cdot s + f\, \nabla_X s \qquad f \in \mathcal{F}(B),\ s \in \text{Sec } \xi \tag{2.3}$$

O secţiune $s \in$ Sec ξ se numeşte paralelă în raport cu conexiunea ∇ dacă avem

$$\nabla_X s = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{T}_0^1(B) \tag{2.4}$$

O conexiune liniară pe fibratul ξ induce o conexiune liniară pe fibratul dual, respectiv pe fibratele tensoriale sau exterioare asociate. Astfel există o conexiune unică ∇^* pe ξ^* care verifică relația

$$<\nabla_X^* s^*, s> + <s^*, \nabla_X s> = X(<s^*, s>) \tag{2.5}$$

De asemenea, dacă pe fibratele vectoriale $\underset{1}{\xi}$, $\underset{2}{\xi}$ se dau conexiunile liniare $\underset{1}{\nabla}$, respectiv $\underset{2}{\nabla}$, atunci pe fibratul produs tensorial $\underset{1}{\xi} \otimes \underset{2}{\xi}$ se definește în mod unic conexiunea produs tensorial $\nabla = \underset{1}{\nabla} \otimes \underset{2}{\nabla}$. În particular pentru o conexiune liniară ∇ definită pe ξ, există o conexiune liniară pe fibratul ξ_q^p, respectiv pe $\Lambda^q \xi^*$, astfel încît, păstrînd aceeași notație să avem formulele

$$\nabla_X(s \otimes t) = \nabla_X s \otimes t + s \otimes \nabla_X t \tag{2.6}$$

respectiv

$$\nabla_X(s^* \wedge t^*) = \nabla_X s^* \wedge t^* + s^* \wedge \nabla_X t^* \tag{2.7}$$

operatorul ∇_X comutînd cu contracțiile.

Într-adevăr, pentru o 1-formă $\omega \in \mathrm{Sec}\ \xi_1^0$, $s \in \mathrm{Sec}\ \xi$ din (2.5) rezultă

$$(\nabla_X \omega)(s) = X(\omega(s)) - \omega(\nabla_X s) \tag{2.8}$$

Mai general, pentru un fibrat ξ_q^p și pentru o secțiune $\omega \in \mathrm{Sec}_q^p$ din formulele (2.5), (2.6) deducem

$$\nabla_X \omega(\overset{*}{s}_1, \ldots \overset{*}{s}_p; s_1, \ldots, s_q) = X(\omega(\overset{*}{s}_1, \ldots \overset{*}{s}_p; s_1, \ldots s_q)) + \tag{2.9}$$

$$-\sum_{i=1}^{p} \omega(\overset{*}{s}_1, \ldots, \nabla_X \overset{*}{s}_i, \ldots \overset{*}{s}_p s_1, \ldots, s_q) - \sum_{j=1}^{q} \omega(\overset{*}{s}_1, \ldots \overset{*}{s}_p;\ s_1, \ldots \nabla_X s_j \ldots s_q)$$

unde $\overset{*}{s}_i\ i = \overline{1, p}$; $s_j\ j = \overline{1, q}$ sînt secțiuni ale fibratului ξ^* respectiv ξ. În particular pentru o secțiune $\omega \in \mathrm{Sec}\ \xi_q^0$ avem

$$\nabla_X \omega(s_1, s_2, \ldots, s_q) = X(\omega(s_1, s_2, \ldots, s_q)) - \sum_{j=1}^{q} \omega(s_1, \ldots, \nabla_X s_j, \ldots S_q) \tag{2.10}$$

care este valabilă de asemenea pentru derivata covariantă a unei secțiuni $\omega \in \mathrm{Sec} \Lambda^q \xi^*$. Astfel, de exemplu, pentru $q = 2$ avem binecunoscuta formulă

$$(\nabla_X \omega)(s_1, s_2) = X(\omega(s_1, s_2) - \omega(\nabla_X s_1, s_2) - \omega(s_1, \nabla_X\ s_2)$$

Cu notațiile din § 1 avem

PROPOZIȚIA 2.1. *Fiind dat fibratul vectorial* ξ *dotat cu o conexiune liniară* ∇ *și secțiunile paralele* $\overset{*}{s}_i \in \mathrm{Sec}\ \xi^*$, $s_j \in \mathrm{Sec}\ \xi$ *avem relația*

$$\widetilde{\nabla\tau} = \nabla\tilde{\tau} \tag{2.11}$$

pentru orice $\tau \in \mathrm{Sec}\ \xi_q^p$.

Afirmaţia rezultă imediat din formula (2.8) şi din condiţiile $\nabla_X s_i = 0$, $i = \overline{1, r}$, $\nabla_X \overset{\bullet}{s}_j = 0$, $j = \overline{1, k}$.

Secţiuni recurente. Enunţul propoziţiei precedente se poate extinde în anumite condiţii pentru secţiuni recurente ale fibratului ξ în raport cu legea de derivare ∇. O secţiune $s \in \mathrm{Sec}\,\xi$ se numeşte recurenţă faţă de ∇ dacă există un covector $\varphi \in T_1^0(B)$ astfel încît să avem

$$\nabla_X s = \varphi(X) s \tag{2.12}$$

Aceasta noţiune constituie o generalizare a noţiunii de secţiune paralelă. Atunci putem enunţa

PROPOZIŢIA 2.2. *Fiind dat fibratul vectorial* ξ, *o conexiune* ∇ *pe* ξ *şi secţiunile recurente* $s_i \in \mathrm{Sec}\,\xi$ $i = \overline{1, h}$, $\overset{\bullet}{s}_j \in \mathrm{Sec}\,\xi^*$, $j = \overline{1, k}$ *satisfăcînd* $\nabla_X s_i = \varphi_i(X) s_i$ $\nabla_X \overset{\bullet}{s}_j = \psi_j(X) \overset{\bullet}{s}_j$, *atunci pentru o secţiune* $\tau \in \mathrm{Sec}\,\xi_q^p$ *are loc relaţia* (2.11) *dacă şi numai dacă avem*

$$\sum_{i=1}^{h} \varphi_i + \sum_{j=1}^{k} \psi_j = 0 \tag{2.13}$$

Într-adevăr, ţinînd seama de relaţiile de recurenţă în formula (2.9), în baza relaţiei (2.13) prin aplicaţia $\sigma_{s_1 \ldots s_h}^{\overset{\bullet}{s}_1, \ldots, \overset{\bullet}{s}_k}$ obţinem

$$\widetilde{\nabla_X}\tau(s_{h+1}, \ldots, s_p; \overset{\bullet}{s}_1, \ldots, \overset{\bullet}{s}_q) = X(\tau(s_1, s_2, \ldots; \ldots, \overset{\bullet}{s}_q)) - \Big(\sum_{\alpha=h+1}^{p} \tau(s_1, . \nabla_X s_\alpha, \ldots, \overset{\bullet}{s}_q)$$

$$- \sum_{\beta=k+1}^{q} \tau(s_1, \ldots, s_p; \overset{\bullet}{s}_1, \ldots \nabla_X \overset{\bullet}{s}_\beta, \ldots, \overset{\bullet}{s}_q\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{h} \varphi_i + \sum_{j=1}^{k} \psi_j\Big) \tau(s_1, s_2, \ldots, \overset{\bullet}{s}_q) =$$

$$= (\nabla\tau)(s_{h+1}, s_2, \ldots \overset{\bullet}{s}_q).$$

Afirmaţia reciprocă este de asemenea valabilă cum se recunoaşte imediat din formula de mai sus.

§ 3. Fibrate vectoriale înzestrate cu structuri geometrice. Fie ξ un fibrat vectorial, ∇ o conexiune liniară pe ξ şi $\omega \in \mathrm{Sec}\,\xi_q^0$ o secţiune paralelă a fibratului ξ_q^0, adică pentru care avem

$$\nabla \omega = 0 \tag{3.1}$$

Putem considera că secţiunea ω defineşte o structură geometrică pe ξ, conexiunea ∇ fiind compatibilă cu această structură. Cazurile remarcabile pe care le vom studia sînt cele în care avem $\omega \in \mathrm{Sec}\, \vee^2 \xi^*$ respectiv $\omega \in \mathrm{Sec}\,\Lambda^2 \xi^*$. În primul caz vom spune că fibratul ξ este înzestrat cu o metrică riemanniană, iar în cel de al doilea caz vom spune că ξ posedă o structură simplectică. Conexiunea ∇ rămîne în fiecare caz compatibilă cu structura dată.

Să notăm cu $\mathrm{Sec}_\nabla\,\xi$ mulţimea secţiunilor fibratului ξ paralele în raport cu conexiunea ∇. Cu notaţiile introduse mai sus avem.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie* ∇ *o conexiune liniară pe fibratul vectorial* ξ. *Dacă* $\omega \in \mathrm{Sec}_\nabla \xi_q^0$ *şi* $s_i \in \mathrm{Sec}_\nabla\,\xi$, $i = \overline{1, h}$ *atunci avem şi* $\tilde{\omega} \in \mathrm{Sec}_\nabla\,\xi_{q-h}^0$.

Într-adevăr, din relația (3.1) și din condițiile $\nabla_X s_i = 0$ rezultă

$$\nabla_X \tilde{\omega} = 0$$

COROLARUL 1. *Dacă* $\omega \in \mathrm{Sec}_\nabla \vee^q \xi^*$ *și există* $q-2$ *secțiuni paralele pe* ξ *rezultă că* $\tilde{\omega} \in \mathrm{Sec}_\nabla \vee^2 \xi^*$.

Cu alte cuvinte, forma ω definește o metrică riemanniană pe ξ, fibratul ξ fiind în acest caz metrizabil.

COROLARUL 2. *Dacă* $\omega \in \mathrm{Sec}_\nabla \wedge^q \xi^*$ *și dacă există* $q-2$ *secțiuni paralele pe* ξ, *atunci* $\tilde{\omega} \in \mathrm{Sec}_\nabla \wedge^2 \xi^*$, *prin urmare* $\tilde{\omega}$ *definește o structură simplectică pe* ξ.

Σ — *conexiuni*. Formularea propozițiilor de mai sus este posibilă utilizînd noțiunile de Σ-fibrat și Σ-conexiune, introduse în [3]. Un Σ-fibrat apare ca analogul noțiunii de G-structură, din cazul fibratelor principale, fiind o reducere a fibratului ξ la un subgrup algebric al lui $GL(F)$. Un astfel de grup este determinat de elementele lui $GL(F)$ care invariază o formă $\omega \in \wedge^q \xi^*$. Noțiunea de Σ-conexiune se introduce în mod natural, prin cerința de a fi invariate secțiunile dintr-un anumit sistem Σ. Omitem acum aceste detalii.

§ 4. **Cazul fibratului tangent la o varietate diferențiabilă.** Considerațiile de mai sus se aplică în modul cel mai simplu la cazul fibratului tangent ξ_M al unei varietăți diferențiabile M ($\dim M = n$), adică fibratului $\xi_M = (T(M), \pi, M, \mathbf{R}^n)$. Secțiunile lui ξ_M sînt în acest caz cîmpurile de vectori tangenți, iar secțiunile fibratului $(\xi_M)^p_q$ sînt cîmpurile de tensori de tip (p, q). Particularizarea aplicațiilor și a relațiilor considerate este în acest caz evidentă. Astfel, de exemplu, formei $\omega \in \mathrm{Sec}\, \xi^0_q$ și unui sistem format de r cîmpuri vectoriale paralele Y_i, $i = \overline{1, h}$, le corespunde forma $\tilde{\omega} \in \mathrm{Sec}\,(\xi_M)^0_{q-h}$.

Într-un sistem de coordonate (x^i), în care secțiunile $\underset{\alpha}{Y}$ au componentele $\underset{\alpha}{Y}^i$, componentele formei $\tilde{\omega}$ sînt

$$\tilde{\omega}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-r}} = \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 \ldots j_{q-r}} \underset{1}{Y}^{i_1} \underset{2}{Y}^{i_2} \ldots \underset{r}{Y}^{i_r}$$

Proprietatea de invarianță a operației considerate, în raport cu conexiunea ∇, exprimată de formula (2.11), rezultă astfel și pe componente. Corolariile propoziției 3.1, corespund respectiv următoarele enunțuri.

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă pe varietatea cu conexiune afină* (M, ∇), *există o formă* γ *de grad* q *simetrică, avînd derivata covariantă nulă și* q-2 *cîmpuri vectoriale paralele* U_i, $i = \overline{1, q-2}$, *atunci forma*

$$\tilde{\gamma}(X, Y) = \gamma(U_1, \ldots, U_{q-2}; X, Y)$$

definește o metrică riemanniană pe M, *invariantă prin* ∇.

PROPOZIȚIA 4.2. *Dacă pe varietatea cu conexiune afină* (M, ∇), *există o* q-*formă* α *cu derivata covariantă nulă și* $q-2$ *cîmpuri vectoriale paralele independente* U_i, $i = \overline{1, q-2}$, *atunci 2-forma*

$$\tilde{\alpha}(X, Y) = \alpha(U_1, \ldots, U_{q-2}; X, Y)$$

definește pe M *o structură simplectică, invariantă prin* ∇.

Observaţii. 1. Formele $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\alpha}$ depind respectiv de cîmpurile vectoriale paralele, dar nu depind de poziţia argumentelor fixate de acestea.

2. Propoziţiile de mai sus se extind la cazul cînd forma multiliniară considerată are proprietăţi de simetrie (antisimetrie) numai în două argumente, restul de $q-2$ fiind fixate de cîmpurile date. Aplicaţii ulterioare se vor referi la acest caz.

3. O obiecţie asupra eficienţei criteriului de metrizabilitate dat de Propoziţia 4.1 ar fi existenţa formei multiliniare simetrice γ cu derivată covariantă nulă. Pentru o varietate diferenţiabilă paracompactă existenţa unei metrici riemanniene este asigurată. Plecînd de la acesta se pot construi forme simetrice (alternate). Aplicarea procedeului de mai sus acestor forme poate da unele situaţii interesante. De exemplu considerînd forma $\gamma \in \mathcal{T}^0_{2n}(M)$, $\gamma = \underbrace{g \otimes g \otimes \ldots \otimes g}_{n}$ şi cîmpurile paralele U_i, $i = \overline{1, 2n-2}$, metrica $\tilde{\gamma}$ obţinută prin fixarea primelor $2n-2$ argumente este conformă cu g, factorul de conformitate fiind $\rho = g(U_1, U_2) \ldots g(U_{2n-3}, U_{2n-2})$. Pe de altă parte, existenţa celor $2n-2$ cîmpuri paralele independente U_i este asigurată pentru spaţiile $2n$ — dimensionale K^* — simple, în sensul lui A.G. Walker [6].

Aplicaţii la spaţii simetrice. Propoziţiile de mai sus se pot aplica la varietăţi riemanniene (M, g) simetrice în sensul lui Cartan ($\nabla R = 0$), ∇ fiind conexiunea riemanniană.

1. Astfel, considerînd tensorul simetric de curbură

$$G(U, X, Y, V) = \frac{1}{2}\{R(U, X, Y, V) + R(U, Y, X, V)\} \tag{4.4}$$

şi cîmpurile paralele U_0, $V_0 \in \mathfrak{X}(M)$, din Propoziţia 4.1 rezultă că tensorul $\tilde{G}(X, Y) = G(U_0, X, Y, V_0)$ defineşte o metrică remanniană pe M invariantă prin ∇. Analog considerînd tensorul alternat

$$A(U, X, Y, V) = \frac{1}{2}\{R(U, X, Y, V) - R(U, Y, X, V)\} \tag{4.5}$$

din Propoziţia 4.2 rezultă că tensorul $\tilde{A}(X, Y) = A(U_0, X, Y, V_0)$ defineşte o structură simplectică pe M, invariantă prin ∇. Dealtfel, astfel de structuri se obţin şi direct fixînd primele (sau ultimele) variabile în tensorul covariant de curbură R.

2. Spaţiile (M, ∇) K^*-simetrice [6] sînt acele spaţii simetrice Cartan ($\nabla\Gamma = 0$) pentru care există un cîmp $\varphi \in \mathcal{T}^0_1(M)$, astfel ca să avem

$$\varphi_i \Gamma^h_{jkl} + \varphi_k \Gamma^h_{jli} + \varphi_l \Gamma^h_{jik} = 0 \tag{4.6}$$

Dacă φ şi U sînt paraleli faţă de ∇, din Propoziţia 2.1 rezultă că forma

$$\Phi_{kl} = \Gamma^i_{jkl} \varphi_i U^j \tag{4.7}$$

defineşte o structură simplectică pe M invariantă faţă de ∇.

Introducem tensorii contractaţi de curbură

$$P_{kl} = \Gamma^i_{ikl} \quad \Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil} \tag{4.8}$$

menţionînd că în cazul unei metrici riemanniene avem $P_{kl} = 0$, iar în cazul unei conexiuni liniare fără torsiune avem $P_{kl} = \Gamma_{kl} - \Gamma_{lk}$.
Din (4.6), prin contracţie, deducem $\varphi_i P_{kl} + \varphi_k P_{li} + \varphi_l P_{ik} = 0$ adică $\varphi \wedge P = 0$.

Pe de altă parte notînd $v_k = \Gamma_{jk} U^j$, înmulţind contractat relaţia (4.6) cu U^j obţinem, contractînd în i şi h,

$$\Phi_{kl} = \Gamma^i_{jkl} \varphi_i U^j = \Gamma_{jl} \varphi_k U^j - \Gamma_{jk} \varphi_l U^j = v_l \varphi_k - v_k \varphi_l.$$

adică avem $\Phi = v \wedge \varphi$ astfel că tensorii P şi Φ definesc structuri simplectice şi putem enunţa

PROPOZIŢIA 4.3. *Dacă* (M, ∇) *este o varietate cu conexiune liniară,* K^*-*simetrică cu vector* φ *paralel, iar* U *este un cîmp vectorial paralel pe* M*, atunci forma* Φ *defineşte o structură simplectică invariantă pe* M *şi avem* $\Phi = v \wedge \varphi$ *unde* v *are componentele* $v_k = \Gamma_{jk} U^j$.

Un analog al acestei propoziţii se poate stabili pentru spaţii K^*-nesimple (în care se ştie că vectorul φ este recurent), particularizînd în mod convenabil Propoziţia 2.2.

(Intrat în redacţie la 10 februarie 1981)

BIBLIOGRAFIE

1. J. Dieudonné, *Élements d'analyse*, Tomes 3, 4, Paris, 1971.
2. Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, vol. I, II, Ed. Academiei, Bucureşti, 1976.
3. W. Greub, Şt. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, vol. I–II, 1973; vol. III, 1976.
4. A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et de groupes d'holonomie*, Rome, 1956.
5. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. 1–4, Ed. Academiei, Bucureşti, 1946–1976.
6. A. Walker, *On Russe's spaces of recurrent curvature*, Proc. London, Math. Soc., 56, 1950–51, 36–69.

CONNECTIONS AND PARALLEL SECTIONS ON VECTOR BUNDLES

(Summary)

In the paper some topics about the connections defined on a vector bundle ξ and on their tensor bundle ξ^p_q are discussed. Namely, given the sections $s_i \in \mathrm{Sec}\,\xi$, $(i = \overline{1, h},\ h < p)$; $\overset{*}{s}_j \in \mathrm{Sec}\,\xi^*$ $(j = \overline{1, k},\ k < q)$ the morphism $\mu^{\overset{*}{s}_1, \ldots, \overset{*}{s}_k}_{s_1, \ldots, s_h}: \xi^p_q \to \xi^{p-h}_{q-k}$ is introduced which turns out to be induced by a product of contractions. (Prop. 1).

Then one considers the case of parallel (or recurrent) sections s_i, $\overset{*}{s}_j$ such that the formula (2.11) holds. (Prop. 2.1, 2.2). Fiber bundles endowed with a Riemannian (or Symplectic) structure, which is induced as above from a symmetric (or skew-symmetric) parallel form $\omega \in \mathrm{Sec}\,\xi^0_q$ and from $q - 2$ parallel sections, are considered in §3. (Prop. 3.1, 3.2). Some applications are given in §4 concerning the tangent bundle of an affine connected manifold M. These involve the curvature tensor of Cartan's symmetric spaces, or of Walker's symmetric K^* – spaces (Proposition 4.3).

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

SUR L'APPROXIMATION PAR DES POLYNÔMES, DANS $C^p_{[0,1]}$

SORIN GH. GAL

Notons $C^1_{[0,1]} = \{f \in C_{[0,1]};\ f' : [0, 1] \to \mathbf{R},\ f'\text{-continue}\}$.
En utilisant les résultats de [1], [2], le but de cette note est de montrer que, pour chaque fonction $f \in C^1_{[0,1]}$, on peut trouver une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ayant les propriétés:

1) $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers* f (*sur* $[0,1]$)
2) $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante, c'est-à-dire*

$$P_n(x) > P_{n+1}(x),\quad \forall\, x \in [0, 1],\quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

3) $(P'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers* f' (*sur* $[0, 1]$)
4) $(P'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante, c'est-à-dire*

$$P'_n(x) > P'_{n+1}(x),\quad \forall\, x \in [0, 1],\quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Puis, le résultat s'étend dans le cas de l'espace $C^p_{[0,1]}$, $p > 1$.

§ 1. Soit $f \in C_{[0,1]}$ et notons avec

$$(B_m f)_{(x)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{m-k} \cdot f\left(\frac{k}{m}\right);\ m \in \mathbf{N},$$

les polynômes de Bernstein. Dans [1], j'ai démontré le résultat (théorème 3.2.): *Pour chaque* $f \in C_{[0,1]}$, *il existe une suite* $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $m_n \in \mathbf{N}$, $m_1 < m_2 < \dots$, $m_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ (*dépendant de* f), *ainsi que la suite de polynômes* $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$Q_n(x) = (B_{m_n} f)_{(x)} + a_n,$$

(*où*

$$a_n = 2k_0 \cdot \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 2k_0\left(-\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right)\right),$$

k_0 — *la constante de Sikkema*) *converge uniformément vers* f, *monotone décroissante*.
Mais, on sait que si $f \in C^p_{[0,1]}$, alors la suite $(B_m f)^{(p)}_{m\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ (sur $[0, 1]$). Alors, il résulte immédiatement que la suite $(Q^{(p)}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$, $p \geqslant 1$. A lieu le

THÉORÈME 1.1. $\forall f \in C^1_{[0,1]}$, *il existe une suite* $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $n_k \in \mathbf{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \to \infty$, *ainsi que la suite de polynômes* $P_k(x) = Q_{n_k}(x) + \frac{x}{K_0} \cdot a_k$, *vérifie les propriétés* 1), 2), 3), 4).

Démonstration. Comme $(Q'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f' (sur $[0, 1]$), il existe $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $n_k \in \mathbf{N}$, $n_1 < n_2 < \dots, n_k \to \infty$,
avec

$$|Q'_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k^2},\quad \forall\, k \in \mathbf{N},\ \forall\, x \in [0, 1]. \tag{1}$$

Évidemment $(Q_{n_k})_{k\in N}$ converge uniformément vers f et $\frac{x}{K_0}\cdot a_k$ converge uniformément vers 0, d'où $(P_k)_{k\in N}$ converge uniformément vers f. Puis, nous avons

$$P_k(x) - P_{k+1}(x) = Q_{n_k}(x) - Q_{n_{k+1}}(x) + \frac{x}{K_0}\cdot(a_k - a_{k+1}).$$

Mais

$$Q_{n_k}(x) - Q_{n_{k+1}}(x) > 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

(car $(Q_k)_{n\in N}$ est décroissante) et $a_k - a_{k+1} > 0$, d'où $P_k(x) - P_{k+1}(x) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbf{N}$, donc $(P_k)_{k\in N}$ est décroissante.

Puis $P'_k(x) = Q'_{n_k}(x) + \frac{a_k}{K_0}$, donc évidemment $(P'_k)_{k\in N}$ converge uniformément vers f'.

Enfin, $P'_k(x) - P'_{k+1}(x) = Q'_{n_k}(x) - Q'_{n_{k+1}}(x) + \frac{1}{K_0}\cdot(a_k - a_{k+1}) = Q'_{n_k}(x) - Q'_{n_{k+1}}(x) + \frac{2}{k^2}$.

Mais, de (1), nous avons $|Q'_{n_k}(x) - Q'_{n_{k+1}}(x)| \leq |Q'_{n_k}(x) - f'(x)| + |f'(x) - Q'_{n_{k+1}}(x)| < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{2}{k^2}$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbf{N}$,

d'où $P'_k(x) - P'_{k+1}(x) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbf{N}$,

donc $(P'_k)_{k\in N}$ est décroissante, c.q.e.d.

COROLLAIRE 1.2. *Pour chaque $f \in C^1_{[0, 1]}$, il existe une suite de polynômes $(R_n)_{n\in N}$, avec les propriétés 1), 3) et 2'). $(R_n)_{n\in N}$ est croissante, 3'). $(R'_n)_{n\in N}$ est croissante.*

La démonstration en est analogue, en tenant compte du corollaire 3.3. de [1].

COROLLAIRE 1.3. *Soit $p > 1$ et $f \in C^p_{[0, 1]}$. Il existe une suite de polynômes $(S_n)_{n\in N}$ en vérifiant les propriétés :*

I). *$(S_n^{(i)})_{n\in N}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$, sur* $[0, 1]$, $\forall i = 0, 1, \ldots, p$.

II). *$(S_n^{(i)})_{n\in N}$ est décroissante,* $\forall i = 0, 1, \ldots, p$.

Démonstration. Considérons $p = 2$ et la suite de polynômes $(P_n)_{n\in N}$ du théorème 1.1. Comme $f \in C^2_{[0, 1]}$, il résulte que la suite $(P''_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers f''.

Alors, il existe $(n_k)_{k\in N}$, $n_k \in \mathbf{N}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, $n_k \to +\infty$, avec

$$|P''_{n_k}(x)\,(x) - f''(x)| < \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in [0, 1] \tag{2}$$

Notons

$$L_k(x) = P_{n_k}(x) + \frac{x^2}{2K_0}\cdot a_k, \ x \in [0, 1], \ k \in \mathbf{N}.$$

Évidemment $(L_k^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément (sur $[0, 1]$) vers $f^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$. Puis, il est clair que

$$L_{k+1}(x) < L_k(x), \quad \forall\, k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

et

$$L'_{k+1}(x) < L'_k(x), \quad \forall\, k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

Aussi

$$L''_k(x) - L''_{k+1}(x) = P''_{n_k}(x) - P''_{n_{k+1}}(x) + \frac{1}{K_0}(a_k - a_{k+1}) =$$

$$= P''_{n_k}(x) - P''_{n_{k+1}}(x) + \frac{2}{k^2}.$$

Mais, de (2) nous avons $|P''_{n_k}(x) - P''_{n_{k+1}}(x)| < \frac{2}{k^2}$,

d'où

$$L''_k(x) - L''_{k+1}(x) > 0, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in [0, 1],$$

donc $(L''_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Maintenant, considérons $p = 3$, $f \in C^3_{[0,1]}$. Alors évidemment $(L'''_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f''' (sur $[0, 1]$). Donc, il existe

$$(n_k)_{k\in\mathbf{N}}, \; n_1 < n_2 < \ldots, n_k \to +\infty, \; n_k \in \mathbf{N}$$

avec

$$|L'''_{n_k}(x) - f'''(x)| < \frac{1}{k^2}, \quad \forall\, x \in [0, 1], \; \forall\, k \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Notons

$$T_k(x) = L_{n_k}(x) + \frac{x^3}{3!K_0} \cdot a_k, \; \forall\, x \in [0,1], \; \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Alors, on montre facilement (comme ci-dessus) que $(T_k^{(i)})_{K\in\mathbf{N}}$, converge uniformément (sur $[0, 1]$ vers $f^{(i)}$ monotone décroissante, $\forall\, i = 0, 1, 2, 3$.
En raisonnant par récurrence, le corollaire résulte facilement, pour $p > 1$, quelconque, donc l'existence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, en vérifiant I) et II).

Corollaire 1. 4. *Si $p > 1$, $f \in C^p_{[0,1]}$, il existe une suite de polynômes $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en vérifiant* I). *et*

III). $(F_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante*, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, p$.

Le corollaire 1.4. résulte immédiatement du corollaire 1.2., et, en remplaçant dans les raisonnements précédents la suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par la suite $b_k = -a_k$, $k \in \mathbf{N}$.

(Manuscrit reçu le 12 février 1981)

BIBLIOGRAPHIE

1. G a l, G h . S o r i n, *Sur le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., XXVI, 4(1981), 33–39.
2. G a l, G h . S o r i n, *Sur les théorèmes d'approximation de Weierstrass*, Mathematica (Cluj-Napoca) (sous presse).

ASUPRA APROXIMĂRII PRIN POLINOAME ÎN $C^p_{[0,1]}$

(R e z u m a t)

În această notă, folosind rezultatele din [1] şi [2], se demonstrează, pentru fiecare funcţie $\in C^1_{[0,1]}$, existenţa unui şir de polinoame $(P_n)_{n\in \mathbf{N}}$, convergînd uniform către f, astfel că şirul derivatelor $(P'_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge de asemenea uniform către f', convergenţa ambelor şiruri fiind monoton descrescătoare. Apoi, raţionînd prin recurenţă, se extinde rezultatul în cazul general, $f\in C^p_{[0,1]}$, $p > 1$, oarecare.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

LORENTZ FORCE INFLUENCE ON THE ANOMALISTIC PERIOD OF ARTIFICIAL SATELLITES

VASILE MIOC and EUGENIA RADU

1. **Introduction.** In order to perform a qualitative analysis of the influence of Lorentz force on the anomalistic period of an electrically charged satellite, we shall study (as we made in [1] for the nodal period) the difference between this period and the corresponding keplerian one, difference caused by the main geomagnetic field, in the following approximations:

(i) we shall consider only the dipolic part and the first term of the non-dipolic part of the main geomagnetic field;

(ii) the Earth's magnetic axis will be supposed as being identical with the Earth's rotation axis;

(iii) only the quasi-circular orbits will be considered.

2. **Basic equations.** The anomalistic period (T_π) of an artificial satellite is defined as being the time interval elapsed between two successive moments when the real position of the satellite coincides with the perigee position on the corresponding osculating orbit. It can be written in the form:

$$T_\pi = T_0 + \Delta T_\pi, \tag{1}$$

where T_0 is the non-disturbed period corresponding to the osculating orbit (t_0 = osculation moment), while ΔT_π (the difference between the anomalistic and osculating periods) has the form [2]:

$$\Delta T_\pi = I_1 + I_2 + I_3, \tag{2}$$

with:

$$I_1 = (3/2)p_0^{1/2}\,\mu^{-1/2}\int_0^{2\pi}(1 + Ae_0)^{-2}\Delta p\, dv,$$

$$I_2 = -\,2p_0^{3/2}\,\mu^{-1/2}\int_0^{2\pi}(1 + Ae_0)^{-3}A\Delta e dv, \tag{3}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\{\partial[r^4(d\omega/dt + Cd\Omega/dt)/\mu p]/\partial\sigma\}\sigma dv,$$

where we have used (as in the rest of this paper) the notations: $A = \cos v$, $B = \sin v$, $C = \cos i$, $D = \sin i$, the other notations being the usual ones. The supplementary index „o" fixes the values of the respective quantities at the moment $t = t_0$ ($v = v_0$), while σ is a small parameter characterizing the disturbing factor.

The quantities Δp and Δe (the variations of p and e in the interval $[v_0, v]$) can be calculated from:

$$\Delta p = \int_{v_0}^{v} (dp/dv)dv, \quad \Delta e = \int_{v_0}^{v} (de/dv)\,dv, \tag{4}$$

where the essentials are given by Newton-Euler equations for the osculating elements, written with respect to the true anomaly [2]. As for $d\omega/dt$ and $d\Omega/dt$, they can also be estimated on the basis of Newton-Euler equations.

As the expansion in series of powers of the eccentricity will be used, we can consider, with the condition (iii), that $(1+Ae)^n \cong 1 + nAe$; this approximation will also be used to the estimate of the geocentric radius vector:

$$r = p/(1 + Ae) \Rightarrow r^n \cong p^n(1 - nAe). \tag{5}$$

3. **The disturbing factor.** For Δp and Δe we need only the expressions of the radial (S) and transversal (T) components of the disturbing acceleration [2]. It is the same with the expression of $d\omega/dt + Cd\Omega/dt$, necessary for the calculation of I_3.

In a first approximation, we shall consider as a disturbing factor the dipolic part of the main geomagnetic field. Taking into account the considerations of Sehnal [3], the two needed components of the disturbing acceleration have the expressions:

$$\begin{aligned} S_1 &= -F_1R^3\sqrt{\mu/p}\,r^{-3}C(1 + Ae), \\ T_1 &= F_1R^3\sqrt{\mu/p}\,r^{-3}CBe, \end{aligned} \tag{6}$$

with $F_1 = Qg_{10}/m$. Here R is the Earth's radius. Q and m are respectively the electrical charge and the mass of the satellite, g_{10} is a constant coefficient characterizing the dipolic part of the main geomagnetic field.

In a second approximation, the first term of the non-dipolic part of the main geomagnetic field will also be considered. Now we can write: $S = S_1 + S_2$ and $T = T_1 + T_2$, where S_1, T_1 are given by Equations (6), while S_2, T_2 have the expressions:

$$\begin{aligned} S_2 &= -3F_2R^4\sqrt{\mu p}\,r^{-5}CD(EA - FB), \\ T_2 &= 3F_2R^4\sqrt{\mu p}\,r^{-5}eCDB(EA - FB), \end{aligned} \tag{7}$$

with $F_2 = Qg_{20}/m$. Here g_{20} is a constant coefficient characterizing the first term of the non-dipolic part of the main geomagnetic field. We have also used the notations: $E = \cos\omega$, $F = \sin\omega$, where ω is the argument of the perigee.

4. **Results.** From Newton-Euler equations [2] and Equations (6) and (7), respectively, Equations (4) give:

$$\begin{aligned} \Delta_1 p &= -2F_1(R^3/\sqrt{\mu p_0})C_0e_0(A - A_0), \\ \Delta_1 e &= F_1(R^3/p_0\sqrt{\mu p_0})C_0(A - A_0), \end{aligned} \tag{8}$$

and:

$$\Delta_2 p = 3F_2(R^4/p_0\sqrt{\mu p_0})C_0D_0e_0[E_0(B^2 - B_0^2) + F_0(AB - A_0B_0) - - F_0(v - v_0)],$$

$$\Delta_2 e = (3/2)F_2(R^4/p_0^2\sqrt{\mu p_0})C_0D_0[2E_0e_0(A^3 - A_0^3)/3 + + 2F_0e_0(B^3 - B_0^3)/3 - E_0(B^2 - B_0^2) - F_0(AB - A_0B_0) + F_0(v - v_0)]. \tag{9}$$

With Equations (8) and (9), respectively, (for I_1, I_2), and with Newton-Euler equations [2] (for I_3, with $\sigma = F_1$ and $\sigma = F_2$ successively), Equations (3) give:

$$I_1^{(1)} = 6K_{10}A_0e_0,$$
$$I_2^{(1)} = -2K_{10}(1 + 3A_0e_0), \tag{10}$$
$$I_3^{(1)} = 2K_{10},$$

and:

$$I_1^{(2)} = 9K_{20}e_0[E_0/2 - E_0B_0^2 - F_0A_0B_0 + F_0(v_0 - \pi)],$$
$$I_2^{(2)} = 9K_{20}e_0[-5E_0/12 + E_0B_0^2 + F_0A_0B_0 + F_0(v_0 - \pi)], \tag{11}$$
$$I_3^{(2)} = 3K_{20}E_0(1/e_0 - 59e_0/4),$$

where $K_{10} = \pi F_1(R^3/\mu)C_0$ and $K_{20} = \pi F_2(R^4/\mu p_0)C_0D_0$.

Finally, by putting $I_j = I_j^{(1)} + I_j^{(2)}$, $j = \overline{1,3}$, we find from Equations (2), (10) and (11):

$$\Delta T_\pi^{(Q)} = 9K_{20}[E_0/3e_0 - 29E_0e_0/6 + 2F_0e_0(v_0 - \pi)], \tag{12}$$

where the index „Q" signifies that the difference ΔT_π is caused in this case only by the interaction between the main geomagnetic field and the electrical charge of the satellite.

(Received March 6, 1981)

REFERENCES

1. Mioc, V., Radu, E., *Lorentz Force Influence on a Charged Satellite Motion*, Visual Obs. AES Suppl., Cluj-Napoca, 1977, p. 86.
2. Mioc, V., Radu, E., *Perturbations in the Anomalistic Period of Artificial Satellites Caused by the Direct Solar Radiation Pressure*, Astron. Nachr., **300** (1979), 313.
3. Sehnal, L., *The Motion of a Charged Satellite in the Earth's Magnetic Field*, SAO Spec. Rep., **271** (1969).

INFLUENȚA FORȚEI LORENTZ ASUPRA PERIOADEI ANOMALISTICE A SATELIȚILOR ARTIFICIALI

(Rezumat)

Se studiază diferența produsă de acțiunea cîmpului geomagnetic principal între perioada anomalistică și perioada kepleriană corespunzătoare în cazul unui satelit artificial cu sarcină electrică evoluînd pe o orbită cvasi-circulară. Se deduce o expresie aproximativă a diferenței menționate pentru cazul în care se iau în considerare numai partea dipolară și primul termen din dezvoltarea părții nedipolare ale expresiei potențialului geomagnetic.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

BLENDING INTERPOLATION IN CURVED TRIANGLES

I. GÂNSCĂ

The blending interpolation over triangles has been investigated for the first time by Barnhill, Birkhoff and Gordon in the paper [1], (1973). Since that date several other papers (see [6]) have dealt with this subject. The main results and many applications of this method are given in the survey-papers [2] and [3].

In this note one generalizes the scheme of interpolation from [2] page 25.

Let O M N be the curved triangle delimited by the segments O M, O N and the curve (C) (figure 1) represented by equation

$$f(x) + g(y) = 1, \tag{1}$$

where the functions f and g are continous and monotone.

In order to determine the blending function G which interpolates to a function F on the border of curved triangle O M N (∂T), that is

$$\begin{aligned} &G(x, 0) = F(x, 0) \\ &G(0, y) = F(0, y) \\ &G(x, y) = F(x, y), \text{ if } f(x) + g(y) = 1, \end{aligned} \tag{2}$$

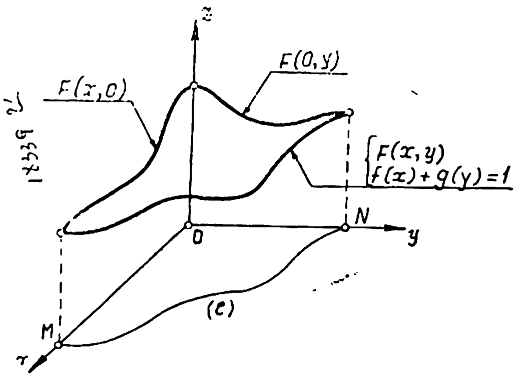

Fig. 1.

we define the projector P_1F

$$(P_1F)(x, y) = f(x)F[f^{-1}(1 - g(y)), y] + g(y)F[x, g^{-1}(1 - f(x))] \tag{3}$$

and consider the projector P_2F defined in [4],

$$(P_2F)(x, y) = F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0). \tag{4}$$

One observes that

$$(P_1F)(x, y) = F(x, y), \text{ if } f(x) + g(y) = 1$$

and

$$\begin{aligned} (P_2F)(0, y) &= F(0, y) \\ (P_2F)(x, 0) &= F(x, 0). \end{aligned}$$

Easily one checks that the blending interpolation function to F on ∂T is given by the Boolean sum:

$$\begin{aligned} G(x, y) = ((P_1 \oplus P_2)F)(x, y) = f(x)\ F\ [f^{-1}(1 - g(y), y)] + g(y)\ F\ [x, g^{-1}(1 - \\ - f(x))] + F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - f(x)\{F(0, y) + F[f^{-1}(1 - \\ - g(y), 0] - F(0, 0)\} - g(y)\{F[0, g^{-1}(1 - f(x))] + F(x, 0) - F(0, 0)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

We mention the following special cases:

1. For $f(x) = x$ and $g(y) = y$ one obtaines the interpolation function of Barnhill and Gregory [1] (or [2] page 25).

2. If $f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$ and $g(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}$; $a > 0$, $b > 0$, that is the curve (C) is a segment of astroid, them (5) becomes

$$G(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} F\left[a\left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^{3/2}, y\right] + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} F\left[x, b\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right)^{3/2}\right] +$$
$$+ F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\left\{F(0, y) + F\left[a\left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^{3/2}, 0\right] -\right.$$
$$\left. - F(0, 0)\right\} - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\left\{F\left[0, b\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right)^{3/2}\right] + F(x, 0) - F(0, 0)\right\}. \qquad (6)$$

3. In the case $f(x) = \frac{x^2}{a^2}$ and $g(y) = \frac{y^2}{b^2}$, ((c) is an arc of ellipse), from (5) it follows

$$G(x, y) = \frac{x^2}{a^2} F\left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y\right) + \frac{y^2}{b^2} F\left(x, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + F(0, y) +$$
$$+ F(x, 0) - F(0, 0) - \frac{x^2}{a^2}\left[F(0, y) + F\left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, 0\right) - F(0, 0)\right] \qquad (7)$$
$$- \frac{y^2}{b^2}\left[F\left(0, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + F(x, 0) - F(0, 0)\right].$$

For $a = b = R$, that is (C) is an arc of circle, from (7) it follows

$$G(x, y) = \frac{x^2}{R^2}(F\sqrt{R^2 - y^2}, y) + \frac{y^2}{R^2}(F\ x, \sqrt{R^2 - x^2}) +$$
$$+ F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \frac{x^2}{R^2}[F(0, y) + F(\sqrt{R^2 - y^2}, 0) - \qquad (8)$$
$$- F(0, 0)] - \frac{y^2}{R^2}[F(0, \sqrt{R^2 - x^2}) + F(x, 0) - F(0, 0)].$$

4. Finally we mention the cases:

$$f(x) = x^2 \text{ and } g(y) = y,$$

or

$$f(x) = x \text{ and } g(y) = y^2$$

when the interpolation function (5) has the forms:

$$G(x, y) = x^2F(\sqrt{1 - y}, y) + yF(x, 1 - x^2) + F(0, y) + F(x, 0) -$$
$$- F(0, 0) - x^2[F(0, y) + F(\overline{1 - y}, 0) - F(0, 0)] - \qquad (9)$$
$$- y[F(0, 1 - x^2) + F(x, 0) - F(0, 0)],$$

and respectively

$$G(x,y)=xF(1-y^2,y)+y^2F(x,\sqrt{1-x})+ \\ +F(0,\,y)+F(x,\,0)-F(0,\,0)- \\ -x[F(0,\,y)+F(1-y^2,\,0)-F(0,\,0)]- \\ -y^2[F(0,\,\sqrt{1-x})+F(x,\,0)- \\ -F(0,\,0)]. \qquad (10)$$

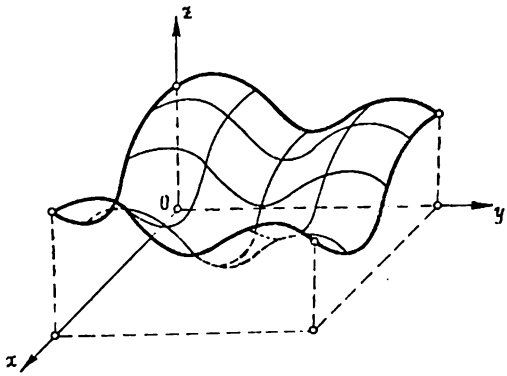

Fig. 2

By direct calculus, one obtains the following.

THEOREM. *The interpolation operator $G = P_1 \oplus P_2$ defined by* (5) *with the projectors given by* (2) *and* (3) *respectively has the property*

$$(P_1 \oplus P_2)F = F, \text{ if } F(x,\,y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

where the functions φ and ψ are arbitraly.

In other words the operator (5) reproduces the solutions of partial diferential equations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

which represent surfaces shown in figure 2.

(Received March 30, 1981)

REFERENCES

1. Barnhill, R. E., Birkhoff, G., Gordon, W. J., *Smooth Interpolation in Triangles,* J. Approx. Theory **8** (1973), 114–128.
2. Barnhill, R. E., *Blending Function Interpolation: A survey and Some New Results.* Proceedings of the Conference on Numerical Methods in Approximation Theory, Oberwolfach, Germany, ISNM 30, pp. 43–90 and University of Dundee Numerical Analysis Report No. 9.
3. Barnhill, R. E., *Representation and Approximation of Surfaces,* in *Mathematical Software III,* 1977, Academic Press, Inc., New York–San Franscisco–London.
4. Barnhill, R. E., Gregory, J. A., *Polinomial interpolation to Boundary Data on Triangles,* Mathematics of Computation, **29** (1975), 726–735.
5. Barnhill, R. E., Gregory, J. A., *Compatible Smooth Interpolation in Triangles,* J. Approx. Theory, **15**, (1975), 214–225.
6. Nielson, G. M., Thomas, D. H., Wixom, J. A., *Interpolation in Triangles,* Bull. Austral. Math. Soc., **20** (1979), 115–130.

INTERPOLARE BLENDING ÎN TRIUNGHIURI CURBILINII

(Rezumat)

În lucrare se generalizează schema de interpolare blending din [2] pag. 25 pe triunghiul curbiliniu din fig. 1. Funcţia blending interpolatoare este dată la (5) avînd proprietatea:

$$(P_1 \oplus P_2)F = F,$$

dacă $F(x,\,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Se prezintă cazuri particulare ale curbei (C) din triunghiul curbiliniu OMN cînd funcţia interpolatoare (5) ia formele (6), (7), (8), (9) şi (10).

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982

BEZÜGLICH EINES INTEGRALOPERATORS VOM TYP VOLTERRA–SOBOLEV

VIORICA MUREŞAN

Die verschiedenen Probleme für die Differentialgleichungen des Typs Sobolev wurden in [1], [2] und [5] behandelt. Gleichzeitig wurden auch einige Eigenschaften des Integraloperators vom Typ Volterra in [3] bekanntgemacht.

In dieser Arbeit erweitern wir diese Eigenschaften für einen Integraloperator des Typs Volterra-Sobolev und stellen dann zwei Sätze über die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung eines Problems mit Initialbedingungen auf.

1. Wir notieren $I_2 = [a,b] \times [a,b]$, $a > 0$. Man nimmt folgendes Problem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= K(t,x,u(t,x),u(x,t)) \\ u(a,x) &= f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

wo

$$\text{(i)} \quad f \in C[a,b],\, K \in C(I_2 \times R \times R).$$

Das Problem mit Initialbedingungen (1.1) ist mit folgender Integralgleichung äquivalent

$$u(t,x) = f(x) + \int_a^t K(s,x,u(s,x),u(x,s))\, ds. \tag{1.2}$$

Man nimmt den Operator $T: C(I_2) \to C(I_2)$, $u \to Tu$, der folgendermaßen definiert ist

$$(Tu)\ (t,x) = f(x) + \int_a^t K(s,x,u(s,x),u(x,s))\, ds,\ (t,x) \in I_2. \tag{1.3}$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion K die Bedingung von Lipschitz erfüllt

$$\begin{gathered} \text{(ii)}\ | K(t,x,u_1,v_1) - K(t,x,u_2,v_2) | \leqslant L_1 |u_1 - u_2| + \\ + L_2 |v_1 - v_2|, \quad \forall\, (t,x) \in I_2 \ \text{ und } \ \forall\, u_i, v_i \in R, \\ i = 1,2, \text{ wo } L_1, L_2 > 0. \end{gathered}$$

Es gilt

SATZ 1.1. *Wenn die Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind, dann ist der Operator* $T: (C(I_2), ||\cdot||_C) \to (C(I_2), ||\cdot||_C)$ *vom Typ Lipschitz mit der Konstanten* $\alpha = (L_1 + L_2)\ (b - a)$; $||\cdot||$ *sei die Norm von Tschebyscheff.*

Beweis. Die Norm $||\cdot||_C : C(I_2) \to R$ ist durch $||u||_C = \max_{(t,x) \in I_2} |u(t,x)|$ definiert.

Wir haben

$$|T\,u(t,x) - T\,v(t,x)| \leqslant L_1 \int_a^t |u(s,x) - v(s,x)|\,ds +$$

$$+ L_2 \int_a^t |u(x,s) - v(x,s)|\,ds \leqslant (L_1 + L_2)\,(t-a)\,||u - v||_C \leqslant \tag{1.4}$$

$$\leqslant (L_1 + L_2)\,(b-a)\,||u - v||_C, \quad \forall\,(t,x) \in I_2.$$

Dann

$$||T\,u - T\,v||_C \leqslant (L_1 + L_2)\,(b-a)\,||u - v||_C$$

und folglich ist T mit der Konstanten $\alpha = (L_1 + L_2)\,(b-a)$ vom Typ Lipschitz bezüglich dieser Norm. Also ist der Satz bewiesen.

Es sei in $C(I_2)$ die folgende Bieleczi-Norm $||\cdot||_B : C(I_2) \to R$, die durch $||u||_B = \max_{(t,x) \in I_2} |u(t,x)|\,\mathrm{e}^{-\tau[(t-a)+(x-a)]}$ definiert ist, wo $\tau \in R^+$.

Dann gilt folgender Satz:

SATZ 1.2. *Wenn die Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind, dann ist der Operator* $T: (C(I_2), ||\cdot||_B) \to (C(I_2), ||\cdot||_B)$ *vom Typ Lipschitz mit der Kostanten* $\beta = \frac{1}{\tau}(L_1 + L_2)$.

Beweis. Wir haben

$$|T\,u(t,x) - T\,v(t,x)| \leqslant \int_a^t |K(s,x,u(s,x),u(x,s)) -$$

$$- K(s,x,v(s,x),v(x,s))|\,ds \leqslant L_1 \int_a^t |u(s,x) - v(s,x)|\,ds +$$

$$+ L_2 \int_a^t |u(x,s) - v(x,s)|\,ds \leqslant L_1\,||u - v||_B \int_a^t e^{\tau[(s-a)+(x-a)]}\,ds +$$

$$+ L_2\,||u - v||_B \int_a^t \mathrm{e}^{\tau[(x-a)+(s-a)]}\,ds = \frac{1}{\tau}(L_1 + L_2)\,||u - v||_B \cdot$$

$$\cdot\,(\mathrm{e}^{\tau[(t-a)+(x-a)]} - \mathrm{e}^{\tau(x-a)}) \leqslant \frac{1}{\tau}(L_1 + L_2)\,||u - v||_B\,\mathrm{e}^{\tau[(t-a)+(x-a)]}.$$

Folglich

$$||Tu - Tv||_B \leqslant \frac{1}{\tau}(L_1 + L_2)\,||u - v||_B$$

also ist T vom Typ Lipschitz mit der Konstanten $\beta = \frac{1}{\tau}(L_1 + L_2)$, was wir beweisen wollten.

Analog mit der Eigenschaft c) aus [3] geben wir folgendes Ergebnis

SATZ 1.3. *Wenn die Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind, dann ist der Operator* T^n, $n \in N$, $T^n\colon (C(I_2), ||\cdot||_C) \to (C(I_2), ||\cdot||_C)$ *vom Typ Lipschitz mit der Konstanten* $\alpha_n = \frac{1}{n!}[2(b-a)(L_1 + L_2)]^n$.

Beweis. Mit (1.4) haben wir gezeigt, daß

$$|Tu(t,x) - Tv(t,x)| \leqslant (L_1 + L_2)(t-a)\,||u - v||_C, \quad \forall\,(t,x) \in I_2.$$

Ähnlich mit (1.4) kann man zeigen, daß

$$|Tu(x,t) - Tv(x,t)| \leqslant (L_1 + L_2)(x - a))\,||u - v||_C, \quad \forall(x,t) \in I_2.$$

Dann

$$|T^2u(t,x) - T^2v(t,x)| \leqslant \int_a^t |K(s,x,Tu(s,x),Tu(x,s)) -$$

$$- K(s,x,Tv(s,x),Tv(x,s))|\,ds \leqslant L_1\int_a^t |Tu(s,x) - Tv(s,x)|\,ds +$$

$$+ L_2\int_a |Tu(x,s) - Tv(x,s)|\,ds \leqslant L_1\int_a^t (L_1 + L_2)\,||u-v||_C(s-a)\,ds +$$

$$+ L_2\int_a^t (L_1 + L_2)\,||u - v||_C\,(x-a)\,ds = L_1(L_1 + L_2)\,||u - v||_C\,\frac{(t-a)^2}{2!} +$$

$$+ L_2(L_1 + L_2)||u-v||_C\,(x-a)(t-a) \leqslant \frac{1}{2!}(L_1 + L_2)\,[(L_1 + L_2)(t-a)^2 +$$

$$+ 2(L_1 + L_2)(x-a)(t-a) + (L_1 + L_2)(x-a)^2]\,||u - v||_C =$$

$$= \frac{1}{2!}(L_1 + L_2)^2(t + x - 2a)^2\,||u - v||_C, \quad \forall(t,x) \in I_2,$$

und analog

$$|T^2u(x,t) - T^2v(x,t)| \leqslant \frac{1}{2!}(L_1 + L_2)^2\,(x + t - 2a)^2\,||u - v||_C, \quad \forall(t,x) \in I_2.$$

Durch vollständige Induktion, kann man zeigen daß

$$|T^n u(t, x) - T^n v(t, x)| \leqslant \frac{1}{n!} (L_1 + L_2)^n (t + x - 2a)^n \|u - v\|_C, \quad \forall (t, x) \in I_2$$

Folglich

$$|T^n u(t, x) - T^n v(t, x)| \leqslant \frac{1}{n!} (L_1 + L_2)^n (2b - 2a)^n \|u - v\|_C, \quad \forall (t, x) \in I_2$$

und dann

$$\|T^n u - T^n v\|_C \leqslant \frac{1}{n!} (L_1 + L_2)^n 2^n (b - a)^n \|u - v\|_C.$$

Das erhaltene Ergebnis zeigt, daβ T^n vom Typ Lipschitz mit der Konstanten

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} [2(b - a) (L_1 + L_2)]^n \text{ ist.}$$

Weil $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, existiert $n \in N$ so, daβ $\alpha_n < 1$. Also ist dieser T^n eine Kontraktion.

2. Ausgehend von den vorhergehenden Ergebnissen, erhält man Sätze über die Existenz und die Eindeutitgkeit der Lösung des Problems (1.1). Es gilt

SATZ 2.1. *Wir setzen voraus,* daβ *die Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind. Dann hat das Problem* (1.1) *in* $C(I_2)$ *eine einzige Lösung und diese Lösung kann man ausgehend von jedem Element aus* $C(I_2)$, *durch die Methode der sukzessiven Approximation erhalten.*

Dasselbe Ergebnis wie in [1] kann man erhalten, wenn wir für (1.1) Lösungen in der Menge $S = \{u \in C(I_2) \mid |u(t, x) - f(x)| \leqslant r, \ \forall (t, x) \in I_2\}$ suchen, in der die Norm $\|\cdot\|_B$ definiert ist. So wird $(S, \|\cdot\|_B)$ zu einem vollständigen metrischen Raum. Dabei gilt

SATZ 2.2. *Wir setzen voraus,* daβ *die Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind. Es sei* $M = \sup_{\substack{(t, x) \in I_2 \\ (u,v) \in R \times R}} |K(t, x, u, v)|$ *und* $\delta = \min\left(b - a, \frac{r}{M}\right)$.

Wir notieren $\Delta = [a, a + \delta]$. *Dann hat das Problem (1.1) in*

$$S_1 = \{u \in C(\Delta \times \Delta) \mid |u(t, x) - f(x)| \leqslant r, \ \forall (t, x) \in \Delta \times \Delta\}$$

eine einzige Lösung und diese Lösung kann man ausgehend von jedem Element aus S_1, *durch die Methode der sukzessiven Approximation erhalten.*

(Eingegangen am 15. Juni 1981)

LITERATUR

1. Lakshmikantham, V., Lord, M., *Sobolev type differential equations*, The Univ. of Texas at Arlington, Tehnical Report No. 58, June, 1977.
2. Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S., Vaughn, R. L., *Existence and comparison results for a class of Volterra integral equations of Sobolev type*, The Univ. of Texas at Arlington, Tehnical Report No. 93, Sept. 1978.

3. Rus, A. I., *Aplicaţii cu iterate φ-contracţii*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **XXV**, 4 (1980), 47–51.
4. Rus, A. I., *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
5. Sobolev, S. L., *Bemerkungen über die numerische Lösung von Integralgleichungen* (Russisch), Uspehi Mat. Nauk, vol. 9, No. 3, 1954, 234–235.

ASUPRA UNUI OPERATOR INTEGRAL DE TIP VOLTERRA-SOBOLEV

(Rezumat)

În prezenta lucrare se extind proprietăţile operatorului de tip Volterra date în [3] în cazul unui operator integral de tip Volterra-Sobolev, iar apoi se prezintă două teoreme de existenţă şi unicitate pentru o problemă cu condiţii iniţiale.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXVII, 1982.

LIMITES DES RELATIONS DE TOLÉRANCE

MARIA CÂMPIAN

Le but de ce travail est de dèfinir et d'ètudier les limites des suites gènèralisèes des relations de tolèrance. Les dèfinitions et les notations qu'on va employer sont celles donnèes dans [2].

Soit A un ensemble. Une relation binaire $\rho \subseteq A \times A$ s'appelle relation de tolérance sur A (ou simplement tolérance) si elle est réflexive et symétrique, c'est-à-dire $\Delta_A \subset \rho$ et $\rho = \rho^{-1}$, où $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ est la diagonale de A. Un ensemble A de pair avec une relation de tolérance définie sur A s'appelle espace de tolérance ; il est noté (A, ρ).

Tout comme dans le cas de la relation d'équivalence sur un ensemble, la relation de tolérance partage l'ensemble donné en classes de tolérance.

Si $\rho \subset A \times A$ est une tolérance sur A et si $A' \subset A$, alors A' s'appelle une préclasse si $A' \times A' \subseteq \rho$. Une préclasse maximale s'appelle classe de tolérance. L'existence de la classe de tolérance résulte du fait que l'ensemble de toutes les préclasses est inductif par rapport à l'inclusion et par suite toute préclasse est contenue dans une préclasse maximale.

Exemple. Soient $A = \mathfrak{P}^*(\{1, 2, 3\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ et $\rho \subseteq A \times A$ définie par $X \rho Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \Phi$. Alors K_2, l'ensemble des sous-ensembles contenant 2, est une classe de tolérance.

En effet, $K_2 \times K_2 \subseteq 7$, parce que l'intersection des deux ensembles quelconques de K_2 est non vide ; si l'on ajoute un nouvel ensemble à K_2, il ne va pas contenir 2 et son intersection avec $\{2\}$ sera vide. Par conséquent, K_2 est maximal.

Observations. 1) Si $\rho \subseteq A \times A$ est une relation de tolérance et $\{A_i, i \in I\}$ est l'ensemble de ses préclasses, alors $\{A_i, i \in I\}$ est un recouvrement de A et $\rho = \bigcup_{i \in I} A_i \times A_i$. Particulièrement, l'ensemble des classes de tolérance $\{C_j, j \in J\}$ est un recouvrement de A et $\rho = \bigcup_{j \in J} C_j \times C_j$.

2) Si $\{A_i, i \in I\}$ est un recouvrement de A, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \times A_i = \rho$ est une relation de tolérance sur A et l'ensemble des préclasses de ρ contient l'ensemble $\{A_i, i \in I\}$.

3) Une relation de tolérance est une relation d'équivalence si et seulement si les classes de tolérance sont disjointes deux par deux (c'est-à-dire que le recouvrement formé par les classes de tolérance est une partition de A).

Soit (A, ρ) un espace de tolérance. Un ensemble de préclasses de tolérance $\mathfrak{B} = \{B_i, i \in I\}$ s'appelle base de l'espace (A, ρ) si $\rho = \bigcup_{i \in I} B_i \times B_i$. Un ensemble de préclasses $\mathfrak{B}_m = \{B_j, j \in J\}$ s'appelle base minimale de l'espace (A, ρ) si B_m est base et si, quel que soit $B_j \in \mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_m - \{B_j\}$ n'est pas base pour (A, ρ). Particulièrement, à la place des préclasses, on peut considérer dans la définition de la base des classes de tolérance.

On va maintenant définir, d'aprés [1], les limites d'une suite généralisée de familles d'ensembles.

Soit $\{A_\alpha, \alpha \in D\}$ une g-suite d'ensembles (D — ensemble dirigé). L'élément x appartient résiduellement à la g-suite (A_α) si $\exists \beta \in D$ de sorte que $x \in A_\alpha$ pour tout $\alpha \geqslant \beta$. L'élément x appartient fréquemment à la g-suite (A_α) si $\forall \beta \in D$, $\exists \alpha \in D$, $\alpha \geqslant \beta$, de sorte que $x \in A_\alpha$.

On appelle limite inférieure de la g-suite (A_α) l'ensemble des éléments qui appartiennent résiduellement à la suite (A_α) ; on la note par

$$A_* = \{x \mid x \in_r (A_\alpha)\}.$$

On appelle limite supérieure de la g-suite (A_α) l'ensemble des éléments qui appartiennent fréquemment à la suite (A_α) ; on la note par

$$A^* = \{x \mid x \in_f (A_\alpha)\}.$$

La suite $\{A_\alpha, \alpha \in D\}$ converge vers A si

$$A_* = A^* = A.$$

Soit $\{A_\alpha, \alpha \in D\}$ une g-suite de familles d'ensembles. On note par

$$\mathfrak{X} = \prod_{\alpha \in D} \mathcal{A}_\alpha = \{\{A_\alpha, \alpha \in D\} \mid A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$$

le produit cartesien des familles $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in D$. Les éléments de $\mathfrak{X}$ sont des g-suites d'ensembles. On va définir la limite inférieure, la limite supérieure et la limite de la famille $\{\mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$ de la maniére suivante

$$\mathcal{A}_* = \{\lim\inf A_\alpha \mid (A_\alpha) \in \mathfrak{X}\},$$

$$\mathcal{A}^* = \{\lim\sup A_\alpha \mid (A_\alpha) \in \mathfrak{X}\},$$

$$\mathcal{A} = \{\lim A_\alpha \mid A_\alpha)_c \in \mathfrak{X}\},$$

où (A_α) et $(A_\alpha)_c$ sont respectivement des g-suites et des g-suites convergentes de $\mathfrak{X}$.

Soit $\{\rho_\alpha, \alpha \in D\}$ une g-suite de relations de tolérance sur le même ensemble A, où D est un ensemble dirigé.

THÉORÈME 1. *La limite inférieure, la limite supérieure et la limite d'une g-suite de relations de tolérance sur un ensemble A sont des relations de tolérance sur A.*

Démonstration. Soit $\rho^* = \lim\sup \{\rho_\alpha, \alpha \in D\}$. On a $(x, x) \in \rho^*$ parce que $(x, x) \in \rho_\alpha$, $\forall \alpha \in D$, par conséquent ρ^* est réflexive.

Si $(x, y) \in \rho^*$, alors $\forall \alpha \in D$, $\exists \beta \geqslant \alpha$ de sorte que $(x, y) \in \rho_\beta$, donc $(y, x) \in \rho^*$, c'est-à-dire ρ^* est symétrique. On a ainsi montré que ρ^* est relation de tolérance. On peut montrer de la même manière que ρ^* et ρ sont des relations de tolérance.

THÉORÈME 2. *Si* $\mathcal{C}_\alpha$ *est l'ensemble des préclasses de l'espace* (A, ρ_α) *pour* $\alpha \in D$, *alors :*

1) $\lim\sup \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}$ *contient l'ensemble des préclasses de tolérance de l'espace* (A, ρ^*) ;

2) $\lim\inf \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}$ *est égale à l'ensemble des préclasses de tolérance de l'espace* (A, ρ_*) ;

3) $\lim \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}$ *est égale à l'ensemble des préclasses de tolérance de l'espace* (A, ρ).

Démonstration. Soient

$$\mathcal{C}^* = \lim\sup \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}, \quad \rho^* = \lim\sup \{\rho_\alpha, \alpha \in D\},$$
$$\mathcal{C}_* = \lim\inf \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}, \quad \rho_* = \lim\inf \{\rho_\alpha, \alpha \in D\},$$
$$\mathcal{C} = \lim \{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in D\}, \quad \rho = \lim \{\rho_\alpha, \alpha \in D\}.$$

1) Soit $(x, y) \in \rho^*$, donc pour $\forall \alpha \in D$, $\exists \beta \in D$, $\beta \geqslant \alpha$, de sorte que $(x, y) \in \rho_\beta$. Mais $\rho_\beta = \bigcup_{i \in I} A^i_\beta \times A^i_\beta$, donc $(x, y) \in A^i_\beta \times A^i_\beta$, $\beta \geqslant \alpha$, et par conséquent $(x, y) \in A^* \times A^*$, c'est-à-dire $\rho^* \subset \bigcup_{A^* \in \mathcal{C}^*} A^* \times A^*$.

2) Soit $(x, y) \in \rho^*$, il existe donc $\beta \in D$ de sorte que $(x, y) \in \rho_\alpha$ pour tout $\alpha \geqslant \beta$. Mais $\rho_\alpha = \bigcup_{j \in J} A^j_\alpha \times A^j_\alpha$, donc $(x, y) \in A^j_\alpha \times A^j_\alpha$ pour $\alpha \geqslant \beta$, et par conséquent $(x, y) \in A_* \times A_*$, c'est-à-dire $\rho_* \subset \bigcup_{A^* \in \mathcal{C}_*} A_* \times A_*$. Inversément, si $(x, y) \in \bigcup_{A^* \in \mathcal{C}_*} A_* \times A_*$, alors il existe $A_* \in \mathcal{C}_*$ de sorte que $x, y \in A_*$, donc il existe $\beta_1, \beta_2 \in D$ de sorte que $x \in A_\alpha$, $\alpha \geqslant \beta_1$ et $y \in A_\alpha$, $\alpha \geqslant \beta_2$. Soit $\beta \in D$ de sorte que $\beta \geqslant \beta_1$ et $\beta \geqslant \beta_2$, donc $(x, y) \in A_\alpha \times A_\alpha$ pour $\alpha \geqslant \beta$. Il en résulte $(x, y) \in \rho_\alpha$, $\alpha \geqslant \beta$, donc $(x, y) \in \rho_*$, c'est-à-dire $\bigcup_{A_* \in \mathcal{C}_*} A_* \times A_* \subset \rho_*$ L'égalité 2) résulte des deux inclusions.

3) On démontre l'égalité $\rho = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \times A$ de la même manière que l'égalité 2).

THÉORÈME 3. *Si* $\mathcal{B}_\alpha$ *est une base pour l'espace* (A, ρ_α), $\alpha \in D$, *alors :*

1) $\lim\inf \{\mathcal{B}_\alpha, \alpha \in D\}$ *est une base de l'espace* (A, ρ_*) ;

2) $\lim \{\mathcal{B}_\alpha, \alpha \in D\}$ *est une base de l'espace* (A, ρ).

Démonstration. Soient $\mathcal{B}_* = \lim\inf \{\mathcal{B}_\alpha, \alpha \in D\}$ et $\mathcal{B} = \lim \{\mathcal{B}_\alpha, \alpha \in D\}$. Tout comme dans le théorème antérieur, on montre que

1) $\rho_* = \bigcup_{B_* \in \mathcal{B}} B_* \times B_*$;

2) $\rho = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times B$.

par conséquent $\mathcal{B}_*$ et $\mathcal{B}$ sont des bases pour (A, ρ_*) et (A, ρ) respectivement.

Observation. Généralement, la limite inférieure ou la limite d'une g-suite de bases minimales ne sont pas des bases minimales pour l'espace limite, à cause de la condiţion de minimalité.

En effet, soient $A = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ et

$B_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{5\}, \ldots\}$,

$B_2 = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{5\}, \{6\}, \ldots\}$,

. . . .

$B_n = \{\{1, n+1\}, \{1, 2, n+2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots, \{n\}, \{n+1\}, \ldots\}$

une suite de bases minimales pour la relation de tolérance $\rho_n = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_n} B \times B$.

On a $\liminf \mathcal{B}_n = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}, \ldots\} = \mathcal{B}_*$ est une base pour ρ_*, mais elle n'est pas minimale, car $(\mathcal{B}_* - \{1\})$ est base pour ρ_*.

(Manuscrit reçu le 15 juin 1981)

BIBLIOGRAPHIE

1. Câmpian, V., *Suites d'ensembles*, Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, **18(41)**, 1 (1976), 36—40.
2. Maurer, I. Gy., Virag, I., *Sur les classes de tolérance d'une algèbre universelle*, Publicationes mathematicae, Tomus 25, fasc. 3—4, Debrecen, 1978, 237—240.
3. Zelinka, N., *Tolérances en structures algébriques*, Czech. Math. J., **20**(95), (1970), 179—183.

LIMITE DE RELAŢII DE TOLERANŢĂ

(Rezumat)

În această lucrare se definesc şi se studiază limitele şirurilor generalizate de relaţii de toleranţă. Se arată că limita inferioară, limita superioară şi limita unui g-şir de relaţii de toleranţă pe o mulţime A sînt relaţii de toleranţă pe A.

RECENZII

E. J. Blums, Yu. A. Mikhailov, R. J. Ozols, **Heat and Mass Transfer in Magnetohydrodynamics**, Zinatne, Riga, 1980, 355p.

The book of the well-known Soviet specialists, contains the fundamental results obtained in the field of magnetohydrodynamics (MHD) heat and mass transfer theory, presented under the most complete and general aspects. Results from such work have great practical applications in giving the design engineer quantitative data essential for the construction of efficient fluid handling systems.

The material of the book is organized in eight chaptors whose brief descriptions are as follows: 1. — The MHD-flow equations and some general considerations of thermodynamics properties of the fluid flow; 2. — Flow in channels and in boundary layer, heat transfer in one and two dimensional flow; 3. — Free convection flow in a vertical channel, boundary layer free convetion along a vertical flat plate and horizontal circular cylinder; 4. — Convective mass transfer in MHD with special reference to the flow in boundary layer over a permeable surface; 5. — Heat and mass transfer in a magnetizated liquid, thermomagnetic convection, diffusion in magnetizated liquids; 6. — Turbulent heat and mass transfer in a magnetic field, special features of MHD turbulent flow, local characteristics of MHD heat and mass transfer turbulent flow; 7. — Fundamental applications of MHD-flow in biology and medicine; 8. — Experimental studies of heat and mass transfer in the field of MHD.

In the opinion of the reviewer the authors' development of topic in this book is logical and the composition of content is excellent. The text incorporates many of the authors' original contributions in the field of MHD-flow. An excellent feature of the book is that it contains an extensive list of significant Russian and foreign references which is helpful for research workers. There are many tabulated numerical results and figures included. The mathematical analysis is given in close relation with the physical essence of the phenomenon under discussion. The many experimental results, apparatus and practical applications described makes the book different from the usual text-books on MHD-flow.

This fine book is an excellent contribution to the subject of MHD-flow theory and can be recommended with full confidence to all active research workers engaged in this area.

I. POP

M. Csörgö and P. Révész, **Strong Approximations in Probability and Statistics**, Akademiai Kiadó, Budapest, 1981.

Cartea prezintă rezultatele recente în problema invarianţei tari pentru sume parţiale şi procese empirice de variabile aleatoare independente şi identic repartizate, subliniind aplicabilitatea metodologiei aproximării tari la diferite. probleme din teoria probabilităţilor şi statistică. Ea se adresează cercetătorilor din domeniul probabilităţilor şi statisticii, şi conţine o amplă bibliografie din acest domeniu.

Materialul este împărţit în şapte capitole. După un capitol introductiv care face un istoric al dezvoltării teoriei principiului invarianţei slabe şi tari, urmează alte capitole bine organizate, care conţin teoreme şi rezultate riguros demonstrate de largă utilitate în probabilităţi şi statistică.

Capitolul 2 este dedicat celei mai bune aproximări tari a sumelor parţiale de v.a.i.i.r. prin procese Wiener precum şi problema razei de convergenţă. Capitolul este precedat de un studiu al proceselor Wiener.

Capitolul 3 extinde rezultatele precedente de la procese Wiener de parametru timp la sume parţiale de v.a.i.i.r. Capitolul tratează numai acele proprietăţi a comportării asimptotice ale sumelor de v.a.i.i.r. care pot fi deduse prin principiul invarianţei.

Capitolul 4 conţine teoreme de aproximare tare pentru procese empirice şi procese cuantile de v.a.i.i.r.

Capitolul 5 extinde teoremele din cap. 4 la procese de sume parţiale şi arată că prin aplicarea rezultatelor acestui capitol, teoremele relativ la procese Browniene şi Kiefer rămîn valabile şi pentru procese empirice şi procese cuantile.

Capitolul 6 studiază alte procese empirice şiruri de densităţi empirice, funcţii caracteristice, de regresie) cu ajutorul metodologiei aproximaţiei tari.

Capitolul 7 urmăreşte să demonstreze că metodologia aproximaţiei tari poate fi aplicată şi la studiul proprietăţilor de convergenţă slabă şi tare a volumului aleator de sume parţiale şi de procese empirice, obţinîndu-se anumite teoreme limită.

Cartea este de un înalt nivel ştiinţific, tratează o temă fundamentală din teoria probabilităţilor şi statistică: teoreme limită, care sînt deduse prin principiul invarianţei. Pe lîngă acest aspect teoretic autorii arată aplicabilitatea acestui principiu în alte domenii ale teoriei probabilităţilor şi statisticii.

ELENA OANCEA

Harro Heuser, **Lehrbuch der Analysis**, Teil 1. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980, 644 pag.

Analiza matematică este una dintre ramurile de bază ale matematicii. Conceptele şi rezultatele ei sînt folosite cu succes în multe ramuri ale matematicii, dar şi pentru elaborarea şi studierea modelelor matematice ale unor fenomene din diferite sectoare ale vieţii social-economice. În cursul dezvoltării sale analiza matematică şi-a lărgit permanent obiectul de studiu, reuşind să rezolve probleme din ce în ce mai complexe şi devenind un instrument de lucru indispensabil nu numai pentru matematicieni, ci şi pentru fizicieni, chimişti, ingineri, economişti şi biologi. De aceea studiul analizei matematice ocupă un loc central în cadrul pregătirii profesionale a tuturor acestor categorii de specialişti.

Tratatul de analiză matematică al profesorului universitar Harro Heuser vine în ajutorul acelora care învaţă analiza matematică şi care vor să dobîndească cunoştinţe temeinice în acest domeniu. În acest amplu tratat se prezintă în spiritul matematicii actuale toate rezultatele clasice ale analizei reale uni- şi multidimensionale. Prezentarea materialului se face în aşa fel încît să pregătească înţelegerea construcţiilor abstracte ale ramurilor moderne ale matematicii, în special ale topologiei şi ale analizei funcţionale.

Tratatul este împărţit în două părţi. Partea întîi, pe care o prezentăm aici, cuprinde partea fundamentală a analizei matematice: teoria funcţiilor reale de o variabilă reală. Autorul introduce axiomatic mulţimea numerelor reale, iar apoi trece la studiul şirurilor de numere reale. În continuare studiază amănunţit continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală. Partea întîi se încheie cu un capitol dedicat intervertirii trecerilor la limită.

Cartea este scrisă cu o deosebită măiestrie didactică şi se evidenţiază printr-o claritate remarcabilă. Pentru a asigura accesibilitatea întregii teorii şi pentru a micşora dificultăţile pe care le întîmpină cei care încep studiul matematicii superioare, autorul pune mereu accentul pe motivarea noţiunilor şi rezultatelor, trece treptat de la concret la abstract, dă numeroase explicaţii, exemple şi aplicaţii. Este permanent preocupat să scoată în relief atît efectele pozitive pe care le-au avut asupra dezvoltării analizei matematice impulsurile primite din exterior, cît şi utilitatea practică a rezultatelor analizei matematice. 780 de probleme intercalate în text oferă cititorului posibilitatea să-şi verifice cunoştinţele dobîndite şi să exerseze aplicarea lor.

Recomandăm cartea cu căldură tuturor studenţilor care învaţă analiza matematică, precum şi tuturor cadrelor didactice care predau analiza matematică în învăţămîntul superior.

WOLFGANG W. BRECKNER

Theodor Bröcker, **Analysis in mehreren Variablen**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1980, vi + 362 pag.

Cartea de faţă constituie un curs universitar şi a fost scrisă pe baza unor lecţii de analiză matematică ţinute de autor. Ea este destinată tuturor studenţilor, care, în urma studiului bazelor analizei matematice (în special al calculului diferenţial şi al calculului integral al funcţiilor reale de o variabilă reală), au trecut la studiul funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

Din multitudinea problemelor şi aspectelor pe care le ridică teoria spaţiilor euclidiene n-dimensionale şi a funcţiilor definite pe mulţimi din aceste spaţii, autorul prezintă în cele cinci capitole ale cărţii calculul diferenţial al funcţiilor reale de mai multe variabile reale, teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, analiza pe varietăţi şi teoremele integrale fundamentale. Întreaga materie, asupra căreia şi-a concentrat autorul atenţia, este riguros şi concis expusă. Ea este însă în permanenţă ilustrată prin exemple, probleme şi aplicaţii interesante.

Recomandăm cartea cadrelor didactice de la facultăţile de matematică ca sursă de informare în elaborarea lecţiilor de analiză matematică şi de ecuaţii diferenţiale, precum şi studenţilor de la aceste facultăţi ca material bibliografic în vederea completării şi aprofundării lecţiilor audiate.

WOLFGANG W. BRECKNER

CRONICĂ

I. Publicaţii ale seminariilor de cercetare ale Facultăţii de matematică (serie de preprinturi):

Preprint 1—1980, C. Mustăţea, Al. B. Németh, I. Şerb, I. Păvăloiu, A. Diaconu, D. Brădeanu, D. Ripeanu, *Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods.*

Preprint 2—1980, A. Pál, L. Burs, I. Predeanu, M. Cişmaru, V. Mioc, B. Pârv, M. Trifu, E. Radu, T. Oproiu, Gh. Vass, *Seminar of Celestial Mecanics and Space Researck.*

Preprint 1—1981, I. A. Rus, *On the Problem of Darboux-Ionescu.*

Preprint 2—1981, A. Georgescu, *Recent Results in Fluid Mechanics.*

Preprint 3—1981, M. C. Alicu-Anisiu, M. Deaconescu, I. A. Rus, *Seminar on Fixed Point Theory.*

Preprint 4—1981, A. Diaconu, C. Iancu, C. Mustăţa, Al. B. Németh, I. Păvăloiu, D. Ripianu, I. Şerb, *Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods.*

II. Participări la manifestări ştiinţifice organizate în afara facultăţii

1. *Cel de al 16-lea Congres Internaţional de Istorie a Ştiinţei, Bucureşti, 26 august — 3 septembrie* 1981, organizat sub auspiciile UNESCO, Uniunii Internaţionale de Istorie şi Filozofia ştiinţei şi Academiei Republicii Socialiste România, sub înaltul patronaj al tovarăşei academician doctor inginer ELENA CEAUŞESCU, prim viceprim-ministru al guvernului R.S.R., preşedinţele Consiliului Naţional pentru Ştiinţă şi Tehnologie.

Din partea Facultăţii de matematică au fost prezentate lucrările:

Gh. Chiş, Pál Á., *Les débuts et le développement de l'astronomie à Cluj.*

N. Both, *Le Séminaire Mathématique de l'Université de Cluj.*

M. Ţarină, *Perspectives historiques et considérations méthodologiques sur le développement des mathématiques.*

V. Ureche, *High Energy Cosmic Sources.*

T. Oproiu (Centrul de Astronomie şi Ştiinţe Spaţiale), E. Vădeanu (Liceul industrial „Clujana"), *Some Considerations of the Scientific and Instructive Significance of the Gnomonics.*

2. *A VI-a întîlnire de lucru cu tema „Teoria operatorilor", Timişoara,* 1—11 *iunie* 1981 (cu participare internaţională)

De la Facultatea de matematică s-a prezentat comunicarea:

I. A. Rus, *Coincidence and surjectivity.*

3. *Al V-lea Seminar româno-finlandez de Analiză complexă, Bucureşti, 28 iunie — 3 iulie 1981.*

Din partea Facultăţii de matematică s-au prezentat comunicările:

P. Mocanu, D. Ripeanu, I. Şerb, *The order of starlikness of certain integral operators.*

P. Mocanu, *On starlike functions with respect to simmetric points.*

P. Mocanu, S. S. Miller (S.U.A.), M. O. Reade (S.U.A.), *Subordination preserving integral operators.*

P. Mocanu, S. S. Miller (S.U.A.), *Univalent solutions of Briot-Bouquet differential equations.*

H. Wiesler, *Extensions of admissible functions method.*

Gr. S. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions.*

4. *Al VII-lea Simpozion de informatică şi conducere, Cluj-Napoca, 20—22—mai 1981*

D. Oprean, *Conducerea prin sisteme informatice.*

A. Boeriu, A. Diaconu, B. Pârv, L. Săcelean, S. Petrişor, *Subsistem informatic pentru elaborarea orariilor într-o instituţie de învăţămînt superior.*

5. *Colocviul de geometrie şi topologie, Buşteni, 27—29 iunie 1981.*

De la Facultatea de matematică s-au prezentat comunicările:

P. Enghiş, *E-conexiuni semi-simetrice şi sfert-simetrice.*

V. Groze, *Asupra unor proprietăţi de tranzitivitate în G-plane.*

F. Radó, *Caracterizarea planelor pre-euclidiene peste un cîmp pitagorean sau un cîmp ordonabil.*

M. Ţarină, *Conexiuni invariante.*

A. Vasiu, *Caracterizarea grupală a unei clase de plane Hjelmslev—Barbilian.*

6. *Consfătuirea personalului unităţilor de informatică din reţeaua învăţămîntului, Braşov, 27 iulie — 2 august 1981.*

Din partea Centrului de calcul al Universităţii „Babeş-Bolyai" s-au prezentat comunicările:

Gr. Moldovan, P. Pop şi R. Pop, *Pachet de programe pentru exploatarea băncii de date a M.E.I. la nivelul şi necesităţile inspectoratelor şcolare judeţene.*

Gr. Moldovan, Ş. Gh. Mureşan, T. Toadere, *Sistem informatic privind înscrierea şi evidenţa studenţilor.*

R. Lazăr, L. Cobzaş, E. Munteanu *Sistem informatic pentru evidenţa mijloacelor fixe la unităţile bugetare.*

B. Pârv, A. Diaconu, S. Petrişor, L. Săcelean, A. Boeriu, *Sistem informatic pentru elaborarea orariilor.*

I. Chiorean, D. Chiorean, *Probleme de nutriţie.*

7. *Simpozionul naţional „Metode şi modele structurale în fizică şi în domenii interdisciplinare", Facultatea de fizică, 25—26 septembrie 1981*

De la Facultatea de matematică s-au prezentat lucrările:

Pál Á., *Contribuţia Observatorului astronomic la studiul atmosferei terestre pe baza observaţiilor optice ale sateliţilor artificiali.*

V. Ureche, T. Oproiu (C.A.S.S.), N. Lungu (I. P. Cluj-Napoca), *Coeficientul de împachetare gravitaţională în cazul politropilor relativişti.*

V. Ureche, *Stele relativiste.*

I. Stan, *Modelul distribuţiilor în probleme de mecanică.*

8. *Colocviul naţional de mecanica fluidelor, Braşov, 16—18 octombrie 1981*

I. Stan, *Asupra unor probleme de difuzie.*

I. M. Pop, *Probleme de convecţie liberă pe un cilindru circular.*

T. Petrilă, *Model matematic pentru studiul turbinelor eoliene cu ax vertical.*

9. *Al III-lea Simpozion naţional de analiză funcţională şi aplicaţii, Craiova, 6—7 noiembrie 1981.*

Din partea Facultăţii de matematică s-au prezentat comunicările:

I. A. Rus, *Probleme şi rezultate în teoria punctului fix.*

C. Mustăţea, *Prelungirea funcţiilor Holder şi cîteva probleme de cea mai bună aproximare.*

Şt. Cobzaş, *Rezultate de existenţă în teoria celei mai bune aproximări.*

A. Németh, *Convexitate relativă la un operator subliniar cu aplicaţii în optimizare.*

I. Păvăloiu, *Observaţii asupra punctelor fixe ale operatorilor în spaţii metrice.*

A. Diaconu, I. Păvăloiu, *Asupra unei metode de tip Stefensen.*

10. *Colocviu de Mecanică şi Geometrie, Iaşi, 30—31 octombrie 1981*, dedicat aniversării a 75 de ani de la naşterea profesorului Mendel Haimovici.

Din partea Facultăţii de matematică s-au prezentat lucrările:

A. Pál, M. Ţarină, *Consideraţii topologice asupra unor probleme de mecanică cerească.*

P. Enghiş, *Asupra T-recurenţei unor conexiuni semisimetrice şi sfert-simetrice.*

Cu această ocazie, delegaţia Facultăţii de matematică, însoţită de numeroşi participanţi la simpozion, din Bucureşti şi Iaşi, a depus o coroană de flori la mormîntul *Profesorului Gheorghe Bratu* în cimitirul „Eternitate" din Iaşi, cu următoarea inscripţie:

„Lui Gheorghe Bratu, profesor ctitor al Facultăţii de matematică din Cluj, omagiul şi recunoştinţa profesorilor şi studenţilor acestei facultăţi, la 100 de ani de la naşterea lui".

11. *Sesiunea ştiinţifică dedicată aniversării a 20 de ani de la înfiinţarea Institutului de învăţămînt superior, Baia Mare, 6—7 noiembrie 1981*

Din partea facultăţii s-au prezentat comunicările:

C. Iancu, I. Păvăloiu, *Asupra rezolvării ecuaţiilor prin interpolare inversă de tip Hermite.*

Gh. Pic, *Despre operaţiile n-are în latici distributive.*

Gr. Moldovan, *Unele proprietăţi algebrice ale operatorilor convolutivi pozitivi.*

Balázs M., *Asupra unei metode iterative pentru rezolvarea ecuaţiilor.*

I. Purdea, N. Both, *Toleranţe n-tranzitive.*

G. Goldner, *Asupra spaţiilor semiordonate local pline.*

V. Pop, *Ajustarea datelor experimentale prin funcţii spline.*

Gh. Micula, *Metode numerice pentru ecuaţia diferenţială implicită.*

12. *Sesiunea de comunicări cu tema: „Inegalităţi matematice", Sibiu, 13—15 noiembrie 1981*

Din partea Facultăţii de matematică s-au prezentat comunicările:

D. D. Stancu, *Inegalităţi de tip T. Popoviciu şi G. G. Loretz în teoria aproximării.*

I. Păvăloiu, *Rezolvarea ecuaţiilor algebrice prin interpolare.*

P. Mocanu, D. Ripeanu, I. Şerb, *Asupra stelarităţii funcţiilor Alpha-convexe.*

A. Diaconu, *Asupra unor metode iterative.*

I. P. Cluj, Municipiul Cluj-Napoca cda. nr. 3013 1/1982

În cel de al XXVII-lea an (1982) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* apare în specialităţile:

matematică

fizică

chimie

geologie-geografie

biologie

filozofie

ştiinţe economice

ştiinţe juridice

istorie

filologie

На XXVII году издания (1982) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* выходит по следующим специальностям:

математика

физика

химия

геология-география

биология

философия

экономические науки

юридические науки

история

филология

Dans sa XXVII-e année (1982) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* paraît dans les spécialités:

mathématiques

physique

chimie

géologie-géographie

biologie

philosophie

sciences économiques

sciences juridiques

histoire

philologie

48 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM, Departamentul export-import presă, P. O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, str. 13 Decembrie nr. 3.