STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

MATHEMATICA
1
1977

CLUJ-NAPOCA

ANUL XXII 1977

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

1

Redacţia: CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — INHALT

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

PROJECTORS IN FINITE π-SOLVABLE GROUPS

RODICA COVACI

1. The purpose of this paper is the study of the existence and conjugacy of projectors in finite π-solvable groups. We prove that some results of H. Schunck [5] given only for solvable groups can be extended to π-solvable groups and so we obtain a generalization of a theorem of B. Brewster [2].

All groups considered are finite.

We give the following useful definitions:

DEFINITION 1.1. a) [5] We call the class $\mathfrak{X}$ of groups a *homomorph* if $\mathfrak{X}$ is closed under homomorphisms.

b) [4] A group G is *primitive* if there is a maximal subgroup H of G with $\mathrm{core}_G H = 1$, where $\mathrm{core}_G H = \bigcap \{H^g / g \in G\}$.

c) [5] A homomorph $\mathfrak{X}$ is a *Schunk class* (or a *saturated homomorph*) if it is *primitively closed*, i.e. if any group G, all of whose primitive factor groups are in $\mathfrak{X}$, is itself in $\mathfrak{X}$.

d) [5] If $\mathfrak{X}$ is a class of groups and E is a group, a subgroup E of G is called an *$\mathfrak{X}$-projector* of G if $E \in \mathfrak{X}$ and $E \leq V \leq G$, $V_0 \Delta V$, $V/V_0 \in \mathfrak{X}$ implies $V = EV_0$.

DEFINITION 1.2. Let π be a set of primes and π' the complement to π in the set of all primes.

a) [3] A group is *π-solvable* if every chief factor is either a solvable π-group or a π'-group. When π is the set of all primes, we obtain the notion of solvable group.

b) A class $\mathfrak{X}$ of groups is said to be *π-closed* if

$$G/0_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X} \Rightarrow G \in \mathfrak{X},$$

where $0_{\pi'}(G)$ denotes the largest normal π'-subgroup of G. We shall call *π-homomorph* a π-closed homomorph and *π-Schunck class* a π-closed Schunck class.

Let $\mathfrak{X}$ be a homomorph. The following propositions of [5] are also true for any finite groups:

PROPOSITION 1.3. *If* E *is an $\mathfrak{X}$-projector of* G *and* $E \leq H \leq G$, *then* E *is an $\mathfrak{X}$-projector of* H.

PROPOSITION 1.4. *Let* E *be an $\mathfrak{X}$-projector of* G *and* N *a normal subgroup of* G. *Then* EN/N *is an $\mathfrak{X}$-projector of* G/N.

PROPOSITION 1.5. *If* N *is a normal subgroup of* G, $\bar{E}$/N *is an $\mathfrak{X}$-projector of* G/N *and* E *is an $\mathfrak{X}$-projector of* $\bar{E}$, *then* E *is an $\mathfrak{X}$-projector of* G.

We shall use some theorems of R. Baer [1] which we give below.

THEOREM 1.6. *A solvable minimal normal subgroup of a group is abelian.*

THEOREM 1.7. *If* S *is a maximal subgroup of* G *with* core S = 1 *and* N *is a minimal normal subgroup of* G, *then* G = SN *and* $S \cap N = 1$.

THEOREM 1.8. *Let us suppose that* G *has a* $\neq 1$ *normal solvable subgroup and let* S *be a maximal subgroup of* G *with* $core_G S = 1$.

a) *The existence of a* $\neq 1$ *normal solvable subgroup of* S *implies the existence of a normal subgroup* $N \neq 1$ *of* S *with* $(|N|, |G:S|) = 1$.

b) *If* S *has a normal subgroup* $N \neq 1$ *with* $(|N|, |G:S|) = 1$, *then* S *is conjugate to any maximal subgroup* T *of* G *with* $core_G T = 1$.

2. All groups considered here are finite and π-solvable.

The main results of this note are contained in the following two theorems:

THEOREM 2.1. *If* $\mathfrak{X}$ *is a* π*-homomorph, then any two* $\mathfrak{X}$*-projectors of a* π*-solvable group* G *are conjugate in* G.

Proof. By induction on $|G|$. Let E and E_0 be two $\mathfrak{X}$-projectors of G. If $G \in \mathfrak{X}$, using 1.1. d) we obtain $E = E_0 = G$. So suppose $G \notin \mathfrak{X}$. Let N be a minimal normal subgroup of G. By 1.4., EN/N and E_0N/N are $\mathfrak{X}$-projectors of G/N. By the induction, EN/N and E_0N/N are conjugate in G/N and so for some $x \in G$, $EN = E_0^xN$. We distinguish two cases:

1) There is a minimal normal subgroup M of G with $EM \neq G$. We put $N = M$. By 1.3., E and E_0^x are $\mathfrak{X}$-projectors of EN, hence by the induction E and E_0^x are conjugate in EN and so E and E_0 are conjugate in G.

2) For any minimal normal subgroup N of G, $EN = G = E_0N$. Then every minimal normal subgroup N of G is a solvable π-group. Indeed, since G is π-solvable, N is either a solvable π-group or a π'-group. Let us suppose that N is a π'-group. It follows that $N \leq 0_{\pi'}(G)$ and we have

$$G/0_{\pi'}(G) \simeq (G/N/(0_{\pi'}(G)/N).$$

But $G/N = EN/N \simeq E/E \cap N \in \mathfrak{X}$, hence $G/0_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$, which implies, by the π-closure of $\mathfrak{X}$, the contradiction $G \in \mathfrak{X}$. So N is a solvable π-group. By 1.6., N is abelian. We shall prove that E and E_0 are maximal subgroups of G. For instance, for $E: E < G$ since $G \notin \mathfrak{X}$ and $E \leq E^* < G$ implies $E = E^*$ because, if we suppose $E < E^*$, there is an element $e^* \in E^* \setminus E \subset G = EN$, hence $e^* = en$ with $e \in E$, $n \in N$, but we see that $n \in N \cap E^* = 1$ (N is abelian), which means the false result $e^* = e \in E$. Let us notice that $core_G E = 1 = core_G E_0$. If we suppose, for example, $core_G E \neq 1$, putting $N \leq core_G E$ we have $G = EN = E\ core_G E = E$, a contradiction with $E < G$. Applying now 1.8.a) and b), it follows that E and E_0 are conjugate in G.

THEOREM 2.2. *A* π*-homomorph* $\mathfrak{X}$ *is a Schunck class if and only if any* π*-solvable group has* $\mathfrak{X}$*-projectors.*

Proof. If $\mathfrak{X}$ is a Schunck class (not necessarily π-closed), we prove by induction on $|G|$ that any π-solvable group G has $\mathfrak{X}$-projectors. Two possibilities are considered here:

1) There is a minimal normal subgroup M of G such that $G/M \notin \mathfrak{X}$. By the induction, G/M has an $\mathfrak{X}$-projector $\overline{H}/M$. Since $G/M \notin \mathfrak{X}$. $|\overline{H}| < |G|$ and so, by the induction, $\overline{H}$ has an $\mathfrak{X}$-projector H. Now, by 1.5., H is an $\mathfrak{X}$-projector of G.

2) Any minimal normal subgroup M of G satisfies $G/M \in \mathfrak{X}$. If G is not primitive, we conclude, by primitively closure of $\mathfrak{X}$, that $G \in \mathfrak{X}$, hence G is its own $\mathfrak{X}$-projector. So we may assume that G is primitive. If $G \in \mathfrak{X}$, G is its own $\mathfrak{X}$-projector. If $G \notin \mathfrak{X}$, we reason in the following way. Let S be a maximal subgroup of G with $\mathrm{core}_G S = 1$. S is an $\mathfrak{X}$-projector of G. Indeed, we notice that $S \in \mathfrak{X}$, because if M is a minimal normal subgroup of G it follows, by 1.7., $MS = G$ and $M \cap S = 1$, hence $S = S/M \cap S \simeq MS/M = G/M \in \mathfrak{X}$. Further, if $S \leq V \leq G$, $V_0 \Delta V$, $V/V_0 \in \mathfrak{X}$, we have, since S is a maximal subgroup of G, $V = S$ or $V = G$. $V = S$ implies $V = SV_0$. If $V = G$, we choose a minimal normal subgroup M of G with $M \leq V_0$; by 1.7., $MS = G$; thus $V = SV_0$.

Conversely, let $\mathfrak{X}$ be a π-homomorph with the property that any π-solvable group has $\mathfrak{X}$-projectors. We shall prove that $\mathfrak{X}$ is primitively closed. Suppose $\mathfrak{X}$ is not primitively closed and let G be a π-solvable group of minimal order with respect to the conditions: $G \notin \mathfrak{X}$ and any primitive factor group of G is in $\mathfrak{X}$. If M is a minimal normal subgroup of G, by the minimality of G $G/M \in \mathfrak{X}$. G is a π-solvable group and so there is an $\mathfrak{X}$-projector H of G. Thus $H \leq G = G$, $M \Delta G$, $G/M \in \mathfrak{X}$ implies $G = MH$. By the π-closure of $\mathfrak{X}$ and by the assumption $G \notin \mathfrak{X}$, we conclude, like in the proof 2.1., that M is a solvable π-group, hence, by 1.6., M is abelian. So $M \cap H = 1$. Like in 2.1., H is a maximal subgroup of G. Now suppose G is not primitive. Then $\mathrm{core}_G H \neq 1$, hence, by the minimality of G, $G/\mathrm{core}_G H \in \mathfrak{X}$. By 1.4., $H/\mathrm{core}_G H$ is an $\mathfrak{X}$-projector of $G/\mathrm{core}_G H$ and so $H = G$. But this is not possible because $H \in \mathfrak{X}$ and $G \notin \mathfrak{X}$. Thus G is primitive, contradicting the choice of G.

(Received December 30, 1975)

REFERENCES

1. Baer, R., *Classes of finite groups and their properties*, Illinois J. Math., **1**, 4, 1957, 115–187.
2. Brewster, B., *$\mathfrak{F}$ — Projectors in Finite π — Solvable Groups*, Archiv der Mathematik, **23**, 2, 1972, 133–138.
3. Čunihin, S. A., *O teoremah tipa Sylowa*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **66**, 1949, 165–168.
4. Gaschütz, W., *Selected topics in the theory of soluble groups*, Australian National University, Canberra, January-February 1969.
5. Schunck, H., *$\mathfrak{H}$ — Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z., **97**, 4, 1967, 326–330.

PROIECTORI ÎN GRUPURI FINITE π-RESOLUBILE

(Rezumat)

În lucrare se studiază existenţa şi conjugarea proiectorilor în grupuri finite π-resolubile. În acest mod se generalizează unele rezultate ale lui H. Schunck şi B. Brewster.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

IDEALS IN DISTRIBUTIVE QUASI-LATTICES

JUHANI NIEMINEN

1. Introduction and basic concepts. In [4] Plonka introduced and considered a natural generalization of distributive lattices: the concept of distributive quasi-lattices. He proved that a distributive quasi-lattice can be represented as a certain direct spectrum of distributive lattices and gave a characterization of independent sets in distributive quasi-lattices.

By a quasi-lattice Plonka means an algebra $Q = (X, \vee, \wedge)$, where the binary operations $\vee$ and $\wedge$ satisfy all the ordinary lattice axioms except the absorption laws. So the properties of quasi-lattices show the power of the absorption laws in lattice structures.

In this note we shall consider different kinds of ideals of distributive quasi-lattices and give a few characterizations for absorption laws in distributive quasi-lattices.

In [4] Plonka calls an algebra $Q = (X, \vee, \wedge)$ a quasi-lattice, if its fundamental operations $\vee$ and $\wedge$ satisfy the axioms:

$$x \wedge x = x, \qquad x \vee x = x. \tag{1}$$

$$x \wedge y = y \wedge x, \qquad x \vee y = y \vee x. \tag{2}$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \qquad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z). \tag{3}$$

If, moreover, the operations $\vee$ and $\wedge$ satisfy the axiom

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \vee z), \tag{4}$$

the algebra Q is called a distributive quasi-lattice and denoted by DQL. Some of the properties of distributive quasi-lattices proved by Plonka in [4] hold already for modular quasi-lattices as shown below. A quasi-lattice QL is modular and it is denoted by MQL, if it satisfies the axioms (1), (2), (3) and the law (5) given below:

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee (x \wedge z)) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\ x \vee (y \wedge (x \vee z)) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned} \tag{5}$$

LEMMA 1. *In a* MQL *the following weakened laws of absorption are fulfilled*: $x \vee y \vee (x \wedge y) = x \vee y$ *and* $(x \wedge y) \wedge (x \vee y) = x \wedge y$.

Proof. $x \vee y = x \vee (y \wedge (x \vee y)) = x \vee (y \wedge (x \vee (y \wedge y))) = x \vee (y \wedge y) \vee (y \wedge x) = x \vee y \vee (x \wedge y)$. The latter part of the lemma is proved dually.

LEMMA 2. *If there is an element* 1 *in a* MQL *such that* $1 \vee x = 1$ *and* $1 \wedge x = x$ *for every* x MQL, *or there exists an element* 0 *such that* $0 \vee x = x$ *and* $0 \wedge x = 0$ *for every* $x \in$ MQL, *then* MQL *is a modular lattice.*

Proof. $x = 1 \wedge x = x \wedge (1 \vee (x \wedge y)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge 1) = (x \wedge y) \vee x = (x \vee y) \wedge (x \vee x) = (x \wedge y) \vee x$, and so the absorption laws hold in MQL and hence MQL is a modular lattice. The remaining part of the lemma is proved dually.

LEMMA 3. *Replacing in the set of axioms of a* MQL *the formula* $x \wedge x = x$ *by the formula* $x \vee y \vee (x \wedge y) = x \vee y$, *we obtain an equivalent set of axioms. Similarly, replacing* $x \vee x = x$ *by* $(x \wedge y) \wedge (x \vee y) = x \wedge y$, *we obtain an equivalent set of axioms for* MQL.

Proof: $x = x \vee x = x \vee x \vee (x \wedge x) = x \vee (x \wedge x) = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = (x \vee x) \wedge (x \vee x) = x \wedge x$. The second part is proved dually.

The lemmas above are generalizations of Lemma 1, Theorem 2 and Theorem 1 in [4], respectively. Obviously each DQL is a MQL, too. Unfortunately, the law of modularity seems to be too weak for defining an ideal concept by using the meet and join of MQL such that the join of two ideals would further be an ideal in MQL.

Each quasi-lattice can be ordered in two different ways: (i) $a \leq b \Leftrightarrow b = a \vee b$, and (ii) $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$. If the orders $\leq$ and $\preccurlyeq$ are mutually reciprocal, i.e. $a \leq b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$, then, as noted by Matsushita [2, Thm. 3], both of the absorption laws hold, and the quasi-lattice in question is in fact a lattice. So in all that follows, we shall use the first order relation; i.e., if necessary, we assume that the quasi-lattices under consideration are ordered according to the join-semilattice order. Note that the structures called in [2] quasi-lattices do not coincide with th quasi-lattices of Plonka considered here.

2. Ideals in distributive quasi-lattices. We shall consider two kinds of ideals in distributive quasi-lattices: at first ideals based on join and meet operations of a DQL and secondly ideals based on the join operation and the order relation of DQL.

A non-empty subset I of a quasi-lattice QL is called an ideal, if (i) $a \in I$ and $b \in I$ imply $a \vee b \in I$, and (ii) $a \in I$ and $x \in QL$ imply $a \wedge x \in I$. The operations meet $\wedge$ and join $\vee$ are defined in the family $\mathfrak{I}(QL)$ of all ideals of the quasi-lattice QL as follows: $x \in I \wedge J$ if and only if $x \in I$ and $x \in J$, i.e. $\wedge$ coincides with the settheoretical intersection $\cap$, and $x \in I \vee J$ if and only if $x = a \vee b$ for some a and b, $a \in I$ and $b \in J$. Obviously $I \wedge J$ is an ideal of QL. For $I \vee J$ we prove

LEMMA 4. *In a* DQL $I \vee J$ *is an ideal.*

Proof. Let $x, y \in I \vee J$. Consequently, $x = a \vee b$ and $y = c \vee d$, where $a, c \in I$ and $b, d \in J$. $x \vee y = (a \vee c) \vee (b \vee d)$, where $a \vee c \in I$ and $b \vee d \in J$; so $x \vee y \in I \vee J$. Let $t \in DQL$, then $t \wedge x = t \wedge (a \vee b) = (t \wedge a) \vee (t \wedge b)$, where $t \wedge a \in I$ and $t \wedge b \in J$. Hence $t \wedge x \in I \vee J$, and the lemma follows.

In a DQL also the concept of a principal ideal $(p]$ generated by an element $p \in DQL$ can be defined: $x \in (p] \Leftrightarrow x = k \wedge p$ for some element $k \in DQL$.

LEMMA 5. $(p]$ *is an ideal in a* DQL. *Moreover,* $(p] \vee (t] = (p \vee t]$ *and* $(p] \wedge (t] = (p \wedge t]$, $p, t \in$ DQL.

Proof. Let $x, y \in (p]$. So $x = k \wedge p$ and $y = h \wedge p$, $k, h \in DQL$. $x \vee y = (k \wedge p) \vee (h \wedge p) = (k \vee h) \wedge p$, whence $x \vee y \in (p]$. Furthermore, for each $t \in DQL$, $x \wedge t = (k \wedge t) \wedge p$, and thus $x \wedge t \in (p]$; so $(p]$ is an ideal of DQL.

If $x \in (p] \vee (t]$, then $x = (k \wedge p) \vee (h \wedge t) = \{[k \vee (h \wedge t)] \wedge \wedge (p \vee h)\} \wedge (p \vee t)$, and so $(p] \vee (t] \subseteq (p \vee t]$. If $x \in (p \vee t]$, then $x = r \wedge (p \vee t) = (r \wedge p) \vee (r \wedge t)$, which shows the reverse inclusion, and thus $(p] \vee (t] = (p \vee t]$. The remaining assertion is proved similarly.

THEOREM 1. $\mathfrak{J}$(DQL) *is a distributive quasilattice.*

Proof. Evidently the laws (1), (2) and (3) are valid in $\mathfrak{J}(DQL)$, and hence we shall show the validity of the distributivity laws in (4).

1° Let $x \in I \wedge (J \vee K) \Leftrightarrow x \in I$ and $x = j \vee k, j \in J$ and $k \in K \Rightarrow x = x \wedge x = (x \wedge j) \vee (x \wedge k)$, where $x \wedge j \in J$, I and $x \wedge k \in I$, K. $\Rightarrow x \in (I \wedge J) \vee (I \wedge K)$.

2° Let $x \in (I \wedge J) \vee (I \wedge K) \Leftrightarrow x = u \vee w$, $u \in I \wedge J$ and $w \in \in I \wedge K$. $\Rightarrow u, w \in I$, $u \in J$ and $w \in K$. $\Rightarrow u \vee w \in I$ and $u \vee w \in \in J \vee K$. $\Rightarrow x = u \vee w \in I \wedge (J \vee K)$.

3° Let $x \in (I \vee J) \wedge (I \vee K)$. $\Leftrightarrow x = i \vee j = i'' \vee k$, where $i, i'' \in I$, $j \in J$ and $k \in K$. $\Rightarrow x = x \wedge x = (i \vee j) \wedge (i'' \vee k) = [i'' \wedge (i \vee j)] \vee \vee [k \wedge (i \vee j)] = \{[i'' \wedge (i \vee j)] \vee (k \wedge i)\} \vee (k \wedge j)$, where $\{[i'' \wedge (i \vee j)] \vee (k \wedge i)\} \in I$ and $k \wedge j \in J \wedge K$. $\Rightarrow x \in I \vee (J \wedge K)$.

4° Let $x \in I \vee (J \wedge K) \Leftrightarrow x = i \vee t$, $i \in I$ and $t \in J$, K. $\Rightarrow x \in \in I \vee J$ and $x \in I \vee K$, whence $x \in (I \vee J) \wedge (I \vee K)$.

1° and 2° imply the first and 3° and 4° the second distributivity law. This completes the proof.

THEOREM 2. $\mathfrak{J}$(DQL) *is a lattice if and only if* DQL *is a lattice.*

Proof. Let $\mathfrak{J}(DQL)$ be a lattice. Then $(p] = (p] \wedge ((p] \vee (t]) = = (\{p \wedge (p \vee t)\}]$, according to Lemma 5. From the definition of the principal ideal it follows that $p = k \wedge p \wedge (p \vee t) = k \wedge k \wedge p \wedge (p \vee t) = = k \wedge p$, and on the other hand, $h \wedge p = p \wedge (p \vee t) = h \wedge h \wedge p = = h \wedge p \wedge (p \vee t)$. Hence, $k \wedge (h \wedge p) = k \wedge p \wedge (p \vee t) = p = h \wedge \wedge (k \wedge p) = h \wedge p = p \wedge (p \vee t)$. The validity of the second absorption law is proved similarly; thus DQL is a lattice. According to the definition of an ideal in DQL, the converse proof is obvious.

An ideal P of a QL is called prime, if (i) $x \vee y \in P$ implies $x, y \in P$, and (ii) $x \wedge y \in P$ implies that at least one of the elements x and y belongs to P.

Let S be a subquasi-lattice of a quasi-lattice QL. An ideal M of QL is called relative maximal ideal with respect to S, when M is maximal among the ideals which are disjoint from S, i.e., if $M \vee N = N$, then $N \cap S \neq \emptyset$.

LEMMA 6. *Let* P *be a prime ideal of a* QL. *Then* QL $-$ P *is a dual prime ideal of* QL.

Proof. At first we show that $T = QL - P$ is a dual ideal of QL. Let $x, y \in T$; if $x \wedge y \in P$, then x or y belongs to P, as P is prime. This is a contradiction; hence $x \wedge y \in T$. Let $x \in T, k \in QL$. If $x \vee k \notin T$, then $x \vee k \in P$, and so also $x \in P$; a contradiction. So $x \vee k \in T$, and T is dual ideal of QL. Assume that $x \vee y \in T$ and $x, y \notin T$. Thus $x, y \in P$, and as P is an ideal of QL, $x \vee y \in P$, which is a contradiction. Therefore at least one of the elements x and y belongs to T. Let $x \wedge y \in T$

and let $x \notin T$. Then $x \in P$, and as P is an ideal, $x \wedge y \in P$ for each $y \in QL$; a contradiction. Hence $x, y \in T$, and so T is prime.

Accordingly, every prime ideal P of a quasi-lattice becomes a relative maximal ideal with respect to the subquasi-lattice $QL - P$. In a DQL holds the following property

THEOREM 3. *Let* S *be a subquasi-lattice of a* DQL. *If* N *is a relative maximal ideal of* DQL *with respect to* S, *then for each* $x \wedge y \in N$ *at least one of the elements* x, y *belongs to* N. *Similarly, if* $x \vee y \in N$, *then at least one of the elements* x *and* y *belongs to* N.

Proof. Let $x \wedge y \in N$ and assume that $x, y \notin N$. As $N \vee N \vee (x] = N \vee (x]$, $(N \vee (x]) \cap S \neq \emptyset$; the same fact holds for $N \vee (y]$, too. Let $s_x \in (N \vee (x]) \cap S$ and $s_y \in (N \vee (y]) \cap S$. As $N \vee (x]$ and $N \vee (y]$ are ideals of DQL, $s_x \wedge s_y$ belongs both of them and also to $(N \vee (x]) \wedge \wedge (N \vee (y])$. On the other hand, as S is a subquasi-lattice, $s_x \vee s_y \in S$. Now, $(N \vee (x]) \wedge (N \vee (y)] = N \vee (x \wedge y]$, and hence all the elements of $(N \vee (x]) \wedge (N \vee (y])$ belong to N, $s_x \wedge s_y$ too. So $N \cap S \neq \emptyset$, which is a contradiction, and hence x or y belongs to N.

If $x \vee y \in N$, $(x \wedge y) \wedge (x \vee y) = x \wedge y \in N$. So the latter part of the theorem follows from the former.

A non-empty subset U of a QL is called a lattice ideal, if (i) $a, b \in U$ imply $a \vee b \in U$, and (ii) $x \leq a$ and $a \in U$ imply $x \in U$. As well known, the join of two lattice ideals is a lattice ideal again, if QL is a down directed join-semilattice, i.e. for any two elements $x, y \in QL$ there is a common lower bound k in QL to x and y. In other words, the family $\mathfrak{U}(QL)$ of all lattice ideals U in QL is a lattice, if QL is down directed join-semilattice.

According to Lemma 1, in each lattice ideal U of a MQL $x, y \in U$ imply $x \wedge y \in U$.

LEMMA 7. *In a* DQL, *which is also a down directed join-semilattice,* $(a] \wedge (b] \subseteq (a \wedge b]$ *for each two elements* a, b $\in$ DQL. DQL *is a distributive lattice, if* $(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$ *for each two* a, b $\in$ DQL; $(a]$ and $(b]$ *are principal lattice ideals of* DQL.

Proof. Let $k \in \{(a] \wedge (b]\}$. This means that $k \leq a, b$, and so $k \vee a = a$ and $k \vee b = b$. Hence $a \wedge b = (k \vee a) \wedge (k \vee b) = k \vee (a \wedge b)$, whence $k \in (a \wedge b]$.

If $(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$ for each two $a, b \in DQL$, $a \wedge b \leq a$ and $a \wedge b \leq b$, and the absorption laws hold in DQL.

Let S be a subset of a DQL. By the closure $\bar{S}$ of S we mean the subset $\{x|$ there is an element $y \in S$ such that $x \leq y\}$ of DQL. The following theorem gives a connection between the ideals and the lattice ideals of a DQL.

THEOREM 4. *If* I *as an ideal of a* DQL, *then* $\bar{\mathrm{I}}$ *is also an ideal of* DQL. *Furthermore,* $\bar{\mathrm{I}}$ *is a lattice ideal of* DQL.

Proof. Let $x, y \in \bar{I}$. Then $x \leq a$ and $y \leq b$, $a, b \in I$. In particular, $x \vee y \leq a \vee b$, and so $x \vee y \in \bar{I}$. Further, $x \vee a = a$, and thus for each $t \in DQL$, $(x \wedge t) \vee (a \wedge t) = a \wedge t$, whence $x \wedge t \leq a \wedge t$; $a \wedge t \in I$.

Therefore, $x \wedge t \in \bar{I}$ for each $t \in DQL$, and thus $\bar{I}$ is an ideal of DQL. Obviously $\bar{I}$ is a lattice ideal of DQL.

3. Remarks on congruence relations on a DQL. As in case of lattices, one can easily show that an equivalence relation θ on a quasi-lattice QL is a congruence relation on QL if and only if for each three elements $x, y, t \in QL$ the relation $x\theta y$ implies $x \wedge t\theta y \wedge t$ and $x \vee t\theta y \vee t$. The meet and join of two congruences θ_1 and θ_2 on QL are defined as usually: $x(\theta_1 \wedge \theta_2)y \Leftrightarrow x\theta_1 y$ and $x\theta_2 y$; $x(\theta_1 \vee \theta_2)y \Leftrightarrow$ there is in QL a sequence $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ of elements such that $z_j\theta_i z_{j+1}$ for each value of j and for some value of i, $j = 0, \ldots, n-1$, $i = 1, 2$, and $z_0 = x$ and $y = z_n$. As easily verified, $\theta_1 \wedge \theta_2$ and $\theta_1 \vee \theta_2$ are congruence relations on QL and the set of all congruence relations $\theta(QL)$ of a QL form a compactly generated lattice (see e.g. [5, Thm. 85]).

LEMMA 8. *Let* I *be an ideal of a* DQL *and* $\theta(\mathrm{I})$ *a binary relation on* DQL *defined as follows*: $\mathrm{x}\theta(\mathrm{I})\mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$, *or* $\mathrm{x} \vee \mathrm{i} = \mathrm{y} \vee \mathrm{i}$ *for some* $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. *Then* $\theta(\mathrm{I})$ *is a congruence relation on* DQL. *If* I *is a prime ideal of* DQL *or if* $\mathrm{I} = \bar{\mathrm{J}}$ *for some ideal* J *of* DQL, *then* I *is a congruence class modulo* $\theta(\mathrm{I})$. *If moreover* DQL *is a down directed join-semilattice and* $\mathrm{I} = \bar{\mathrm{J}}$ *for some ideal* $\mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{DQL})$, $\theta(\mathrm{I})$ *is a minimal congruence relation with* I *as a congruence class.*

Proof. Clearly $\theta(I)$ is an equivalence relation on DQL. If $x \quad i = y \vee i$, then $(x \vee t) \vee i = (y \vee t) \vee i$, and $(x \wedge t) \vee (t \wedge i) = (y \wedge t) \vee (t \wedge i)$, where $t \wedge i \in I$, and so $\theta(I)$ is a congruence relation on DQL.

Clearly two elements of I are congruent modulo $\theta(I)$. If $i \in I$ and $i\theta(I)k$, then $i \vee i'' = i'' \vee k$, $i'', i \vee i'' \in I$. If I is prime, then $k \in I$ and, if $I = \bar{J}$, then $k \leq i \vee i''$, and so $k \in I$. Hence I is a congruence class in these cases.

Let θ be a minimal congruence relation on DQL having I as a congruence class. As all the elements of I are contained in a congruence class modulo $\theta(I)$, $\theta \leq \theta(I)$. If now a and b are elements in DQL, which is also a down directed join-semilattice, such that $a \vee i = b \vee i$, $i \in I$, then there are two elements $i', i'' \in I$ such that $i' \leq a, i$ and $i'' \leq b, i$. In particular, $i\theta i' \Rightarrow a \vee i\theta a$, and $i\theta i'' \Rightarrow b \vee i\theta b$. As $a \vee i = b \vee i$, $a\theta b$, and thus $\theta = \theta(I)$, a minimum congruence relation having I as a congruence class. Note that $i', i'' \in I$ as $I = \bar{J}$ for some $J \in \mathfrak{J}(DQL)$.

The congruence relations generated by an ideal I of a structure play an important role when characterizing the properties of the structure; the reader is referred to [1, Sect. 9] in case of lattices and to [3] in case of join-semilattices.

THEOREM 11. *On a* DQL *the congruence relations* $\theta(\mathrm{I})$ *constitute a distributive sublattice of the lattice* $\theta(\mathrm{DQL})$.

Proof. We show 1°: $\theta(I_1) \vee \theta(I_2) = \theta(I_1 \vee I_2)$, 2°; $\theta(I_1) \wedge \theta(I_2) = \theta(I_1 \wedge I_2)$, and 3°: the sublattice $\theta(I, DQL)$ of the congruence relations $\theta(I)$ on DQL is distributive.

1° If $x(\theta(I_1) \vee \theta(I_2))y$, then there is a sequence $z_0, z_1, \ldots, z_n$ of elements of DQL, $z_0 = x$ and $z_n = y$, such that $z_j\theta(I_1)z_{j+1}$ or $z_j\theta(I_2)z_{j+1}$ for each value of $j = 0, \ldots, n-1$. Thus $z_j \vee i_1 = z_{j+1} \vee i_1$ gives for each $i_2 \in I_2$ $z_j \vee i_1 \vee i_2 = z_{j+1} \vee i_1 \vee i_2$, $i_1 \in I_1$. The case is similar with the latter relation, and hence $z_j\theta(I_1 \vee I_2)z_{j+1}$ for each value of j. So $x\theta(I_1 \vee I_2)y$. The relation $\theta(I_1 \vee I_2) \leq \theta(I_1) \vee \theta(I_2)$ is obvious, and 1° follows.

2° Clearly $\theta(I_1 \wedge I_2) \leq \theta(I_1) \wedge \theta(I_2)$. Let $x(\theta(I_1) \wedge \theta(I_2))y$. Consequently, $x \vee i_1 = y \vee i_1$ and $x \vee i_2 = y \vee i_2$, from which it follows $x \vee (i_1 \wedge i_2) = y \vee (i_1 \wedge i_2)$, where $i_1 \wedge i_2 \in I_1 \wedge I_2$. Hence $x\theta(I_1 \wedge I_2)y$, and 2° follows.

3° follows from 1°, 2° and the distributivity of the quassi-lattice $\mathfrak{I}(DQL)$.

(Received March 30, 1976)

REFERENCES

1. Grätzer, G., *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*, W. H. Freeman and Co, San Francisco, 1971.
2. Matsushita, S., *Ideals in non-commutative lattices*, Proc. Japan Acad., **34**, (1958), 407–410.
3. Nieminen, J., *About congruence relations of semilattices*, Acta Fac. R. N. Univ. Comenianae Mathematica, **31**, (1975), 27–43.
4. Płonka, J., *On distributive quasi-lattices*, Fundamenta Math., **60**, (1967), 191–200.
5. Szász G., *Introduction to lattice theory*, Academic Press, New York and London, 1963.

IDEALE IN CVASILATICE DISTRIBUTIVE

(Rezumat)

Cvasilaticea distributivă este o structură algebrică cu două operaţii binare idempotente, asociative şi comutative, astfel încît fiecare dintre ele este distributivă faţă de cealaltă. În lucrare se studiază idealele unei cvasilatici distributive şi relaţiile de congruenţă definite peste ea.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

GENERALIZED MONOIDS OF FRACTIONS

AURELIA ŢOCA

Butts and Spacht introduced in [1] the generalized ring of quotients of a commutative ring with identity. A generalization in the like manner may also be made in the case of a commutative monoid. In the following S will denote a commutative monoid and M a nonempty collection of subsets of S, which is closed under the set product (for E_1, $E_2 \in M$, the set product is defined as $E_1E_2 = \{e_1e_2 | e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2\}$). Let's define $a\rho b$ ($a, b \in S$) to mean that there exists an element $E \in M$ so that $ae = be$ for every $e \in E$.

PROPOSITION 1. *The relation* ρ *is a congruence on* S.

Proof. The reflexivity and symmetry are immediate. Now, let $a\rho b$ and $b\rho c$. Then there exist $E, E' \in M$ so that $ae = be$ for every $e \in E$ and $be' = ce'$ for every $e' \in E'$, therefore $ae'' = ce''$ for every $e'' = ee' \in \in EE' = E'' \in M$. The compatibility results at once.

Let $\bar{S} = S/\rho$. S contains at least one cancellable element (the identity) and $\bar{a} = \{s \in S / s\rho a\}$ is cancellable in $\bar{S}$ if a is cancellable in S. Indeed, let $\bar{x}\bar{s} = \bar{y}\bar{s}$ with x, y, s in S, s cancellable. Then $(xs)\ \rho\ (ys)$, hence exists $E \in M$ with $(xs)e = (ys)e$ for every $e \in E$. Hence $xe = ye$ for every $e \in E$, so that $\bar{x} = \bar{y}$. Therefore by theorem of Vandiver [2], $\bar{S}$ admits a classical monoid of quotients, namely $T(\bar{S})$ and $\bar{S}$ may be identified with its image $\Psi(\bar{S})$, where Ψ is the canonical injection $\bar{S} \to T(\bar{S})$.

Now, let $S(M) = \{x / x \in T(\bar{S}),\ x\bar{E} \subset \bar{S}$ for some $E \in M\}$; because M is closed under product, $S(M)$ is a submonoid of $T(\bar{S})$, which contains $\bar{S}$.

DEFINITION. The monoid $S(M)$ is called the generalized monoid of quotients of the monoid S with respect to M.

PROPOSITION 2. *If every subset of* M *consists of one element of* S *and* $1 \in$ M, *then* $\mathrm{S(M)} \cong \mathrm{S}_M$, *where* S_M *is the monoid of quotients of* S *with respect to the submonoid* M *of* S.

Proof. First one shows that $S(M) = \bar{S}_{\bar{M}}$. Let $x \in S(M)$, then $x = \bar{s}/\bar{r}$, with $\bar{r}$ cancellable in $\bar{S}$ and exists $e \in M$ so that $(\bar{s}/\bar{r})(\bar{e}/\bar{1}) = \bar{t}/\bar{1}$, where $t \in S$. Hence $\bar{s}/\bar{r} = \bar{t}/\bar{e} \in \bar{S}_{\bar{M}}$. Conversely, let $x \in S_M$, hence $x = \bar{s}/\bar{e}$, with $s \in S$, $e \in M$. Then $x \in S(M)$, because $\bar{e}$ is cancellable in $\bar{S}$. Indeed, let $\bar{x}\bar{e} = \bar{y}\bar{e}$, then $(xe)\rho(ye)$, hence exists $e' \in M$ so that $x(ee') = y(ee')$, therefore $\bar{x} = \bar{y}$. Now, taking into account the theorem of the universality of monoids of fractions (see, for instance, [3]), it easily follows that $\bar{S}_{\bar{M}}$ is isomorphic to S_M.

Let h be the embedding homomorphism of S in $S(M)$, i.e. $h = \Psi \cdot \varphi$, where φ is the canonical homomorphism of S upon $\bar{S}$ and Ψ is the canonical isomorphism of $\bar{S}$ in $S(M)$. Let $\overset{-1}{h} \cdot h$ be the congruence on S generated by h. Then $\overset{-1}{h} \cdot h = \rho$.

THEOREM. *Let* Q *the a monoid and* M *a nonempty collection of subsets of* S *as before. If there exists a homomorphism* $f : S \to Q$ *such that:*

a) $\overset{-1}{f} \cdot f = \rho$

b) $Q = \{x / x \in T(f(S)),\ xf(E) \subset f(S)$ *for some* $E \in M\}$,

then there exists a unique iscmorphism θ *of* S(M) *upon* Q *such that* $\theta h =$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Q \\ S(M) \arrow[ur, dashed, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. Uniqueness. If such a homomorphism θ exists, then $\theta(\bar{s}/\bar{r}) = \theta(h(s)/h(r)) = \theta h(s)/\theta h(r) = f(s)/f(r)$ for every s, r in S, with $\bar{r}$ cancellable in $\bar{S}$, hence θ is essentially unique.

Existence. Let $\theta : S(M) \to Q$ be defined as follows: for $x \in S(M)$, $x = \bar{s}/\bar{r}$, $\theta(x) = f(s)/f(r)$.

θ is a homomorphism: if $x = \bar{s}/\bar{r}$, $y = \bar{s}_1/\bar{r}_1$, then $\theta(xy) = \theta((\bar{s}/\bar{r})(\bar{s}_1/\bar{r})) = f(s)f(s_1)/f(r)f(r_1) = \theta(x)\theta(y)$.

θ is well-defined: if $s_1 \in \bar{s}$, $r_1 \in \bar{r}$, then $(sr_1)\rho(rs_1)$, therefore $f(sr_1) = f(rs_1)$. Hence $f(s)/f(r) = f(s_1)/f(r_1)$ and $\theta(\bar{s}/\bar{r}) = \theta(\bar{s}_1/\bar{r}_1)$.

θ is injective: if $\theta(\bar{s}/\bar{r}) = \theta(\bar{s}_1/\bar{r}_1)$, then $f(s)/f(r) = f(s_1)/f(r_1)$ hence $(sr_1)\rho(s_1 r)$, that is $\bar{s}/\bar{r} = \bar{s}_1/\bar{r}_1$.

θ is surjective: let x be an element of Q. Because $Q \subset T(f(S))$, x may be written as $f(s)/f(r)(s, r \in S$ and $f(r)$ cancellable in $f(S))$. Obviously, $\theta(\bar{s}/\bar{r}) = x$. We show that $\bar{s}/\bar{r} \in S(M)$. First $\bar{s}/\bar{r} \in T(\bar{S})$, because $\bar{r}$ is cancellable in $\bar{S}$ when $f(r)$ is cancellable in $f(S)$. Besides, for some $E \in M$, we have $xf(E) \subset f(S)$, hence for every $e \in E$ there exists an element $t \in S$ so that $xf(e) = f(t)$. Therefore $f(se) = f(rt)$, hence $\bar{s}\bar{e} = \bar{r}\bar{t}$. This means that for some $E \in M$, we have $(\bar{s}/\bar{r})\bar{E} \subset \bar{S}$.

Finally, from the definition of θ, it is clear that $\theta \cdot h = f$.

Remark. If every element of M contains a cancellable element of S, then $S(M) \subset T(S)$. Indeed, in this case, ρ is the equality relation so that $\bar{S} = S$.

(Received January 16, 1975)

REFERENCES

1. Butts, H. S. and C. G. Spaht, *Generalized Quotient Rings* „Math. Nachr.", **53** (1972) nr. 1–6, 181–210.
2. Vandiver, H. S., *On the imbedding of one semi-group in another, with application to semi-rings*, „Amer. J. Math.", **LXII** (1940), nr. 1, 72–78.
3. Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Algèbre*, ch. 1–3, Hermann, Paris, 1970

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

SUR LES ESPACES K_n^* DE WALKER

P. ENGHIŞ

Un espace V_n de métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

est récurrent [5], [6] s'il existe un vecteur covariant φ_r ainsi que

$$R^i_{jkh,r} = \varphi_r R^i_{jkh} \tag{2}$$

où R^i_{jkh} sont les composantes du tenseur de courbure de l'espace, et où la virgule désigne la dérivée covariante par rapport au tenseur métrique de l'espace.

Si dans (2) $\varphi_r = 0$, nous avons

$$R^i_{jkh,r} = 0 \tag{3}$$

et l'espace est nommé symétrique dans le sens de C a r t a n [1]. Un espace symétrique — Cartan est aussi Ricci — symétrique, donc $R_{jh,r} = 0$, et il est de courbure scalaire constante.

En contractant la relation (2) en i et k on obtient

$$R_{jh,r} = \varphi_r R_{jh} \tag{4}$$

Un espace V_n pour lequel la relation (4) est vérifiée est nommé Ricci — récurrent [3].

Un espace récurrent est aussi Ricci-récurrent, la réciproque n'étant pas toujours vraie [4], [5].

Si la relation (4) est contractée en j, et h, on obtient

$$R, r = \varphi_r R \tag{5}$$

où R est la courbure scalaire, et l'espace V_n est de courbure scalaire récurrente.

Dans un espace V_n récurrent, si dans l'identité de Bianchi

$$R^i_{jkh,r} + R^i_{jhr,k} + R^i_{jk,h} = 0 \tag{6}$$

on tient compte de (2), on obtient

$$\varphi_r R^i_{jkh} + \varphi_k R^i_{jhr} + \varphi_h R^i_{jrk} = 0 \tag{7}$$

donc, les espaces récurrents vérifient la relation (7).

Les espaces V_n symétriques dans lesquels on peut déterminer un vecteur covariant φ_r ainsi que la relation (7) ait lieu, et les espaces récurrents, ont été nommés par A. G. W a l k e r [6] espaces K_n^*.

Dans la présente note nous nous proposons de donner quelques propriétés du vecteur φ_r dans un espace K_n^*.

PROPOSITION 1. *Dans un espace* K_n^* *le vecteur* φ_r *est solution du système homoyène*

$$[R^i_{jkh} - (\delta^i_k R_{jh} - \delta^i_h R_{jk})]\varphi_i = 0 \tag{8}$$

En effet, de la définition des espaces K_n^* nous savons qu'ils vérifient la relation (7). Si dans (7) nous appliquons une contraction en i et r, nous obtenons

$$\varphi_i R^i_{jkh} - \varphi_k R_{jh} + \varphi_h R_{jk} = 0 \tag{9}$$

d'où il résulte immédiatement (8)

Notons:

$$A^i_{jkh} = R^i_{jkh} - (\delta^i_k R_{jh} - \delta^i_h R_{jk}) \tag{10}$$

On peut énoncer.

PROPOSITION 2. *Une condition nécessaire pour qu'un espace* V_n *soit espace* K_n^* *est que le rang de la matrice* $\|A^i_{jkh}\|$ *soit plus petit que* n.

Le tenseur A^i_{jkh} défini par (10) vérifie les relations

$$A^i_{jkh} + A^i_{jhk} = 0 \quad A^i_{jkh} + A^i_{khj} + A^i_{hjk} = 0$$

et ses tenseurs contractés, les relations

$$A^i_{ikh} = 0, \quad A^i_{jih} = A_{jh} = (2 - n) R_{jh}$$

PROPOSITION 3. *Dans un espace* K_n^* *le vecteur* φ_i *satisfait les relations*

$$(R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_i = 0 \tag{11}$$

On obtient les relations (11) de (9) par une nouvelle contraction en j et k.

PROPOSITION 4. *La dérivée covariante du vecteur* φ_r *dans un espace* K_n^* *satisfait les relations*

$$\varphi_{i,r} R^i_h = \frac{1}{2} \varphi_{h,r} \tag{12}$$

En effet, par dérivation covariante de la relation (11) on obtient

$$(R_{,r}\ \delta^i_h - 2R^i_{h,r})\varphi_i + (R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_{i,r} = 0 \tag{13}$$

Si l'espace K_n^* est récurrent, il est aussi Ricci-récurrent et de courbure scalaire récurrente et dans (13), en tenant compte de (4) et (5) nous avons

$$(R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_i\varphi_r + (R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_{i,r} = 0 \tag{14}$$

Si dans (14) on tient compte de (11) il en résulte (12).

Si l'espace K_n^* est symétrique-Cartan, étant aussi Ricci-symétrique et de courbure scalaire constante, la relation (13) devient

$$(R\delta_h^i - 2R_h^i)\varphi_{i,r} = 0$$

qui est en fait la relation (12).

(Manuscrit reçu le 3 avril 1975)

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan, E., *Les espaces riemanniens symétriques*, Verh. Int. Math. Kongr. Zürick, **1**, 1932, 152–161.
2. Enghiş, P., *Sur les espaces V récurrents et Ricci-récurrents*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Mat.-Mec. f. 1, 1973, 3–6.
3. Patterson, E. M., *Some théoreme en Ricci-recurrent spaces*, Journ. London Math. Ser., **27**, 1952, 287–295.
4. Roter, W., *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*, Bull. de l'Acad. Pol. de Sci., **X**, 1962, 10, 533–536.
5. Ruse, H. S., *On simply harmonic kappa spaces of four dimensions*; Proc. London Math. Soc., (2) **50**, 1948, 317–324.
6. Walker, A. G., *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Proc. London. Math. Soc., (2) **52**, 1950, 36–64.

ASUPRA SPAŢIILOR LUI WALKER K_n^*

(Rezumat)

În notă se dau cîteva proprietăţi ale vectorului φ_i dintr-un spaţiu K_n^*. Se arată că vectorul φ_i este soluţie a sistemului omogen (8) şi verifică relaţiile (11) şi (12). Se introduce tensorul A_{jkh}^i dat de (10) cu ajutorul căruia se dă o condiţie necesară ca un spaţiu V_n să fie K_n^*: rang $[A_{jkh}^i] < n$

CONFIGURATION THEOREMS IN CERTAIN INCIDENCE STRUCTURES

VICTORIA GROZE

We have defined in [1] and [2] an incidence structure, called G-plane in the following way:

Let $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathrm{I})$ be an incidence structure. If for $A, B \in \mathfrak{P}$ there is exactly one line $d \in \mathrm{D}$ such that $A\mathrm{I}d$, $B\mathrm{I}d$, then the line d will be denoted by $\langle A, B\rangle$. Similarly $\langle a, b\rangle$ stands for the point incident with the lines a, b provided that there exists such a unique point. Points A, B, C will be called *collinear* if there exists a *unique* line a such that A, B, C I a.

Notice if we had required for A, B, C only the existence of a line incident with A, B, C then we would have got another concept of collinearity and the subsequent closure conditions of Desargues and Pappus would have assumed another meaning.

The incidence structure $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathrm{I})$ is called a G-plane if the following properties hold:

There exist $0_1, 0_2, 0_3, E \in \mathfrak{P}$ such that

1. There is no line incident with three of the points $0_1, 0_2, 0_3, E$; $\langle 0_3, E\rangle = : a$

2 For any $P \in \mathfrak{P}\setminus\{0_2\}$ there exists $\langle P, 0_2\rangle$.

3 If $p, q \in \mathfrak{D}$, $p \mathrm{I} 0_2$, $p \neq q$, then there exists $\langle p, q\rangle$.

4 If $0_1 \mathrm{I} p$ then there exists $\langle p, a\rangle$.

5 (1) For any $P \in \mathfrak{P}\setminus\{0_1\}$ there exists $\langle P, 0_1\rangle$.

(2) If $M\mathrm{I}\langle 0_2, E\rangle$ then there exists $\langle M, 0_3\rangle$.

(3) If $P\mathrm{I}\langle 0_2, 0_1\rangle$, $P'\mathrm{I}\langle 0_2, 0_3\rangle$, $P \neq P'$ then there exists $\langle P, P'\rangle$.

6 If $M \in \mathfrak{P}$, $M \neq E' = \langle\langle 0_1, 0_2\rangle, a\rangle$, then there exists $\langle M, E'\rangle$.

7' If $0_1\mathrm{I}d$, $0_3\mathrm{I}d'$ and $d \neq d'$ then there exists $\langle d, d'\rangle$.

Generalizing M. Hall's method [3] we introduced coordinates in a G-plane (c.f. [2]). The coordonatizing algebraical structure is called a ternary ring (Q, T). For the ternary operation $T: Q^3 \to Q$ the following conditions hold: $\exists\ 1, 0 \in Q$, $0 \neq 1$, $\forall\, m, b \in Q$, $\mathrm{T}(0, m, b) = \mathrm{T}(m, 0, b) = b$, $\mathrm{T}(1, m, 0) = \mathrm{T}(m, 1, 0) = m$.

The points of the G-plane are: (x, y), (m), (∞), $x, y, m \in Q$ and the lines are: $[m, b]$, $[x]$, $[\infty]$.

In [1] we have defined addition in (Q, T) in the following way:

$$x + y = T(x, 1, y).$$

Define now another addition:

$$x \oplus y = \mathrm{T}(1, x, y).$$

We have $\forall x \in Q$, $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$.

We shall give a condition for the two kinds of additions to coincide using the closure condition of specific Desargues configuration. Here by a Desargues configuration we mean ten distinct points S, A_i, A'_i, B_i, $i = 1, 2, 3$, such that A_i, A'_i, S are collinear for $i = 1, 2, 3$ and A_i, A_j, B_k; A'_i, A'_j, B_k are collinear for every permutation i, j, k of 1, 2, 3. The lines $A_iA'_i S$ supposed to be distinct, are called supporting lines, while the points B_i are called supporting points; S is the centre of the configuration and the line through the supporting points is called axis. If centre and axis are incident we speak of a minor Desargues configuration.

THEOREM 1. *We have* $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$, *for all* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{Q}$ *if and only if those minor Desargues configurations close for which the centre is* 0_2, *the axis is* $0_1 0_2$, *two of the supporting lines are* $0_2 0_3$, $0_2\mathrm{E}$ *and two of the supporting points are* 0_1, E'.

Proof. Let $x, b \in Q$, $a_1 = [1, 0]$, $a_2 = [x, 0]$, $a_3 = [0, x]$, $b_1 = [1, b]$, $b_2 = [x, b]$, $D = (x, x)$, $b_3 = \langle\langle b_1, 0_2 D\rangle, 0_1\rangle$. (Fig. 1).

The condition of theorem 1 may be written as

$$\langle\langle b_2, 0_2 E\rangle, 0_1\rangle = b_3. \tag{1}$$

Supposing (1) we have

$$[x, b] \cap [1] = ((1), T(1, x, b)$$

since $(1, y)\, \mathrm{I}\, [x, b] \Leftrightarrow y = T(1, x, b)$.

$$[1, b] \cap [x] = (x, T(x, 1, b))$$

since $(x, y)\, \mathrm{I}\, [1, b] \Rightarrow y = T(x, 1, b)$.

Hence

$$T(1, x, b) = T(x, 1, b)$$

that is $x \oplus b = x + b$, for all $x, b \in Q$.

It is easily seen that the converse is also true.

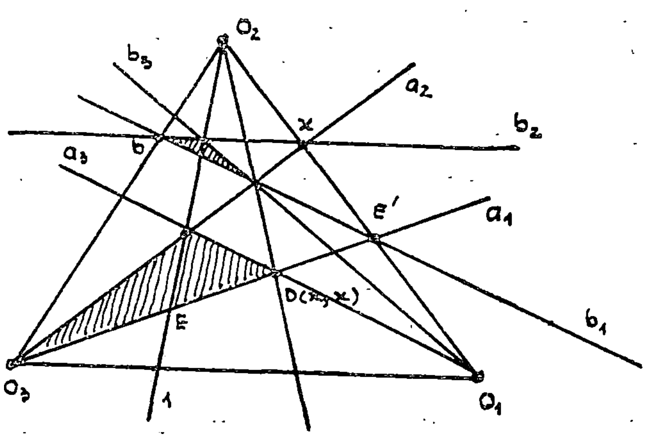

Fig. 1.

THEOREM 2. *In the ternary ring* (Q, T) *we have for all* x, m, b $\in$ Q,

$$T(x, m, b) = x \cdot m + b \tag{2}$$

if and only if those minor Desargues configurations close for which the centre is 0_2, *the axis is* $0_1 0_2$, *two of the supporting lines are* $0_2 0_3$, 0_2E *and one of the supporting points is* 0_1.

Proof. Let $a_1 = [m_1, 0]$, let D be an arbitrary point on a_1 different from 0_3 and 0_1, hence $D = (x_1, x_1 m_1)$ (if $D = (x_1, y_1)$ and DIa_1 then $y_1 = T(x_1, m_1, 0) = x_1 m_1$). Let $a_2 = \langle D, 0_1\rangle$, $a_3 = \langle\langle 0_2 E, a_2\rangle, 0_3\rangle$; let b_1 be an arbitrary line through the point $\langle 0_1 0_2, a_1\rangle$, $b_2 = \langle\langle D0_2, b_1\rangle, 0_1\rangle$, $b_3 = \langle\langle 0_2 0_3, b_1\rangle, \langle 0_1 0_2, a_3\rangle\rangle$. It follows that $a_2 = [0, x_1 m_1]$, $a_3 = [x_1 m_1, 0]$, $b_1 = [m_1, b]$, $b_2 = [0, T(x_1, m_1, b)]$, $b_3 = [x_1 m_1, b]$.

The condition of theorem 2 amounts to

$$\langle\langle 0_2 E, b_3\rangle, 0_1\rangle = b_2 \tag{3}$$

Supposing (3) we have $[1] \cap [x_1 m_1, b] = (1, y)$, $(1, y) I [x_1 m_1, b] \Leftrightarrow \Leftrightarrow T(1, x_1 m_1, b) = y$. The relation (3) becomes $T(x_1, m_1, b) = T(1, x_1 m_1, b) = x_1 m_1 \oplus b, \forall m_1, x_1, b \in Q$. Putting $m_1 = 1$ one obtains $T(x_1, 1, b) = T(1, x_1, b)$, hence $x_1 + b = x_1 \oplus b$. Thus formula (2) is established. (Fig. 2).

It is easily seen that the converse is also true.

THEOREM 3. *In the ternary ring* (Q, T) *we have for all* x, m_0, m $\in$ Q T(x, m_0, x $\cdot$ m) = x($m_0 \oplus$ m) (4) *if and only if those minor Desargues configurations close for which the centre is* 0_2, *the axis is* $0_2 0_3$, *two of the supporting lines are* $0_1 0_2$, 0_2E *and one of the supporting points is* 0_3.

Proof. Let D be an arbitrary point different from 0_3, c an arbitrary line incident with 0_3, $a_1 = \langle 0_3, D\rangle$, $a_2 = \langle\langle 0_2 E, a_1\rangle, 0_1\rangle$, $a_3 = \langle D, 0_1\rangle$; $b_2 = \langle\langle 0_2 0_3, a_2\rangle, \langle 0_1 0_2, c\rangle\rangle$, $b_1 = \langle\langle 0_2 E, b_2\rangle, 0_3\rangle$ and $b_3 = \langle\langle 0_3 0_2, a_3\rangle, \langle 0_1 0_2, c\rangle\rangle$.

The condition of theorem 3 may be written as

$$\langle\langle 0_2, D\rangle, b_1\rangle I b_3. \tag{5}$$

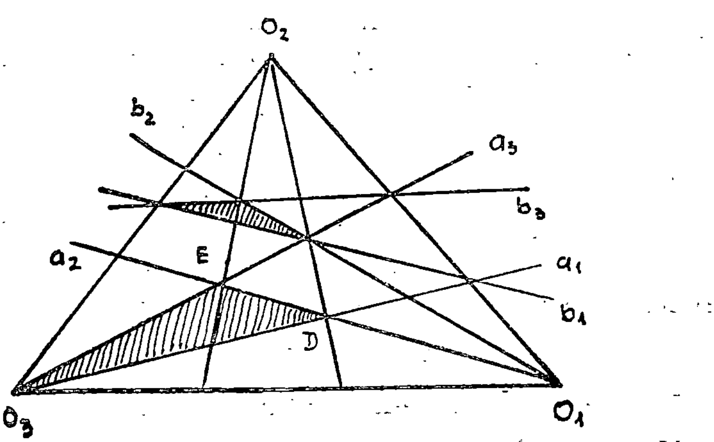

Fig. 2.

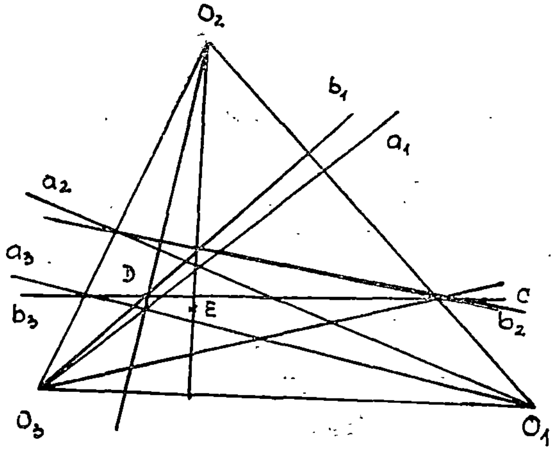

Fig. 3.

It follows that: $c = [m_0, 0]$, $a_1 = [m_1, 0]$, $D = (x, x \cdot m_1)$ (since $D = (x, y)\, \mathrm{I}\, [m_1, 0] \Leftrightarrow y = T(x, m_1, 0) = xm_1$), $a_2 = [0, m_1]$ ($(1, y)\mathrm{I}[m_1, 0] \Leftrightarrow y = T(1, m_1, 0) = m_1$), $a_3 = [0, xm_1]$, $b_2 = [m_0, m_1]$, $b_1 = [m_0 \oplus m_1, 0]$ (since $(1, y)\, \mathrm{I}\, [m_0, m_1] \Rightarrow y = T(1, m_0, m_1) = m_0 \oplus m_1$); $b_3 = [m_0, xm_1]$.

Supposing (5) we have

$$(x, x(m_0 \oplus m_1))\ \mathrm{I}\ [m_0, xm_1] \Rightarrow x(m_0 \oplus m_1) = T(x, m_0, xm_1).$$

It is easily seen that the converse is also true.

In our structure by a Pappus configuration we understand 9 distinct points A_i, A_i', B_i, $i = 1, 2, 3$ such that: A_1, A_2, A_3; A_1', A_2', A_3' are collinear and A_i, A_j', B_k are collinear for any permutation i, j, k of 1, 2, 3. The lines $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ are assumed to be distinct. If B_1, B_2, B_3 are collinear we say the Pappus configuration closes. The lines $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$, $B_1B_2B_3$ are called supporting lines. If they are incident with a common point we speak of a minor Pappus configuration.

THEOREM 4. *In the ternary ring* (Q, T) *we have for all,* y, x $\in$ Q

$$\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} = \mathrm{y} \oplus \mathrm{x}$$

if and only if the minor Pappus configuration close whenever the supporting lines are $0_1 0_2$, $0_2 0_3$ *and* 0_2E.

Proof. Let a_1, a_2 two distinct lines incident with 0_1, $b_i = \langle\langle a_i, 0_2E\rangle, 0_3\rangle$ $i = 1, 2$, $b_1, b_2 \in \mathfrak{D}$, $c_i = \langle\langle b_i, 0_1 0_2\rangle, \langle a_j, 0_2 0_3\rangle\rangle$ $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $c_1, c_2 \in \mathfrak{D}$, $d_i = \langle\langle c_i, 0_2E\rangle, 0_1\rangle$, $d_1, d_2 \in \mathfrak{D}$. (Fig. 4).

It follows that

$$a_1 = [0, n_1],\ a_2 = [0, n_2],\ b_1 = [n_1, 0],\ b_2 = [n_2, 0]$$

$$c_1 = [n_1, n_2],\ c_2 = [n_2, n_1],\ d_1 = [0, n_1 \oplus n_2],$$

$$d_2 = [0, n_2 \oplus n_1].$$

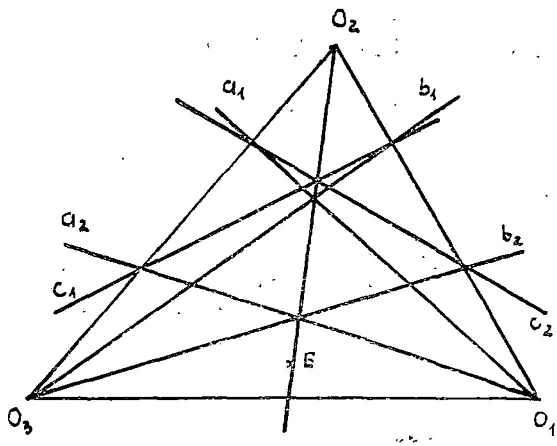

Fig. 4.

The condition of theorem 4 amounts to

$$d_1 = d_2 \tag{6}$$

Supposing (6) we have $n_1 \oplus n_2 = n_2 \oplus n_1$ $n_1, n_2 \in Q$
The converse is readily proved.

(Received September 15, 1976)

REFERENCES

1. Groze, V., *Asupra coordonatizării şi scufundării structurilor de incidenţă*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, ser. Mathematica-Mechanica, f. 1, 1971, 37—47.
2. Groze, V., *On the Pseudoplanes*, Journal of Geometry, **6**, 1, 1975, Birkhäuser Verlag Basel, 21—30.
3. Hall, M. Jr., *The Theory of groups*, New York, 1969, 353—356.

TEOREME DE CONFIGURAŢIE ÎN ANUMITE STRUCTURI DE INCIDENŢĂ

(Rezumat)

În lucrare se studiază teoreme de închidere în G-plane [2]. Sînt date condiţii pentru ca operaţiile „+" şi „$\oplus$" să coincidă, precum şi condiţii de liniarizare ale ternarului folosind închiderile unor anumite configuraţii Desargues. Proprietatea de comutativitate a operaţiei $\oplus$ are loc dacă se închide o anumită configuraţie Pappus.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

ASUPRA UNUI INVARIANT AL LUI H. LEPTIN

CONSTANŢA MOCANU

1. Fie G un grup local compact şi fie dx o măsură Haar invariantă la stînga pe G. Notăm cu $\mathfrak{L}^1(G)$ spaţiul funcţiilor integrabile pe G în raport cu măsura dx şi cu $\mathcal{C}(G)$ familia mulţimilor compacte din G. Dacă E este o submulţime măsurabilă a lui G, notăm $|E| = |E|_G$ măsura sa.

În [1] H. Leptin introduce următorul invariant pe grupul G definit de

$$I(G) = \sup_{C \in \mathcal{C}(G)} \inf_{\substack{U \in \mathcal{C}(G) \\ |U| > 0}} \frac{|CU|_G}{|U|_G} \tag{1}$$

Acest invariant este deosebit de util în teoria măsurilor invariante pe grupuri local compacte sau pe spaţii omogene. În mod special, el joacă un rol important în caracterizarea grupurilor mediabile (care admit o medie invariantă în raport cu translaţiile). Astfel, s-a arătat că $I(G) = 1$ este o condiţie necesară şi suficientă ca grupul G să fie mediabil.

Un prim rezultat relativ la invariantul $I(G)$ este următoarea inegalitate a lui Leptin: Dacă H este un subgrup normal al lui G, atunci

$$I(G) \leqslant I(G/H) \cdot I(H) \tag{2}$$

De fapt, această inegalitate a fost demonstrată fără a impune condiţia ca H să fie normal. În această situaţie trebuie modificată definiţia (1) pentru cazul mai general cînd grupul local compact G se înlocuieşte cu spaţiul omogen G/H.

Scopul acestei lucrări este de a demonstra următoarea teoremă, care constituie o generalizare a inegalităţii (2).

TEOREMA. *Fie* G *şi* K *două grupuri local compacte şi* $\varphi : G \to K$ *un epimorfism continuu deschis. Notăm* $H = ker\ (\varphi)$. *Atunci,*

$$I(G) \leqslant I(K)I(H) \tag{3}$$

2. Pentru demonstrarea teoremei vom folosi două leme analoge cu cele din [1]. Notăm cu x, y, z elementele generice din G, H, K şi cu dy şi dz măsuri Haar invariante la stînga pe H, respectiv K. Fie $dx = dy \otimes dz$ produsul omomorf al măsurilor dy şi dz. Se ştie că fiecărei funcţii $f \in \mathfrak{L}^1(G)$ îi corespunde în mod univoc o funcţie $\bar{f} \in \mathfrak{L}^1(K)$ cu proprietatea

$$\forall x \in G, \bar{f}[\varphi(x)] = \int_H f(xy)dy, \tag{4}$$

iar

$$\int_G f(x)dx = \int_K \bar{f}(z)dz. \tag{5}$$

LEMA 1. *Fie* $C \in \mathcal{C}(G)$, $W \in \mathcal{C}(H)$, $Q = C^{-1}C \cap H \in \mathcal{C}(H)$. *Atunci*

$$|CW|_G \leqslant |\varphi(C)|_K |QW|_H$$

Demonstrație. Fie $z \notin \varphi(C)$ și $x \in \varphi^{-1}(z)$. Dacă $y \in H$ atunci $xy \notin CW$ (în adevăr, dacă $xy \in CW$ atunci $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x) = z \in \varphi(CW) \subset \subset \varphi(C)$). Deci, $\chi_{CW}(xy) = 0$ și din (4) rezultă $\bar{\chi}_{CW}(z) = \bar{\chi}_{CW}(\varphi(x)) = = \int\limits_H \chi_{CW}(xy)dy = 0$.

Prin urmare,

$$x \in \varphi(C) \Rightarrow \bar{\chi}_{CW}(z) = 0. \tag{6}$$

Fie $x \in C$. Atunci

$$x^{-1}CW \cap H \subset C^{-1}CW \cap H = (C^{-1}C \cap H) = QW$$

de unde

$$\chi_{CW}(xy) = \chi_{x^{-1}CW}(y) \leqslant \chi_{QW}(y)$$

deci

$$\bar{\chi}_{CW}(z) = \bar{\chi}_{CW}(\varphi(x)) = \int\limits_H \chi_{CW}(xy)dy \leqslant \int\limits_H \chi_{QW}(y)dy = |QW|_H, \quad \forall z \in \varphi(C) \tag{7}$$

Din (5), (6) și (7) rezultă

$$|CW|_G = \int\limits_G \chi_{CW}(x)dx = \int\limits_K \bar{\chi}_{CW}(z)dz = \int\limits_{\varphi(C)} \chi_{CW}(z)dz \leqslant |QW|_H \int\limits_{\varphi(C)} dz =$$
$$= |QW|_H \cdot |\varphi(C)|_K.$$

LEMA 2. *Pentru* $C \in \mathcal{C}(G)$ *avem*

$$|\varphi(C)|_K \leqslant \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} \frac{|CW|_G}{|W|_H} \leqslant |\varphi(C)|_K \cdot I(H)$$

Demonstrație. Din (1) deducem

$$I(H) \leqslant \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} \frac{|QW|_H}{|W|_H}$$

Ținînd seama de Lema 1 avem

$$|\varphi(C)|_K I(H) \geqslant |\varphi(C)|_K \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} \frac{|QW|_H}{|W|_H} = \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} |\varphi(C)|_K \frac{|QW|_H}{|W|_H} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} \frac{|CW|_G}{|QW|_H} \cdot \frac{|QW|_H}{|W|_H} = \inf_{W \in \mathcal{C}(H)} \frac{|CW|_G}{|W|_H}$$

de unde rezultă partea dreaptă a inegalității.

Să demonstrăm acum inegalitatea din partea stîngă. Fie $x \in C$ şi $W \in \mathcal{C}(H)$. Atunci avem pentru $y \in H$.

$$\chi_{CW}(xy) = \chi_{x^{-1}CW}(y) \geqslant \chi_W(y),$$

deci

$$\bar{\chi}_{CW}[\varphi(x)] = \int_H \chi_{CW}(xy)dy \geqslant \int_H \chi_W(y)dy = |W|_H \quad \forall x \in C$$

sau

$$\bar{\chi}_{CW}(z) \geqslant |W|_H, \quad \forall z \in \varphi(C).$$

De aici rezultă

$$|CW|_G = \int_G \chi_{CW}(x)dx = \int_K \bar{\chi}_{CW}(z)dz = \int_{\varphi(C)} \bar{\chi}_{CW}(z)dz \geqslant |W|_H \cdot \int_{\varphi(C)} dz = |W|_H \cdot |\varphi(C)|_K.$$

Deci

$$|\varphi(C)|_K \leqslant \frac{|CW|_G}{|W|_H} \quad \forall W \in \mathcal{C}(H)$$

3. Vom trece acum la demonstrarea teoremei. Fie C şi $U \in \mathcal{C}(G)$ cu $|U|_G > 0$. Din Lema 2 rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $W \in \mathcal{C}(H)$ cu $|W|_H > 0$ astfel ca

$$|\varphi(CU)|_K = |\varphi(C)\varphi(U)|_K \leqslant \frac{|CUW|_G}{|W|_H} \leqslant |\varphi(C)\varphi(U)|_K(I(H) + \varepsilon)$$

şi

$$|\varphi(U)|_K \leqslant \frac{|UW|_G}{|W|_H} \quad \text{sau} \quad \frac{|W|_H}{|UW|_G} \leqslant \frac{1}{|\varphi(U)|_K}$$

De aici rezultă

$$\inf_{V \in \mathcal{C}(G)} \frac{|CV|_G}{|V|_G} \leqslant \frac{|CUW|_G}{|UW|_G} \leqslant \frac{1}{|UW|_G} \cdot |W|_H \cdot |\varphi(C)\varphi(U)|_K(I(H) + \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varphi(C)\varphi(U)|_K}{|\varphi(U)|_K}(I(H) + \varepsilon).$$

Deoarece φ este un epimorfism continuu deschis, rezultă că $\mathcal{C}(K) = \{\varphi(U) | U \in \mathcal{C}(G)\}$.

Luînd infimul după $U \in \mathcal{C}(G)$ (adică după $\varphi(U) \in \mathcal{C}(K)$) şi apoi supremul după $C \in \mathcal{C}(G)$ deducem

$$I(G) \leqslant I(K)\,[I(H) + \varepsilon]$$

Deoarece ε este arbitrar, rezultă inegalitatea (3).

(Intrat în redacţie la 8 decembrie 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. Leptin, H., *On certain invariant of a locally compact group*, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, (1966), 870–874.

ON AN INVARIANT OF H. LEPTIN

(Summary)

For a locally compact group G the invariant of H. Leptin is defined by (1), where $\mathcal{C}(G)$ is the class of compact sets in G and $|E| = |E|_G$ is the measure of the measurable subset E of G with respect to the Haar measure dx on G. In this note one proves the inequality (3), where G and K are two locally compact groups, $\varphi : G \to K$ is a continuous open epimorphism and $H = \ker(\varphi)$. This is a generalization of the inequality (2) of Leptin.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

ASUPRA UNOR CLASE DE FUNCŢII BAZILEVICI

OTTO FEKETE

1. Fie $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olomorfă în discul unitate, cu $f(z)f'(z) \neq 0$ în $0 < |z| < 1$ şi fie β un număr real. Dacă

$$\operatorname{Re} J(\beta, f(z)) = \operatorname{Re}\left[(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right] > 0 \tag{1}$$

în $\Delta = \{z/|z| < 1\}$ atunci f se numeşte funcţie β-convexă [6]. Vom nota cu $\mathfrak{M}_\beta$ mulţimea acestor funcţii. $\mathfrak{M}_0 = S^*$ este chiar clasa funcţiilor stelate. Se ştie că $\mathfrak{M}_{\beta'} \subset \mathfrak{M}_{\beta''} \subset S^*$ pentru $0 \leqq \beta'' \leqq \beta'$, $\mathfrak{M}_\infty = \{z\}$ [4].

Notăm cu $\mathfrak{P}$ clasa funcţiilor $P(z) = 1 + \ldots$ olomorfe şi cu parte reală pozitivă în Δ. Vom considera clasa funcţiilor Bazilevici $B(\alpha, \mathfrak{P}, S^*)$ adică a funcţiilor olomorfe care se reprezintă sub forma

$$f(z) = \left(\alpha \int_0^z P(\zeta) g^\alpha(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} = z + \ldots \tag{2}$$

în Δ, unde $P \in \mathfrak{P}$, $g \in S^*$ şi $\alpha > 0$. Se ştie că aceste funcţii sînt univalente. Se pot obţine subclase de funcţii Bazilevici $B(\alpha, Q, \mathfrak{T})$ formate din funcţii de forma (2) unde $P \in Q \subset \mathfrak{P}$ şi $g \in \mathfrak{T} \subset S^*$, $\alpha > 0$. Ne vom ocupa în mod special de cazurile $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_\beta$, $0 \leqq \beta \leqq \infty$ şi $Q = \{1\}$ sau $Q = \mathfrak{P}$.

Dacă f este o funcţie olomorfă în Δ, $p > 0$ şi $\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < \infty$, atunci se spune că f aparţine clasei Hardy H^p. Menţionăm că H^∞ este clasa funcţiilor olomorfe şi mărginite în Δ, iar pentru $0 < p' < p'' \leqq \infty$ avem $H^{p''} \subset H^{p'}$. Dacă f este olomorfă în Δ şi $\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty$ atunci se spune că f este funcţie Nevanlinna. Pentru $p > 0$, orice funcţie din H^p este funcţie Nevanlinna.

Clasa H^p a funcţiilor Bazilevici şi a derivatelor lor de ordinul întîi a fost stabilită de S. S. Miller în [3], şi anume

TEOREMA A. *Dacă* $f \in B(\alpha, \mathfrak{P}, S^*)$ *şi* $g \neq k_\tau^0$ $(k_\tau^0(z) = z(1 - e^{i\tau}z)^{-2}$, $\tau \in R)$ *atunci există un* $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ *astfel încît* $f \in H^{1/2+\varepsilon}$.

TEOREMA B. *Dacă* $f \in B(\alpha, \mathfrak{P}, S^*)$ *şi* $g \neq k_\tau^0$, *atunci*

(*i*) *există un* $\delta = \delta(f) > 0$ *astfel ca* $f' \in H^{1/3+\delta}$ *dacă* $0 < \alpha < 1$

(*ii*) *există un* $\delta = \delta(f) > 0$ *astfel ca* $f' \in H^{1/(2\alpha+1)+\delta}$ *dacă* $\alpha \geqq 1$.

În cele ce urmează, vom stabili clasa H^p a funcţiilor $f \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, $\beta \geq 0$ oarecare şi a derivatelor lor. Reamintim în prealabil rezultatul referitor la clasa H^p a funcţiilor β-convexe [1].

TEOREMA C.

(*i*) *Dacă* $f \in \mathfrak{M}_\beta$, $\beta > 2$, *atunci* $f \in H^\infty$

(*ii*) *Dacă* $f \in \mathfrak{M}_\beta$, $\beta \leq 2$ *şi* $f \neq k_\tau^\beta \left(k_\tau^\beta(z) = \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1 - e^{i\tau}\zeta)^{-\frac{2}{\alpha}} d\zeta \right)^\alpha \right)$

atunci $f \in H p(\beta)$ *unde* $p(\beta) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } \beta = 2 \\ \frac{1}{2-\beta} + \varepsilon & \text{dacă } 0 \leq \beta < 2 \end{cases}$

(*iii*) *Dacă* $f = k_\tau^\beta$ *atunci* $f \in H^{p(\beta)}$ *unde* $p(\beta) < \infty$ *pentru* $\beta = 2$ *şi* $p(\beta) < 1/(2-\beta)$ *pentru* $0 \leq \beta < 2$

In plus, $k_\tau^2 \notin H^\infty$ *şi* $k_\tau^\beta \notin H^{1/(2-\beta)}$, $0 \leq \beta < 2$.

2. Fie $f(z) = \left(\alpha \int_0^z P(\zeta) g^\alpha(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta \right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$. Avem

$$f'(z) = P(z) g^\alpha(z) z^{-1} f^{1-\alpha}(z) \tag{3}$$

Notăm

$$F(z) = (f(z)/z)^\alpha. \tag{4}$$

F este olomorfă în Δ şi derivata ei este

$$F'(z) = \alpha \frac{P(z) g^\alpha(z)}{z^{\alpha+1}} - \alpha \frac{F(z)}{z}$$

Presupunem că $0 \leq p \leq 1$, $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$. Avem atunci

$$I(r) \equiv \int_0^{2\pi} |F'(z)|^p d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_0^{2\pi} \left| \alpha \frac{P(z) g^\alpha(z)}{z^{\alpha+1}} - \alpha \frac{F(z)}{z} \right|^p d\theta \leq$$

$$\leq \frac{\alpha^p}{r^{p(\alpha+1)}} \int_0^{2\pi} |P(z)|^p |g(z)|^{\alpha p} d\theta + \frac{\alpha}{r^{(\alpha+1)p}} \int_0^{2\pi} |f(z)|^{\alpha p} d\theta$$

Aplicînd inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$I(r) \leq \frac{\alpha^p}{r^{p(\alpha+1)}} \left[\int_0^{2\pi} |P(z)|^{pa} d\theta \right]^{\frac{1}{a}} \left[\int_0^{2\pi} |g(z)|^{\alpha p b} d\theta \right]^{\frac{1}{b}} + \frac{\alpha^p}{r^{p(\alpha+1)}} \int_0^{2\pi} |f(z)|^{\alpha p} d\theta$$

Pentru ca $\lim\limits_{r\to 1} I(r) < \infty$ este suficient ca

$$\begin{cases} pa < 1 \\ \alpha p < 1/2 \\ \alpha p b < p(\beta) \end{cases} \tag{6}$$

$p(\beta)$ fiind valoarea corespunzătoare lui β din teorema C. Folosind această evaluare, vom demonstra următoarele leme.

LEMA 1. *Dacă* $f \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, $\beta \geqq 2$, *atunci*

(*i*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < \infty$ *dacă* $\alpha \leqq 1/2$

(*ii*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < \alpha/(2\alpha - 1)$ *dacă* $\alpha > 1/2$

Demonstrație. Dacă $\beta \geqq 2$, $g \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$. Deci $I(r) < \infty$ dacă $pa < 1$ și $\alpha p < 1/2$; $\alpha p b < \infty$ este îndeplinită pentru orice p finit.

(i) Dacă $\alpha \leqq 1/2$ atunci ambele inegalități sînt îndeplinite pentru $p < 1$, deci $F' \in H^p$ pentru orice $p < 1$; conform teoremei lui Hardy-Littlewood $F \in H^p$ pentru orice $p < \infty$ și din (4), $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$.

(ii) Dacă $\alpha > 1/2$ atunci ambele inegalități sînt adevărate pentru $p < 1/2\alpha$, ceea ce implică $F' \in H^p$, oricare ar fi $p < 1/2\alpha$ și $f \in H^p$ pentru orice $p < \alpha/(2\alpha - 1)$.

LEMA 2. *Dacă* $f = \left(\alpha \int\limits_0^z P(\zeta) g^\alpha(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, $\beta < 2$ *și* $g \neq k_\tau^\beta$, *atunci*

(*i*) $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ *dacă* $\alpha < \dfrac{1}{\beta}$

(*ii*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < \alpha/(2\alpha - 1)$ *dacă* $\alpha \geqq \dfrac{1}{\beta}$.

Demonstrație. Dacă $0 \leqq \beta < 2$, $g \in \mathfrak{M}_\beta$ și $g \neq k_\tau^\beta$ atunci conform teoremei C avem $\lim\limits_{r\to 1} I(r) < \infty$ dacă $pa < 1$, $\alpha p < 1/2$ și $\alpha p b \leqq 1/(2-\beta)+\varepsilon$.

(i) Dacă $\alpha < \dfrac{1}{\beta}$, cele trei inegalități sînt adevărate pentru $p < \dfrac{1+\varepsilon(2-\beta)}{1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon)}$ $\left(\text{pentru } a = \dfrac{1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon)}{1+\varepsilon(2-\beta)} \text{ și } b = \dfrac{1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon)}{\alpha(2-\beta)}\right)$. Există deci un $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ astfel ca $F' \in H^{(1+\varepsilon(2-\beta))/(1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon))}$, de unde $F \in H^{(1+\varepsilon(2-\beta))/\alpha(2-\beta)}$ și din (4) $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$.

(ii) Dacă $\alpha \geqq \dfrac{1}{\beta}$, $\lim\limits_{r\to 1^-} I(r) < \infty$ dacă sînt verificate inegalitățile $pa < 1$, $\alpha p b < 1/(2-\beta)$ și $\alpha p < 1/2$, a și b fiind armonic conjugate, $\beta < 2$. Acest sistem este verificat de $p < 1/(2\alpha)$ (pentru $a = 2\alpha$ și $b = 2\alpha/(2\alpha - 1)$). Deci $F' \in H^p$ pentru orice $p < 1/(2\alpha)$, $F \in H^p$ oricare ar fi $p < 1/(2\alpha - 1)$ și $f \in H^p$ pentru orice $p < \alpha/(2\alpha - 1)$.

Observație. Lema 2 este adevărată și pentru $g = k_\tau^\beta$ cu singura modificare că punctul (i) devine

(i′) $f \in H^p$ pentru orice $p < 1/(2-\beta)$, dacă $\alpha < \dfrac{1}{\beta}$.

TEOREMA 1. *Fie* $f(z) = \left(\alpha \int_0^z P(\zeta) g^\alpha(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{P}, \mathfrak{M}_\beta)$. *Atunci*

(*i*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < \infty$ *dacă* $\beta \geqq 2$

(*ii*) *există un* $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ *astfel ca* $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ *dacă* $0 \leqq \beta < 2$ *şi* $g \neq k_\tau^\beta$

(*iii*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < 1/(2 - \beta)$ *dacă* $0 \leqq \beta < 2$ *şi* $g = k_\tau^\beta$.

Aceste scufundări sînt cele mai bune posibile.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema prin inducţie, pasul inducţiei fiind chiar demonstraţia lemelor de mai sus.

(i) Pentru $\alpha \leqq 1/2$, concluzia este cuprinsă în rezultatul lemei 1. Fie $\alpha > 1/2$. Din (ii) al lemei 1 (6) devine

$$\begin{cases} p < 1 \\ \alpha p < \alpha/(2\alpha - 1) \end{cases} \tag{7}$$

Deci $\lim\limits_{r \to 1} I(r) < \infty$ dacă $p < 1$ şi $p < 1/(2\alpha - 1)$. Dacă $1/2 < \alpha \leqq 1$ atunci $1 \geqq 1/(2\alpha - 1)$, deci (7) este satisfăcută pentru $p < 1$, şi, repetînd demonstraţia punctului (i) al lemei 1, deducem că $f \in H^p$ pentru orice $p < \infty$. Dacă $\alpha > 1$, (7) este verificată pentru $p < 1/(2\alpha - 1)$, adică $F' \in H^p$ pentru orice $p < 1/(2\alpha - 1)$, de unde deducem că $F \in H^p$ pentru orice $p < 1/(2\alpha - 2)$ şi $f \in H^p$ pentru orice $p < \alpha/(2\alpha - 2)$. Putem modifica deci concluziile lemei 1 astfel:

(i_2) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$, dacă $0 < \alpha \leqq 1$

(ii_2) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \alpha/(2\alpha - 2)$ dacă $\alpha > 1$.

Continuînd în acest mod, presupunem acum că

(i_n) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$, dacă $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2} n$

(ii_n) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \alpha/(2\alpha - n)$ dacă $\alpha > \frac{1}{2} n$

Presupunînd (i_n) şi (ii_n) adevărate, vom demonstra că

(i_{n+1}) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$ dacă $0 < \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$

(ii_{n+1}) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \alpha/(2\alpha - n - 1)$ dacă $\alpha > \frac{1}{2}(n + 1)$

Într-adevăr, să presupunem că $\frac{1}{2} n < \alpha \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$. Sistemul (7 devine

$$\begin{cases} p < 1 \\ \alpha p < \alpha/(2\alpha - n) \end{cases} \quad (\text{din } (i_n)) \tag{8}$$

sistem adevărat în acest caz pentru $p < 1$. Avem deci $F' \in H^p$ oricare ar fi $p < 1$ de unde $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \infty$, (i_{n+1}) fiind demonstrată. Dacă $\alpha > \frac{1}{2}(n+1)$, sistemul (8) este satisfăcut de $p < 1/(2\alpha - n)$, de unde deducem imediat că (ii_{n+1}) este adevărată. Concluzia inducției este deci $f \in H^p$ pentru orice $p < \infty$ dacă $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2} n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Pentru $\alpha > 0$ fixat găsim deci un $N \in \mathbf{N}$ astfel ca $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2} N$, deci pentru orice $f \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$ putem afirma că $f \in H^p$ pentru orice $p < \infty$.

(ii) Fie $0 \leqq \beta < 2$ și $g \neq k_\tau^\beta$. Aplicînd concluzia (ii) din lema 2 sistemul (6) devine

$$\begin{cases} ap < 1 \\ \alpha p b < 1/(2-\beta) + \varepsilon \\ \alpha p < \alpha/(2\alpha - 1) \end{cases} \tag{9}$$

Ca și în demonstrația lemei, primele două inegalități revin la $p < \frac{1 + \varepsilon(2-\beta)}{1 + (2-\beta)(\alpha+\varepsilon)}$, dacă $\alpha < 2/\beta$, $\frac{1+\varepsilon(2-\beta)}{1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon)} < \frac{1}{2\alpha - 1}$. Ca și în lema 2 avem în acest caz $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$. Dacă $\alpha \geqq 2/\beta$, $\frac{1+\varepsilon(2-\beta)}{1+(2-\beta)(\alpha+\varepsilon)} > \frac{1}{2\alpha - 1}$, ceea ce implică $F' \in H^p$ pentru orice $p < \frac{1}{2\alpha-1}$, de unde se deduce că $f \in H^p$, oricare ar fi $p < \alpha/(2\alpha - 2)$. Concluziile lemei 2 devin deci

(i_2) $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ dacă $\alpha < 2/\beta$

(ii_2) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < \alpha/(2\alpha - 2)$ dacă $\alpha \geqq 2/\beta$

Să presupunem acum

(i_n) $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ dacă $\alpha < n/\beta$

(ii_n) $f \in H^p$ pentru orice $p < \alpha/(2\alpha - n)$ dacă $\alpha \geqq n/\beta$

Vom arăta că atunci avem și

(i_{n+1}) $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ dacă $\alpha < (n+1)/\beta$

(ii_{n+1}) $f \in H^p$ oricare ar fi $p < /(2\alpha - n - 1)$ dacă $\alpha \geqq (n+1)/\beta$

Într-adevăr, fie pentru început $n/\beta \leqq \alpha < (n+1)/\beta$. Atunci sistemul (9) devine, ținînd seama de (ii_n)

$$\begin{cases} pa < 1 \\ \alpha p b < 1/(2-\beta) + \varepsilon \\ \alpha p < \alpha/(2\alpha - n) \end{cases} \tag{10}$$

sistem verificat de $p < \frac{1 + \varepsilon(2 - \beta)}{1 + (2 - \beta)(\alpha + \varepsilon)}$. De aici avem imediat $f \in H^{1/(2-\beta)+\varepsilon}$ şi în cazul $n/\beta \leqq \alpha < (n + 1)/\beta$ ceea ce demonstrează (i_{n+1}). Dacă $\alpha \geqq (n + 1)/\beta$, $\frac{1}{2\alpha - n} < \frac{1 + \varepsilon(2 - \beta)}{1 + (2 - \beta)(\alpha + \varepsilon)}$ implică $F' \in H^p$ pentru $p < 1/(2\alpha - n)$, $F \in H^p$ pentru $p < 1/(2\alpha - n - 1)$ şi $f \in H^p$ pentru orice $p < \alpha/(2\alpha - n - 1)$

(iii) se arată analog cu (ii) folosind concluzia (iii) din teorema C în locul concluziei (ii) a aceleiaşi teoreme. Rezultatele sînt cele mai bune posibile, deoarece $\mathfrak{M}_\beta \subset B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$ pentru orice $\beta \geqq 0$ şi în plus $f(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \zeta^{\alpha - 1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \{z\})$ şi totuşi $f \notin H^\infty$.

TEOREMA 2. *Fie* $f(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z P(\zeta) g^\alpha(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, $0 < \alpha < 1$.

Atunci

(*i*) $f' \in H^p$ *pentru orice* $p < 1$ *dacă* $\beta \geqq 2$

(*ii*) *există un* $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ *astfel ca* $f \in H^{1/(3-\beta)+\varepsilon}$ *dacă* $0 \leqq \beta < 2$ *şi* $g \neq k_\tau^\beta$

(*iii*) $f \in H^p$ *pentru orice* $p < 1/(3 - \beta)$ *dacă* $0 \leqq \beta < 2$ *şi* $g = k_\tau^\beta$

Aceste scufundări sînt cele mai bune posibile.

Demonstraţie. Integrînd (3) şi aplicînd inegalitatea lui Hölder avem

$$I(r) = \int\limits_0^{2\pi} |f'(z)|^p d\theta = \int\limits_0^{2\pi} |P(z)|^p |g(z)|^{\alpha p} |z^{-1}|^p |f(z)|^{(1-\alpha)p} d\theta \leqq$$

$$\leqq r^{-p} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(z)|^{(1-\alpha)pa} d\theta\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int\limits_0^{2\pi} |P(z)|^{pb} |g(z)|^{\alpha pb} d\theta\right)^{\frac{1}{b}} \leqq$$

$$\leqq r^{-p} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(z)|^{(1-\alpha)pa} d\theta\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int\limits_0^{2\pi} |P(z)|^{pbc} d\theta\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\int\limits_0^{2\pi} |g(z)|^{\alpha pbd} d\theta\right)^{\frac{1}{bd}}$$

Deoarece $\beta \geqq 2$, integrala de mai sus este finită dacă este verificat sistemul

$$\begin{cases} (1 - \alpha)pa < \infty \\ pbc < 1 \\ \alpha bpd < \infty \\ 1/a + 1/b = 1, \ a > 1, \ 1/c + 1/d = 1, \ c > 1 \end{cases} \tag{11}$$

Se vede imediat că sistemul este verificat de $p < 1$, de unde $f' \in H$ oricare ar fi $p < 1$.

(iii) Fie $\beta < 2$. În acest caz sistemul (11) devine

$$\begin{cases} (1 - \alpha)pa < 1/(2 - \beta) \\ pbc < 1 \\ \alpha bpd < 1/(2 - \beta) \\ 1/a + 1/b = 1, \ a > 1, \ 1/c + 1/d = 1, \ c > 1 \end{cases}$$

sistem verificat de $p < 1/(3 - \beta)$ (dacă alegem $a = (3 - \beta)/(1 - \alpha)(2 - \beta)$, $b = (3 - \beta)/(1 + \alpha(2 - \beta))$, $c = 1 + \alpha(2 - \beta)$, $d = (1 + \alpha(2 - \beta)/\alpha(2-\beta))$ ceea ce demonstrează şi punctul (iii) al teoremei.

(ii) se arată în mod analog.

Rezultatele sînt cele mai bune posibile deoarece, în caz contrar, aplicînd teorema lui Hardy-Littlewood, am ajunge în contradicţie cu teorema 1.

TEOREMA 3. *Fie* $f(z) = \left(\alpha \int_0^z P(\zeta)g^\alpha(\zeta)\zeta^{-1}d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$.

Atunci

(*i*) $f' \in H^p$ *oricare ar fi* $p < 1$ *dacă* $\beta \geqq 2$

(*ii*) *există un* $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$, *astfel ca* $f' \in H^{1/(1+\alpha(2-\beta))+\varepsilon}$, *dacă* $\beta < 2$ *şi* $g \neq k_\tau^\beta$

(*iii*) $f' \in H^p$ *oricare ar fi* $p < 1/(1 + \alpha(2 - \beta)$ *dacă* $\beta < 2$ *şi* $g = k_\tau^\beta$

Demonstraţie. Din (3) deducem

$$|f'(z)|^p = |P(z)|^p|g(z)|^{p\alpha}r^{-p}|f(z)|^{(1-\alpha)p}$$

Aplicînd teorema de deformare a lui Bieberbach deducem, integrînd

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^p d\theta \leqq \frac{r^{-\alpha p}}{(1 + r)^{2(1-\alpha)p}} \int_0^{2\pi} |P(z)|^p|g(z)|^{p\alpha}d\theta$$

de unde, din inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f'(z)|^p d\theta \leqq \frac{r^{-\alpha p}}{(1 + r)^{2(1-\alpha)p}} \left(\int_0^{2\pi} |P(z)|^{pa}d\theta\right)^{\frac{1}{a}}\left(\int_0^{2\pi} |g(z)|^{p\alpha b}d\theta\right)^{\frac{1}{b}}$$

Dacă $\beta \geqq 2$, $\lim\limits_{r\to 1} I(r) < \infty$ dacă $pa < 1$ şi $p\alpha b < \infty$, de unde se deduce imediat concluzia (i). Dacă $\beta < 2$ şi $g \neq k_\tau^\beta$, avînd în vedere teorema C, avem $\lim\limits_{r\to 1} I(r) < \infty$ pentru $pa < 1$ şi $p\alpha b \leqq 1/(2 - \beta) + \varepsilon$. De aici rezultă că $f' \in H^{1/(1+\alpha(2-\beta)+\varepsilon)}$ în acest caz. În mod analog se arată şi concluzia (iii).

Observaţie. În ceea ce priveşte scufundarea derivatelor de ordinul doi a funcţiilor din $B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, răspunsul este negativ, întrucît se poate arăta că există o funcţie $f \in B(\alpha, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_\beta)$, $\beta \geqq 0$, pentru care f'' nu este nici măcar funcţie Nevanlinna. Aceasta se arată imediat folosind formula (3) şi raţionînd analog ca în [5, Teorema 4].

3. Fie $\mathfrak{F}$ o mulţime nevidă de funcţii $f(z) = z + \ldots$, univalente în Δ şi fie $\alpha \geqq 0$ dat. Numărul real $\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{F}) = \sup\{R | Re\, J(\alpha, f(z)) > 0, |z| < R, f \in \mathfrak{F}\}$ se numeşte rază de α-convexitate a lui $\mathfrak{F}$, $J(\alpha, f(z))$ fiind cel din (1).

S. S. Miller, P. T. Mocanu şi M. O. Reade au demonstrat în [4] că dacă $f \in B\left(\frac{1}{\alpha}, \{1\}, S^*\right)$, $\alpha > 0$, atunci $Re\, J(\alpha, f(z)) > 0$

pentru $|z| < 1$. Vom determina mai jos raza de α-convexitate pentru clasa $B\left(\frac{1}{\alpha}, \mathfrak{L}, \{z\}\right)$:

TEOREMA 4. $\mathfrak{R}_\alpha\left(B\left(\frac{1}{\alpha}, \mathfrak{L}, \{z\}\right)\right) = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$

Demonstrație. Fie g olomorfă în Δ și $Re\, g(z) > 0$ în Δ; σ un număr complex cu $|\sigma| < 1$. Definim funcția G prin

$$G(z) = g\left(\frac{z + \sigma}{1 + \bar{\sigma} z}\right) = g(\sigma) + g'(\sigma)(1 - |\sigma|^2)z + \dots$$

Funcția G este olomorfă în Δ și $Re\, G(z) > 0$. Vom avea deci (vezi [7] prob. 235)

$$|g'(\sigma)(1 - |\sigma|^2)| \leqq 2|g(\sigma)| \text{ sau } \left|\frac{\sigma g'(\sigma)}{g(\sigma)}\right| \leqq \frac{2|\sigma|}{1 - |\sigma|^2}$$

Deoarece $Re\, z \geqq -|z|$ avem și

$$Re\, \frac{\sigma g'(\sigma)}{g(\sigma)} \geqq -\frac{2|\sigma|}{1 - |\sigma|^2} \tag{13}$$

Fie acum $f \in B\left(\frac{1}{\alpha}, \mathfrak{L}, \{z\}\right)$. Din (3) avem

$$P(z) = \frac{f'(z) f^{\frac{1}{\alpha} - 1}(z)}{z^{\frac{1}{\alpha} - 1}}$$

de unde obținem derivînd

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{zf'(z)}{f(z)} - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \tag{14}$$

Din (13) și din (14) în care am considerat $g(z) = P(z)$ deducem

$$Re\left(\alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1 - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geqq 1 - \frac{2\alpha|z|}{1 - |z|^2} \tag{15}$$

Partea stîngă a inegalității (15) este pozitivă, dacă $1 - \frac{2\alpha|z|}{1 - |z|^2} > 0$, adică dacă $|z| < -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

Pentru completarea demonstrației rămîne să arătăm că poate avea loc și egalitatea în (15). Într-adevăr, dacă $P(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$ și $z \in \mathbf{R}$ atunci

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{2z}{1 - z^2} \text{ și}$$

$$Re\, \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{-2|z|}{1 - |z|^2}$$

Observație. Pentru $\alpha = 1$ obțin chiar raza de convexitate a clasei R stabilită de Mac-Gregor în [2].

(Intrat în redacție la 25 martie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. P. J. Eenigenburg, S. S. Miller, *The H^p classes for α-convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., *38*, 1973, 558–562.
2. T. H. Mac-Gregor, *Functions whose derivative has a positive real part*, Trans. Amer. Math. Soc., *104*, 3, 1962, 532–537.
3. S. S. Miller, *The Hardy Class of a Bazilevič function and its derivative*, Proc. Amer. Math. Soc., *30*, 1, 1971, 125–132.
4. S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade, *Bazilevič functions and generalized convexity*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., *19*, 2, 1974, 213–224.
5. S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Alpha-convex functions and derivatives in the Nevanlinna Class*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 1975, 35–40.
6. P. T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica, *11* (34), 1, 1969, 127–133.
7. G. Pólya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. I, Verlag J. Springer, Berlin, 1925.

ABOUT SOME SUBCLASSES OF BAZILEVIČ FUNCTIONS

(Summary)

We consider the Bazilevič functions $f(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z P(\zeta)g^{\alpha}(\zeta)\zeta d^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ for which the function g is a β-convex function. For the subclasses of Bazilevič functions determinated by different values of β and for their derivatives we determine the H^p class. For the subclass for which $g(z) = z$ we determine the radius of α-convexity.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

ON THE RADIUS OF ALPHA-CONVEXITY

SANFORD S. MILLER*, PETRU T. MOCANU and MAXWELL O. READE*

1. General Results. Let $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ be regular in the unit disc U with $f(z)f'(z)/z \neq 0$, and let

$$J_\alpha(f(z)) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) \tag{1}$$

where α is a real number. In this short note we investigate properties of $R_\alpha(f)$ the *radius of alpha-convexity of f*, defined as

$$R_\alpha(f) = \sup\ \{r \mid Re\ J_\alpha(f(z)) \geq 0,\ |z| = r < 1\}. \tag{2}$$

Note that $J_\alpha(f(0)) = 1$ and hence by continuity $R_\alpha(f) > 0$. This concept is a generalization of the concepts of radius of convexity and radius of starlikeness, which respectively are $R_1(f)$ and $R_0(f)$.

In this first section we obtain a general result enabling us to determine $R_\alpha(f)$ for any function, while in section 2 we investigate the values of $R_\alpha(f)$ for various subclasses of Bazilevič functions.

THEOREM 1. *If* $R_\alpha(f) < 1$ *then there exists* $z_0 \in U$ *such that* $|z_0| = R_\alpha(f)$ *and*

$$z_0J'_\alpha(f_0)) \leq -\frac{1}{2}(1 - J^2_\alpha(f(z_0)) \leq -\frac{1}{2} \tag{3}$$

Proof. From the definition of $R_\alpha(f)$ given in (2) we see that there exists $z_0 \in U$ such that $|z_0| = R_\alpha(f)$. If we let $p(z) = J_\alpha(f(z))$, then $p(0) = 1$, $Re\ p(z_0) = 0$ and $Re\ p(z) > 0$ when $|z| < |z_0|$. Hence by [4, Lemma 1] we must have $z_0p'(z_0) \leq -(1 - p^2(z_0))/2 \leq -1/2$ and this yields (3).

Remarks. (1) Note that at the point z_0, corresponding to the extremity of the radius of α-convexity, $z_0J'_\alpha(f(z_0))$ must be a negative real number.

(2) From the theorem we see that we can obtain $R_\alpha(f)$ by finding the z_0 of smallest modulus that satisfies the following conditions:

$$Re\ J_\alpha(f(z)) = 0 \tag{4}$$

$$Im\ zJ'_\alpha(f(z)) = 0, \text{ and} \tag{5}$$

$$Re\ zJ'_\alpha(f(z)) \leq -(1 + (Im\ J_\alpha(f(z)))^2)/2. \tag{6}$$

---

* This work was carried out while the authors were U.S.A. — Romanian Exchange Scholars.

COROLLARY 1.1. *If the radius of convexity of* f, $R_1(f)$, *is less than* 1, *then* $R_1(f) = |z_0|$, *where* z_0 *is the solution of smallest modulus satisfying the following conditions*:

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = 0, \tag{7}$$

$$\operatorname{Im} z^2\{f, z\} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re} z^2\{f, z\} \leq 0, \tag{9}$$

where $\{f, z\}$ *is the Schwarzian derivative* $(f''/f')' - (f''/f')^2/2$.

Proof. It is clear from (1) and (2) that z_0 must satisfy (7). If we take $\alpha = 1$ in (1) and (3) we must have

$$z\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)' \leq -\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)^2\right], \tag{10}$$

when $z = z_0$. If we let $F(z) = zf''(z)/f'(z) + 1$, a simple calculation yields $zF'(z) = z^2\{f, z\} - (1 - F^2(z))/2$ and combining this with (10) we obtain $z_0^2\{f, z_0\} \leq 0$. This proves (8) and (9).

A result similar to this corollary was proved by P. Mocanu [5] who showed by using Lagrange multipliers that (7) and (8) were satisfied at the point $z = z_0$.

If we take $\alpha = 0$ in Theorem 1 we obtain the following criteria for the radius of starlikeness. The proof which is similar to the previous corollary will be omitted.

COROLLARY 1.2. *If the radius of starlikeness*, $R_0(f)$, *is less than* 1, *then* $R_0(f) = |z_0|$, *where* z_0 *is the solution of smallest modulus satisfying the following conditions*:

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = 0,$$

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = 0, \textit{ and}$$

$$2\left(\operatorname{Im} \frac{zf'}{f}\right)\left(\operatorname{Im}\left[\frac{zf''}{f'} + 1\right]\right) \geq 1 + 3\left(\operatorname{Im} \frac{zf'}{f}\right)^2.$$

2. Subclasses of Bazilevič Functions. Let $g(z) \in S^*$, the class of normalized starlike functions and let $p(z) \in \mathfrak{L}$, the class of functions $p(z) = 1 + p_1 z + \ldots$ regular in U, with $Re\, p(z) > 0$. If $\beta > 0$ then the function

$$f(z) = \left[\beta \int_0^z g^\beta(\zeta) p(\zeta) \zeta^{-1} d\zeta\right]^{1/\beta} = z + b_2 z^2 + \ldots \tag{11}$$

has been shown by Bazilevič [1] to be regular and univalent in U. Functions defined by (11) are called Bazilevič functions of type β and are denoted by $B(\beta) = B(\beta, \mathfrak{L}, S^*)$.

If $\mathfrak{F}$ is a class of regular functions $f(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$, with $f(z) \cdot f'(z)/z \neq 0$ then the *radius of alpha-convexity of* $\mathfrak{F}$ is defined by

$$R_\alpha(\mathfrak{F}) = \sup \{r | Re\, J_\alpha(f(z)) > 0,\ |z| < r,\ f \in \mathfrak{F}\}$$

The general problem is to find $R_\alpha(B(\beta))$; we will discuss several subcases of this problem.

THEOREM 2. $R_\alpha(B(1/\alpha)) = 1 + \alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}$

Proof. From (1) and (11) we obtain

$$J_\alpha(f(z)) = \frac{zg'(z)}{g(z)} + \alpha \frac{zp'(z)}{p(z)} \tag{12}$$

Since $g \in S^*$ we have $Re\, zg'(z)/g(z) \geq (1 - r)/(1 + r)$, and since $p \in \mathfrak{P}$ we have by [7]

$$Re \frac{zp'(z)}{p(z)} \geq -\frac{2r}{1 - r^2} \tag{13}$$

By using these inequalities in (12) we obtain

$$Re\, J_\alpha(f(z)) \geq \frac{1 - 2(1 + \alpha) + r^2}{1 - r^2}$$

and this last term will be greater than zero provided that $r < 1 + \alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}$. If we take $g(z)$ equal to the Koebe function $z/(1 + z)^2$ and $p(z) = (1 - z)/(1 + z)$ then $Re\, J_\alpha(f(z))$ will vanish on $r = 1 + \alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}$ and this completes the proof of the theorem.

In [6] it is shown that $R_\alpha(S^*) = 1 + \alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}$, $\alpha > 0$. Hence we see that $R_\alpha(S^*) = R_\alpha(B(1/\alpha))$.

THEOREM 3. *If* C *represents the class of convex functions then* $R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{P}, C)] = 1/(2\alpha + 1)$.

Proof. Since $g \in C$ we have $Re\, zg'(z)/g(z) \geq 1/(1 + r)$, and combining this with (12) and (13) we obtain

$$Re\, J_\alpha(f(z)) \geq \frac{1 - (1 + 2\alpha)r}{1 - r}$$

This last term will be greater than zero provided that $r < 1/(2\alpha + 1)$.

Note that in the special case $\alpha = 1$, $B(1, \mathfrak{P}, C)$ is the class of functions $f(z)$ which satisfy $Re\, zf'(z)/g(z) > 0$ for some g in C. This is a subclass of the close-to-convex functions, and for this subclass we obtain the radius of convexity $R_1[B(1, \mathfrak{P}, C)] = 1/3$.

Let $\mathfrak{P}(M)$ be the set of functions in $\mathfrak{P}$ that satisfy $|p(z) - M| < M$, where $M > 1/2$, and let $S^*(N)$ be the set of functions in S^* that satisfy $|zg'(z)/g(z) - N| < N$, where $N > 1/2$. If we let $m = 1 - 1/M$ and $n = 1 - 1/N$ then by [**3**; pp. 162, 165]

$$Re \frac{zp'(z)}{p(z)} \geq -\frac{(1 + m)r}{(1 - r)(1 + mr)}, \text{ and} \tag{13}$$

$$Re \frac{zg'(z)}{g(z)} \geq \frac{1 - r}{1 + nr} \tag{14}$$

Using these inequalities in (12) we can prove the following theorem.

THEOREM 4. $R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(M), S^*(N)] = r_0$, *where* r_0 *is the smallest positive root of*

$$mr^3 - [\alpha(1 + m)n + 2m - 1]r^2 - [\alpha(1 + m) + 2 - m]r + 1 = 0 \quad (15)$$

From this theorem we can obtain the following special cases:

$$R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(1), S^*(N))] = \frac{\alpha + 2 - \sqrt{\alpha(\alpha + 2 + 4n)}}{2(1 - \alpha n)}$$

$$R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(M), S^*(M))] =$$
$$= \frac{1}{2}[\alpha(1 + m) + 2 - \sqrt{\alpha(1 + m)[\alpha(1 + m) + 4]}]$$

$$R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(1), S^*(1))] = \frac{1}{2}[\alpha + 2 - \sqrt{\alpha(\alpha + 4)}]$$

$$R_1[B(1, \mathfrak{L}(1), S^*(1))] = \frac{1}{2}[3 - \sqrt{5}]$$

The class $B(1, \mathfrak{L}(1), S^*(1))$ is the class of functions $f(z)$ which satisfy $|zf'/g - 1| < 1$, for some $g(z)$ satisfying $|zg'/g - 1| < 1$.

Let L be the subset of functions $g(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ in S^* that satisfy $\sum_2^\infty n|a_n| \leq 1$. Functions in this class satisfy by [2; pp 179—180], $Re\ zg'(z)/g(z) \geq 2(1 - r)/(2 - r)$. Using this inequality and (13) in (12) we obtain the following theorem.

THEOREM 5. $R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(M), L)] = r_0$, *where* r_0 *is the smallest positive root of*

$$mr^3 + [1 - 2m + \alpha(1 + m)/2]r^2 - [2 - m + \alpha(1 + m)]r + 1 = 0 \quad (16)$$

Upon comparing (15) *and* (16) *we obtain*

$$R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(M), L)] = R_\alpha[B(1/\alpha, \mathfrak{L}(M), S^*(2/3))].$$

(Received September 1, 1976)

REFERENCES

1. Bazilevič, I. E., *On a case of integrability in quadratures of the Loewner — Kufarev equation*, Mat. Sb. **37** (79) (1955), 471—476.
2. Ezrohi, T., *On a class of analytic functions*, Problems in Math. Phys. and the Theory of Functions II, Naukova Dumka, Kiev, 1964, 171—185.
3. Janowski, W., *Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families*, Annales Polon. Math., **23** (1970), 159—177.
4. Miller, S., Mocanu, P. and Reade, M., *On generalized convexity in conformal mappings* II, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XXI**, 2 (1976), 219—225.
5. Mocanu, P., *Asupra razei de convexitate a funcţiilor olomorfe*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Phys., 2 (1964), 31—33.

6. Mocanu, P. and Reade, M., *The radius of α-convexity for the class of starlike univalent functions, α-real*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XX**, 5 (1975), 561–565.
7. Robertson, M. S., *Star center points of multivalent functions*, Duke Math. J., **12** (1945), 669–684.

ASUPRA RAZEI DE ALFA-CONVEXITATE

(Rezumat)

Raza de alfa-convexitate a unei funcţii $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ olomorfe în discul unitate U este definită de formula (2), unde α este un număr real. Se arată că dacă $R_\alpha(f) < 1$, atunci există un punct $z_0 \in U$ astfel ca $R_\alpha(f) = |z_0|$, iar în punctul z_0 este verificată inegalitatea (3). În continuare se determină raza de alfa-convexitate pentru anumite clase de funcţii Bazilevici.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

ON A FIXED POINT THEOREM OF MAIA

IOAN A. RUS

1. It is well known the following theorem of M. G. Maia [3]

THEOREM 1. *Let* X *be a nonempty set,* d *and* δ *two metrics on* X, $f: X \to X$ *a mapping such that*

(i) $d(x, y) \leq \delta(x, y)$ *for all* $x, y \in X$

(ii) (X, d) *is a complete metric space*

(iii) $f: (X, d) \to (X, d)$ *is continuous*

(iv) there exist $\alpha \in]0, 1[$ *such that*

$\delta(f(x), f(y)) \leq \alpha\delta(x, y)$, *for all* $x, y \in X$

Then f *has a unique fixed point.*

As in the case of Banach's fixed point theorem, we can give an upper bound for the round off in the computing the fixed point given by the theorem of Maia. We have

THEOREM 2. *If the conditions of the theorem* 1 *are fulfilled, then*

(a) If x^* *is the unique fixed point of* f, *then the fixed point set of* f^n, $F_{f^n} = \{x^*\}$, $\forall n \in N$

(b) The fixed point x^* *of* f *is the limit in* (X, d) *of the sequence,* $x_n = f^n(x_0)$, *for each* $x_0 \in X$, *and*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\delta(x_0, x_1)$$

(c) If $g: X \to X$ *is such that*

$$\delta(f(x), g(x)) \leq \eta, \quad \forall x \in X$$

and if we put, $y_n = g^n(x_0)$, *then*

$$d(y_n, x^*) \leq \frac{\eta}{1-\alpha} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\delta(x_0, x_1)$$

2. Many papers related to the Maia's theorem have been published (Singh [7], Iseki [2], Ray [4]). We shall prove some fixed point theorem of Maia type.

THEOREM 3. *Let* X *be a nonempty set,* d *and* δ *two metrics on* X, $f: X \to X$ *a mapping such that*

(i) there exist $\varphi: R_+ \to R_+$, *continuous on* 0, $\varphi(0) = 0$, *and*

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(\delta(x, y)), \quad \forall x, y \in X$$

(ii) $f: (X, d) \to (X, d)$ *is continuous*

(iii) $\exists \alpha \in]0, 1[: \delta(f^2(x), f(x)) \leq \alpha\delta(x, f(x)), \quad \forall x \in X$

and

$\exists \psi: R_+^3 \to R_+$, *continuous on* $(0, 0, r)$, $\forall r \in R_+$ *such that*

$\delta(f(x), f(y)) \leq \psi(\delta(x, y), \delta(x, f(x)), \delta(y, f(y)))$ *and* $r > \psi(r, 0, 0)$, $\forall r > 0$.

Then f *has a unique fixed point.*

Proof. From (iv) we have (see [6], pp. 10), $x_n = f^n(x_0)$, $x_0 \in X$, is a Cauchy sequence in (X, δ). By the condition (i), $(x_n)_{n\in N}$ is a Cauchy sequence in (X, d) and let x^* be the limit of $(x_n)_{n\in N}$ in (X, d). From (iii) we have

$$x^* \in F_f$$

Let x and y be two different fixed point of f. Then from (iv) we have

$$d(x, y) < \psi\,(d(x, y), 0, 0)$$

Therefore, $d(x, y) = 0$, i.e. $x = y$. Thus f has a unique fixed point.

THEOREM 4. *Let* X *be a nonempty set,* d *and* δ *two metrics on* X, $f: X \to X$ *a mapping such that*

(*i*) $\exists c > 0 : d(f(x), f(y)) \leq c\delta(x, y), \quad \forall x, y \in X$

(*ii*) (X, d) *is a complete metric space*

(*iii*) $f: (X, d) \to (X, d)$ *is continuous*

(*iv*) $\exists \alpha, \beta \in R_+$, $\alpha + 2\beta < 1$, *such that*

$\delta(f(x), f(y)) \leq \alpha\delta(x, y) + \beta[\delta(x, f(x)) + \delta(y, f(y))], \quad \forall x, y \in X$

Then f *has a unique fixed point.*

Proof. The conditions of the theorem 3 are fulfilled with

$$\varphi(r) = cr, \ \psi(u, v, w) = \alpha u + \beta[v + w]$$

Remark 1. The theorem 4 will remain true if condition (i) is replaced by one of the following conditions

(i′) $\exists c > 0 : d(x, y) \leq c\delta(x, y)$

(i″) $\exists c > 0$ and $k \in N$ such that

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq c\delta(x, y)$$

3. We wish to apply the theorem 4 to obtain an „existence and uniqueness" theorem for the integral equation

$$\varphi(x) = \lambda \int_\Omega K(x, y, \varphi(y))dy + f(x) \qquad (*)$$

where $\lambda \in R$, $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times R)$, $f \in C(\overline{\Omega})$, and $\Omega \subset R^n$ bounded domaine.

Let $A : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ be the operator defined by

$$A[\varphi](x) = \lambda \int_\Omega K(x, y, \varphi(y))dy + f(x)$$

If we take $X = C(\overline{\Omega})$, $d(\varphi, \psi) = ||\varphi - \psi||_{C(\overline{\Omega})}$, $\delta(\varphi, \psi) = ||\varphi - \psi||_{L^2(\Omega)}$, by the theorem 4 $(\beta = 0)$, we have

THEOREM 5. *Assume that*

(1) $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times R)$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $\qquad \lambda \in R$

(2) $\exists L \in L^2(\Omega)$, such that

$$|K(x, y, u) - K(x, y, v)| \leq L(x, y)|u - v|, \ \forall x, y \in \Omega, \ u, c \in R$$

(3) $|\lambda|^2 \int_{\Omega\times\Omega} |L(x, y)|^2 dx\, dy < 1$

Then the equation (*) *has in* $C(\overline{\Omega})$ *a unique solution.*

(Received September 14, 1976)

REFERENCES

1. S. R. Bernfeld, V. Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1974.
2. K. Iseki, *A common fixed point theorem*, Math. Sem. Notes, Vol. 2, Nr. 1, 1974.
3. M. G. Maia, *Un' Osservazione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Unic. Padova, 40 (1968), 139–143.
4. Barada Ray, *On a fixed point theorem in a space with two metrices*, The Mathematics Education, 9(1973), Nr. 3, 57 A–58 A.
5. P. Pavel, Ioan A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
6. Ioan A. Rus, *Teoria punctului fix*, II, Cluj, 1973.
7. S. P. Singh, *On a fixed point theorem in metric space*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 43 (1970), 229–231.

ASUPRA UNEI TEOREME DE PUNCT FIX A LUI MAIA

(Rezumat)

Se stabileşte o teoremă de punct fix, cu ajutorul căreia se obţine o nouă teoremă de existenţă şi unicitate, relativă la o ecuaţie integrală de tip Fredholm.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

SUR LES OPÉRATEURS PSEUDO-MONOTONES NON COERCITIFS

DAMIAN TRIF

Thomas Donaldson [1] a donné un théorème d'existence des solutions des équations aux opérateurs maximaux monotones non coercitifs en utilisant *le quotient maximal monotone* d'un tel opérateur relatif à un sous-espace. Dans ce travail nous allons donner une extension de ce résultat, relative aux opérateurs pseudo-monotones non coercitifs.

Soient X un espace de Banach réflexiv et X^* son dual. On note par „$\to$" la convergence forte, par „$\rightharpoonup$" la convergence faible et par „(,)" la dualité entre X et X^*.

DÉFINITION 1 (Lions [2]) L'opérateur $T: X \to X^*$ s'appelle *pseudo-monotone* si

a) T est un opérateur borné (c'est à dire transforme les bornés de X en des bornés de X^*)

b) $x_j \rightharpoonup x_0$ dans X et $\limsup\ (Tx_j,\ x_j - x_0) \leq 0$ impliquent $(Tx_0, x_0 - y) \leq \liminf (Tx_j, x_j - y)$, pour tout $y \in X$.

En ce qui suit nous allons utiliser les résultats suivants:

PROPOSITION 1 (Lions [2]). *Tout opérateur pseudo-monotone est de type* M, *c'est à dire*

a) $x_j \rightharpoonup x_0$ *dans* X, $Tx_j \rightharpoonup f$ *dans* X^* *et* *limsup* $(Tx_j, x_j) \leq (f, x_0)$ *impliquent* $Tx_0 = f$

b) les restrictions de T *aux sous-espaces de dimension finie de* X *son continues de* X *fort dans* X^* *faible.*

PROPOSITION 2 (Petryshin, Fitzpatrick [3]) *Soit* $T: X \to X^*$ *un opérateur borné, de type* M. *On suppose qu'il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $x \in X$, $||x|| \geqslant r$, *on ait* $(Tx, x) \geqslant 0$. *Alors, il existe* $x_0 \in X$, $||x_0|| \leqslant r$ *tel que* $Tx_0 = 0$.

PROPOSITION 3 (Petryshyn, Fitzpatrick [3]) *Tout opérateur* $T: X \to X^*$ *pseudo-monotone et coercitif (c'est à dire* $\lim\limits_{||x|| \to \infty} (Tx, x)/||x|| = +\infty$) *est surjectif.*

DÉFINITION 2 Soient X un espace de Banach réflexif, N un sous-espace fermé de X et $T: X \to X^*$ un opérateur pseudo-monotone. Soit X/N l'espace quotient, muni de la norme $||x + N||_{X/N} = \inf\limits_{n \in N} ||x + n||$. Soient $i: X \to X/N$, $ix = x + N$ pour tout $x \in X$ et $i^*: (X/N)^* \to X^*$ l'application duale. Soit $N^\perp = \{x^* \in X^* | (x^*, n) = 0$ pour tout $n \in N\}$. L'opérateur $T_N: X/N \to (X/N)^*$, $T_N(x + N) = i^{*-1}(T(x + N) \cap N^\perp)$ pour tout $x + N \in X/N$ s'appelle *le quotient pseudo-monotone de* T *relatif au sous-espace* N s'il est un opérateur pseudo-monotone.

THÉORÈME 1 *Soient* X *un espace de Banach réflexif,* N *un sous-espace fermé de* X *et* $T: X \to X^*$ *un opérateur pseudo-monotone. On suppose que:*

a) *pour tout* $x \in X$, *il existe* $R_x > 0$ *et un voisinage faible* V_x *de* x *dans* X, *tels que pour tout* $n \in N$, $\|n\| \geq R_x$ *et pour tout* $y \in V_x$, *on ait* $(T(y + n), n) \geq 0$

b) *pour tous* $x, y \in X$, $x - y \in N$ *et* $(Tx - Ty, x - y) = 0$ *impliquent* $x = y$.

Alors, il existe le quotient pseudo-monotone de T *relatif à* N.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que pour tout $x + N \in X/N$ il existe $z \in x + N$ unique tel que $T(x + N) \cap N^{\perp} = Tz$.

Soient $j : N \to X$ l'inclusion, $j^* : X^* \to N^*$ l'application duale et $T_x : N \to N^*$, $T_x n = j^* T(x + jn)$ pour tout $n \in N$. On montre facilement que T_x est un opérateur pseudo-monotone. En vertu de la condition a), pour $x \in X$ il existe $R_x > 0$ tel que pour tout $n \in N$, $\|n\| \geq R_x$, on ait $(T_x n, n) \geq 0$. En vertu de la Proposition 2, il existe $n_x \in N$, $\|n_x\| \leq R_x$ tel que $T_x(n_x) = 0$. Donc, $T(x + n_x) \in T(x + N) \cap N^{\perp}$. En vertu de la condition b), $z = x + n_x$ est unique dans $x + N$.

Nous allons montrer maintenant que T_N est pseudo-monotone.

Soit M un borné de X/N. Supposons que $T_N(M)$ n'est pas borné. Alors, il existe une suite $x_j + N \in M$, telle que $\|T_N(x_j + N)\|_{(X/N)^*} \to \infty$. X/N étant réflexif, on peut tirer de $x_j + N$ une sous-suite notée aussi $x_j + N$, telle que $x_j + N \rightharpoonup x_0 + N$ dans X/N. On montre facilement qu'il existe une suite $x'_j \in x_j + N$ pour tout j, telle que $x'_j \rightharpoonup x'_0 \in x_0 + N$ dans X.

Pour $j \to \infty$, $x'_j \in V_{x'_0}$, donc pour toute solution $n_{x'_j} \in N$ de $T_{x'_j}(n) = 0$ on a $\|n_{x'_j}\| \leq R_{x'_0}$. Il en résulte que $T_N(x_j + N) = i^{*-1} T(x'_j + n_{x'_j})$ est borné, ce qui est une contradiction.

Soit $x_j + N \rightharpoonup x_0 + N$ dans X/N, telle que

$$\limsup\, (T_N(x_j + N),\ x_j - x_0 + N) \leq 0.$$

On suppose qu'il existe $y + N \in X/N$ tel que

$$(T_N(x_0 + N),\ x_0 - y + N) > \liminf\, (T_N(x_j + N),\ x_j - y + N).$$

Soit $x_{j'} + N$ une sous-suite telle que

$$\lim_{j' \to \infty} (T_N(x_{j'} + N),\ x_{j'} - y + N) = \liminf\, (T_N(x_j + N),\ x_j - y + N),$$

et on note cette sous-suite aussi $x_j + N$. Il existe une sous-suite $x'_j \in x_j + N$ telle que $x'_j \rightharpoonup x'_0 \in x_0 + N$ dans X et $\|n_{x'_j}\| \leq R_{x'_0}$. Donc $x'_j + n_{x'_j} \rightharpoonup x'_0 + n_0$ et $T_N(x_j + N) = i^{*-1} T(x'_j + n_{x'_j})$. Mais $\{T(x'_j + n_{x'_j})\}_j$ est borné dans X^*, d'où $T(x'_j + n_{x'_j}) \rightharpoonup f \in N^1$ dans X^*, pour une soussuite. On a

$\limsup\, (T_N(x_j + N),\ x_j - x_0 + N) = \limsup (T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j + n_{x'_j} - x'_0 - n_0) \leq 0$, donc

$\limsup(T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j + n_{x'_j}) \leq \lim\, (T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_0 + n_0) = (f,\ x'_0 + n_0)$. En vertu de la proposition 1, $T(x'_0 + n_0) = f \in N^{\perp} \cap T(x'_0 + N)$. Mais T est pseudo-monotone, donc $\liminf(T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j + n_{x'_j} - x'_0 - n_0) \geq (T(x'_0 + n_0),\ x'_0 + n_0 - x'_0 - n_0) = 0$, d'où $\lim\, (T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j + n_{x'_j} - x'_0 - n_0) = 0$ et $\lim\, (T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j + n_{x'_j}) = (T(x'_0 + n_0),\ x'_0 + n_0)$. En conclusion, $\lim\, (T_N(x_j + N),\ x_j - y + N) = \lim\, (T(x'_j + n_{x'_j}),\ x'_j -$

$-y+n_{x_j'}) = (T(x_0'+n_0),\ x_0'+n_0-y) = (T_N(x_0+N),\ x_0-y+N)$, ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 2 *Soient* X *un espace de Banach réflexif,* $\mathrm{T}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *un opérateur pseudo-monotone et* N *un sous-espace fermé de* X. *On suppose que* T *vérifie les conditions a) et b) du théor ème* 1 *et que* $\lim\limits_{\|x+N\|_{X/N} \to \infty} (\mathrm{T}x, x)/\|x+N\|_{X/N} =$

$= +\infty$. *Alors,* $\mathrm{N}^\perp \subset \mathrm{T}(\mathrm{x})$.

Démonstration. En vertu du theoreme 1, il existe T_N pseudo-monotone et coercitif. En vertu de la proposition 3, T_N est surjectif, d'où $N^\perp \subset T(X)$.

Exemple. Soit $T = A + N_1 + N_2$, $T: \mathring{W}_2^1\,(0, \pi) \to (\mathring{W}_2^1\,(0, \pi))^*$, où

$$(Au, v) = \int_0^\pi (u'v' - 4uv)dx$$

$$(N_1u, v) = \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \left[\int_0^\pi u(s) \sin(s)ds \cdot \sin(t) \right]^3 \sin(t)\mathrm{d}t \right\} \sin(x)v(x)dx$$

$$(N_2u, v) = \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \operatorname{arctg} \left[\int_0^\pi u(s)\sin(2s)\mathrm{d}s \sin(t) \right] \sin(t)\mathrm{d}t \right\} \sin(2x)v(x)dx$$

pour tous $u, v \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$.

L'opérateur A est pseudo-monotone (cf. [2]).

Les opérateurs N_1 et N_2 sont monotones (en vertu de la monotonie des fonctions $f_1(t) = t^3$ et $f_2(t) = \operatorname{arc\,tg}(t)$), hémicontinues et bornés.

Il en résulte (cf. [2]) que T est pseudo-monotone. Nous allons vérifier les conditions du théorème 2 :

Soit $N = \operatorname{span}\{\sin(2x)\}$. Si $u \in \mathring{W}_2^1\,(0, \pi)$, soit

$$V_u = \left\{ v \in \mathring{W}_2^1(0, \pi) \,\middle|\, \left| \int_0^\pi (v-u)\sin(2x)dx \right| < 1 \right\}.$$

a) On remarque facilement que $I = \int_0^\pi (v + C\sin(2x))\sin(2x)dx$ a le signe de $C \in R$, pour tout $|C| > R_u$ et pour tout $v \in V_u$, où $R_u > 0$ est convenablement choisi. Donc, $(T(v + C\sin(2x),\ C\sin(2x)) \geqslant 0$ si $|C| > R_u$, pour tout $v \in V_u$.

b) $f_2(t) = \operatorname{arc\,tg}(t)$ est strictement monotone, donc pour $u, v \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$, $u - v = C\sin(2x)$, la relation $(Tu - Tv, u - v) = 0$ implique $C = 0$.

c) Pour tout $u \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$, on a $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$, où c_k sont les coefficients de Fourier. On montre facilement que $\lim_{\|u+N\| \to \infty} (Tu, u) / \|u + N\| = +\infty$.

En vertu du théorème 2, l'équation $Au + N_1 u + N_2 u = f$ a des solutions faibles $u \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$ pour tout $f \in N^{\perp}$.

(Manuscrit reçu le 23 juin 1976)

BIBLIOGRAPHIE

1. Donaldson, Th., *Quotients, ranges and normal solvability of maximal monotone operators*, J. Reine angew. Math., **258** (1973), 201–210.
2. Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
3. Petryshin, W. V., Fitzpatrick, P. M., *New existence theorems for nonlinear equations of Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc., **160** (1971), 39–63.

ASUPRA OPERATORILOR PSEUDO-MONOTONI NECOERCIVI

(Rezumat)

Rezultatul principal al lucrării este:

Fie X un spaţiu Banach reflexiv, N un subspaţiu închis al lui X, $T: X \to X^*$ un operator pseudo-monoton [2]. Presupunem că:

a) pentru orice $x \in X$ există $R_x > 0$ şi o vecinătate slabă V_x a lui x încît pentru orice $n \in N$ cu $\|n\| \geq R_x$ şi orice $y \in V_x$ avem $(T(y + n), n) \geq 0$,

b) pentru orice $x, y \in X$, cu $x - y \in N$, relaţia $(Tx - Ty, x - y) = 0$ implică $x = y$,

c) $\lim_{\|x+N\|_{X/N} \to \infty} (Tx, x)/\|x + N\|_{X/N} = +\infty$ (unde X/N este spaţiul cît cu norma $\|x + N\|_{X/N} = \inf_{n \in N} \|x + n\|$).

Atunci $N = \{x^* \in X^* | (x^*, n) = 0$ pentru orice $n \in N\} \subset T(X)$. (*Teorema 2*).

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A PROBLEMEI LUI DIRICHLET RELATIVĂ LA UN SISTEM DE ECUAŢII DIFERENŢIALE NELINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

GAROFIŢA PAVEL

1. Considerăm problema lui Dirichlet

$$y'' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(a) = 0, \ y(b) = 0 \tag{2}$$

unde

$$f \in C([a, b] \times \prod_{i=1}^{n} [-r_i, r_i], \ R^n)$$

În prezenta lucrare ne propunem să dăm o metodă pentru aproximarea soluţiei problemei (1) + (2) aplicînd teorema de punct fix a lui Perov [2] şi formula trapezului [1].

2. Problema (1) + (2) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii integrale

$$y(x) = -\int_a^b \mathcal{G}(x, s) f(s, y(s)) ds \tag{3}$$

în care

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)(b-s)}{(b-a)} & \text{dacă } x \leqslant s \\[2ex] \dfrac{(s-a)(b-x)}{b-a} & \text{dacă } x \geqslant s \end{cases}$$

şi

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{pmatrix} \quad \text{este matricea lui Green.}$$

Înzestrăm spaţiul liniar $C([a, b], R^n)$ cu norma vectorială

$$||y|| = (\max_{x \in [a,b]} |y_1(x)|, \ldots, \max_{x \in [a,b]} |y_n(x)|)$$

şi notăm cu $\bar{B}(0, r)$ sfera cu centru în 0 şi de rază r din acest spaţiu.

Aplicaţia

$$A : \bar{B}(0, r) \to C([a, b], R^n)$$

definită prin

$$(Ay)x = -\int_a^b \mathcal{G}(x, s)\, f(s, y(s))ds$$

are ca mulţime a punctelor fixe soluţiile problemei (1) + (2).

Vom determina condiţii care să ne asigure că aplicaţia A, duce elementele sferei $\bar{B}(0\,;r)$ tot în sfera $\bar{B}(0\,;r)$

Avem

$$|Ay(x)| = \left|\int_a^b \mathcal{G}(x, s)f(x, y(s))ds\right|$$

Pentru că f este mărginită avem

$$\left|\int_a^b \mathcal{G}(x, s)f(s, y(s))ds\right| \leqslant \int_a^b \mathcal{G}(x, s)ds \cdot M$$

unde

$$M = (M_1, \ldots, M_n)$$

iar

$$M_i = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ |u|\leqslant r}} |f_i(x, u)|$$

Prin urmare condiţia de invarianţă a sferei este:

$$\int_a^b \mathcal{G}(x, s)ds \cdot M \leq r \tag{4}$$

Căutăm acum condiţia care să ne asigure că operatorul A este o contracţie, în sensul teoremei lui Perov.

Avem

$$|Ay(x) - Az(x)| = \left|\int_a^b \mathcal{G}(x, s)(f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\, ds\right|$$

Presupunem că:

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leqslant L'\, |u - v|$$

unde

$$L' = (L_{ij}^1)_n^n \quad \text{iar} \quad \begin{matrix} u = (u_1, \ldots, u_n) \\ v = (v_1, \ldots, v_n) \end{matrix}$$

atunci,

$$|Ay(x) - Az(x)| \leq \int_a^b \mathcal{G}(x, s)ds \cdot L' \cdot ||y - z||$$

Presupunem că există o matrice convergentă S, astfel încît

$$\int_a^b \mathcal{G}(x, s)ds \cdot L' \leq S \tag{5}$$

În aceste condiții, pe baza teoremei lui Perov am obținut următoarea teoremă de existență și unicitate a soluției.

TEOREMA 1. *Dacă au loc condițiile* (4) *și* (5) *atunci problema* (1) *și* (2) *are o soluție unică în sfera* $\bar{B}$ (0 ; r), *soluție ce poate fi obținută prin metoda aproximațiilor succesive pornind de la orice element din* $\bar{B}$ (0 ; r).

3. Șirul aproximațiilor succesive ce converge către unica soluție a problemei (1) + (2) este:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\int_a^b \mathcal{G}(x, s)f(s, 0)ds \\ y_2(x) &= -\int_a^b \mathcal{G}(x, s)f(s, y_1(s))ds \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m(x) &= -\int_a^b \mathcal{G}(x, s)f(s, y_{m-1}(s))ds \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Eroarea pe care o facem luînd în locul soluției exacte aproximanta de ordinul m *este*:

$$||y - y_m|| \leqslant (I - S)^{-1} \cdot S^m ||y_1||$$

unde:

$$y_0 = 0, \ ||y_0 - y_1|| = ||y_1||$$

Se pune problema aproximării soluției problemei (1) și (2).

Pentru aceasta vom aplica metoda aproximațiilor succesive și formula de cuadratură a trapezului.

Considerăm o diviziune a intervalului $[a, b]$ prin nodurile $x_0 = a < x_1 < \dots < x_l = b$, echidistante.

Avem

$$y_1(x_i) = -\int_a^b \mathcal{G}(x_i, s)f(s, y_0)ds = -\frac{b-a}{2l}[\mathcal{G}(x_i, a)f(a, y_0) + \mathcal{G}(x_i, b)f(b, y_0) + $$

$$+ 2\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{G}(x_i, x_k)f(x_k, y_0(x_k))] + R_{1i} = \tilde{y}_1(x_i) + R_{1i} \tag{7}$$

unde prin R_{1i} am notat eroarea obţinută prin aplicarea formulei de cuadratură, plus eroarea ce rezultă din calcule, pe care o notăm cu δ

Delimitarea restului este dată de

$$|R_{1i}| \leq \frac{(b-a)^3}{6l^2} \cdot K + \delta \tag{8}$$

unde K este o delimitare a derivatei a doua a funcţiei de sub semnul integralei.

Pentru a calcula pe $y_2(x_i)$ vom pune în locul funcţiei aproximanta obţinută în pasul precedent

$$y_2(x_i) = -\int_a^b \mathcal{G}(x_i, s) f(s, y_1(s)) ds = -\frac{b-a}{2l} [\mathcal{G}(x_i, a) f(a, y_1(a)) +$$

$$+ \mathcal{G}(x_i, b) f(b, y_1(b)) + 2\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{G}(x_i, x_k) f(x_k, y_1(x_k))] + R_{2i} \tag{9}$$

înlocuind aici valoarea din (7) avem

$$y_2(x_i) = -\frac{b-a}{2l} [\mathcal{G}(x_i, a) f(a, \tilde{y}_1(a) + R_{10}) + \mathcal{G}(x_i, b) f(b, \tilde{y}_1(b) + R_{1l} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{G}(x_i, x_k) f(x_k, y_1(x_i) + R_{1k})] + R_{2i}$$

Dar ştim că

$$|f(x_k, \tilde{y}_1(x_k) + R_{1k}) - f(x_k, \tilde{y}_1(x_k)| \leq L'|R_{1k})$$

deci

$$f(x_k, \tilde{y}_1(x_k) + R_{1k}) = f(x_k, \tilde{y}_1(x_k)) + \tilde{R}_{1k}$$

unde

$$|\tilde{R}_{1k}| \leq L'|R_{1k}| \tag{10}$$

Revenind avem

$$y_2(x_i) = -\frac{b-a}{2l} [\mathcal{G}(x_i, a) f(a, \tilde{y}_1(a)) + \mathcal{G}(x_i, b) f(b, \tilde{y}_1(b)) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{G}(x_i, x_k) f(x_k, \tilde{y}_1(x_k))] + \tilde{R}_{2i} = \tilde{y}_2(x_i) + \tilde{R}_{2i}$$

$$|R_{2i}| \leq \frac{b-a}{2l} L \left[|R_{1a}| + |R_{1l}| + 2\sum_{k=1}^{l-1} |R_{1k}| \right] + |R_{2i}| + \delta$$

unde

$$L = L' \max_{x,s \in [a,b]} \mathcal{G}(x, s)$$

Ţinînd cont de delimitările resturilor, avem

$$|\tilde{R}_{2i}| \leq \frac{(b-a)^3}{6l^2} K[(b-a)L + I_n] + [(b-a)L + I_n]\delta$$

Prin inducţie se arată că

$$y_m(x_i) = \frac{b-a}{l}\Big[\mathcal{G}(x_i, a)f(a, \tilde{y}_{m-1}(a)) + \mathcal{G}(x_i, b)f(b, \tilde{y}_{m-1}(b)) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{G}(x_i, x_k)f(x_k, \tilde{y}_{m-1}(x_k))\Big] + \tilde{R}_{mi} = \tilde{y}_m(x_i) + \tilde{R}_{mi}$$

unde

$$|\tilde{R}_{mi}| \leq \frac{(b-a)^3}{6l^2} K[(b-a)^{m-1} \cdot L + \ldots + (b-a)L + I_n] +$$

$$+ [(b-a)^{m-1} \cdot L^{m-1} + \ldots + (b-a)L + I_n]\delta$$

Ţinînd cont de semnificaţiile lui L şi de faptul că am presupus îndeplinite condiţiile teoremei lui Perov avem

$$(b-a)L \leq S$$

unde S este o matrice convergentă către zero

Prin urmare

$$|\tilde{R}_{mi}| \leq \frac{(b-a)^3}{6l^2} K[S^{m-1} + \ldots + S + I_n] + [S^{m-1} + \ldots + S + I_n]\delta$$

Din cele de mai sus şi din teorema lui Perov rezultă că

$$|y(x_i) - \tilde{y}_m(x_i)| \leq |y(x_i) - y_m(x_i)| + |y_m(x_i) - \tilde{y}_m(x_i)| \leq$$

$$\leq S^m(I_n - S)^{-1}|y_1(x_i)| + \frac{(b-a)^3}{6l^2} K[S^{m-1} + \ldots + S + I_n] +$$

$$+ [S^{m-1} + \ldots + S + I_n]\delta$$

Ţinînd cont de proprietăţile lui S din estimarea de mai sus rezultă estimarea

$$|y(x_i) - \tilde{y}_m(x_i)| \leq S^m(I_n - S)^{-1} \cdot |y_1(x_i)| +$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{6l^2} K(I_n - S)^{-1} + (I_n - S)^{-1} \cdot \delta$$

Sintetizînd cele de mai sus avem următorul algoritm: 1. Se precizează extremităţile intervalului $[a, b]$, numărul interaţiilor în şirul aproximaţiilor succesive m şi punctele de diviziune a intervalului $[a, b]$, x_k $k = \overline{0, l}$.

2. Se calculează valorile aproximative ale primei aproximante pe nodurile x_k, cu ajutorul formulei de integrare numerică a trapezelor adică:

$$\tilde{y}_1(x_k) = -\frac{b-a}{12l}\Big[\mathcal{G}(x_k, a)f(a, 0) + \mathcal{G}(x_k, b)f(b, 0) + $$

$$+ 2\sum_{j=1}^{l-1}\mathcal{G}(x_k, x_j)f(x_j, 0)\Big], \qquad k = 0, 1, \ldots, l$$

3. Folosind valorile $\tilde{y}_1(x_k)$ se trece la calculul valorilor aproximative a elementelor următoare din şirul aproximaţiilor succesive, pe nodurile x_k, după formula

$$\tilde{y}_{i+1}(x_k) = -\frac{b-a}{12l}\Big[\mathcal{G}(x_k, a)f(a, \tilde{y}_i(a)) + \mathcal{G}(x_k, l)f(b, \tilde{y}_i(b)) + $$

$$+ 2\sum_{j=1}^{l-1}\mathcal{G}(x_k, x_j)f(x_j, \tilde{y}_i(x_j))\Big], \qquad k = \overline{0, l}\,;\ i = \overline{1, m}$$

4. Se evaluează eroarea comisă.

(Intrat în redacţie la 3 ianuarie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, Bucureşti 1957.
2. Perov, A. J., Kidenko, A. V. *Ob. odnom obşcem metodî issledovania kraevîh zadaci*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Mat. **30** (1966), 249–264.

THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

(Summary)

A method is given for the approximate solution of the problem (1) + (2), using Perov's fixed point theorem and the trapezoidal rule.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

ON THE HIERARCHY OF THE EFFICIENT EXTREME POINTS IN MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING

I. MARUŞCIAC

1. Introduction. There are several problems which arise in multiobjective programming problems. First we need to determine the first efficient (nondominated) solution, if one exists, or to establish that the set of all efficient solutions is empty. Then using a certain process of enumerating the efficient extreme points it is always possible to construct the whole efficient set of the given multiobjective programming problem. Once the set of efficient points has been constructed, we often need to optimize another criterion (a supercriterion) on the efficient set. Concerning the last problem see [6]. Sometimes in economy besides the optimal solution of the supercriterion on the efficient set, a number of other efficient extreme solutions in the neighbourhood of the optimal solution are useful. So the problem which arises is to order the efficient extreme solutions with respect to a given function. This is the problem we are going to deal with. The method which will be given in this note is based on the cutting plane method and permits to order (hierarchize) all the efficient extreme solutions with respect to a given linear function.

We will use some results of [5] where we gave a similar method to order the feasible extreme solutions in a linear programming problem.

2. Preliminaries. Let $A = (a_{ij})$ and $C = (c_{ij})$ be mxn and pxn matrices and let $b \in R^m$, $x \in R^n$ be column vectors; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

In this paper we use the following convention for vector inequalities: let $u, v \in R^n$

$$u \leqq v (u < v) \text{ iff } \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow u_j \leqq v_j \quad (u_i < v_j);$$

$$u \leq v \text{ iff } u \leqq v \text{ and } u \neq v.$$

DEFINITION 1. A point $x^0 \in R^n$ is called an efficient point (solution) (with respect to C) if

(i) $$x^0 \in \Omega = \{x \in R^n | Ax \leqq b\}$$

(ii) $$\nexists\, x \in \Omega \ni Cx \geq Cx^0.$$

The set of all efficient points (with respect to C) will be denoted by E. If

$$F(x) = px = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

is the supercriterion we talked about in the introduction, then our problem is to order the efficient extreme solutions $\ddot{E}$ with respect to F, i.e. to enumerate

$$\ddot{E} = \{x^1, x^2, \ldots, x^s\}$$

such that

$$F(x^k) \geqq F(x^{k+1}),\ k = 1, 2, \ldots, s - 1.$$

Let $x^1 \in E$ be the optimal solution to F on E, i.e.

$$F(x^1) = \max\{F(x)|x \in E\}.$$

Without loss of generality we can assume that $x^1 \in \ddot{E}$.

DEFINITION 2. $x'' \in \ddot{E}$ is called the second best optimal solution to F on E, if

$$F(x'') = \max\{F(x)|x \in \ddot{E} \setminus \{x'\}\}$$

Remark 1. Generally if x'' is the second best optimal solution to F on E then

$$F(x'') \leqq F(x')$$

equality is not excluded. If $F(x') = F(x'')$, then x'' will be called *improper second best optimal solution to F on* E. If $F(x'') < F(x')$, x'' is the *proper second best optimal solution to F on E.*

3. Optimality criteria. To solve the problem it is convenient to express our multiobjective program in the following simplex-like tableau

$$\begin{array}{r|c|c|}
 & -x & 1 \\ \hline
y = & A & b \\ \hline
f = & -C & 0 \\ \hline
F = & -p & 0 \\ \hline
\end{array} \tag{1}$$

where

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))^T = Cx.$$

Clearly, we can assume that rank $A = n$ and $m > n$. Then after elimination of the independent variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, we get the tableau

$$\begin{array}{r|c|c|}
 & -y_1 \ldots -y_n & 1 \\ \hline
\begin{matrix} y_{n+1} = \\ \vdots \\ y_m \end{matrix} & D & d \\ \hline
f = & R & r \\ \hline
F = & q & \alpha \\ \hline
\end{array} \tag{2}$$

$$x_j = -\sum_{k=1}^{n} d_{jk}y_k + d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

We will assume that the initial program is consistent and

$$y = (0, d)^T \in R^m, \quad d \geqq 0$$

is basic feasible solution (b.f.s.).

If we denote:

$$I \triangleq \{i \in \{n+1, \ldots, m\} | d_i = 0\}$$

$$D_I = (d_{ij}), \ i \in I, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

then from the efficient criteria given in [6] (see also [4]) we can deduce the following criteria:

THEOREM 1. *Let* $y^0 = (0, d) \in R^m$ *be b.f.s. of* (2). *Then* $y^0 \in E$ *if and only if*

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} r_{ij}\right)u_j \,\middle|\, Ru \leq 0, \ D_I u \leqq 0, \ u \geqq 0\right\} \tag{3}$$

has a finite optimal solution.

THEOREM 2. *Let* $y^0 = (0, d) \in E$. *Then the adjacent extreme point* $\overline{y}$ *which is obtained from* y^0 *by converting the non-basic variable* $y_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ *into a basic variable is efficient extreme point if and only if the problem*

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} r_{ij}\right)u_j + \sum_{i=1}^{p} r_{ij}t \,\middle|\, Ru \leq tr^{\cdot j}; \ D_I u \leqq 0, \ u \geqq 0\right\} \tag{4}$$

has a finite optimal solution, for $t > 0$, *where* $r^{\cdot j} = (r_{1j}, \ldots, r_{pj})^T$.

Generally $a^{i\cdot} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $a^{\cdot j} = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$ will be denoted the row-vector and column vector of $A = (a_{ij})$ respectively.

Remark 2. If $y^0 = (0, d)$ is a non-degenerate b.f.s., i.e. $d > 0$, then in (3) and (4) $D_I u \leqq 0$ is missing.

We will use the following result from [4, Lema 2]

THEOREM 3. *Let* $y^0 = (0, d)$ *be the optimal solution to* F *on* Ω *and let* $d_{i_j j}$ *be the pivotal element of the column* j *determined by the rule of primal-simplex algorithm. If*

$$0 \leqq \frac{d_{i_s}}{d_{i_s s}} q_s \leqq \frac{d_{i_j}}{d_{i_j j}} q_j, \ j \in J = \{j | \exists i \Rightarrow d_{ij} > 0\}, \tag{5}$$

then $x^2 \in \{x \in R^n | y_1 = \ldots = y_{s-1} = y_{s+1} = \ldots = y_n = 0, \ y_s = d_{i_s}/d_{i_s s}\}$ *is a second best optimal solution of* F *on* Ω.

4. Cutting plane method for the second best optimal solutions. Suppose that we had determined a proper second best extremal solution x^2 to F on Ω, i.e.

$$F(x^2) < F(x^1)$$

(which means that the optimal solution $y^1 = (0, d)$ is a nondegenerate b.f.s., i.e. $d > 0$ and $q > 0$).

We consider the hyperplane:

$$H_s = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} q_j y_j - \left(d_{i_s}/d_{i_s s}\right) q_s = 0 \right\}$$

and

$$\Omega_s = \Omega \cap \{x \in R^n | H_s(x) \geqq 0\}. \tag{6}$$

It is easy to see that hyperplane H_s separates the point x^1 from the convex set Ω_s.

THEOREM 4. *If* $d > 0$, $q > 0$ *and* $x^1 \in \{x | y_1 = \ldots = y_n = 0\}$ *is the optimal solution to* F *on* Ω, *then*

$$F(x^2) = \max \{F(x) | x \in \ddot{\Omega} \setminus \{x^1\}\} = \max \{F(x) | x \in \Omega_s\}. \tag{7}$$

where

$$x^2 \in \{x | y_j = 0, \; j \neq s, \; y_s = d_{i_s}/d_{i_s s}\}. \tag{8}$$

Proof. First we show that $x^2 \in \Omega_s$. Indeed, from (8) we have

$$H_s(x^2) = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j(x^2) - q_s \frac{d_{i_s}}{d_{i_s s}} = 0.$$

But clearly $x^2 \in \Omega$ $(y \geqq 0)$, so $x^2 \in \Omega_s$.

Since from (5) it follows that for an other adjacent solution:

$$x^j \in \{x | y_j = d_{i_j}/d_{i_j j} > 0, \; y_k = 0, \; k \neq j\}$$

we have

$$H_s(x^j) = \sum_{k=1}^{n} q_k y_k(x^j) - q_s \frac{d_{i_s}}{d_{i_s s}} = q_j \frac{d_{i_j}}{d_{i_j j}} - q_s \frac{d_{i_s}}{d_{i_s s}} \geqq 0.$$

So $x^j \in \Omega_s$, $j = 1, 2, \ldots, n$, and from the convexity of Ω it follows that $\ddot{\Omega} \setminus \{x^1\} \subset \Omega_s$, and from Theorem 3 we conclude that

$$F(x^2) = \max \{F(x) | x \in \ddot{\Omega} \setminus \{x^1\}\} = \max \{F(x) | x \in \ddot{\Omega} \cap \Omega_s\}.$$

5. Description of the algorithm. Now we are going to describe an algorithm, based on Theorems 1—4, which permits to enumerate successively the second best optimal solutions of F on Ω which are at the same time efficient solutions with respect to C, and therefore to order the set $\ddot{E}$ with respect to F.

The general outline of the algorithm is as follows:

Step 1. Find the optimal solution to F on efficient set E.

Step 2. Construct all improper second best optimal solutions and test for efficiency.

Step 3. Compute the positive numbers

$$\alpha_s = \frac{d_{i_s}}{d_{i_s s}} q_s$$

satisfying (5), corresponding to the optimal solution and to each improper second best optimal efficient solution (if there exists any) and list them in a nondecreasing sequence.

Step 4. Test for the efficiency of the first adjacent extreme point corresponding to α. If the adjacent solution is efficient go to Step 5, else test the efficiency of the next adjacent solution.

Step 5. Construct Ω_s as in (6), solve the problem:

$$\max \{F(x) | x \in \Omega_s\} \tag{7}$$

and go to Step 2.

The algorithm terminates when there is no adjacent efficient extreme point.

6. Comments on the steps of the algorithm. At Step 1 we determine the first efficient extreme solution with respect to F using our method given in [5], testing for efficiency at each step of the algorithm solving the problem (3).

If F is a convex combination of the criteria $f(x) = c^{i \cdot} x$, then the optimal solution to F is also an efficient extreme solution.

To find (Step 2) the improper second best optimal solutions to F, we test for all $j = 1, 2, \ldots, n$, if $q_j > 0$ or $q_j = 0$. If $q_j = 0$ and there is a pivotal element $c_{i_j j} > 0$, in the column j, we do a Gouss-Jordan (G-J) elimination step with pivotal element $c_{i_j j}$.

To determine the nondecreasing sequence of numbers α_s (at Step 3) we proceed as follows: for optimal solution and all improper second best optimal solutions to F on Ω_s we calculate the numbers α_s satisfying (5) and then we list these numbers in a nondecreasing sequence. In testing for the efficiency of the adjacent extreme point of Ω (Theorem 2) we start with the adjacent extreme point corresponding to the first (the smallest) number of the list, solving the problem (4).

Remark 3. To solve the problem (7) it is preferable to use the dual simplex algorithm. The obtained optimal solution to F on Ω_s will be a proper second best optimal solution to F on Ω.

7. A numerical example. To illustrate the algorithm we consider the following vector maximization problem

$$v\text{-max} \begin{cases} f_1(x) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ f_2(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ f_3(x) = -x_1 + x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 4 \\ x_1 - x_2 \quad &\leqq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \geqq 0. \end{aligned}$$

when the supercriterion is the sum of f_1, f_2, f_3:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 4x_1 + 5x_2 + 5x_3.$$

The initial simplex tableau is the following

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	$\boxed{1}$	3
$y_2 =$	2	2	1	4
$y_3 =$	1	-1	0	0
$f_1 =$	-4	-1	-2	0
$f_2 =$	-1	-3	1	0
$f_3 =$	1	-1	-4	0
$F =$	-4	-5	-5	0

Step 1. Maximizing F, after one $G-J$ step we obtain the tableau

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	1	1	1	3
$y_2 =$	1	$\boxed{1}$	-1	1
$y_3 =$	1	-1	0	0
$f_1 =$	-2	1	2	6
$f_2 =$	-2	-4	-1	-3
$f_3 =$	5	3	4	12
$F =$	1	0	5	15

So $x^1 = (0, 0, 3)$ is the optimal solution to F and clearly $x^1 \in \ddot{E}$ (since x^1 is a maximizing point to f_3).
Step 2. An improper second best optimal solution to F is obtained if a $G-J$ elimination step is done with the pivotal element $d_{22} = 1$. Then we have

	$-x_1$	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	0	-1	2	2
$x_2 =$	1	1	-1	1
$y_3 =$	2	1	-1	1
$f_1 =$	-3	-1	3	5
$f_2 =$	2	4	-5	1
$f_3 =$	2	-3	7	9
$F =$	1	0	5	15

from which we get the improper second best optimal solution $x^2 = (0, 1, 2)$. To test for the efficiency, we solve the problem (3) :

	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	1
$v_1 =$	-3	-1	3	0
$v_2 =$	2	4	-5	0
$v_3 =$	2	-3	7	0
$\Sigma =$	1	0	5	0

Since this problem has maximum equal to zero, it follows (Theorem 2) that $x^2 \in \ddot{E}$.

Step 3. The corresponding positive numers α to x^1 and x^2 are 15 and 1/2 respectively. So $\alpha_s = 1/2$.

Step 4. Testing for the efficiency the first adjacent extreme point we solve the corresponding problem (4):

	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	1
$v_1 =$	-3	-1	3	$-3t$
$v_2 =$	2	4	-5	$2t$
$v_3 =$	2	-3	7	$2t$
$\Sigma =$	1	0	5	t

After two $G-J$ steps we get:

	$-v_2$	$-v_1$	$-u_3$	1
u_2				0
$u_1 =$				t
$v_3 =$				0
$\Sigma =$	$1/10$	$4/10$	$57/10$	0

which shows that maximum is equal to zero. So this adjacent extreme point is efficient.

Step 5. The additional restriction is:

$$x_1 + 5y_1 \geqq 1/2$$

So we have to solve by dual simplex algorithm the problem:

	$-x_1$	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	0	-1	2	2
$x_2 =$	1	1	-1	1
$y_3 =$	2	1	-1	1
$s_1 =$	$\boxed{-1}$	0	-5	$-1/2$
$f_1 =$	-3	-1	3	5
$f_2 =$	2	4	-5	1
$f_3 =$	2	-3	7	9
$F =$	1	0	5	15

After a $G-J$ step we get:

	$-s_1$	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	0	-1	2	2
$x_2 =$	1	1	-6	$1/2$
$y_3 =$	2	1	-11	0
$x_1 =$	-1	0	5	$1/2$
$f_1 =$	-3	-1	18	$13/2$
$f_2 =$	2	4	-15	0
$f_3 =$	2	-3	-3	8
$F =$	1	0	0	$29/2$

Therefore $x^3 = (1/2, 1/2, 2) \in \ddot{E}$.

Continuing again with Step 2, we obtain $x^4 = (0, 2,0) \in \ddot{E}$, $x^5 = (1,1,0) \in \ddot{E}$, So $\ddot{E} = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ and

$F(x^1) = 15 = F(x^2) > F(x^3) = 29/2 > F(x^4) = 10 > F(x^5) = 9$.

(Received September 13, 1976)

REFERENCES

1. Evans, J. P., Steuer, R. E., *A revised simplex method for linear multiple objective programs*, Math. Programming, 5, 1973, 54–72.
2. Maruşciac, I., Răduleşcu, M., *Une problème général de la programmation linéaire à plusieur fonctions économiques*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, ser. Math. Mech., 2, 1970, 55–65.
3. Maruşciac, I., *Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară*, Ed. Dacia, 1973.
4. Maruşciac, I., *An efficient realization of an algorithm to compute the first efficient point of a linear multiobjective program*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math. Mech., 1976, 66–72.
5. Maruşciac, I., *Metoda planelor secante pentru determinarea preoptimului în programare liniară*, Studii şi Cerc. Matem. (to apeare).
6. Philip, J., *Algorithm for the vector maximization problem*, Math. Programming, **2**, 2, 1972, 207–229.
7. Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, in *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, New York, 1974.

ASUPRA IERARHIZĂRII SOLUŢIILOR EFICIENTE EXTREMALE ÎN PROGRAMAREA CU MAI MULTE FUNCŢII DE SCOP

(Rezumat)

Se ştie că într-o programare liniară cu mai multe funcţii de scop soluţia este dată de o mulţime conexă numită mulţimea de eficienţă pentru programul considerat. În lucrare se prezintă un algoritm care permite ordonarea tuturor soluţiilor eficiente extremale în raport cu un supercriteriu liniar. Lucrarea se bazează pe o notă anterioară [5], în care s-a descris un algoritm pentru determinarea preoptimului într-o programare liniară. În încheiere se dă un exemplu numeric ilustrativ.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

UNE MÉTHODE D'ESTIMATION FONDÉE SUR LES APPROXIMATIONS STOCHASTIQUES.

ELENA OANCEA FRĂŢILĂ

Le travail traite d'une application des approximations stochastiques [2, 3] à un problème d'estimation.

1. Soit X une variable aléatoire avec la densité de probabilité $f(x, \alpha_1, \alpha_2)$ pour $x \in [a, b]$ et nulle si $x \notin [a, b]$, où α_1, α_2 sont des paramètres inconnus. Soit $x_1, \ldots, x$, un échantillon répété effectué sur X. On considère le système d'équations en α_1, α_2, donné par:

$$\begin{cases} M_1(\alpha_1, \alpha_2) = m_1 \\ M_2(\alpha_1, \alpha\ ) = m_2 \end{cases} \tag{1}$$

où $M_1(\alpha_1, \alpha_2) = M(X)$, $M_2(\alpha_1, \alpha_2) = M(X^2)$ sont des fonctions inconnues, et

$$m_1 = 1/n' \sum_{i=1}^{n'} x_i, \quad m_2 = 1/n' \sum_{i=1}^{n'} x_i^2.$$

Parce que l'échantillon est répété, les variables aléatoires d'échantillon $X_1, \ldots, X_n$, sont indépendantes, équidistribuées avec X, c'est à dire elles ont la même densité de probabilité $f(x, \alpha_1, \alpha_2)$. On suppose $D^2X < \infty$, $D^2X^2 < \infty$. Alors pour évaluer les paramètres α_1, α_2, soit le système de relations de récurrence

$$\begin{cases} \alpha_{1,n+1} = \alpha_{1,n} + a_n(m_1 - X_n) \\ \alpha_{2,n+1} = \alpha_{2,n} + a'_n(m_2 - X_n^2) \end{cases} \tag{2}$$

où α_{11}, α_{21} sont réels et arbitraires, $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$, $\sum_1^\infty a_n'^2 < \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 < \infty$, $\lim_{n\to\infty} a'_n \neq 0 < \infty$, et X, $n = 1, 2, \ldots$, sont des variables aléatoires qui ont la même valeur moyenne et moment d'ordre deux:

$$M(X_n) = M(X) = M_1(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$M(X_n^2) = M(X^2) = M_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

THÉORÈME 1. *Soient les fonctions réelles* F, G, *de variables réelles, données par:*

$$\mathrm{F}(\alpha_1, \mathrm{X}) = \alpha_1 + \mathrm{a}(\mathrm{m}_1 - \mathrm{X})^1$$
$$\mathrm{G}(\alpha_2, \mathrm{X}) = \alpha_2 + \mathrm{a}'(\mathrm{m}_2 - \mathrm{X}^2)$$

où a, a′, m_1, m_2 *sont des nombres réels;*

et la métrique

$$\begin{aligned} d[F(\alpha_{1i}, X_i),\ F(\alpha_{1k}, X_k)] &= d[F_i, F_k] = M[(F_i - F_k)^2],\\ d[G(\alpha_{2i}, X_i),\ G(\alpha_{2k}, X_k)] &= d[G_i, G_k] = M[(G_i - G_k)^2] \end{aligned} \tag{3}$$

où M *est l'opérateur de la valeur moyenne,* i, k $\in$ N. *Alors chacune des* F, G *a un point fixe*: α_1^*, α_2^*, *qui vérifie une des relations* (2).

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= F_1 = \alpha_{11} + a_1(m_1 - X_1)\\ \alpha_{13} &= F_2 = \alpha_{12} + a_2(m_1 - X_2) = \alpha_{11} + a_1(m_1 - X_1) + a_2(m_1 - X_2)\\ &\dots \qquad \dots \qquad \dots\\ \alpha_{1i+1} &= F_i = \alpha_{1i} + a_i(m_1 - X_i) = \alpha_{11} + \sum_{j=i1}^{i} a_j(m_1 - X_j). \end{aligned}$$

Alors de (3) on a, quelque soit n, $k \in N$:

$$d[F_{n+k}, F_n] = M\left[\left(\sum_{i=n+1,}^{n-k} a_i(m_1 - X_i)\right)^2\right] = \sum_{i=n+1}^{n-k} a_i^2\ D^2(X).$$

Puisque $D^2(X) < \infty$, $\sum_1^\infty a_i^2 < \infty$, il résulte

$$d[F_{n+k}, F_n] < \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$ et arbitraire. C'est à dire, la suite $\{\alpha_{1n}\}_{n\in N}$, est une suite fondamentale sur (R, d) et convergente. Alors

$$\lim \alpha_{1,n} = \alpha_1^*$$

et

$$\alpha_1^* = F(\alpha_1^*, X),$$

d'où il résulte que α_1^* est un point fixe pour F.

Le point fixe est unique. Pour le démontrer, on suppose qu'il existe deux points fixes α_1^*, α_1^{**} pour F, c'est à dire:

$$F(\alpha_1^*) = \alpha_1^* + \lim_{n\to\infty} a_n(m_1 - X_n),$$

$$F(\alpha_1^{**}) = \alpha_1^{**} + \lim_{n\to\infty} a_n(m_1 - X_n).$$

Mais la suite $\{\alpha_{1n}\}_{n\in N}$ est une suite de nombres réels, convergente, donc elle aura une seule limite, c'est à dire:

$$\alpha_1^* = \lim_{n\to\infty} a_n(m_1 - X_n) = \alpha_1^{**} - \lim_{n\to\infty} a_n(m_1 - X_n),$$

d'où il résulte $\alpha_1^* = \alpha_1^{**}$.

---

[1] Les fonctions F, G dépendent aussi, respectivement de α_2, α_1 par la densité de probabilité de X.

Analoguement on montre que G a un point fixe unique α_2^*, si $D^2(X^2) < < \infty$, $\sum_{1}^{\infty} a_n'^2 < \infty$. Alors du système (2), à limite, pour $n \to \infty$, on a :

$$\alpha_1^* = \alpha_1^* + \lim_{n\to\infty} a_n(m_1 - X_n),$$

$$\alpha_2^* = \alpha_2^* + \lim_{n\to\infty} a_n'(m_2 - X_n^2).$$

En appliquant l'opérateur M, on obtient, en tenant compte que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 < \infty$, $\lim a_n' \neq 0 < \infty$,

$$m_1 = \lim_{n\to\infty} M(X_n) = M(X) = M_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*),$$

$$m_2 = \lim_{n\to\infty} M(X_n^2) = M(X^2) = M_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*),$$

donc α_1^*, α_2^* est une solution du système (1).

Remarque. On verra que à chaque pas n X_n dépend de α_{1n}, α_{2n}, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) = M_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$$

et aussi

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n^2) = M_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*).$$

Supposons que le système (1) a une solution unique. Alors, puisque m_1, m_2 sont des estimations nonbiaisées et consistantes, respectivement, pour $M(X)$, $M(X^2)$, et les suites $\{\alpha_{1n}\}_{n\in N}$, $\{\alpha_{2n}\}_{n\in N}$, convergent en moyenne quadratique vers α_1^*, α_2^*, il résulte :

THÉORÈME 2. *Les suites d'approximations successives de* α_1, α_2, *données par* (2), *convergent en probabilité pour* $n \to \infty$, $n' \to \infty$, *vers la solution exacte du système* (1), *c'est à dire, vers les vraies valeurs des paramètres* α_1, α_2.

2. *La construction et l'existence de la variable aléatoire* X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Pour construire la variable aléatoire X_1 on utilise les valeurs initiales arbitraires α_{11}, α_{21} et la première valeur d'échantillon x_1, et on suppose $\alpha_{11} < \alpha_{21}$. Alors si :

$$x_1 \leq \alpha_{11}, \quad X_1 = b_1 \quad \text{et} \quad P(X_1 = b_1) = p_1,$$

si

$$\alpha_{11} < x_1 \leq \alpha_{21}, \quad X_1 = b_2 \quad \text{et} \quad P(X_1 = b_2) = p_2, \tag{4}$$

si

$$x_1 < \alpha_{21}, \quad X_1 = b_3 \quad \text{et} \quad P(X_1 = b_3) = p_3.$$

Analoguement, en utilisant α_{1i}, α_{2i}, données par (2), et la valeur d'échantillon x_i, on détermine les valeurs de la variable aléatoire X_i, $= 2, 3, \ldots$, avec la même répartition comme X_1.

Pour déterminer les conditions d'existence d'une telle variable aléatoire, on sait que $M(X\ ) \simeq m_1$, $M(X_i^2) \simeq m_2$, parce que m_1, m_2 sont des estimations nonbiaisées et consistantes pour $M(X_i)$, $M(X_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots$, donc on peut considérer le système en p_1, p_2, p_3:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 = m_1 \\ p_1 b_1^2 + p_2 b_2^2 + p_3 b_3^2 = m_2 \end{cases} \tag{5}$$

où $b_1 < b_2 < b_3$ et $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$. On voit que ce système a une solution unique, parce que $D = V(b_1, b_2, b_3) > 0$, V étant le déterminant Vandermonde de b_1, b_2, b_3.

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathrm{p_1, p_2, p_3}$ *la solution du système* (5), *pour que* $\mathrm{p}_i \geqslant 0$, $\mathrm{i} = 1, 2, 3$, *la condition nécessaire et suffisante est*: $\mathrm{b_1 = a}$, $\mathrm{b_2} = 1/2(\mathrm{a + b})$, $\mathrm{b_3 = b}$.

Démonstration. On sait que

$$p_1^* = D_1/D,\ p_2^* = D_2/D,\ p_3^* = D_3/D,$$

où

$$D_1 = 1/n' \sum_{i=1}^{n'} V(x_i, b_2, b_3),$$

$$D_2 = 1/n' \sum_{i=1}^{n'} V(b_1, x_i, b_3),$$

$$D_3 = 1/n' \sum_{i=1}^{n'} V(b_1, b_2, x_i).$$

Pour que $p_i^* \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, il faut analyser le signe de D_i, $i = 1, 2, 3$. On choisit $b_1 = a$, $a < b_2 < b$, $b_3 = b$, alors

$D_1 = 1/n'E_1$, $E_1 = \sum_{I_1} (b_2 - x_i)(b - x_i)(b - b_2) + \sum_{I_2} (b_2 - x_i)(b - b_2)$,

où $I_1 = \{i | x_i \leq b_2,\ i = 1, \ldots, n\}$, $I_2 = \{i | x_i > b_2,\ i = 1, \ldots, n\}$, et

$$\text{card } I_1 = n_1,\ \text{card } I_2 = n_2,\ n_1 + n_2 = n'.$$

On voit que D_1 est nonnégatif si

$$\bar{E}_1 = \sum_{I_1} (b_2 - x_i)(b - x_i) + \sum_{I_2} (b_2 - x_i)(b - x_i) \geqslant 0.$$

D'où il résulte

$$\sum_{I_1} (b_2 - x_i)(b - x_i) \geq \sum_{I_2} (x_i - b_2)(b - x_i). \tag{6}$$

Pour D_2 aucune condition n'est nécessaire, car il est clair que $D_2 \geqslant 0$.

Pour D_3, on a $D_3 = 1/n'E_3$, où

$$E_3 = \sum_{I_1} (b_2 - a)(x_i - a)(x_i - b_2) + \sum_{I_2} (b_2 - a)(x_i - a)(x_i - b_2),$$

et $D_3 \geqslant 0$, si

$$\bar{E}_3 = \sum_{I_1} (x_i - a)(x_i - b_2) + \sum_{I_2} (x_i - a)(x_i - b_2) \geqslant 0$$

où

$$- \sum_{I_1} (x_i - a)(b_2 - x_i) \geqslant - \sum_{I_2} (x_i - a)(x_i - b_2). \tag{7}$$

De (6) et (7) il résulte

$$\sum_{I_1} (b_2 - x_i)\left(\frac{b+a}{2} - x_i\right) \geqslant \sum_{I_2} (x_i - b_2)\left(\frac{b+a}{2} - x_i\right), \tag{8}$$

et pour $b_2 = \frac{a+b}{2}$ cette condition est satisfaite. Par conséquent

$$b_1 = a, \ b_2 = \frac{a+b}{2}, \ b_3 = b$$

est une condition nécessaire.

Pour démontrer la suffisance de cette condition, de (6) on a :

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &> (b_2 - x_{\min})\sum_{I_1} (b - x_i) + (b_2 - x_{\max})\sum_{I_2} (b - x_i) \\ &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \sum_{I_1}(b - x_i) - \left(\frac{a+b}{2} - b\right) \sum_{I_2}(b - x_i) \\ &= \frac{b-a}{2}\left[\sum_{I_1} (b - x_i) - \sum_{I_2}(b - x_i)\right]. \end{aligned}$$

Parce que chaque terme de $\sum_{I_1}(b - x_i)$ est plus grand que chacun de $\sum_{I_2} (b - x_i)$ et $n_1 \geqslant n_2$[2], on a $\bar{E}_1 \geqslant 0$.

De la même manière on montre que $\bar{E}_3 \geqslant 0$. Par conséquent, la répartition de X_i, $n \in N$, est :

$$\begin{pmatrix} a, & \frac{a+b}{2}, & b \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

où p_i, $i = 1, 2, 3$, sont ceux donnés par (5). Les valeurs de X_n, déterminées à chaque pas n, par les conditions (4), on les introduit dans (2), d'où on obtient les approximations $\alpha_{1,n+1}$ $\alpha_{2,n+1}$, pour α_1, α_2.

Remarque. La variable aléatoire X_n avec la répartition (9) converge pour $n' \to \infty$, en probabilité, vers X.

---

[2] On peut toujours avoir $n_1 \geqslant n_2$, ce qui est possible en prenant un échantillon de volume convenable tellement que $n_1 \geqslant n_2$.

3. Dans le cas d'une variable aléatoire X avec la densité de probabilité $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, α_i, $i = 1, 2, 3$ des paramètres inconnus, on peut procéder analoguement pour déterminer des valeurs approximatives de α_i, $i = 1, 2, 3$. Soit le système d'équations

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = m, \quad i = 1, 2, 3,$$

où $M_i = M(X^i)$, $m_i = 1/n' \sum_1^{n'} x_j^i$, $i = 1, 2, 3$.

Alors le système d'approximations successives

$$\alpha_{i,n+1} = \alpha_{i,n} + a_{n,i}(m_i - X_n^i), \quad i = 1, 2, 3,$$

où $\sum_1^{\infty} a_{n,i}^2 < \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,i} \neq 0 < \infty$, $D^2(X^i) < \infty$, $i = 1, 2, 3$,

et X_n sont des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées avec X, donne des approximations pour les paramètres α_i, $i = 1, 2, 3$. On construit les variables aléatoires X_n, $n = 1, 2, \ldots$, de la même manière comme dans le cas précédent. La condition pour que p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, soient nonnégatifs est

$$b_1 = a, \ b_2 = \frac{2a + b}{3}, \ b_3 = \frac{a + 2b}{3}, \ b_4 = b.$$

Remarques. **1.** Le procédé présenté peut être utilisé aussi dans le cas d'une variable aléatoire multidimensionelle, dont la densité de probabilité dépend de plusieurs paramètres inconnus.

2. Aussi, le procédé peut être utilisé dans le cas où la densité de probabilité f contient $k > 3$ paramètres inconnus. Pour $k = 1$, le procédé a été présenté dans [1].

(Manuscrit reçu le 8 septembre 1975)

BIBLIOGRAPHIE

1. Frăţilă, E., *L'évaluation du paramètre inconnu de la densité de probabilité par la méthode d'approximations stochastiques*, Studia Univ. Babeş—Bolyai, ser. Math.-Mech., 1, 1972, 41—45.
2. Robbins, H., Monro, S., *A stochastic approximation method*, Ann. Math. Stat., 22. 1951, 400—407.
3. Schmetterer, L., *Stochastic approximation*, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Stat, and Probability, 1, 1961, 587—609.

O METODĂ DE ESTIMAŢIE BAZATĂ PE APROXIMAŢII STOCHASTICE

(Rezumat)

Lucrarea prezintă o metodă pentru estimarea parametrilor necunoscuţi ai densităţii de probabilitate $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ a unei variabile aleatoare X, în special pentru cazul $k = 2, 3$, bazată pe aproximaţii stochastice. Se consideră o selecţie repetată $x_1, \ldots, x_n$, efectuată asupra variabilei X, şi sistemul de ecuaţii

$$M_i(\alpha_1, \alpha_2) = m_i \tag{1}$$

unde $M_i(\alpha_1, \alpha_2) = M(X^i)$, $m_i = 1/n' \sum_{j=1}^{n'} x_j^i$, $i = 1, 2$, pentru cazul $k = 2$, şi analog pentru $k = 3$. Soluţia aproximativă a sistemului (1) este

$$\alpha_{i,n+1} = \alpha_{i,n} + a_{n,i}(m_i - X_n^i), \qquad n = 1, 2, \ldots, i = 1, 2,$$

unde $a_{i,n}$ sînt numere reale ce satisfac anumite condiţii şi X_n variabile aleatoare care au aceeaşi repartiţie cu X. Se arată că estimaţiile date de $\alpha_{i,n}$ converg pentru $n, n' \to \infty$, în probabilitate către adevăratele valori α_i, şi se construiesc efectiv variabilele aleatoare X_n folosind valorile de selecţie.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

COMPORTĂRI ASIMPTOTICE ALE SOLUŢIILOR ECUAŢIEI ENERGIEI DIN STRATUL LIMITĂ INCOMPRESIBIL
(Variabile Mises)

DOINA BRĂDEANU, PETRE BRĂDEANU

Introducere. a) Ecuaţiile stratului limită laminar, dinamic şi termic, nedisipativ de fluid vîscos incompresibil în raport cu variabilele lui Mises pot fi scrise, în domeniul D, în forma [4]:

$$G_X = \sqrt{U_1^2 - G}G_{\psi\psi}, \tag{1}$$

$$H_X = \frac{1}{\sigma}(\sqrt{U_1^2 - G}H_\psi)_\psi - \frac{dT_w/dX}{T_w - T_\infty}H: \tag{2}$$

$$D = \{X, \psi | X_0 \leq X \leq X_I, \ 0 \leq \psi \leq \infty, \ \psi_\infty; \ 0 \leq X_0 < X_I, \ \psi_\infty(x) = \text{finit})$$

$$G(X, 0) = U_1^2(X), \ G(X, \infty) = 0, \ G(X_0, \psi) = G^{(0)}(\psi), \tag{3}$$

$$(\sqrt{U_1^2 - G}H_\psi)_{\psi=0} = 0 \text{ sau } H(X, 0) = 1, \ H(X_0, \psi) = H^{(0)}(\psi),$$

unde $G(X, \psi)$ şi $H(X, \psi)$ sînt funcţiile necunoscute iar:

$$x = LX, \ \overline{\psi} = \psi\sqrt{\nu L u_\infty}, \ u = u_\infty U = u_\infty\sqrt{U_1^2 - G(X, \psi)}, \ u_1 = u_\infty U_1(X),$$

$$i = i_\infty + (i_w - i_\infty)H(X, \psi), \ u_\infty = \text{const.}, \ i_\infty = c_p T_\infty = \text{const.}$$

b) *Soluţie automodelată* (vecinătatea punctului critic, $X \to 0$). Să facem transformările, care introduc variabila de automodelare (similitudine) η:

$$\xi = X, \ \eta = \frac{\psi}{X}, \ G = U_1^2(X)W(X, \eta) \tag{4}$$

şi să presupunem că (vecinătatea punctului critic $u_1 = c_1 x$)

$$U_1 = C_1 X, \ \frac{XT'_w}{T_\infty - T_\infty} = \gamma \text{ sau } T_w = T_\infty + aX^\gamma, \left(' = \frac{d}{dX}\right) \tag{5}$$

unde a este o constantă de integrare (fie $a > 0$) iar γ şi $C_1 > 0$ sînt constante arbitrare date. Atunci, ecuaţiile (1) — (2) se transformă, relativ la

---

Notaţii:

$x, \overline{\psi}$	— variabilele lui Mises ($x, \overline{\psi} \in R$)
$u, i = c_p T$	— viteza în direcţia x şi entalpia în stratul limită (T, temperatura)
u_1	— viteza scurgerii exterioare ideale potenţiale
ν, μ	— viscozitatea cinematică şi, respectiv, dinamică
σ	— numărul lui Prandtl ($\mu c_p/\lambda$)
λ	— conductibilitatea termică
$G^{(0)}, H^{(0)}$	— funcţii date în secţiunea iniţială $x = x_0$
a, γ, C_1	— constante considerate în (5)
w, ∞	— indici: indică valori pe corp şi la infinit
L	— o lungime de referinţă (dată)

funcţiile $W(\eta)$ şi $H(\eta)$ dependente numai de η (independente de X), în următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$C_1\sqrt{1-W}\; W'' + \eta W' - 2W = 0\,; \quad W(0) = 1,\; W(\infty) = 0 \tag{6}$$

$$-\eta H' = \frac{C_1}{\sigma}\left(\sqrt{1-W}\; H'\right)' - \gamma H\,; \; H(0) = 1,\; H(\infty) = 0 \tag{7}$$

Ecuaţiile ordinare (6)—(7) pot fi reduse la ecuaţii cunoscute şi rezolvate în literatură. În lucrarea [1] ecuaţia (6) este redusă la cunoscuta ecuaţie a lui Falkner-Skan. În ceea ce priveşte ecuaţia (7), facem substituţiile

$$\eta_0 = y\sqrt{\frac{c_1}{\nu}},\; f'(\eta_0) = \frac{U}{U_1},\; W = 1 - \left(\frac{df}{d\eta_0}\right)^2$$

din care rezultă formulele

$$\psi = \frac{u_1}{\sqrt{c_1 \,\llcorner\, U_\infty}} f(\eta_0),\;\; \eta = \frac{\psi}{X} = \sqrt{C_1} f(\eta_0),\;\; d\eta = \sqrt{C_1} f'(\eta_0) d\eta_0$$

Ecuaţia energiei (7), pentru funcţia $H(\eta_0)$ — funcţia $H(\eta)$ din vecinătatea punctului critic (stagnare), primeşte forma

$$H'' + \sigma f H' - \sigma\gamma f' H(\eta_0) = 0 \tag{8}$$

$$H(0) = 1,\; H(\eta_{0\infty}) = 0$$

Această ecuaţie este rezolvată numeric în lucrarea [3] pentru $\sigma = 0{,}7$ şi diferite valori ale parametrului γ. Soluţia ecuaţiei (7), sau (8), poate fi considerată ca iniţială, ecuaţia energiei fiind de tip parabolic, în metoda numerică a diferenţelor finite aplicată în rezolvarea ecuaţiei (2).

Comportarea asimptotică a soluţiei ecuaţiei energiei pentru $\psi \to 0$ (suprafaţa corpului). Să revenim la ecuaţia energiei (2) în care să introducem variabila ξ (Illingworth) şi variabila ζ cu formulele

$$\xi = \int_0^X U_1(X)dX,\;\; \zeta = \frac{\psi}{\sqrt{\xi}} \tag{9}$$

care generalizează transformarea (4). Ecuaţia (2) primeşte forma

$$\xi H_\xi - \frac{\zeta}{2} H_\zeta = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{U}{U_1} H_\zeta\right)_\zeta - \frac{\xi dT_w/d\xi}{T_w - T_\infty} H \tag{10}$$

$$H(\xi, 0) = 1,\;\; (k \equiv \xi T_w'/(T_w - T_\infty)) \tag{10'}$$

Să considerăm cazul particular $k = \text{const}$ şi să presupunem că în vecinătatea imediată a corpului peste care se scurge fluidul, pentru ξ fixat, avem

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0,\;\; \frac{U}{U_1} = a_1\sqrt{\zeta} + b_1\zeta, \quad \zeta \in I = [0, \varepsilon] \tag{11}$$

unde: a_1 și b_1 sînt constante nenule, $\varepsilon > 0$ este o mărime foarte mică iar funcția U/U_1 este analitică în raport cu y și $\sqrt{\psi}$ și, deci, în raport cu $\sqrt{\zeta}$. Ecuația (10) devine, atunci, o ecuație ordinară de forma

$$(a + bz)H'' + (2z^2 + b)H' - 4k_1 zH(z) = 0, \; z \in \bar{I} = (0, \sqrt{\varepsilon}] \tag{12}$$

$$(a \equiv 2a_1/\sigma, \; b = 2b_1/\sigma, \; k_1 \equiv 2k; \; \sqrt{\zeta} = z, \; H(0) = 1)$$

Deoarece această ecuație are pe $z = 0$ ca punct ordinar ($a + bz \neq 0$ pentru $z \in \bar{I}$; $a \neq 0$) și coeficienții lui H și H' sînt polinoame, există o soluție a ecuației (12) — convergentă pe $\bar{I}$ — de forma următoarei dezvoltări asimptotice ($z \to 0$):

$$H(z) = 1 + \sum_{s=1}^{4} c_s z^s + 0(z^5), \quad z \in \bar{I} \tag{13}$$

în care coeficienții c_s pot fi determinați prin verificarea ecuației (12) — c_1 rămîne nedeterminat (se dă numai o condiție la limită).

Concluzii. Funcția de temperatură H este analitică în raport cu variabilele z, $\sqrt{\zeta}$ sau $\sqrt{\psi}$. Derivatele $dH/d\zeta$ și $d^2H/d\zeta^2$ tind către infinit cînd $\zeta \to 0$ (analog pentru ψ). Această proprietate este în acord cu formula transferului de căldură (Fourier). Admitem că aceste proprietăți ale funcției H se extind, în general, la toate scurgerile care au loc în vecinătatea suprafeței corpului. Aceste proprietăți arată că ecuația energiei în raport cu variabilele lui Mises are o singularitate de tipul celei întîlnite și la ecuația mișcării și că în rezolvarea problemei distribuției temperaturii în stratul limită, prin metode numerice, se va folosi, în vecinătatea corpului, o soluție de forma (13).

Comportarea la infinit a soluției ecuației energiei ($\psi \to \infty$). Comportarea asimptotică a ecuației (2) pentru $\psi \to \infty$ nu poate fi găsită în condiții generale. De aceea vom face, de la început, două precizări: (a) vom considera soluții particulare, admițînd că comportarea acestora nu se îndepărtează, în mod esențial, de aceea a soluției din condiții mai generale, (b) problema este matematic corect pusă dacă $\psi_\infty < \infty$ (și $U = U_1$, $H = 0$ pentru $\psi = \psi_\infty$) și că ea rămîne corect pusă și cînd $\psi \to \infty$, adică și atunci cînd domeniul de integrare se întinde pînă la infinit (șir de probleme corect puse).

În planul (ξ, ζ) definit cu formulele (9), să considerăm scurgerea particulară din punct de vedere termic potrivit cu formula $k =$ const. sau $T_w - T_\infty = A\xi^k$ (A, k — constante date) și să admitem că $\partial H/\partial\xi = 0$ și $U = U_1$ pentru $\zeta \to \infty$. Rezultate numerice obținute, de exp. [2], arată că spre frontiera exterioară a stratului limită se poate admite că $\psi/\sqrt{\xi} \approx$ $\approx$ const.

Ținînd seama de aceste ipoteze ecuația energiei (10) se reduce, efectuînd calculele, la o ecuație ordinară pentru $H(\zeta)$ de forma

$$H'' + \frac{\sigma}{2}\zeta H' - k\sigma H(\zeta) = 0, \; \zeta \to \infty \tag{14}$$

$$H = 0 \text{ pentru } \zeta = M$$

care are pe $\zeta = \infty$ ca punct singular neregulat. Comportarea asimptotică a soluţiei ecuaţiei (2) este dată de soluţia de la infinit a ecuaţiei (14) în considerarea $M \to \infty$. Soluţiile ecuaţiei (14) sînt

$$H_1(\zeta) = \zeta^{2k}, \ H_2(\zeta) = \zeta^{-(1+2k)} e^{-\frac{\sigma\zeta^2}{4}}, \ \zeta \to \infty \tag{15}$$

Dacă $k \geqslant 0$, comportarea la infinit a soluţiei ecuaţiei energiei (10) este dată de $H(\zeta) = H_2(\zeta)$. Această proprietate se menţine şi pentru $k < 0$. Într-adevăr, integrala ecuaţiei (14) cu $H(M) = 0$ este

$$H(\zeta) = \zeta^{-(1+2k)} e^{-\frac{\sigma\zeta^2}{4}} - M^{-(1+4k)} e^{-\frac{\sigma M^2}{4}} \zeta^{2k}$$

Cînd $M \to \infty$ ultimul termen tinde la zero şi găsim că $H = H_2(\zeta)$, $\zeta \to \infty$, pentru orice valori reale k şi pentru toate valorile σ admise de problema hidrodinamică.

Din formula asimptotică $H = H_2(\zeta)$, $\zeta \to \infty$, se pot deduce uşor şi formule de comportare asimptotică pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale din vecinătatea punctului critic (7)—(6). Într-adevăr, cu $U_1 = C_1 X$ găsim, după (9):

$$\xi = \frac{C_1}{2} X^2, \ \zeta = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \frac{\psi}{X} = \eta \sqrt{\frac{2}{C_1}}, \ k = \frac{\gamma}{2}.$$

Ecuaţia (10) se reduce, astfel, la ecuaţia (7) considerată în domeniul punctului de la infinit (cu $W \approx 0$). Comportarea asimptotică a soluţiei ecuaţiei (7), valabilă în vecinătatea punctului critic ($X \to 0$) este dată de $H = H_2(\zeta)$ şi are forma

$$H(\eta) = \eta^{-(1+\gamma)} e^{-\frac{\sigma\eta^2}{2C_1}}, \ \eta \to \infty \tag{16}$$

În mod analog se poate obţine din $H = H_2(\zeta)$ şi comportarea pentru $\eta \to \infty$ a soluţiei ecuaţiei (6) dacă punem $\sigma = 1$, $k = 1$ ($\gamma = 2$):

$$W = \eta^{-3} e^{-\frac{\eta^2}{2C_1}}, \ \eta \to \infty \tag{17}$$

(Intrat în redacţie la 29 noiembrie 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. D. Brădeanu, *O metodă a micilor perturbaţii pentru ecuaţia lui Mises*, Studii şi cerc. de mecanică apl. nr. 2, 1974, Bucureşti.
2. D. Brădeanu, *Rezolvarea numerică a problemei stratului limită în forma lui Mises prin metoda diferenţelor finite*, Stud. Univ. Babeş—Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2, 1974.
3. S. Levy, *Heat Transfer to Property Laminar Boundary-Layer Flows...*, Jour. Aeronaut. Sciences, May, 1952.
4. P. Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Editura Tehnică, Bucureşti 1973.

THE ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS OF ENERGY EQUATION FOR THE INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYER (von Mises variables)

(Summary)

In its first part this paper discusses the similar solutions of the incompressible boundary layer equations (the equations of the momentum and energy) in von Mises' form in terms of the X; ψ or X, $\eta = \psi/X$ variables (ψ — the stream function).

Then the asymptotic representation into the wall region ($\psi \to 0$), the point at infinity ($\psi \to \infty$) and into the region of the similarity (at the stagnation point) for the solutions of the energy equation is given.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1, 1977

METODE NUMERICE LA STABILIREA PROFILULUI CONCENTRAŢIEI PENTRU SCURGERI CU REACŢII CHIMICE PESTE UN DISC ÎN ROTAŢIE

IOAN STAN şi CĂLIN GHEORGHIU

Scurgerea peste o suprafaţă este deseori însoţită de procese fizico-chimice în timpul cărora, în general, corpul îşi păstrează structura şi forma geometrică. În aceste procese difuzia componenţilor către şi de la suprafaţă are o mare importanţă. Reacţiile chimice pot avea loc numai la limita de separare a celor două faze — reacţii eterogene — sau în masa de fluid — reacţii omogene, datorită cărora concentraţia variază rapid în această zonă, difuzia reactanţilor printre produşii de reacţie avînd aici un rol foarte important.

Lucrări recente investighează scurgerea peste o suprafaţă cu reacţii chimice luînd în considerare numai difuzia moleculară în stratul limită. Aşa cum am arătat în [1, 2] barodifuzia este un agent mecanic care împreună cu difuzia moleculară cauzează modificări în profilul concentraţiei reactanţilor.

Vom stabili profilul concentraţiei pentru scurgeri peste un disc în rotaţie, cu ajutorul metodei diferenţelor finite, luînd în considerare efectul barodifuziei, pentru un amestec fluid bicomponenţial atît în cazul reacţiilor eterogene cît şi omogene.

§ 1. *Ecuaţiile ce guvernează fenomenul.* Fluidul fiind considerat incompresibil avem ecuaţia continuităţii

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.1}$$

unde $\vec{v}$ reprezintă viteza scurgerii. Presupunînd scurgerea permanentă a unui fluid vîscos avem ecuaţia mişcării a lui Navier-Stokes

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}, \tag{1.2}$$

unde p este presiunea, ν vîscozitatea cinematică iar ρ densitatea.

Dacă notăm cu c concentraţia unui component, ecuaţia continuităţii acestui component este

$$\frac{dc}{dt} = -\nabla \cdot \vec{i}, \tag{1.3}$$

unde $\vec{i}$ este fluxul de masă al componentului şi este dat de relaţia

$$\vec{i} = -[D\nabla c - k\nabla p], \tag{1.4}$$

D fiind coeficientul de difuzie moleculară iar k de barodifuzie. Presupunînd coeficienţii fizici constanţi înlocuirea lui (1.4) în (1.3) ne dă

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = D\Delta c - k\Delta p, \tag{1.5}$$

ecuaţia difuziei unui component cu luarea în considerare a efectului barodifuziei.

Alegînd axa Oz în lungul axei de rotaţie a unui disc infinit, ce se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω, condiţia de aderenţă la suprafaţa discului impune următoarele condiţii la limită, considerînd coordonate cilindrice

$$z = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = r\omega, \quad v_z = 0;$$
$$z = \infty, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = -m;$$

unde m este o constantă ce se determină ulterior.

Scurgerea hidrodinamică în jurul unui disc a fost studiată de W. G. Cochran [3]. El a căutat soluţii de forma

$$v_r = r\omega F(\zeta), \; v_\theta = r\omega G(\zeta), \; v_z = \sqrt{\omega\nu}H(\zeta), \; p = -\rho\omega\nu P(\zeta); \tag{1.6}$$

unde

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, z. \tag{1.7}$$

În vecinătatea discului F, G, H sînt de forma

$$F = a_0\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{3}b_0\zeta^3 - \frac{1}{12}b_0^2\zeta^4 - \frac{1}{60}a_0\zeta^5 + \left(\frac{1}{360} - \frac{a_0b_0}{90}\right)\zeta^6 + \ldots$$

$$G = 1 + b_0\zeta + \frac{1}{3}a_0\zeta^3 + \frac{1}{12}(a_0b_0 - 1)\zeta^4 - \frac{b_0}{15}\zeta^5 - \left(\frac{a_0}{90} + \frac{b_0}{45}\right)\zeta^6 + \ldots \tag{1.8}$$

$$H = -a_0\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + \frac{1}{6}b_0\zeta^4 + \frac{1}{30}b_0\zeta^5 + \frac{1}{180}a_0\zeta^6 + \ldots$$

unde $a_0 = 0{,}510$ iar $b_0 = -0{,}616$.

Grosimea stratului limită hidrodinamic este

$$\delta_H = 3{,}6\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}, \tag{1.9}$$

astfel că extremităţii superioare a stratului limită hidrodinamic creat peste un disc în rotaţie uniformă îi corespunde coordonata adimensională $\zeta = 3{,}6$.

§ 2. *Ecuaţiile difuziei.* Ecuaţia (1.5) în coordonate cilindrice se scrie [4]

$$v_r\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial c}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}\right) - k\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \tag{2.1}$$

cu condiţiile la limită

$$z = 0, \; c = 0; \; z = \infty, \; c = c_0 \tag{2.2}$$

considerînd că reacţia chimică este rapidă.

Presupunînd că soluţia este de forma

$$c = c(z)$$

şi introducînd noua variabilă ζ, obţinem ecuaţia diferenţială

$$c'' - ScH(\zeta)c' + KScf(\zeta) = 0 \tag{2.3}$$

unde $K = k\rho\omega$ iar $Sc = \frac{\nu}{D}$ şi

$$f(\zeta) = P'' = H'^2(\zeta) + H(\zeta)H''(\zeta) - H'''(\zeta).$$

În cazul în care luăm în considerare şi o reacţie omogenă care are loc în masa fluidului, în membrul stîng al ecuaţiei (2.3) apare un termen de forma $- M\, c(\zeta)$, unde $0{,}01 \leq M \leq 0{,}1$ este un termen ce caracterizează apariţia reacţiilor chimice omogene. Avem astfel ecuaţia reacţiilor omogene

$$c'' - Sc\, H(\zeta)\, c' - M\, c + K\, Sc f(\zeta) = 0. \tag{2.4}$$

Grosimea stratului limită de difuzie este dat de relaţia [5]

$$\delta_0 = 1{,}61 \left(\frac{D}{\nu}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}},$$

care pentru numere Schmidt cuprinse între 0,1 şi 10^3 poate fi aproximată de valoarea

$$\delta_0 = 0{,}05\ \delta_H,$$

care arată că grosimea stratului limită de difuzie creat la scurgerea peste un disc în rotaţie uniformă reprezintă 5% din grosimea stratului limită hidrodinamic. Ţinînd cont de relaţia (1.9) avem

$$\delta_0 = 0{,}18 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}},$$

deci extremităţii superioare a stratului limită de difuzie îi corespunde coordonata adimensională

$$\zeta_0 = 0{,}18.$$

Limitîndu-ne la studiul profilului concentraţiei în stratul limită de difuzie, condiţiile la limită (2.2) devin

$$\zeta = 0, \quad c = 0\,; \quad \zeta = 0{,}18, \quad c = c_0, \tag{2.5}$$

astfel că scurgerea unui fluid vîscos peste un disc în rotaţie uniformă conduce, în ceea ce priveşte reacţiile chimice, la o problemă bilocală liniară.

§ 3. *O metodă cu diferențe finite pentru calcularea profilului concentrației.* Problemei bilocale liniare (2.4)—(2.5) i se atașează schema cu diferențe

$$\frac{c_{j+1} - 2c_j + c_{j-1}}{h^2} - Sc\,H(\zeta_j)\,\frac{c_{j+1} - c_{j-1}}{2h} - Mc_j + K\,Sc f(\zeta_j) = 0, \qquad (3.1)$$

unde $j = \overline{1, N}$, $h = \dfrac{0{,}18}{N+1}$ pasul rețelei iar $H(\zeta)$ este dat de (1.8) trunchiat la termenul în ζ^6.

Condițiile la limită (2.5) se transcriu în forma

$$c_0 = 0, \quad c_{N+1} = 1. \qquad (3.2)$$

Schema cu diferențe (3.1) cu condițiile (3.2) se scrie în forma matriială astfel

$$A\,C = r, \qquad (3.3)$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} f(\zeta_1) \\ f(\zeta_2) \\ \vdots \\ f(\zeta_N) \end{pmatrix} (-\,KSc)\left(-\frac{h^2}{2}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -2 + H(\zeta_N) \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -d_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & a_2 - d & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -b_{N-1} & a_{N-1} & -d_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -b_N & a_N \end{pmatrix}$$

unde elementele a_j, b_j și d_j ale matricii A au forma

$$a_j = 1 + \frac{h^2}{2}M, \quad b_j = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{2}H(\zeta_j)\right), \quad d_j = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2}H(\zeta_j)\right). \qquad (3.5)$$

Sînt satisfăcute condițiile [6]

$$\frac{h}{2}\,|H(\zeta_j)| < 1, \qquad j = \overline{1, N} \qquad (3.6)$$

și

$$\begin{gathered} |a_j| > |d_j| > 0, \\ |a_j| > |b_j| + |d_j|, \qquad 2 \le j \le N-1 \\ |a_N| > |b_N| > 0. \end{gathered} \qquad (3.7)$$

Sistemul (3.3) pentru pasul rețelei $h = 0{,}02$, numărul Schmidt $Sc = 1$, constantele $K = 0{,}01$ și $M = 0{,}1$ devine un sistem algebric liniar de 8 ecuații cu 8 necunoscute. El a fost rezolvat fiind programat astfel încît să se apeleze în programul principal, scris în limbajul FORTRAN, la două subprograme aflate în biblioteca matematică a calculatorului FELIX—C—256, și anume RESOL și REBAN. Calculele au fost apoi repetate pentru $M = 0$, adică cazul reacțiilor eterogene.

Tabel 1

ζ	Concentrația $\frac{c}{c_0}$ pentru scurgeri cu reacție	
	eterogenă	omogenă
0,00	0,000000	0,000000
0,02	0,110985	0,111044
0,04	0,222050	0,222164
0,06	0,333186	0,333346
0,08	0,444375	0,444569
0,10	0,555596	0,555803
0,12	0,666812	0,667011
0,14	0,777983	0,778149
0,16	0,889064	0,889165
0,18	1,000000	1,000000

Valorile concentrației pe cele 10 noduri folosite la integrare sînt date în tabelul 1, ele reprezentînd concentrația în diferite puncte ale stratului limită de difuzie, cînd în acest strat nu au loc decît reacții eterogene (prima coloană), spre deosebire de valorile din a doua coloană care semnifică concentrația în aceleași puncte ale stratului limită de difuzie, dar în care au loc reacții atît omogene cît și eterogene.

Se observă că deși mare coeficientul M ($M = 0{,}1$), reacția omogenă influențează foarte puțin profilul concentrației în stratul limită de difuzie, valorile corespunzătoare ale concentrației pentru cele două cazuri diferind doar de la zecimala a patra din cele șase exacte obținute.

(Intrat în redacție la 29 noiembrie 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. I., Stan, *Sullo scorimento nello strato limite con reazioni chimice*, Atti del 1° Congresso nazionale di mec. teor. ad applic, Udine, 1971, vol IV, 343.
2. I., Stan., *Efectul barodifuziei în stratul-limită*, Stud. și cercet. de mec. aplicată, **34**, 4, 1975, 593.
3. W. G. Cochran, *The flow due to rotating disk*, Proc. Cambr. Phyl. Soc., T., **30**, 3, 1934, 354.
4. I. Stan, *Establishment of concentration profile for the flow near a rotating disk with chemical reactions*, Studia Univ. Babeș—Bolyai, ser. Physica, 1, 1972, 71.
5. V. G. Levici, *Fizico-himiceskaia gidrodinamica*, Moskva, 1959.
6. E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of numeral methods*, John Wiley & sons, New York, 1966.

NUMERICAL METHODS IN ESTABLISHMENT OF CONCENTRATION PROFILE FOR THE FLOWS WITH CHEMICAL REACTIONS OVER A ROTATING DISK

(Summary)

The method of finite differences is applied to the establishment of concentration profile in boundary layer. Barodiffusion equations [1, 2] applied in the boundary layer of a rotating disk in the presence of a chemical reaction between fluid and disk are considered. Heterogene and homogene reactions are discussed.

IN MEMORIAM

ACADEMICIAN GEORGE CĂLUGĂREANU

În ziua de 15 noiembrie 1976 s-a stins din viață academicianul GEORGE CĂLUGĂREANU, reprezentant de frunte al școlii matematice românești, profesor la Facultatea de matematică a Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca, președintele Filialei Cluj-Napoca a Societății de Științe Matematice.

Născut la Iași, la 16 iulie 1902, face studiile liceale la București, manifestînd încă în această perioadă o atracție deosebită pentru științele naturii. În perioada 1921—1924 urmează cursurile Universității din Cluj, unde tatăl său, distinsul naturalist Dimitrie Călugăreanu, a venit să-și aducă contribuția la propășirea învățămîntului universitar din Transilvania. După absolvirea în mod strălucit a Facultății de Științe din Cluj, își continuă studiile la Paris, obținînd în anul 1928 titlul de doctor în științele matematice.

Întors în țară, se stabilește la Universitatea clujeană, unde pînă în ultima clipă a vieții sale și-a pus cu deosebită dăruire întregul său talent și putere de muncă în slujba dezvoltării învățămîntului și științei românești.

Încadrat în rîndurile personalului didactic încă din vremea studenției, a urcat treaptă cu treaptă toate gradele didactice, temeinicind-o pe fiecare prin activitatea sa didactică și științifică, prin omenia pe care o emana și o transmitea colaboratorilor și elevilor săi. Modest ca fire, cumpănit în acțiuni, profund în gîndire și cercetare, cald în relațiile cu studenții, profesorul George Călugăreanu a reușit să continue și să consolideze o școală prestigioasă de teoria funcțiilor și topologie.

Lecțiile sale expuse cu o claritate desăvîrșită au fost un adevărat model pentru multe generații de profesori. În același timp, și-a adus o contribuție deosebit de importantă la organizarea învățămîntului matematic, în calitate de decan al Facultății de matematică și fizică din Cluj-Napoca, în perioada 1953—1957, și ca șef al Catedrei de teoria funcțiilor. Pentru înalta sa măiestrie pedagogică a fost distins cu titlul de „profesor emerit", iar ca o recunoaștere a meritelor sale științifice remarcabile, în anul 1955 a fost ales membru corespondent al Academiei Române, devenind în anul 1963 membru titular.

Opera științifică a academicianului George Călugăreanu, concretizată în cele peste 100 de memorii și lucrării științifice, se caracterizează prin rezolvarea unor probleme majore din teoria funcțiilor analitice, topologie algebrică și geometrie, care l-au consacrat ca o personalitate marcantă în domeniul respectiv. Preocupat de echilibrul dintre formă și conținut, dintre metodă și teorie, și-a elaborat lucrările cu multă sobrietate, evitînd efectele spectaculoase, neesențiale. Prin rezultatele sale, recunoscute pe plan mondial, savantul român și-a înscris numele la loc de cinste în galeria marilor învățați ai vremii.

Pe lîngă vasta sa pregătire, atît în specialitate cît și în domeniile înrudite, mai ales în fizică și mecanică, s-a remarcat prin largul său orizont cultural. Simțind nevoia lăuntrică a întregirii armonioase a activității sale spirituale, este atras încă din tinerețe de marile valori ale culturii umane. Absolvent al Conservatorului, a fost și un pasionat iubitor al muzicii.

Distins cetățean al patriei noastre, devotat și atașat cauzei construcției noii noastre societăți, academicianul George Călugăreanu a contribuit din plin la prosperitatea patriei, a științei și culturii românești și universale.

Pentru activitatea sa de profesor, savant și cetățean a fost distins cu ordine și medalii ale Republicii Socialiste România.

Dispariția academicianului George Călugăreanu lipsește știința românească și învățămîntul din patria noastră de unul din stîlpii săi de seamă.

RECENZII

R. E. Burkard, **Methoden der ganzzahligen Optimierung,** Springer-Verlag, Wien — New York, 1972, VIII + 292 Seiten.

Innerhalb der mathematischen Optimierung, die heute wegen ihrer engen Anwendungsbezogenheit und wegen ihres weitverzweigten wissenschaftlichen Gegenstandes eines der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik ist, nimmt die ganzzahlige Optimierung eine bedeutende Stellung ein. Bei vielen ökonomischen Problemen treten nämlich Forderungen auf Ganzzahligkeit aller oder gewisser Variabler auf, weil die Variablen Stückzahlen bezeichnen und deshalb gebrochene Werte keinen Sinn haben. Nun ist die ganzzahlige Optimierung aber bei weitem noch kein so allgemein bekanntes Gebiet wie z. B. die lineare oder die konvexe Optimierung. Dieses ist vor allem darauf zurückzuführen, dass die allgemeinen Lösungsmethoden ganzzahliger Optimierungsaufgaben erst vor kurzem entwickelt wurden (die erste brauchbare Methode wurde 1958 von Gomory R. E. angegeben) und dass die Zahl zusammenfassender Darstellungen dieser Verfahren sehr klein ist. Das Erscheinen des vorliegenden Buches, in dem eine allgemeine, leichtfassliche und auch dem Praktiker verständliche Darstellung der wichtigsten Verfahren zur Lösung ganzzahliger Optimierungsaufgaben gegeben wird, ist daher sehr zu begrüssen.

Das Buch ist in 13 Kapitel gegliedert. Nach Bereitstellung der mathematischen Grundlagen zur Behandlung von Optimierungsaufgaben, gibt der Verfasser eine kurze Einführung in die lineare Optimierung. Dabei beschreibt er den Simplexalgorithmus, den revidierten und den dualen Simplexalgorithmus. Darauf folgt die Beschreibung von Transport- und Zuordnungsproblemen, für die, historisch gesehen, die ersten Lösungsverfahren entwickelt wurden. Daran schliesst sich eine Diskussion der Verfahren von Gomory an. Die folgenden Kapitel behandeln Branch- und Bound-Methoden, die kombinatorischen Verfahren von Balas, den Partitionsansatz von Benders, sowie das Rucksackproblem. Im letzten Kapitel werden Verfahren zur Lösung konvexer ganzzahliger Optimierungsaufgaben beschrieben. Am Schluss des Bandes ist ein ausführliches Literaturverzeichnis angegeben, das den Leser bis zu den neuesten Veröffentlichungen auf dem Gebiet der ganzzahligen Optimierung führt.

Das Buch ist auf relativ geringe Vorkenntnisse aufgebaut und kann jedem, der sich über die Lösungsverfahren der ganzzahligen Optimierung informieren will, bestens empfohlen werden. Die Darstellung ist meisterhaft und spricht sowohl den an der Theorie interessierten Leser an (Sätze mit vollständigen Beweisen), als auch den mehr an den Anwendungen interessierten Leser (Formulierung der Verfahren auch in algorithmischer Form, zahlreiche numerische Beispiele).

WOLFGANG W. BRECKNER

Z. Ciesielski, J. Musielak (editors), **Approximation Theory,** D. Reidel Publishing Company, Dordrecht — Boston; PWN — Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975, XII + 289 pp.

Over the last years there has been a great deal of research in the fields of approximation theory and constructive function theory. This is shown both by the number of publications and by the numerous international scientific gatherings devoted to these domains. The present volume contains twenty-six papers read at the Conference on Approximation Theory which was held in Poznan, August 22—26, 1972. This conference, organized jointly by the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences and the Institute of Mathematics of the Adam Mickiewicz University, may be regarded as a continuation of the conferences held in Cluj 1968, Budapest 1969 and Varna 1970. It was attended by 109 specialists, which are mentioned in the list of participants at the beginning of the volume.

The papers included in the volume deal with a great variety of subjects, which can be classified into the following main themes (the names of the authors are mentioned in brackets):

1) Interpolation (G. P. Névai, A. K. Varma, P. O. H. Vértesi).

2) Spline functions (Z. Ciesielski, K. Scherer, Yu. N. Subbotin).

3) Approximation by function classes and operators (V. V. Arestov, M.-B. Babaev, V. A. Baskakov, E. Görlich, I. I. Ibragimov, W. Köhnen, R. J. Nessel, S. Pawelke, E. L. Stark, I. Szalay, W. Trebels).

4) Saturation theorems (B. Dreseler, W. Schempp).

5) Properties of the best approximation and the operator of best approximation (V. I. Berdyshev, M. v. Golitschek).

6) Approximation problems for complex-valued functions of complex variables (P. M. Gauthier, W. Hengartner, T. Iwinski, I. Maruşciac, W. Plesniak, M. Skwarczynski, P. M. Tamrazov).

7) Fourier analysis (L. Leindler, R. Taberski).

8) Programming problems and Chebyshev approximation (H.-P. Blatt).

At the end of the book a list of fourteen research problems, posed by the participants, is given.

The book offers an overview of the main problems studied at present in approximation theory and constructive function theory, it presents the latest results obtained by well-known specialists, and points to many new topics of research that are important for both pure and applied mathematics. It is therefore indispensable to all researchers in approximation theory and constructive function theory. It is also useful to those interested in applications of mathematical analysis and functional analysis, and to specialists in numerical analysis.

WOLFGANG W. BRECKNER

Intr. Poligrafică Cluj, Municipiul Cluj-Napoca, 548/1977

În cel de al XXII-lea an (1977) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* apare semestrial în specialităţile:

matematică
fizică
chimie
geologie—geografie
biologie
filozofie
ştiinţe economice
ştiinţe juridice
istorie
filologie

На XXII году издания (1977) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит два раза в год со следующими специальностями:

математика
физика
химия
геология—география
биология
философия
экономические науки
юридические науки
история
филология

Dans sa XXII-e année (1977) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* paraît semestriellement dans les spécialités:

mathématiques
physique
chimie
géologie—géographie
biologie
philosophie
sciences économiques
sciences juridiques
histoire
philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM Departamentul Export-Import Presă, P.O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, str. 13 Decembrie nr. 3.

Lei 10