STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1967

CLUJ

În cel de al XII-lea an de apariție (1967) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:
matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
științe economice;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XII году (1967) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:
математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология-география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
экономические науки;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска);

Dans leur XII-me année de publication (1967) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:
mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sciences économiques;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1967

CLUJ

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
Anul XII 1967

Redacţia:

CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1

Telefon 1—34—50

SUMAR

Recenzii

Cronică

СОДЕРЖАНИЕ

SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

КОНЕЧНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ (II)
Целые непрерывные дроби

Э. ДАНИ

1.1. Понятия, употреблённые в работе [1] сохранятся. Множество всех целых непрерывных дробей составляет группу $\mathcal{G}$, тождественную с группой матриц второго порядка с нормой-целой единицей, определённой над кольцом целых чисел. Названия: положительная целая непрерывная дробь и натуральная непрерывная дробь будут употреблены в том же смысле. Отрицательная целая непрерывная дробь $-Z$-противоположна положительной целой непрерывной дроби Z. Абсолютное значение $|Z|$ положительной или отрицательной целой непрерывной дроби Z получится переходом к абсолютному значению элементов. Целая непрерывная дробь, не являющаяся ни положительной, ни отрицательной, назовём смешанной целой непрерывной дробью.

1.2. Группу $\mathcal{G}$ можно интерпретировать как область операторов Z в смысле внутренних автоморфизмов, $ZYZ^{-1} = X$, т.е.

$$XZ = ZY. \tag{1}$$

Автоморфная эквивалентность целых непрерывных дробей X и Y, определённая таким образом, является собственной, соответственно несобственной, поскольку автоморфизм Z-собственный, т.е. $N(Z) = 1$, соответственно -несобственный, т.е. $N(Z) = -1$.

1.3. ψ, соответственно τ (в работе [1] T) обозначают оператор перехода от данной целой непрерывной дроби Z к противоположной Z^ψ, соответственно к транспонированной Z^τ. Эти два оператора порождают группу $\{1,\psi,\tau,\psi\tau\} = \{\chi\}$.

1.4. Умножением соотношения (1) справа на целую непрерывную дробь I^{-1},

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$I = (0)(1)(-1)(1)$, имея в виду, что $IZI^{-1} = N(Z)Z^{-\tau}$, получим соотношение $XI^{-1}N(Z)Z^{-\tau} = ZYI^{-1}$. Это выражение, если напишем вместо $XI^{-1}\,N(Z)$, соответственно YI^{-1} коротко X, соответственно Y, примет форму $XZ^{-\tau} = ZY$, т.е.

$$X = ZYZ^\tau. \tag{3}$$

В смысле соотношения (3) $\mathcal{Q}$ можно интерпретировать, как новую группу операторов, именно симметрических преобразований. Преобразованное обозначим $Y^Z = X$. Замечаем, что симметрические преобразования Z с преобразованиями χ коммутативны.

Симметрическая эквивалентность $X \sim Y$, в зависимости от симметрического преобразования, является, как и автоморфная эквивалентность, собственной, соответственно несобственной.

2.1. Полугруппа $\mathcal{H}$ натуральных непрерывных дробей с точки зрения делимости ведёт себя, как свободная полугруппа.

2.2. Натуральная непрерывная дробь $P(Z)$ кратчайшей длины со свойством, что степень её равна натуральной непрерывной дроби Z, называется её периодом.

2.3. Обозначим через ρ перестановку, которая переносит первый неприводимый множитель натуральной (или вообще целой) непрерывной дроби за последний неприводимый множитель. Преобразованное обозначим Z^ρ. Замечаем, что $\rho\tau \neq \tau\rho$. Перестановка ρ в связи с натуральной непрерывной дробью Z порождает циклическую группу $\{\rho\}$ порядка $L(P(Z))$.

2.4. Для фиксированного $X \in \mathcal{H}$ и неизвестных $Y,Z \in \mathcal{H}$, уравнение (1) имеет общее решение $Y = X^{\rho^m}$, $Z = P^\nu(X)P_{(m)}(X)$, $0 \leqslant m \leqslant L(P(X))-1$, $\nu \geqslant 0$, где степень $P^0(X)$ и частичное произведение $P_{(0)}(X)$ считаются пустыми символами.

Замечаем, что индекс частичной непрерывной дроби написан в скобках, чтобы отличить его от других индексов, употреблённых в работе.

2.5. Тождество формы (1) влечёт за собой подобное $Z'X = YZ'$, где $Z' = (P^{\rho^m}(X))_{(n-m)}P^\nu(X)$, $0 \leqslant m \leqslant L(P(X))-1$, $\nu \geqslant 0$.

2.6. Класс C_X автоморфно-эквивалентных натуральных непрерывных дробей содержит $L(P(X))$ элементов формы X^{ρ^m}, $0 \leqslant m \leqslant L(P(X)) - 1$.

2.7. Если $N(P(X)) = -1$, тогда C_X в то же время – класс собственно-эквивалентных натуральных непрерывных дробей. Если $N(P(X)) = 1$, тогда класс C_X-объединение двух таких классов C_X и C_{X^ρ}, соответствующих двум смежным классам фактор-группы $\{\rho\}|\{\rho^2\}$.

3.1. Множество всех целых непрерывных дробей с элементами-неотрицательными целыми числами составляет полугруппу $\mathcal{H}_0$, в которой каждый элемент имеет однозначное разложение в одну из форм (0), E, Z, $(0)Z$, $Z(0)$, $(0)Z(0)$, где Z-натуральная непрерывная дробь. На основе канонической формы натуральной непрерывной дроби умножение производится соответственно формуле $(q')(0)(q'') = (q' + q'')$.

3.2. Целую непрерывную дробь Z можно преобразовать, пригодно выбранным оператором, $\theta \in \{\pm\chi\}$, в целую непрерывную дробь Z^θ, которая или элемент из $\mathcal{H}_0$ или, учитывая только знак элементов, имеет форму

$$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Замечаем, что каждый элемент нуль выбран с соответствующим знаком.

3.3. Изучим тождество $XZ = \pm ZY$, где $X,Y \in \mathcal{H}$ и $Z \in \mathcal{Q}$. Имеет место следование $XZ = \pm ZY \leftrightarrow X^*Z^\theta = \pm Z^\theta Y^*$, где можно предположить, что

$\{X^*, Y^*\} \in \{\{X, Y\}, \{Y, X\}\}$, $\theta \in \{\pm 1, \pm \psi\}$, когда $Z^0 \in \mathscr{H}_0$ и $\{X^*, Y^*\} \in \{\{X, Y\}, \{Y^\tau, X^\tau\}\}$, $\theta \in \{\chi\}$, когда $Z^0 \notin \mathscr{H}_0$. Обозначим снова пару $\{X^*, Y^*\}$ натуральных непрерывных дробей через $\{X, Y\}$ и изучим тождество $XZ^0 = \pm Z^0 Y$. Пусть по предположению $Z^0 \notin \mathscr{H}_0$. Умножением изучаемого тождества справа на I^{-1} выведем $XZ^0 I^{-1} Y^\tau = \pm N(Y) Z^0 I^{-1}$. Из $X, Y \in \mathscr{H}$, $Z^0 I^{-1} \in \mathscr{H}_0$ следует $XZ^0 I^{-1} Y^\tau \in \mathscr{H}$, итак, $\pm N(Y) = 1$ и $Z^0 I^{-1} \in \mathscr{H}$. Однако натуральная непрерывная дробь $Z^0 I^{-1}$ не может иметь и отличную вторую каноническую форму $XZ^0 I^{-1} Y^\tau$, откуда следует, что $Z^0 \in \mathscr{H}_0$. Следовательно соответствует только знак плюс во втором члене тождества и $Z^0 = E$ или $Z^0 \in \mathscr{H}$.

3.4. Для фиксированного $X \in \mathscr{H}$, и неизвестных $Y \in \mathscr{H}$ и $Z \in \mathscr{G}$, общее решение уравнения (1) -это $Y = X^{\varrho^m}$, $Z = \pm P^\nu(X) P_{(m)}(X)$, $0 \leqslant m \leqslant L(P(X)) - 1$, ν-целое.

4.1. Для данного $X \in \mathscr{G}$, $\pm X \notin \mathscr{H}$, $X \neq \pm I$, можно определить положительное или отрицательное ядро Y, $|Y| \in \mathscr{H}$, как и соответствующее партикулярное симметрическое преобразование $A \in \mathscr{G}$, $X = Y^A$.

Обозначим (сравнить с обозначением (2) [1])

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Пусть $i = 1$, для $x_1 \neq 0$ или $x_1 = x_4 = 0$, $i = 4$ для $x_1 = 0$, $x_4 \neq 0$; $\delta = 1$ для $N(X) = 1$ или $|x_i| \neq 0$, $\delta = 2$ для $N(X) = -1$, и $|x_i| = 1$; $q = |[\min\{x_2 \operatorname{sgn} x_i, x_3 \operatorname{sgn} x_i\} : |x_i|]| + \delta$ для $x_1 \neq 0$ или $x_4 \neq 0$ и $q = 1$ для $x_1 = x_4 = 0$.

Можно проверить, что

$$Y = \begin{pmatrix} x_i & x_2 - \frac{1 + (-1)^i}{2} + x_i q \\ x_2 - \frac{1 - (-1)^i}{2} + x_i q & x_{5-i} + (x_2 + x_3) q + x_i q^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

-положительная или отрицательная целая непрерывная дробь, которая вместе с $A = (0)^{i-1}(-q)(0)$ удовлетворяют уравнению (3).

Чтобы включить и случай $\pm X \in \mathscr{H}$, возьмём $Y = X$ и $A = E$.

4.2. Целые непрерывные дроби $X = \pm I$ позволяют только сами себя, как ядро, так как соотношение (3) удовлетворено тождественно с $\mathbf{Y} = N(A) X$ и с любым $Z = A$.

5.1. Для данного минимального ядра $K \in \mathscr{H}$, $D(K) = -k$: $k \geqslant 1$ для $N(K) = -1$ и $k \geqslant 3$ для $N(K) = 1$, можно определить ядро $GI \in \mathscr{G}$, $G \in \mathscr{H}$ формы (4), как и соответствующее партикулярное симметрическое преобразование F, $K = (GI)^F$.

Согласно характеристикам $\{n, q_1 - q_n, q_{n-1}\}$ натуральной непрепывной дроби $K = (q_1) \ldots (q_n)$, значения F и G можно найти в таблице 1. Тождества $K = (GI)^F$ таблицы 1 можно построить индуктивным путём на основе результатов работы [1] (на основе леммы 4, которая даст нам форму минимальных ядер натуральных непрерывных дробей), но их можно проверить и дедуктивно, вычислением.

Таблица 1

<table>
<tr><th colspan="5">$K = FGIF^{\tau}$</th></tr>
<tr><th colspan="3">$K = (q_1) \ldots (q_n)$</th><th rowspan="2">F</th><th rowspan="2">G</th></tr>
<tr><th>n</th><th>$q_1 - q_n$</th><th>q_{n-1}</th></tr>
<tr><td>2</td><td>$\geqslant 3$</td><td rowspan="2"></td><td>$(q_1 - 1)$</td><td>$(1)(q_1 - q_2 - 2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>1</td><td>$(q_1)(-1)(0)$</td><td>(q_2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\geqslant 2$</td><td>1</td><td>$(q_1 + 1)$</td><td>$(q_1 - q_3)$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 2$</td><td>(q_1)</td><td>$(q_2 - 1)(1)(q_1 - q_3 - 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>1</td><td>$\geqslant 2$</td><td>$(q_1)(-1)(0)$</td><td>$(q_2 + 1)(q_3 - 1)$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 2$</td><td>1</td><td rowspan="2">(q_1)</td><td>$(q_2 + 1)(q_1 - q_4 - 1)$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 4$</td><td>$\geqslant 2$</td><td>$\geqslant 2$</td><td>$(q_2) \ldots (q_{n-2})(q_{n-1} - 1)(1)(q_1 - q_n - 1)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>$(q_1)(-q_3 - 1)(0)$</td><td>$(q_2 + q_3 + 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\geqslant 5$</td><td>1</td><td>$\geqslant 2$</td><td>$(q_1)(-1)(0)$</td><td>$(q_2 + 1)(q_3) \ldots (q_{n-2})(q_{n-1} - 1)$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 2$</td><td>1</td><td>(q_1)</td><td>$(q_2) \ldots (q_{n-3})(q_{n-2}+1)(q_1 - q_n - 1)$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 6$</td><td>1</td><td>1</td><td>$(q_1)(-q_{n-2} - 1)(0)$</td><td>$(q_2 + q_{n-2} + 1)(q_3) \ldots (q_{n-3})$</td></tr>
</table>

Таблица 2

<table>
<tr><th colspan="3">$K = FGIF^{\tau}$</th><th>$GI = HGIH^{\tau}$</th></tr>
<tr><th>K</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr>
<tr><td>$(q_1)\ q_1 \equiv 0 \pmod 2$</td><td>$\left(\frac{q_1}{2}\right)$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</td><td>$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, 1\}$</td></tr>
<tr><td>$(q_1)\ q_1 \equiv 1 \pmod 2$</td><td>$\left(\frac{q_1 - 1}{2}\right)(0)$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$</td><td>$\pm \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, 1\}$</td></tr>
<tr><td>$(q_1)(q_1)$</td><td rowspan="4">(q_1)</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$</td></tr>
<tr><td>$(q_1)(q_1 - 1)$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, \ldots, 5\}$</td></tr>
<tr><td>$(q_1)(q_1 - 2)$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$</td><td>$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$</td></tr>
<tr><td>$(q_1)(q_2)(1)(q_1 - 1)$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 + 1 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\nu},\ \nu \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$</td></tr>
</table>

5.2. Если $L(G) \geqslant 2$, $G = (q)G'$, то имеет место соотношение

$$q = \frac{k - g_2' - g_3'}{g_4'}. \tag{7}$$

Минимальные ядра K, для которых $L(G) = 1$, т.е. $G = (k)$ соответственно $L(G) \geqslant 2$ и $g_4' = 1$, т.е. $G = (1)(k - 2)$, принадлежат тому же классу симметрически-эквивалентных натуральных непрерывных дробей, который называется главным классом. Остальные минимальные ядра не принадлежат этому классу. Множество минимальных ядер K, принадлежащих главному классу, как и их транспонированные для неопределённого k, -это множество натуральных минимальных ядер-многочленов от k с элементами – многочленами, определёнными над кольцом целых чисел, которые для $k \geqslant k_0$, где k_0 фиксировано от случая к случаю, принимает значение в $\mathcal{H}$ (см. теорему 2 [1]).

5.3. Элементы g_2 и g_3 натуральной непрерывной дроби G-нуклеоны, но ни один из них не является обязательно нуклеоном минимального ядра K (см. теорему 1 [1]).

6.1. Для данного минимального ядра K, $D(K) = -k$; $k = 0$ для $N(K) = -1$ и $k = 0,\ 1,\ 2$ для $N(K) = 1$, имеем только типы таблицы 2.

6.2. Целые непрерывные дроби K, G и F таблицы 2 удовлетворяют тождеству $K = (GI)^F$

6.3. Целые непрерывные дроби H таблицы 2 составляют общее решение уравнения симметрической автоэквивалентности целой непрерывной дроби GI, $GI = (GI)^H$.

7.1. Приведение целых непрерывных дробей состоит в способе, по которому данная целая непрерывная дробь X выражается ядром V, представительным элементом класса C_X, определённым единственным образом. Соответствующее общее симметрическое преобразование обозначим через $Z = Z_0 H$, $X = V^Z$, где Z_0-партикулярное симметрическое преобразование, а H-общее решение уравнения симметрической автоэквивалентности, связанной с целой непрерывной дробью V, $V = V^H$.

7.2. Целые непрерывные дроби $X = \pm I$ составляют единственный класс и, взяв, как представительный элемент $V = I$ в соотношении $X = V^Z$ целая непрерывная дробь Z выполняет единственное условие $N(Z) = 1$ для $X = I$ и $N(Z) = -1$ для $X = -I$.

7.3. Для любой положительной или отрицательной целой непрерывной дроби Y, $|Y| \in \mathcal{H}$, согласно канонической форме $|Y|$, можно определить единственным образом ядро U, $|U| \in \mathcal{H}$, минимальное в абсолютном значении, как и партикулярное симметрическое преобразование $B = E$ или $B \in \mathcal{H}$, $Y = U^B$.

7.4. Для любого положителього или отрицательного ядра U, $|U| \in \mathcal{H}$, минимального в абсолютном значении, можно определить единственным образом определённое ядро V, представительный элемент класса C_U, как и партикулярное симметрическое преобразование C, $U = V^C$.

7.5. Построим целые непрерывные дроби V, C и H в случае $k \geqslant 1$ для $N(U) = -1$ или $k \geqslant 3$ для $N(U) = 1$.

Обозначив $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} D(|U|))$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} U)$, можно написать $U^{\psi^{\beta}\tau^{\alpha}} = K$. Таким образом, согласно таблице 1 $U = (G^{\tau^{\alpha}} I)^{\psi^{\alpha + \beta} F I^{\alpha}}$.

Обозначив через m, $0 \leqslant m \leqslant L(P(G)) - 1$, показатель, для которого $(G^{\tau^\alpha})^{\rho^m}$-первое в взятом лексикографическом расположении, согласно убывающему расположению неприводимых множителей G^{τ^α}, можно написать тождество $G^{\tau^\alpha} I = ((G^{\tau^\alpha})^{\rho^m} I)^{\psi^\gamma(G^{\tau^\alpha})(m)}$, где $\gamma = \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)$.

Из установленных выражений следует $U = ((G^{\tau^\alpha})^{\rho^m} I)^{\psi^{\alpha+\beta+\gamma} FI^\alpha(G^{\tau^\alpha})(m)}$.

Обозначив

$$V = ((G^{\tau^\alpha})^{\rho^m} I)^{\psi(\alpha+\beta+\gamma)(1-\delta)}, \tag{8}$$

где $\delta = \frac{1}{2}(1 - N(P(G)))$, можно написать $U = V^{\psi(\alpha+\beta+\gamma)\delta FI^\alpha(G^{\tau^\alpha})(m)}$.

Имеет место тождество $V = V^{\psi^{\delta} P(|VI^{-1}|)}$ и следовательно, обозначив $\omega = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{\alpha+\beta+\gamma})$, следует $U = V^{FI^\alpha(G^{\tau^\alpha})(m) P^{\delta\omega}(|VI^{-1}|)}$.

Имея в виду, что $|VI^{-1}| = (G^{\tau^\alpha})^{\rho^m}$, показатель последнего соотношения между U и V можно обозначить через

$$C = FI^\alpha(G^{\tau^\alpha})_{(m)} P^{\delta\omega}((G^{\tau^\alpha})^{\rho^m}) \tag{9}$$

и следовательно построили симметрическое преобразование C, для которого имеет место соотношение $U = V^C$.

Чтобы показать, что ядро V определено единственным образом, будем основываться на факте, что $|VI^{-1}|$-натуральная непрерывная дробь. Из симметрической эквивалентности $V \sim V'$ следует автоморфная эквивалентность $VI^{-1} = ZV'I^{-1}Z^{-1}N(Z)$, где Z-соответствующее симметрическое или автоморфное преобразование. Имея в виду лексикографическое расположение $|VI^{-1}| = |V'I^{-1}|$, откуда следует, что $Z = \pm P^\nu(|VI^{-1}|)$, ν-целое. Если $\delta = 0$, т.е. $N(P(|VI^{-1}|)) = 1 \to N(Z) = 1$, то из автоморфной эквивалентности $VI^{-1} = ZV'I^{-1}Z^{-1}$ следует $\psi^{\alpha+\beta+\gamma} = \psi^{\alpha'+\beta'+\gamma'}$ и таким образом $VI^{-1} = V'I^{-1}$, итак, $V = V'$. Если $\delta = 1$, т.е. $N(P(|VI^{-1}|)) = -1 \to N(Z) = -1$ для нечётного ν и $N(Z) = 1$ для чётного ν, тогда $\psi^{(\alpha+\beta+\gamma)(1-\delta)} = \psi^{(\alpha'+\beta'+\gamma')(1-\delta')} = 1$ выбором знака ядра (8) и следовательно соответствует только случай, когда, $N(Z) = 1$, т.е. ν-чётное и, как раньше $VI^{-1} = V'I^{-1} \to V = V'$.

Так же на основе связи между симметрической и автоморфной эквивалентностей следует, что

$$H = \pm P^{(1+\delta)\nu}((G^{\tau^\alpha})^{\rho^m}), \tag{10}$$

ν-целое.

7.6. Построим целые непрерывные дроби V, C и H в случае $k = 0$ для $N(U) = -1$ или $k = 0, 1, 2$ для $N(U) = 1$, $U \neq \pm I$.

Можно проверить вычислением, что формулы (8), (9) и (10) -действительны и в данном случае, если условимся в том, что при первых двух целых непрерывных дробей G таблицы 2 имеем $m = 0$, $\alpha = 0$, а при последних четырёх целых непрерывных дробей имеем разложение:

$$(1)(-1)(1)(0), \quad (1)(-1)(1)(1), \quad (1)(-1)(1)(2), \quad (q_2 + 1)(0);$$

в случае $\alpha = 1$ вместо H напишем H^{τ}; $P(G^{\tau^{\alpha}}) = G^{\tau^{\alpha}}$.

7.7. Из предыдущих результатов следует, что $Z_0 = ABC$ получится согласно диаграмме (11).

8.1. Приведение целых непрерывных дробей применим, в первую очередь, к установлению симметрической эквивалентности целых непрерывных дробей. Целые непрерывные дроби $X' = V'^{Z_0'H'}$ и $X'' = V''^{Z_0''H''}$ тогда и только тогда являются симметрически-эквивалентными, когда $V' = V''$. В случае эквивалентности, обозначив $X' = X''^{Z_0H}$, где Z_0 представляет партикулярное симметрическое преобразование, а H общее решение автоэквивалентности целой непрерывной дроби X'', $X'' = X''^{H}$, имеем $Z_0 = Z_0'Z_0''^{-1}$ и $H = Z_0''H''Z_0''^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} X & Z_0 \arrow[l] & V \arrow[l, dash] \arrow[d, dash] \\ A \arrow[u] & & C \arrow[d] \\ Y \arrow[u, dash] & B \arrow[l] & U \arrow[l, dash] \end{tikzcd} \tag{11}$$

8.2. Знание симметрической эквивалентности, согласно следованию $X = ZYZ^{-1} \longleftrightarrow XI = ZYIZ^{\tau}N(Z)$, -эквивалентно со знанием автоморфной эквивалентности.

9.1. Представление натуральных чисел e арифметическими квадратичными формами $ax^2 + bxy + cy^2$ с дискриминантом $D \geqslant -4$,

$$e = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{12}$$

-другое применение приведения целых непрерывных дробей.

9.2. Решим уравнение (12), включив его, как составляющую часть, в одно уравнение симметрической эквивалентности целых непрерывных дробей.

Пусть k -второй компонент основной единицы $\varepsilon = \frac{1}{2}(k + l\sqrt{D})$ порядка Ω (который не должен быть главным) целых квадратичных иррациональностей с положительным дискриминантом, отличным от квадрата, и $l = 1$ в противном случае. Уравнение $el = alx^2 + blxy + cly^2$ эквивалентно с (12). Классическим способом [4], какое бы то ни было фиксированное решение $\{x = z_{01}, y = z_{02}\}$, $(z_{01}, z_{02}) = 1$, можно ассоциировать с тождеством $el = alz_{01}^2 + blz_{01}z_{02} + clz_{02}^2$ собственную симметрическую эквивалентность $X' = X''^{Z_0}$, $N(Z_0) = 1$, где

$$X' = \begin{pmatrix} el & \frac{1}{2}(fl - k) \\ \frac{1}{2}(fl + k) & gl \end{pmatrix} \tag{13}$$

-целая непрерывная дробь с первым элементом el, который является представляемым числом, и с $N(X') = N(\varepsilon)$, которое соответствует тождеству $f^2 - D = 4eg$ соответственно сравнению

$$f^2 \equiv D(mod\, 4e), \tag{14}$$

а

$$X'' = \begin{pmatrix} al & \frac{1}{2}(bl - k) \\ \frac{1}{2}(bl + k) & cl \end{pmatrix} \tag{15}$$

-целая непрерывная дробь, связанная с коэффициентами данной формы, которой осуществляется представление.

Элемент el целой непрерывной дроби X', пара элементов $\{z_{01}, z_{02}\}$ целой непрерывной дроби Z_0 и целая непрерывная дробь X'' -инварианты класса $C_{f(\mathrm{mod} 2e)}$. Таким образом, Z_0 можно выбрать так, чтобы X' была натуральная непрерывная дробь. Число основных решений уравнения (12) равно числу классов $C_{f(\mathrm{mod} 2e)}$, для которых имеет место симметрическая эквивалентность $X' = X''^{Z_0}$. Общее решение $\{Z = Z_0 H\}$ уравнения (12) получим из множества $\{Z_0\}$ основных решений умножением каждого основного решения на симметрическое преобразование H симметрической автоэквивалентности целой непрерывной дроби X'', $X'' = X''^{H}$.

9.3. Чтобы проиллюстрировать способ применения полученных результатов, определим общее решение уравнения $9 = 17x^2 + 32xy + 14y^2$ (см. задачу 17 литературы [1, стр. 205] первой части данной работы [1]).

Имеем $D = 72$, $\varepsilon = 17 + 2\sqrt{72}$. Таким образом, $k = 34$, $l = 4$ и можно перейти к эквивалентному уравнению $36 = 68x^2 + 128xy + 56y^2$, к которому присоединится целая непрерывная дробь (15)

$$X'' = \begin{pmatrix} 68 & 47 \\ 81 & 56 \end{pmatrix}.$$

Согласно 4.1. для X'' можно вывести $A'' = (-1)(0)$ и положительное ядро $Y'' = (2)(5)(4)(2)(1)(1)$.

Имея в виду, что Y'' -минимальное ядро, согласно 7.3. следует $U'' = \mathbf{Y}''$ и $B'' = E$.

Согласно 7.5., имея в виду, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, следует, что $U'' = K''$. В таблице 1 найдём $F'' = (2)(-3)(0)$, $G'' = (8)(4)$. Так как G''-первая натуральная непрерывная дробь в фиксированном лексикографическом расположении, имеем $m = 0$ и следовательно $\gamma = 0$. Имеем ещё $\delta = 0$. Итак, $V'' = (8)(4)I$ и $C'' = (2)(-3)(0)$ (сделаны сокращения типа $(q')(0)(q'') = (q' + q'')$).

Согласно диаграмме (11) $Z_0'' = (1)(-3)(0)$ и $H'' = \pm((8)\,(4))^{\nu}$, ν-целое (10).

Чтобы найти натуральные непрерывные дроби (13), надо принять во внимание решения $42 \in C_{6(mod\, 18)}$ и $30 \in C_{12(mod\, 18)}$ сравнения (14) $f^2 - 72 \equiv 0(mod\, 36)$ для которых получим $X_1' = (2)(1)(4)(6)(1)(1)$ и $X_2' = (2)(7)(5)(1)$.

Подобно случаю X'', приведением получим: $V_1' = (8)(4)I$, $Z_{10}' = (2)(-7)(0)$; $V_2' = (8)(4)I$, $Z_{20}' = (2)(-1)(0)$.

Имея в виду, что $V_1' = V''$ и $V_2' = V''$, для эквивалентности $X_1' = X''^{Z_{10}H_0}$, соответственно $X_2' = X''^{Z_{20}H_0}$ получим основные решения $Z_{10} = (2)(-4)(-1)(0)$, соответственно $Z_{20} = (2)(2)(-1)(0)$ и $H_0 = \pm X''I$.

Вычислением пар значений $\{z_{i01}, z_{i02}\}$, $i \in \{1,2\}$, получим множество $\{\{5, -4\}, \{-1, 2\}\}$ основных решений данного уравнения. Отсюда выведем общее решение умножением каждого основного решения на преобразование $H_0 = \pm X''I$.

10.1. Пусть $G_\infty^* = G_0^* \lim\limits_{\nu \to \infty} G^{*\nu}$-бесконечная периодическая правильная непрерывная дробь, соответствующая вещественной квадратичной иррациональности $\xi = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ или $\xi = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, которая удовлетворяет тождеству $a\xi^2 + b\xi + c = 0$. Как раньше, предполагая известной основную единицу ε, перейдём к эквивалентному тождеству $al\xi^2 + bl\xi + cl = 0$, к которому присоединится целая непрерывная дробь X'' формы (15), которую в дальнейшем будем обозначать через X.

На основе словаря: „упорядоченные комплексы целых чисел $\longleftrightarrow$ целые непрерывные дроби (в смысле матричной записи), действие $| \longleftrightarrow$ целая непрерывная дробь I (с обычным оператором умножения справа и слева), и т.д.'', можно использовать соотношение $(G^*I)^{(0)IG_0^*} = \pm X$, соответствующее формуле (28) работы [2]. Целая непрерывная дробь X, согласно формуле приведения, имеет форму V^{α}, где индекс m не считается в смысле лексикографического расположения, а фиксируется, $m = m^*$, вместе с целым показателем ν, $\nu = \nu^*$, так, чтобы иметь $G^* = P((G^{\tau^\alpha})^{\rho^{m^*}})$ и $G_0^* = \pm (0)IZ^*$, т.е.

$$G_0^* = \pm (0)IABFI^{\alpha}(G^{\tau^\alpha})_{(m^*)}P^{\nu^*}((G^{\tau^\alpha})^{\rho^{m^*}}). \tag{16}$$

Из знаков плюс и минус выберем тот, для которого G_0^* правильная непрерывная дробь.

10.2. Например разложим в правильную непрерывную дробь квадратичную иррациональность $\xi = (-16 - \sqrt{18}) : 17$ или $\xi = (-16 + \sqrt{18}) : 17$, для которой имеем тождество $17\xi^2 + 32\xi + 14 = 0$. В 9.3. имеем вычисленные значения $A = (-1)(0)$, $B = E$, $F = (2)(-3)(0)$, $G = (8)(4)$, $\alpha = 0$, т.е. $(0)IABFI^{\alpha} = (1)(-1)(1)(1)(-3)(0)$ и $P(G^{\tau^\alpha}) = (8)(4)$. Следовательно, в форме общей правильной непрерывной дроби с конечным числом отрицательных множителей $G_\infty = \pm (1)(-1)(1)(1)(-3)(0) \lim\limits_{\nu \to \infty} ((8)(4))^{\nu}$. Взяв $m^* = 1$, $\nu^* = 0$ и знак минус, согласно формуле (16), получим $G_0^* = (-3)(1)(4)$ и $G^* = (4)(8)$. Итак, $G_\infty^* = (-2)(1)(4) \lim\limits_{\nu \to \infty} ((4)(8))^{\nu}$. Употребив формулу (25″) [2], следует, что сопряженная иррациональность $\bar{\xi}$ будет иметь разложение $\overline{G_\infty^*} = (-1)\ (3) \lim\limits_{\nu \to \infty} ((4)(8))^{\nu}$. Сравнив полученные разложения, следует $\xi < \bar{\xi}$, следовательно $\xi = (-16 - \sqrt{18}) : 17$.

10.3. Построение формулы (16) при помощи натуральных непрерывных дробей G, данных в таблице 1, связано с работой [3], посвящённой изучению взаимнооднозначного соответствия между квадратичной иррациональностью ξ и её „ядром'' E, $\xi \longleftrightarrow E$. Вклад данной работы связан со стороной $E \to \xi$.

(*Поступило 16 мая 1966 г.*)

ЛИТЕРАТУРА

1. Дани Э., *Конечные непрерывные дроби* (I), *Ядро непрерывной дроби*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, s. Math.-Phys., fasc. 2, Cluj, 1966.

2. Derasimović B., *Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen*, Math. Zeitschr., **66**, S. 228–239 (1956).

3. Derasimović B., *O verižnim reprezentacijama realnih i nekih kompleksnih kvadratnih irationalnih brojeva*, Математички весник 1 (**16**), стр. 267–283, Београд, 1964.

4. Gauss C. F., *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, Berlin, 1889.

FRACŢII CONTINUE FINITE (II)

Fracţii continue întregi

(Rezumat)

În aceasta a doua parte a lucrării se studiază grupul fracţiilor continue întregi. Fracţie continuă întreagă se numeşte fracţia continuă finită cu cîturi parţiale numere întregi în notaţie matricială. Se construieşte un procedeu de reducere a fracţiilor continue întregi bazat pe scrierea canonică a fracţiilor continue naturale. Fracţie continuă naturală se numeşte fracţia continuă regulată finită cu primul cît parţial pozitiv în notaţie matricială. Cheia procedeului constă în folosirea tabelelor 1 şi 2, care ne permit citirea directă în funcţie de un nucleu minim, legat de fracţia continuă întreagă de redus, atît a fracţiei continue întregi reduse cît şi a transformării simetrice prin care se face această reducere. Contrucţia, în ipoteza cunoaşterii unităţii de bază a ordinului pătratic corespunzător, permite ca să rezolvăm în mod efectiv, în limitele fracţiilor continue finite, următoarele probleme: reprezentarea numerelor prin forme pătratice aritmetice de dicriminant mai mare sau egal cu -4 şi dezvoltarea iraţionalităţilor pătratice reale în fracţii continue regulate infinite periodice.

FRACTIONS CONTINUES FINIES (II)

Fractions continues entières

(Résumé)

Dans cette deuxième partie de notre travail on étudie le groupe des fractions continues entières. On appelle fractions continues entières les fractions continues finies à quotients partiels nombres entiers en notation matricielle. On construit un procédé de réduction des fractions continues entières fondé sur la forme canonique des fractions continues naturelles. On appelle fraction continue naturelle la fraction continue régulière finie ayant le premier quotient partiel positif en notation matricielle. La clé du procédé consiste dans l'emploi des tableaux 1 et 2 qui nous permettent de lire directement — en fonction d'un noyau minima lié à la fraction continue entière à réduire — aussi bien la fraction continue entière réduite que la transformation symétrique par laquelle cette réduction a lieu. Dans l'hypothèse de la connaissance de l'unité de base de l'ordre quadratique correspondant, cette construction nous permet de résoudre d'une manière effective — dans les limites des fractions continues finies — les problèmes suivants: représentation des nombres par des formes quadratiques arithmétiques à discriminant supérieur ou égal à -4 et développement des irrationalités quadratiques réelles sous forme de fractions continues régulières infinies périodiques.

SUR UNE MÉTHODE DE LOCALISATION DES ZÉROS D'UN POLYNÔME

par

WLADYSLAW WRONA (Bydgoszcz)

Dans cette note je généralise le résultat de Ilie Torsan, lequel est donné dans la Note [1]. Je donne aussi les formules récurrentes, que j'applique pour le calcul des valeurs minimales des rayons des cercles de Gerchgorin [2], qui contiennent les zéros du polynôme.

I. Considérons le polynôme

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n \tag{1}$$

aux coefficients complexes. Les zéros du polynôme

$$\begin{aligned} F(z) = (z - \alpha) f(z) = z^{n+1} + (a_1 - \alpha) z^n + (a_2 - \alpha a_1) z^{n-1} + \\ + \dots + (a_n - \alpha a^{n-1}) z - \alpha a_n \end{aligned} \tag{2}$$

sont égaux aux zéros du polynôme (I). La valeur quelconque du paramètre α est aussi le zéro de (2).

Les valeurs caractéristiques de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - \alpha & \dfrac{a_2 - \alpha a_1}{\beta} & \dfrac{a_3 - \alpha a_2}{\beta^2} & \dots & \dfrac{a_n - \alpha a_{n-1}}{\beta^{n-1}} & \dfrac{-\alpha a_n}{\beta^n} \\ -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

où β est un nombre complexe quelconque, se situent dans le domaine $U^{(1)}_{\eta\mu}$, réunion des deux disques d'équations

$$U^{(1)}_{\eta\mu} = \begin{cases} \eta : |z + a_1 - \alpha| \leqslant |a_2 - \alpha a_1| \dfrac{1}{|\beta|} + \dots + |a_n - \alpha a_{n-1}| \dfrac{1}{|\beta|^{n-1}} + |\alpha a_n| \dfrac{1}{|\beta|^n} \\ \mu : |z| \leqslant |\beta|. \end{cases} \tag{4}$$

Ses valeurs caractéristiques sont les mêmes que celles de $F(z)$. Nous écrirons la première inégalité sous la forme suivante:

$$U^{(2)}_{\eta\mu} = \begin{cases} \eta : |z| \leqslant |a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha a_1| \dfrac{1}{|\beta|} + \ldots + |a_n - \alpha a_{n-1}| \dfrac{1}{|\beta|^{n-1}} + |\alpha a_n| \dfrac{1}{|\beta|^n} \\ \mu : |z| \leqslant |\beta| \end{cases} \tag{5}$$

Le rayon de cercle η dans (5), nous le transformerons en appliquant l'inégalité de H ö l d e r [3, p. 37] et nous aurons alors

$$U^{(3)}_{\eta\mu} = \begin{cases} \eta : |z|^p \leqslant [|a_1 - \alpha|^q + \ldots + |\alpha a_n|^q]^{p/q} \left[\dfrac{1 - \dfrac{1}{|\beta|^{np+p}}}{1 - \dfrac{1}{|\beta|^p}} \right] \\ \mu : |z| \leqslant |\beta| \end{cases} \tag{6}$$

Que λ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ soient les zéros du polynôme (I) et que $|\beta| = \max |\lambda_i| = |z| > 1$, alors (6) nous pouvons écrire:

$$|z| \leqslant \{1 + [|a_1 - \alpha|^q + |a_2 - \alpha a_1|^q + \ldots + |a_n - \alpha a_{n-1}|^q + |\alpha a_n|^q]^{p/q}\}^{1/p}. \tag{7}$$

De cette façon nous avons obtenu l'estimation donnée dans [I].

Posant dans le (4) $\alpha = 1$, $\beta = 1$ nous aurons une modification certaine de la localisation des zéros du polynôme. qu, a donnée M. P a r o d i dans le [4].

$$U^{(4)}_{\eta\mu} = \begin{cases} \eta : |z + a_1 - 1| \leqslant |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_n - a_{n-1}| + |a_n| \\ \mu : |z| \leqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

II. Maintenant nous calculons les valeurs des paramètres α et β. Nous transformons le rayon du cercle η dans (4) en appliquant l'inégalité de Hölder:

$$|a_2 - \alpha a_1| \frac{1}{|\beta|} + \ldots + |\alpha a_n| \frac{1}{|\beta|^n} \leqslant [|a_2 - \alpha a_1|^q + \ldots + |\alpha a_n|^q]^{1/q} \left[\frac{1}{|\beta|^p} + \ldots + \frac{1}{|\beta|^{np}} \right]^{1/p} \tag{9}$$

Considérons l'expression

$$|a_2 - \alpha a_1|^q + \ldots + |a_n - \alpha a_{n-1}|^q + |\alpha a_n|^q \tag{10}$$

Soit

$$a_k = q_k + ih_k \text{ et } p = q = 2. \tag{II}$$

De (10) et (11) nous avons

$$|(q_2 + ih_2) - \alpha(q_1 + ih_1)|^2 + |(q_3 + ih_3) - \alpha(q_2 + ih_2)|^2 + \ldots + |\alpha(q_n + ih_n)|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} (q_k^2 + h_k^2) - 2\alpha \sum_{k=1}^{n} (q_k q_{k+1} + h_k h_{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} (q_k^2 + h_k^2).$$

L'expression (10) réalise son minimum, si

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (q_k q_{k+1} + h_k h_{k+1})}{\sum_{k=1}^{n} (q_k^2 + h_k^2)} . \tag{IIa}$$

Calculant les valeurs du paramètre β, nous nous bornons au cas où il existe la valeur réelle et positive du paramètre β pour laquelle les cercles (4) n'ont pas de points communs, c'est-à-dire :

$$A_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta^i} > \beta, \text{ où} \tag{12}$$

$$A_0 = |a_1 - \alpha|, \; A_i = |a_{i+1} - \alpha a_i| (i = 1, 2, \ldots, n-1), \; A_n = |\alpha a_n|.$$

La résolution de l'inégalité (12) est équivalente à la double localisation des zéros. Si nous calculons deux valeurs extrémales de paramètre, alors les cercles (4) seront tangents.

Nous écrirons l'inégalité (12) dans la forme suivante :

$$\beta_2 - A_0\beta + A_1 < -\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta^{i-1}} \tag{13}$$

Alors l'inégalité (13) est satisfaite, si

$$-\frac{A_0^2 - 4A_1}{4} < -\sum_{i=2}^{n} \frac{A_i}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^{i-1}} .$$

Par transformation nous avons

$$A_0 > 2\sqrt{\sigma} \text{ où } \sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^{i-1}} . \tag{14}$$

Considérons deux fonctions

$$\omega(\beta) = \beta^2 - A_0\beta + A_1 \text{ et } \Omega(\beta) = -\sum_{i=2}^{n} \frac{A_i}{\beta^{i-1}} . \tag{15}$$

Nous désignons des zéros de la fonction $\omega(\beta)$ par m_1 et m_2. Au cas où $A_1 = 0$ nous remplaçons la valeur m_1 par m_1' telle que

$$m_1' < \frac{1}{2} A_0 \text{ et } \omega(m_1') > \Omega(m_1').$$

Admettons que (14) soit satisfait, alors les fonctions $\omega(\beta)$ et $\Omega(\beta)$ ont deux points communs, dont nous désignons des arguments par g_1 et $g_2 (g_1 < g_2)$.

Maintenant nous nous occuperons de l'inégalité

$$\beta^2 - A_0\beta + A_1 - \Omega(\beta) < 0. \qquad (16$$

Il faut calculer la valeur β, pour laquelle

$$\beta^2 - A_0\beta + A_1 - \Omega(\beta) = 0. \qquad (17$$

La plus grande racine de l'équation (17) est

$$\beta = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(\beta)]}\right).$$

Soit $\beta_0 = \frac{1}{2} A_0$, alors

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4\left[A_1 - \Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right)\right]}\right)$$

En conséquence

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(\beta_1)]}\right)$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(\beta_{i-1})]}\right), \quad (i = 0,1,2, \ldots), \quad \beta_0 = \frac{1}{2} A_0. \qquad (18$$

Parce que $\alpha_0 = \frac{1}{2} A_0$, alors $-\Omega(\beta_0) < -\Omega(g_2)$.
D'où $\beta_0 < \beta_1 < g_2$. Parce que aussi $-\Omega(\beta_0) > -\Omega(\beta_1) > -\Omega(g_2)$,

$$\text{alors } \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots . < \beta_i < \ldots < g_2. \qquad (19$$

La suite (19) est croissante et bornée, alors elle possède une limite. Nous noton que la limite de cette suite est g_2, parce que

$$g_2 = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(g_2)]}\right).$$

Pour toute valeur β_i, définie par la formule (18), l'inégalité (16) est satisfaite, alor (12) est vrai.
Les zéros du polynôme (I) dont les coefficients remplissent la condition (14) s situent dans la réunion des cercles:

$$\bigcup_{\eta^\mu}^{(5)} = \begin{cases} \eta : |z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i \\ \mu : |z| \leqslant \beta_i \end{cases} \qquad (20$$

Pour calculer la plus petite racine de l'équation (17), nous menons la ligne droit

$$\psi(\beta) = \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)}{\frac{1}{2} A_0 - m_1}(\beta - m_1) + \Omega(m_1). \qquad (21$$

par des points $A(m_I, \Omega(m_I))$ et $B\left(\frac{I}{2} A_0, \Omega\left(\frac{I}{2} A_0\right)\right)$.

Nous remplaçons l'équation (17) par l'équation

$$\omega(\beta) = \psi(\beta), \text{ où}$$

$$\beta^2 - \left(A_0 + \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)}{\frac{1}{2} \cdot A_0 - m_1}\right) \beta + A_1 - \Omega(m_1) + \frac{\left[\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)\right] m_1}{\frac{1}{2} A_0 - m_1} = 0. \quad (22)$$

Nous calculons maintenant la plus petite racine de l'équation (22)

$$\beta_1' = \frac{1}{2} \left\{ A_0 + \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)}{\frac{1}{2} A_0 - m_1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(A_0 + \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)}{\frac{1}{2} A_0 - m_1}\right)^2 - 4\left(A_1 - \Omega(m_1) + \frac{\left[\Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right) - \Omega(m_1)\right] m_1}{\frac{1}{2} A_0 - m_1}\right)} \right\}.$$

Pour calculer β_2' nous remplaçons en (21) le point $B\left(\frac{1}{2} A_0, \Omega\left(\frac{1}{2} A_0\right)\right)$ par le point $C(\beta_1', \Omega(\beta_1'))$. En conséquence nous remplaçons le point C par le point $D(\beta_2', \Omega(\beta_2'))$, e.t.c. Généralement nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \beta_j = \frac{1}{2} \left\{ A_0 + \theta(\beta_{j-1}) - \sqrt{[A_0 + \theta(\beta_{j-1})]^2 - 4[A_1 - \Omega(m_1) + m_1 \theta(\beta_{j-1})]} \right\} \\ \text{où } \theta(\beta) = \frac{\Omega(\beta) - \Omega(m_1)}{\beta - m_1}, \ (j = 0, 1, 2, \ldots), \ \beta_0 = \frac{1}{2} A_0. \end{cases} \quad (23)$$

L'examen des formules (15), (21) et (23) montre que si $j \to \infty$, alors $\beta_j \to g_1$. Utilisant des valeurs β_j définies par la formule (23) nous pouvons fixer le domaine $\bigcup_{\eta\mu}^{(6)}$ dans lequel se trouvent les zéros du polynôme (I)

$$\bigcup_{\eta,\mu}^{(6)} = \begin{cases} \eta : |z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_j \\ \mu : |z| \leqslant \beta_j. \end{cases} \quad (24)$$

De cette façon nous avons démontré le théorème suivant:

THEOREME. Les zéros du polynôme (I) qui a les coefficients complexes satisfaisant à l'inégalité (14) se situent dans la réunion des cercles

$$\bigcup_{\eta,\mu} = \begin{cases} \eta : |x + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i \\ u : |z| \leqslant \beta_j \end{cases}$$

où β_i et β_j sont définis par les formules (18) et (23), mais nous calculons A_0, A_I, ..., A_n par des formules (II), (II a) et (12).

De cette note et du théorème de Brauer [3, p. 71] nous tirons les conséquences suivantes:

COROLLAIRE 1. Si les coefficients du polynôme (1) satisfont à la condition (14), alors $f(z)$ a un zéro dans le cercle

$$\eta : | z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i$$

et $n - 1$ des zéros dans le cercle

$$\mu : |z| \leqslant \beta_j.$$

Le corollaire 1 généralise et améliore les résultats respectifs de M. Parodi, la note [5] et de A. Ostrowski, de la note [7].

COROLLAIRE 2. Si les coefficients du polynôme (I) sont entiers et satisfont à l'inégalité

$$A > 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i \tag{25}$$

alors $f(z)$ est le polynôme irréductible dans le corps des nombres rationnels.
En effet : le polynôme aux coefficients entiers est irréductibile si $n - I$ de ses zéros se situent dans le cercle au rayon $r = I$ et un zéro se trouve en dehors de ce cercle [6].
Si les coefficients du polynôme sont entiers et que

$$\omega(1) < \Omega(1) \text{ et } A_0 \geqslant 2 \text{ où} \begin{cases} \omega(\beta) = \beta^2 - A_0\beta + A_1 \\ \Omega(\beta) = -\sum_{i=2}^{n} \frac{A_i}{\beta^{i-1}} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$1 - A_0 + A_1 < -\sum_{i=2}^{n} A_i,$$

d'où

$$A_0 > 1 + \sum_{i=1} A_i,$$

alors le polynôme $f(z)$ est irréductible.
La condition (25) est la généralisation du résultat analogue de Perron [6] et de Parodi [5] concernant le critérium d'irréductibilité des polynômes.

(Manuscrit reçu le 28 février 1967)

BIBLIOGRAPHIE

1. Ilie Torsan, *Asupra limitării în modul a rădăcinilor ecuațiilor algebrice*, Studia Universitatis Babeş Bolyai, Series Mathematica-Physica (1965) **10**, nr. 2, 25–29.
2. S. A. Gerchgorin, *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Isw. Akad. Nauk. SSSR otde. mat. estestvennych (1931) 749–754.
3. M. Parodi, *Lokalizacija charakterističeskich čisel matric i ejo primenenija*, Izdatel'stvo inostranno literatury, Moskva, 1960, pp. 37–71.
4. Parodi, M. *Sur la localisation de zéros des polynômes dont les coefficients ont des valeurs voisines*, Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, **84**, 1960, p. 65–73.

5. M. Parodi, *Sur quelques propriétés des polynômes*, Bulletin des sciences mathématiques, 1956, **80**, 76–81.
6. O. Perron, *Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen*, J. de Crelle, **132** (1907), 288–307.
7. A. Ostrowski, *Über einige Sätze von Herrn M. Parodi*, Mathematische Nachrichten, 1958, **19**, nr. 1–6, 331–338.

DESPRE O METODĂ DE LOCALIZARE A ZEROURILOR UNUI POLINOM

(Rezumat)

În această lucrare se dă o îmbunătățire a rezultatelor obținute de I. Torsan în [1].
Fie $f(z)$ polinomul

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

definit peste corpul numerelor complexe. Fie α un parametru

$$A_0 = |a_1 - \alpha|,\ A_i = |a_{i+1} - \alpha a_i|(i = 1, 2, \ldots, n-1),\ A_n = |\alpha a_n| \tag{1}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^{i-1}}, \qquad a_k = q_k + ih_k \qquad \alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(q_kq_{k+1} + h_kh_{k+1}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left(q_k^2 + h_k^2\right)}$$

Se arată că:
Teoremă. Dacă coeficienții a_i satisfac inegalitatea

$$A_0 > 2\sqrt{\sigma} \tag{14}$$

atunci rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt situați în reunirea cercurilor

$$|z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i \quad \text{și} \quad |z| \leqslant \beta_f$$

unde

$$\beta_0 = \frac{1}{2}A_0 \text{ și } \beta_i = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(\beta_j)]}\right) \text{ și}$$

$$\beta_j = \frac{1}{2}\{A_0 + \Theta(\beta_{j-1}) - \sqrt{[A_0 + \Theta(\beta_{f-1})]^2 - 4[A_1 - \Omega(m_1) + m_1\Theta(\beta_{j-1})}\}$$

și $\Omega(\beta) = -\sum_{i=2}^{n}\frac{A_i}{\beta^{i-1}}$, $\Theta(\beta) = \frac{\Omega(\beta) - \Omega(m_1)}{\beta - m_1}$, iar m_1 este rădăcină a polinomului $\beta^2 - A_0\beta + A_1$.

Consecințe ale acestui rezultat sînt:
Corolar 1. Dacă coeficienții polinomului (1) satisfac condiția (14), atunci $f(z)$ are o rădăcină în cercul

$$|z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i$$

și $n-1$ rădăcini în cercul

$$|z| \leqslant \beta_j$$

Acest rezultat generalizează și îmbunătățește rezultate ale lui M. Parodi [5] și A. Ostrowski [7].
Corolarul 2. Dacă coeficienții polinomului (1) sînt numere întregi și satisfac inegalitatea

$$A_0 < 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$$

atunci $f(z)$ este ireductibil în corpul numerelor raționale.
Acest rezultat generalizează rezultate ale lui M. Parodi [5] și O. Perron [6].

О МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА

(Резюме)

Автор даёт улучшение результатов, полученных И. Торсаном в [1].

Пусть $f(x)$ многочлен

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (1),$$

определяемый над телом комплексных чисел. Пусть α параметр

$$A_0 = |a_1 - \alpha|, \quad A_i = |a_{i+1} - \alpha a_i| \quad (i = 1,2, \ldots, n-1), \quad A_n = |\alpha a_n|$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^{i-1}}, \qquad a_k = q_k + ih_k \qquad \alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(q_kq_{k+1} + h_kh_{k+1}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left(q_k^2 + h_k^2\right)}$$

Показано, что:

Теорема. Если коэффициенты a_i удовлетворяют неравенству

$$A_0 < 2\sqrt{\sigma} \qquad (14),$$

то корни многочлена $f(x)$ расположены в объединении кругов

$$|z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i \text{ и } |z| \leqslant \beta_j$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{2}A_0 \text{ и } \beta_i = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4[A_1 - \Omega(\beta_{i-1})]}\right) \text{ и}$$

$$\beta_j = \frac{1}{2}\left\{A_0 + \Theta(\beta_{j-1}) - \sqrt{[A_0 + \Theta(\beta_{j-1})]^2 - 4[A_1 - \Omega(m_1) + m_1\Theta(\beta_{j-1})]}\right\}$$

и $\Omega(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta^{i-1}}$, $\Theta(\beta) = \frac{\Omega(\beta) - \Omega(m)}{\beta - m_1}$ а m_1 — корень многочлена $\beta^2 - A_0\beta + A_1$.

Этот результат имеет следующие следствия:

Следствие 1. Если коэффициенты многочлена (1) удовлетворяют условию (14), то $f(z)$ имеет один корень в круге

$$|z + A_0| \leqslant A_0 - \beta_i$$

и $n-1$ корней в круге $|z| \leqslant \beta_j$

Этот результат обобщает и улучшает результаты М. Пароди [5] и А. Островского [7].

Следствие 2. Если коэффициенты многочлена (1) целые числа и удовлетворяют неравенству

$$A_0 > 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$$

то $f(z)$ несокращаема в теле рациональных чисел.

Этот результат обобщает результаты М. Пароди [5] и О. Перрона [6].

CONSIDÉRATIONS DIRECTES SUR LA GÉNÉRATION DES NOEUDS (II)

par

GEORGE CĂLUGĂREANU

de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Dans un travail antérieur [1] nous avons montré que chaque noeud N de S^3 peut être tracé sur une surface fermée S orientable et en position normale dans S^3, de manière que N divise S en deux domaines disjoints. On dit que S est en position normale dans S^3 si S est plongée dans S^3 de manière à diviser S^3 en deux domaines homéomorphes entre eux. Dans ce qui suit, nous voulons indiquer un procédé de construction des courbes fermées simples N qui divisent une telle surface S en deux domaines, en utilisant des systèmes de courbes simples qui ne divisent pas la surface S. Ce procédé résulte aussi d'un théorème de H. Zieschang [2, p. 38]; nous y établissons un équivalent de la seconde partie de ce théorème par des moyens directs.

1. *Courbes fermées simples séparatrices. Graphes complémentaires.* N étant un noeud de S^3, de type quelconque, il existe une surface fermée orientable S, en position normale dans S^3, sur laquelle N se trouve tracé de manière à diviser cette surface en deux domaines. Nous dirons que N est une courbe simple séparatrice sur S. Le type de N étant donné, le genre p de S ne pourra être inférieur à une valeur minima $p_0(N)$, que nous appelons *genre normal* de N. Supposons N tracé sur une surface S de genre $p_0(N)$ (coussin à p_0 trous). Nous pouvons prendre S sous une forme canonique, cette surface étant placée symétriquement par rapport à un plan Π qui coupe S suivant p_0+1 courbes fermées $C_0, C_1, \ldots, C_{p_0}$ (fig. 1). De plus, on suppose S placée symétriquement par rapport à un second plan Π' orthogonal à Π, et Π' coupant S suivant p_0+1 courbes fermées $C'_0, C'_1, \ldots, C'_{p_0}$.

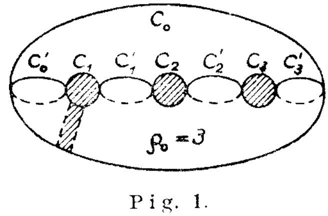


Fig. 1.

Dans ces conditions, N étant tracé sur S, N devra traverser effectivement chaque courbe C_i, $i = 0, 1, \ldots p_0$, car, si une courbe C_i n'était pas traversée par N, le trou de S correspondant à C_i pourrait être comblé, donc supprimé, et le genre $p_0(N)$ pourrait être diminué, contrairement à sa définition. De même, on voit que N doit traverser chacune des courbes C'_i, $i = 0, 1, \ldots, p_0$, sans quoi le genre $p_0(N)$ pourrait encore être diminué en pratiquant dans S une coupure (hachurée sur la fig. 1) par deux plans parallèles et rapprochés, orthogonaux à Π, de manière à supprimer un trou de S. Désignons par S_1 la partie de S qui se trouve au-dessus de Π, et par S_2 la partie située au-dessous de Π.

Le noeud N divise S en deux domaines disjoints. Soit Δ l'un de ces domaines (hachuré sur la fig.2, *a*). Le plan Π divise Δ en plusieurs domaines Δ_k situés sur S_1 ou S_2. La frontière de l'un de ces domaines est formée d'un certain nombre d'arcs appartenant à N, et d'un certain nombre d'arcs appartenant aux courbes C_i. Chacun des arcs appartenant à N joint un point d'une courbe C_i à un point appartenant à une C_j. Dans chaque domaine Δ_k choisissons un point intérieur P_k, et sur chaque arc appartenant à une courbe C_i, situé sur la frontière de Δ_k, choisissons un point Q_k^r. Joignons chaque Q_k^r à P_k par un arc dans Δ_k, deux de ces arcs ayant en commun le point P_k seulement. Les points Q_k^r seront les mêmes pour les domaines Δ_k appartenant aux deux moitiés S_1 et S_2 de S (fig. 2 ; *b*, *c*). Les arcs ainsi construits forment alors un graphe Γ intérieur à Δ (fig. 2 ; *d*), qui est un rétracte de déformation de Δ. Un graphe analogue peut être construit à l'intérieur du second domaine que N détermine sur S, et ces deux graphes seront appelés ,,graphes complémentaires de N sur S''. Dans ce qui suit, il suffira de considérer l'un quelconque de ces graphes, que nous désignerons par Γ. Alors $S - \Gamma$ forme un domaine unique, dont le bord est une courbe fermée isotope (sur S) à N. Cette propriété n'est pas altérée si l'on supprime, sur Γ, chaque arc ayant une extrémité libre. De plus, si Γ possède plusieurs points de ramification (points en lesquels se rencontrent un nombre $\geqslant 3$ d'arcs simples appartenant à Γ), on peut déformer Γ de manière qu'il possède un seul point de ramification. A cet effet, choisissons un point de ramification de Γ, soit m (fig. 2 ; *d*, *e*). Si, à partir de m, on parcourt un arc de Γ qui mène à un autre point de ramification m', on pourra raccourcir successivement l'arc mm' sur S (et rallonger en conséquence les arcs qui aboutissent en m') de manière à amener m' en m. Cette opération ne change pas la classe d'isotopie du bord de Γ. En effectuant cette opération pour chacun des arcs qui partent de m, on obtient un graphe Γ à un seul point de ramification m (fig. 2 ; *e*, *f*). Γ se compose alors d'un certain nombre d'arcs tracés sur S, ayant leurs extrémités en m.

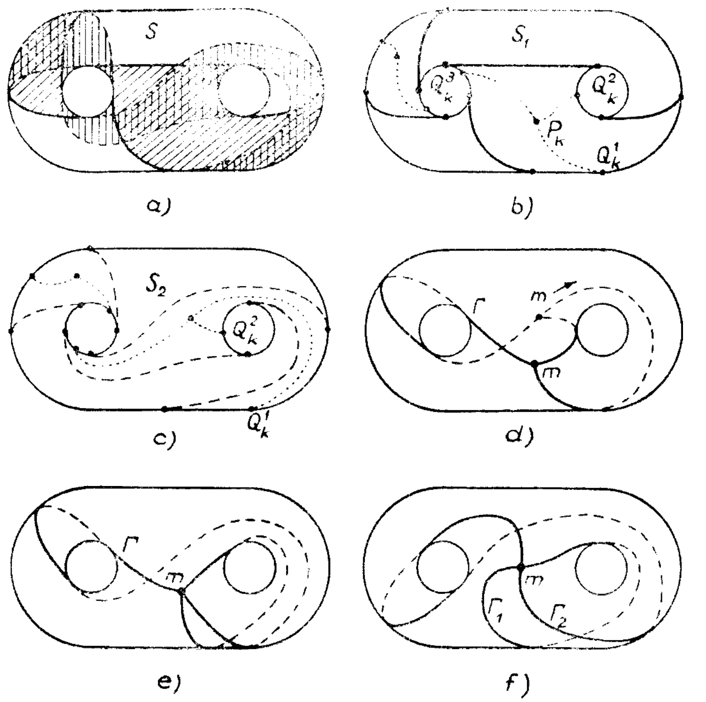


Fig. 2.

Si l'on remplace chacun de ces arcs par un ruban mince placé sur S, on obtient une surface de Seifert dont le bord est une courbe isotope à N, avec cette différence que notre surface est placée sur une surface fermée orientable en position normale dans S^3.

Si l'on a en vue d'obtenir un procédé de construction des noeuds de S^3, on peut donc se limiter à la formation des graphes Γ situés sur S, et formés de courbes simples sur S, concourantes en un point m et deux-à-deux disjointes en dehors de m. Nous appellerons *gerbe sur* S un tel assemblage de courbes.

2. *Gerbes admissibles.* Une gerbe sur S détermine un noeud unique si son bord ne se décompose pas en plusieurs courbes. Nous dirons donc qu'une gerbe Γ est *admissible* si son bord est une courbe unique. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une gerbe soit admissible.

Si une gerbe admissible Γ est formée de n courbes simples C_i passant par m et disjointes en dehors de m, il est clair que chaque courbe C_i prise séparément ne divise pas la surface S, puisque Γ ne doit pas diviser S. Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour que Γ soit admissible. Soit γ une courbe fermée simple qui est la frontière d'un petit disque sur S, contenant le point m à son intérieur. Choisissons un sens positif de parcours sur γ et marquons par les indices $1, 2, \ldots, 2n$ les points d'intersection des courbes C_i avec γ, l'ordre de succession de ces points sur γ coïncidant avec l'ordre naturel des indices. A chaque k de cette suite il correspond un indice $\varphi(k)$ si l'on convient que k et $\varphi(k)$ représentent les deux points d'intersection de la courbe C_k avec γ, pour $k = 1, 2, \ldots, 2n$. L'application φ est une permutation de la suite $1, 2, \ldots, 2n$ et se décompose en cycles binaires (à deux éléments), donc $\varphi\varphi(k) = k$. Marquons, au voisinage de γ, les bords de chaque C_k des signes $+$ et $-$, ces signes se suivant alternativement le long de γ (fig. 3). On voit alors que, en parcourant le bord de Γ dans un sens convenable, on sort de γ sur le bord $+$ de C_k et l'on rentre dans γ sur le bord $-$ de $C_{\varphi(k)}$, on ressort de γ sur le bord $+$ de $C_{\varphi(k)-1}$ et l'on rentre sur le bord $-$ de $C_{\varphi[\varphi(k)-1]}$, etc. En posant $i_0 = 1$, $i_1 = \varphi(i_0)$, $i_2 = i_1 - 1$, $i_3 = \varphi(i_2)$, $i_4 = i_3 - 1, \ldots$, $i_{2s+1} = \varphi(i_{2s})$, $i_{2s+2} = i_{2s+1} - 1, \ldots$ on voit que, si le bord de Γ est une courbe unique, la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{4n}$ doit épuiser deux fois la suite $1, 2, \ldots, 2n$, les deux bords de chaque C_i devant être parcourus, chacun une seule fois. En posant $\psi(k) = k - 1$ pour $k > 1$, $\psi(1) = 2n$, la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{4n}$ se décompose en

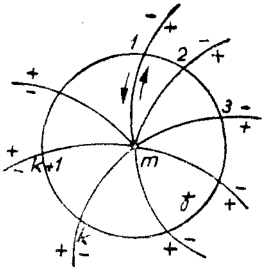


Fig. 3.

$$\begin{gathered}\varphi(1), \quad \varphi\psi\varphi(1), \ldots \varphi(\psi\varphi)^k(1) \ldots \varphi(\psi\varphi)^{2n-1}(1) \\ \psi\varphi(1), \quad (\psi\varphi)^2(1), \ldots (\psi\varphi)^{k+1}(1) \ldots (\psi\varphi)^{2n}(1).\end{gathered} \tag{1}$$

Cette suite doit contenir deux fois chaque nombre naturel de 1 à $2n$. On voit que la seconde ligne de (1) donne les points-sortie sur les bords $+$ des C_i, tandis que la première donne les points-rentrée sur les bords $-$. Chacune des deux lignes de (1) doit alors épuiser la suite $1, 2, \ldots, 2n$ (mod. $2n$). Or, puisque $\psi(k) = k - 1$, il suffit que l'une de ces lignes vérifie cette condition pour que l'autre la vérifie aussi. Eu regard à la seconde ligne de (1), cela signifie que la permutation $\psi\varphi$ doit former un cycle unique. Posons $P = \psi\varphi$, $\varphi = \psi^{-1}P$. Si $P = (a_1 a_2 \ldots a_{2n})$, les a_i étant des nombres naturels distincts, entre 1 et $2n$, on a

$$\varphi = \psi^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_2 + 1 & a_3 + 1 & \ldots & a_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de trouver les cycles P à $2n$ éléments tels que la permutation φ correspondante se décompose en n cycles binaires. Donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Si φ se décompose en cycles binaires, soit

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1}+1 & a_{j+1}+1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

un de ces cycles. On a

$$a_i = a_{j+1} + 1 \ (\text{mod. } 2n), \ a_j = a_{i+1} + 1 \ (\text{mod. } 2n). \tag{3}$$

A chaque i entre 1 et $2n$ il doit correspondre un j entre 1 et $2n$ de manière que (3) soit vérifiée. Cette condition suffit pour que φ se décompose en cycles binaires. La détermination des permutations P jouissant de cette propriété peut être intéressante, mais l'application d'une autre opération, de caractère plus géométrique, nous dispense de poursuivre ce problème sur les permutations, dont les solutions sont assez nombreuses.

La construction d'une gerbe admissible Γ comporte deux étapes distinctes. La première consiste à grouper les points 1, 2, ..., $2n$ marqués sur γ en n couples $(k, \varphi(k))$, où φ vérifie la condition ci-dessus. Toute solution de ce problème détermine une *indicatrice admissible* pour la gerbe Γ. En joignant m aux points marqués 1, 2, ..., $2n$ sur γ par des rayons sur S, l'indicatrice fait correspondre à chaque rayon k un rayon conjugué $\varphi(k)$. La seconde étape consiste à joindre les extrémités des rayons conjugués par des arcs de courbes tracées sur S, de manière que ces n arcs soient deux-à-deux disjoints. La gerbe Γ ainsi construite sera admissible, car $S - \Gamma$ est alors un domaine unique.

Nous définirons une opération, appelée *opération A*, telle que, étant donnée une indicatrice admissible, l'application de A nous permet d'en déduire une autre indicatrice admissible ; de plus, toute indicatrice admissible (pour n fixé) peut être déduite de l'une d'elles par application répétée de l'opération A.

Soit Γ une gerbe admissible, et (i, j), $j = \varphi(i)$ un couple d'indices conjugués. Les extrémités des rayons i et j se trouvent donc joints par un arc simple sur S, situé à l'extérieur du disque γ.

Remplaçons le rayon $i - 1$ par un arc de courbe intérieur à γ qui joint le point $i - 1$ (sur γ) à un point P du rayon i (fig. 4 ; b) sur le bord $-$ de ce rayon, puis, en faisant glisser le point P sur la courbe qui joint i à j sur S, prolongeons l'arc $(i - 1, P)$ par une courbe sur S assez voisine de la précédente pour qu'elle ne rencontre aucune courbe de la gerbe. La point P arrivera sur le rayon j (fig. 4, c) et, finalement, sera ramené en m, le rayon $i - 1$ se trouvant déplacé entre les rayons j et $j + 1$. Il est clair que cette transformation de la gerbe Γ entraîne une déformation isotope du bord de Γ, et la nouvelle indicatrice ainsi obtenue est encore admissible. Telle est notre opération A. Elle peut être appliquée aussi en prenant P sur le bord $+$ du rayon i, ce qui perment de déplacer le rayon $i + 1$ entre $j - 1$ et j.

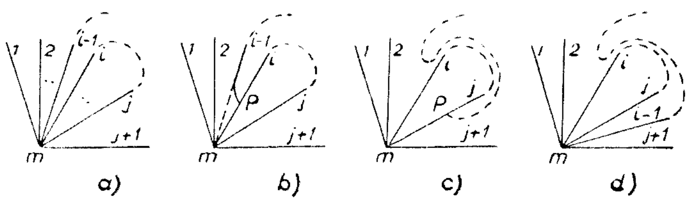


Fig. 4.

Remarquons que si Γ est admissibile, et i, j sont conjugués, il existe entre i et j un indice k dont le conjugué n'est pas entre i et j, sans quoi le bord de Γ ne formerait pas une courbe unique, et Γ ne serait admissible. Supposons, pour fixer les idées, $i < k < j$. Si $\varphi(k) < i$, déplaçons successivement les rayons $i-1$, $i-2, \ldots, \varphi(k)+1$ entre j et $j+1$ par l'opération A. Il ne restera alors aucun rayon entre $\varphi(k)$ et i (fig. 5, *a*). Déplaçons ensuite les rayons $i+1$, $i+2, \ldots$, $k-1$ sur le bord $+$ du rayon i, ce qui amène ces rayons entre $j-1$ et j (fig. 5, *b*), et continuons avec les rayons situés entre k et j que nous déplacerons sur le bord $+$ de k, ce qui amène ces rayons entre $\varphi(k)-1$ et $\varphi(k)$ (fig. 5, *c*). On obtient de cette manière un quadruplet k, $\varphi(k)$, i, j aucun rayon n'existant plus entre $\varphi(k)$ et i, ou entre i et k, ou entre k et j. Les rayons k, $\varphi(k)$ se trouvent joints par une courbe sur S, de même que les rayons i et j. D'ailleurs, notre hypothèse $\varphi(k) < i$ peut toujours être réalisée par un changement circulaire des indices $1, 2, \ldots, 2n$. En laissant inchangé le quadruplet déjà formé, on pourra ensuite reprendre les opérations sur les rayons restants, ce quadruplet permettant le passage du point mobile P d'un côté ou de l'autre du quadruplet. On arrivera ainsi à la formation de plusieurs quadruplets et, si n était impair, on obtiendrait finalement un couple de rayons consécutifs conjugués, donc joints par une courbe sur S. Mais alors le bord de Γ serait composé de plusieurs courbes, et Γ ne serait pas admissible. Il en résulte que *n est nécessairement un nombre pair* si Γ est admissible.

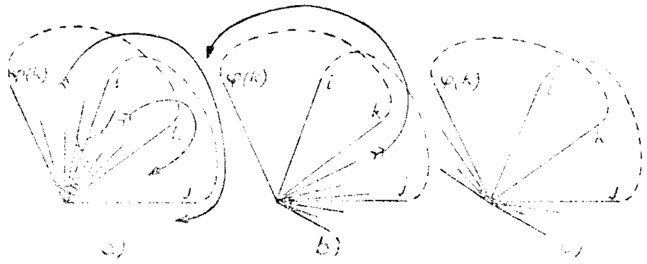


Fig. 5.

Ainsi, une gerbe admissible est formée d'un nombre pair de courbes C_i et, par application répétée de l'opération A, l'indicatrice peut être ramenée à la forme canonique d'une suite de quadruplets $(k, k+2)$, $(k+1, k+3)$, les indices entre parenthèses étant conjugués. On peut aussi employer une autre forme canonique $(k, k+n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, qui a l'avantage de posséder la symétrie de rotation autour de m. Dans ce cas, deux courbes quelconques C_i, C_j de la gerbe se traversent au point m.

Il en résulte que chaque courbe simple séparatrice sur S appartient à une classe d'homotopie de la forme $w_1 w_2 \ldots w_{2q} w_1^{-1} w_2^{-1} \ldots w_{2q}^{-1}$, $w_1, \ldots, w_{2q}$ représentant des classes d'homotopie qui contiennent des courbes simples, et ces courbes pouvant être choisies de manière à passer par un point m de S, sans avoir deux-à-deux un autre point en commun. On peut encore caractériser ces courbes par $w_1 w_2 w_1^{-1} w_2^{-1} \ldots w_{2q-1} w_{2q} w_{2q-1}^{-1} w_{2q}^{-1}$, ce qui nous ramène au théorème cité de H. Zieschang.

En ce qui concerne le choix de l'indicatrice, on voit que l'on peut toujours se contenter de l'indicatrice symétrique $(k, k+2q)$, $k = 1, 2, \ldots, 2q$, sans perte de généralité. Si S est de genre p, toute gerbe admissible à $2p$ courbes forme un système de coupures canoniques de S, $S - \Gamma$ étant homéomorphe à un disque.

Pour la construction effective des gerbes admissibles un second problème se pose : joindre les extrémités des rayons opposés de l'indicatrice par des arcs simples de S, deux-à-deux disjoints, et cela de toutes les manières possibles. La solution de ce problème est fournie par les résultats de M. Dehn [**3**] sur les rétrosections (Selbstverbindungen) d'une surface fermée de genre p avec un bord (la courbe γ). De même que le problème des classes d'homotopie de S qui contiennent des courbes simples, ce problème revient à la détermination des automorphismes du groupe fondamental $\pi_1(S)$. En représentant ce groupe à l'aide de $2p$ générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$, liés par la relation symétrique

$$g_1 g_1 \ldots g_{2p} g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_{2p}^{-1} = 1$$

nous avons donné [4] les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mot $h = g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \ldots g_{i_n}^{\alpha_n}$ représente une classe d'homotopie de S contenant des courbes simples. Ces conditions sont données par $n(n-1)/2$ inégalités de nature arithmétique concernant les suites d'entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Or, la méthode qui nous a conduit à ce résultat s'étend sans modification essentielle au problème de la détermination des automorphismes de $\pi_1(S)$; l'étude de ce dernier problème fera l'objet de notre prochain travail.

(Manuscrit reçu le 20 février 1967)

BIBLIOGRAPHIE

1. Călugăreanu G., *Considérations directes sur la génération des noeuds tridimensionnels.* Revue roum. de math.p.et appl., **10**, 389–403 (1965).
2. Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen.* Mathematica Scandinavica, **17**, 17–40 (1965).
3. Dehn M., *Die Gruppe der Abbildungsklassen.* Acta math., **69**, 135–206 (1938).
4. Călugăreanu G., *Courbes fermées simples sur une surface fermée orientable.* Mathematica (Cluj) (en cours d'impression).

CONSIDERAȚII DIRECTE ASUPRA GENERĂRII NODURILOR (II)

(Rezumat)

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că orice nod N din S³ poate fi trasat pe o suprafață închisă orientabilă S în poziție normală în S³, astfel incît N să o dividă în două domenii disjuncte. S este în poziție normală în S³ dacă S divide spațiul S³ în două domenii omeomorfe. Se dă aci un procedeu de construcție a curbelor închise simple N care divid suprafața S în două domenii disjuncte, regăsindu-se astfel și o parte a unei teoreme datorite lui H. Zieschang [2] prin mijloace mai directe. Se definesc grafele complementare unui nod trasat pe S ca retracte de deformare ale celor două domenii complementare lui N pe S. Se introduce apoi noțiunea de jerbă admisibilă, caracterizată prin indicatricea corespunzătoare. Analiza proprietăților acestor indicatrice conduce direct la procedeul de construcție căutat, și permite determinarea claselor de omotopie din π_1(S) care conțin curbe simple separatoare pe S.

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ГЕНЕРИРОВАНИИ УЗЛОВ (II)

(Резюме)

В предыдущей работе (1) показано, что любой узел N из S^3 можно начертить на ориентируемой закрытой поверхности S в нормальном положении в S^3 так, чтобы N разделял её на две непересекающиеся области. S находится в нормальном положении в S^3, если S разделяет пространство S^3 на две гомеоморфные области. Даётся способ построения простых закрытых кривых N, разделяющих поверхность S на две непересекающиеся области и, таким образом, снова находится и часть одной теоремы Г. Цишанга (2) более прямыми средствами. Определяются дополнительные графы одного узла, начерченного на S как деформационные ретракты двух дополнительных областей кривой N на S. Вводится затем понятие допустимого пучка, характеризующегося соответствующей индикатрисой. Анализ свойств этих индикатрис непосредственно приводит к искомому способу построения и позволяет определить классы гомотопии из (S), содержащие разделяющие простые кривые на S.

DESPRE UNELE PROPRIETĂŢI ALE STELELOR FAMILIILOR DE MULŢIMI

de

PETER KESSLER

§ 1. Cu S vom nota o mulţime oarecare de elemente şi cu $\mathcal{P}(S)$ mulţimea părţilor lui S. Elementele lui S le vom nota cu litere mici, elementele lui $\mathcal{P}(S)$ cu litere mari, iar elementele lui $\mathcal{P}^2(S)$ cu litere rotunde. Prin familie de mulţimi se înţelege orice submulţime a lui $\mathcal{P}(S)$. Acoperire a lui S va fi orice familie de mulţimi a căror reuniune este S. O acoperire formată din mulţimi două cîte două disjuncte o vom numi partiţie.

Pentru două familii de mulţimi $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ se defineşte e-incluziunea în felul următor: $\mathcal{U} \overset{e}{\subset} \mathcal{V}$ dacă pentru orice $U \in \mathcal{U}$ există un $V \in \mathcal{V}$, astfel încît $U \subset V$. Cu ajutorul e-incluziunii se poate introduce o relaţie de echivalenţă între elementele lui $\mathcal{P}^2(S)$ în felul următor: $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ dacă $\mathcal{U} \overset{e}{\subset} V$ şi $\mathcal{V} \overset{e}{\subset} \mathcal{U}$.

Dacă $M \in \mathcal{P}(S)$şi $\mathcal{U} \in \mathcal{P}^2(S)$ atunci prin steaua mulţimii M în raport cu familia de mulţimi $\mathcal{U}$ înţelegem următoarea mulţime:

$$St(M, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap M \neq \Phi\},$$

deci reuniunea tuturor mulţimilor din $\mathcal{U}$ care intersectează M. În cazul cînd M se reduce la un singur punct $M = \{p\}$ se notează mai scurt $St(\{p\}, \mathcal{U}) = St(p, \mathcal{U})$.

Se notează cu $St(\mathcal{U})$ şi $St^*(\mathcal{U})$ următoarele familii de mulţimi:

$$St(\mathcal{U}) = \{St(p, \mathcal{U}) : p \in S\}$$

$$St^*(\mathcal{U}) = \{St(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$$

numite steaua, respectiv steaua mare a familiei de mulţimi $\mathcal{U}$.

În cazul particular, cînd $\mathcal{U}$ este o acoperire al lui S, atunci şi $St(\mathcal{U})$ şi $St^*(\mathcal{U})$ sînt din nou acoperiri ale lui S.

Lucrarea de faţă se ocupă cu proprietăţile stelelor şi stelelor mari ale familiilor de mulţimi.

La început vom enunţa unele proprietăţi simple care sînt folosite pe parcurs.

TEOREMĂ 1.1. Pentru orice familie de mulţimi $\mathcal{U}$ au loc relaţiile:

$$\mathcal{U} \overset{e}{\subset} St(\mathcal{U}) \overset{e}{\subset} St^*(\mathcal{U})$$

TEOREMA 1.2. *Dacă M_1 și M_2 sînt două mulțimi din $\mathcal{P}(S)$ și $M_1 \subset M_2$, atunci pentru orice familie de mulțimi din $\mathcal{P}^2(S)$ are loc incluziunea*

$$St(M_1, \mathcal{U}) \subset St(M_2, \mathcal{U})$$

TEOREMA 1.3. *Dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$ sînt două familii de mulțimi astfel încît $\mathcal{U} \overset{e}{\subset} \mathcal{V}$, atunci pentru orice mulțime M din $\mathcal{P}(S)$ are loc incluziunea*

$$St(M, \mathcal{U}) \subset St(M, \mathcal{V})$$

Din ultima teoremă rezultă că dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$ sînt două familii de mulțimi echivalente, atunci pentru orice mulțime M are loc egalitatea $St(M, \mathcal{U}) = St(M, \mathcal{V})$. Reciproca ultimei afirmații nu este adevărată.

TEOREMA 1.4. *Dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$ sînt două familii de mulțimi echivalente, atunci au loc relațiile:*

$$St(\mathcal{U}) = St(\mathcal{V})$$

$$St^*(\mathcal{U}) = St^*(\mathcal{V})$$

Reciproca teoremei 1.4 nu este adevărată.

§ 2. Steaua, respectiv steaua mare a unei familii de mulțimi este din nou o familie de mulțimi. Se pot deci defini doi operatori St și St^* în mulțimea $\mathcal{P}^2(S)$, care atașează fiecărei familii de mulțimi $\mathcal{U}$ steaua $St(\mathcal{U})$, respectiv steaua mare $St^*(\mathcal{U})$. Putem să ne întrebăm atunci care sînt elementele fixe ale acestor operatori. Vom numi o familie $\mathcal{U}$ pentru care $St(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ un invariant stelar, iar o familie $\mathcal{U}$ pentru care $St^*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ un invariant tare stelar. În acest paragraf ne vom ocupa cu familii invariante față de operatorii St și St^*.

La început vom da două condiții simple care caracterizează invarianții stelari, respectiv invarianții tare stelari și vom căuta să găsim acele familii de mulțimi care sînt în același timp invarianți stelari și invarianți tare stelari.

TEOREMA 2.1. *Familia de mulțimi $\mathcal{U}$ este un invariant stelar atunci și numai atunci cînd pentru orice $U \in \mathcal{U}$ și orice $q \in U$ are loc egalitatea*

$$St(q, \mathcal{U}) = U$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\mathcal{U}$ un invariant stelar și să presupunem că există un $U \in \mathcal{U}$ și un $q \in \mathcal{U}$ astfel încît $St(q, \mathcal{U}) \neq U$. Dar deoarece $q \in U$, rezultă că $U \subset St(q, \mathcal{U})$. De aici ar rezulta însă că $U \notin St(\mathcal{U})$, contrar ipotezei că $\mathcal{U}$ este un invariant stelar.

Invers, să presupunem că $\mathcal{U}$ este o familie de mulțimi care verifică proprietatea că pentru orice $U \in \mathcal{U}$ și orice $q \in U$ are loc $St(q, \mathcal{U}) = U$. Atunci rezultă ușor că $St(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, deci este vorba de un invariant stelar.

O proprietate analogă se demonstrează pentru steaua mare a unei familii de mulțimi.

TEOREMA 2.2. *Familia de mulțimi $\mathcal{U}$ este un invariant tare stelar atunci și numai atunci cînd pentru orice $U \in \mathcal{U}$ are loc egalitatea*

$$St(U, \mathcal{U}) = U$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\mathcal{U}$ un invariant tare stelar. Presupunem că există un $U \in \mathcal{U}$ astfel încît $St(U, \mathcal{U}) \neq U$. Atunci rezultă $U \subset St(U, \mathcal{U})$ și $U \notin St^*(\mathcal{U})$, contrar ipotezei.

Invers, fie $U \in \mathcal{U}$, atunci $St(U, \mathcal{U}) = U$ și deci $U \in St^*(\mathcal{U})$. Dacă $U^* \in St^*(\mathcal{U})$, atunci există $U \in \mathcal{U}$, astfel încît $U^* = St(U. \mathcal{U}) = U \in \mathcal{U}$ și deci $U^* \in \mathcal{U}$. Cu aceasta am demonstrat că $\mathcal{U}$ este un invariant tare stelar.

Orice familie de mulțimi două cîte două disjuncte este atît un invariant stelar cît și un invariant tare stelar. Următoarea teoremă arată că are loc și proprietatea inversă.

TEOREMA 2.3. a) *Dacă $\mathcal{U}$ este un invariant stelar, atunci este formată din mulțimi două cîte două disjuncte.*

b) *Dacă $\mathcal{U}$ este un invariant tare stelar atunci este formată din mulțimi două cîte două disjuncte.*

D e m o n s t r a ț i e. a) Fie deci $\mathcal{U}$ un invariant stelar și să presupunem că există două mulțimi U_1 și U_2 din $\mathcal{U}$ astfel încît $U_1 \neq U_1$ și $U_1 \cap U_2 \neq \Phi$. Fie atunci $p \in U_1 \cap U_2$. Din teorema 2.1 rezultă că $St(p, \mathcal{U}) = U_1$, deoarece $p \in U_1$, și $St(p, \mathcal{U}) = U_2$, deoarece $p \in U_2$ și deci $U_1 = U_2$, contrar ipotezei.

Afirmația b) se demonstrează analog.

Din ultima teoremă rezultă următorul corolar:

COROLAR 2.4. *Familia de mulțimi $\mathcal{U}$ este un invariant stelar atunci și numai atunci cînd este un invariant tare stelar.*

Acoperirile invariante față de operatorii St și St^* sînt exact partițiile.

§ 3. Steaua respectiv steaua mare a unei familii de mulțimi fiind din nou familii de mulțimi, putem aplica și lor operatorii St și St^*. Se definesc astfel iteratele stelare și tare stelare ale unei familii de mulțimi.

Pentru orice ordinal nelimită $\alpha + 1$ se definește steaua de ordinul $\alpha + 1$ a unei familii de mulțimi $\mathcal{U}$ cu ajutorul următoarei formule de recurență:

$$St^{\alpha+1}(\mathcal{U}) = St(St^{\alpha}(\mathcal{U}))$$

respectiv steaua mare de ordinul $\alpha + 1$ ca fiind

$$St^{*\alpha+1}(\mathcal{U}) = St^*(St^{*\alpha}(\mathcal{U}))$$

Pentru un ordinal limită γ se definește steaua de ordinul γ a unei familii de mulțimi $\mathcal{U}$ cu ajutorul formulei:

$$St^{\gamma}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} St^{\alpha}(\mathcal{U})$$

respectiv steaua mare de ordinul γ ca fiind

$$St^{*\gamma}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} St^{*\alpha}(\mathcal{U})$$

Familiile de forma $St^{\alpha}(St^{*\beta})(\mathcal{U})$ și $St^{*\alpha}(St^{\beta}(\mathcal{U}))$ unde α și β sînt ordinale, le vom numi stele mixte de ordinul $\alpha + \beta$ ale familiei de mulțimi $\mathcal{U}$.

În acest § ne vom ocupa cu proprietățile acestor iterate stelare.

TEOREMA 3.1. *Pentru orice număr natural n și orice familie de mulțimi $\mathcal{U}$ are loc relația:*

$$St^{*n}(\mathcal{U}) \overset{c}{\subset} St^{n+1}(\mathcal{U})$$

D e m o n s t r a ț i e. Vom proceda prin inducție în raport cu n. Fie deci $\mathcal{U}$ o familie de mulțimi oarecare și $n = 1$. Dacă $M \in St^*(\mathcal{U})$, atunci există un

$U_2 \in \mathcal{U}$, astfel încît $St(U_1, \mathcal{U}) = M$. Fie $p \in U_1$ arbitrar. Vom arăta că $St(U_1, \mathcal{U}) \subset St(p, St(\mathcal{U}))$. Pentru orice $q \in U_1$, $St(q, \mathcal{U})$ conține U_1, și deoarece $St(U_1, \mathcal{U}) = \bigcup_{q \in U_1} St(q, \mathcal{U})$ orice U care intersectează U_1 este conținut într-un $St(q, \mathcal{U})$ unde $q \in U_1$. Din aceste observații rezultă că $St(U, \mathcal{U}) \subset St(p, St(U)) \in St^2(\mathcal{U})$. Prin urmare $St^*(\mathcal{U}) \overset{e}{\subset} St^2(\mathcal{U})$.

Presupunem că proprietatea este demonstrată pentru $k \leqslant N$, deci $St^{*k}(\mathcal{U}) \overset{e}{\subset} St^{k+1}(\mathcal{U})$ și să arătăm că are loc și pentru $k = n + 1$. Fie $M \in St^{*n+1}(\mathcal{U})$, atunci există un $U^{*n} \in St^{*n}(\mathcal{U})$, astfel încît $M = St(U^{*n}, St^{*n}(U))$. Fie $p \in U^{*n}$. Se arată, la fel ca și în cazul $n = 1$, că $St(U^{*n}, St^{*n}(\mathcal{U})) \subset St(p, St^{n+1}(\mathcal{U})) \in St^{n+2}(\mathcal{U})$, și cu aceasta teorema este demonstrată.

Despre stelele de ordinul $\omega + 1$ se demonstrează următoarea proprietate:

TEOREMA 3.2. *Pentru orice familie de mulțimi* $\mathcal{U}$, $St^{\omega+1}(\mathcal{U})$ *și* $St^{*\omega+1}(\mathcal{U})$ *sînt invarianți stelari și are loc egalitatea*

$$St^{\omega+1}(\mathcal{U}) = St^{*\omega+1}(\mathcal{U})$$

Demonstrație: Arătăm mai întîi că $St^{\omega+1}(\mathcal{U})$ este un invariant stelar. Fie U' și $U'' \in St^{\omega+1}(\mathcal{U})$ și $U' \cap U'' \neq \Phi$. Vom arăta că atunci cele două mulțimi coincid, deci $U' = U''$.

Există două puncte p și q, astfel încît $U' = St(p, St^{\omega}(\mathcal{U}))$ și $U'' = St(q, St^{\omega}(\mathcal{U}))$, dar $St(p, St^{\omega}(\mathcal{U})) = St(p, \bigcup_{k=1}^{\infty} St^k(\mathcal{U})) = \bigcup_{k=1}^{\infty} St(p, St^k(\mathcal{U}))$. La fel $St(q, St^{\omega}(\mathcal{U})) = \bigcup_{k=1}^{\infty} St(q, St^k(\mathcal{U}))$. Fie $p_1 \in S$, astfel încît $p_1 \in U' \cap U''$. Fie $r \in U'$, există atunci un număr natural k, astfel încît $r \in St(p, St^k(\mathcal{U}))$. Deoarece $p_1 \in U'$, există un număr natural h, astfel încît $p_1 \in (p, St^h(\mathcal{U}))$. Fie $m = \max(k, h)$, atunci evident r, $p_1 \in St(p, St^m(\mathcal{U}))$. Deoarece $p_1 \in U''$, există un număr natural n, astfel încît $p_1 \in St(q, St^n(\mathcal{U}))$. Fie $j = \max(m, n)$. Au loc atunci următoarele incluziuni: $St(p_1, St^j((\mathcal{U})) \supset St(p, St^m(\mathcal{U}))$ și $St(p_1, St^j(\mathcal{U})) \supset St(p, St_m(\mathcal{U}))$, dar atunci $St(q, St^{j+1}(\mathcal{U})) \supset St(p_1, St^j(\mathcal{U})) \supset St(p, St^m(\mathcal{U}))$ și deci $r \in St(q, St^{j+1}(\mathcal{U}))$ prin urmare $r \in U''$. De aici rezultă că $U' \subset U''$. La fel se constată că $U'' \subset U'$ și deci $U' = U''$. Deci orice două elemente din $St^{\omega+1}(\mathcal{U})$ cu intersecție nevidă coincid, este vorba, prin urmare, de un invariant stelar.

Pentru a demonstra complet teorema este suficient să dovedim egalitatea $St^{\omega+1}(\mathcal{U}) = St^{*\omega+1}(\mathcal{U})$. Pentru aceasta demonstrăm că oricare ar fi $p \in S$ și oricare ar fi $U^{*k} \in St^{*k}(\mathcal{U})$ pentru k arbitrar, astfel încît $p \in U^{*k}$, are loc egalitatea $\bigcup_{j=1}^{\infty} St(p, St^j(\mathcal{U})) = \subset St(U^{*k}, St^{*j}(\mathcal{U}))$. Într-adevăr, dacă $q \in \bigcup_{j=1}^{\infty} St(p, St^j(\mathcal{U}))$, atunci există un m natural, astfel încît $q \in St(p, St^m(\mathcal{U}))$, dar atunci, deoarece $St(p, St^m(\mathcal{U})) \subset St(U^{*k}, St^m(\mathcal{U})) \subset St(U^{*k}, St^{*m}(\mathcal{U}))$ rezultă că $q \in \bigcup_{j=1}^{\infty} St(U^{*k}, St^{*j}(\mathcal{U}))$.

Invers, dacă $q \in \bigcup_{j=1}^{\infty} St(U^{*k}, St^{*j}(\mathcal{U}))$, atunci există un n natural, astfel încît $q \in St(U^{*k}, St^{*n}(\mathcal{U}))$, dar pe baza teoremei 3.1 avem $St(U^{*k}, St^{*n}(\mathcal{U})) \subset St(p, St^{n+1}(\mathcal{U}))$ și deci $q \in \bigcup_{j=1}^{\infty} St(p, St^j(\mathcal{U}))$. Vom folosi acum această egalitate pentru demonstrarea egalităţii $St^{\omega+1}(\mathcal{U}) = St^{*\omega+1}(\mathcal{U})$. Într-adevăr, fie $M \in St^{\omega+1}(\mathcal{U})$, atunci există un punct $p \in S$, astfel încît $M = St(p, St^{\omega}(\mathcal{U})) = St(p, \bigcup_{k=1}^{\infty} St^{k}(\mathcal{U})) = \bigcup_{j=1}^{8} St(p, St^{j}(\mathcal{U})) = \bigcup_{j=1}^{\infty} St(U^{*k}, St^{*j}(\mathcal{U})) = St(U^{*k}, \bigcup_{j=1}^{\infty} St^{*j}(\mathcal{U})) = St(U^{*k}, St^{*\omega}(\mathcal{U})) = M^{*}$. Ultimele egalităţi demonstrează complet egalitatea dorită. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Ne vom ocupa în continuare de stelele mixte ale unei familii de mulţimi. Înainte de a demonstra teorema principală enunţăm următoarea proprietate:

TEOREMA 3.3. *Pentru orice familie de mulţimi $\mathcal{U}$ şi pentru orice pereche de numere naturale m şi n au loc următoarele relaţii.*

$$St^{m}(St^{n}(\mathcal{U})) = St^{n}(St^{m}(\mathcal{U})) = St^{m+n}(\mathcal{U})$$

$$St^{*m}(St^{*n}(\mathcal{U})) = St^{*n}(St^{*m}(\mathcal{U})) = St^{*n+m}(\mathcal{U})$$

Putem acum demonstra următoarea proprietate:

TEOREMA 3.4. *Pentru orice familie de mulţimi $\mathcal{U}$ şi orice pereche de numere naturale m şi n are loc egalitatea*

$$St^{n}(St^{*m}(\mathcal{U})) = St^{*m}(St^{n}(\mathcal{H}))$$

D e m o n s t r a ţ i e: Vom proceda prin inducţie în raport cu m şi n. Fie $m = n = 1$. Atunci vom arăta că $St(St^{*}(\mathcal{U})) = St^{*}(St(\mathcal{U}))$. Mai precis, vom arăta că pentru orice $p \in S$ are loc egalitatea $St(p, St^{*}(\mathcal{U})) = St(St(p, \mathcal{U}), St(\mathcal{U}))$.

Fie într-adevăr $r \in St(p, St^{*}(\mathcal{U}))$. Aceasta înseamnă că există o mulţime $U^{*} \in St^{*}(\mathcal{U})$, astfel încît $p, r \in U^{*}$. Dar deoarece $U^{*} \in St^{*}(\mathcal{U})$, există o mulţime $U \in \mathcal{U}$, astfel încît $U^{*} = St(U, \mathcal{U})$. Există atunci mulţimile U_1 si U_2, astfel încît $p \in U_1$ şi $r \in U_2$ şi $U_1 \cap U \neq \Phi$, $U_2 \cap U = \neq \Phi$. Fie atunci $q_1 \in U_1 \cap U$ şi $q_2 \in U_2 \cap U$. Avem $St(q_1, \mathcal{U}) \supset U_1 \cup U$ şi $St(q_2, \mathcal{U}) \supset U_2 \cup U$, de unde rezultă că $St(p, \mathcal{U}) \cap St(q_2, \mathcal{U}) \neq \Phi$ şi deci $St(q_2, \mathcal{U}) \subset St(St(p, \mathcal{U}), St(\mathcal{U}))$, şi de unde rezultă că $r \in St(St(p, \mathcal{U}), St(\mathcal{U}))$. Avem deci $St(p, St^{*}(\mathcal{U})) \subset St(St(p, \mathcal{U}), St(\mathcal{U}))$. Invers fie $r \in St(St(p, \mathcal{U}), St(\mathcal{U}))$, atunci există un $q \in S$, astfel încît $St(q, \mathcal{U}) \cap St(p, \mathcal{U}) \neq \Phi$ şi $r \in St(q, \mathcal{U})$. Există mulţimile U_1 şi U_2 din $\mathcal{U}$ în aşa fel încît $p \in U_1$ şi $q \in U_2$ şi $U_1 \cap U_2 \neq \Phi$. Fie atunci mulţimea $St(U_1, \mathcal{U})$. Avem $p, r \in St(U_1, \mathcal{U})$ şi deci $r \in St(p, St^{*}(\mathcal{U}))$. Avem deci egalitatea dorită. Cu ajutorul ei se demonstrează imediat că are loc şi egalitatea $St(St^{*}(U) = St^{*}(St(\mathcal{U}))$.

Presupunem acum că pentru $k \leqslant n$ şi $j \leqslant m - 1$ avem $St^{k}(St^{*j}(\mathcal{U})) = St^{*j}(St^{k}(\mathcal{U}))$ şi pentru $k \leqslant n - 1$ şi $j \leqslant m$ are loc aceeaşi egalitate, atunci $St^{n}(St^{*m}(\mathcal{U})) = St(St^{n-1}(St^{*m}(\mathcal{U}))) = St(St^{*m}(St^{n-1}(U))) = St^{*m}(St(St^{n-1}(U))) = St^{*m}(St^{n}(U))$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

O proprietate analogă poate fi demonstrată pentru steaua de ordinul ω.

TEOREMA 3.5. *Pentru orice familie de mulţimi $\mathcal{U}$ are loc egalitatea*

$$St(St^{*\omega}(U)) = St^{*}(St^{\omega}(\mathcal{U}))$$

D e m o n s t r a ţ i e: Din teoremele 1.1 şi 3.1 rezultă că $St^{*\omega}(\mathcal{U}) \sim St^{\omega}(\mathcal{U})$, dar atunci din teorema 1.4 avem

$$St(St^{*\omega}(\mathcal{U})) = St^{\omega+1}(\mathcal{U})$$

$$St^{*}(St^{\omega}(\mathcal{U})) = St^{*\omega+1}(\mathcal{U})$$

şi aplicînd teorema 3.2 rezultă afirmaţia ultimei teoreme.

§ 4. Există o strînsă legătură între familii de mulţimi şi relaţii binare. Oricărei familii de mulţimi $\mathcal{U}$ îi putem ataşa în mod univoc o relaţie binară în S, $R[\mathcal{U}] = \bigcup\{U \times U,\ U \in \mathcal{U}\}$. Relaţia $R[\mathcal{U}]$ este simetrică; în cazul unei acoperiri ea este şi reflexivă, iar dacă familia de mulţimi este un invariant stelar, atunci este şi tranzitivă.

Ne vom ocupa în acest paragraf cu relaţiile binare care se ataşează stelelor unei familii de mulţimi.

TEOREMA 4.1. *Dacă familiei $\mathcal{U}$ i se ataşează relaţia binară $R[\mathcal{U}]$, atunci stelelor $St^{n}(\mathcal{U})$ şi $St^{*n}(\mathcal{U})$ li se ataşează relaţia $R^{2^n}[\mathcal{U}]$ respectiv $R^{3^n}[\mathcal{U}]$.*

D e m o n s t r a ţ i e. Vom proceda prin inducţie în raport cu n. Pentru $n = 1$ fie $pR[St(\mathcal{U})]q$; aceasta înseamnă că există un $U \in St(\mathcal{U})$, astfel încît $p, q \in U$. Există un $r \in S$, astfel încît $U = St(r, \mathcal{U})$, dar atunci $pR[\mathcal{U}]r$ şi $rR[\mathcal{U}]q$ şi deci $p(R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}])q$. Invers, dacă $p(R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}])q$, atunci există un $r \in S$, astfel încît $pR[\mathcal{U}]r$ şi $rR[\mathcal{U}]q$, dar atunci $p, q \in St(r, \mathcal{U})$ şi deci $pR[St(\mathcal{U})]q$. Prin urmare $R[St(\mathcal{U})] = R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}] = R^2[\mathcal{U}]$. Presupunem proprietatea adevărată pentru n, deci $R[St^{n}(\mathcal{U})] = R^{2^n}[\mathcal{U}]$. Atunci $R[St^{n+1}(\mathcal{U})] = R[St(St^{n}(\mathcal{U}))] = R[St^{n}(\mathcal{U})] \circ R[St^{n}(\mathcal{U})] = R^{2^n}[\mathcal{U}] \circ R^{2^n}[\mathcal{U}] = R^{2^{n+1}}[\mathcal{U}]$.

Pentru steaua mare se procedează la fel. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Stelelor $St^{\omega}(\mathcal{U})$ şi $St^{*\omega}(\mathcal{U})$ li se ataşează relaţia $R^{\omega}[\mathcal{U}] = R[St^{\omega}(\mathcal{U})] = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{2^k}[\mathcal{U}]$, respectiv $R^{*\omega}[U] = R[St^{*\omega}(\mathcal{U})] = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{3^k}[\mathcal{U}]$. Din teoremele 1.1 şi 3.1 rezultă că $R^{\omega}[\mathcal{U}] = R^{*\omega}[U]$. Fără nici o greutate se constată că $R^{\omega}[\mathcal{U}]$ este o relaţie de echivalenţă în mulţimea $S_1 = \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Dacă $\mathcal{U}$ este o acoperire a lui S, atunci $R^{\omega}[\mathcal{U}]$ este o relaţie de echivalenţă în S. Acestei relaţii îi corespunde atunci o partiţie a mulţimii S_1 pe care o vom nota $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$. Are loc următoarea proprietate:

TEOREMA 4.2. *Pentru orice familie de mulţimi $\mathcal{U}$ are loc egalitatea*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} = St^{\omega+1}(\mathcal{U})$$

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ şi $U \in St^{\omega+1}(\mathcal{U})$ şi presupunem că $U \cap P \neq \Phi$. Vom arăta că atunci $U = P$. Fie $p \cap U$. Există atunci un $r \in S$, astfel încît $U = St(r, St^{\omega}(\mathcal{U})) = \bigcup_{k=1}^{\infty} St(r, St^{k}(\mathcal{U}))$. Fie acum $q \in P$, atunci $pR^{\omega}[\mathcal{U}]q$, deci există un k, astfel încît $pR^{2^k}[\mathcal{U}]q$ deci $p,\ q \in U^k \in St^{k}(\mathcal{U})$. Dar $p \in U$, deci h, astfel încît $p \in St(r, St^{h}(\mathcal{U}))$. Fie $m = \max(k, h)$. Atunci $q \in St(r, St^{m+1}(\mathcal{U}))$ şi deci $q \in U$. Avem deci $P \subset U$. Dacă $q \in U$, atunci, deoarece $p \in U$, rezultă că $pR[\mathcal{U}]q$, şi deci $q \in P$. Prin urmare $U = P$. Aceasta este suficient pentru a demonstra teorema.

(Intrat în redacţie la 20 februarie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. H. J. Kowalsky, *Topologische Räume*. Birkhäuser-Verlag, p. 93.
2. M. F. Schechter, *Préordres et équivalences dans l'ensemble des familles d'un ensemble*. Arch. Math. (Brno) **1** (1965), p. 39–56.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЗВЁЗД СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ

(Резюме)

В произвольном множестве S через посредство понятия звезды одного множества M из $P(S)$ по отношению к семейству множества $\mathcal{U}$ из $P^2(S)$, которая является объединением всех элементов из $\mathcal{U}$, пересекающих множество M, определяются операторы St и St^*, которые присоединяют к каждому семейству множеств $\mathcal{U}$ два семейства множеств $St(\mathcal{U}) = \{St(p, \mathcal{U}) : p \in S\}$, соответственно $St^*(\mathcal{U}) = \{St(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$, названные звездой, соответственно большой звездой семейства.

Данная работа занимается свойствами этих операторов. Она состоит из четырёх частей.

В первой части работы, имеющей вводный характер, устанавливаются использованные понятия, а также некоторые простые свойства звёзд, необходимые для остальных четырёх параграфов.

Вторая часть работы занимается звёздными инвариантами и твёрдо звёздными инвариантами т. е. семействами множеств $\mathcal{U}$, выполняющими условие $St(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, соответственно $St^*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Показывается, что они являются как раз семействами множеств попарно непересекающимися.

Последовательным применением операторов St и St^* определяются звезды высшего порядка. Показывается, что звезда порядка $\omega + 1$ (где ω-первый бесконечный ординал) равна большой звезде порядка $\omega + 1$ и констатируется, что эти два семейства множеств являются звёздными инвариантами. Показывается также, что операторы St^n и St^{*m} являются коммутативными в том смысле, что не имеет значения порядок их применения к семейству множеств.

Последняя часть работы занимается бинарными отношениями, которые присоединяются к звёздам семейства множеств, исходя из бинарного отношения, присоединённого к семейству множеств, к которому применяются звёздные операторы. Если к семейству множеств $\mathcal{U}$ присоединяется отношение $R[\mathcal{U}]$, то звезде $St(\mathcal{U})$, соответственно большой звезде $St^*(\mathcal{U})$, соответствуют бинарные отношения $R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}]$ соответственно $R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}]$.

Звёздам порядка ω соответствует отношение эквивалентности.

Показано, что деление, соответствующее этому отношению является как раз $St^{\omega+1}(\mathcal{U})$.

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES ÉTOILES DES FAMILLES D'ENSEMBLES

(Résumé)

Dans un ensemble quelconque S, par l'intermédiaire de la notion d'étoile d'un ensemble M de $P(S)$ en rapport avec une famille d'ensembles $\mathcal{U}$ de $P^2(S)$, qui est la réunion de tous les élments de $\mathcal{U}$ intersectant l'ensemble M, on définit les opérateurs St et St^* qui attachent à chaque famille d'ensembles $\mathcal{U}$ deux familles d'ensembles $St(\mathcal{U}) = \{St(p, \mathcal{U}) : p \in S\}$, et $St^*(\mathcal{U}) = \{St(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ respectivement nommées étoile de U et grande étoile de $\mathcal{U}$.

Le présent article s'occupe des propriétés de ces opérateurs. Il comprend quatre parties:

Dans la première, de caractère introductif, on définit les notions employées et l'on établit certaines propriétés simples des étoiles, nécessaires pour les trois autres paragraphes.

La seconde partie traite des invariants stellaires et stellaires forts, c'est à dire des familles d'ensembles $\mathcal{U}$ qui remplissent respectivement la condition $St(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ et la condition $St^*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Pour ces familles on démontre qu'elles sont exactement les familles d'ensembles disjointes deux à deux.

Dans la troisième partie, par application successive des opérateurs St et St^*, on définit les étoiles d'ordre supérieur. On montre que l'étoile d'ordre $\omega + 1$ (où ω est le premier ordinal infini) est égale à la grande étoile d'ordre $\omega + 1$ et l'on constate que ces deux familles d'ensembles sont des invariants stellaires. On montre de même que les opérateurs St^n et St^{*m} sont inversables, au sens où l'ordre de leur application à une famille d'ensembles ne compte pas.

La dernière partie de l'article s'occupe des relations binaires qui s'attachent aux étoiles des familles d'ensembles, en partant de la relation binaire attachée à la famille d'ensembles à laquelle s'appliquent les opérateurs étoile. Si à la famille d'ensembles $\mathcal{U}$ d'ensembles U on attache la relation $R[\mathcal{U}]$, alors à l'étoile $St(\mathcal{U})$ d'une part et à la grande étoile $St^*(\mathcal{U})$ d'autre part correspondent respectivement les relations binaires $R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}]$ et $R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}] \circ R[\mathcal{U}]$.

Aux étoiles d'ordre ω correspond une relation d'équivalence. On montre que la partition correspondant à celle-ci est précisément $St^{\omega+1}(\mathcal{U})$.

DESPRE REZOLVABILITATEA PROBLEMEI LA LIMITĂ GENERALĂ ÎN SEMISPAȚII

de

CAROL KALIK

În lucrarea de față extindem unele rezultate publicate în [1]. Autorul acestei lucrări, G. E. Silov, formulează o problemă de tip Dirichlet pentru semispațiu și pentru o clasă largă de ecuații cu derivate parțiale fără să pretindă ca ecuația considerată să fie de un tip fixat. Noi studiem probleme la limită asemănătoare, înlocuind însă condițiile la limită de tip Dirichelt cu condiții la limită generale.

Pentru precizarea problemei și a rezultatelor obținute, în prealabil, introducem unele notații. Vom nota cu R^n_x, R^n_ξ respectiv $R^{n-1}_{x'}$ și cu $R^{n-1}_{\xi'}$ spațiile euclidiene cu n respectiv cu $n-1$ dimensiuni, avînd ca elemente punctele cu coordonatele reale $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ respectiv $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ și $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Notăm de asemenea: $D_k = \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_k}$, $D = D_1 \cdot D_2 \ldots D_n$, $D' = D_1 \cdot D_2 \ldots D_{n-1}$ iar cu F' transformarea lui Fourier relativă la variabila x':

$$F'u(x) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int\limits_{R^{n-1}_{x'}} e^{-i<x', \xi'>}\, u(x) dx'$$

unde $< x', \xi' > = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \xi_i$.

Vom considera, în semispațiul $x_n > 0$, o ecuație oarecare de forma

$$P(D)u(x) \equiv D^m_n u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(D') D^k_n u(x) \qquad (x_n > 0) \tag{1}$$

unde $p_k(D')$ sînt operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți. Atașăm acestei ecuații cu derivate parțiale următoarea ecuație algebrică, numită ecuația caracteristică a lui (1):

$$\tau^m - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\xi')\, \tau^k = 0$$

Fie $\tau_1(\xi'), \ldots, \tau_m(\xi')$ rădăcinile acestei ecuaţii. Un rol însemnat în cele ce urmează, o să aibă un şir de mulţimi:

$$R_{\xi 1}^{n-1} \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_m.$$

Iată cum definim aceste mulţimi: pentru fiecare $\xi' \in R_{\xi 1}^{n-1}$ renumerotăm, la nevoie, rădăcinile ecuaţiei caracteristice astfel încît să avem:

$$Im\,\tau_1(\xi') \geqslant Im\,\tau_2(\xi') \geqslant \ldots \geqslant Im\,\tau_m(\xi').$$

Atunci

$$\Omega_k = \{\xi' \in R_{\xi'}^{n-1} : Im\,\tau_k(\xi') \geqslant 0\} \quad (k = \overline{1, m})$$

Legate de ecuaţia (1) sînt şi polinoamele în τ:

$$P_+^l(\xi', \tau) = \prod_{k=1}^{l} (\tau - \tau_k(\xi'))$$

de care ne vom servi mai jos.

Vom considera următoarele condiţii la limită:

$$F'\{B_j^l(D)u(x)|_{x_n=0}\} = g_j^l(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l\,;\ j = \overline{1, l}\,;\ l = \overline{1, m}) \tag{2}$$

unde $B_j^l(D)$ sînt nişte operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi, iar $g_j^l(\xi')$ sînt funcţii date pe mulţimea Ω_l.

Observăm, că pentru $\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_r = R_{\xi'}^{n-1}$ şi $\Omega_{r-1} = \ldots = \Omega_m = \{0\}$, ceea ce se realizează, dacă ecuaţia (1) este de tip eliptic sau parabolic, condiţiile la limită (2) se pot exprima într-o formă mai obişnuită:

$$B_j(D)u(x)|_{x_n=0} = f_j(x') \quad (x' \in R_{x'}^{n-1}\,;\ j = \overline{1, r})$$

Pe lîngă condiţiile la limită (2) precizăm şi comportarea funcţiei $u(x)$ pentru $x_n \to +\infty$. Vom cere ca funcţia $u(x)$ să nu crească mai rapid decît o putere a lui x_n:

$$|u(x)| = O(x_n^\nu) \text{ cînd } x_n \to +\infty \tag{3}$$

P r o b l e m a l a l i m i t ă s t u d i a t ă î n l u c r a r e a d e f a ţ ă: Să se găsească funcţia $u(x)$ care să satisfacă la condiţiile (1), (2) şi (3).

Precizăm clasa de funcţii în care se caută soluţia problemei la limită formulată. Vom nota cu $\mathcal{H}_{-k}$ mulţimea acelor distribuţii $f(x')$ care se pot reprezenta sub următoarea formă: $f(x') = (I - \triangle)^k f(x')$ unde $f(x') \in L_2(R_{x'}^{n-1})$. Fie $\mathcal{H} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_{-k}$. Notăm $H_{-k} = F'\mathcal{H}_{-k}$. Se vede fără greutate, că H_{-k} este un spaţiu Hilbert format din acele funcţii $g(\xi')$ definite pe $R_{\xi'}^{n-1}$, pentru care

$$\|g\|_{-k}^2 = \int_{R_{\xi'}^{n-1}} \frac{|g(\xi')|^2}{(1 + |\xi'|^2)^k}\, d\xi' < \infty$$

Notăm $H = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_{-k}$, şi considerăm în acest spaţiu H topologia indusă de spaţiile H_{-k}. Relaţia $H = F'\mathcal{H}$ ne permite să topologizăm şi spaţiul $\mathcal{H}$.

În sfîrșit, vom nota cu $C_m\mathcal{H}$ spațiul acelor funcții $u(x', x_n)$ care aparțin lui H pentru fiecare $x_n \geqslant 0$ fixat, iar în raport cu x_n sînt continue și derivabile în mod continuu de m ori în topologia lui $\mathcal{H}$.

Soluția problemei la limită enunțată mai sus o căutăm în spațiul $C_m\mathcal{H}$.

Pentru a putea formula rezultatul nostru, încă o importantă noțiune: c o e r c i v i t a t e a e c u a ț i e i (1) c u c o n d i ț i i l e l a l i m i t ă (2). Vom spune că ecuația (1) este coercivă cu condițiile la limită (2), dacă polinoamele în τ:

$$B_1^l(\xi', \tau), \ldots, B_l^l(\xi', \tau)$$

sînt liniar independente modulo $P_+^l(\xi', \tau)$ pentru $\xi' \in \Omega_l$ și diferit de zero $(l = \overline{1, m})$.

Pentru a explicita condiția de coercivitate să notăm

$$B_j(\xi', \tau) \equiv C_j^l(\xi', \tau)(\mathrm{mod}\ P_+^l(\xi', \tau))$$

Atunci condiția de coercivitate înseamnă că polinoamele

$$C_1^l(\xi', \tau), \ldots, C_l^l(\xi', \tau)$$

sînt liniar independente pentru orice $\xi' \in \Omega$ și $\xi \neq 0$ $(l = \overline{1, m})$.

Menționăm că ecuația (1) este întotdeauna coercivă cu condițiile de tip Dirichlet. Într-adevăr, deoarece condițiile de tip Dirichlet sînt de următoarea formă:

$$F'\{u(x', 0)\} = g_1^l(\xi'),\ F'\left\{\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}\right\} = g_2^l(\xi'), \ldots,\ F'\left\{\frac{\partial^{l-1} u}{\partial x_n^{l-1}}\Big|_{x_n=0}\right\} = g_l^l(\xi')$$

$(\xi' \in \Omega_l;\ l = \overline{1, m})$, avem $B_j^l(\xi', \tau) = \tau^{j-1}$ $(j = \overline{1, l};\ l = \overline{1, m})$. Polinomul $P_+^l(\xi', \tau)$ fiind de gradul l, rezultă că $C_j^l(\xi', \tau) = B_j^l(\xi', \tau) = \tau^{j-1}$, iar șirul $1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^{l-1}$ este liniar independent.

Rezultatul de bază al acestei lucrări îl formulăm într-o teoremă:

TEOREMA. *Dacă ecuația* (1) *este coercivă cu condițiile la limită* (2), *atunci problema la limită* (1) — (2) — (3) *are soluție unică în spațiul* $C_m\mathcal{H}$ *și această soluție depinde în mod continuu de funcțiile* $g_j^l(\xi')$.

Demonstrarea se face prin reducerea problemei la limită (1) — (2) — (3) la o problemă de tip Dirichlet studiată în [1].

Aplicînd transformarea lui Fourier F' asupra ecuației și asupra condițiilor la limită (2), obținem următoarea problemă la limită echivalentă cu (1) — (2) — (3):

$$P(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n) \equiv D_n^m\hat{u}(\xi', x_n) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\xi')D_n^k\hat{u}(\xi', x_n) = 0\ \ (x_n > 0) \tag{4}$$

$$B_j^l(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g_j^l(\xi')\quad (\xi' \in \Omega_l;\ j = \overline{1, l};\ l = \overline{1, m}) \tag{5}$$

$$|\hat{u}(\xi', x_n)| = 0(x_n^\nu)\ \text{cînd}\ x_n \to +\infty \tag{6}$$

Este uşor de constatat că problema (4) — (5) — (6) este echivalentă cu următoarea problemă la limită:

$$P^l_+(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n) = 0 \quad (x_n > 0) \tag{7}$$

$$B^l_j(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g^l_j(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l;\ j = \overline{1, l};\ l = \overline{1, m}) \tag{8}$$

Într-adevăr, deoarece pentru fiecare $\xi' \in \Omega_l$ fixat (4) este o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, orice soluţie a ei este o combinaţie liniară formată din funcţii de forma:

$$R_k(x_n)\ e^{i\tau_k(\xi')x_n}$$

unde $R_k(x_n)$ este un polinom, care depinde de multiplicitatea rădăcinii $\tau_k(\xi')$. Condiţia (6) ne arată, că pentru $\xi' \in \Omega_l$, în expresia lui $\hat{u}(\xi' x_n)$ pot figura numai rădăcinile $\tau_1(\xi'), \ldots, \tau_l(\xi')$, ceea ce înseamnă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (4), care satisfac condiţia (6) coincide cu mulţimea soluţiilor ecuaţiei (7).

Observăm de asemenea că problema (7) — (8) este echivalentă cu problema:

$$P^l_+(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n) = 0 \quad (x_n > 0) \tag{9}$$

$$C^l_j(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g^l_j(\xi') \quad (\xi' \in \Omega\ ;\ j = \overline{1, l};\ l = \overline{1, m}) \tag{10}$$

deoarece $B^l_j(\xi', \tau) = C^l_j(\xi', \tau) \pmod{P^l_+(\xi', \tau)}$.

Să notăm $C^l_j(\xi', \tau) = \sum\limits_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_j(\xi')\tau^\lambda$. Cu această notaţie condiţia (10) se poate scrie sub forma

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_j(\xi')D^\lambda_n\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g^l_j(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l;\ j = \overline{1, l};\ l = \overline{1, m}) \tag{10}$$

Fie $l = 1$. Avem $c^1_1(\xi', \tau) = c^{1,0}_1(\xi')$. Liniar-independenţa, la acest caz, se reduce la $c^{1,0}_1(\xi') \neq 0$ pentru $\xi' \neq 0$ şi $\xi' \in \Omega_1$. Din $c^{1,0}_1(\xi')\hat{u}(\xi', 0) = g^1_1(\xi')$ rezultă

$$\hat{u}(\xi', 0) = \frac{g^1_1(\xi')}{c^{1,0}_1(\xi')} = h^1_1(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_1)$$

În general, pentru un $1 < l \leqslant m$ oarecare fixat, liniar-independenţa polinoamelor în τ:

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_1(\xi')\tau^\lambda,\ \sum_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_2(\xi')\tau^\lambda,\ \ldots,\ \sum_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_l(\xi')\tau^\lambda$$

înseamnă că

$$\det \| c^{l,\lambda}_j(\xi') \|^{\lambda=\overline{0,l-1}}_{j=\overline{0,l}} \neq 0$$

pentru orice $\xi' \in \Omega_l$ şi diferit de zero. Prin urmare sistemul

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} c^{l,\lambda}_j(\xi')\ D^\lambda_n\ \hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g^l_j(\xi') \quad (j = 1,\ l)$$

are soluție unică pentru orice $g_j^l(\xi')$. Notăm soluția acestui sistem cu

$$D_n^{\lambda}\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = h_j^l(\xi') \quad (j = \overline{1, l})$$

Acest raționament ne arată că condițiile (10) sînt echivalente cu condițiile de tip Dirichlet:

$$D_n^{\lambda}\hat{u}(\xi', x_n)|_{x_n=0} = h_j^l(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l\,;\ j = \overline{1, l}\,;\ l = \overline{1, m}) \tag{11}$$

unde $h_j^l(\xi')$ sînt combinații liniare de $g_j^l(\xi')$ $(j = \overline{1, m})$.

În concluzie putem afirma că problemele (9) — (10) și (9) — (11) sînt echivalente.

Pe de altă parte, în [1] se arată că (9) — (11) este echivalentă cu problema la limită de tip Dirichlet formată din ecuația (1), condiția (3) și condițiile la limită

$$F'\left\{\frac{\partial^{j-1}u}{\partial x_n^{j-1}}\bigg|_{x_n=0}\right\} = h_j^l(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l\,;\ j = \overline{1, l}\,;\ l = \overline{1, m}) \tag{12}$$

care, după cum se demonstrează în aceeași lucrare, are soluție unică în clasa $C_m\mathcal{H}$ și aceasta depinde în mod continuu de condițiile la limită. Astfel am ajuns la concluzia, că problemele la limită (1) — (2) — (3) și (1) — (12) — (3) sînt echivalente din punctul de vedere al rezolvabilității lor, ceea ce demonstrează teorema.

(Intrat în redacție la 30 martie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. G. E. Silov, *O korrektnîh kraievîh zadaci v poluprostranstve dlia lineinîh uravnenii v ciastnîh proizvodnîh s postoiannîmi koeffițientami*, „Uspehi matematiceskih nauk", **XIX**, 3 (117) 3—52.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ

(Резюме)

В работе изучается граничная задача, данная следующими условиями:

$$P(D)u(x) \equiv D_n^m u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(D')D_n^k u(x) = 0 \quad \left(x_n > 0\right) \tag{1}$$

$$F'\left\{B_j^l(D)u(x)\big|_{x_n=0}\right\} = g_j^l(\xi')\left(\xi' \in \Omega\ ;\ j = \overline{1,l};\ l = \overline{1,m}\right) \tag{2}$$

$$|u(x)| = 0\left(x_n^{\nu}\right) \text{ когда } x_n \to +\infty \tag{3}$$

где все рассматриваемые дифференциальные операторы являются линейными с постоянными коэффициентами. Множества $\Omega_e \subset R_{\xi'}^{n-1}$ определены корнями характеристического уравнения уравнения (1).

Доказывается следующая теорема:

Теорема. Если уравнение (1) является коэрцивным с граничными условиями (2), то граничная задача (1)-(2)-(3) имеет единственное решение в классе $C_m\mathscr{K}$, и решение непрерывно зависит от граничных условий (2).

Следует отметить, что уравнение (1) является коэрцивным с граничными условиями (2) если многочлены $\left\{B_j(\xi', \tau)\right\}_{j=\overline{1,l}}$ линейно независимы модуло $P^l_+(\xi', \tau) = \prod_{k=1}^{l} \left(\tau - \tau_k(\xi')\right)$, где $\tau_k(\xi')$- определённые корни характеристического уравнения (1).

SUR LA RESOLUBILITE DU PROBLEME GENERAL AUX LIMITES DANS LES DEMI-ESPACES

(Résumé)

L'auteur étudie le problème aux limites données par les conditions suivantes :

$$P(D)u(x) \equiv D_n^m u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(D')D_n^k u(x) = 0 \quad \left(x_n > 0\right) \tag{1}$$

$$F'\left\{B_j(D)u(x)\Big|_{x_n=0}\right\} = g_j^l(\xi')\left(\xi' \in \Omega_l\,;\ j = \overline{1,l}\,;\ l = \overline{1,m}\right) \tag{2}$$

$$|u(x)| = 0\left(x_n^\nu\right) \text{ quand } x_n \to +\infty$$

où tous les opérateurs différentiels considérés sont linéaires et à coefficients constants. Les ensembles $\Omega_l \subset R_{\xi'}^{n-1}$ sont déterminés par les racines de l'équation caractéristique de l'équation (1).

On démontre le théorème suivant :

Théorème. Si l'équation (1) est coercive avec les conditions aux limites (2), alors le problème aux limites (1) — (2) — (3) a une solution unique dans la classe $C_m\mathscr{K}$, et la solution dépend de façon continue des conditions aux limites (2).

Nous mentionnons que l'équation (1) est coercive avec les conditions aux limites (2) si les polynômes $\left\{B_j^l(\xi',\tau)\right\}_{j=\overline{1,l}}$ sont linéairement indépendants modulo $P_+^l(\xi', \tau) = \prod_{k=1}^{l} (\tau - \tau_k(\xi'))$, où $\tau_k(\xi')$ sont certaines racines de l'équation caractéristique de l'équation (1).

OPERATORI ITERATIVI (IV)

de

ȘTEFAN I. NICZKY

Fie X și Y două spații Banach și fie T un operator care aplică sfera închisă $S(x_0, r)$ din X în Y, de trei ori diferențiabil în sens Gâteaux pe $S(x_0, r)$ cu derivata de ordinul întîi continuă inversabilă pe această sferă.

Fie ecuația operatorială

$$Tx = 0 \tag{1}$$

Se introduce operatorul

$$\Phi_R(x) = X - \left\{I + \frac{1}{2}\,\Gamma(x)T''(x)\Gamma(x)T(x) + \frac{1}{2}\,[\Gamma(x)T''(x)]^2[\Gamma(x)T(x)]^2\right\}\Gamma(x)T(x) \tag{2}$$

unde $\Gamma(x) = [T'(x)]^{-1}$, care aplică sfera $S(x_0, r)$ în ea însăși.

În particular dacă în (2) se neglijează ultimul termen, se obține operatorul de tip Cebîșev

$$\Phi_C(x) = X - \left\{I + \frac{1}{2}\,\Gamma(x)T''(x)\Gamma(x)T(x)\right\}\Gamma(x)T(x) \tag{3}$$

studiat atît pentru ecuații operatoriale generale [1 — 5], cît și pentru ecuații funcționale [6 — 10].

Dacă se neglijează și termenul al treilea, se obține operatorul de tip Newton-Kantorovici [11 — 13]

$$\Phi_{NK}(x) = x - \Gamma(x)T(x) \tag{4}$$

DEFINIȚIE. *Se spune că* Φ_R *este un operator iterativ simplu* [4] *atașat, ecuației* (1), *dacă soluția* x^* *a ecuației* (1) *este punct fix pentru operatorul* Φ_R, *și iterația*

$$x_{n+1} = \Phi_R x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

converge către $x^* \in S(x_0, r)$.

Pe lîngă acești operatori se mai consideră și modificatele lor, de exemplu

$$\Phi_{RM}(x) = x - \left\{I + \frac{1}{2}\,[\Gamma_0T''(x)][\Gamma_0T(x)] + \frac{1}{2}\,[\Gamma_0T''(x)]^2[\Gamma_0T(x)]^2\right\}\Gamma_0T(x) \tag{6}$$

unde s-a notat cu $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$.

În cele ce urmează se vor da condiţii suficiente pentru ca operatorii de mai sus să fie operatori iterativi simpli.

Fie funcţia reală $t(\eta)$ definită pe intervalul $[\eta_0, \eta']$ unde $\eta' = \eta_0 + r' < \eta_0 + r$, de trei ori derivabilă pe acest interval şi cu derivata întîi continuă inversabilă.

Fie ecuaţia

$$t(\eta) = 0. \tag{7}$$

Analog operatorilor de mai sus se pot introduce funcţiile

$$\varphi_R, \ \varphi_C, \ \varphi_{NK}, \ \varphi_{RM}.$$

Se poate enunţa principiul general majorant:

(PM) Se spune că ecuaţia (7) majorează ecuaţia (1), dacă

1) $\|Tx_0\| \leqslant t(\eta_0)$,

2) $t'(\eta_0) \neq 0$ şi are loc relaţia $\|\Gamma_0\| \leqslant -\dfrac{1}{t'(\eta_0)}$,

3) $\|T''x_0\| \leqslant t''(\eta_0)$ şi $\|T'''x\| \leqslant t'''(\eta)$, pentru $\|x - x_0\| \leqslant |\eta - \eta_0| \leqslant |\eta' - \eta_0|$.

În cele ce urmează se admite că (7) are rădăcină pe intervalul (η_0, η'). Se va nota cu η^* cea mai mică rădăcină al lui (7) din acest interval.

TEOREMA 1. *Dacă are loc* (*PM*), *atunci* φ_R *este o funcţie iterativă simplă ataşată ecuaţiei* (7), *iar* Φ_R *este un operator iterativ simplu ataşat ecuaţiei* (1) *şi*

$$\|x^* - x_n\| \leqq |\eta^* - \eta_n| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Demonstraţie. Din (2) şi (5) rezultă

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &\leqq \Big[1 + \frac{1}{2} \cdot \|\Gamma_0 T''x_0\| \cdot \|\Gamma_0 Tx_0\| + \frac{1}{2} \|\Gamma_0 T''x_0\|^2 \cdot \|\Gamma_0 Tx_0\|^2\Big] \cdot \\ &\cdot \|\Gamma_0 Tx_0\| \leqq -\Big[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t'(\eta_0)^2} t(\eta_0) t''(\eta_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t'(\eta_0)^4} \cdot \\ &\cdot t(\eta_0)^2 t''(\eta_0)^2\Big] \cdot \frac{t(\eta_0)}{t'(\eta_0)} = \eta_1 - \eta_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Se va arăta în cele ce urmează că 1) — 3) din (PM) rămîn valabile prin trecere de la x_0 la x_1, respectiv de la η_0 la η_1.

a) În baza formulei lui Taylor generalizate [12]

$$Tx = Ty + T'y(x - y) + \frac{1}{2} T''y(x - y)^2 + \frac{1}{2} \int_y^x T'''(\bar{y})(x - \bar{y})^2 \mathrm{d}x \tag{10}$$

unde $x, y \in S(x_0, r)$, $\bar{y} = y + \theta(x - y)$, $0 < \theta < 1$ şi (2) — (5) rezultă

$$Tx_1 = \Big\{\frac{5}{8} + \frac{1}{4} [\Gamma_0 Tx_0] \cdot [\Gamma_0 T''x_0] +$$

$$+ \frac{1}{8} [\Gamma_0 Tx_0]^2 [\Gamma_0 T''x_0]^2\Big\} [\Gamma_0 T''x_0]^2 [\Gamma_0 Tx_0] T''x_0 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} T'''(x)(x_1 - x_0)^2 \mathrm{d}x$$

de aici rezultă evident că

$$\|Tx_1\| \leq t(\eta_1) \tag{11}$$

adică 1) din (PM) rămîne valabil prin trecere de la x_0 la x_1 respectiv de la η_0 la η_1.

b) Din inegalitatea

$$-\|T'x_1 - T'x_0\| \leq \|T'x_1\| - \|T'x_0\|$$

rezultă

$$\|T'x_1\| \geq \|T'x_0\|\left(1 - \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} T''(x)dx}{\|T'(x_0)\|}\right) \geq \|T'(x_0)\|\left(1 + \frac{\int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} t''(\eta)d\eta}{t'(\eta)}\right)$$

și deci

$$\|\Gamma_1\| \leq -\frac{1}{t'(\eta_1)}$$

Deci 2) din (PM) rămîne valabilă pe x_1 respectiv η_1

c) Pentru a arăta că 3) din (PM) rămîne valabil prin trecere de la x_0 la x_1, respectiv de la η_0 la η_1 trebuie arătat că

$$S(x_1, \eta' - \eta_1) \subset S(x_0, \eta' - \eta_0)$$

Într-adevăr

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \eta' - \eta_1 + \eta_1 - \eta_0 = \eta' - \eta_0$$

Prin inducție completă se arată că 1) — 3) rămîne valabil pentru orice iterată. În plus,

$$\eta_{n+1} \geq \eta_n, \ t(\eta_n) \geq 0 \ \text{și} \ \|Tx_n\| \leq t(\eta_n) \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

Întocmind tabelul de variație al funcției f pe $[\eta_0, \eta']$, rezultă în baza condițiilor 1) — 3) din (LP) că

$$\eta_n \leq \eta^* \quad (n = 0., 1, 2, \ldots)$$

și din (12) rezultă că există $\bar{\eta} = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$. Din continuitatea lui φ_R rezultă că: $\bar{\eta} \leq \eta^*$.

Trebuie arătat că $\bar{\eta} = \eta^*$. Pentru aceasta se arată că $\bar{\eta}$ este soluție a ecuației (7). Demonstrația se face prin reducere la absurd. Din (12) rezultă că $t(\bar{\eta}) \geq 0$ Admițînd că este exclus cazul de egalitate, aplicînd φ_R lui $\bar{\eta}$ se ajunge la concluzia că $\varphi_R(\bar{\eta}) < \bar{\eta}$ ceea ce contrazice egalitatea $\bar{\eta} = \varphi_R(\bar{\eta})$ care rezultă în baza continuității lui φ_R și din (2) — (5).

Cum η^* este cea mai mică rădăcină din $[\eta_0, \eta']$ rezultă că φ_R este o funcție iterativă simplă cu centru de iterație η^*. Analog cu (9) se poate arăta că

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq |\eta_{n+1} - \eta_n| \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

și deci

$$||x_{n+p} - x_n|| \leq |\eta_{n+p} - \eta_n| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

de unde rezultă că șirul $\{x_n\}$ este un șir Cauchy și deci există $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Din (12) în baza continuității lui T și t rezultă $||Tx^*|| \leq t(\eta^*)$ și deci teorema este demonstrată.

Evaluarea (9) a erorii se obține din (13) făcînd $p \to \infty$.

TEOREMA 2 *Dacă are loc (PM), atunci φ_{RM} este o funcție iterativă simplă, iar Φ_{RM} este un operator iterativ simplu și*

$$|\tilde{x}^* - \tilde{x}_n| \leq |\tilde{\eta}^* - \eta_n^*| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

unde $\bar{y} = \Phi_{RM}$ (x) pentru $x \in S(x_0, r)$.

Demonstrația se face analog cu demonstrația teoremei 1 cu observația că

$$T'x_n = T'x_0 + \int_{x_0}^{x_n} T''(x)\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Consecința. Dacă au loc următoarele condiții:

1. $||\Gamma_0|| \leq B_0$
2. $||Tx_0|| \leq \rho_0$
3. $||T''x_0|| \leq M_0$ și $||T''x|| \leq N$ pentru $x \in S(x_0, r)$, unde B_0, ρ_0 și M_0 sînt constante, iar cea mai mică rădăcină pozitivă η^* a ecuației

$$t(\eta) = \frac{1}{6} N\eta^3 + \frac{1}{2} M_0\eta^2 - \frac{1}{B_0}\eta + \rho_0 = 0 \tag{15}$$

nu depășește pe η', atunci φ_R și φ_{RM} sînt două funcții iterative simple, iar Φ_R și. Φ_{RM} sînt operatori iterativi simpli și

$$||x^* - x_n|| \leq \eta^* - \eta_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Observație. Se poate remarca ușor că teoremele 1 și 2 rămîn valabile pentru operatorii de tip Cebîșev și Newton-Kantorovici. În acest ultim caz se pot modifica însă condițiile principiului (PM), în sensul simplificării lor. Astfel T și t este suficient să fie doar de două ori derivabile în sens Fréchet pe sfera $S(x_0, \eta' - \eta_0)$, iar condiția 3) din (PM) se poate înlocui cu

3. $||T''x|| \leq t''(\eta)$ pentru $|x - x_0|| \leq |\eta - \eta_0 \leq |\eta' - \eta_0$

În acest caz și ecuația (15) se reduce la

$$t(\eta) = \frac{1}{2} M_0\eta^2 - \frac{1}{B_0}\eta + \rho_0 = 0 \tag{16}$$

unde s-a schimbat doar semnificația lui M_0, adică M_0 este o constantă astfel ca $M_0 \geq ||T''x||$ pentru $x \in S(x_0, r)$.

(Intrat în redacție la 20 decembrie 1966)

BIBLIOGRAFIE

1. V. E. Mirakov, *O primenenii prinţipa majorant dlia metoda Cebîşeva.* Usp. mat. nauk, **11** (1956), 171–174.
2. R. A. Şafiev, *O vektornîh iteraţionnîh proţessah.* J. vîsş.mat.i mat. fiziki **4** (1964), 139–143.
3. M. I. Necepurenko, *O metode Cebîşeva dlia funkţionalnîh urovnenii.* Usp. mat.nauk, **IX** (1954), 2, 163–170.
4. I. S. Niczky, *Metode iterative de rezolvare a ecuaţiilor operatoriale şi aplicaţii.* Lucrare de diplomă. Cluj, 1966.
5. Jankó B. şi Gaidici A., *Despre rezolvarea ecuaţiilor operatoriale prin metoda lui Cebîşev.* ,,St. şi cerc. mat.", 1966, 8.
6. Jankó B. şi Gaidici A., *Asupra metodei lui Cebîşev.* ,,St. şi cerc. mat." (Cluj), **XIII**, 1.
7. Jankó B. şi Gaidici A., *Asupra metodei generalizate a lui Cebîşev.* ,,St. şi cerc. mat.", (Cluj), **XIV**, 1.
8. M. Altman, *Concerning Tchebyshev Methods for Solving Non-Linear Functional Equations.* ,,Bull. Ac. Pol. Sci.", **9** (1961), 261–265.
9. M. Altman, *An Iterative Method of Solving Functional Equations.* ,,Bull. Ac. Pol. Sci.", **9** (1961), 57–62.
10. M. Altman, *A General Majorant Principle for Functional Equations.* ,,Bull. Ac. Pol. Sci.", **9** (1961), 745–751.
11. L. V. Kantorovici, *Funkţionalnîi analiz i prikladnaia matematika.* ,,Usp. Mat. Nauk", 1948, **6**, 89–186.
12. L. V. Kantorovici, *O metode Newtona.* ,,Trudî mat. inst. im. Steklova", **28** (1948), 104–144.
13. L. V. Kantorovici, *Nekotorîe dalneişie primenenia metoda Newtona dlia funkţionalnîh urovnenii.* Vestn. Leningrad. Univ., 1957, 67–103.

ИТЕРАТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ (IV)

(Резюме)

Пусть X и Y два пространства Банаха и T—один оператор, применяющий закрытую сферу (x_0,r) из X в Y и являющийся трижды дифференцируемым в смысле Gâteaux, с непрерывной неопрокидывающейся производной первого порядка на $S(x_0,r)$.

Пусть операторное уравнение (1). Вводится оператор Φ_R определяемый (2). Из этого можно получить оператор Чебышева (3) и оператор Ньютона-Канторовича (4).

Определение. Можно сказать, что Φ_R—простой итеративный оператор (4), присоединённый к уравнению (1), если решение x^* уравнения (1) является неподвижной точкой для оператора Φ_R и итерация (5) сходится к x^* с условием $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S(x_0, r)$.

Можно сказать, что уравнение (7) мажорирует уравнение (1), если имеют место 1^0–3^0 из (PM).

Теорема 1. Если уравнение (7) мажорирует уравнение (1), то φ_R является итеративной функцией а Φ_R—итеративным оператором и имеет место (9).

Теорема 2. Если уравнение (7) мажорирует уравнение (1), то φ_{RM} является итеративной функцией, а Φ_{RM}—итеративным оператором и имеет место (14).

Следствие. Если имеют место 1)-3), то уравнение (16) мажорирует уравнение (1), а φ_R и φ_{RM} являются простыми итеративными функциями, а Φ_R и Φ_{RM}—простыми итеративными операторами.

Замечание. Теоремы, аналогичные 1 и 2, имеют место для оператора Чебышева и для оператора Ньютона-Канторовича.

ITERATIVE OPERATORS (IV)

(Summary)

Let X and Y be two Banach spaces and T the operator which maps the closed sphere $S(x_0, r)$ from X in Y, three times differentiable in the Gâteaux sense, possessing a continuous inversable 1^{st} order derivative on $S(x_0, r)$.

Consider the operatorial equation (1). The operator is defined by (2). Hence the Tchebyshev's operator (3) and Newton-Kantorovich's one (4) can be obtained.

DEFINITION. The operator Φ_R is said to be one-point iterative operator (4) attached to equation 1) if solution x^* of equation (1) is a fixed point for the operator Φ_R and iteration (5) converges to x^* on condition that $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S(x_0, r)$.

We say that equation (7) majorizes equation (1) if the conditions 1)—3) from (PM) are satisfied.

THEOREM 1. If equation (7) majorizes equation (1) then φ_R is one-point iterative function and Φ_R is one-point iterative operator and (9) is valid.

THEOREM 2. If equation (7) majorizes equation (1) then φ_{RM} is one-point iterative function and Φ_{RM} is iterative operator and (14) takes place.

COROLLARY. If the conditions 1)—3) are satisfied then equation (15) majorizes equation (1); φ_R and φ_{RM} are one-point iterative functions; Φ_R and Φ_{RM} are one-point iterative operators.

Remark. Theorems analogous with 1 and 2 can be stated for Tchebyshev and Newton-Kantorovich operators.

O PROBLEMĂ DE APROXIMARE PRIN POLINOAMELE LUI BERNSTEIN

de

GR. MOLDOVAN

1. Introducere. Se știe în baza teoremei lui Weierstrass, că o funcție $f(x)$ definită și continuă pe un interval finit și închis poate fi aproximată oricît de bine cu un polinom. Un polinom cu această proprietate este polinomul lui Bernstein [1], care pentru funcția $f(x)$ și intervalul $[0, 1]$ are expresia

$$B_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) p_{n,i}(x), \tag{1}$$

unde

$$p_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \tag{2}$$

Ordinul de aproximație al funcției $f(x)$ prin polinomul $B_n(f;x)$ se exprimă cu ajutorul modulului de continuitate al acestei funcții

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|, \tag{3}$$

conform inegalității

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq K\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{4}$$

unde K este o constantă independentă de $f(x)$. Pentru prima dată această inegalitate a fost dedusă în 1935 de acad. Popoviciu T. [6] care găsește pentru K valoarea $\frac{3}{2}$. Lorentz G. G. [3], în 1953, găsește pentru constanta K o valoare egală cu $\frac{5}{4}$, iar în 1958 Li Ven-țin [2] obține pentru această constantă valoarea $\frac{19}{16}$. Această constantă a fost încă îmbunătățită în 1959 de Sikkema P. C. [7], care găsește pentru ea valoarea $1 + (20983\sqrt{6} - 47022)/46656 = 1{,}093785\ldots$. Deoarece s-a demonstrat că această constantă este mai mare decît 1, rezultă din cele de mai sus că există o valoare optimă a acesteia, care este cea mai mică valoare a lui K pentru care inegalitatea (4) subzistă pentru $f(x)$, funcţie continuă oarecare. Această chestiune a fost elucidată d S i k k e m a P. C. într-o interesantă lucrare [8] publicată în 1961. El găseşt că valoarea optimă a acestei constante este

$$\frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1{,}0898873\ldots \tag{5}$$

În 1964, M i r a k i a n G. M. [4] găseşte de asemenea o valoare pentru cons tanta K egală cu 1,1761..., dar deja se cunoştea valoarea optimă a aceste constante.

În lucrarea [8] S i k k e m a P. C. menţionează de asemenea că în inegali tatea

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leqslant K_n \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{6}$$

constanta

$$K_n = 1 + \sup_{[0,1]} \sum_{i=0}^{n} \left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[p_{n,i}(x) \tag{7}$$

pentru fiecare n dat este o constantă optimă, în acelaşi sens cu constanta K. Demonstraţia este făcută pentru cazul $n = 6$, care de fapt furnizează constanta optimă K independentă de n şi de $f(x)$. Pentru restul cazurilor metoda de demonstraţie se poate repeta.

Presupunînd că funcţia $f(x)$ satisface condiţia lui Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| < A|x - y|^{\alpha} \quad (A > 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1) \tag{8}$$

unde A este constanta lui Lipschitz, şi dacă ţinem seama de proprietatea modulului de continuitate $\omega(\delta) \leqslant A\delta^{\alpha}$, inegalitatea (5) devine

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leqslant K_n A\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha}. \tag{9}$$

Observaţie. Constanta lui Lipschitz, A, în inegalitatea (8) este o constant optimă, adică este cea mai mică constantă care încă menţine sensul inegalităţi scrise. Dacă $f(x)$ este derivabilă şi derivata sa este mărginită atunci $\alpha = 1$ şi $A = \sup_{[0,1]} |f'(x)|$.

Este clar, din cele precizate pînă aici, că membrul drept al inegalităţii (9 reprezintă o valoare minimă (pentru fiecare n dat) care menţine această inegali tate adevărată pentru orice x.

În cele ce urmează vom indica un algoritm pentru determinarea gradulu minim al polinomului lui Bernstein ce aproximează o funcţie lipschitziană d ordinul α, deci şi continuă, pe intervalul $[0, 1]$ (pe scurt scriem aceasta astfe $f(x) \in \{C_{[0,1]} \wedge \mathrm{Lip}_A \alpha\}$), cu o eroare dată ε. Această problemă a fost de fap menţionată în [5].

2. Un algoritm pentru determinarea gradului minim. 2.1. Relaţia $1 \leqslant K_n \leqslant K$ este adevărată pentru orice n, după cum s-a precizat în paragraful precedent iar egalitatea $K_n = K$ are loc numai cînd $n = 6$. Cele două valori 1 şi K reprezintă cea mai mică şi respectiv cea mai mare valoare a constantelor K_n.

Înlocuim în membrul drept al inegalității (9) pe K_n cu K și determinăm din relația următoare $KA\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} < \varepsilon$ cea mai mică valoare a lui n care mai menține sensul acestei inegalități. Notînd această valoare cu n_1 avem

$$n_1 = \left]\left(\frac{KA}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right[+ 1. \tag{10}$$

Este evident că pentru orice $n > n_1$ avem

$$|f(x) - B_n(f;\, x)| < \varepsilon, \tag{11}$$

dar această inegalitate este adevărată și pentru valori $n < n_1$.

Pe de altă parte, dacă înlocuim în membrul drept al inegalității (9) pe K_n cu 1 din inegalitatea $A\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \geqslant \varepsilon$ rezultă o valoare a lui n

$$n_0 = \left[\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \tag{12}$$

astfel încît pentru orice $n \leqslant n_0$ să avem

$$|f(x) - B_n(f;\, x)| > \varepsilon. \tag{13}$$

Rezultă prin urmare, că inegalitatea (11) începe să fie adevărată pentru o valoare a lui n cuprinsă între n_0 și n_1, $n_0 < n \leqslant n_1$.

Notăm

$$H_n = K_n A\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \tag{14}$$

adică membrul drept din inegalitatea (9) și formăm șirul

$$H_{n_0},\, H_{n_0+i},\, \ldots,\, H_{n_1}. \tag{15}$$

2.2. Valoarea minimă a lui n, $\bar{n}$, pentru care are loc inegalitatea (11) se obține calculînd termenii șirului (15) și primul termen al șirului, H_{n_0+i}(i poate lua una din valorile 0, 1, ..., $n_1 - n_0$) cu proprietatea $H_{n_0+i} \leqslant \varepsilon$ ne furnizează valoarea lui $\bar{n} = n_0 + i$. În acest caz, evident, s-ar putea să existe valori $n > \bar{n}$ astfel ca inegalitatea (11) să nu fie adevărată.

2.3. Pentru calculul celei mai mici valori $\tilde{n}$ a lui n pentru care $H_n \leqslant \varepsilon$ oricare ar fi $n > \tilde{n}$, se începe cu calculul ultimului termen din șirul (15), adică se determină termenii șirului H_{n_1}, H_{n_1-1}, ..., H_{n_0}. Comparînd aceste mărimi cu valoarea lui ε, vom ajunge la un moment dat la inegalitatea $H_{n_1-j} > \varepsilon$. Dacă acesta a fost primul termen al șirului care satisface această inegalitate, atunci $\tilde{n} = n_1 - j + 1$ (j poate lua una din valorile 0, 1, ..., $n_1 - n_0 + 1$).

3. Calculul constantelor K_n. În paragraful precedent s-a pus în evidență șirul $\{H_n\}_{n_0}^{n_1}$ (termenii căruia trebuie calculați) pentru stabilirea lui $\bar{n}$ și $\tilde{n}$. Calculul termenilor acestui șir implică calculul constantelor K_n definite de relația (7). Vom stabili în acest paragraf algoritmul de calcul al acestor constante.

Evident, e suficient să stabilim acest algoritm pentru

$$\overline{K}_n = \sup_{[0,\,1]} \sum_{i=0}^{n} \left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[p_{n,\,i}(x) \text{ deoarece}$$

$$K_n = 1 + \overline{K}_n. \tag{16}$$

Întîi să observăm că putem restrînge intervalul de variație a lui x, $[0, 1]$ la subintervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, aceasta pentru că funcția a cărui supremum se calculează, este simetrică față de $\frac{1}{2}$. Acest lucru rezultă imediat, înlocuind pe x cu $1 - x$. Deci ne ocupăm de algoritmul de calcul pentru

$$\overline{K}_n = \sup_{\left[0,\,\frac{1}{2}\right]} \sum_{i=0}^{n} \left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[p_{n,i}(x). \tag{17}$$

Mărimea $\left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[$ e constantă, pentru fiecare i dat, cînd x variază într-un anumit interval. Deci există o diviziune a intervalului $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ astfel ca pe fiecare subinterval al diviziunii mărimea $\left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[$ să ia valori constante pentru un i dat. Fie această diviziune următoarea:

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{s+1} = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Nodurile acestei diviziuni se obțin calculînd expresia

$$\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{i}{n} \tag{19}$$

pentru $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm [\sqrt{n}]$; $i = 0, 1, \ldots, n$ și alegînd acele valori care sînt cuprinse între 0 și $\frac{1}{2}$. Le ordonăm și primim șirul (18).

Funcția $p_{n,i}(x)$ pe fiecare subinterval al diviziunii (18) este monotonă. Valorile maxime ale acestei funcții se obțin pentru $x = \frac{i}{n}$ $\left(i = 0, \overline{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$ care sînt, de fapt, noduri ale diviziunii (18).

Pentru calculul mărimii K_n vom proceda în felul următor: vom determina valoarea funcției

$$\sum_{i=0}^{n} \left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[p_{n,\,i}(x) \tag{20}$$

în fiecare nod al diviziunii (18), iar pe urmă supremumul acestei funcții pe subintervalele diviziunii (18). Obținem un șir de valori, și cea mai mare dintre acestea va reprezenta pe K_n. Calculînd valorile funcției (20) pe nodurile diviziunii

(18) și supremumul aceleiași funcții pe subintervalele determinate de diviziunea (18), se vor obține unele rezultate egale, dar acest lucru nu influențează rezultatul final.

Pentru a calcula supremumul funcției (20) pe subintervalele diviziunii (18), se calculează valoarea lui $p_{n,i}(x)$ în cele două extremități ale subintervalului, se alege valoarea mai mare dintre acestea, iar apoi aceasta se înmulțește cu mărimea $\left]\sqrt{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\right[$ calculată pentru x situat la mijlocul acelui subinterval.

4. Descrierea algoritmilor de determinare a lui $\overline{n}$ și $\widetilde{n}$ în limbajul algoritmic internațional ALGOL–60. Limbajul algoritmic internațional ALGOL–60 de programare automată la mașinile electronice de calcul se folosește tot mai mult în lucrările de analiză numerică pentru descrierea algoritmilor de calcul ai diferitelor procedee numerice [9]. În cele ce urmează vom descrie în limbajul ALGOL–60 algoritmii de calcul stabiliți în paragrafele precedente pentru determinarea lui $\overline{n}$ și $\widetilde{n}$. Pentru aceasta vom da întîi un procedeu pentru calculul constantelor K_n iar apoi procedeele corespunzătoare pentru determinarea lui $\overline{n}$ și $\widetilde{n}$.

4.1 Denumim procedeul de calcul al constantelor K prin identificatorul K iar valoarea sa o notăm cu Kn.

```
procedure K(n, Kn); integer n; real Kn;
begin integer l, s; array x[1 : 2 × n ×
  entier (sqrt(n))], Tn[1: 2 × s + l];
comment: Se calculează termenii șirului {x_i}_1^(s+1)
  cu ajutorul cărora se formează o diviziune a
  intervalului [0, 1/2] ce se folosește la determi-
  narea constantei Kn;
begin real xik, temp; integer h, i, j, k;  s: = 0;
  for i: = 0 step 1 until n do
  for k: = 0, k + 1 while k/sqrt(n) + i/n ≤ 1/2,
    if i ≠ 0 then -entier (sqrt(n)) else, k + 1 while
    (0 ≤ k/sqrt(n) + i/n) ∧ (k/sqrt(n) + i/n ≤ 1/2) do
        begin xik: = k/sqrt(n) + i/n;
        if (0 ≤ xik) ∧ (xik < 1/2) then
        begin s: = s + 1; x[s]: = xik end
        end; x[s + l]: = 1/2;
comment: Ordonăm șirul {x_i}_1^(s+1), pentru a putea
  stabili subintervalele ce ne interesează;
  for h: = 1 step 1 until s do
  for j: = h + 1 step 1 until s + 1 do
    if x[h] > x[j] then
      begin temp: = x[h]; x[h]: = x[j];
        x[j]: = temp
      end
end;
for l: = 1 step 1 until s + 1 do
begin integer i, real y; array
  Cn[0: n], pn, ppn, qn, qqn, rn, rrn,
  tn, ttn [0: n, -1: s];
  tn[-1, 0]: = ttn[-1, 0]: = 0;
  for i: = 0 step 1 until n do
    begin Cn[0]: = 1; pn[i, x[l]]: = Cn[i] × (x[l]
    ↑ i) × (1 − x[l])↑(n − i);
    Cn[i + 1]: = (n − i) × Cn[i]/(i + 1);
    if (pn[i, x[l]] < pn[i, x[l + 1]]) ∧ (l ≤ s)
      then pn[i, l]: = pn[i, x[l + 1]] else
      if l = s + 1 then go to R else pn[i, l]: =
      pn[i, x[l]]; y: = (x[l] + x[l + 1])/2;
    rn[i, l]: = sqrt(n) × abs(y − i/n);
    if rn[i, l]-entier (rn[i, l]) ≠ 0
      then qn[i, l]: = entier (rn[i, l])
      else qn[i, l]: = rn[i, l] − 1;
    tn[i, l]: = pn[i, l] × qn[i, l];
    tn[i, l]: = tn[i − 1, l] + tn[i, l];
  R: ppn[i, l]: = pn[i, x[l]];
    rrn[i, l]: = sqrt(n) × abs(x[l] − i/n);
    if rrn[i, l]-entier (rrn[i, l]) ≠ 0
      then qqn[i, l]: = entier(rrn[i, l])
      else qqn[i, l]: = rrn[i, l] − 1;
      ttn[i, l]: = ppn[i, l] × qqn[i, l];
    end i;
      Tn[l]: = tn[n, l];
      Tn[l + s]: = ttn[n, l];
    end l;
begin integer j, real temp;
  for j: = 1 step 1 until 2 × s do
  if Tn[j] > Tn[j + 1] then
    begin temp: = Tn[j]; Tn[j]: = Tn[j + 1];
      Tn[j + 1]: = temp
    end
end;
  Kn; = 1 + Tn[2 × s + 1];
end procedure
```

4.2. Acum vom descrie în limbajul ALGOL–60 procedeul de calcul al mărimii $\overline{n}$ în care vom folosi procedeul, descris mai sus, de calcul al constantei K_n.

```
procedure nbara (A, alfa, epsilon, K, Hn);
  value A, alfa, epsilon;
  real A, alfa, epsilon, Hn;
  real procedure K;
comment: nbara reprezintă gradul minim al polinomului lui Bernstein atașat funcției
  f(x) ∈ {C[0,1] ∧ Lip_A α}, care aproximează această funcție cu o eroare dată epsilon.
  Pot fi valori n > nbara pentru care inegalitatea |f(x) − B_n(f;x)| < ε să nu fie adevărată;
begin integer n, nzero, nbara;
  nzero: = entier ((A/epsilon) ↑ (2/alfa));
  n: = nzero;
R: K(n, Kn);
  Hn: = Kn × A × (1/sqrt(n)) ↑ alfa;
  if Hn > epsilon then
    begin n: = n + 1; go to R end
    else nbara: = n
end
```

4.3. În fine, în cele ce urmează vom descrie în limbajul ALGOL−60 procedeul de calcul al mărimii $\tilde{n}$. Vom folosi de asemenea procedeul K descris la 4.1.

```
procedure nondulat (A, alfa, epsilon, K, Hn);
  value A, alfa, epsilon;
  real A, alfa, epsilon, Hn;
  real procedure K;
comment: nondulat reprezintă gradul minim al polinomului lui Bernstein B_n(f; x) atașat
  funcției f(x) ∈ {C[0,1] ∧ Lip_A α} care aproximează această funcție cu o eroare dată
  epsilon. Inegalitatea |f(x) − B_n(f; x)| < ε este satisfăcută pentru orice n > nondulat;
begin integer n, nunu, nondulat;
  nunu: = if (1.0898873 × A/epsilon) ↑
  (2/alfa)-entier ((1.0898873 × A/epsilon) ↑
  (2/alfa)) ≠ 0 then entier ((1.0898873 × A/epsilon)
  ↑ (2/alfa)) + 1 else (1.0898873 × A/epsilon) ↑
  (2/alfa);
  n: = nunu;
R: K(n,Kn);
  Hn: = Kn × A × (1/sqrt(n)) ↑ alfa;
  if Hn < epsilon then
    begin n: = n − 1; go to R end
    else nondulat: = n + 1
end
```

(Intrat în redacție la 27 martie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. Bernstein S. N. *Demonstration du théorème de Weierstrass sur le calcul des probabilités.* Commun. Soc. Math. Kharkov, **13**(**2**), 1−2. (1912).
2. Li Ven-țin, *Shuxue jinzhkan*, **4**, 567 (1958).
3. Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*, Toronto, 1953.
4. Mirakian G. M., *Pribilijenie polinomami S. N. Bernștcina nepreryvnîh funkții.* DAN SSSR, **159**, 982−984 (1964).
5. Moldovan Gr., *Asupra aproximării funcțiilor continue prin polinoame Bernstein.* Studia Univ. Babeș-Bolyai, Series Math. Physica, fasc. 1, 63-71 (1966).
6. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49−54 (1935).
7. Sikkema P. C., *Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen.* Numerische Math. **1**, 221−239 (1959).
8. Sikkema P. C., *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen.* Numerische Math. **3**, 107−116 (1961).
9. Stancu D. D., *Despre programarea automată la calculatoarele electronice cifrice.* Gazeta mat. **70**, 170−173 (1965).

ОДНА ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА

(Резюме)

В работе указывается алгоритм для определения минимальной степени многочлена Бернштейна, аппроксимирующего функцию $f(x)$ типа Липшица порядка α и постоянной A, с данной погрешностью ε. Алгоритм состоит в вычислении терминов последовательности $\{H_n\}_{n_0}^{n_1}$, где $H_n = K_n A \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha}$, а $n_0 = \left[\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$ и $n_1 = \left]\left(\frac{KA}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right[+ 1$.

Данный алгоритм описан в международном алгоритмическом языке ALGOL - 60.

UN PROBLÈME D'APPROXIMATION PAR LES POLYNÔMES DE BERNSTEIN

(Résumé)

L'auteur indique un algorithme pour la détermination du degré minimum du polynôme de Bernstein approximant une fonction lipschitzienne d'ordre α et de constante A, $f(x)$, avec une erreur donnée ε. L'algorithme consiste dans le calcul des termes de la série $\{H_n\}_{n_0}^{n_1}$, ou $H_n = K_n A \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha}$, $n_0 = \left[\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$ et $n_1 = \left]\left(\frac{KA}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right[+ 1$.

L'algorithme respectif est décrit dans le langage algorithmique international ALGOL-60.

O FORMULĂ DE CUADRATURĂ CU 5 NODURI CU GRADUL DE EXACTITATE 5

de

GH. MICULA

Se caută o formulă de cuadratură de următoarea formă

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4) + R \tag{1}$$

care să aibă gradul de exactitate 5, iar nodurile să fie situate astfel

$$\underset{a}{\bullet}\text{———}\underset{x_1}{\bullet}\text{———}\underset{x_2}{\bullet}\text{———}\underset{x_3}{\bullet}\text{———}\underset{b}{\bullet}$$

$$x_0 = a,\ x_1 = x_2 - kh,\ x_2 = \frac{a+b}{2},\ x_3 = x_2 + kh,\ x_4 = b,\ k \in (0, 1), h = \frac{b-a}{2},$$

iar $f(x) \in C^6[a, b]$.

Prof. D. V. Ionescu [1] a făcut un studiu amănunțit al formulelor de cuadratură cu nodurile a, b și încă două noduri simetrice față de mijlocul intervalului (a, b). De asemenea A. Coțiu ([3] a studiat cîteva cazuri de astfel de formule de cuadratură.

Aplicînd metoda întrebuințată de prof. D. V. Ionescu se atașează intervalelor $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, b]$ funcțiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, care satisfac următoarele ecuații diferențiale

$$\varphi_1^{(6)}(x) = 1,\ \varphi_2^{(6)}(x) = 1,\ \varphi_3^{(6)}(x) = 1,\ \varphi_4^{(6)}(x) = 1 \tag{2}$$

și condițiile la limită

$$\varphi_1^{(i)}(a) = 0,\ \varphi_{k+1}^{(i)}(x_k) = \varphi_k^{(i)}(x_k),\ \varphi_4^{(i)}(b) = 0 \tag{3}$$

unde $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3$.

Integrala (1) se poate scrie astfel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} \varphi_1^{(6)}(x) f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(6)}(x) f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3^{(6)}(x) f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_3}^{b} \varphi_4^{(6)}(x) f(x)\mathrm{d}x$$

Aplicînd fiecărui termen din membrul doi, formula generalizată de integrare prin părţi, şi ţinînd seama de condiţiile la limită (3), se obţine

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\varphi_1^{(5)}(a)f(a) + [\varphi_1^{(5)}(x_1) - \varphi_2^{(5)}(x_1)]f(x_1) + [\varphi_2^{(5)}(x_2) - \varphi_3^{(5)}(x_2)]f(x_2) +$$

$$+ [\varphi_3^{(5)}(x_3) - \varphi_4^{(5)}(x_3)]f(x_3) + \varphi_4^{(5)}(b)f(b) + \int_a^b \varphi(x)f^{(6)}(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ pe intervalele $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, b]$.

Soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale (2) cu condiţiile (3) este următoarea:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^6}{6!} + \frac{h}{15}\,\frac{5k^2-3}{1-k^2}\,\frac{(x-a)^5}{5!}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a)^6}{6!} + \frac{h}{15}\,\frac{5k^2-3}{1-k^2}\,\frac{(x-a)^5}{5!} - \frac{2h}{15}\,\frac{1}{k^2(1-k^2)}\,\frac{(x-x_1)^5}{5!}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(h-x)^6}{6!} + \frac{h}{15}\,\frac{5k^2-3}{1-k^2}\,\frac{(h-x)^5}{5!} - \frac{2h}{15}\,\frac{1}{k^2(1-k^2)}\,\frac{(x_3-x)^5}{5!}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(b-x)^6}{6!} + \frac{h}{15}\,\frac{5k^2-3}{1-k^2}\,\frac{(b-x)^5}{5!}$$

Formula (1) devine

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{15}\left\{-\frac{5k^2-3}{1-k^2}[f(a)+f(b)] + \frac{2}{k^2(1-k^2)}[f(x_1)+f(x_3)] +\right.$$

$$\left.+\frac{4(5k^2-1)}{k^2}f(x_2)\right\} + \int_a^b \varphi(x)f^{(6)}(x)\mathrm{d}x$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide, pe intervalele considerate, cu funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$.

Studiul restului. Restul formulei de cuadratură (5) este dat de expresia

$$R = \int_a^b \varphi(x)f^{(6)}(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

Din expresiile funcţiilor $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ se observă că funcţia $\varphi(x)$ este simetrică faţă de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$. Graficul funcţiei $\varphi(x)$ este dat în fig. 1.

Discuţia restului (6) se face în funcţie de parametrul k.

1. Se observă din grafic, că funcţia $\varphi(x)$ este de semn constant pentru $0 < k < 0{,}6404$ şi $\sqrt{\frac{3}{5}} < k < 1$. Pentru aceste valori ale parametrului k, se aplică formula mediei, integralei (6):

$$R = f^{(6)}(\xi)\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in (a, b) \quad \text{sau} \quad |R| \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad M = \sup_{x\in(a,b)}|f^{(6)}(x)|.$$

Înlocuind în formula de cuadratură (5) $f(x) = \frac{1}{6!}(x-a)(x-x_1)(x-x_2)^2(x-x_3)(x-b)$

se obţine $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{h^7}{18.900}[7k^2 - 3]$

Deci restul are evaluarea

$$|R| \leqslant M\frac{h^7}{18.900}[7k^2 - 3]$$

2. Pentru $0{,}74487 < k < \sqrt{\frac{3}{5}}$ funcţia $\varphi_1(x)$ intersectează axa Ox în punctul $x_1 = a - \frac{2h}{5}\,\frac{5k^2-3}{1-k^2}$.

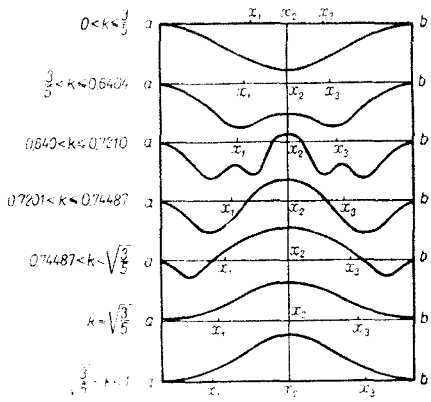


Fig. 1.

În acest caz restul va avea următoarea evaluare $|R| \leqslant M\int_a^b |\varphi(x)|\mathrm{d}x$, iar

$$\int_a^b |\varphi(x)|\mathrm{d}x = \frac{h^7}{8!}\left[\frac{2^8}{21\cdot5^7}\left(\frac{5k^2-3}{1-k^2}\right)^7 - \frac{4}{15}\cdot\frac{3-5k^2}{1-k^2} - \frac{2}{7}\right]$$

sau

$$|R| \leqslant M\frac{h^7}{6!}E$$

unde cu E s-a notat expresia din paranteză.

Cazuri particulare. a) Pentru $k = \sqrt{\frac{3}{5}}$ se obţine o formulă de cuadratură de tip Gauss ([1] pag. 284)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{9}[5f(x_1) + 8f(x_2) + 5f(x_3)] + \int_a^b \varphi(x)f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Pentru $k = \frac{1}{2}$ se obţine formula de cuadratură a lui Côtes ([1] pag. 239)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{45}\{7[f(a) + f(b)] + 32[f(x_1) + f(x_3)] + 12f(x_2)\} + \int_a^b \varphi(x)f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Pentru $k = \frac{1}{\sqrt{5}}$ se obţine o formulă de tip Gauss ([1] pag. 314)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{6}\,[f(a) + 5f(x_1) + 5f(x_3) + f(b)] + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Cazuri speciale. a) $k = \sqrt{\frac{3}{7}}$. În acest caz rezultă $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$ deci $R = 0$. Prin urmare formula de cuadratură (5) este exactă pentru orice polinom de gradul 6. Se poate verifica, că formula (5) este adevărată şi pentru orice polinom de grad 7.

Formula de cuadratură, în acest caz, are gradul de exactitate 7 şi devine

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{90}[9f(a) + 49f(x_1) + 64f(x_2) + 49f(x_3) + 9f(b)] + \int_a^b \varphi(x) f^{(8)}(x)\,\mathrm{d}x$$

b) $k = 0$. În acest caz nodurile x_1, x_2, x_3 sînt confundate în mijlocul intervalului (a, b), deci avem nodurile a, $\frac{a+b}{2}$ (triplu), b. Intervalelor $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ li se ataşează funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ soluţiii ale ecuaţiilor diferenţiale

$$\varphi_1^{(6)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(6)}(x) = 1$$

care satisfac următoarele condiţii:

$$\varphi_1^{(k)}(a) = 0, \quad \varphi_2^{(h)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_1^{(h)}\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \varphi_2^{(k)}(b) = 0$$

unde $k = 0, 1, 2, 3, 4$ şi $h = 0, 1, 2$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi_1^{(5)}(a)f(a) + \left[\varphi_2^{(5)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi_2^{(5)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] +$$

$$+\left[\varphi_2^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi_1^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + \left[\varphi_1'''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi_2'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] +$$

$$+\varphi_2^{(5)}(b)f(b) + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Se găseşte că

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^6}{6!} - \frac{h}{5}\,\frac{(x-a)^5}{5!}, \quad \varphi_2(x) = \frac{(b-x)^6}{6!} - \frac{h}{5}\,\frac{(b-x)^5}{5!}$$

Se obţine următoarea formulă de cuadratură:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{5}\left[f(a) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2h^2}{3}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R$$

unde

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

c) $k = 1$. Nodul x_1 coincide cu a, iar nodul x_3 cu b. Prin urmare avem nodurile a (dublu), $\frac{a+b}{2}$, b (dublu).

Se consideră funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale

$$\varphi_1^{(6)}(x) = 1,\ \varphi_2^{(2)}(x) = 1$$

şi care satisfac condiţiile la limită:

$$\varphi_1^{(k)}(a) = 0,\ \varphi_2^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_1^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right),\ \varphi_2^{(k)}(b) = 0,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Se obţine următoarea formulă de cuadratură:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7h}{15}[f(a) + f(b)] + \frac{h^2}{15}[f'(a) - f'(b)] + \frac{16h}{15}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R$$

unde

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Funcţia $\varphi(x)$ fiind pozitivă se obţine următoarea evaluare a restului $R = f^{(6)}(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, $\xi \in (a, b)$, unde $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^7}{4725}$, şi deci

$$|R| < M\frac{h^7}{4725}$$

Aceasta este o formulă de cuadratură de tip Gauss ([2] pag. 112)

(Intrat în redacţie la 23 ianuarie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, Bucureşti 1957.
2. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*, Studii şi cercetări matematice (Cluj) **IX**, 1958, fasc. 1–4.
3. A. Coţiu, *O observare asupra formulelor de cuadratură cu patru noduri*, G.M.F. 1965, **VII**.

ОДНА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С 5 УЗЛАМИ 5-ОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

(Резюме)

В работе изучается одна квадратурная формула с узлами a, b, $\frac{a+b}{2}$, x_1, x_3, где x_1 и x являются симметричными по отношению к узлу $\frac{a+b}{2}$, но переменными, следовательно $x_1 = \frac{a+b}{2} - kh$, $x_3 = \frac{a+b}{2} + kh$, где $h = \frac{b-a}{2}$, а параметр k колеблется между 0 и 1. Рассматриваетс остаток этой формулы 5-ой степени точности по значениям k. Изучаются и специальные случаи когда $k = 0$ и $k = 1$. Для определённых значений k степень точности квадратурной формул увеличивается.

A QUADRATURE FORMULA WITH 5 NODES HAVING THE DEGREE OF EXACTNESS 5

(Summary)

The author discusses a quadrature formula with the nodes a, b, $\frac{a+b}{2}$, x_1 and x_3, the last two being variable but symmetrical with regard to $\frac{a+b}{2}$. Hence $x_1 = \frac{a+b}{2} - kh$, $x_3 = \frac{a+b}{2} + kh$ where $h = \frac{b-a}{2}$, the parameter k varing between o and 1. The remainder of this formula with the degree of exactness 5 is discussed according with the different values of k. The special cases $k = 0$ and $k = 1$ are studied as well.

For certain values of k the degree of exactness of the quadrature formula increases.

ON THE REMAINDER OF SOME GAUSSIAN FORMULAE

by

PARASCHIVA PAVEL

1. In his work [5] P. T u r á n proved the following theorem: *If* k is a non-negative integer and $f(x)$ is a polynomial of degree $\leq (2k+2)\,n-1$, then there exist some coefficients $A_i^{(j)}$ independent of $f(x)$, such that the following formula is valid

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{2k} A_i^{(j)} f^{(j)}(x_i). \tag{1}$$

O. K i s s [4] found a simple expression for the coefficients $A_i^{(j)}$which occur in (1). His result is stated in the following theorem: *If* $g(t)$ is an even trigonometrical polynomial of degree $\leq 2(k+1)\ n-1$, then

$$\int_{0}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{n\cdot k\,!^2}\sum_{\rho=0}^{k}\frac{S_\rho}{4^\rho n^{2\rho}}\sum_{\nu=i}^{k} f^{(2\rho)}\left(\frac{2\nu-1}{2n}\,\pi\right), \tag{2}$$

where $s_{k-\nu}(\nu=0,\ 1,\ \ldots,k)$ denotes the symmetrical elementary polynomials with respect to the numbers $1,\ 4,\ \ldots,\ k^2$, *i. e.* $s_k = 1$, $s_{k-1} = 1+4+\ \ldots\ k^2,\ \ldots,\ s_0 = 1\cdot$ $\cdot\, 4\ \ldots\ k^2$

Because $f(x)$ is a polynomial of degree $\leq 2\ (k+1)\ n-1$, $f(\cos t)$ is a trigonometrical polymial of degree $\leq 2(k+1)\ n-1$ and

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{0}^{\pi} f(\mathrm{cost})dt.$$

Consequently

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n\cdot k\,!^2}\sum_{\rho=0}^{k}\frac{S_\rho}{4^\rho n^{2\rho}}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}^{2\rho}}{\mathrm{d}t^{2\rho}}f(\mathrm{cost})\right]_{t=\frac{2\nu-1}{2n}\pi} \tag{3}$$

Our purpose is to find the remainder of the quadrature formula (4) in the form of an integral by making use of general method given by D. V. I o n e s c u [1].

2. Supposing that $f(x) \in C^{(2k+2)n}$, we want to find a quadrature formula of degree of exactness $(2k+2)\,n-1$ of the form:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{2k} A_i^{(j)} f_{(xi)}^{(j)} + R. \tag{4}$$

To this end we shall divide the interval $(-1,1)$ in n subintervals through the points $x_1, \ldots, x_n$ and attach to each interval $(xi,\ x_{i+1})$, a function φ_{i+1} such that

$$\frac{d^{(2k+2)n}\varphi_{i+1}(x)}{dx^{(2k+2)n}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ i = \overline{0,n} \tag{5}$$

The integral of the left-hand side of (4) may be written:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}^{[(2k+2)n]}(x)\, f(x)\,dx;\ i_0 = -1,\ i_{n+1} = 1.$$

Apply to each integral of the right-hand side the generalized formula of integration by parts [9]:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}^{[(2k+2)n]}(x)\, f(x)dx = [\varphi_{i+1}^{[(2k+2)n-1]}(x)f(x) - \varphi_{i+1}^{[(2k+2)n-2]}(x)\, f'(x) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_{i+1}(x)\, f^{[(2k+2)n-1]}(x)\,]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x)\, f^{[(2k+2)n]}(x)\,dx.$$

Adding all these equalities and imposing the conditions

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(-1) = 0 & \varphi_1'(-1) = 0 & \ldots & \varphi_1^{[(2k+2)n]}\ (-1) = 0 \\
\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1) & \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1) & \ldots & \varphi_1^{[2(n-1)(k+1)]}(x_1) = \varphi_2^{[2(n-1)(k+1)]}(x_1) \\
- & - & - & - \\
\varphi_n(x_n) = \varphi_{n+1}(x_n), & \varphi_n'(x_n) = \varphi_{n+1}'(x_n) & \ldots & \varphi_n^{[2(n-1)(k+1)]}(x_n) = \varphi_{n+1}^{[2(n-1)(k+1)]}(x_n) \\
\varphi_{n+1}(1) = 0 & \varphi_{n+1}'(1) = 0 & \ldots & \varphi_{n+1}^{[(2k+2)n-1]}(1) = 0.
\end{array} \tag{6}$$

we get the quadrature formula (4) where

$$\begin{aligned}
A_i^{(0)} &= \varphi_i^{[2(k+1)n-1]}(x_i) - \varphi_{i+1}^{[2(k+1)n-1]}(x_i) \\
A_i^{(1)} &= \varphi_i^{[2(k+1)n-2]}(x_i) - \varphi_{i+1}^{[2(k+1)n-2]}(x_i) \\
&- \quad - \quad - \\
A_i^{(2k)} &= \varphi_i^{[2(k+1)n-2k-1]}(x_i) - \varphi_{i+1}^{[2(k+1)n-2k-1]}(x_i).
\end{aligned} \tag{7}$$

The remainder is:

$$R = \int_{-1}^{1} \varphi x) \frac{\mathrm{d}^{2(k+1)n} f(x)}{\mathrm{d}x^{2(k+1)n}}\, dx. \tag{8}$$

The solutions of the differential equations (3) with the conditions (6) are:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{(x-s)^{(2k+2)n-1}}{[2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \\
\varphi_2(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{(x-s)^{(2k+2)n-1}}{[(2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{\lambda_i^{(1)}(x-x_i)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!} \\
&\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
\varphi_{n+1}(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{(x-s)^{(2k+2)n-1}}{[(2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds + \sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{(1)} \frac{(x-x_i)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!} + \\
&\quad + \ldots + \sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{(n)} \frac{(x-x_n)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!}
\end{aligned} \tag{9}$$

Taking into account the remaining conditions from the point $x = 1$ we are lead to the system of equations

$$\lambda_1^{(1)} + \qquad \lambda_1^{(2)} + \qquad \ldots \qquad + \lambda_1^{(n)} = - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} \tag{10}$$

$$\lambda_1^{(1)}(1-x_1) + \lambda_2^{(1)} + \qquad \lambda_1^{(2)}(1-x_2) + \lambda_2^{(2)} + \ldots + \lambda_1^{(n)}(1-x_k) + \lambda_2^{(n)} = - \int_{-1}^{1} \frac{1-s}{1!} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\lambda_1^{(1)} \frac{(1-x_1)^2}{2!} + \lambda_2^{(1)} \frac{1-x_1}{1!} + \lambda_3^{(1)} + \lambda_1^{(2)} \frac{(1-x_2)^2}{2!} + \lambda_2^{(2)} \frac{1-x_2}{1!} + \lambda_3^{(2)} + $$
$$+ \ldots + \lambda_1^{(n)} \frac{(1-x_n)^2}{2!} + \lambda_2^{(n)} \frac{(1-x_n)}{1!} + \lambda_3^{(n)} = - \int_{-1}^{1} \frac{(1-s)^2}{2!} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{(1)} \frac{(1-x_1)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!} + \sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{(2)} \frac{(1-x_2)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!} + \ldots + \sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{(n)} \frac{(x-x_n)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-i]!} =$$
$$= - \int_{-1}^{1} \frac{(x-s)^{(2k+2)n-i}}{[(2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds.$$

The solution of this system fully determines the formula (4) with its remainde (5). It is readily seen that this system is equivalent to the system which one migh obtain by writing down that (4) is exact for $1, x, \ldots, x^{(2k+2)n-1}$.

3. In general, the algebraic system (10) is difficult to be solved, so the following remark may be useful.

Let

$$\omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n) \tag{11}$$

be where $x_1, \ldots, x_n$ are the nodes of formula (4), for the indetermined momen and write that this formula is true for:

$$x^h \omega^i(x), \ h = 0, 1, \ldots, n-1 ; \ i = 0, 1, \ldots, 2k+1$$

We obtain:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \omega^{2k+1}(x)\, x^h dx = 0 \quad h = 0, \ 1, \ldots, n-1 \tag{12}$$

This is an algebraic system having $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as unknowns.

Recall the following result due to D. Jackson [3]:
Consider the functional

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \omega^{2k+2}(x)\, dx, \ k \geqslant 0. \tag{13}$$

where $\omega(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$, then the conditions of the form (12) ar necessary and sufficient for the existence of the minimum of functional (13)

S. N. Bernstein [a] has proved that the minimizing polynomial fo (13) on the class of polynomials of degree n is Tchebycheff's polynomial:

$$T_n(x) = \cos n \arccos x. \tag{14}$$

Thus the roots of the Tchebycheff polynomial, $x_i = \cos \frac{2i-1}{2n}$, are the solutions o the system (12), that is the nodes of the quadrature formula (4)

The coefficients $A_i^{(k)}$ may be determined by substituting in (4) $f(x)$, successively by $x^h\ \omega^i(x)$, $h=0, 1, \ldots, n-1$; $I=0, \ldots, 2k$. We notice that the coefficient may be found as in [4].

4. In the sequel we shall disscuss the function $\varphi(x)$. It is easy to see that th function

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^{x} \frac{x-1}{[(2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds ; \ x \in (-1, \ x_1]$$

is positive together with its derivative, in the interval $(-1,1)$. On the other han the function

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{(x-s)^{(2k+2)n-1}}{[(2k+2)n-1]!} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds ; \ x \in [x_n, 1)$$

is decreasing and positive on $(x_n, 1)$.

Lemma In the interval (x_1, x_n) the function $\varphi(x)$ has a single extremum.

Indeed, by the previous result, one can see that the number of the extrema of $\varphi(x)$ must be odd. Assume it has 3 extrema, e. g. the derivative $\varphi'(x)$ vanishes in 3 points. Let us show that this is impossible. Applying Rolle's theorem and by conditions (3) in $x=-1$, $x=1$, this would mean that $\varphi^{[(2k+2)n-i(2k+2)]}(x)$ vanishes in the $(2k+2)\,n-2k$ points $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{(2k+2)n-2k}$ (x_1, x_n). In an interval (x_k, x_{k+1}) there can not exist $2k+3$ points, since $\varphi_k^{[(2k+2)n]}(x)$ would vanish in a point from (x_k, x_{k+1}). This is impossible because of (2).

Therefore, in each interval (x_k, x_{k+1}) there exist at most $2k+2$ points in which $\varphi^{[(2k+2)n-(2k+2)]}(x)$ is zero. But there are $n-1$ intervals so, 2 points ξ_i do not belong to any interval. This is a contradiction, consequently our assumption is false. This completes the proof.

From the above it immediately follows that $\varphi(x)$ is positive.

5. The positivness of function $\varphi(x)$ on $(-1,1)$ makes it possible to estimate the remainder given by (8). We have

$$R = f^{[(2k+2)n]}(\xi)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\,; \quad \xi\in(-1,1)$$

To calculate the integral in the right-hand side we replace in (1)

$$f(x) = \frac{1}{[(2k+2)n]!}\cdot\frac{1}{2^{(n-1)(2k+2)}}\,T_n^{2k+2}(x)$$

and obtain

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = \frac{1}{[2(k+1)n]!}\cdot\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\,\frac{\pi}{2^{(n-1)(2k+2)}}$$

that is

$$|R| \leq M_{(2k+2)n}\cdot\frac{1}{[(2k+2)n]!}\,\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\,\frac{\pi}{2^{(n-1)(2k+2)}} \tag{15}$$

where

$$M_{(2k+2)n} = \sup_{(-1,1)}|f^{[(2k+2)n]}(x)|.$$

Thus we have determined the remainder of (4) by (8) and we estimated it by formula (15).

(Received November 24th, 1966)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnică, 1957.
2. D. V. Ionescu, *Restul în formula de cuadratură a lui Gauss şi P. Turán* (sub tipar).
3. D. Jackson, *On Functions of Closest Approximation Transactions of the American Mathematical Society*, 1921, **22**, pp. 117–128.

4. O. K i s s, *Zameciar.ie o mehaniceskoi kvadrature*. „Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae", 1957, pp 473—476.
5. P. T u r a n, *On the Theory of the Mathematical Quadrature*. „Acta Scient. Mathem.", **12**, 30—37 (1950)
6. T. P o p o v i c i u, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. „Studi şi cercet. ştiinţifice, Iaşi," 1—2, 29—57 (1955).
7. D. D. S t a n c u, *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate* „Comunicările Acad. R.P.R.", **8**, nr. 4, 1958.
8. S. B e r n s t e i n, *Asupra polinoamelor ortogonale relativ la un interval finit*, „Journal de Math.' **(9)**, 1930, pp. 127—177, 1931, pp. 219—286.
9. M. N i c o l e s c u, *Manual de analiză matematică*, vol. II, p. 60. Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1964.

ASUPRA RESTULUI UNOR FORMULE DE CUADRATURA DE TIP GAUSS

(R e z u m a t)

Autorul studiază restul formulei de cvadratură (4) servindu-se de metoda prof. D. V. Ionescu [1] şi demonstrează că acest rest poate fi pus sub formă de integrală definită (8).

Arătîndu-se că funcţiunea $\varphi(x)$ determinată de ecuaţiile diferenţiale (5) şi condiţiile la limită (6) este pozitivă în intervalul $(-1, 1)$ se obţine evaluarea (15) a restului formulei de cuadratură (4).

ОБ ОСТАТКЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ КВАДРАТУРЫ ТИПА ГАУССА

(Р е з ю м е)

Автор изучает остаток формулы квадратуры (4), используя метод проф. Д. В. Ионеску [1], и показывает, что этот остаток можно поставить в виде определённого интеграла (8).

Доказывая, что функция $\varphi(x)$, определяемая дифференциальными уравнениями (5) и граничными условиями (6), является положительной в интервале $(-1, 1)$, автор получает исчисление (15) остатка формулы квадратуры (4).

ASUPRA PERIOADELOR BINARELOR FOTOMETRICE *AB CASSIOPEIAE, CC HERCULIS* ŞI *ET ORIONIS*

de

IOAN TODORAN

Binarele fotometrice *AB Cas, CC Her* şi *ET Ori* fac parte din programul de observaţii al Observatorului din Cluj pentru determinarea momentelor minimelor şi urmărirea modului de variaţie al perioadelor lor. Din prelucrarea datelor observaţionale ale acestor stele se constată că pentru *AB Cas* există o creştere uniformă a perioadei, la *CC Her* se pune în evidenţă o descreştere considerabilă a perioadei iar la *ET Ori* dispersia observaţiilor este mai mare decît anumite presupuse oscilaţii ale perioadei sale.

AB Cassiopeiae. Variaţia perioadei stelei *AB Cas* a fost examinată de subsemnatul [17] în anul 1959, cînd, avînd la bază elementele liniare din *Catalogul general de stele variabile* [4],

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2425486{,}4256 + 1\overset{d}{,}366863.\text{E} \tag{1}$$

am determinat elementele parabolice

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2425486{,}4254 + 1\overset{d}{,}3668562.\text{E} + 1\overset{d}{,}262.10^{-9}.\text{E}^2 \tag{2}$$

Aceste elemente erau obţinute pe baza a 26 minime proprii şi 15 minime observate de alţi autori, iar în prezent dispunem de 110 minime observate dintre care 60 sînt proprii şi 50 au fost publicate de alţi observatori.

Minimele individuale sînt date în tabelul 1 iar gruparea lor în minime normale se găseşte în tabelul 2. Diferenţele $O-C_1$ sînt raportate la elementele lineare (1) iar diferenţele $O-C_2$ sînt calculate cu elementele parabolice (2).

Reprezentarea grafică a diferenţelor $O-C_1$ în funcţie de numărul de perioade (E) se găseşte în fig. 1, de unde se constată că prin punctele obţinute se poate duce un arc de parabolă, fapt care este justificat şi de diferenţele $O-C_2$ din coloanele respective ale tabelelor 1 şi 2. De asemenea, se poate constata că deoarece nu dispunem de minime observate în jurul vîrfului „parabolei" respective, punctele graficului ar putea fi împărţite în două categorii, fiecare dintre acestea putînd fi reprezentate prin elemente liniare corespunzătoare.

Dacă admitem elemente lineare pentru cele două categorii de observaţii, atunci în jurul anului 1940 ($E \approx 3000$) perioada trebuie să fi suferit o variaţie bruscă — un salt, — iar dacă se admit elementele parabolice, atunci înseamnă că perioada este

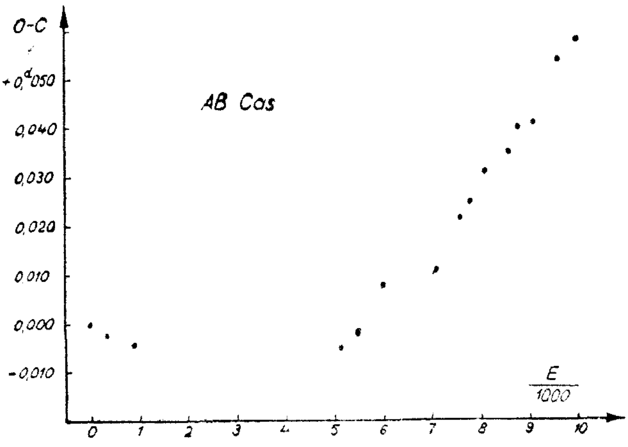


Fig. 1.

supusă unei creşteri continue. Prin urmare, în prezent, nu putem decide care dintre cele două ipoteze ar fi mai apropiată de adevăr. Din această cauză, steaua *AB Cas* este recomandată a fi inclusă în planul de observaţii pentru determinarea minimelor şi constatarea la timp a unor eventuale abateri ale diferenţelor O—C de la aspectul actual al diagramei respective.

Pentru a uşura programarea noilor observaţii, am luat în considerare minimele situate pe ramura ascendentă a diagramei din fig. 1 ($+5000 < E < +10000$) şi am determinat elementele lineare

$$\text{Min hel.} = \text{J. D. } \underset{\pm 6}{2425486{,}350} + \underset{\pm 8}{1^{d}{,}3668761}.E \qquad (3)$$

cu ajutorul cărora sînt calculate diferenţele $O-C_3$ din tabelele 1 şi 2.

Tabel 1

Min. hel. 24 . . . ,	n	E	$0-C_1$	$0-C_2$	$0-C_3$	Observatori şi surse
25486,425	17	0	$-0^d{,}0006$	$-0^d{,}0004$		Wachmann [23]
25497,361	19	8	+ ,0005	+ ,0008		,,
25501,461	10	11	— ,0001	0000		,,
25966,192	7	351	— 0025	— ,0001		,,
26693,361	23	883	— 0046	+ ,0006	d	,,
32472,4575		5111	— ,0049	— ,0029	+0,0038	Pagaczewski [7]
32673,392		5258	+ ,0007	+ ,0018	+ ,007	Szczepanowska [13]
33001,422		5498	— ,0164	— ,0169	— ,013	,,
33053,382		5536	+ ,003	+ ,002	+ ,006	,, [14]
33068,417		5547	+ ,002	+ ,002	+ ,005	,,
33187,334		5634	+ ,002	+ ,001	+ ,004	,,
33437,474		5817	+ ,006	+ ,003	+ ,006	,,
33515,385		5874	+ ,006	+ ,003	+ ,005	,,
33686,244		5999	+ ,007	+ ,003	+ ,004	,,
33858,470		6125	+ ,009	+ ,003	+ ,004	Pohl [2]
33858,469		6125	+ ,008	+ ,002	+ ,003	Domke ,,
33888,538		6147	+ ,006	,000	+ ,001	,,
33888,540		6147	+ ,008	+ ,002	+ ,003	Jahn [2]
33899,479		6155	+ ,012	+ ,006	+ ,007	Domke [2]
33899,480		6155	+ ,013	+ ,007	+ ,008	Pohl [2]
34603,417		6670	+ ,015	+ ,005	+ ,003	Szczepanowska [15]
34726,4265	9	6760	+ ,0070	+ ,0045	— ,0059	Todoran [17]
34733,2565	4	6765	+ ,0027	— ,0089	— ,0103	,,

Tabel 1 (continuare)

Min. hel. 24 . . . ,	n	E	O − C₁	O − C₂	O − C₃	Observatori şi surse
34998,4350	8	6959	+ ,0098	− ,0038	− ,0058	Todoran [17]
35032,614		6984	+ ,017	+ ,003	+ ,001	Whitney [24]
35356,5600	4	7221	+ ,0167	+ ,0002	− ,0023	Todoran [17]
35423,5460	2	7270	+ ,0264	+ ,0093	+ ,0068	,,
35535,628		7352	+ ,026	+ ,008	+ ,005	Whitney [24]
35553,393		7365	+ ,021	− ,003	,001	Szczepanowska [16]
35732,4500	6	7496	+ ,0194	− ,0004	,0032	Todoran [17]
35743,3825	6	7504	+ ,0169	− ,0028	− ,0058	,,
35743,389		7504	+ ,023	+ ,004	+ ,001	Szczepanowska [16]
35747,4833	10	7507	+ ,0172	− ,0027	− ,0056	Todoran [17]
35799,4307	14	7545	+ ,0238	+ ,0035	+ ,0005	,,
35825,3915	8	7564	+ ,0142	− ,0064	− ,0093	,,
35859,576		7589	+ ,027	+ ,006	+ ,0033	Whitney [24]
35881,4345	9	7605	+ ,0158	− ,0052	− ,0082	Todoran [17]
35974,388		7673	+ ,023	− ,001	− ,002	Szczepanowska [16]
36064,5965	4	7739	+ ,0181	− ,0045	− ,0076	Todoran [17]
36079,6395	6	7750	+ ,0256	+ ,0028	− ,0003	,,
36086,4810	10	7755	+ ,0328	+ ,0099	+ ,0065	Neckel [5]
36123,3910	10	7782	+ ,0375	+ ,0013	+ ,0112	Todoran [17]
36127,4800	8	7785	+ ,0259	+ ,0027	− ,0004	,,
36131,5785	4	7788	+ ,0239	+ ,0005	− ,0026	,,
36138,4120	13	7793	+ ,0230	− ,0004	− ,0034	,,
36149,3430	10	7801	+ ,0191	− ,0044	− ,0075	,,
36164,3807	14	7812	+ ,0213	− ,0027	− ,0054	,,
36220,4155	4	7853	+ ,0148	− ,0094	− ,0125	,,
36231,3635	6	7861	+ ,0279	+ ,0036	+ ,0005	,,
36410,426		7992	+ ,021	+ ,005	+ ,002	Rudolph [1]
36410,431		7992	+ ,036	+ ,010	+ ,007	Dörr [1]
36451,431		8022	+ ,030	+ ,004	+ ,001	Ganser [1]
36477,4005	11	8041	+ ,0295	+ ,0028	− ,0002	Todoran [17]
36488,3300	13	8049	+ ,0241	− ,0028	− ,0057	,,
36507,470	10	8063	+ ,0280	+ ,0011	− ,0020	,,
36540,2675	7	8087	+ ,0208	− ,0065	−0,0095	,,
36540,2740	8	8087	+ ,0273	,0000	−0,0030	Todoran [17]
36712,503		8213	+ ,032	+ ,002	,0000	Rudolph [1]
36712,512		8213	+ ,041	+ ,011	+ ,009	Grauenhorst [1]
36868,332	11	8327	+ ,033	+ ,007	+ ,005	Todoran [18]
37133,502	10	8521	+ ,037	+ ,003	+ ,001	Todoran [19]
37148,536	11	8532	+ ,035	+ ,002	− ,001	,,
37163,572	4	8543	+ ,036	+ ,002	− ,001	,,
37174,508	16	8551	+ ,037	+ ,003	,000	,,
37185,440	10	8559	+ ,034	,000	− ,003	,,
37196,375	15	8567	+ ,034	,000	− ,003	,,
37211,413	4	8578	+ ,037	+ ,002	,000	,,
37226,448	9	8589	+ ,036	+ ,002	− ,001	,,
37319,393		8657	+ ,037	− ,003	− ,003	Pohl [8]
37319,393		8657	+ ,037	− ,001	− ,003	Gerhart [8]
37509,396	11	8796	+ ,043	+ ,006	+ ,004	Todoran [19]
37524,427	9	8807	+ ,039	+ ,001	− ,001	,,
37528,526	4	8810	+ ,037	− ,001	− ,002	,,
37539,457	11	8818	+ ,033	− ,005	− ,006	,,
37565,435	10	8837	+ ,041	+ ,003	+ ,001	,,
37565,434	8	8837	+ ,040	+ ,002	+ ,000	,,
37576,368	4	8845	+ ,039	+ ,001	− ,001	,,
37580,477	25	8848	+ ,048	+ ,008	+ ,007	Popa [21]
37893,481	6	9077	+ ,040	− ,002	− ,003	Todoran [19]

Tabelul 1 (continuare)

Min. hel. 24	n	E	O—C₁	O—C₂	O—C₃	Observatori și surse
37900,316		9082	+ ,041	− ,003	− ,003	Kizibirmak [8]
37900,313		9082	+ ,038	− ,006	− ,006	Aslan [8]
37900,306		9082	+ ,031	− ,015	− ,013	Bozkurt [8]
37908,518	6	9088	+ ,041	− ,001	− ,002	Todoran [19]
37915,354	11	9093	+ ,043	+ ,001	,000	,,
37930,394	6	9104	+ ,048	− ,005	− ,004	,,
37941,322	7	9112	+ ,041	− ,002	− ,003	,,
37949,526	16	9118	+ ,044	+ ,001	,000	,,
38045,2031	6	9188	+ ,040	− ,0036	− ,0045	Todoran
38247,5008	13	9336	+ ,042	− ,0041	− ,0045	,,
38269,390	25	9352	+ ,062	+ ,012	+ ,015	Popa [21]
38288,51		9366	+ ,046	− ,001	− ,000	Kordylewski [3]
38310,395	12	9382	+ ,061	+ ,014	+ ,013	Popa [21]
38753,2468	24	9706	+ ,049	+ ,0036	− ,0026	Todoran
38776,4840	8	9723	+ ,049	− ,0036	− ,0023	,,
38981,5164	13	9873	+ ,052	− ,0033	− ,0013	,,
38981,527	30	9873	+ ,063	+ ,007	+ ,009	Popa [21]
38988,3552	11	9878	+ ,057	+ ,0012	+ ,0031	Todoran
39014,3260	9	9897	+ ,057	+ ,0044	+ ,0032	,,
30922,5330	10	9903	+ ,063	+ ,0069	+ ,0090	,,
39022,534	24	9903	+ ,064	+ ,008	+ ,010	Popa [21]
39022,5225	8	9903	+ ,053	+ ,0036	− ,0015	Todoran
39033,4555	4	9911	+ ,051	− ,0057	− ,0035	,,
39067,633		9936	+ ,057	+ ,001	+ ,0021	Baldwin [9]
39074,4600	7	9941	+ ,049	− ,0076	− ,0053	Todoran
39086,773		9950	+ ,061	+ ,003	+ ,0058	Baldwin [9a]
39093,608		9955	+ ,061	+ ,004	+ ,0064	,,
39148,2850	6	9995	+ ,064	+ ,006	+ ,0084	Todoran
39183,819		10021	+ ,049	+ ,001	+ ,004	Monske [10]
39186,550		10023	+ ,057	− ,002	+ ,001	,,
39201,593		10034	+0,064	+0,005	+0,008	,,

Tabel 2

Min. hel. 24	e.m. $\pm 0^d{,}0001$	n	E	O — C₁	O — C₂	O — C₃
25497,3602	7	3	+8	$-0^d{,}0003$	$0^d{,}0000$	
25966,1920	—	1	+351	− ,0025	− ,0001	
26693,3610	—	1	+883	− ,0046	+ ,0006	
32472,4575		7	+ 5111	− ,0049	− ,0029	$+ 0^d{,}0038$
32997,3361	37	5	+5495	− ,0017	− ,0022	+ ,0019
33768,2567	8	9	+6059	+ ,0082	− ,0033	,0044
35169,2945	29	10	+7084	+ ,0114	− ,0035	− ,0058
35885,5408	18	11	+7608	+ ,0215	− ,0004	− ,0026
36187,6210	22	9	+7829	+ ,0250	+ ,0010	− ,0020
36570,3484	22	10	+ 8109	+ ,0307	+ ,0031	+ ,0001
37207,3112	4	10	+ 8575	+ ,0354	+ ,0011	− ,0014
37547,6650	18	8	+ 8824	+ ,0403	+ ,0022	+ ,0003
37927,6532	14	10	+9102	+ ,0406	− ,0019	− ,0031
38660,3050	23	10	+9638	+ ,0536	+ ,0023	+ ,0031
39096,3384	14	12	+9957	+0,0579	+ ,0007	+0,0031

CC Herculis. Variația perioadei stelei *CC Her* a fost pusă în evidență de către V. P. Tsesevich [22] care a arătat că pentru reprezentarea observațiilor sînt necesare două perechi de elemente lineare, iar subsemnatul a arătat [20] că pentru observațiile cuprinse între anii 1954—1959 erau necesare alte elemente lineare.

Fluctuațiile rapide observate ale perioadei stelei *CC Her* au pus în evidență necesitatea examinării stadiului actual al variației perioadei. În acest scop am plecat de la tabelul de minime publicat anterior [20] pe care l-am completat cu încă 21 minime observate dintre care 19 sînt proprii iar 2 au fost observate de către alți observatori. În tabelul 3 sînt date minimele observate între anii 1954—1966, iar gruparea lor în minime normale este dată în tabelul 4.

Diferențele $O-C_1$ sînt raportate la elementele liniare date de V. P. Tsesevich [22]

$$\text{Min. hel} = \text{J. D. } 2426120{,}415 + 1^{d}{,}7340314.E \qquad (4)$$

iar reprezentare grafică a acestora, cît și a celor din tabelele publicate anterior [20], este dată în fig. 2.

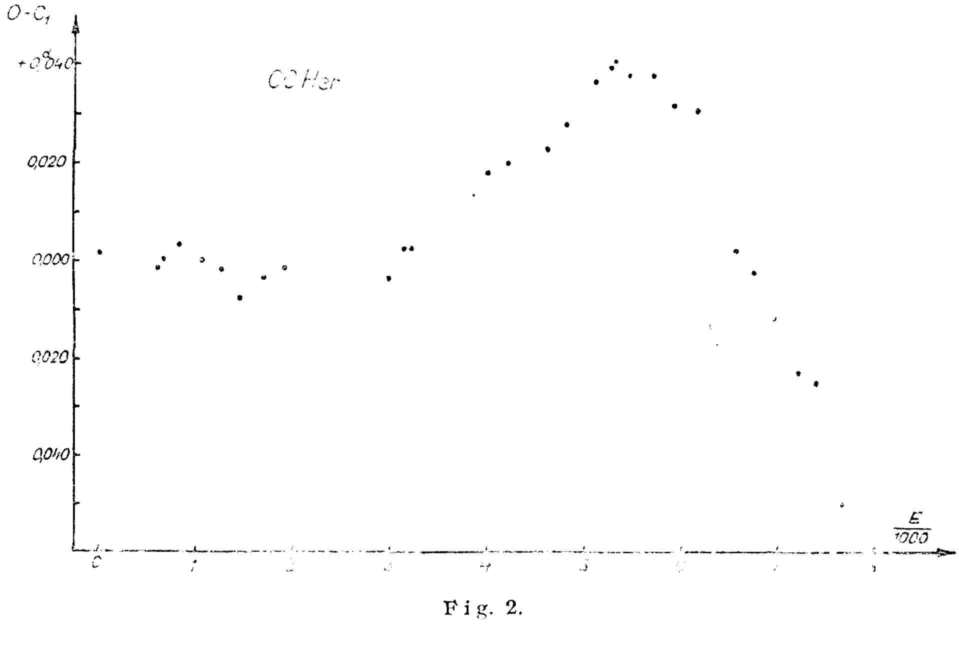


Fig. 2.

Aspectul actual al diagramei O—C din fig. 2 arată că în ultimii ani perioada stelei *CC Her* suferă o descreștere considerabilă. De aceea, pentru programarea noilor observații este nevoie de o nouă serie de elemente lineare. În acest scop, din tabelul 4 am obținut

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2426120{,}718 + 1^{d}{,}733986.E \qquad (5)$$

cu ajutorul cărora am calculat diferențele $O-C_2$ din tabelele 3 și 4.

Tabel 3

Min. hel. 243. . . ,	n	E	O—C$_1$	O—C$_2$	Observatori și surse
6023,511	5	5711	+0^d,043	−0^d,001	Szczepanowska [16]
6056,4475	4	5730	+ ,0326	− ,0103	Todoran [20]
6335,6275	9	5891	+ ,0335	− ,0020	,,
6337,3530	14	5892	+ ,0250	− ,0105	,,
6349,5035	10	5899	+ ,0378	+ ,0021	,,
6349,501	10	5899	+ ,0348	,000	Szczepanowska [16]
6375,5065	7	5914	+ ,0298	− ,0047	Todoran [20]
6389,3845	8	5922	+ ,0355	+ ,0014	,,
6401,5170	17	5929	+ ,0298	− ,0040	,,
6727,523	12	6117	+ ,038	+ ,013	Szafraniec [12]
6753,5260	10	6132	+ ,0305	+ ,0058	Todoran [20]
6760,4617	15	6136	+ ,0300	+ ,0056	,,
6807,2810	8	6163	+ ,0305	+ ,0073	,,
6819,4140	11	6170	+ ,0253	+ ,0024	,,
6833,2917	20	6178	+ ,0307	+ ,0082	,,
7464,449	5	6542	+ ,001	− ,005	Todoran [19]
7483,524	6	6553	+ ,001	− ,004	,,
7523,410	8	6576	+ ,005	,000	,,
7556,353	7	6595	+ ,001	− ,003	,,
7790,445	8	6730	− ,001	+ ,001	,,
7835,526	9	6756	− ,005	− ,001	,,
7882,349	5	6783	− ,001	+ ,004	,,
8135,505	6	6929	− ,014	− ,002	Todoran
8194,464	5	6963	− ,012	+ ,001	,,
8267,294	9	7005	− ,011	+ ,004	,,
8506,577	6	7143	− ,024	− ,003	,,
8546,461	32	7166	− ,023	− ,001	Oburka [6]
8586,343	11	7189	− ,024	,000	Todoran
8638,365	8	7219	− ,023	+ ,002	,,
8938,353	8	7392	− ,022	+ ,010	,,
9030,250	9	7445	− ,029	+ ,006	,,
9316,351	4	7610	− ,043	,000	,,
9382,235	6	7648	− ,052	− ,008	,,
9401,310	6	7659	− ,051	− ,007	,,
9408,248	14	7663	−0,050	−0,005	,,

Tabel 4

Min. hel. 243. . . ,	e.m 0^d,0001	n	E	O—C$_1$	O—C$_2$
6040,8462	1	2	5721	+0^d,0376	−0^d,0057
6363,3708	16	7	5907	+ ,0323	− ,0025
6781,2708	16	6	6148	+ ,0308	+ ,0069
7504,3330	9	4	6565	+ ,0019	− ,0031
7835,5286	13	3	6756	− ,0025	+ ,0012
8199,6657	8	3	6966	− ,0120	+ ,0012
8567,2690	4	4	7178	− ,0234	− ,0005
8983,4345	47	2	7418	− ,0254	+ ,0084
9375,3019	21	4	7644	−0,0491	−0,0051

ET Orionis. În anul 1958, V. P. T s e s e v i c h [22] publică tabelul minimelor observate ale stelei *ET Ori* și ajunge la concluzia că perioada acestei stele are variații neregulate. El consideră că observațiile respective sînt reprezentate prin elementele lineare

$$\text{Min. hel} = \text{J. D. } 2426684{,}283 + 0^d{,}9509356.E \qquad (6)$$

Pentru examinarea stadiului actual al variației perioadei acestei stele, am pornit de la tabelul minimelor publicat de V. P. T s e s e v i t c h [22] pe care l-am completat cu 15 minime proprii care sînt date în tabelul 5 și încă două minime observate de S z a f r a n i e c [11]. În tabelul 6 sînt date minimele normale

Tabel 5

Min. hel. 243. . . .	n	$O-C_1$	E
5424,3249	3	$-0^d{,}0072$	9191
5730,5426	3	+ ,0092	9513
6119,4759	7	+ ,0099	9922
6120,4268	10	+ ,0098	9923
6139,4306	4	− ,0051	9943
6549,2800	7	− ,0089	10374
6587,3258	10	− ,0005	10414
6588,2871	6	+ ,0098	10415
6603,4957	3	+ ,0035	10431
6604,4455	8	+ ,0023	10432
7940,5083	13	+ ,0006	11837
7961,4377	12	+ ,0094	11859
8100,2733	5	+ ,0084	12005
8777,3389	17	+ ,0079	12717
8816,3291	10	+0,0097	12758

Tabel 6

Min. hel. 24	n	E	$O-C_1$	$O-C_2$
26656,708	10	− 29	+0,002	−0,002
27477,358	5	+ 834	− ,005	− ,006
28213,390	6	+ 1608	+ ,003	+ ,002
28523,396	7	+ 1934	+ ,004	+ ,002
29501,903		+ 2963	− ,002	− ,004
30397,686	1	+ 3905	− ,001	− ,003
30725,760	1	+ 4250	+ ,001	− ,002
31453,266	2	+ 5015	+ ,001	− ,002
31830,748	1	+ 5412	− ,002	− ,002
32473,588	1	+ 6088	+ ,009	+ ,005
32614,323	1	+ 6236	+ ,006	+ ,002
32862,522	1	+ 6497	+ ,010	+ ,007
33682,233	1	+ 7359	+ ,015	+ ,011
34500,028	3	+ 8219	+ ,005	,000
35054,424	2	+ 8802	+ ,006	+ ,001
35416,7186	3	+ 9183	− ,0060	− ,0115
35795,2065	3	+ 9581	+ ,0095	+ ,0038
36126,1274	3	+ 9929	+ ,0048	− ,0011
36586,3766	5	+10413	+ ,0012	− ,0051
38000,4228	3	+11900	+ ,0062	− ,0010
38791,6039	2	+12732	+0,0088	+0,0012

care completează tabloul primelor 15 minime normale din lucrarea lui V. P. T s e - s e v i t c h [22]

Reprezentarea grafică a diferenţelor $O-C_1$ în funcţie de numărul de perioade E este dată în fig. 3, de unde se vede că elementele (6) pot fi corectate. În acest scop, din tabelul 6 am obţinut corecţiile

$$T = +0^d{,}0002 \pm 0^d{,}0020, \quad P = +0^d{,}00000057 \pm 0^d{,}00000028$$

pe care aplicîndu-le la elementele (6), rezultă noile elemente

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 24266684{,}\underset{\pm 2}{283} + 0{,}950936\underset{\pm 3}{2}\,.E \qquad (7)$$

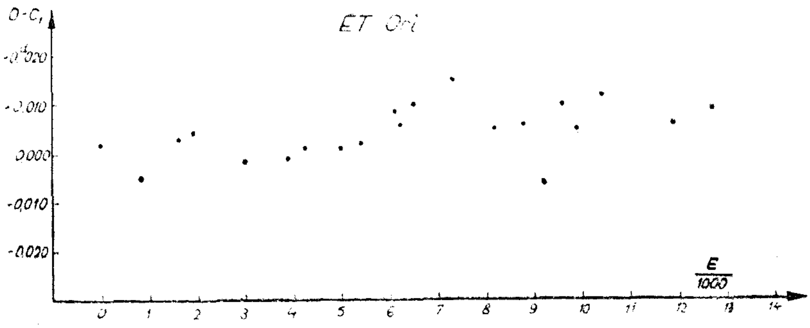


Fig. 3

Cu ajutorul acestor ultime elemente au fost calculate diferenţele $O-C_2$ din tabelul 6.

Din analiza diagramei O—C rezultă concluzia că, în prezent, eventualele oscilaţii ale perioadei stelei *ET Ori* sînt mai mici decît dispersia punctelor din graficul respectiv.

(Intrat în redacţie la 5 aprilie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. B r a u n e W., Q u e s t e r W., A. N. **286**, 209, 1962.
2. D o m k e K., P o h l E., A. N. **281**, 113, 1963.
3. K o r d y l e w s k i K., B. V. S., **35**, 1963.
4. K u k a r k i n B. V. , P a r e n a g o P., P., E f r e m o v I. I., H o l o p o v P. N., *Obşcîi katalog perem mîh zvezd*,
5. N e c k e l T h., Nachrichtenblatt der Astr. Zentralstelle, **XI**, 9, 30, 1957.
6. O b u r k a O., B. A. C., **16**, 213, 1964.
7. P a g a c z e w s k i J., A.A. c.1., 150, 1930.
8. P o h l E., K i z i l i r m a k A., A.N., **288**. 70, 1964.
9. R o b i n s o n L., B.V.S., 119, 1966.
9a. R o b i n s o n L., B.V.S., 129, 1966.
10. R o b i n s o n L., B.V.S., 154, 1966.
11. S z a f r a n i e c R., A.A., **8**, 190, 1958.
12. S z a f r a n i e c R., A.A. **10**, 69, 1960
13. S z c z e p a n o w s k a A., A.A., **4**, 113, 1954.
14. S z c z e p a n o w s k a A., A.A. **5**, 74, 1955.
15. S z c z e p a n o w s k a A., A.A., **6**, 144, 1965.
16. S z c z e p a n o w s k a A., A.A. **9**, 47, 1959.

17. Todoran I., Studii şi cercet. de astr. şi seism., **IV,** 369, 1959.
18. Todoran I., Studii şi cercet. de astr. şi seim. **V,** 329, 1960.
19. Todoran I., Studii şi cercet. de astr. **VIII,** 243, 1963.
20. Todoran I., Studia Univ. Babeş-Bolyai, Series Math.-Phys., Fascic. 2, 63,1962.
21. Todoran I., Popa I., B.V.S., 187, 1967.
22. Tsesevich P. V., Peremennie zvezdî, **11.** 411, 1958.
23. Wachmann A. A., A. N. **246,** 295, 1932.
24. Whitney B. S., A.J. **62.** 371,1957.

О ПЕРИОДАХ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ ЗВЁЗД *AB Cassiopeiae CC Herculis* и *ET Orionis*

(Резюме)

Даны новые минимумы и рассматривается современное состояние вариации периодов звёзд *AB Cas, CC Her* и *ET Ori*.

Для *AB Cas* даны 12 новых минимумов. Из анализа диаграммы O-C полученной из 10 минимумов, наблюдённых различными авторами в 1928-1966 гг., автор статьи приходит к выводу, что соответствующие наблюдения можно представить как параболическими элементами, так и двумя сериями линейных элементов. Для наблюдений, произведённых в 1940-1966 гг., даны элементы

$$\text{Min. hel.} = J.\ D.\ 2425486,350 + 1^{d}\!,3668761.E$$

Для звезды *CC Her* даны 12 новых минимумов и выявлено быстрое убывание периода. Для наблюдений, произведённых в 1954-1966 гг., были установлены элементы

$$\text{Min. hel} = J.\ D.\ 2426120,718 + 1^{d}\!,733986.E$$

В случае звезды *ET Ori* даны 15 новых минимумов и устанавливается, что возможные колебания вариации периода меньше, чем дисперсия точек диаграммы O-C. Из всех имеющихся наблюдений были установлены элементы

$$\text{Min. Hel.} = J.\ D,\ \ 2426684,283 + 0^{d}\!,9509362.\ E$$

SUR LES PÉRIODES DES BINAIRES PHOTOMÉTRIQUES *AB CASSIOPEIAE, CC HERCULIS* ET *ET ORIONIS*

(Résumé)

L'auteur donne de nouveaux minima observés et examine le stade actuel de la variation des périodes pour les étoiles *AB Cas, CC Her* et *ET Ori*.

On donne pour *AB Cas* 12 nouveaux minima et, par l'analyse du diagramme 0—C de 110 minima observés par différents auteurs entre les années 1928 et 1966, on arrive à la conclusion que les observations respectives peuvent être représentées non seulement par de éléments paraboliques mais aussi par deux séries d'éléments linéaires. Pour les observations d'entre les années 1940 et 1966 on donne les éléments

$$\text{Min. hel.} = \text{J.D.}2425486{,}350 + 1^{d}\!,3668761 \cdot \text{E}$$

Pour l'étoile *CC Her* on donne 12 nouveaux minima et l'on met en évidence une décroissance rapide de la période. Pour les observations d'entre les années 1954 et 1966, on a établi les éléments

$$\text{Min.hel} = \text{J.D.}2426120{,}718 + 1^{d}\!,733986 \cdot \text{E}$$

Pour le cas de l'étoile *ET Ori* on donne 15 nouveaux minima et l'on constate que les oscillations éventuelles de la variation de la période sont plus faibles que la dispersion des points du diagramme O—C. Toutes les observations existantes ont permis d'établir les éléments

$$\text{Min.hel.} = \text{J.D.}2426684{,}283 + 0^{d}\!,9509362 \cdot \text{E}$$

APLICAREA PROBLEMEI LUI MAYER-BOLZA LA OPTIMIZAREA MIŞCĂRII RACHETEI

de

PETRE BRĂDEANU

1. Fie Ox_1x_2 planul vertical al Pămîntului în care se mişcă o rachetă, asimilabilă din punctul de vedere al comportării mecanice, cu un punct de masă variabilă. Vitezele, masa şi poziţia rachetei la momentul t se notează astfel:

$$\dot{x}_1 = q_1, \ \dot{x}_2 = q_2, \ m = q_3, \ x_1 = q_4, \ x_2 = q_5$$

Pentru tracţiune considerăm următoarea formulă şi condiţie

$$\vec{P} = -u_3 w_e(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \tag{1}$$

$$0 \leqslant -\dot{m} = u_3 \leqslant U_3 \equiv u_{3\,\max}$$

unde $\dot{m} < 0$ este debitul gazelor expulsate, u_1 şi u_2 sînt cosinuşii directori ai tracţiunii relativ la axele Ox_1 şi Ox_2 iar $w_e = \text{const.} > 0$ este viteza de expulzare a gazelor.

Ecuaţiile mişcării rachetei vor fi de forma

$$g_i \equiv \dot{q}_i + F(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,t) - \frac{u_3}{q_3} w_e u_i = 0, \quad i = 1,2 \tag{2}$$

$$g_3 \equiv \dot{q}_3 + u_3 = 0, \quad q_4 \equiv \dot{q}_4 - q_1 = 0, \quad g_5 \equiv \dot{q}_5 - q_2 = 0, \ t_0 \leqslant t \leqslant T$$

la care adăugăm condiţiile

$$h_1 \equiv u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0, \quad h_2 \equiv (U_3 - u_3)u_3 - u_4^2 = 0 \tag{3}$$

şi de asemenea condiţii la momentele arbitrare t_0 şi T

$$F_k^* = F_k^*[q_1(t_0), \ldots, q_5(t_0), t_0, q_1(T), \ldots, q_5(T), T] = 0, \ k = 1,2, \ldots r < 12 \tag{4}$$

A doua formulă (3) rezultă din (1) şi conţine un nou parametru necunoscut u_4. În ecuaţiile (2)—(3) se găsesc nouă funcţii necunoscute. Dintre acestea u_1 şi u_2 vor juca rolul variabilelor independente de reglare care reprezintă, din punct de vedere mecanic, regimul de dirijare a direcţiei tracţiunii rachetei şi respectiv regimul de funcţionare a motorului rachetă. Determinarea variabilelor de reglare u_1 şi u_2, ca parte esenţială a problemei, se face cu condiţii suplimentare impuse de optimizarea mişcării rachetei. Variabila u_3, după (1), ca şi variabila u_1 (*şi* u_2)

au valori mărginite. Se mai admite, în plus, că variabilele u_1, u_2, și u_3 pot poseda un număr finit de discontinuități de speța I-a și că aparțin unui domeniu U deschis.

Problema fundamentală, pe care o formulăm, constă în rezolvarea ecuațiilor 2()—(3)—(4) cu condiția ca funcționala (t_0 și T fiind variabile)

$$G = G[q_1(t_0), \ldots, q_5(t_0), t_0, q_1(T), \ldots, q_5(T), T] \tag{5}$$

să admită un extrem (maxim sau minim). Această problemă variațională este identică cu aceea relativă la funcționala

$$J = G + \sum_{1}^{r} \alpha_k F_k^* + \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{1}^{5} \lambda_i g_i - \sum_{1}^{2} \mu_j h_j\right) dt,$$

unde $\lambda_i(t)$, $\mu_j(t)$ și α_k sînt multiplicatorii nedeterminați ai lui Lagrange, și se încadrează în probleme variaționale de tip Mayer-Bolza [1].

2. Ecuațiile lui Euler-Lagrange vor fi

$$\dot{\lambda}_i - \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \lambda_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \lambda_2\right) + M_i = 0, \quad i = \overline{1,5} \tag{6}$$

$$\lambda_i \frac{u_3}{q_3} w_e + 2\mu_1 u_i = 0, \quad \lambda_3 - \frac{q_3}{u_3} M_3 - \mu_2(U_3 - 2u_3) = 0, \quad 2\mu_2 u_4 = 0, i = 1,2 \tag{7}$$

unde

$$M_1 = \lambda_4, \quad M_2 = \lambda_5, \quad M_3 = -\frac{u_3}{q_3^2} w_e(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), \quad M_4 = 0, \quad M_5 = 0$$

Din ultima ecuație (7) și din (3) rezultă că sînt posibile soluțiile

a) $\mu_2 = 0$, $u_4 \neq 0$, $0 < u_3 < U_3$ (tracțiune variabilă)

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } \mu_2 \neq 0, \; u_4 = 0 \\ \\ \text{c) } \mu_2 = 0, \; u_4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} u_3 = U_3 & \text{(tracțiune maximă)} \\ \text{sau} & \\ u_3 = 0 & \text{(tracțiune nulă, } m = \text{const.)} \end{array} \tag{8}$$

iar din primele două ecuații (7) avem

$$u_1 = \pm \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad u_2 = \pm \frac{\lambda_2}{\lambda} \text{ sau } u_3 = 0 \tag{9}$$

$$\lambda \equiv \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

Formulele (8) și (9) determină valorile posibile ale parametrilor u_1, u_2, și u_3 și arată că traiectoria optimală este formată, în general, din arce de curbă pe care sînt realizate soluțiile de mai sus a), b) și c).

Pentru a determina riguros funcțiile u_1 și u_3, care extremează funcționala G, și a vedea care din cazurile de mai sus se realizează, vor trebui încercate condiții mai puternice de extrem, ca de exemplu, condiția lui Weierstrass și condiția întărită a lui Legendre-Clebsch. În acest scop se introduce funcția

$$H_\lambda = u_3\left[\frac{w_e}{q_3}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - \lambda_3\right] - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 + \lambda_4 q_1 + \lambda_5 q_2$$

Condiţiile lui Weierstrass şi Legendre-Clebsch trebuie, după expresia funcţiei H_λ, să fie verificate numai de funcţie

$$H_\lambda^* = -L^* = u_3\left[\frac{w_e}{q_3}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - \lambda_3\right] \tag{10}$$

Se verifică uşor că aceste condiţii nu pot fi folosite pentru determinarea exactă a variabilelor u_1 şi u_2, deoarece ele sînt verificate, cu sensul egalităţii, pentru ambele semne ale variabilelor u_1 şi u_2 din (9). Condiţiile lui Weierstrass şi Legendre nu pot fi folosite nici pentru precizarea parametrului u_3. Se observă că funcţia H_λ^* depinde linear de u_3, aşa că ţinînd seamă de a treia ecuaţie (7), în presupunerea că $\mu_2 \neq 0$, la orice moment t şi oricare ar fi u_3, avem

$$\delta H_\lambda^* / \partial u_3 \neq 0, \quad \partial^2 H_\lambda^* / \partial u_3^2 = 0$$

Funcţia H_λ^* nu are extrem în intervalul deschis (O, U_3). Această concluzie se menţine şi în cazul $\mu_2 = 0$, deoarece în acest caz $H_\lambda^* \equiv 0$.

Din punctul de vedere al îndeplinirii condiţiilor de extrem (maximum) trebuie ca funcţia L^* să aibă un maxim absolut în raport cu u_3 pe intervalul închis $[0, U_3]$ pentru orice $t \in [t_0, T]$ (principiul maximului al lui Pontreaghin). Această condiţie este posibil de realizat dacă $\mu_2 \neq 0$, căci în caz contrar funcţiile L^* şi H_λ^* sînt identic nule în $[t_0, T]$.

Se vede că funcţia L^* admite un maxim, pentru orice $t \in [t_0, T]$, pe intervalu l $[0, U_3]$ pentru

$$u_3 = \begin{cases} U_3 & \text{dacă } \omega \equiv \lambda_3 - \dfrac{w_e}{q_3}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) > 0 \\ 0 & \text{dacă } \omega < 0 \end{cases} \tag{11}$$

Pentru a merge mai departe în studiul problemei, pentru a determina semnul funcţiei ω şi a calcula parametrii u_i se fac ipoteze asupra funcţiilor F_1 şi F_2, se precizează funcţionala G şi condiţiile la limită. Aceasta înseamnă a restrînge clasa de probleme considerate, eventual, pînă la cazul unei probleme concrete.

3. Mişcarea rachetei în cîmp gravitaţional plan constant. Avînd deci $F_1 = 0$, $F_2 = g$, presupunem că la momentul fixat $t = T$ combustibilul rachetei a fost complet consumat şi că de la acest moment racheta se mişcă ca un corp cu masa constantă. Se cere determinarea parametrilor u_1, u_2 şi u_3 pe intervalul $[0, T]$ în aşa fel ca bătălia rachetei să fie maximă.

Formula bătăii se deduce din integrarea ecuaţiilor mişcării pe partea pasivă şi are forma

$$G[q(T)] = q_4(T) + \frac{q_1(T)}{g}\left[q_2(T) + \sqrt{q_2^2(T) + 2gq_5(T)}\right] \tag{12}$$

Considerăm condiţiile la momentul $t = t_0 = 0$, unde q_k^0 sînt mărimi date

$$F_k^* = q_k(0) - q_k^0 = 0, \quad k = 1,2,3,4,5$$

Pentru $t = T$ mărimile q_i pot fi date sau să se calculeze din condiţiile de optimizare.

Condiţiile de transversalitate şi condiţiile lui Weierstrass-Erdmann, în caz acestei probleme, sînt

$$\lambda_i(T) = -\frac{\partial G}{\partial q_i(T)}, \quad i = \overline{1,5} \qquad (1$$

$$\lambda_i(t^* - 0) = \lambda_i(t^* + 0) \qquad (13$$

$$\sum_1^5 (\lambda_i \dot{q}_i)_{t^*-0} = \sum_1^5 (\lambda_i \dot{q}_i)_{t^*+0} \qquad (13.$$

unde se presupune că variaţiile $\Delta q_i(T)$ sînt arbitrare şi unde $t = t^*$ este moment de discontinuitate pentru parametrii u_i. Evident, se poate admite că nu exist un astfel de moment sau că există mai multe. Momentul $t = t^* = T$ este un mome de discontinuitate pentru debitul u_3 şi acceleraţia rachetei.

În cazul acestei probleme λ_4 şi λ_5 sînt constante şi după (13) de forma

$$\lambda_4 = -\frac{\partial G}{\partial q_4(T)}, \quad \lambda_5 = -\frac{\partial G}{\partial q_5(T)}$$

aşa că

$$\lambda_1 = \frac{\partial G}{\partial q_4(T)}(t - T) - \frac{\partial G}{\partial q_1(T)}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial G}{\partial q_5(T)}(t - T) - \frac{\partial G}{\partial q_2(T)} \qquad (1$$

Deoarece derivatele parţiale ale funcţiei G, din (14) sînt pozitive în $[0, T]$ înseamn că λ_1 şi λ_2 sînt negative în $[0, T]$. De aceea, în expresiile (9) vom lua semnul minu. În consecinţă,

$$\omega(q, \lambda) = \lambda_3 + \frac{w_e}{q_3}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \qquad (1$$

Din (6_3) rezultă că $\lambda_3 < 0$ pe partea activă a traiectoriei şi $\lambda_3 = 0$ pe ce pasivă. Funcţia $\lambda_3(t)$ este monotonă necrescătoare în $[0, T]$ iar după condiţia (13 continuă, şi în consecinţă s-ar putea anula cel mult odată în $[0, T]$. Presupunîn că masa $q_3(T)$ nu este dată, avem condiţia $\lambda_3(T) = 0$. Din ecuaţia diferenţia (6_3) rezultă că $\lambda_3(t)$ este o funcţie pozitivă în $[0, T]$ care se anulează pentru $t =$

Funcţia ω este continuă în $[0, T]$, multiplicatorii λ_1 şi λ_2 fiind liniari, are derivata

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{w_e}{q_3}\frac{d}{dt}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

Ne convingem uşor că $\dot{\omega}(t) = 0$ pentru $t = T + a$ unde $a > 0$. Deci $\dot{\omega}$ nu anulează şi nu-şi poate schimba semnul în $[0, T]$. Funcţia $\omega(t)$, după (15) deoarece $\dot{\omega} < 0$, este continuă, descrescătoare, pozitivă şi nenulă în interval mişcării active.

În concluzie, regimul optim de funcţionare a motorului se reduce la

$$u_3 = U_3 \qquad (1$$

Aceasta înseamnă că pentru obţinerea unei bătăi maxime motorul rachetă trebui în condiţiile admise, să funcţioneze continuu în intervalul $[0, T]$ cu debit maxi

După calculele relativ simple, folosind (9) şi (14), regimul de dirijare optimă ia forma

$$u_1 q_1(T) = u_2 \sqrt{q_2^2(T) + 2g q_5(T)}, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1 \tag{18}$$

Formulele (18) au fot găsite printr-un alt procedeu în lucrarea [3] în cazul $u_3 =$ const., $W_e =$ const. În lucrarea de faţă se arată că $u_3 =$ const. $= U_3$ corespunde unei funcţionări optime.

În formula (18) mărimile q_1, q_2, q_5 se determină în urma integrării ecuaţiilor mişcării pe partea activă [0, T], unde sînt valabile formulele (17) şi (18) şi a aplicării intregralei găsite, în acest mod, la momentul $t = T$. Astfel de calcule se găsesc în lucrările [3], [4], [5].

(Intrat în redacţie la 31 martie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Troiţkii, PMM, 4, 1961.
2. G. Leitmann, PMM, 6, 1961.
3. D. Lawden, Ob. iskust. sputnik. zeml. (sbr.st.) Moscova, 1959.
4. P. Brădeanu, Stud. cerc. mec. apl., Acad. RPR, 3, 1963.
5. P. Brădeanu, I. Păvăloiu, Stud. cerc. mec. apl. Acad., RPR., 4, 1963.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МАЙЕРА-БОЛЗА К ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

(Резюме)

Автор формулирует проблему оптимизации плоского движения ракеты в рамках вариационной проблемы Майера-Болза и выводит условия оптимизации функционирования ракеты и управления тягой. Результаты применяются к вычислению максимальной дальности действия ракеты в плоском гравитационном плане Земли.

APPLICATION DU PROBLÈME DE MAYER-BOLZA À L'OPTIMISATION DU MOUVEMENT D'UNE FUSÉE

(Résumé)

L'auteur formule le problème de l'optimisation du mouvement plan de la fusée dans le cadre du problème variationnel de Mayer-Bolza et déduit les conditions d'optimisation du fonctionnement de la fusée et de la direction de la traction. On applique les résultats au calcul de la distance maxima de la fusée dans le champ gravitationnel plan de la Terre.

DESPRE POLARIZAREA PARTICULELOR CU SPINUL UNU

de

Z. GÁBOS

Sînt cunoscute diferite încercări de a construi cvadrivectorul potențial A_μ al cîmpului vectorial din funcții de undă ale cîmpurilor spinoriale [4]. În lucrare se studiază unele consecințe ale acestui punct de vedere, referitoare la polarizarea bozonilor cu spinul unu și cu masă de repaus diferită de zero.

1°. Fie m_0 masa de repaus și $p\left(\vec{p}, i\frac{\varepsilon}{c}\right)$ cvadriimpulsul cuantei cîmpului vectorial. Presupunem că pentru acest cîmp soluția de undă plană corespunzătoare impulsului $\vec{p}$ poate fi obținută din funcția de undă a particulei (cu impulsul $\vec{p}_1$ și cu masa de repaus m_{01}) și a antiparticulei Dirac (cu impulsul $\vec{p}_2$ și cu masa de repaus m_{02}). Particula și antiparticula au viteza comună

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon},$$

unde

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

În reprezentarea de elicitate pentru particula respectiv antiparticula Dirac avem

$$\psi_p = U_\lambda e^{ip_1x}, \qquad \psi_a = v_{\bar{\lambda}} e^{-i_2px},$$

unde

$$U_\lambda = |\lambda> = \sum_\rho |\lambda, \rho> = \frac{N}{\sqrt{2}}\sum_{\rho, m}[1 + (-1)^{\lambda+\rho}B]D^{1/2}_{m\lambda}(\varphi, \vartheta, -\varphi)|m, \rho>, \quad (1)$$

$$V_{\bar{\lambda}} = |\bar{\lambda}> = \sum_\rho |\bar{\lambda}, \rho> = \frac{N}{\sqrt{2}}\sum_{\rho, m}[B + (-1)^{\bar{\lambda}-\rho}]D^{1/2}_{m-\bar{\lambda}}(\varphi, \vartheta, -\varphi)|m, \rho>. \quad (2)$$

Numerele λ, ρ, m sînt consecutiv valorile proprii ale operatorilor

$$\frac{1}{2|\vec{p}|}\left(\vec{\Sigma}, \vec{p}\right), \qquad \frac{1}{2}\gamma_5, \qquad \frac{1}{2}\Sigma_3$$

şi

$$N = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0c^2}{2m_0c^2}}, \qquad B = \frac{c\,|\vec{p}\,|}{\varepsilon + m_0c^2}, \qquad D^{1/2}_{m\lambda}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha}\, d^{1/2}_{m\lambda}(\beta) e^{-i\lambda\gamma}.$$

(Folosim condiţiile de normare $\bar{u}_\lambda u_\lambda = -\bar{v}_{\bar{\lambda}} v_{\bar{\lambda}} = 1$.)

Pe baza ipotezei făcute, în cazul cel mai general avem

$$A_\mu(x) = A_\mu(p) e^{ipx},$$

unde

$$A_\mu(p) = if_1 \bar{v}\gamma_\mu u + \frac{i}{2} f_2 \bar{v}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\, u p_\nu. \tag{3}$$

Este evident că funcţiile astfel definite sînt soluţii de undă plană ale ecuaţiei

$$\Box A_\mu - m_0^2 A_\mu = 0$$

şi totodată satisfac condiţia

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Să notăm cu λ elicitatea particulei şi cu $\bar{\lambda}$ elicitatea antiparticulei. Pentru fiecare pereche de numere $(\lambda, \bar{\lambda})$ expresia (3) ne furnizează un cvadrivector potenţial. Utilizînd (1), (2), (3), în urma unor calcule simple obţinem următoarele rezultate.

Considerînd cazul $\lambda = \bar{\lambda} = \frac{1}{2}$ ajungem la cvadrivectorul corespunzător elicităţii rezultante $\lambda = 1$:

$$A_\mu^{(1)} = \sqrt{2}\,(f_1 + im_0cf_2) e_\mu^{(1)}$$

Vectorul $e_\mu^{(1)}$ are componentele

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} (-\cos\Theta\cos\varphi + i\sin\varphi,\ -\cos\Theta\sin\varphi - i\cos\varphi,\ \sin\Theta,\ 0). \tag{4}$$

Cvadrivectorul corespunzător elicităţii rezultante $\lambda = -1$ se obţine punînd $\lambda = \bar{\lambda} = -\frac{1}{2}$. Găsim

$$A_\mu^{(-1)} = \sqrt{2}\,(f_1 + im_0cf_2) e_\mu^{(-1)}.$$

Vectorul $e_\mu^{(-1)}$ are componentele

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1\varphi} (\cos\Theta\cos\varphi + i\sin\varphi,\ \cos\Theta\sin\varphi - i\cos\varphi,\ -\sin\Theta,\ 0). \tag{5}$$

Cele două combinaţii posibile care rămîn $\lambda = -\bar{\lambda} = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}$ ne conduc la un singur cvadrivector potenţial, la cel corespunzător elicităţii rezultante zero:

$$A_\mu^{(0)} = (f_1 + im_0cf_2) e_\mu^{(0)}.$$

Vectorul $e_\mu^{(0)}$ are componentele

$$\frac{\varepsilon}{m_0c^2}\sin\Theta\cos\varphi,\ \frac{\varepsilon}{m_0c^2}\sin\Theta\sin\varphi,\ \frac{\varepsilon}{m_0c^2}\cos\Theta,\ i\frac{|\vec{p}|}{m_0c}\,. \tag{6}$$

Expresiile (4), (5), (6) coincid cu cele stabilite pe alte căi, ceea ce este un argument în favoarea ipotezei de bază pe care am adoptat-o [7].

Vectorii de bază $e_\mu^{(i)}$ satisfac condițiile

$$e_\mu^{(i)}p_\mu = 0, \qquad i = 1, 0, -1.$$

Prin transformarea

$$\vec{e}^{(i)'} = U\vec{e}^{(i)}, \qquad U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

vectorii $e_\mu^{(i)}$ pot fi înlocuiți cu alți trei vectori de bază

$$e^{(i)'}(D_{li}^1, e_4^{(i)}), \qquad l, i = 1, 0, -1.$$

În cazul special $|\vec{p}| = 0$, $\Theta = 0$, $\varphi = 0$ avem

$$e_0^{(1)'}(1, 0, 0, 0), \qquad e_0^{(0)'}(0, 1, 0, 0), \qquad e_0^{(-1)'}(0, 0, 1, 0). \tag{8}$$

2°. Definim matricea covariantă de polarizare a particulelor cu spinul unu în felul următor

$$D_{\mu\nu} = A_\mu A_\mu^*.$$

Cvadrivectorul A_μ poate fi exprimat cu ajutorul vectorilor de bază

$$A_\mu = C_i e_\mu^{(i)}$$

prin urmare

$$D_{\mu\nu} = c_i c_k^* e_\mu^{(i)} e_\nu^{(k)*}.$$

Mărimile $c_i\, c_k^*$ sînt elementele matricii de densitate ρ care are trei linii și trei coloane. Putem ajunge la expresia matricii ρ în felul următor. Considerăm sistemul de referință legat de particulă. Dacă alegem baza (8) matricea D are următoarea structură

$$D^\circ = \left(\begin{array}{c|c} \rho & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

(elementele din rîndul patru și coloana patra sînt nule, iar elementele din primele rînduri și primele trei coloane ne furnizează tocmai matricea ρ).

Pentru a nu complica calculele vom utiliza pentru A_μ expresia $i\bar{v}\gamma\, u$. Rezultatele obținute mai sus arată că neglijarea termenului al doilea din (3) nu restrînge generalitatea rezultatului obținut. În urma unor calcule simple obținem

$$D_{\mu\nu} = Sp(P_a\gamma_\mu P_p\bar{\gamma}_\nu), \qquad \bar{\gamma}_\nu = \gamma_4\gamma_\nu^+\gamma_4, \tag{9}$$

unde

$$(P_p)_{\alpha\beta} = u(\alpha)\bar{u}(\beta), \qquad (P_a)_{\alpha\beta} = v(\alpha)\bar{v}(\beta) = (\gamma_2 \widetilde{P}_p \bar{\gamma}_2)_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

În sistemul legat de particulă, pentru particula respectiv antiparticula Dirac avem

$$P_p^0 = \frac{1}{4}(1 + \gamma_4)(1 - i\vec{\xi}^p\vec{\gamma}\gamma_5), \tag{11}$$

$$P_a^0 = \frac{1}{4}(1 - \gamma_4)(1 - i\vec{\xi}^a\vec{\gamma}\gamma_5), \tag{12}$$

unde $\vec{\xi}^p$ respectiv $\vec{\xi}^a$ este vectorul Stokes al particulei respectiv al antiparticulei Utilizînd (9), (10), (11), (12) găsim

$$2\rho = 1 + S_i\xi_i + \frac{1}{2}S_{ij}\xi_{ij} + \frac{1}{3}\xi_j^p\xi_j^a,$$

unde

$$(S_i)_{km} = -i\varepsilon_{ikm}, \quad i, k, m = 1, 2, 3, \quad S_{ij} = S_iS_j + S_jS_i - \frac{2}{3}S_kS_k\delta_{ij},$$

$$\xi_i = \xi_i^p + \xi_i^a, \quad \xi_{ij} = \xi_i^a\xi_j^p + \xi_j^a\xi_i^p - \frac{2}{3}\xi_k^a\xi_k^p\delta_{ij}.$$

Dacă impunem condiția că $Sp\,\rho = 1$, obținem pentru matricea de densitate expresia

$$\bar{\rho} = \frac{1}{3}\left(2\rho - \frac{1}{3}\xi_k^a\xi_k^p\right) = \frac{1}{3}\left(1 + S_i\xi_i + \frac{1}{2}S_{ij}\xi_{ij}\right), \tag{13}$$

care are forma indicată de A. Sankaranarayanan [6]. Ceea ce am obținut în plus este că vectorul de polarizare $\vec{\xi}$ și tensorul de polarizare cvadripolară ξ_{ij} se poate exprima cu ajutorul vectorilor Stokes $\vec{\xi}^a, \vec{\xi}^p$.

În continuare vom face o comparație a rezultatelor obținute ca cele găsite prin utilizarea tensorilor sferici [2], [5]. Matricea de densitate ρ a particulei cu spinul S se definește prin

$$\rho_{ik} = \sum_{l=0}^{2s}\varphi(S, l)C_{Sklm}^{Si}P^{(l)m}, \quad i, k = -S, \ldots, 0, \ldots, S, \tag{14}$$

unde $\varphi(S, l)$ este un scalar care depinde de S și l. C_{Sklm}^{Si} sînt coeficienții Clebsch-Gordan, iar $P^{(l)m}$ este tensorul sferic de polarizare de rangul l.

Dacă avem o particulă cu spinul unu expresia lui ρ poate fi descompusă în trei termeni

$$\rho = \sum_{l=0}^{2}\rho^{(l)}.$$

Făcînd înlocuirile [1]:

$$P^{(0)0} = 1, \; P^{(1)0} = \xi_3, \; P^{(1)1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_-, \; P^{(1)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_+, \; \text{unde } \xi_\pm = \xi_1 \pm i\xi_2,$$

$$P^{(2)0} = \frac{3\xi_3\xi_3 - \vec{\xi}\,\vec{\xi}}{\sqrt{10}}, \quad P^{(2)\pm1} = \mp\frac{\sqrt{3}\,(\xi_\mp\xi_3 + \xi_3\xi_\mp)}{\sqrt{20}}, \quad P^{(2)\pm2} = \sqrt{\frac{3}{20}}\,\xi_\mp\xi_\mp,$$

şi avînd în vedere valoarea coeficienţilor Clebsch-Gordan găsim

$$\rho^{(0)} \propto 1, \quad \rho^{(1)} \propto S_i' \xi_i,$$

$$\rho^{(2)} \propto \left(S_i' S_j' + S_j' S_i' - \frac{2}{3} S_k' S_k' \delta_{ij}\right)\left(\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i - \frac{2}{3} \xi_k \xi_k \delta_{ij}\right),$$

unde

$$S_i' = U S_i U^+$$

($\propto$ este semnul de proporţionalitate, U este matricea dată sub (7)).

Structura expresiilor (13) şi (14) este deci identică.

Avînd expresia lui ρ şi expresiile (4), (5), (6) ale vectorilor de bază, se poate calcula matricea D în sistemul de laborator.

(Intrat în redacţie la 7 martie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. W. Lakin, Phys. Rev., **98**, 139, 1955.
2. A. I. Ahiezer, V. Beresteţki, *Kvantovaia elektrodinamika*, izd. vtoroe, Moskva, 1959, p. 283–284.
3. D. L. Weaver – C. L. Kammer – R. H. Good, Jr., Phys. Rev., **135**, 241 B, 1964.
4. W. A. Perkins, Phys. Rev., **137**, 1291 B, 1965.
5. W. Konar, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences (Série math.-astr.-phys.), **13**, 495, 1965.
6. A. Sankaranarayanan, Il Nuovo Cimento, **41**, 532, 1956.
7. P. R. Auvil – J. J. Brehm, Phys. Rev. **145**, 1152, 1966.

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ С ЕДИНИЧНЫМ СПИНОМ

(Резюме)

Автор получает ковариантную матрицу поляризации частиц с единичным спином, предполагая, что волновую функцию для таких частиц можно построить из спинориальных волновых функций.

ON THE POLARIZATION OF THE SPINE ONE PARTICLES

(Summary)

The author comes to the covarient matrix of polarization of the spine one particles assuming that for these particles the wave function can be made of spinorial wave functions.

PROBLEMA RELATIVISTĂ A MOMENTELOR MULTIPOLARE

de

O. GHERMAN, GH. STEINBRECHER

Într-o serie de lucrări [1]—[6] s-a pus problema calculului cîmpului electromagnetic generat de un mediu material aflat în mişcare relativistă. Problema fundamentală este să se extindă forma ecuaţiilor lui Maxwell, bine cunoscute în cazul nerelativist şi pentru acest caz.

În lucrarea de faţă se va demonstra că ecuaţiile Maxwell se pot scrie sub forma :

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\nu^{(M)} + \sum_{k}^{0,\infty} \partial_\nu\, \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} M_{\mu\nu}^{\rho_1 \dots \rho_k} \tag{1}$$

unde j_μ^M este curentul „macroscopic" iar mărimile $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \dots \rho_k}$ depind de proprietăţile mediului respectiv. Ele sînt simetrice în indicii superiori şi asimetrice în indicii inferiori.

Demonstraţia o facem utilizînd formalismul lagrangian. Presupunem, că mediul este format din sarcini punctiforme, ele fiind grupate în formaţii stabile, astfel că distanţa între sarcinile din cadrul aceleiaşi formaţii este mult mai mică decît distanţa dintre formaţii („atomi").

„Atomii" îi vom indexa cu litera k, iar particulele componente ale atomului „k" cu indicii „k" şi „i". Aşadar e_{ki} este sarcina particulei „i" din atomul „k" iar $x_\mu^{(ki)}$ sînt coordonatele spaţio-temporale ale ei ; prin $x_\mu^{(k)}$ notăm cvadrivectorul : $(\vec{x}^{(k)}, ix_0)$, x_0 fiind timpul în sistemul laboratorului.

Mărimea $x_\mu^{(ki)} - x_\mu^{(k)}$ care în sistemul de referinţă al particulei „k" are forma $(\vec{y}^{(ki)}, 0)$ este mică în comparaţie cu $x_\mu^{(k)}$. $y_\mu^{(ki)}$ este mărginit şi mic în raport cu $x_\rho^{(k)}$ în orice sistem de referinţă.

Cu aceste notaţii, expresia acţiunii este :

$$S = S_1 + S_2 = \sum_{ki} \int e_{ki} a_\mu(x_\nu^{(ki)}) dx_\mu^{(ki)} + \frac{i}{4} \int f_{\mu\nu}^2 d^4 x \tag{2}$$

Prin $a_\mu(x)$ s-a notat potenţialul vector al cîmpului „atomic". Ne vom ocupa cu primul termen.

Avem : $x_\mu^{(ki)} = y_\mu^{(ki} + x_\mu^{(k)}$, $dx^{(ki)} = dy_\mu^{(ki)} + dx_\mu^{(k)}$ iar pe $a_\mu(x_\nu^{(ki)})$ îl putem dezvolta în serie ;

$$a_\mu(x_\nu^{ki}) = a_\mu(x_\nu^k) + \sum_{m}^{1,\infty} \frac{1}{m!} (y_\lambda^{(ki)} \partial_\lambda)^m a_\mu(x_\nu^k) \tag{3}$$

Prin expresia : $(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^m$ s-a notat operatorul diferențial în care nici un $\partial_{\lambda k}$ nu este urmat de vreun $y_\lambda^{(ki)}$; analog prin $(\partial_\lambda y_\lambda^{(ki)})^m$ se va nota operatorul ordonat astfel încît nici un ∂_λ nu este precedat de vreun $y_\lambda^{(ki)}$. Adăugînd la S expresia :

$$-\sum_{ki} e_{ki} \sum_{m}^{0,\infty} \frac{1}{(m+1)!} \int d\left[y_\mu^{(ki)}(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^m a_\mu(x^k)\right] \tag{4}$$

care nu schimbă ecuația cîmpului, găsim, din (2) și (3)

$$S = \frac{i}{4}\int f_{\mu\nu}^2 d^4x + \sum_{ik} e_{ki} \int a_\mu(x^{(k)})dx_\mu^{(k)} +$$

$$+\sum_{ki} e_{ki}\left[\sum_{m}^{0,\infty}\frac{1}{(m+1)!}(dx_\rho^{(k)}y_\mu^{(ki)} - dx_\rho^{(k)}y_\mu^{(ki)})(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^m \times \right. \tag{5}$$

$$\left. \times\ \partial_\rho a_\mu(x^{(k)}) + \sum_{m}^{1,\infty}\frac{1}{(m+1)!}\int(dy_\mu^{(ki)}y_\rho^{(ki)} - dy_\rho^{(ki)}y_\mu^{(ki)})(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^{m-1}\partial_\rho a_\mu(x^{(k)})\right]$$

Evident, toți $x_\mu^{(k)}$ și $y_\mu^{(ki)}$ depind de un parametru. Drept parametru se va lua timpul în „sistemul laboratorului", x_0.

În formula (5) vom trece de la integralele simple la integralele extinse pe întreg spațiul coadridimensional :

$$e_{ki}\int \varphi(x_0)dy_\mu^{(ki)} = \frac{1}{i}\int \varphi(x_0)i_\mu^{(ki)}(x)d\Omega \tag{6}$$

$$e_{ki}\int \varphi(x_0)dx_\mu^{(ki)} = \frac{1}{i}\int \varphi(x_0)j_\mu^{(ki)}(x)d\Omega \tag{6'}$$

$$\text{unde : } i_\mu^{(ki)}(x) = \delta_3(\vec{x}-\vec{x}^k)\frac{dy_\mu^{(ki)}}{dx_0}e_{ki} \tag{7}$$

$$j_\mu^{(k)}(x) = \delta_3(\vec{x}-\vec{x}^k)\frac{dx_\mu^{(k)}}{dx_0}e_{ki} \tag{7'}$$

Din (5), (6) și (6′), mărginindu-ne la aproximația de ordin N, avem :

$$S \approx S_N = \frac{i}{4}\int f_{\mu\nu}^2\, d\Omega + \int a_\mu(x)\left[\sum_{k,i} j_\mu^{(ki)}(x)\right]d\Omega +$$

$$+\int\sum_{ki}\left[\sum_{m}^{O,N}(j_\mu^{(ki)}y_\rho^{(ki)} - j_\rho^{(ki)}y_\mu^{(ki)})(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^m\ \partial_\rho a_\mu \frac{1}{(m+1)!} + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \sum_{m}^{1,N}\frac{m}{(m+1)!}(i_\mu^{(ki)}y_\rho^{(ki)} - i_\mu^{(ki)}y^{(ki)})(y_\lambda^{(ki)}\partial_\lambda)^{m-1}\ \partial_\rho a_\mu\right]$$

Presupunînd că $a_\mu(x)$ se anulează la infinit cu toate derivatele de ordin N, prin integrări prin părți se găsește :

$$S_N = \frac{i}{4}\int f_{\mu\nu}^2\, d\Omega + \frac{1}{i}\int a_\mu(x)\,[j_\mu^M + \partial_\nu m_{\mu\nu}]\,d\Omega \tag{9}$$

unde am notat:

$$m_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} + n_{\mu\nu} \tag{10}$$

$$p_{\mu\nu} = \sum_{ki} \sum_{m}^{0,N} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} (\partial_\lambda y_\lambda^{ki})^m (j_\mu^{(ki)} y_\nu^{(ki)} - j_\nu^{(ki)} y_\mu^{(ki)}) \tag{11}$$

$$n_{\mu\nu} = \sum_{ki} \sum_{m}^{1,N} \frac{(-1)^m m}{(m+1)!} (\partial_\lambda y_\lambda^{(ki)})^{m-1} (i_\mu^{(ki)} y_\nu^{(ki)} - i_\nu^{(ki)} y_\mu^{(ki)}) \tag{12}$$

$$j_\mu^M(x) = \sum_{i,k} j_\mu^{(ki)} \tag{13}$$

Din expresia lui S_N se poate deduce ecuaţia cîmpului:

$$\partial_\nu f_{\mu\nu} = \partial_\nu m_{\mu\nu} + j_\mu^M \tag{14}$$

Se observă că j_μ are semnificaţia unui curent macroscopic, iar $m_{\mu\nu}$ caracterizează contribuţia sarcinilor şi curenţilor „subatomici".

Se observă că $m_{\mu\nu}$ poate fi pus sub forma:

$$m_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \partial_{\rho_1} M_{\mu\nu}^{\rho_1} + \ldots + \partial_{\rho_1} \ldots \partial_{\rho_N} M_{\mu\nu}^{\rho_1, \ldots \rho_N} \tag{15}$$

unde toţi $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \ldots \rho_N}$ satisfac condiţiile enunţate.

Mai mult decît atît, avînd un număr finit de termeni, se poate da o altă dezvoltare a lui $m_{\mu\nu}$, analogă cu (15), dar în care toţi tensorii care intră sub derivate, sînt tensori ireductibili, care se exprimă prin combinaţiile liniare ale derivatelor lui: $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \ldots \rho_k}$

$$m_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu} + \partial_{\rho_1} \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\rho_1} + \ldots + \partial_{\rho_1} \ldots \partial_{\rho_N} \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\rho_1 \ldots \rho_N} \tag{16}$$

unde: $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{\rho_1 \ldots \rho_k}$ au proprietăţile de simetrie ca şi $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \ldots \rho_k}$, dar sînt ireductibile faţă de grupul Lorentz general. Faţă de grupul propriu, ele se descompun în două componente ireductibile: $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(\pm)\rho_1 \ldots \rho_k}$, care satisfac relaţiile:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(\pm)\rho_1 \ldots \rho_k} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{M}_{\lambda\sigma}^{(\pm)\rho_1 \ldots \rho_k} \tag{17}$$

Vom numi mărimile $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(\pm)\rho_1 \ldots \rho_k}$ densitate de multipol de ordin $(k+1)$. În cadrul lor se înglobează atît multipoli electrici cît şi magnetici, utilizaţi în calcule nerelativiste.

Pe de altă parte, este clară semnificaţia lui $p_{\mu\nu}$ şi $n_{\mu\nu}$, introduşi; cînd atomii sînt în repaus, ei modifică numai cîmpul electric, respectiv magnetic.

Să studiem acum proprietăţile analitice ale transformatelor Laplace ale lui $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(\pm)\rho_1 \ldots \rho_k}(x)$ (pentru prescurtare, vom omite indicii, fiind neesenţiali). Raţionamentul de mai jos este valabil doar pentru a descrie fenomenele de polarizare induse, care încetează după un interval finit de timp (la un moment dat $|\vec{y}^{ki}(x_0)|$ devinezero, sau $\mathcal{M}(x)$ mediat tinde la zero repede). Se obsservă că în acest caz $M(x)e^{k''x} \in S'_x$ dacă şi numai dacă $k'' \in \Gamma_+$, unde prin S'_x s-a notat spaţiul distribuţiilor temperate, iar prin Γ_+ conul luminos superior. Această proprietate este o consecință a faptului că y_μ^{ki} sînt mărginite, împreună cu derivata lor, i: $|\Delta \vec{x}_\mu^k| \leqslant x_0$.

De aici rezultă imediat că transformata Laplace a lui $\mathcal{M}(x)$, $L_k(\mathcal{M}(x)) \equiv F_{k'}(e^{-k''x}\mathcal{M}(x))$ este o funcție olomorfă de $k' + k''$ în tubul de olomorf $T^{\Gamma^+} = \{k = k' + ik''/k' \in R^4,\ k'' \in \Gamma^+\}$.

Se mai observă, că funcțiile $L_k(M(x))$ se mai pot prelungi în afara tubului (olomorfie inițial, (vezi [7]), utilizînd proprietățile tensoriale ale lui: $L_k(M(x)) = M(k)$, extinse și pentru grupul Lorentz complex. Noul domeniu va fi tubul extin T'_1 [7].

Utilizînd faptul că se poate demonstra că $\mathcal{M}(k)$ nu crește mai repede dec o anumită putere a lui k, pentru $k \to \infty$, putem să-i dăm o reprezentare integral utilizînd teorema lui Bargman [8]. Aceasta afirmă că, dacă $|\mathcal{M}(k)| < C_\varepsilon e^{|\varepsilon||Imk|}$, cîn $Imk \to \infty$, are loc relația următoare în condițiile proprietăților analitice amintite

$$\mathcal{M}(k) = \int K(k - k')\mathcal{M}(k' + io)\, d^4k' \tag{18}$$

În cazul domeniului nostru $K(z)$ este dat de relația:

$$K(z) = \int\limits_{\Gamma^+} e^{i\xi z} d\xi = \frac{8\pi}{(\vec{z}^2 - z_0^2)^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4}, \tag{19}$$

Putem găsi o serie de relații de dispersie pentru $\mathcal{M}(k)$, considerînd diferite subdo menii ale domeniului inițial.

Astfel, luînd $Im\vec{k} = 0$ găsim o reprezentare de tip Cauchy pentru: $\mathcal{M}(\vec{k}, z)$

$$\mathcal{M}(\vec{k}, z) = \int \frac{\mathcal{M}(\vec{k}, z' + io)\, dz'}{z' - z} \tag{20}$$

care ne dă relațiile de dispersie:

$$Re\mathcal{M}(\vec{k}, z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Im\mathcal{M}(\vec{k}, z')dz'}{z' - z} \tag{2}$$

$$Im\mathcal{M}(\vec{k}, z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re\mathcal{M}(\vec{k}, z')dz'}{z' - z} \tag{21}$$

Acestea trebuie utilizate combinînd cu relația:

$$\overline{\mathcal{M}(\vec{k}, z)} = \mathcal{M}(-\vec{k}, -z) \quad \text{(pentru } \vec{k} \text{ și } z \text{ reali)}$$

Analog, menținînd k_2 și k_3 reale, găsim următoarea reprezentare (formula Bar man pentru $n = 2$)

$$\mathcal{M}(z_0, z_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0 dk_1}{(z_1 - k_1)^2 - (z_0 - k_0)^2} \mathcal{M}(k_0 + i0, k_1 + io) \tag{22}$$

Este foarte plauzibil ca proprietățile analitice de mai sus să fie valabile și pentru o distribuție arbitrară, dar localizată, de sarcini. Aceasta ar putea conduce la rezultate interesante în cadrul electrodinamicii cuantice. Pe de altă parte, relațiile de mai sus sînt valabile și pentru medii la care dependența polarizării de cîmpul exterior este neliniară.

(Intrat în redacție la 4 aprilie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. A. W. Kaufman, Ann. Physics, **18** (1962) p. 264.
2. J. Bacry, Ann. Physique, **8** (1963) p. 197.
3. S. R. de Groot, J. Vlieger, Physica, **31** (1965) p. 125.
4. S. R. de Groot ,J. Vlieger, Physica, **31**, (1965) p. 254.
6. S. R. de Groot, L. G. Suttorp, Physica **31** (1965) p. 1713.
7. R. F. Streater, A. S. Wightman, *P.C.T. Spin and Statistics and All That*. New York – Amsterdam, 1964, Cap. 2.
8. V. S. Vladimirov, *Metodî teorii funkții mnoghih kompleksnîh peremennîh*, Moscova, 1964.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРОБЛЕМА МУЛЬТИПОЛЯРНЫХ МОМЕНТОВ

(Резюме)

Используя формализм Лагранжа, авторы показывают, что уравнения Максвелла для поля, генерированного движущейся материальной средой, можно написать в виде (1), в котором $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \cdots \rho_k}$ зависят от свойств среды. Авторы изучают затем свойства аналитичности преобразований Лапласа этих величин, приводящих к дисперсионным отношениям (21), (21').

RELATIVIST PROBLEM OF THE MULTI-POLAR MOMENTS

(Summary)

Using the Lagrange's formalism, the authors show that Maxwell's equations for a field generated by a material medium in movement may be written as (1) in which $M_{\mu\nu}^{\rho_1 \cdots \rho_k}$ depend on the properties of the medium. The analyticity properties of Laplace transforms of these magnitudes, are also studied reaching to the dispersion relations (21), (21').

DEPLASAREA DE FRECVENȚĂ DATORITĂ INTERACȚIUNILOR INTRAMOLECULARE ȘI INTERMOLECULARE DIPOL—DIPOL

de

D. DEMCO

Introducere. Analiza deplasării liniilor de rezonanță datorită mișcării termice a ambianței moleculare, învelișului electronic al atomilor etc., permit relevarea mecanismului de interacțiune și a comportării dinamice a gradelor de libertate relativ la sistemul de spin și baie. Vom studia deplasarea de frecvență ce apare din cauza mișcării browniene de difuzie a moleculelor prin intermediul interacțiunii spin—baie.

Kubo-Tomita [1], utilizînd o teorie liniară a proceselor ireversibile, obține expresia părții neseculare a deplasării de frecvență Larmor. În cazul unui lichid izotropic, în care relaxarea magnetică nucleară apare ca urmare a interacțiunilor intramoleculare dipol-dipol, se calculează expresia concretă a deplasării de frecvență, în ipoteza că linia principală este departe de sateliți. Folosind metoda din [1], Serotki și Kokin [2], calculează deplasarea de frecvență în cazul unui lichid izotrop și omogen ce are moleculele compuse din doi nuclei identici cu momentele magnetice diferite de zero ($I = 1/2$). Expresia obținută este analizată în cazul interacțiunii de translație dipol-dipol intermoleculare în ipoteza cîmpurilor statice puternice și slabe. Corecția ce apare la factorul giromagnetic nu este determinată de interacțiunea spin-orbită, ci depinde de caracterul mișcării termice a momentelor magnetice ce modulează interacțiunea dipol-dipol. Ambele metode sînt aplicabile departe de saturație și nu iau în considerare descentralizarea nucleilor în molecule poliatomice, sensul deplasării de frecvență Larmor fiind diferit.

Deplasarea de frecvență în aproximația Born cea mai joasă. Utilizînd metoda lui Hubbard [3], privind forma semiclasică și cuanto-mecanică relativ la teoria operatorului de densitate a relaxării, se efectuează în [4] o nouă renormalizare a „self-energiei" sistemului de spin, ceea ce permite obținerea deplasărilor de frecvență markoviene în aproximația Born cea mai joasă. Se consideră că relaxarea apare ca urmare a interacțiunilor dipol-dipol ce au loc într-un sistem de N spini nucleari identici 1/2, cu factorul giromagnetic γ. Nucleii se găsesc în poziții echivalente în moleculele sferice ale unui lichid izotrop. Dacă nu luăm în considerare corelațiile încrucișate în condițiile unui cîmp transversal foarte slab în jurul rezonanței pentru deplasarea de frecvență Larmor obținem:

$$\delta = 4j''_{2,-2}(-2\omega_0) - 2j''_{1,-1}(-\omega_0) \tag{1}$$

unde j''_{lk} reprezintă partea imaginară a densităţilor spectrale, $j_{lk}(\omega) \equiv j'_{lk}(\omega) + ij''_{lk}(\omega)$, definite astfel:

$$j_{lk} \equiv \sum_i (1 - \delta_{ij}) j_{(ij)(ij)}{}^{lk}(\omega) \tag{2}$$

unde:

$$j_{(ij)(ij)}{}^{lk}(\omega) = \int_0^\infty C_{(ij)(ij)}{}^{lk}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{3}$$

Funcţiile de corelare în (3) sînt date prin:

$$C_{(ij)(ij)}{}^{lk}(\tau) = < U^l_{ij}(t + \tau) U_{ij}{}^k(t) > \tag{4}$$

unde:

$$U_{ij}{}^k = ({}^{3\pi}/_{10})^{1/2} \gamma^2 \, (r'_{ij})^{-3} (-1)^k Y_2^{-k}(\theta'_{ij}, \varphi'_{ij}) \tag{5}$$

Y^k_2 sînt funcţiile sferice normalizate, iar mărimea vectorului de poziţie $\vec{r}'_{ij}$ a nucleului i relativ la nucleul j, este dată prin r'_{ij} şi unghiurile lui polare $(\Theta'_{ij}, \varphi'_{ij})$.

Metoda lui Hubbard nu consideră cîmpul rotitor ca o perturbaţie astfel că la saturaţie apare o dependenţă a deplasării de frecvenţă Larmor de tăria cîmpului transversal şi o deplasare de frecvenţă suplimentară δ_1, relativ la ω_1, ce are forma:

$$\delta_1 = 3s \, [s^2 j''_{00}(-2\omega') + 2c^2 j''_{00}(-\omega')] \tag{6}$$

în care $s \equiv {}^{\omega'_0}/_{\omega'}$; $\quad c \equiv {}^{\Delta'_0}/_{\omega'}$ unde $\Delta_0 \equiv \omega_0, - \omega$ iar $\omega' \equiv (\Delta^2_0 + \omega^2_1)^{1/2}$.

Soluţiile staţionare ale ecuaţiilor de evoluţie ale magnetizărilor depind de mărimea şi frecvenţa cîmpului rotitor, într-un mod mult mai complicat ca ecuaţiile Bloch. Modul de absorbţie poate fi însă adus la forma ecuaţiilor fenomenologice dacă definim pe lîngă timpii de relaxare şi o deplasare de frecvenţă Larmor efectivă δ', independentă de frecvenţă, dar depinzînd de mărimea cîmpului rotitor. În condiţiile rezonanţei $(\Delta_0, = 0)$ din [4] avem:

$$(\delta)^2 = \delta^2 \frac{3j'_{00}(0) - 10j'_{1,-1}(-\omega_0) + 4j'_{2,-2}(-2\omega_0) + 3j'_{0,0}(-2\omega_1)}{6j'_{00}(-2\omega_1) - 10j'_{1,-1}(-\omega_0) - 4j'_{2,-2}(-2\omega_0)} \tag{7}$$

iar

$$\delta_1 = 3j''_{00}(-2\omega_1) \tag{8}$$

Cantităţile δ, δ_1 şi δ' date de (1), (7) şi (8) pot fi scrise ca suma a doi termeni care conţin, respectiv, efectele interacţiunilor intramoleculare dipol-dipol, şi intermoleculare dipol-dipol.

$$\delta = (\delta)_{\text{intra.}} + (\delta)_{\text{inter.}} \tag{9}$$

$$\delta_1 = (\delta_1)_{\text{intra.}} + (\delta_1)_{\text{inter.}} \tag{10}$$

$$\delta' = (\delta')_{\text{inter.}} + (\delta')_{\text{inter.}} \tag{11}$$

unde:

$$(\delta)_{\text{intra.}} = \sum\nolimits'_i [4j''_{(ij)(ij)}{}^{2,-2}(-2\omega_0) - 2j''_{(ij)(ij)}{}^{1,-1}(-\omega_0)] \tag{12}$$

$$(\delta_1)_{\text{intra.}} = 3\sum\nolimits'_i j''_{(ij)(ij)}{}^{0,0}(-2\omega_1). \tag{13}$$

$$(\delta')_{\text{intra.}} = (\delta)_{\text{intra.}} \cdot \sum\nolimits'_i \left[\frac{3j'_{(ij)(ij)}{}^{0,0}(0) - 10j'_{(ij)(ij)}{}^{1,-1}(-\omega_0) + 4j'_{(ij)(ij)}{}^{2,-2}(-2\omega_0) + 3j'_{(ij)(ij)}{}^{0,0}(-2\omega_1)}{6j'_{(ij)(ij)}{}^{0,0}(-2\omega_1) - 10j'_{(ij)(ij)}{}^{1,-1}(-\omega_0) - 4j'_{(ij)(ij)}{}^{2,-2}(-2\omega_0)} \right] \tag{14}$$

Suma $\sum_i'$ este luată după toți nucleii din aceeași moleculă exceptînd nucleul j. În mod absolut analog putem defini contribuțiile intermoleculare ale deplasărilor de frecvență, în care apare însă suma $\sum_i''$ după toți nucleii din molecule diferite în afară de nucleul j.

În vederea calculării densităților spectrale să considerăm că mișcarea rotațională a moleculelor și cea de translație sînt independente. Mișcarea moleculelor sferice se presupune a fi o difuzie izotropică cu coeficientul de difuzie $D = kT/6\pi a\eta$ pentru mișcarea de translație și $D' = kT/6\pi\eta a^3$ pentru cea de rotație, unde k = constanta Boltzamann, T = temperatura, η = coeficientul de viscozitate al fluidului, iar $2a$ este distanța minimă dintre două molecule independente.

După cum se arată în [5], în cazul considerării descentralizării nucleilor, spre deosebire de [1] și [2], pentru contribuția intermoleculară, obținem

$$\sum_i'' j_{(ij)(ij)}^{l,-l}(-l\omega_0) = n\pi(\gamma^2\hbar)^2(-1)^l \sum_{p=0}^{\infty}\int_0^{\infty} C_{l,-l}^{(p)}(\tau) \times e^{-il\omega_0\tau}\, d\tau \tag{15}$$

unde n reprezintă numărul spinilor pe unitatea de volum. Ne mărginim numai la primii doi termeni în suma după p, primul ce nu depinde de mișcarea de rotație a moleculelor fiind

$$C_{l,k}^{(0)}(\tau) = \delta_{-l,k}\left(\frac{3}{10}\right) G_2(\tau) \tag{16}$$

iar al doilea ce ia în considerare această mișcare:

$$C_{l,k}^{(1)}(\tau) = \delta_{-l,k}\; 3b^2 e^{-2D'|\tau|}\, G_3(\tau) \tag{17}$$

În formulele (16), (17) apare funcția $G_L(\tau)$, ce depinde de funcțiile Bessel de speța întîia $I_{L+1/2}$,

$$G_L(\tau) = (2a)^{-2L+1}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-D'|\tau| u^2}{2a^2}\right)\left[I_{L+1/2}(u)\right]^2 u^{-1}\, du \tag{18}$$

în care b este distanța fiecărui spin de la centrul moleculei în care este conținut, iar timpul de corelare τ_0 este definit

$$\tau_0 \equiv 2a^2/D$$

Dacă moleculele lichidului efectuează o mișcare rotațională, funcțiile de corelare relativ la contribuția intramoleculară în cazul moleculei ce conține doi nuclei, după [5], este:

$$C_{(ij)(ij)}^{l,k}(\tau) = \delta_{-l,k}\,(3/40)\,(\gamma^2\hbar)^2 (r'_{ij})^{-6}(-1)^l \exp\left(-|\tau|/\tau_2\right) \tag{19}$$

unde $\tau_2 \equiv (6D')^{-1}$ este timpul de corelare corespunzător acestei mișcări.

Contribuția intramoleculară. Utilizînd (3) și (19) obținem pentru partea imaginară a densităților spectrale

$$j''_{(ij)(ij)}{}^{l,-l}(-l\omega_0) = (3/40)(\gamma^2\hbar)^2(r'_{ij})^{-6}(-1)^{l+1} \times \\ \times \frac{l\omega_0\tau_2^2}{1+(l\omega_0\tau_2)^2} \tag{20}$$

Deplasarea de frecvenţă Larmor (12) devine:

$$(-\delta)_{\text{intra.}} = \left(\frac{3}{4}\right)(\gamma^2\hbar)^2 \sum\nolimits_j' (r'_{ij})^{-6} \left\{\frac{1}{5}\frac{\omega_0 \tau_2^2}{1+(\omega_0\tau_2)^2} + \frac{4}{5}\frac{\omega_0\tau_2^2}{1+4(\omega_0\tau_2)^2}\right\} \quad (21$$

şi coincide cu rezultatul din [1] obţinut printr-o altă metodă. Deplasarea de frec venţă efectivă, (14), din (20) şi (21) în ipoteza cîmpurilor slabe ($\omega_0\tau \ll 1$), devine

$$-(\delta')_{\text{intra.}} = -(\delta)_{\text{intra.}} = \frac{3}{4}(\gamma^2\hbar)^2 \sum_i' (r'_{ij})^{-6}\omega_0\tau_2^2 \quad (22$$

iar pentru cîmpuri puternice ($\omega_0\tau_2 \gg 1$, $\omega_1 \ll \omega_0$):

$$-(\delta')_{\text{intra.}} = \left(\frac{3}{10}\right)(\gamma^2\hbar)^2 \sum_j' r'_{ij})^{-6}\left[\frac{4\omega_0^2\tau_2^2 + 11(1+4\omega_1^2\tau_2^2) - 4\omega_0^2\omega_1^2\tau_2^4}{6\omega_0^2\tau_2^2 + 11(1+4\omega_1^2\tau_2^2)}\right]^{1/2}\omega_0) \quad (23$$

Pentru a putea analiza în diverse cazuri concrete valoarea deplasării de frec venţă relativ la ω_1, din (13) obţinem:

$$-(\delta_1)_{\text{intra.}} = \frac{9}{20}(\gamma^2\hbar)\sum_i'(r'_{ij})^{-6}\left(\frac{\omega_1\tau_2^2}{1+4(\omega_1\tau_1)^2}\right) \quad (24$$

Dacă reprezentăm grafic mărimea $|(\delta)|_{\text{intra.}}\,\omega_0$ funcţie de $\omega_0\tau_2$ obţinem o curb similară cu cea din [2] de unde observăm că începînd din domeniul $\omega_0\tau_2 \sim 1$ ave $|(\delta)_{\text{intra.}}|\,\omega_0 \sim \left(\frac{3}{10}\right)(\gamma^2\hbar)^2\sum_j'(r_{ij})^{-6}$

Timpul de relaxare efectiv introdus în [3]

$$1/T_2' = 1/T_2 - 3[j'_{0,0}(0) - j'_{0,0}(-2\omega_1)] \quad (25$$

cu ajutorul lui (2), (3) şi (19) devine:

$$(1/T_2')_{\text{intra.}} = \left(\frac{3}{20}\right)(\gamma^2\hbar)^2\tau_2\sum_i'(r'_{ij})^{-6}\left\{\frac{3}{2} + \frac{5}{1+(\omega_0\tau_2)^2} + \frac{2}{1+(2\omega_0\tau_2)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1+(2\omega_1\tau_2)^2}\right\} \quad (26$$

În condiţiile $\omega_1\tau_2 \ll 1$ din (26) obţinem $(1/T_2) = (1/T_2)_{\text{intra.}}$ unde $(T_2)_{\text{intra.}}$ coincid cu cel dat în [5].

Contribuţia intermoleculară. Pentru calcularea densităţilor spectrale în aces caz vom utiliza (15), (16) şi (17). Aplicînd teorema reziduurilor [6], putem evalu integralele ce permit calcularea contribuţiei intermoleculare de translaţie (I_0) de prim ordin în rotaţie (I_1) la densităţile spectrale. Ele au forma:

$$I_0 \equiv \int_0^\infty C_{l_1-l(\omega)}(\tau)e^{-il\omega_0\tau}d\tau = \left(\frac{3}{40\,Da}\right)\left\{\frac{(x^2-2)+e^{-x}[(x^2+4x+2)\cos x - \sin x(x^2-2)]}{x^5} \pm \right.$$

$$\left.\pm\, i\,\frac{(-2x^3+3x^2+6)+3e^{-x}[(x^2-2)\cos x - (x^2+4x+2)\sin x]}{x^5}\right\} \quad (27$$

$$I_1 \equiv \int_0^\infty C_{l_1 - l}^{(1)}(\tau) e^{-il\omega\tau_0}\, d\tau = \left(\frac{3b^2}{32a^3D}\right) \times \tag{28}$$
$$\times \left\{ \frac{\alpha(\varphi, r) + \beta(\varphi, r) + \gamma(\varphi, r)}{r^{7/2}} \pm i\, \frac{x^2}{2} \frac{\delta(\varphi, r) + \varepsilon(\varphi, r)}{r^{7/2}} \right\}$$

unde:

$$\alpha(\varphi,r) \equiv -9\cos\frac{7\varphi}{2} + 3r\cos\frac{5\varphi}{2} - r^2\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{2}{5}r^{5/2}\cos\varphi \tag{29a}$$

$$\beta(\varphi,r) \equiv \left(9\cos\frac{7\varphi}{2} + 15r\cos\frac{5\varphi}{2} + r^2\cos\frac{3\varphi}{2} + 18r^{1/2}\cos 3\varphi + \right.$$
$$\left. + 6r^{3/2}\cos 2\varphi\right) e^{-2r^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}} \cos\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{29b}$$

$$\gamma(\varphi,r) \equiv -\left(9\sin\frac{7\varphi}{2} + 15r\sin\frac{5\varphi}{2} + r^2\sin\frac{3\varphi}{2} + 18r^{1/2}\sin 3\varphi + \right.$$
$$\left. + 6r^{3/2}\sin 2\varphi\right) e^{-2r^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}} \sin\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{29c}$$

$$\delta(\varphi,r) \equiv \frac{A^2 - r\cos\varphi}{A^4 - 2rA^2\cos\varphi + r^2}\left\{\left(\frac{2}{5}r^{5/2}\cos\varphi + 3r\cos\frac{\varphi}{2} - r^2\cos\frac{3\varphi}{2} - 9\cos\frac{7\varphi}{2}\right)\right.$$
$$+ e^{-2r^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}}\left(18r^{1/2}\cos 3\varphi + 6r^{3/2}\cos 2\varphi + 9\cos\frac{7\varphi}{2} + 15r\cos\frac{5\varphi}{2} + \right.$$
$$\left. + r^2\cos\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) - e^{-2r^{1/2}\cos\varphi/2}\left(18r^{1/2}\sin 3\varphi + 6r^{3/2}\sin 2\varphi + \right. \tag{29d}$$
$$\left.\left. + 9\sin\frac{7\varphi}{2} + 15r\sin\frac{5\varphi}{2} + r^2\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\sin\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$\varepsilon(\varphi,r) \equiv \frac{r\sin\varphi}{A^4 - 2rA^2\cos\varphi + r^2}\left\{\left(\frac{2}{5}r^{5/2}\sin\varphi + 3r\sin\frac{5\varphi}{2} - r^2\sin\frac{3\varphi}{2} - 9\sin\frac{7\varphi}{2}\right) + \right.$$
$$+ \left(18r^{1/2}\sin 3\varphi + 6r^{3/2}\sin 2\varphi + 15r\sin\frac{5\varphi}{2} + r^2\sin\frac{3\varphi}{2} + 9\sin\frac{7\varphi}{2}\right) \times$$
$$\times e^{-2r^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}}\cos\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \left(18r^{1/2}\cos 3\varphi + 6r^{3/2}\cos 2\varphi + 15r\cos\frac{5\varphi}{2} + \right.$$
$$\left.\left. + r^2\cos\frac{3\varphi}{2} + 9\cos\frac{7\varphi}{2}\right) e^{-2r^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}}\sin\left(2r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \tag{29e}$$

În formulele de mai sus, semnul plus şi minus corespunde la $l < 0$ respectiv la $l > 0$, iar $x \equiv \sqrt{2|l|\omega_0\tau_0}$, $r \equiv \sqrt{A^4 + (|l|\,\omega_0\tau_0)^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi \equiv \frac{|l|\,\omega_0\tau_0}{3}$ şi $A^2 \equiv \frac{4a^2D'}{D} = 3$.

Dacă ne mărginim numai la termenul corespunzător interacțiunii de translați intermoleculară din (27), (15) și (1), obținem pentru deplasarea de frecvență δ î cazul $(\omega_0 \tau_0) \ll 1$:

$$-(\delta)_{\text{inter}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{120\sqrt{2}}\, n\pi\, (\gamma^2\hbar)^2\, a^{-3}\, \tau_0 \sqrt{(\omega_0 \tau_0)} \qquad (30$$

iar pentru $\omega_0 \tau_0 > 1$:

$$-(\delta) = \frac{1}{160}\, n\pi\, (\gamma^2\hbar)^2\, a^{-3}\, [16(\omega_0\tau_0)^{-1} - 3\,(1+\sqrt{2})(\omega_0\tau_0)^{-3/2}] \qquad (31$$

Rezultatul obținut diferă de cel al lui Skorțki și Kokin, [2], atît pri coeficientul numeric ce corespunde cazului a doi nuclei identici 1/2 din molecul în stări de triplet și simplet, cît și prin semnul deplasării de frecvență. Dacă repre zentăm grafic dependența deplasării de frecvență Larmor funcție de $\omega_0\tau_0$, se ved că valoarea maximă este atinsă în domeniul $\omega_0\tau_0 \sim 1$.

Considerarea în deplasarea de frecvență și a termenului (28) corespunzăto rotației intermoleculare conduce la o valoare mai mare a deplasării de frecvenț decît cea obținută în tratamentele anterioare, în care nucleii au fost considerați în centrul moleculelor sferice.

Termenii de ordinul doi ce descriu rotația intermoleculară și care sînt mult ma mici în comparație cu primii ($b < a$), pot fi calculați într-o manieră similară cu (28 obținîndu-se o expresie foarte complicată. Analog timpilor de relaxare, [5], contri buția determinantă la deplasarea de frecvență Larmor datorită interacțiunilo intermoleculare o are mișcarea de translație. Utilizînd (27), (28) și (15), putem obțin imediat și expresiile pentru δ_1, δ' și T'_2.

În condițiile cîmpului transversal lent rotitor [4], timpul de relaxare longitu dinal și transversal devin egali și se exprimă prin relația :

$$1/T_0 = 20\, j'_{0,0}(0) \qquad (32$$

Utilizînd (20), (27), (28), (15) și [5] obținem pentru T_0^{-1} expresia dată prin para metrii moleculari ai lichidului sub forma :

$$T_0^{-1} \equiv \frac{3}{2}(\gamma^2\hbar)^2 \sum\nolimits_j' (r'_{ij})^{-6} + \frac{n\pi(\gamma^2\hbar)}{5\,Da}\left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)0{,}23 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 0{,}15\right\} \qquad (33$$

Concluzii. Rezultatele obținute în cazul contribuției intermoleculare permi a da expresia timpului de relaxare transversal și longitudinal [3] în tot domeniu de variație a lui $\omega_0\tau_0$. Faptul acesta generalizează rezultatele din [2] și [5]. Expresiil obținute pentru deplasările de frecvență sînt valabile numai în ipoteza „băii rapi fluctuente" și corespund la o micșorare a frecvenței de rezonanță.

În cazul lichidelor, deplasarea de frecvență Larmor în aproximația Born ce mai joasă, poate fi principial detectată experimental, fiind facilitată de îngustime liniilor de rezonanță. Pentru apă pură, cunoscînd că $\gamma = 2{,}67 \cdot 10^4$ gauss$^{-1}\cdot$ sec $a = 1{,}38$ Å, $b = 0{,}95$ Å, [7] iar la 20°C avem $\tau_2 = 3{,}2\ 10^{-10}$ sec, $n = 0{,}3\ 10^{23}$ cm^{-} [2], pentru $\omega_0\tau_2 \sim 1$ obținem că $|\delta|/\omega_0$ este de ordinul de mărime 10^{-10} ceea c se plasează sub limita de măsurare a spectrometrelor. Apa zeolitică are timpul d corelare în condiții obișnuite, în jur de $10^{-7} - 10^{-8}$ sec., [8]. Zeoliții au un volu liber accesibil apei în jur de $0{,}2 - 0{,}5$ cm³ per cm³, de cristal, [9]. Utilizînd datel de mai sus pentru $|\delta|/\omega_0$ în domeniul $\omega_0\tau_0 \sim 1$ obținem valori în jur de $10^{-3} - 10^{-}$

ce pot fi puse în evidenţă experimental. Deci, în lipsa unui „spectru alb" relativ la interacţiunea dipol-dipol, deplasarea de frecvenţă Larmor este măsurabilă. Formula (24) ne permite a arăta că în ambele cazuri de mai sus deplasarea de frecvenţă relativ la ω_1 este foarte mică.

(Intrat în redacţie la 11 ianuarie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. R. Kubo, K. Tomita, J. Phys. Soc. Japan, **9**, 888 (1954).
2. G. V. Scroşcii, A. A. Cochin, JETF, **36**, 481 (1959).
3. P. S. Hubbard, Rev. Mod. Phys., **33**, 249 (1961).
4. D. Demco, Comunicare ştiinţifică în cadrul Facultăţii de fizică Cluj (1966).
5. P. S. Hubbard, Phys. Rev., **131**, 275 (1963).
6. P. S. Hubbard, Proc. Royal Soc., **291** A, 537, (1966).
7. K. Kryvicki, Physica, **32**, 167 (1966).
8. P. Ducros, X. Pare, Compte Rendu du 9e Colloque Pise, **383** (1960).
9. R. M. Baner, Endeavour, **XXIII**, 122 (1964).

СМЕЩЕНИЕ ЧАСТОТЫ БЛАГОДАРЯ ВНУТРИМОЛЕКУЛЯРНЫМ И МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬ

(Резюме)

В случае ядерной релаксации посредством внутримолекулярных и межмолекулярных взаимодействий диполь-диполь вычисляются выражения смещений частоты, применимые и к полиатомным молекулам, причём даются и условия их экспериментального наблюдения.

FREQUENCY SHIFT BY THE INTRAMOLECULAR AND INTERMOLECULAR DIPOL-DIPOL INTERACTIONS

(Summary)

In the occurrence of nuclear magnetic relaxation through the intermedium of the intramolecular and intermolecular dipol-dipol interactions there are calculated the expressions of the frequency shifts also applicable to the polyatomic molecules, showing their conditions of experimental observation.

O METODĂ DE IMPULS DE CĂLDURĂ PENTRU MĂSURAREA PROPRIETĂȚILOR TERMICE ALE PROBELOR SCURTE

de

F. KELEMEN și A. NÉDA

Introducere. În unele corpuri solide, mai ales la temperaturi ridicate, prin încălzire sau prin menținerea îndelungată a unui gradient de temperatură, se produc anumite schimbări structurale sau variații fizico-chimice. În asemenea cazuri este mai avantajoasă aplicarea metodelor nestaționare, de încălzire de scurtă durată — în locul metodelor staționare — la studiul conductibilității termice și al altor mărimi termice [1].

Pentru măsurarea difuzivității termice, în ultimii ani au fost elaborate mai multe metode de impuls de căldură sau de unde termice (vezi [2]). La corpuri de probă cu dimensiuni mari, prin metode de încălzire de scurtă durată, în afara difuzivității termice, se pot determina în același timp și alte mărimi termice, cum sînt coeficientul de conductibilitate termică și căldura specifică [3, 4]. Însă la corpuri de probă cu dimensiuni reduse, determinarea simultană a mărimilor menționate este mai dificilă și în această privință nu s-au făcut decît puține încercări. Pentru probele metalice cu dimensiuni mici o metodă de impuls de căldură a fost descrisă și aplicată în jurul temperaturii camerei de [5]. Metoda aceasta însă necesită o instalație experimentală modernă, cu care se pot înregistra variații mici de temperatură și de durată scurtă.

În lucrarea de față vom arăta că prin metoda impulsului de căldură dezvoltată de noi pentru măsurarea difuzivității termice se mai pot determina simultan (deci printr-o singură experiență) și alte mărimi termice, căldura specifică, coeficientul de conductibilitate termică, precum și coeficientul de transmisie de căldură în cazul convecției naturale. Dispozitivul experimental și procedeul de măsurare este relativ simplu. În forma actuală metoda se poate aplica la studiul proprietăților termice ale izolatorilor și ale semiconductorilor care n-au o conductibilitate termică ridicată.

Formulele de bază ale metodei. După cum am arătat în [6], dacă pe suprafața frontală a unui corp de probă de lungime L și cu secțiunea transversală S, se încălzește brusc un strat subțire de grosimea $\xi \ll L$, atunci la suprafața posterioară, unde el este în contact cu un mediu infinit, variația temperaturii în funcție de timp este descrisă de ecuația:

$$T(L,\ t) = \frac{q}{c \cdot \rho \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} (1 - H) \exp\left[-\left(\frac{L^2}{4 \cdot a \cdot t} + b \cdot t\right)\right] \tag{1}$$

Aici q este cantitatea de căldură transmisă corpului (prin impuls de căldură) pe unitate de suprafaţă, c căldura specifică, a difuzivitatea termică şi ρ densitatea corpului ; coeficientul b caracterizează transmisia de căldură prin suprafaţa laterală a corpului şi este dat de relaţia :

$$b = h \cdot \frac{p}{\rho \cdot c \cdot S} \tag{2}$$

unde h este coeficientul de transmisie de căldură, p perimetrul, S secţiunea transversală a corpului. Mărimea H depinde de trecerea căldurii de la corpul de probă în mediul cu care el este în contact la suprafaţa posterioară, fiind dată de [3] prin relaţia :

$$H = \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \tag{3}$$

unde

$$\delta = \frac{K_0}{K} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \tag{4}$$

Aici prin a şi K sînt notate difuzivitatea şi conductibilitatea termică a corpului de probă, iar prin a_0 şi K_0 aceleaşi mărimi pentru mediul menţionat.

Variaţia temperaturii în funcţie de timp (înregistrată la un corp de probă (HgTe) este redată în fig. 1. Din ecuaţia (1) pentru timpul t_m în care $T(L, t)$ atinge valoarea maximă, se obţine

$$\frac{a \cdot t_m}{L^2} = \frac{t}{2(1 + 2 \cdot b \cdot t_m)} = M(bt_m) \tag{5}$$

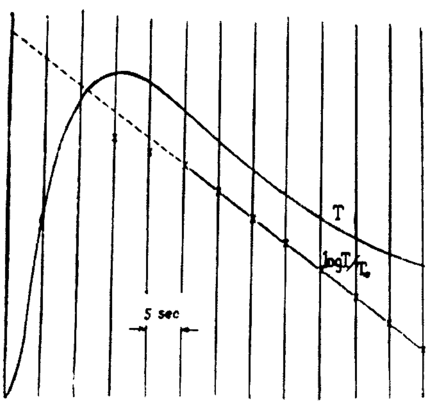


Fig. 1.

Dacă corpul de probă este mărginit în fiecare parte a suprafeţei lui de acelaşi mediu atunci coeficientul b se poate determina pe baza ramurii AB a curbei $T(L, t)$ din fig. 1 [7].

$$b = \frac{p \cdot L}{S_0} \cdot \frac{\log_n T_1/T_2}{t_2 - t_1} \tag{6}$$

unde S_0 este aria suprafeţei întregi a corpului iar $(t_2 - t_1)$ intervalul de timp în care temperatura scade de la T_1 la T_2. Variaţia expresiei $\log_n T/T_0$ în funcţie de timp reprezintă o dreaptă (fig. 1).

Dacă corpul studiat este un solid şi se găseşte într-un mediu gazos, atunci în formula (4) K_0 este cu 2—4 ordini de mărime mai mic decît K, iar a_0 mai mare sau de aceeaşi ordine de mărime ca a (deci $K_0 \ll K$ şi $a_0 \geq a$). În acest caz, practic, $\delta = 0$, iar $H = -1$. (De exemplu pentru cazul sticlă-aer la 20°C, avem : $K = 7{,}5 \times 10^{-3}$ W/cm. °K, $K_0 = 2{,}5 \times 10^{-4}$ W/cm °K, $a = 4{,}4 \times 10^{-3}$ cm²/s şi $a_0 = 2{,}13 \times 10^{-1}$ cm²/s, astfel $\delta = 4{.}8 \times 10^{-3} \simeq 0$

și $H = -0.991 \simeq -1$.) Luînd în considerație acest fapt, din ecuația (1), pentru $T(L, t_m) = T_m$ rezultă

$$\frac{c \cdot \rho \cdot L}{2 \cdot q} \cdot T_m = \left[\frac{2(2bt_m + 1)}{\pi}\right]^{1/2} \cdot \exp\left[-(2 \cdot b \cdot t_m + 1/2)\right] = N(bt_m) \qquad (7)$$

Variația mărimilor adimensionale M și N din (5) și (7), în funcție de mărimea $2 \cdot b \cdot t_m$, de asemenea adimensională, este reprezentată în fig. 2.

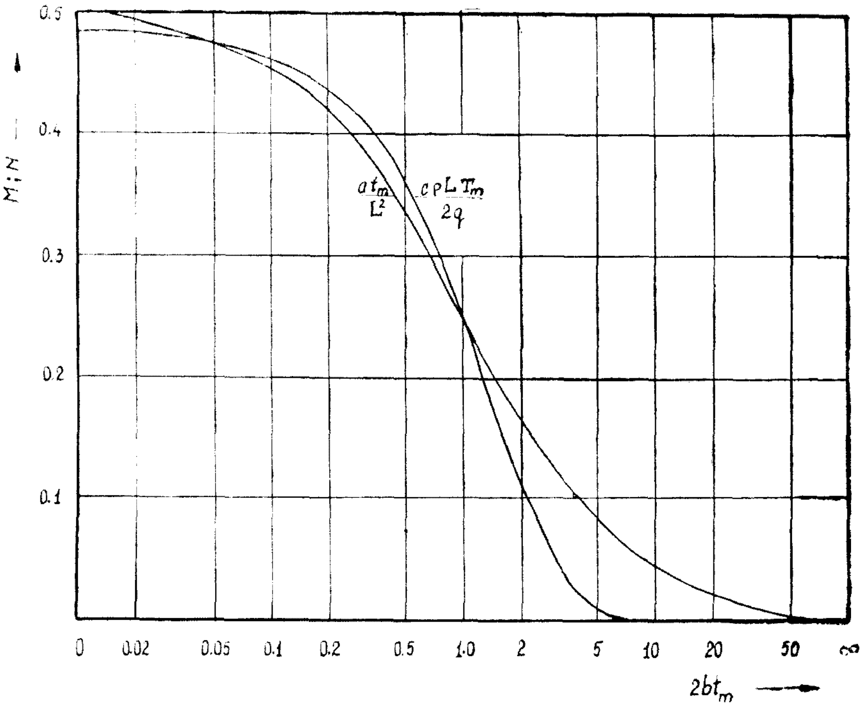


Fig. 2.

Prin înregistrarea unei curbe $T(L, t)$, timpul t_m și temperatura T_m se pot măsura în mod simplu. Astfel dacă se cunoaște cantitatea de căldură q transmisă corpului de probă pe unitatea de suprafață, atunci pe lîngă difuzivitatea termică se poate determina și căldura specifică din expresia

$$c = \frac{2 \cdot q \cdot N}{\rho \cdot L \cdot T_m} \qquad (7a)$$

iar conductibilitatea termică din relația

$$K = c \cdot \rho \cdot a = \frac{q \cdot N}{T_m} \cdot \frac{L}{t_m \cdot (1 + 2 \cdot b \cdot t_m)} \qquad (8)$$

În mod asemănător, folosind relațiile (2) și (6) se poate calcula și coeficientul de transmisie de căldură, h.

Dispozitivul experimental. Partea principală[1] a dispozitivului experimenta este schiţată în fig. 3. Nodul S_1 al cuplului termoelectric T_{e_1} este sudat pe o plăcuţ de argint de 0,3 mm grosime. Corpul de probă P cu suprafaţa lui posterioară est lipit cu pastă de argint de această plăcuţă şi este ţinut de firele cuplului termoelec tric, în centrul tubului de sticlă C în care se găseşte aer sau un gaz inert. Poziţi

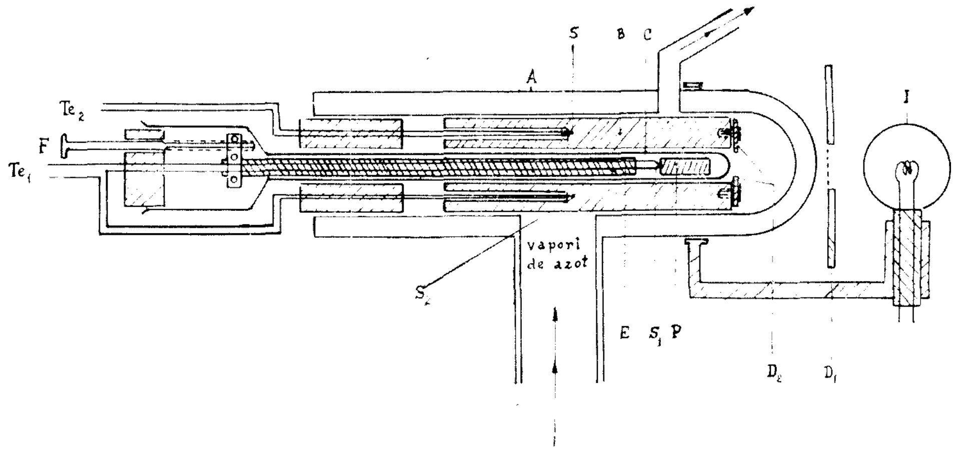


Fig. 3.

probei în interiorul tubului C se poate regla cu ajutorul unui şurub F, legat de tubu de porţelan E. Sudura S_2 a cuplului termoelelectric Te_1, este introdusă în blocu de cupru sub formă cilindrică B, care asigură stabilitatea temperaturii punctulu de referinţă, precum şi în interiorul tubului C. La măsurători sub temperatur camerei, blocul B împreună cu C este aşezat în vasul de sticlă A care are pereţ dubli, şi este vidat între pereţi, pentru ca să asigure o izolare termică bună. Prin reg larea curentului de vapori de azot, se poate stabiliza temperatura blocului B la o va loare dorită. Pentru măsurarea temperaturii blocului B serveşte cuplul termoelectri Te_2, avînd sudura S introdusă în blocul B. În experienţele noastre producere impulsului de căldură s-a realizat prin iradierea suprafeţei frontale a probei, c ajutorul lămpii I de mare putere, care este fixat solid de vasul A. Durata τ a im pulsului de căldură se poate regla cu ajutorul declanşatorului D_1 sau prin licărire lămpii I. Diafragma D_2 se reglează în aşa fel, încît proba să fie iluminată numa pe suprafaţa ei frontală.

Aparatul folosit pentru înregistrarea curbei $T = f(t)$ şi celelalte părţi ale dis pozitivului experimental, nemenţionate aici, sînt descrise în [2].

Măsurători şi rezultate. Am arătat deja în [7], că pe baza formulelor (5) ş (6) se obţin rezultate corecte pentru difuzivitatea termică, la temperaturi mai mar decît 20°C. Cu ajutorul dispozitivului experimental, schiţat în fig. 3, am făcu mai întîi măsurători cu o serie de corpuri de probă confecţionate din Al, Cu, Fe grafit, etc. pentru verificarea experimentală a formulei (7a). Suprafaţa frontal a corpurilor de probă a fost acoperită cu un strat subţire de negru de fum, prin car s-a asigurat aceeaşi putere de absorbţie la fiecare corp. Cantitatea de căldură s-a determinat luînd ca etalon un corp de probă confecţionat din cupru. La tem peratura camerei diferenţa între valoarea măsurată şi cea luată din literatură la cor purile studiate, nu a fost mai mare de 3–4%.

Pentru a studia posibilitatea determinării simultane a celor patru mărimi menţionate (a, c, K, şi h), cu dispozitivul experimental descris, am ales un corp de probă de HgTe avînd lungimea de $L = 9$ mm şi secţiunea transversală $S = 4{,}7 \times 5{,}8$ mm^2.

În fig. 4, sînt reprezentate valorile căldurii specifice şi ale coeficientului de transmisie în funcţie de temperatura absolută, măsurate pentru proba menţionată. Linia continuă pentru căldura specifică (c) corespunde valorilor calculate pe baza legii Neumann-Kopp din căldurile specifice a elementelor Hg şi Te, luate din [8]. Diferenţa între valorile calculate şi măsurate, la o temperatură dată, nu întrece 5%, diferenţă care se poate considera că se datoreşte erorilor experimentale.

Valoarea obţinută pentru coeficientul de transmisie h, la 20 °C este aproximativ de două ori mai mare decît valoarea măsurată prin alte metode, la un corp cu secţiunea transversală circulară [2], însă trebuie să se observe că coeficientul h depinde

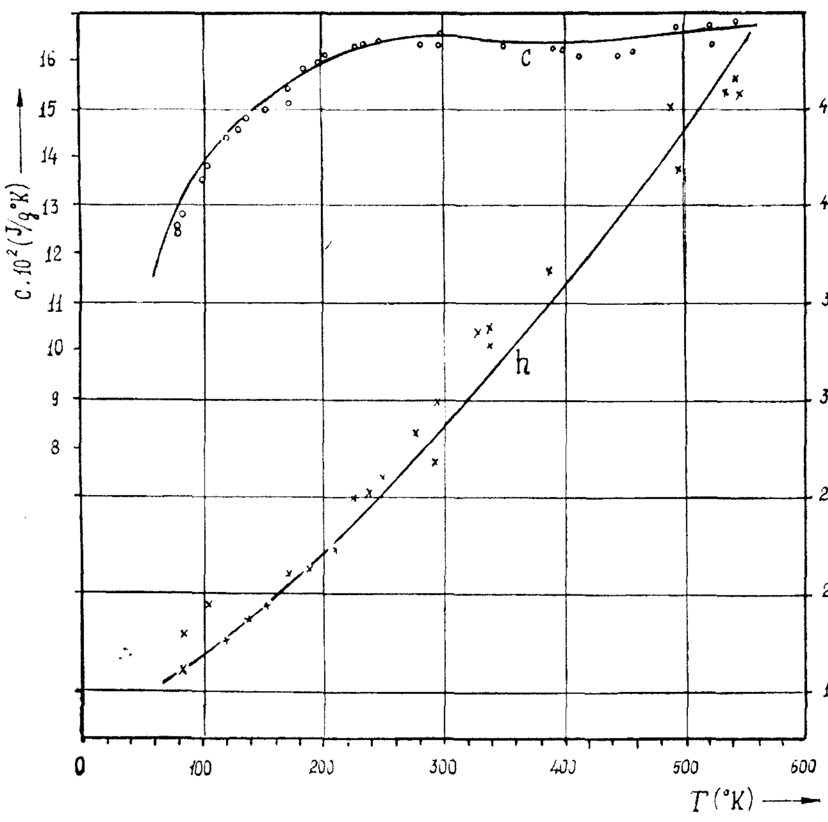


Fig. 4.

în mare măsură de forma corpului, (respectiv de forma secţiunii transversale), precum şi de culoarea şi structura suprafeţei lui. Forma corpului de probă fiind paralelipipedică, astfel datorită muchiilor, coeficientul de transmisie este mai mare decît la un corp cu suprafaţă circulară. În mod asemănător şi culoarea neagră a probei contribuie la mărirea coeficientului de transmisie.

Valorile obţinute pentru difuzivitatea termică (a) şi conductibilitatea termic (K) sînt reprezentate în fig. 5 în funcţie de $1/T$.

Curba $K(C)$ reprezintă variaţia conductibilităţii termice a HgTe după datel obţinute de [9], iar K_2(W, R) şi K_2(W—R) de [10], la două probe diferite.

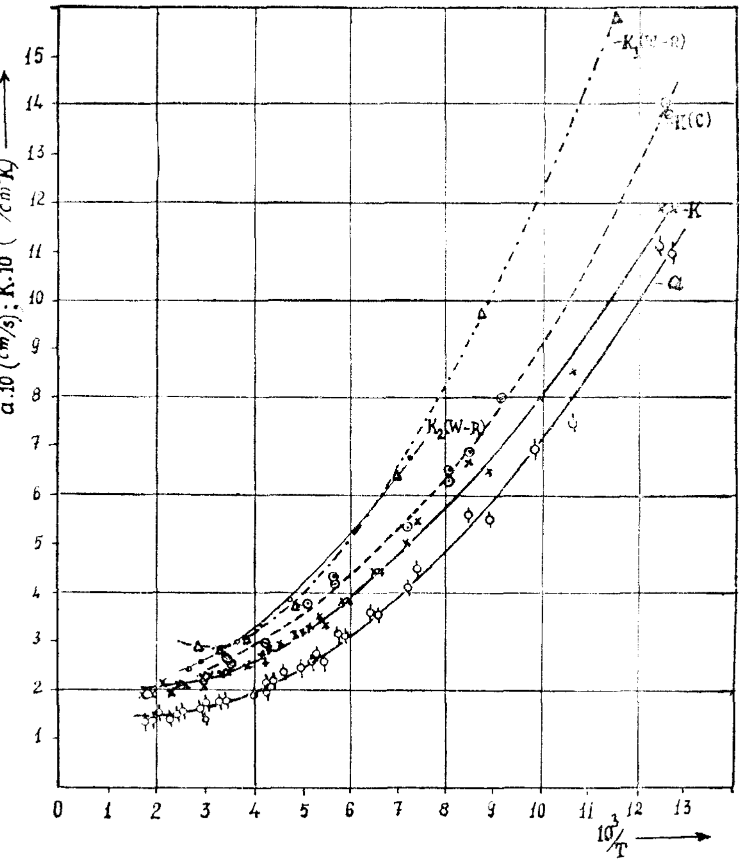


Fig. 5.

Diferenţa între valorile măsurate de [9] şi de noi este aproximativ 16% la 80°K şi 13% la 300°K. Pentru temperaturi mai mari de 20°C, conductibilitatea termic am determinat-o şi cu o metodă staţionară, dar nu am observat o diferenţă mai mar de 5% între valorile obţinute prin această metodă şi prin metoda impulsului de căl dură. De aceea trebuie să presupunem că diferenţa între valorile lui K, măsurat de noi şi de [9], respectiv [10], provine din deosebirea strcturală a problor studiate

Surse de erori. Conform ipotezei, pentru difuzivitatea termică se obţin rezul tate corecte din formula (5), dacă $\xi \ll L$, respectiv $\tau \ll t_m$. Dacă se consider că $b = 0$, deci nu se ţine seamă de transmisia de căldură, eroarea sistematică prove nită din durata finită a impulsului de căldură se poate aprecia pe baza ecuaţie

$$\frac{a \cdot t_m}{L^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau/t_m}{(1 - \tau/t_m) \log_n (1 - \tau/t_m)^{-1}} \qquad (9$$

dată de [1]. Dacă $\tau/t_m \to 0$, din această ecuație rezultă o formulă echivalentă cu (5) pentru cazul $b = 0$. În schimb, în cazul cînd $\tau/t_m > 0$, membrul drept în (9) devine mai mare decît 1/2. (De exemplu, la $\tau/t_m = 0{,}1$, valoarea acestui membru este 0,53.) Prin urmare, în cazul acesta se obține o valoare mai mică pentru a din formula (5), decît în cazul cînd $\tau/t_m \to 0$. Experiențele arată însă că în realitate cînd $b > 0$, valoarea lui a calculată din (5) nu variază esențial cu raportul τ/t_m, aproximativ pînă la $\tau/t_m = 0{,}25 - 0{,}30$, dacă timpul t_m se înlocuiește cu $t'_m = t_m - \tau/2$ în această formulă (v. fig. 6). Aceasta înseamnă de fapt că t_m trebuie să fie măsurat nu de la începutul impulsului de căldură, ci de la $\tau/2$.

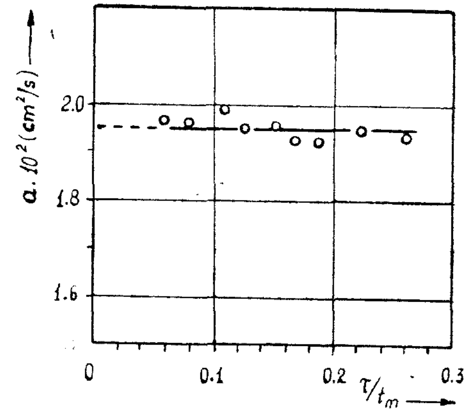


Fig. 6.

Dacă maximul curbei $T(L, t)$ este pronunțat, determinarea timpului t_m se poate face cu o precizie de cca. 3—4 %. În schimb, cînd maximul lui $T(L, t)$ este atenuat, precizia este mai mică. În cazul acesta, pentru a obține o precizie mai mare în determinarea lui t_m, se aplică formula (3) dată în [7].

Durata finită (mai lungă) a impulsului de căldură nu produce eroare sistematică observabilă la determinarea căldurii specifice, și a coeficientului de transmisie. În schimb, la măsurarea temperaturii maxime T_m, deci și la determinarea lui C, o eroare considerabilă poate rezulta din cauza oscilației tensiunii electrice aplicată asupra lămpii I, cu care se produce impulsul de căldură. O altă abatere poate proveni de la reglarea diafragmei D_2. În mod asemănător, dacă contactul între plăcuța de argint și suprafața posterioară a probei nu este bun, precum și dacă stratul de negru de fum pe suprafața ei frontală nu este compact, din cauza reflexiei luminii pe această suprafață, se obține o valoare mai mică pentru T_m. Toate acestea influențează precizia la determinarea căldurii specifice. Însă primele două dintre aceste surse de erori se pot elimina dacă se aplică o sursă de lumină punctiformă și o tensiune electrică bine stabilizată asupra ei, la producerea impulsului de căldură. Trebuie remarcat că sursele de erori menționate mai înainte, cu excepția contactului între probă și plăcuța de argint, nu influențează de loc precizia la determinarea difuzivității termice.

(Intrat în redacție la 5 aprilie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. T. Z. Harmathy, J. Appl. Physics, **35**, 1190 (1964).
2. F. Kelemen, Z. angew. Physik, **17**, 562 (1964).
3. M. Kulakov, J. tehn. fiz., **22**, 67 (1952).
4. K. R. Kanter, J. tehn. fiz., **25**, 472 (1955).
5. W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler and G. L. Arbott, J. Appl. Physics, **32**, 1679 (1961).
6. F. Kelemen, F. Bota, A. Néda, St. cerc. fiz., **16**, 809 (1964).
7. F. Kelemen, Acta Physica Hungarica, **23**; 111(1967).

8. L a n d o l t - B ö r n s t e i n, *Zahlenwerte und Funktionen*, II. Band, 4. Teil, Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961, p. 483.
9. R. O. C a r l s o n, Phys. Rev., **111**, 476 (1958).
10. H. W a g i n i und B. R e i s s, Phys. Stat. Sol., **15**, 457 (1966)

МЕТОД ТЕПЛОВОГО ИМПУЛЬСА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОРОТКИХ ОБРАЗЦОВ

(Р е з ю м е)

В работе описан простой метод теплового импульса, которым можно одновременно определит температуропроводность, удельную теплоёмкость, теплопроводность и коэффициент теплопередач в случае естественной конвекции на изоляторных и полупроводниковых образцах небольшог размера. В рамках измерений, при постоянной температуре, лобовая поверхность пробного тел подвергается кратковременному облучению пучком света и прослеживается изменение температур в зависимости от времени на задней поверхности пробного тела. Измеряя максимальное значени температуры и время, при котором достигают этого максимума после передачи теплового импульс и зная количество теплоты, переданное телу импульсом, термические величины можно определит на основе установленных в работе формул.

A HEAT PULSE METHOD OF MEASURING THE THERMAL PROPERTIES OF THE SMALL SAMPLES

(S u m m a r y)

The authors describe a simple heat pulse method which gives the possibility to determin simultaneously the thermal diffusivity, the specific heat, the thermal conductivity and the heat tran mission coefficient in the case of natural convection, at insulator samples and semiconductors havin reduced sizes.

During measurements, at a constant temperature, the front surface of the sample is irradiated fc a short time with a beam of light. The temperature variation depending on time at the rear su face of the sample is observed. Measuring the maximum value of the temperature and the time in whic this maximum is reached after the transmission of the heat pulse and knowing the quantity of he transmitted to the body by the pulse, the authors determine the thermal quantities based on the fo mulae suggested in the present paper.

DAS STUDIUM EINIGER ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN DES SYSTEMS $Cr_2O_3-Li_2O$

OLIVIA POP, L. STĂNESCU und IULIU POP

Einleitung. Zum Studium des elektrischen Leitungsmechanismus der Oxyde von Übergangsmetallen wird die Methode des „Doping" des Grundoxydes mit Kationen von verschiedener Wertigkeit verwendet [1–6]. Solche Studien wurden auch mit Cr_2O_3 durchgeführt. H a u f f e und B l o c k [6] hoben ein Anwachsen der elektrischen Leitfähigkeit des Cr_2O_3 bei einem Zusatz von NiO hervor, ein Anwachsen das durch die Annahme der Bildung von Cr^{4+} Ionen erklärt werden kann [7]. Dasselbe Oxyd wurde auch durch „Doping" mit TiO_2 [7], Li_2O [8, 9] und mit BeO [10] studiert. Bezüglich des Einflusses des Li_2O stimmen die Angaben in der Literatur nicht überein. So fanden F i s c h e r und L e r e n t z [8] bei einem Zusatz von 1,5 Mol–%Li_2O, dass kein Anwachsen der Leitfähigkeit des Cr_2O_3 stattfindet, hingegen stellt H a g e l [9] ein merkliches Anwachsen der Leitfähigkeit (ungefähr eine Zehnerpotenz) bei einem Zusatz von 2,5 Mol–%Li_2O fest. Bei 10 Mol–%Li_2O ist das Anwachsen der Leitfähigkeit unbedeutend und die roentgenographische Analyse zeigte das Entstehen einer neuen Phase an ($LiCrO_2$).

In dieser Arbeit wollen wir ein detaillierteres Studium dieses Systems, in einem grösseren Konzentrationsbereich, durch Bestimmung der elektrischen Resistivität, der magnetischen Suszeptibilität und mit elektronischer Spinresonanz, durchführen.

Versuchsergebnisse. *Zubereitung der Proben.* Die polykristallinischen Proben wurden aus Cr_2O_3 p.a. und Li_2CO_3 p.a. zubereitet. Die Substanzmischung wurde mit doppeltdestilliertem Wasser behandelt, um ein Zersetzen des Karbonates herbeizuführen. Nach dem Trocknen in einer Etuve und ihrer Homogenisierung wurden die Proben in Luft, bei einer Temperatur von 1100 °C, 4 Stunden lang kalziniert. Um die parasitäre RES-Absorption unter T_N auszuscheiden, wurden die Proben einer supplimentären Kalzination bei einer Temperatur von ungefähr 1000 °C [11], die 14 Tage lang anhielt, unterzogen.

Es wurden folgende Mischungen zubereitet, die in Molprozenten ausgedrückt in Tabelle 1 angegeben sind.

Tabelle 1

Probenzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Li_2O	0,5	1	2	2,5	3	4	6	30	50
Cr_2O_3	99,5	99	98	97,5	97	96	94	70	50

Die Proben mit einem kleinen Lithiumgehalt, hatten eine grüne Farbe, di für das Cr_2O_3 charakteristisch ist; jene mit einem Li_2O-Gehalt von 30 und 5(Mol—% hatten eine dunklere Farbe. Die letztgenannte Probe zeigte ein rein kris tallisches Aussehen.

Die Proben wurden bei $p = 7$ t/cm² zu Pastillen gepresst. Hernach wurde die Pastillen bei einer Temperatur von 1300 °C, 5 Stunden lang gesintert, abge schliffen und durch Verdampfen im Vakuum versilbert. Der Versilberungspro zess wurde so lange wiederholt, bis der Widerstand der Silberschichte 0,2 Ohn nicht überschritt.

Elektrische Widerstandsmessungen. Die Widerstände wurden mit einer Prä zisionsbrücke ORION TR 2102 und einem Megohmmeter TESLA B.M.—283 gemes sen, hingegen wurde für die Temperatur der Proben in der Anlage ein Thermo element Pt—PtRh und ein Potentiometer PPTN—1 verwendet.

Es wurde die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur festgestell und die Abhängigkeit der log ρ-Funktion von $10^3/T$ graphisch dargestellt (Abb 1, 2).

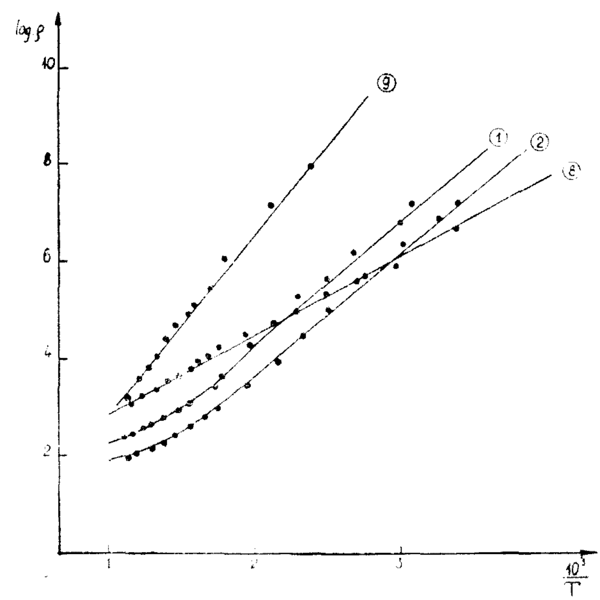


Abb. 1.

Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass bis zu einer gewissen Temperatu (ungefähr 700 °K) eine liniare Abhängigkeit vorliegt. Bei höheren Temperatu ren ist bei dem grössten Teil der Proben ein langsamerer Abfall der Resistivitä mit dem Anwachsen der Temperatur feststellbar, der mit einer entsprechende Änderung der Neigung veranschaulicht ist. Diese Neigungsänderung ist für da Cr_2O_3 charakteristisch [12, 13]. Probe Nr. 7 (mit 6 Mol—% Li_2O) ist die letzt wo diese Neigungsänderung noch feststellbar ist, hingegen verschwindet diese Ände rung im Falle grösserer Konzentrationen (Proben 8 und 9). Aus den semil

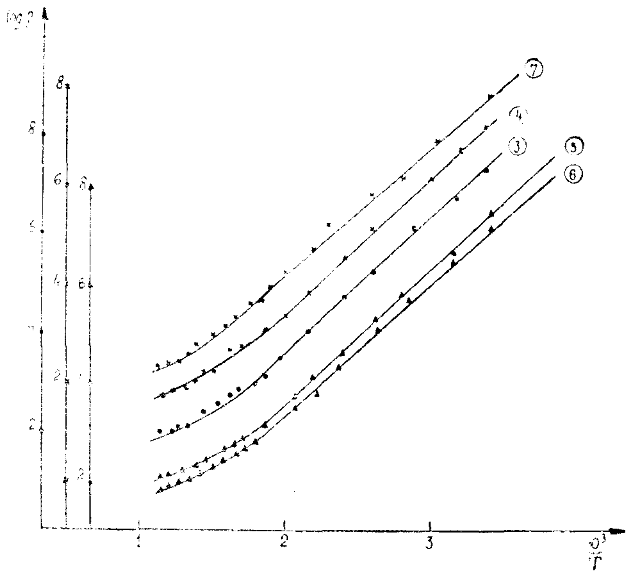


Abb. 2.

garithmischen Geraden (Abbildung 1, 2) wurden die Aktivierungsenergien mit der nachfolgenden Gleichung berechnet:

$$\Delta E = 0{,}198 \frac{\Delta \log \rho}{\Delta\left(\frac{10^3}{T}\right)} eV \tag{1}$$

wo

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{TK}\right) \tag{2}$$

In Abbildung 3 sind die Isothermen (20, 100, 250, 500_0C) wiedergegeben, die die Abhängigkeit des log ρ von der Komponentenkonzentration darstellt. Es wird eine leichte Neigung zum Abfall des log ρ bei einem Zusatz von Li_2O bis zu einer 4 molprozentigen Li_2O-Konzentration festgestellt. Wie es zu erwarten war [14], zeigt log ρ bei einer entsprechenden $LiCrO_2$-Zusammensetzung einen Höchstwert. Zum Unterschied von Fischer und Lorentz [8], die keine Resistivitätsänderung bei Li_2O-Zusatz feststellen, fanden wir einen Abfall von einer halben Zehnerpotenz bei einem 4 molprozentigen Li_2O-Zusatz. Dieser Abfall ist aber kleiner als der von Hagel bei einem 2,5 molprezentigen Li_2O-Zusatz festgestellte.

Aus den semilogatithmischen Geraden (Abb. 1, 2) wurden mit Hilfe der Gleichung (1) die Werte der Aktivierungsenergien für die beiden Neigungen der Geraden berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4 dargestellt, wo die mit ΔE_1 bezeichnete Kurve den tiefen Temperaturen und jene mit ΔE_2 bezeichnete den hohen Temperaturen entspricht.

So wie es zu erwarten war, geht aus der Abbildung hervor, dass die Aktivierungsenergien, die dem tiefen Temperaturbereich entsprechen (ΔE_1), eine

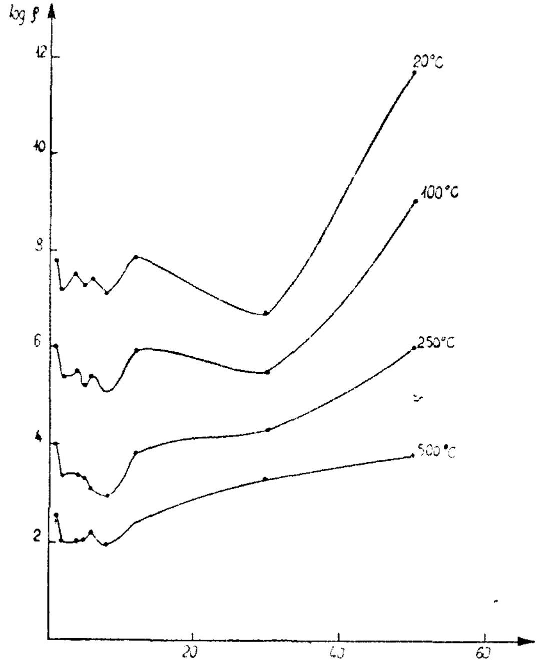


Abb. 3.

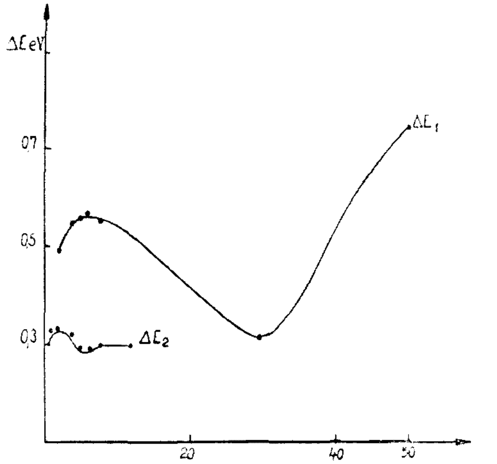


Abb. 4.

viel grössere Abhängigkeit von der Konzentration aufweisen, als jene die dem hohen Temperaturbereich (ΔE_2) angehören. Umso mehr können wir in Anbetracht der für ΔE_2 bei reinem Cr_2O_3 gefundenen Werte, die zwischen 0,29–0,32 *eV* [13] variieren, behaupten, dass die Werte für ΔE_2 aus Abbildung 4 der Eigenleitfähigkeit des Cr_2O_3 entsprechen (unsere Werte des ΔE_2 sind zwischen 0,29–0,33 *eV* enthalten).

Wir nehmen an, dass sowohl aus den Ergebnissen unserer Bestimmungen wie auch bei H a g e l [9] die Erklärung des Resistivitätsabfalles bei einem Li_2O-Zusatz nicht im Erscheinen von Cr^{4+} Ionen zu suchen ist, da in diesem Falle die Änderung viel grösser wäre, so wie es der Fall bei einem NiO-Zusatz [6, 7] ist, wo die Änderung von der Grösse einer 3–4-maligen Zehnerpotenz bei einer 2 molprozentigen NiO-Konzentration festgestellt wurde. Wenn die Substitution des Cr^{+3} mit Li zur Induktion von Cr^{5+}-Ionen führen würde, müsste kein merklicher Resistivitätsabfall auftreten, da der Elektronenaustausch zwischen Ionen desselben Elementes, die sich untereinander mit mehr als einer Ladung unterscheiden, energetisch nicht günstig ist [15]. Wenn aber anderseits keine Bildung einer Substitutionslösung, sondern nur eine mechanische Mischung zwischen zwei verschiedenen Phasen stattfindet, müsste die Beweglichkeit der Träger beeinflusst sein, was zu einem leichten Anwachsen der Resistivität führen würde. Folglich ist die Art, wie das Li_2O die elektrische Leitfähigkeit des Cr_2O_3 beeinflusst, noch ein offenes Problem.

Magnetische Messungen. Die magnetische Suszeptibilität wurde in einem Temperaturintervall zwischen 100–1200 °K mit Hilfe einer Suszeptibilitätswaage mit mechanischer Kompensation, wie sie in [16] beschrieben ist, gemessen.

Alle Proben weisen in dem studierten Temperaturintervall ein antiferromagnetisches Betragen auf, mit einer stark ausgeprägten Anomalie in der Nähe de

Néelschen Temperatur, die für das Cr_2O_3 charakteristisch ist. In Abbildung 5, wo die Abhängigkeit der reziproken Suszeptibilitöt $1/\chi$ (T) von der Temperatur dargestellt ist, sieht man, dass in der Nähe der Néelschen Temperatur ein Bereich von ungefähr 100° auftritt, in welchem die Suszeptibilität sehr wenig von der Temperatur abhängig ist.

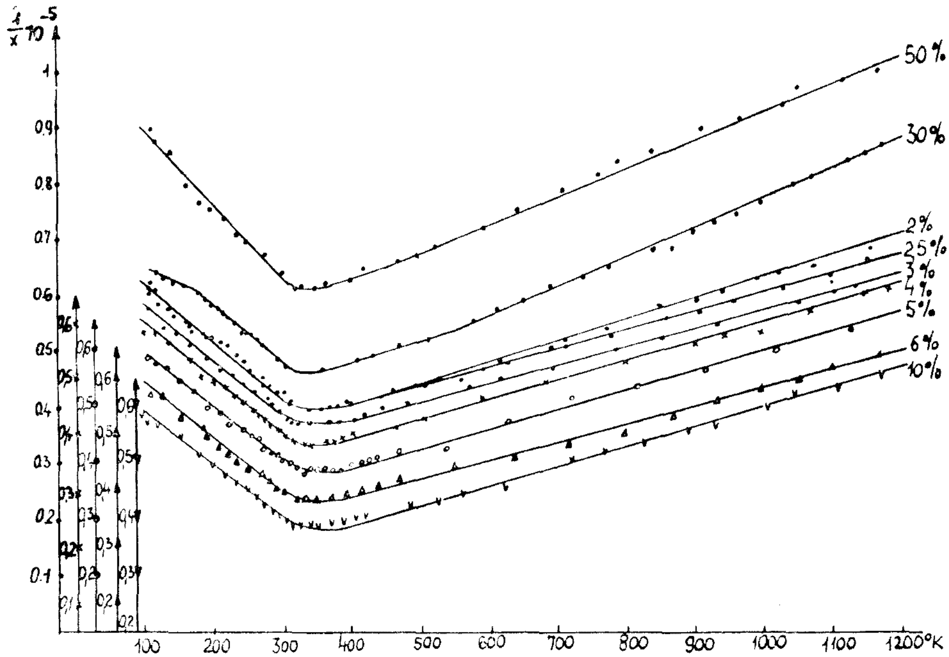


Abb. 5.

Im Falle des Cr_2O_3 ist die Suszeptibilität in diesem ganzen Bereiche vom magnetischen Feld abhängig, eine Tatsache, die eine besondere Struktur über die Néelsche Temperatur voraussetzt. Im paramagnetischen Bereich weist die rezip roke Suszeptibilität eine liniare Abhängigkeit von der Temperatur auf und folgt somit dem Curie-Weiss'schen Gesetz.

$$\chi = \frac{C}{T + \theta_p}$$

wo C die Curie'sche Konstante, T die absolute Temperatur, und $\theta_p < 0$ den paramagnetischen Curie'schen Punkt darstellt. Alle untersuchten Proben wurden einer ionischen Diamagnetismuskorrektur unterworfen, die einen Wert von ungefähr $0{,}038.10^{-6}$ cm^3/g hat.

Aus den Curie'schen Konstanten wurde der Wert des effektiven magnetischen Momentes pro Cr^{3+} Ion berechnet, der mit dem bis über 10 Mol-%Li_2O-Zusatz ein beträchtliches Anwachsen aufweist, wie aus Abbildung 6 ersichtlich ist, wo die Abhängigkeit des effektiven magnetischen Momentes von der Konzentration dargestellt ist. Die Kurve weist ein Maximum zwischen 6—10 Mol-% Li_2O auf. Bei grösseren Verdünnungen als 30 Mol-%Li_2O und für die chemische Verbindung

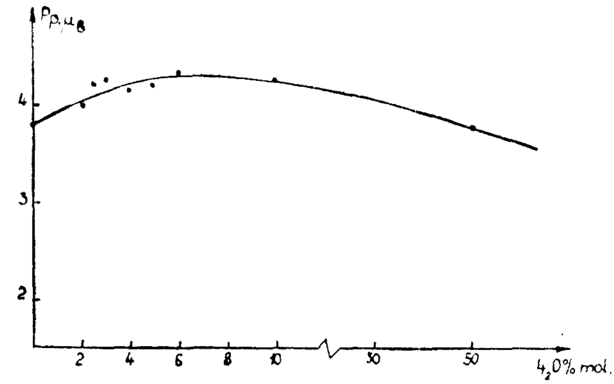


Abb. 6.

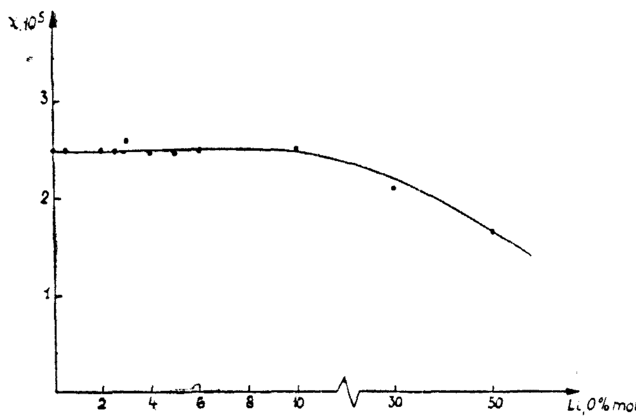


Abb. 7.

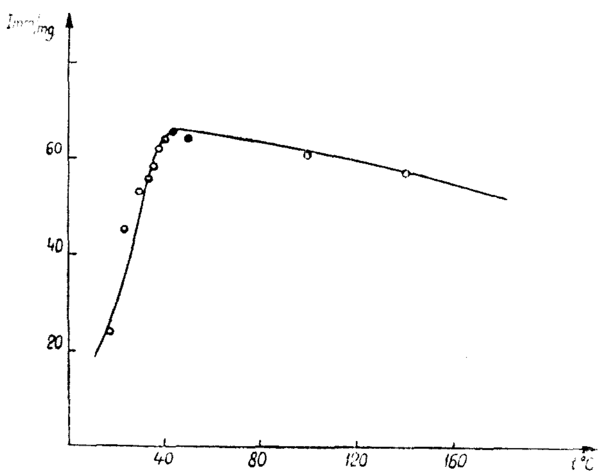


Abb. 8.

$LiCrO_2$ (50 Mol-%) kehrt das magnetische Moment zu dem Wert von $3{,}7\mu_B$ zurück, das dem Cr^{3+}-Ion eigen ist. Diese Anomalie des magnetischen Momentes deutet eine zusätzliche Interaktion zwischen den Komponenten deren Beschaffenheit noch nicht völlig geklärt werden konnte, an, umso mehr da der Li_2O-Zusatz bis zu 10 Mol-% die magnetische Suszeptibilität nicht verändert. Der Abfall der magnetischen Suszeptibilität macht sich erst bei 30 Mol-% bemerkbar, als Folge einer starken diamagnetischen Verdünnung, wie es aus Abbildung 7 ersichtlich ist, wo die Abhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität bei Zimmertemperatur (293 °K) von der Konzentration, dargestellt ist.

Die paramagnetische Resonanzabsorption wurde mit einem JES—3B Spektrometer (X — Band) im Temperaturbereich 77° — — 423 °K studiert. Als Folge der thermischen Behandlung ist das „parasitäre" Signal im antiferromagnetischen Bereich ganz verschwunden, die Absorption beginnt erst in der Nähe der Néelschen Temperatur. Aus der Abhängigkeit der Amplituden der RES-Spektren von der Temperatur konnte der Wert der Néelschen Temperatur, der ungefähr bei 313 °K liegt, für alle Proben genauer begrenzt werden, so wie es aus Abbildung 8 ersichtlich ist, wo diese Abhängigkeit für die Probe mit 50% Li_2O dargestellt wurde.

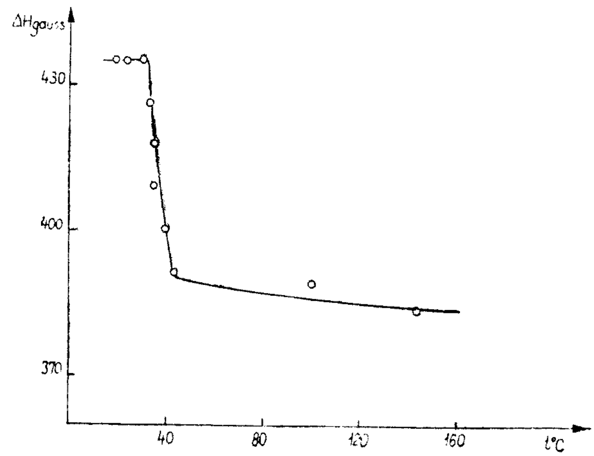


Abb. 9.

Diese Tatsache wird auch durch die Abhängigkeit der Linienbreite ΔH, die einen starken Abfall bei dem Néelschen Punkt zeigt, von der Temperatur bekräftigt, wobei auch das Verschwinden der Austauschinteraktionen, das hauptsächlich zur Verbreitung der Linie beiträgt, angezeigt wird (Abbildung 9).

Zusammenfassung.

— Die Resistivitätsbestimmungen hoben den Einfluss des Li_2O-Zusatzes hervor, der einen Höchstwert bei 4 Mol-% Li_2O erreicht.

— Es wurde festgestellt, dass die Änderung der Neigung bei hohen Temperaturen, die auch beim Cr_2O_3 gefunden wurde, der Eigenleitfähigkeit zugeschrieben werden kann.

— Die Abhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität von der Temperatur zeigt, dass der Li_2O-Zusatz bei den untersuchten Proben keinen merklichen Einfluss auf die antiferromagnetische Interaktion hat.

— Die Probe, die der Verbindung $LiCrO_2$ entspricht, und in der Form von dunkelfarbigen Kristalliten, völlig verschieden von den übrigen Proben erhalten wurde, zeigte antiferromagnetische Eigenschaften mit einer Néelschen Temperatur die sich jener des Cr_2O_3 nähert.

— Ein ausführlicheres Studium dieser Verbindung soll in der Zukunft erfolgen.

(Eingegangen am 7. April 1967)

LITERATUR

1. E. J. Verwey, P. W. Haaijman, F. C. Romeijn, F. C. Chem. Weekbl, **44**, 705 (1948)
2. E. J. Verwey, Bull. Soc. Chim., D **94**, Paris, 1949.
3. E. J. Verwey, P. W. Haaijman, F. C. Romeijn and G. W. van Oasterhaut, Philips Res. Rept., **5**, 173 (1950).
4. E. J. Verwey, *Poluprovodnikovye materialy* (1954) Moskva p. 201.
5. R. R. Heikes and W. P. Johnston, J. Chem Phys., **26**, 582 (1957)
6. K. Hauffe and J. Block, Z. Physik Chem., **198**, 232 (1951).
7. K. Hauffe, *Reaktionen in und an festen Stoffen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg (1955).
8. W. A. Fischer and G. Lorenz, Archiv. Eisenhüttenw., **28**, 497 (1957).
9. W. C. Hagel, J. Appl. Phys., **36**, 2586 (1965).
10. I. Ursu, O. Pop, L. Stănescu şi Iulia Pop, Rev. Roum. Phys. **11**, 751 (1966).
11. Y. W. Kim, D. D. Hearn, Appl. Physics Letters **2**, 36 (1963).
12. D. M. Bevan, I. P. Shelton şi J. S. Anderson, J. Chem., Soc., 1729 (1948).
13. N. Nachman şi L. Cojocaru, IFA IS 21 (1962) (préprinte).
14. V. I. Eremenko, V. E. Listovnicii, Ž. neorg. chim., **4**, 2544 (1959).
15. J. P. Suchet, *Chimie physique des semiconducteurs*, Paris, 1962.
16. Iuliu Pop, V. I. Čečernikov, Pribory i technika experimenta, **5**, 180, (1964).

STUDIUL UNOR PROPRIETĂŢI ELECTRICE ŞI MAGNETICE A SISTEMULUI $Cr_2O_3-Li_2O$

(R e z u m a t)

S-a studiat sistemul $Cr_2O_3-Li_2O$ în intervalul de concentraţii 0,5–50% mol Li_2O prin deterni nări de rezistivitate electrică, în intervalul de temperaturi 293–900 °K. S-a discutat influenţa ada sului de Li_2O şi mecanismul conductibilităţii la temperaturi ridicate.

Studiul magnetic efectuat de la temperatura 77°–1200 °K a pus în evidenţă caracterul antifer magnetic al sistemului.

Cu ajutorul determinărilor RES s-au stabilit unele caracteristici antiferomagnetice mai ales pent proba corespunzătoare compusului $LiCrO_2$.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ $Cr_2O_3-Li_2O$

(Р е з ю м е)

Авторы изучили систему $Cr_2O_3-Li_2O$ в интервале концентраций 0,5-50% моль Li_2O посре ством определений удельного сопротивления в температурном интервале 293-900 °K. Исследовало влияние прибавки Li_2O и механизм электропроводности при высоких температурах.

Магнитное исследование, проведённое в интервале температур от 77°-1200 °K, выявило антифе ромагнитный характер системы.

При помощи определений ЭПР были установлены некоторые антиферромагнитные характери тики, главным образом для пробы, соответствующей соединению $LiCrO_2$.

DINTR-UN CAIET DE ȘCOALĂ AL LUI PÁPAI PÁRIZ FERENC

de

VICTOR MARIAN

Biblioteca Academiei Republicii Socialiste România, Filiala Cluj, posedă diferite caiete de școală din secolul al XVII-lea, ale lui Pápai Páriz Ferenc din timpul cînd era elev al Colegiului reformat din Aiud sau student la universitățile din Apus. Unul din ele cuprinde lecțiile de fizică, dictate de profesorul său Enyedi Sámuel în anul 1665.

Enyedi Sámuel (1627—1671) s-a născut probabil la Aiud, unde și-a făcut și primele studii. Plecînd în străinătate a studiat la Utrecht și Franeker, trecîndu-și doctoratul în medicină cu Regius[1] la Utrecht, cu o teză tipărită acolo în 1651. După ce s-a întors în patrie a funcționat ca profesor apoi ca medic la Oradea pînă ce acest oraș a fost ocupat de turci. Cîtva timp a trăit la curtea lui Rhédey din Hust, de unde în 1664 a fost chemat ca profesor de filozofie la Colegiul reformat din Aiud, unde a funcționat pînă în 1669, cînd a trecut ca paroh la Vințul de jos. Enyedi a tipărit lucrări de medicină, teologie și pedagogie.

Pápai Páriz Ferenc (1649—1716)[2], născut la Dej, și-a început studiile la Tîrgul-Mureș și le-a continuat la Aiud. Fiind trimis pentru completarea studiilor în Germania, a audiat cursuri la universitățile din Leipzig. Frankfurt, Marburg, Heidelberg și, Basel, unde și-a luat doctoratul în medicină. Întorcîndu-se în țară, în 1680 a fost numit profesor la Colegiul din Aiud, devenind apoi și directorul acestuia. În același timp a funcționat ca medic.

Pápai a fost un erudit, ocupîndu-se cu probleme de teologie, istorie, lingvistică, etc. Deși a predat fizica la Colegiu, probabil în sens cartezian, totuși nu a rămas de la el nici o lucrare tipărită sau manuscris care să se ocupe cu această disciplină.

După distrugerea Colegiului lui Bethlen, din Alba-Iulia în 1658, profesorii și elevii acestuia s-au refugiat la Cluj, unde au fost găzduiți pînă în 1662, cînd principele Apaffi Mihály a dispus transferarea lui la Aiud. Reorganizarea școlii a început în același an sub conducerea directorului Vásárhelyi Péter. Sub noua sa formă Colegiul cuprindea o școală primară, un gimnaziu cu 6 clase, un curs de filozofie de 3 ani și unul de teologie de doi ani.

---

[1] M. Zemplén Jolán, *A fizika története Magyarországon*, Budapest, vol. I, 1961, p. 294.

[2] P. Szathmáry Károly, *A gyulafehérvári-nagyenyedi Bethlen-Főtanoda története*, Nagy-Enyed, 1868, p. 152.

Enyedi a funcționat la Aiud ca profesor de filozofie, care cuprindea în sin atît fizica cît și matematicile, după cum se vede dintr-un alt caiet de școală a lui Pápai Páriz, din 1666/7.

Caietul de școală care conține lecțiile de fizică ale lui Enyedi face parte din tr-un coligat manuscris, legat în piele, de format 100 × 160 mm, scris în latinește cu cerneală neagră, cu litere mărunte, greu de citit, și are 397 de pagini numerc tate. El poartă titlul *Physica seu Philosophia Naturalis quam ex Professione Claris simi ac Doctissimi Dni Samueli Enyedi Md. Doctoris in hanc seriem delineavit A 1665. In Coll. N. Enyediensi Franciscus Pápai.* Manuscrisul are cîteva note margi nale (de asemenea latinești) scrise cu altă cerneală, care abia se mai pot descifra

Materia fizicii lui Enyedi este împărțită în 27 de capitole, avînd următoa toarele titluri :

Cap.	I	nu are titlu.
,,	II	De motu.
,,	III	,, aspectabilis Mundi Fabrica.
,,	IV	,, Coelo primo nostro ejusque Planetis, Cometis et Solis maculis.
,,	V	,, Tellure.
,,	VI	,, Luna
,,	VII	,, Ecclipsibus Solis et Lunae.
,,	VIII	,, Aqua et Terra.
,,	IX	,, Aestu Maris.
,,	X	,, Generatione et Corruptione, Temperamentis et Qualitatibus.
,,	XI	,, Meteoribus.
,,	XII	,, Fossilibus.
,,	XIII	,, Corporibus Vivis.
Cap.	XIV	De Stirpibus.
,,	XV	,, Animalibus.
,,	XVI	,, Actionibus Animalium.
,,	XVII	,, Respiratione
,,	XVIII	,, Distributione Alimenti.
,,	XIX	,, Nutritione Animalium.
,,	XX	,, Generatione Animalium.
,,	XXI	,, Actionibus Animalium sensitivi et motivis.
,,	XXII	,, Bestiis.
,,	XXIII	,, Homine.
,,	XXIV	,, Judicio.
,,	XXV	,, Affectionibus Animae.
,,	XXVI	,, Voluntate.
,,	XXVII	,, Sexu et Aetatibus

Aceste titluri ne revelă conținutul lecțiilor : ele cuprind nu numai fizica în înțelesul de azi, ci și astronomia, meteorologia, științele naturale și psihologia, car aparțineau pe atunci fizicii. În acest studiu ne vom mărgini numai la primele dou capitole, care tratează chestiuni de fizică.

Fizica adoptată de Enyedi este cea carteziană, ca și a lui Apáczai Cseri János Dar spre deosebire de acesta din urmă, care s-a ghidat și după *Principia Philoso phiae* a lui Descartes, din 1644, Enyedi îl urmează numai pe Regius.

Henri Le Roy (1598—1679), cunoscut mai ales sub numele latinizat de *Henri cus Regius*, medic olandez, se număra printre primii adepți ai filozofiei lui Descar tes. În curînd însă, influențat de Gisbertus Voetius, și-a schimbat atitudinea, publi cînd în 1646 *Elementa physices*, în care interpretază filozofia lui Descartes intro ducînd elemente materialiste cum este explicarea psihicului ca o particularitat specială a materiei. Marx îl caracterizează drept inițiateoral filozofiei care ave să ducă la materialismul francez al secolului al XVIII-lea.

Regius nici în fizică nu l-a urmat în mod riguros pe Descartes. Nu numai felul său de expunere este diferit de al maestrului său, cartea sa avînd mai mult caracterul de manual didactic care rezumă fizica lui Descartes, ci se deosebeşte de *Principia philosophiae* şi prin anumite concepţii diferite de ale maestrului. Astfel în statică Regius reintroduce vitezele, pe care Descartes le înlocuise cu deplasări. Apoi Regius susţine deschis mişcarea diurnă a Pămîntului, pe care Descartes o camuflează prin mijlocirea vîrtejurilor sale.

O simplă confruntare a textelor ne lămureşte în ce măsură a folosit Enyedi cartea lui Regius. Fie de ajuns să comparăm primele propoziţii ale cărţii lui Regius cu cele din caietul lui Pápai.

Regius	Pápai
Physica est doctrina rerum, quae natura sunt praedita atque propterea naturales dicuntur. Generalis omnium rerum naturalium est affectio; quae pro communissima rerum lege haberi potest; quod per divinam concurrentem potentiam, unumquodque ad illas pertinens, quantum potest, in eodem maneat statu donec inde ab alio deturbetur. Nihil enim sibi ipsi adversatur; nec quicquam nisi ab adversario suo destituitur.	1. Physica est sciencia rerum Naturalium; haec definitio sumitur ex objecto. 2. Lex communissima rerum Naturalium est quod per divinam concurrentem potentiam unum quodque cum suis ad se pertinentibus manet in illo statu in quo est donec ab alio inde disturbetur. Ratio quia nihil sibi adversus, sive quisquam nisi ab adversario suo distruitur.

Aşadar legea generală a naturii este principiul inerţiei, exprimat de Descartes sub forma de conservare a stării de repaus şi a celei de mişcare rectilinie şi uniformă, din care însă atît Regius cît şi Enyedi menţin numai pe cea dintîi.

Natura este definită ca un „principiu intern şi corporal de a acţiona, lucra şi gîndi". Mintea, deşi nu este propriu-zis corporală, totuşi e un principiu intern, corporal, „fiind strîns unită cu corpul, şi îşi îndeplineşte operaţiile prin organele corpului". Natura este dublă: materia lucrurilor naturale şi forma lor. „Materia este corpul considerat simplu sau universal; din ea sînt alcătuite toate lucrurile naturale prin singura dispoziţie a diverselor părţi, cum sînt: apa, rădăcinile, animalele, etc."

Esenţa materiei constă numai în lungime, lăţime şi afunzime, nu în celelalte calităţi. „La extensiune trebuie să distingem modurile extinderii, care nu sînt altceva decît anumite mărimi ale corpului extins". După ce se resping obiecţţiile împotriva acestei definiţii carteziene a materiei şi se neagă existenţa vidului, se adaugă: „Această materie este substanţă, fiindcă există prin sine, şi tot ce este substanţial în lucrurile naturale, provine din această materie".

Materia este substanţă perfectă şi se împarte în părţi sensibile şi insensibile. Insensibile sînt acelea pe care din cauza micimii lor nu le putem percepe cu simţurile, ci numai cu intelectul, cum sînt creşterea ierburilor şi animalelor. „Aceste particule nu sînt atomi în sensul lui Democrit, fiindcă nu au aceeaşi mărime şi formă, prin urmare sînt divizibile". Părţile sensibile sînt alcătuite din multe particule insensibile, cum este o picătură de apă, un deget, etc.

„Forma lucrurilor naturale este aceea prin care se constituie cu materia lucrurile naturale şi prin care se deosebesc de altele". Ea este generală sau specială. Cea generală, numită şi materială, cuprinde mişcarea sau repausul, poziţia figurii şi mărimea părţilor lucrurilor naturale care convin constituţiei lor. Această formă pretinde şi existenţa accidentelor, fiindcă cuprinderea numai a uneia sau alteia nu e suficientă, de exemplu micimea particulelor de apă nu este suficientă să formeze apa, ci se cere ca ele să fie alungite, subţiri, sensibile şi să se agite în mod diferit. Aceste principii ale formei materiale nu sînt numai suficiente, ci şi necesare „fiindcă prin ele se explică cu claritate nu numai calitățile oculte, ci și cele evidente. Aceast formă a materiei este accidentală, însă esențială lucrurilor naturale, deoarece constituie și le distinge de celelalte. De exemplu forma orologiului este accidenta pentru fier fiindcă fierul poate să nu aibă acea formă, dar pentru orologiu este esen țială, pentru că fără ea nu se poate numi orologiu . ,,*Aceste principii* sînt modu sigure ale substanței corpului, căci prin ele nu se adaugă sau se scade din corp, acela, adică corpul numai cîștigă moduri diferite de constituție". Capitolul se înche cu respingerea obiecției că modurile nu sînt entități.

Capitolul II începe cu definiția carteziană a mișcării. ,,Prin mișcare, potrivi definiției formei, înțelegem numai mișcarea locală, fiindcă alta nu există în corpuri. În consecință toate celelalte mișcări ca: generarea și distrugerea, creșterea, scăderea etc. nu sînt decît mișcări locale. Astfel încălzirea se naște prin aceea că particulel în repaus care se mișcă încet se pun în mișcare rapidă. Enyedi adaugă de la sir următoarele: ,,Astfel în generarea de ex. a cașului în putrefacție [părțile] se orîndu iesc prin mișcare locală în viermi".

,,Mișcarea corpului este translația din loc în loc adică din vecinătatea unc corpuri în vecinătatea altora". Aici Enyedi se simte iarăși obligat să adauge: ,,pri impulsul (impetus) imprimat și inerent!" ceea ce nu se afla la Regius; Mai mult Enyedi definește impulsul astfel: ,,Prin impulsul imprimat și inerent se înțeleg acea forță care există în corpul mișcat, și după cum acea forță devine mai mar sau mai mică, la fel corpul se mișcă mai mult sau mai puțin", reintroducînd astfe *impetus*-ul medieval.

În ce privește natura mișcării, se spune: ,,[Fiindcă] materia universului a fos creată de Dumnezeu și orînduită [în starea] în care se găsește, din legea imuabili tății naturii [urmează că] ea rămîne perpetuu în aceeași cantitate; căci nu exist nici un motiv pentru care Dzeu să anihileze vreo parte a naturii, căci altfel nu poat pieri, fiind substanță". Intercalarea în această propoziție a principiului rațiuni suficiente este iarăși a lui Enyedi. Tot el formulează apoi, independent de Regius principiul conservării cantității de mișcare scriind: ,,Astfel mișcarea în crearea diver selor părți ale materiei universale (Universae) a fost introdusă într-o anumită canti tate și se conservă în ele datorită aceleiași legi a naturii și în aceeași cantitate".

După cum nici un corp nu se poate mări sau micșora decît prin adaus sau pier dere a materiei ce exista înainte, la fel nici un mobil nu începe sau încetează să s miște fără a primi sau ceda mișcare ce exista mai înainte. Prin urmare, după cum părțile materiei se pot transfera, iar dacă nu se transferă rămîn pe loc potrivit legi naturii, la fel și mișcarea poate trece de la un mobil la altul sau rămîne în el. De aic se trage concluzia că mișcarea nici nu se naște nici nu se distruge, ci numai trece de la un corp la altul. Așadar nu numai materia universului se conservă, ci și miș carea ei. Pentru ilustrarea acestui principiu Enyedi aduce următorul exemplu ce nu se găsește la Regius: ,,Tăietorul de lemne de aceea obosește, fiindcă mișcarea sa se comunică securii, lemnului".

În ce privește comunicarea mișcării se expun legile mișcării după Descartes ,,Mișcarea se transmite printr-un impuls efectuat destul de intens, asupra altu corp ce-i stă în cale sau care-l oprește. Impulsul este destul de intens dacă poate învinge repausul sau mișcarea înceată a altui corp."

Se deosebesc următoarele cazuri:

1. Corpul mișcător își transmite întreaga mișcare, astfel că el rămîne în repaus iar cel mișcat primește o viteză egală.

2. Corpul mişcător comunică jumătate din mişcarea sa altuia care se află în ·epaus, astfel că ambele se mişcă cu jumătatea vitezei ce a avut-o primul corp.
3. Corpul mişcător nu comunică nici o mişcare obstacolului, cum e cazul mingii :are loveşte un perete, sau al razelor solare care cad pe suprafaţa apei sub un unghi ·gal cu cel de intoarcere.
Corpurile mai mari îşi imprimă mai uşor mişcarea celor mai mici decît invers.) mişcare transferată de unul sau mai multe corpuri altui corp este proprie aceluia :are o primeşte, chiar dacă vine de la mai multe corpuri.
Enyedi clasifică mişcările după cum urmează:
1. Mişcarea este simplă ca: o ascensiune, coborîre sau progresiune simplă.
2. Compusă, fie din coborîre şi progresiune, fie din ascensiune şi progresiune."
Ca exemple se dau pentru cazul întîi: căderea unei sfere pe un plan înclinat, şi ıl unei sfere lăsată să cadă din vîrful catargului unei corăbii. Iar pentru cel de al loilea: urcarea pe un plan înclinat, sau pe coasta unui munte.
Mişcarea unui corp mic poate fi rapidă dar nu intensă, după cum mişcarea unui :orp mare poate fi intensă chiar dacă e înceată. Prin urmare un corp mare ce se nişcă încet lovind un corp mic poate să-i dea o viteză mare, cum face apa care,cur- ;înd încet pe un spaţiu larg, ajungînd la o strîmtoare, poate produce o mişcare rapidă ı vîrtejurilor. Invers, viteza mare a unui corp mic ce se mişcă pe un spaţiu mare ›oate produce asupra unui corp mare pe un drum scurt o mişcare mare dar înceată, ·um se întîmplă la pîrghie, scripeţi şi roata cu sul. Urmează legea generală potrivit ·ăreia „cu cît creşte încetinirea corpului mişcat şi viteza celui mişcător, cu atît se mprimă corpului mişcat o mişcare mai intensă prin viteza celui ce mişcă." În :onsecinţă, fiindcă în maşini raportul vitezei corpului mic faţă de încetinirea celui nare poate varia la infinit, cu o maşină orice viteză a corpurilor poate fi mărită.)e aici trage concluzia: „Corpurile mai mari se pot potrivi în aşa fel cu cele mai mici ıcît corpul mai mic nu poate primi o viteză mai mare de nimicire de la corpul mai nare, nici corpul mai mare nu poate primi o mişcare mai mare de nimicire de la corpul nai mic, de unde rezultă că potrivit legii naturii rămîn în repaus, căci nu există o :auză suficientă pentru mişcare."
Pentru exemplificarea celor de mai sus se arată condiţiile de echilibru ale cîtorva naşini simple. Remarcăm că aici întîlnim pentru întiia dată în Transilvania tratate :hestiuni de fizică experimentală. Enyedi le-a luat de la Regius, care le-a împru- nutat din manuscrisele lui Descartes. Dar în timp ce Regius tratează pe larg pîr- ;hia, planul înclinat, scripeţii, roate cu sul, şurubul şi pana de crăpat, Enyedi se ›cupă cu ele numai succint şi fără a se folosi de figuri. Cel puţin aşa rezultă din aietul lui Pápai.
Pîrghiile sînt de două genuri: întîiul şi al doilea. O pîrghie poate ridica o greu- ate cu atît mai mare cu cît viteza braţului mai lung este mai mare decît a celui nai scurt, de care atîrnă greutatea. Această regulă nu e de loc în spiritul lui Des- artes.
La planul înclinat se consideră cazul simplu cînd lungimea planului este de două ›ri mai mare decît înălţimea lui. Spre deosebire de Regius,care dă o demonstraţie ›azată tot pe viteză, Enyedi afirmă, fără a demonstra, că o greutate de două livre ›oate fi ridicată pe planul înclinat de la baza acestuia pînă la jumătatea înălţimii ui, cu ajutorul unei greutăţi cu ceva mai mare de o livră, ce cade vertical din vîrf ›înă la baza planului înclinat, cele două greutăţi fiind legate cu o funie care trece ›este un scripete situat în vîrful acestuia.
La scripetele mobil, unde un capăt al funiei ce-l susţine este fixat de tavan, ır celălalt e susţinut de mînă, raportul dintre viteza mînii şi a greutăţii este de 2

la 1, deci mîna poate ridica o greutate de două ori mai mare. Dacă folosind u sistem de mai mulţi scripeţi facem ca acest raport să fie de 3 la 1 sau 4 la 1, et raportul dintre forţa aplicată a mînii şi a greutăţii va deveni de asemenea de 3 l 1, sau 4 la 1, etc.

De aici se trage concluzia că cu ajutorul celor trei maşini menţionate mai su se poate explica funcţionarea roţiii cu sul, penei de crăpat, şurubului şi a altor maşi asemănătoare. Astfel roata cu sul conţine la intervale egale o seamă de pîrgh fixate perpendicular pe circumferinţa unui cilindru (roţii), iar pana de crăpat est un plan înclinat, cu două laturi, care fiind lovit cu un ciocan cu mîner lung nu nu mai crapă lemnul, ci şi înaintează în el. Viteza înaintării e cu atît mai mare, cu cî pana e mai lungă. Apoi cu cît mişcarea adunată la mişcare este mai mare şi ma frecventă, cu atît creşte viteza. Aceasta este cauza pentru care o piatră ce cad de la o înălţime, mai întîi se mişcă încet, apoi din ce în ce mai repede, şi o sabi lungă loveşte mai bine decît una scurtă.

Trecîndu-se la mişcare se afirmă că „orice mişcare tinde spre o linie dreaptă niciodată spre una curbă", ceea ce conţine partea întîia a legii a doua a lui Descarte Ca exemplu se dă un corp ce roteşte cu praştia fiindcă scăpînd din ea îşi urmeaz drumul tangenţial la cerc, adică în linie dreaptă. Mişcarea curbilinie e cauzată d corpurile înconjurătoare care se opun mişcării rectilinii. Aceasta se observă la vîr tejurile apei care iau naştere prin aceea că apa lovindu-se oblic de un obstacol n poate curge în linie dreaptă, ci pe orbită; de aceea nici rîurile nu curg în linie dreaptă

„Mişcarea nu este niciodată contrară mişcării, ci numai determinarea ei est contrară determinării, fiindcă acestea se distrug reciproc, ele însele însă niciodat nu se nimicesc sau diminuează." Ca exemplu se dă mingea care lovind peretel nu-şi pierde mişcarea fiindcă se întoarce cu aceeaşi viteză, ci îşi schimbă num determinarea din progresivă în regresivă. „Determinarea este direcţia corpulu mobil ce tinde spre un anumit termen (terminus). Şi după cum mişcarea se naşt din corpul mişcător, la fel determinarea îşi are originea în situaţia suprafeţei corpu lui mişcător". Ca exemplu se dă o minge ce cade pe o plasă sau pe un perete.

Determinarea este simplă sau compusă. Determinarea simplă este aceea prin car mobilul mergînd pe o linie spre obstacol, se întoarce pe aceeaşi linie. Ca exemplu se dă o minge ce cade la pămînt şi sare în sus. Determinarea compusă este acee cînd incidenţa este oblică şi o parte a mişcării, anume cea descendentă trece în ascen dentă, pe cînd determinarea celei progresive rămîne întreagă. Acesta este cazu ciocnirii oblice de un perete fix, cînd mobilul se întoarce sub un unghi de reflexi egal cu cel de incidenţă. „Iar dacă mobilul loveşte obstacolul cu o viteză mai mare astfel că pierde jumătate din mişcarea sa, atunci reflectîndu-se spre cealaltă parte are o mişcare ascendentă cu jumătate de viteză, astfel că descrie o linie asemănătoar în două momente, pe care la coborîre o parcurgea într-un moment, şi mergînd ma departe unghiul de reflexie va fi mai mic decît cel de incidenţă."

De la ciocnire se trece la refracţia luminii în sens cartezian: „Refracţia est deviaţia într-o parte a razei de lumină ce trece printr-un obstacol, din cauza viteze mărite sau micşorate în acesta". De ex. lumina ce vine din aer în sticlă se refract în sticlă spre perpendiculară, fiindcă viteza luminii devine mai mare în sticlă. Cauz este că sticla este mai solidă (dură) şi are pori mai mici decît aerul, din care cauz prin porii sticlei razele se mişcă mai repede. Fenomenul este invers cînd lumin trece din sticlă în aer. Enyedi tratează aceste fenomene foarte pe scurt, spre deo sebire de Regius care foloseşte figurile şi demonstraţiile lui Descartes.

Revenindu-se la mişcare se afirmă că orice mişcare a corpurilor este în cer deoarece spaţiul fiind plin, iar corpurile impenetrabile, nici un corp nu se poat mișca decît dacă este deplasat un alt corp din locul său și el ocupă locul celui deplasat, astfel că un vas nu se poate umple cu vin decît dacă aerul iese din vas, iar locul lui îl ocupă vinul. Prin urmare cînd schimbarea circulară a locului nu se poate face corpul nu se poate mișca. La fel e mișcarea unei pietre legate de o sfoară. Aceasta este de acord cu teoria vîrtejurilor lui Descartes.

Se combate apoi diviziunea mișcării în naturală și violentă, fiindcă orice mișcare este naturală, avînd loc după legile naturii, și în același timp violentă pentru că provine de la forța imprimată. De exemplu o piatră lăsată din mînă cade în mod violent, iar aruncată în sus se mișcă tot violent. Mișcarea unui mobil de aceeași mărime sau este mare, și după ce se separă de cel mișcător cîtva timp își păstrează mișcarea, sau este mică și atunci mobilul încetează de a se mișca deodată cu impulsul, cum e cazul boilor care trag carul. Întîia se numește mișcare proprie, a doua străină. Aceasta din urmă este de trei feluri: transportare, împingere, tracțiune. La tracțiune și împingere aparține învîrtirea, cum se vede la un cilindru, care fiind tras și împins se învîrtește. Presiunea este o împingere frecventă invizibilă a unui corp, care prin aceasta nu se mișcă vizibil din locul său, ci numai se clatină încoace și încolo în mod sensibil, cum e cazul unei pietre mari așezată pe umăr. Tracțiunea nu poate avea loc decît dacă cel care trage este legat de corpul tras. Așadar este greșit spus că magnetul trage fierul.

Repausul este rămînerea corpului în același loc: acest repaus este unica legătură prin care părțile corpului dur sînt unite între ele (cohaerens) și rezistă separării lor. În adevăr, deoarece părțile corpului dur sînt în repaus unite între ele, datorită legii imuabilității naturii tind să rămînă în starea de unire și de repaus și nu pot fi scoase de acolo decît printr-o mișcare suficient de mare".

Potrivit teoriei lui Descartes *mărimea* propriu-zisă este însăși extensiunea corpului. Cît de eficace este această mărime ne arată fie fierul brut, fie cel prelucrat în sabie sau în cuțit, cu ajutorul cărora se crapă corpurile cele mai dure.

,,*Situația* este însăși poziția corpului între corpuri; eficacitatea acesteia apare în balanța greutăților, în care din cauza variației poziției greutățile se ridică sau se coboară, sau rămîn în echilibru."

După tratarea acestor forme generale se trece la cele speciale. ,,Forma specială este mintea omenească, care este o substanță spirituală, fiindcă nu-și poate trage originea din mișcare, repaus, mărime, poziție și altă dispoziție a părților". Aceste adevăruri sînt exprimate prin următoarele două versuri, care cuprind principiile lucrurilor naturale:

,,Mens, Mensura, Quies, Motus, Positura, Figura
Sunt cum Materia cunctarum exordia rerum".

Versurile, care nu se întîlnesc la Descartes, le-a introdus Regius urmînd metoda scolastică, fiind ușor de memorizat.

Aici prin măsură se înțelege numărul și mărimea, prin poziție situația corpului. În consecință se respinge existența materiei, care este o pură putință, nefiind inteligibilă, și nefiind corp nu poate constitui un corp, căci ceea ce nu este nimic nu poate da nimic. De asemenea se resping formele substanțiale, care derivă din putința materiei și pot reveni în aceeași materie în mod indirect. Deci ambele principii fiind necunoscute și inexplicabile trebuiesc respinse, deoarece avem principii mai clare.

În favoarea existenței formelor substanțiale s-ar putea aduce următoarele argumente.

1. ,,Dacă formele lucrurilor nu sînt substanțiale, nu există nici o cauză pentru care apa caldă să revină la starea rece de mai înainte; dar forma substanțială a

apei alungă căldura ca pe un inamic, în timp ce frigul revine la ea ca o calitate legată de ea".

Față de aceasta, poziția carteziană expusă de Regius și Enyedi este următoarea: ,,Nu aceasta este cauza pentru care apa mai întîi trece în vapori și apoi revine la frig, ci deoarece căldura care este un accident al apei agită particulele aceleia mai vehement la foc de unde se detașează comunicînd mișcarea particulelor aerului înconjurător și altor corpuri, particulele apei se mișcă mai încet, și astfel ea devine lichidă". În urma acestei comunicări a mișcării, neprimind o mișcare nouă își pierde toată mișcarea și astfel se răcește.

2. ,,Dacă nu există forme substanțiale în lucruri, nu va fi nici un motiv pentru care părțile corpului să rămînă unite, și să fie conținute multe calități într-un subiect".

La acest argument se răspunde că este suficient ca subiectul să fie în stare să primească calități diferite și să le mențină datorită legii imuabilității naturii, pînă ce nu vor fi deranjate de altul.

3. ,,Tot ceea ce unește între ele în același subiect calități contrare care se resping, este substanță; aceasta însă o fac formele substanțiale. Așadar formele sînt substanțe".

Răspunsul cartezienilor este că în același subiect, datorită legilor opoziției nu există calități contrare. Ca exemplu se dă un amestec de apă fierbinte și rece, care ne dă apă caldă. Aceasta nu înseamnă că în acest caz în apă se găsesc două calități contrare, ci deoarece părțile apei fierbinți își comunică mișcarea părților apei reci, și astfel își pierd din mișcările lor, care fiind primite de părțile apei reci, acele mișcîndu-se mai încet produc vapori.

,,Din numărul principiilor fizice se elimină și privația. Aceasta se definește ca fiind absența formei din materia care are aptitudinea de a o primi în ea". Cauzele acestei eliminări sînt două, și anume:

1. Ea nu constituie esența lucrurilor naturale.

2. Fiindcă materia tuturor corpurilor naturale este aceeași, ele pot primi în urma unei cauze eficiente orice formă cu condiția ca această cauză să aibă forțe suficiente, deși nu este la fel de ușor ca din orice să se poată face orice. De exemplu dintr-o vergea subțire de fier cu mult mai ușor se poate face o coardă de liră (Cithera), decît o ancoră de corabie.

În sfîrșit se respinge definiția vulgară (aristotelică) a mișcării: ,,motus est actus entis in potentia quatenus in potentia", considerînd-o obscură și contradictorie. În adevăr ,,actul presupune o entitate care să fie în act. Dar într-o entitate care este în putință nu poate fi nici un act".

Trecîndu-se la noțiunea de *loc*, acesta se definește astfel: ,,Lucrurilor naturale li se atribuie pentru desigmarea distanței diferite de la celelalte corpuri, un loc". Locul este fie intern, fie extern. ,,Locul intern este mărimea oricărui corp, sau împrejmuirea de care este înconjurat, și prin care într-un anumit mod este distanțat de alte corpuri, din care cauză se numește îndepărtat sau apropiat. Așadar locul intern nu este ceva extins în lățime, lungime și adîncime", fiindcă în acest fel ar fi corp și nu ar putea conține alt corp, din cauza impenetrabilității dimensiunilor. ,,Locul extern este suprafața oricărui corp, înconjurînd un alt corp oarecare, după cum într-un anumit fel e depărtat de alte corpuri, din care cauză se zice îndepărtat sau apropiat". Ca exemplu se dă o corabie ancorată la o anumită distanță între două țărmuri opuse, care păstrează același loc extern, deși aerul și apa ce o înconjoară se schimbă într-un fiind aduse de vînt și de rîu. ,,De aici rezultă că localitatea sau esența locului constă numai în relația sa privitoare la suprafața corpului, pe care o are față de vecinătatea sau distanța altor corpuri".

La întrebarea dacă locul este imobil se răspunde că nu este, fiindcă un om ce şade într-o corabie în timp ce aceasta se mişcă, nu rămîne imobil faţă de ţărm. La o altă întrebare, dacă există spaţiu vid în natură, răspunsul e negativ, deoarece existenţa lui implică contradicţia că spaţiul este şi nu este extins în lăţime, lungime şi afunzime. A treia întrebare este că dacă dumnezeu ar anihila aerul dintr-o cameră, acolo ar rămînea un spaţiu vid, fiindcă pereţii camerii rămîn imobili? Răspunsul este iarăşi negativ, fiindcă neexistînd între pereţii camerii nici o extensiune nu poate să existe nici distanţă şi în consecinţă pereţii ei trebuie să se atingă. Aici Enyedi face observaţia: ,,În fizică nu se cercetează ce ar putea face Dumnezeu în mod extraordinar, ci ceea ce face în mod obişnuit prin legile naturii". Se menţionează apoi că de obicei se cheamă vid aceea căreia îi lipseşte corpul, primirii căruia îi este destinat; de ex. o pungă goală.

Din cele de mai sus se trage concluzia că nici o mişcare nu poate avea loc din cauza groazei de vid, şi nici natura nu-l poate evita sau fugi de el, fiindcă vid nu poate exista. Toate mişcările ce se atribuie groazei de vid îşi găsesc explicarea în aceea că un corp este alungat de altul care îi ocupă locul. Ca exemplu se dau funcţionarea sifonului, cucurbetei, foalelui etc.

Termometrul este prezentat ca un exemplu de dilatare şi condensare a aerului. Enyedi descrie, după Regius confecţionarea şi funcţionarea unui termometru cu apă, fără însă a da schiţa aparatului, cum face acesta.

Timpul este de asemenea definit în sens cartezian ca durata, sau permanenţa în existenţă a lucrurilor naturale. Această durată este prezentă, trecută sau viitoare şi se măsoară prin mişcarea cerului şi rotaţia Pămîntului în jurul axei sale. ,,Prin urmare se poate admite sentinţa lui Aristotel care spune: Timpul este măsura mişcării şi a repausului potrivit antecedentului şi consecventului". Timpul tuturor lucrurilor este unul şi acelaşi, dar durata depinde de rotaţia cerului şi Pămîntului, astfel că la mai multe rotaţii corespunde o durată mai lungă, la mai puţine una mai scurtă. ,,Timpul prezent nu este un moment indivizibil, ci are părţi indefinite (indefinita), fiindcă nu există nici o particulă reală a ei care să nu aibă cantitatea sa de durată, astfel că în continuu se poate divide într-una mai mică".

În continuare se afirmă finalismul în natură spunîndu-se că ,,lucrurile naturale, chiar cele lipsite de minte, acţionează în scopul universal al autorului naturii, pe care oamenii nu-l pot întrezări exact," şi după legi stabilite de dumnezeu, care sînt sigure şi infailibile. Întîmplarea sau norocul nu sînt altceva decît necunoaşterea conexiunii cauzelor necesare producerii unui efect oarecare.

Lucrurile naturale sînt fie spontane fie arbitrare. Spontane sînt acelea care acţionează, suferă sau încetează peste voinţa omului. Acestea se numesc naturale prin excelenţă, cum sînt plantele şi animalele. Arbitrare sînt acelea care operează prin intervenţia omului, şi de aceea se numesc artificiale. Dar şi acestea sînt naturale fiindcă: 1. sînt înzestrate cu natură, avînd principiul intern de a acţiona, suferi şi înceta; 2. oamenii cînd le produc nu fac altceva decît aplică naturalele active la cele pasive, cum fac la semănarea grîului, cultivarea viei, etc. 3. artificiul omenesc urmează şi imită mersul naturii.

Între lucrurile naturale şi cele artificiale există însă diferenţa de mai mare şi mai mic, precum şi cea de perfecţiune. Cele artificiale sînt şi ele făcute după legile naturii, dar cu oricîtă artă ar fi confecţionate, cum sînt automatele, nu pot atinge perfecţiunea celor naturale. Aceasta apare la oroloage, ale căror roţi foarte puţine şi artificiale nu se pot compara cu nenumăratele oase, vene, nervi, artere, ect. ale celor mai nemernici purici.

Capitolul se încheie cu respingerea următoarelor obiecţii.

1. Lucrurile artificiale se mişcă din cauze externe, deci nu au principiu intern. Răspunsul cartezian este că şi lucrurile naturale îşi primesc mişcările din cauze externe, de ex. de la soare, aer, foc, etc. ; aceasta însă nu înseamnă că nu posedă principiu intern.

2. Lucrurile artificiale sînt entităţi accidentale (per accidens), prin urmare pot acţiona de sine, de aceea nu au principiu intern de acţiune.

Răspunsul este că lucrurile artificiale fiind entităţi prin sine (per se), deoarece orice entitate simplă sau compusă este prin propria esenţă ceea ce este, urmează că şi lucrurile artificiale sînt prin esenţa lor ceea ce sînt, căci un lucru poate proveni din altul dar nu poate fi constituit în esenţa sa de altul. Rezultă deci că „distincţia entităţii în *per se* şi *per accidens* este sterilă".

Ca o concluzie a celor de mai sus se poate spune, că după cum Regius a expus în cartea sa *Fundamenta Physices* fizica lui Descartes sub forma unui „Descartes de buzunar", la fel Enyedi a scos din Regius părţile esenţiale, pe care le-a dictat elevilor săi, după cum i s-a părut mai convenabil. În tot cazul Enyedi are meritul de a fi predat şi cîteva chestiuni practice de statică şi căldură, deşi probabil fără a face experinţe, ba poate chiar nici desene pe tablă : cel puţin aşa rezultă din caietul lui Pápai Páriz Ferenc.

(Intrat în redacţie la 6 ianuarie 1967)

О ШКОЛЬНОЙ ТЕТРАДИ ПАПАИ ПАРИЗА ФЕРЕНЦА

(Резюме)

Следуя примеру Апацаи Чере Яноша, который ввёл изучение физики Декарта в реформатских коллежах в Алба-Юлия и Клуже, профессор Эньеди Шамуел сделал то же самое в Аюде. Доказательством является школьная тетрадь его ученика Папаи Париза Ференца, относящаяся к 1965 г. и озаглавленная *Physica seu philosophia naturalis* с форматом 100×160 мм и с 397 страницами. Названная тетрадь хранится в Библиотеке Клужского филиала Академии Социалистической Республики Румынии. Уроки Эньеди являются свободным переводом книги Лё Руа (Региуса): *Fundamenta Physices* (1646 г.), в которой последний резюмирует физику Декарта.

В настоящей статье подробно анализируются главы I и II школьной тетради Папаи Париза Ференца, отражающие содержание соответствующих глав книги Регнуса и занимающиеся вопросами, принадлежащими в большей или в меньшей степени нынешней физике. Эти главы занимаются в особенности материей, движением, покоем, вакуумом, пространством, временем и т.п. Эньеди впервые преподавал в Трансильвании понятия статики; он описал водяной термометр, что является первым началом экспериментальной физики.

ON AN EXERCISE-BOOK BELONGING TO PÁPAI PÁRIZ FERENC

(Summary)

Following the example of Apáczai Csere János who introduced Descartes'Physics to the Reformed Colleges in Alba-Iulia and Cluj, prof. Enyedi Sámuel made the same thing in Aiud. An exercise — book, belonging to Pápai Páriz Ferenc — prof. Enyedi Samuel's school-boy — proves that. Dating from 1665 and being entitled : *Physica seu philosophia naturalis* the above exercise-book has the size 100 × 160 mm and 397 pages. This is preserved in the Library of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Cluj Branch. Enyedi's lessons are free translations from Le Roy's (Regius) *Fundamenta Physices*, 1646 in which Descartes' book is summarized.

The present paper analyses in details Chapter I and II of this exercise-book in which the corresponding chapters from Regius are to be observed. Among the problems treated in these chapters-belonging more or less to our present day Physics — we mention : matter, movement, rest, vacuum, space, time etc.

It was Enyedi who taught for the first time in Transylvania notions of statics and described a water thermometer taking by this a first step in experimental Physics.

ÎNCEPUTURILE FIZICII LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ
Activitatea ştiinţifică a profesorului Antoniu Abt

de

MARIA POPESCU şi EVA GALIGER

Începuturile cercetărilor de fizică la Cluj coincid în timp cu data înfiinţării Universităţii în anul 1872 şi sînt legate de numele lui Antoniu Abt, primul profesor al acestei Universităţi.

Antoniu Abt şi-a desfăşurat activitatea la Universitatea clujeană timp de 30 ani, adică pînă în 1902, anul morţii sale, activitate pe care o putem urmări prin articolele publicate în această perioadă. Activitatea lui A. Abt a fost de pionierat, el punînd bazele învăţămîntului universitar al fizicii la universitatea nou înfiinţată şi totodată lui i se datoreşte înfiinţarea şi înzestrarea primelor laboratoare atît didactice cît şi de cercetare. Ca o anexă a acestor laboratoare în anul 1878 a fost înfiinţat atelierul mecanic condus de mecanicul Süss, atelier în care s-au construit şi aparate de fizică necesare laboratoarelor. Ca profesor al acestei Universităţi Abt a elaborat un manual de fizică cu titlul *Fizică experimentală* care în intervalul 1863–1887 a apărut în şapte ediţii, manual mult apreciat la timpul său şi care a fost tradus şi în limba română de profesorii I. Hossu şi E. Viciu în 1891. Întrucît activitatea didactică a lui Abt a constituit obiectul unui alt articol, în lucrarea de faţă vom prezenta munca de cercetare a profesorului Antoniu Abt.

Activitatea sa ştiinţifică s-a axat în special pe studiul magnetismului pe lîngă care a mai studiat şi alte probleme cum sînt: ,,Determinarea constantelor elementelor galvanice", ,,Efectele şi teoria radiometrului", ,,Compoziţia cromatică şi efectul termic al luminii", ,,Coeficienţii de dilatare lineară a diferitelor tipuri de fier şi oţel", ,,Întrebuinţarea aneroidului înregistrator.." şi ,,Forţa electromotoare a unor combinaţii a oxizilor metalici cu sulfiţi metalici şi cu metale simple la o diferenţă de temperatură de 100° la suprafaţa de contact".

În lucrarea cu titlul ,,Constantele elemenetelor galvanice" Abt determină rezistenţa internă a elementelor galvanice printr-o metodă de comparaţie folosindu-se de o busolă de tangentă. Determinările le face legînd elementul de studiat în circuite a căror mărimi sînt cunoscute. Observînd unghiurile de deviaţie determină rezistenţa internă a elementului precum şi forţa electromotoare a sa.

În lucrarea ,,Descrierea aneroidului înregistrator Richard – Frères" arată importanţa pentru cunoaşterea fenomenelor meteorologice a variaţiei în timp a mărimilor ce le determină, în special a presiunii atmosferice. În consecinţă dă descrierea aneroidului înregistrator şi modul de funcţionare a lui, precum şi observaţiile făcute de el în perioada 9. II—4. III. 1886, în care perioadă constată o diferență de presiune între 750—704 mm Hg, variație de presiune ce nu a mai fost observată din 1865 şi care a fost determinată din înregistrarea aneroidului folosit.

Lucrarea „Compoziția cromatică, luminozitatea şi efectul termic al luminii becului Auer şi compararea ei cu lumina becului Argand şi cu a becului electric" constă din cinci capitole : 1. Proprietățile şi avantajele luminii Auer, 2. Observații proprii, 3. Observații spectroscopice, 4. Măsurări fotometrice, 5. Radiația termică. În primul capitol menționează următoarele avantaje ale becului Auer față de becul Argand : consum de gaz mai mic de două ori la presiune de 26 mmHg a gazului, intensitate de patru ori mai mare, ridicarea temperaturii mediului înconjurător şi producerea de CO_2 de două ori mai mică, durată de funcționare de la 500—1000 ore fără întrerupere şi culoarea alb-verzuie fără ca flacăra să palpiteze. Făcînd observații spectroscopice, avînd ca reper culoarea portocalie, dă următoarele date pentru domeniile ocupate în spectru de diferitele culori :

Becul	Violet	Albastru	Verde	Galben	Portocaliu	Roşu
Auer	4,08	2,08	2,08	1,01	1	1,38
Argand	2,45	1,54	1,41	0,75	1	2
Electric	4,78	3,46	2,41	0,85	1	1,38

De aici se vede că lumina becului Auer este mai bogată în culori cu lungime de undă scurtă, ceea ce explică culoarea alb-verzuie a sa. Din măsurările fotometrice ale sale a rezultat că intensitatea luminii becului Auer este de 2,82 ori mai mare decît a becului Argand.

În lucrarea „Despre coeficientul de dilatare lineară termică a diferitelor tipuri de fier şi oțel fabricate la Reşița" determină la cererea fabricii din Reşița coeficienții de dilatare lineară la 22 de probe, arătînd că în intervalul între 20—50 °C variația coeficientului este foarte mică, astfel că în întrebuințări tehnice ea poate fi neglijată.

Articolul cu titlul „Scurtă prezentare a efectelor şi teoriei radiometrelor şi a celor mai noi experiențe ale lui Crookes" prezintă o lucrare de sinteză în care Abt expune cele trei teorii care caută să explice fenomenul radiometric şi anume : 1. teoria cinetică, care explică fenomenul prin diferența de viteză a moleculelor gazului rarefiat din balonul radiometrului, teorie susținută de Tait, Dewar, Thomson, Maxwell, Clausius şi Finkener ; 2. teoria de evaporare a lui Osborne, Reynolds şi Govi, în baza căreia rotația paletelor se datoreşte evaporării la suprafața caldă şi condensării la cea rece a umidității din balon şi 3. teoria emisiei electrice, susținută de Zöllner, confirmată şi de experiențele lui Crookes, conform căreia în urma iradierii termice ia naştere un fenomen secundar : emisia electrică, ce provoacă mişcarea paletelor. În articol sînt prezentate argumentele lui Zöllner în favoarea teoriei sale, argumente bazate pe experiențe, după care autorul prezintă şi experiențele lui Crookes, care de asemenea confirmă teoria lui Zöllner.

În articolul „Forța termoelectromotoare a unor combinații a oxizilor metalici cu sulfiți metalici şi cu metale la o diferență de temperatură de 100° pe suprafața de contact", după ce face un istoric al efectului termoelectric, dă rezultatele obținute din măsurări proprii făcute asupra 55 de termoelemente, rezultate din combinarea unor oxizi metalici cu sulfiți metalici sau metale între ele. Din rezultatele obținute deduce că cuplurile studiate dau forțe electromotoare apreciabile chiar şi pentru diferenţe mici de temperatură. Astfel, de exemplu, din tabelul dat în articol desprindem unul din rezultate: dacă forţa electromotoare a cuplului bizmut-antimon la intervalul de temperatură 98—99 °C este considerată ca unitate, atunci pentru cuplul pirită-calcopirită obţinem valoarea de 7,62 iar pentru cuplul pirită-piroluzită valoarea de 4,67. Lucrarea se remarcă prin numărul mare de cupluri studiate şi prin faptul că din valorile date se poate alege cuplul cu f.e.m. ce corespunde nevoilor practice.

Lucrările elaborate de Abt în domeniul magnetismului pot fi grupate în jurul a două probleme: cele ce se ocupă de magnetismul terestru şi cele în care studiază proprietăţi magnetice ale unor minereuri şi probe de fier şi oţel. Din prima grupă fac parte următoarele lucrări: ,,Determinarea constantei busolei de tangentă", ,,Determinarea înclinaţiei magnetice la Cluj" şi ,,Determinarea aproximativă a componentelor cîmpului magnetic terestru".

În lucrarea ,,Determinarea constantei busolei de tangentă" determină constantele busolelor de tangentă marca Siemens-Halske şi Meyerstein, aflate în colecţia Catedrei de fizică. În determinarea constantei busolei Siemens-Halske foloseşte o metodă chimică, prin măsurarea masei de gaz ce se dezvoltă într-un voltametru cu care este legată în serie busola studiată. Constanta e dată astfel de relaţia $C = \frac{m}{t \cdot \operatorname{tg} \alpha}$, unde m—masa gazului, t—timpul de trecere e curentului, α — unghiul de deviaţie a busolei. Cu această metodă obţine în urma a 12 determinări valoarea medie $C = 1,58183$ în unităţi chimice, sau $C = 1,51524$ în unităţi magnetice. Constanta celei de-a doua busole o determină printr-o metodă de comparaţie, legînd în paralel busola studiată cu cea a cărei constantă a determinat-o anterior. În acest caz $C' = \frac{C \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = 77,5955$.

,,Determinarea înclinaţiei magnetice la Cluj" o face studiind separat componenta verticală şi orizontală a înclinaţiei prin curentul indus de către cîmpul magnetic terestru la rotirea unei bobine în jurul unei axe verticale, respectiv orizontale. Ca rezultat obţine pentru componenta verticală 2°11′41″, iar pentru cea orizontală 1°9′6″ de unde pentru înclinaţie din raportul tangentelor acestor unghiuri stabileşte valoarea de 62°30′23″ în anul 1874.

Lucrarea ,,Determinarea aproximativă a componentelor cîmpului magnetic terestru", după aprecierea autorului e importantă nu pentru precizia măsurătorilor, ci mai ales pentru că demonstrează că determinarea acestor mărimi se poate realiza cu o aparatură destul de simplă şi anume o busolă Weber şi un magnet, a căror mărimi caracteristice au fost în prealabil determinate. Prin această metodă autorul a determinat componentele magnetismului în două localităţi din ţară, la Tuşnad şi Vîlcele.

Celelalte lucrări ale lui Abt sînt grupate în jurul problemei determinării proprietăţilor magnetice a unor minereuri, magneţi naturali, probe de fier, nichel şi oţel de la Reşiţa.

În lucrarea ,,Asupra magneţilor naturali ce se găsesc în zăcămintele de fier de la Moraviţa " Abt studiază trei minereuri: magnetita (Fe_3O_4), pirotina (FeS), hematita (Fe_2O_3). El determină în cazul acestor minereuri magnetizarea specifică, magnetismul remanent şi momentul magnetic în funcţie de conţinutul de fier. El face observaţia că raportul dintre cantitatea absolută de fier şi momentul magnetic este aproape constant pentru diferite minereuri. Totodată arată că dacă se consideră magnetizarea specifică a oţelului egală cu unitatea, atunci a magnetitei este de 2,3, a pirotinei de 0,66 şi a hematitei de 0,21.

Lucrarea „Despre magnetismul oţelurilor Bessemer, Puddling şi Martin fabricate la Reşiţa" are ca obiect studiul proprietăţilor magnetice ale acestor oţeluri. După prezentarea sumară a metodelor de elaborare a acestor tipuri de oţel, autorul urmăreşte cu un magnetometru cu oglindă procesul de magnetizare a probelor din aceste trei tipuri. Din datele experimentale deducem că raportul momentelor magnetice relative pentru oţelul Bessemer, Puddling şi Martin la saturaţie, adică la 36, A, este 7,5 :21,5 : 38, iar dacă valoarea pentru oţelul Bessemer o luăm ca unitate obţinem 1 :2,866 :5,06. Pentru determinarea valorilor absolute a momentelor magnetice, compară influenţa oţelului Puddling cu a unei bare de oţel a cărui moment magnetic e cunoscut şi apoi influenţa magnetică a celorlalte două este comparată cu a oţelului Puddling, momentele magnetice fiind date de relaţia $M = M_p \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_p}$ unde M_p şi φ_p reprezintă momentul magnetic şi unghiul de deviaţie a magnetometrului pentru oţelul Puddling, iar M şi φ valoarile corespunzătoare pentru oţelul studiat.

Lucrarea „Asupra comportării magnetice a oţelurilor noi în curent staţionar în comparaţie cu fierul moale" reprezintă una din cele mai importante lucrări ale lui Abt. Ocupîndu-se de o problemă practică şi anume înlocuirea miezului de fier moale al electromagneţilor fabricaţi la Reşiţa prin oţel moale, Abt rezolvă cu mult succes această problemă, arătînd că prin înlocuirea menţionată electromagneţii astfel fabricaţi au avantaj faţă de cei cu fier moale, în special în ceea ce priveşte duritatea mai mare a oţelului faţă de fier. Pentru a demonstra că nu se alterează calităţile electromagneţilor construiţi cu miez de oţel moale, el determină intensitatea cîmpului magnetic creat de cele două tipuri de electromagneţi şi obţine ca rezultat valori foarte puţin diferite între ele.

În cadrul lucrării „Confirmarea şi determinarea stărilor magnetice a unor minereuri" Abt cu ajutorul unui magnetometru cu oglindă confirmă magnetizarea a şapte minereuri în cîmpul unui electromagnet. Minereurile studiate sînt: calcopirita, minereu de nichel, siderit, pirită, hematită, pirolusită şi limonit. El arată că după încetarea cîmpului magnetic, toate minereurile studiate, în afară de pirolusită, îşi pierd proprietăţile magnetice. În a doua parte a lucrării reia studiul minereului de nichel, piritei, pirolusitei, calcopiritei şi sideritului, pentru care calculează momentele magnetice. Din măsurările efectuate rezultă că pentru curenţi relativ mici (0,5 A) se observă o magnetizare pronunţată.

În lucrarea „Comportarea magnetică a magnetitei de la Moraviţa şi a oţelului de aceeaşi duritate cu sticla în cazul forţelor mari de magnetizare şi valoarea absolută a momentelor magnetice a lor" autorul compară rezultatele a două serii de măsurători făcute cu magnetită şi oţel pentru compoziţii diferite (conţinut de fier diferit) la un curent între 8—40 A. Calculează momentele magnetice şi magnetizarea specifică a probelor şi constată că pentru magnetită magnetizarea specifică este de 2,3 ori mai mare decît pentru oţel, că această mărime depinde de lungimea probelor şi că aceste două valori sînt proporţionale. În încheiere arată că rezultatele sale sînt în contradicţie cu ale lui Holtz, care susţine că la forţe mari de magnetizare magnetita ar atinge mai repede valoarea maximă a magnetismului remanent decît oţelul.

În articolul „Compararea unor oţeluri între ele, cu nichel şi cu magnetita de la Moraviţa.." se determină momentul magnetic, magnetizarea specifică a şase tipuri de oţel şi anume: oţel elaborat în creuzet, oţel de diamant, oţel de wolfram, oţel Bessemer, Puddling şi Martin. Din rezultatele obţinute se constată că oţelul de wolfram are proprietăţi net superioare faţă de celelalte toate.

În lucrarea „Proprietățile magnetice ale hematitei" Abt arată că curba de magnetizare a hematitei nu are punct de inflexiune ca în cazul oțelului, nichelului și magnetitei. Studiind magnetizarea specifică constată că și la hematită ca și la magnetită această mărime depinde de lungimea probelor. Comparînd magnetizarea specifică a hematitei cu cea a pirotinei și a magnetitei ajunge la următorul raport: 1 : 1,423 : 5,294. Din măsurătorile făcute, Abt deduce că comportarea hematitei depinde de conținutul de fier și de structura cristalină a diverselor substanțe.

În lucrarea „Proprietățile magnetice ale magnetitei de la Moravița și a oțelului" Abt compară două tipuri de magnetită ce deferă prin compoziția lor chimică cu două tipuri de oțel ce diferă între ele prin călire. Din rezultatele măsurătorilor efectuate, el trage concluzia că magnetizarea specifică a magnetitei este de 3,5 ori mai mare decît a oțelului și depinde de compoziția chimică, diferență de structură și conținut de fier. Studiind demagnetizarea probelor, el constată că magnetismul obținut la un curent de 95,5 A se pierde la aplicarea unui curent de sens opus de 36 A, și că demagnetizarea magnetitei se produce mai repede decît a oțelului.

Tema lucrării „Proprietățile magnetice ale pirotinei" constituie reluarea experiențelor anterioare efectuate asupra magnetitei. Determină momentul magnetic, magnetizarea specifică și studiază demagnetizarea. Comparînd rezultatele obținute pentru pirotină cu cele pentru magnetită constată că magnetizarea specifică pentru cel de-al doilea este de 3,7 ori mai mare ceea ce reise și din graficele trasate la magnetizarea și demagnetizarea probelor.

Analizînd articolele publicate de profesorul Abt, se constată că activitatea sa a fost îndreptată spre probleme strîns legate de necesitățile practice, el abordînd probleme cu caracter mai mult aplicativ. Meritul său științific constă îndeosebi în faptul că a pus bazele cercetării de fizică la Universitatea din Cluj.

(Intrat în redacție la 5 aprilie 1967)

НАЧАЛО ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В КЛУЖСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ. НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПРОФЕССОРА АНТОНИУ АБТА

(Резюме)

В работе представлена научная деятельность Антониу Абта в период 1874-1900 гг., когда он функционировал в качестве профессора в Клужском университете. Авторы анализируют наиболее важные труды Абта, которые большей частью рассматривают вопросы магнетизма, а именно исследование земного магнетизма и магнитных свойств руд из залежей страны, а также некоторых сталей, сделанных в Решице.

THE BEGINNING OF TEACHING PHYSICS AT CLUJ UNIVERSITY PROF. ANTHONY ABT'S SCIENTIFIC ACTIVITY

(Summary)

The authors deal with Anthony Abt's scientific activity between 1874—1900 the period when he worked as professor in Cluj University. It is the purpose of this paper to discuss the most important works belonging to him, in majority treating problems of magnetism. Among them we mention those regarding the terrestrial magnetism, the magnetic properties of minerals from our country's deposits as well as the steel made in Reșița.

ELEKTRONENSPINRESONANZ EINIGER CU(II)-CHELATVERBINDUNGEN DER β-DIKETONE

(Kurzer Bericht)

NICOLAE VEZENTAN

Elektronenspinresonanzuntersuchungen an Cu(II)-Chelatverbindungen werfen zahlreiche Fragen auf, deren Lösung noch viele experimentelle Versuche und theoretische Erforschungen benötigt, um die experimentellen Tatsachen zu systematisieren und zu erklären.

Bisher wurden im allgemeinen Probleme behandelt, die bei den mit entsprechenden diamagnetischen isomorphen Substanzen magnetisch verdünnten Einkristallen, sowie beim verdünnten oder nichtverdünnten pulverförmigen Zustand oder in flüssigen bzw. eingefrorenen Lösungen vorkommen.

Es wurde durch jede dieser Methoden bestrebt, die magnetischen Parameter möglichst genau zu bestimmen, indem man Temperatur, Lösungsmittel, Zähigkeits- und Substituenteffekte untersuchte, um eine Auflösung des Spektrums bis zu den theoretisch vorgesehenen Komponenten nachzuweisen, welche die Genauigkeit und Fülle der Auskunft, die durch Bestimmungen dieser Art erzielbar ist, grösstenteils bedingen [1, 2, 3, 4, 6, 7].

Anderseits sind verhältnismässig wenige Veröffentlichungen erschienen, die eine Übertragung der durch EPR gewonnenen Resultate auf die chemische Struktur behandeln. Ihre Zahl hat allerdings in letzter Zeit merklich zugenommenu.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine Gruppe von Cu(II)-Chelatverbindungen mit ähnlicher chemischer Struktur untersucht, um mit grösster Wahrscheinlichkeit die Unterschiede die in den EPR-Spektren oder in optischen Eigenschaften entstehen, den Unterschieden in der Struktur und Zusammensetzung dieser Substanzen zuschreiben zu können [9, 10, 12].

Die chemische Strukturformeln dieser Substanzen sind in Abb. 1—7 angegeben.

Die Untersuchung ergab die Bedingungen für die optimale Auflösung in Abhängigkeit von der Temperatur, dem Lösungsmittel und der Konzentration der entsprechenden Substanzen.

Es konnte ebenfalls ein bestimmter „Parallelismus" zwischen dem Verfahren an den diamagnetisch verdünnten eingefrorenen Lösungen und demjenigen mit diamagnetisch verdünnten Einkristallen in Pulverzustand beobachtet werden.

Abb. 8, 9. stellen das Spektrum der Substanz III (siehe Abb. 3) dar. Abb. 8 ist das Spektrum in diamagnetisch verdünnten Einkristallen (in Pulverzustand) nach H. P. Fritz und B. Golla [8].

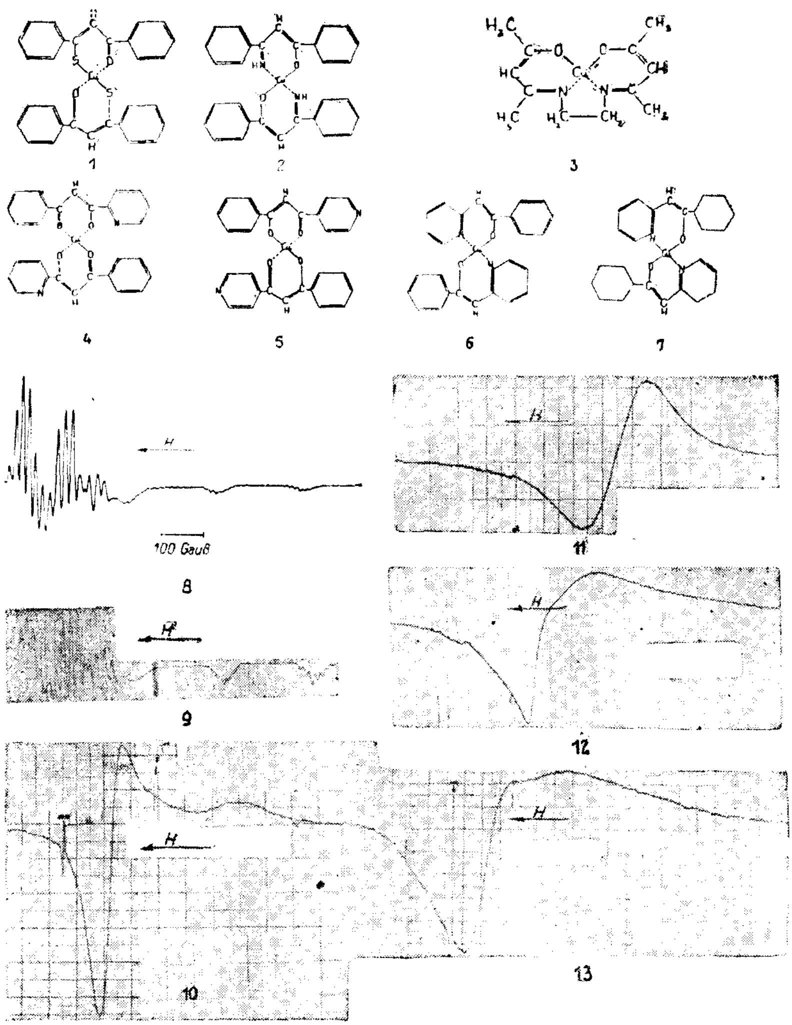


Abb. **1.** Bis-(Monothiodibenzoylmethanato)-Cu(II). (Fp. 154—155 °C). **2.** Bis-(Iminodibenzoyl-methanato)-Cu (II). (Fp. 221—223 °C). **3.** Bis-(Acetylaceton-äthylendiiminato)-Cu (II). (Fp. 143 °C). **4.** Bis-(Benzoylpikolinoylmethanato)-Cu (II). (Fp. 229—231 °C). **5.** Bis-(Isonikotinoylbenzoylmethanato)-Cu (II). (Fp. 242—244 °C). **6.** Bis-(α-pikolylphenylketonato)-Cu (II). (Fp. 164 °C). **7.** Bis-(α-pikolylcyclohexylketonato)-Cu (II). (Fp. 166—166,5 °C). **8.** Spektrum der Subst. Nr. 3 in magnetisch verdünntem Pulver-Zustand nach H. P. Fritz, B. Golla [8]. **9.** Substanz Nr. 3 in Chloroform 80% + Toluol 20%. Konz. 7,83.10^{-3} g/cm^3, Mod. 3 Gauss, t = 77 °K. **10.** Spektrum der Subst. Nr. 7 in Pulver-Zustand bei 77 °K. **11.** Spektrum der Subst. Nr. 1 in Benzol. Konz. 3,10^{-3} g/cm^3, t = −79 °C. **12.** Spektrum der Subst. Nr. 1 in Benzol. Konz. 3.10^{-3} g/cm^3, bei t = −50 °C. **13.** Spektrum der Subst. Nr. 4 in Pulver-Zustand bei 77 °K.

Dieser „Parallelismus" hängt sowohl von der Substanz, wie auch vom Lösungsmittel ab.

Es scheint gleichzeitig möglich Temperaturbedingungen festzustellen, in Abhängigkeit von der Substanz und vom Lösungsmittel, die zu einem „Parallelismus"

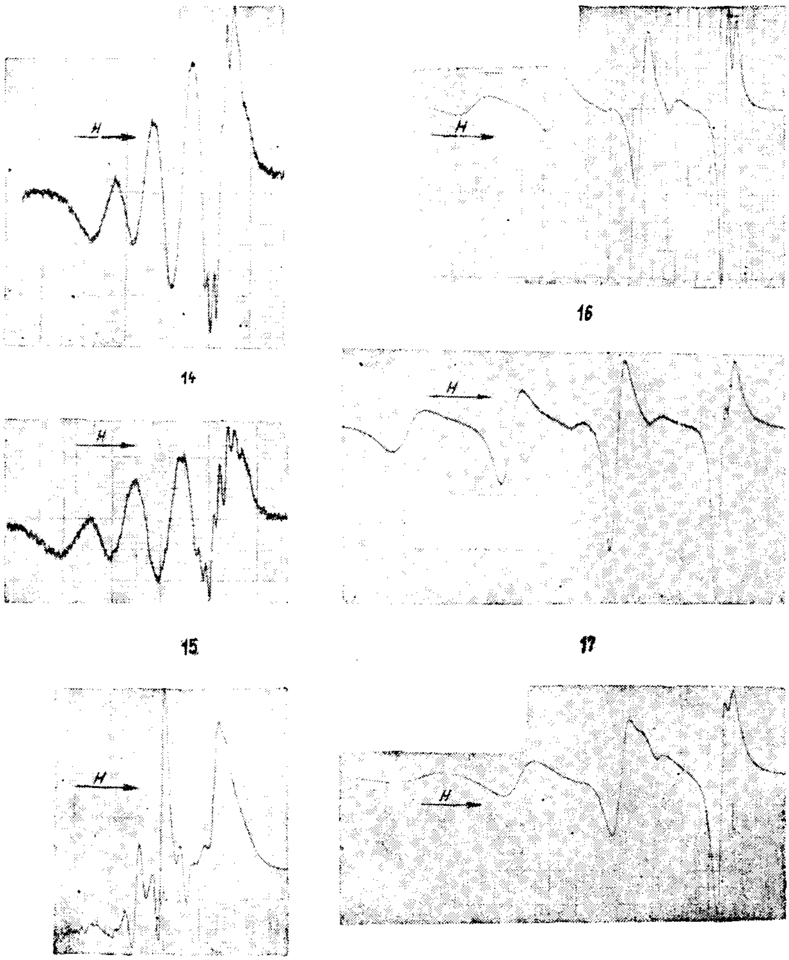
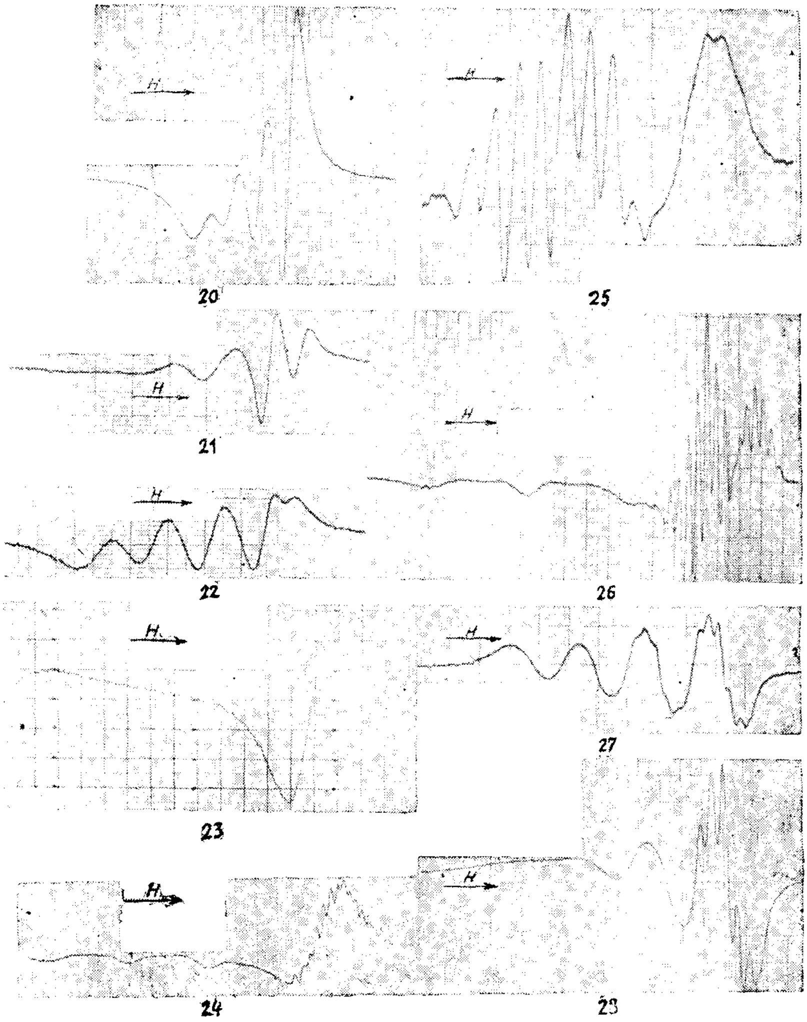


Abb. 14. Spektrum der Subst. Nr. 6 in Xylol. Konz. 1.10^{-3} g/cm^3, bei +25 °C. Mod. 3 Gauss. **15.** Spektrum der Subst. Nr. 7 in Xylol. Konz. 3.10^{-3} g/cm^3, bei t = +25 °C. Mod. 5 Gauss. **16–18.** Spektrum der Subst. Nr. 1 in Benzol. Konz. 3.10^{-3} g/cm^3, t = +19 °C, +84 °C, u. −16 °C. **19.** Spektrum der Subst. Nr. 4 in Xylol bei 77 °K. Konz. 10^{-3}/cm^3 Mod. 2 Gauss.

zwischen den Spektren des unverdünnten Pulvers und der eingefrorenen Lösung führen (Abb. 10, 11, 12, 13).

Man kann einen Vergleich zwischen Abb. 12 und 13 machen.

Die Substitution des Phenyl-Radikals in Substanz Nr. 6 durch Cyclohexyl (Substanz Nr. 7), hat als Folge eine Verschmälerung der Hyperfeinstrukturlinien, die zu einer besseren Auflösung der Ligandenhyperfeinstruktur führen (Abb. 14, 15).



A b b. **20.** Spektrum der Subst. Nr. 5 in Pyridin. Konz. $4{,}5.10^{-2}$ g/cm^3 t = +91 °C. Mod. 4 Gauss. **21—22.** Substanz Nr. 5 in Dimethylformamid 80% + Toluol Konz. $6{,}2.10^{-3}$. Mod. 8 Gauss, t = +28 °C, +166 °C, Mod. 9 Gauss. **23.** Substanz Nr. 4 in Xylol. Konz. 1.10^{-3} g/cm^3. Mod. 2 Gauss, t = +25 °C. **24.** Substanz Nr. 6 in Pyridin. Konz. $6{,}5.10^{-3}$ g/cm^3. Mod. 5 Gauss, t = 77 °K. **25.** Substanz Nr. 3. in Xylol. Konz. 3.10^{-3} g/cm^3. Mod. 7 Gauss, t = 77 °K. **26.** Substanz Nr. 2 in Dimethylformamid + Tetrachloridkohlenstoff, + Chloroform, + Toluol. Konz. $1{,}58.10^{-2}$ g/cm^3 t = 77 °K. **27.** Substanz Nr. 3 in Tetrachloridkohlenstoff 72%, + Äthylalkohol 28%. Konz. $1{,}10^{-3}$ g/cm^3, Mod. 5 G, t = +25 °C. **28.** Substanz Nr. 2 in Chloroform 50% + Tetrachloridkohlenstoff 50%. Konz. $1.76.10^{-3}$ g/cm^3. Mod. 2 Gauss. t = +25 °C.

Ausserdem entstehen Unterschiede zwischen den Formen der entsprechenden Absorptionslinien in Pulverzustand und zwischen den optischen Eigenschaften der Kristalle.

Im Falle der Substanz Nr. 1 in flüssiger Lösung, sowie bei niedrigen Temperaturen im Falle der Substanzen Nr. 1 und 4, ergaben sich zusätzliche Signale, die vermutlicherweise „verbotenen" Übergängen zuzuschreiben sind. Signale dieser Art wurden bisher bei Cu(II)-Chelatverbindungen in der Lösung noch nicht festgestellt (Abb. 16, 17, 18, 19).

Mit Hilfe der Ligandenhyperfeinstruktur konnten wir Unterschiede in der Metall-Ligandenbindung des Stickstoffkerns feststellen, in Abhängigkeit von der Lage des N-Atoms in Liganden (sterische Effekte). Die Substanzen Nr. 4 und 5 ergeben keine Ligandenhyperfeinstruktur (Abb. 20, 21, 22, 23).

Die Substitution der S(thio)- durch die N(imino)-Funktion hat eine Linienverbreiterung zur Folge (siehe Abb. 1, 2, 16, 18, 28).

Wir bemerken auch Unterschiede zwischen den optischen Eigenschaften und den Röntgenspektren beider Substanzen.

Es ist möglich auf Grund der EPR-Spektren eine Ähnlichkeit zwischen den zwei- und vierzähnigen Cu(II)-Chelatverbindungen festzustellen, wenn diese Substanzen in bestimmten Lösungsmitteln und bei Stickstofftemperatur gemessen werden (Abb. 25, 26, 27, 28).

In manchen Fällen ergab sich eine Ligandenhyperfeinstruktur, die eine Koordinationszahl von 5 oder 6 des Cu(II) aufweist. (Siehe Abb. 26, 24).

Das Verhalten in der Lösung der Substanzen Nr. 1 und Nr. 3 lässt einige Isotopie-Effekte in Erscheinung treten. (Siehe Abb. 15, 16, 17, 18, 21, 22, 29.)

Die Untersuchungen bei Stickstofftemperatur (77 °K) weisen die Existenz zweier Komplexe auf [8], die entweder „Cis-Trans"-Isomerie einerseits, oder Dimerzustände anderseits sein können.

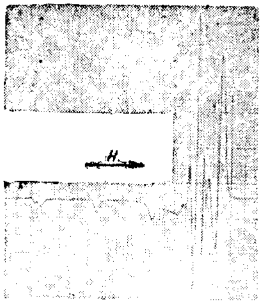
Die Temperaturabhängigkeitsuntersuchungen weisen einen Unterschied zwischen den Hyperfeininstrukturlinien, der Linienform, der Aufspaltungskonstante, der Linienbreite und Amplitude, ihrer Abhängigkeit von der Zähigkeit $\left(\frac{\eta}{T}\right)$ und der kernmagnetischen Quantenzahl auf.

Die Asymmetrie der Linien und die Gestalt der Spektren kann in manchen Fällen auf Grund der Rotationalspinwechselwirkungen erklärt werden. (Siehe Abb. 17, 20, 30, 31, 32, 33). [2]

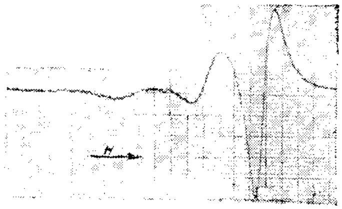
In Abb. 11, 12, 16, 17, 18, 32, 33 sind einige Spektren dargestellt, in denen die Hyperfeinstruktur, die Isotopenhyperfeinstruktur, die zusätzlichen Signale (Abb. 16, 18, 19, 29) und die Temperaturabhängigkeit im Falle der Substanz Nr. 1,4 sichtbar sind. Ein Vergleich zwischen Spektren von Abb. Nr. 33 u. 34 weist auf die Relaxationsabhängigkeit von der kernmagnetischen Quantenzahl, den verschiedenen Lösungsmitteln entsprechend hin.

Die EPR-Spektren wurden in einer Reihe von reinen Lösungsmitteln niedriger und hoher Zähigkeit, sowie in Solventgemischen bei Zimmertemperatur, Stickstofftemperatur, und in einigen Fällen in einem grösseren Temperaturbereich unter- und oberhalb der Zimmertemperatur aufgenommen. Die Substanzen, die mit dem Polarisationsmikroskop untersucht wurden, zeigen Struktureigenschaften, die mit den EPR-Ergebnissen übereinstimmen.

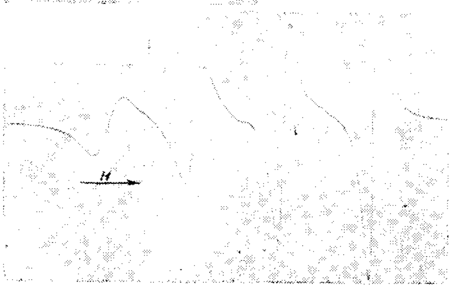
Die Messungen wurden im X-Band der JES-3 B und 3 B—Q Spektrometern mit 100 kHz Modulation durchgeführt.



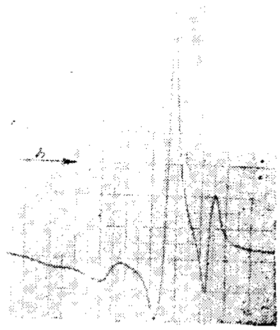
29



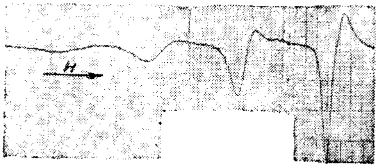
33



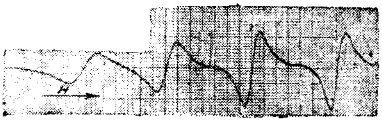
30



34



31



32

Abb. **29.** Substanz Nr. 1 in Xylol + Pyridin. Konz. 1.10^{-3} g/cm^3, Mod. 5 Gauss, t = 77 °K. **30—31.** Substanz Nr. 1 in Dimethylformamid. Konz. $1{,}7.10^{-2}$ g/cm^3, Mod. 4 Gauss, t = +105 °C u. +21 °C. **32.** Substanz Nr. 1 in Pyridin, Konz. $1{,}46.10^{-2}$ g/cm^3, Mod. 4 Gauss, t = +125 °C. **33.** Substanz Nr. 1 in Tetrachloridkohlenstoff 75% + 25% Chloroform. Konz. $5{,}65.10^{-3}$ g/cm^3, t = −75 °C. **34.** Substanz Nr. 1 in Benzol. Konz. $3{,}10^{-3}$ g/cm^3, t = −36 °C.

Das Magnetfeld wurde mit einem Autodynkernresonanzverfahren gemessen. In einigen Fällen wurde DPPH als Vergleichsprobe benutzt[1].

Die ausführlichen Resultate und die Interpretation der Spektren werden in späteren Veröffentlichungen erörtert.

(Eingegangen am 10. April 1967)

---

[1] Für die Unterstützung dieser Arbeit danke ich Prof. A. Lösche und der EPR-Gruppe, Dr. H. Schmidt vom Physikalischen Institut; Dr. E. Uhlemann, Dr. H. Hennig vom Chemischen Institut der Karl-Marx-Universität in Leipzig; Prof. I. Ursu und der Gruppe des Festkörperslabors der Babeş-Bolyai Universität in Cluj.

LITERATUR

1. Karl H. Hausser, Zeitschr. für Naturforsch., **14a**, 425 (1959).
2. Raymond Wilson and Daniel Kivelson, J. Chem. Phys., **44**, 4445 (1966), **44**, 4453 (1966), 1, **44**, 154 (1966).
3. Gersman H. R u. Swalen, J. D., J. Chem., **12**, 3221 (1962).
4. Mc. Garvey, B., J. Phys. Chem., **61**, 1232 (1957).
5. Michael M. Malley, J. Mol. Spectroscopy, **17**, 210 (1965).
6. C. H. Altschuler u. K. A. Waliew, Ž. Exp. i Teor. Fis., **35**, 947 (1958).
7. I. Riwkind, Ž. fis. Chim., **9**, 2099 (1961).
8. H. P. Fritz, B. Golla, H. J. Keller, Zeitschr. für Naturforsch., **21b**, Heft 2 (1966).
9. E. Uhlemann u. P. Fritsche, Zeitschr. für anorg. allgem. Chem., **327**, 79 (1964), **328**/ 180 (1964).
10. L. Wolf, H. Hennig, Z. allg. Chem., **329**, 301 (1964).
11. Robert Neiman, Daniel Kivelson, J. Chem. Phys., nr. 1, 156 (1961).
12. Combes A., Compt. rend. Acad. Sci., **108**, 1252 (1889).

REZONANŢA ELECTRONICĂ DE SPIN LA UNII COMPUŞI CHELATICI AI Cu(II) CU β-DICETONE

(*Comunicare preliminară*)

(Rezumat)

S-au studiat prin metoda RPE un grup de chelaţi ai Cu(II) cu β-dicetone. Măsurători Röntgen şi cristalo-optice au dus la rezultate concordante cu cele obţinute prin metoda RPE.

S-au determinat condiţiile optime de rezolvare a spectrelor în funcţie de solvenţi, concentraţie şi temperatură.

S-a pus în evidenţă structura hiperfină, hiperfină de liganzi extrahiperfină structura izotopică şi nişte semnale suplimentare care sînt atribuite unor tranziţii „interzise".

Dependenţa relaxării de temperatură şi nr. cuantic magnetic nuclear a fost studiată într-un interval larg de temperaturi pentru mai mulţi solvenţi şi substanţe.

S-a găsit o corespondenţă între metoda de cercetare RPE în pulbere de monocristale magnetic diluate şi măsurătorile în soluţii îngheţate. S-a pus de asemenea în evidenţă în anumite condiţii de temperatură un paralelism între măsurătorile RPE în pulbere magnetic nediluată şi măsurătorile efectuate la temperaturi joase în diferiţi solvenţi în funcţie de concentraţie.

Efecte de hidrogenare a nucleului benzenic, de substituire a funcţiei S cu N, indicaţii asupra coordinării suplimentare a Cu(II), „efecte sterice de liganzi", paralelism între chelaţii bidentaţi şi tetradentaţi etc., in sensul aplicării metodei RPE în chimie, au fost de asemenea urmărite şi studiate.

Dependenţa lărgimii liniei şi amplitudinilor de $\left(\frac{\eta}{T}\right)$ a fost urmărită şi în unele cazuri poate fi interpretată cu ajutorul interacţiunii spin rotaţional.

Spectrele au permis determinarea parametrilor magnetici.

Interpretarea detaliată a rezultatelor va urma în comunicări ulterioare.

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС НЕКОТОРЫХ ХЕЛАТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ Cu(II) с β-ДИКЕТОНАМИ

(Письмо в редакцию)

(Р е з ю м е)

Методом ЭПР изучена группа хелатов Cu(II) с β-дикетонами. Рентгеновские и кристаллооптические измерения привели к результатам, соответствующим с результатами, полученными методом ЭПР.

Определены оптимальные условия решения спектров в зависимости от растворителей, концентрации и температуры.

Автор выявил сверхтонкую, гиперсверхтонкую и изотопную структуру и дополнительные сигналы, приписываемые некоторым „запрещённым" переходам.

Зависимость релаксации от температуры и ядерного магнитного квантового числа была изучена в широком температурном интервале.

Установлено соответствие между методом исследования ЭПР в порошке магнитно разбавленных монокристаллов и измерениями в замороженных растворах. Выявлена также в определённых температурных условиях параллельность между измерениями ЭПР в магнито концентрированном порошке и измерениями, произведёнными при низких температурах в различных растворителях в зависимости от концентрации.

Изучены также эффекты гидрогенизации бензолового кольца, замещения функции S функцией N, получены сведения о дополнительной координации Cu(II), о „стерических лигандных эффектах", о параллельности между бидентатными и тетрадентатными хелатами и т.п., в смысле применения метода ЭПР в химии.

Зависимость ширины линии и амплитуд $\left(\frac{\eta}{T}\right)$ была также прослежена и в некоторых случаях её можно интерпретировать с помощью спин-ротационального взаимодействия.

Спектры позволили определить магнитные параметры.

Подробная интерпретация результатов будет дана в последующих сообщениях.

RECENZII

J o a c h i m L a m b e k, **Lectures on Rings and Modules**. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto-London, 1966. VIII + 184 pp.

The stated intent of the author is an introduction to the theory of associative rings and to the homological algebra. From the author's introduction: "The introductory Chapter One attempts to cover enough of the fundamental concepts of algebra to make these notes self-contained. Chapter Two contains selected results in the case of Boolean and other commutative rings, even if some of these results are treated in greater generality later. Chapter Three deals with the classical structure theory of associative rings, anything that can be done conveniently without the concept of "injectivity". In Chapter Four, injective *modules and rings of quotients are studied in some* detail. Chapter Five offers an introduction to homological algebra, culminating in a new technique for chasing squares." A more detailed idea of the contents of the book is given by the chapter titles and principal topics in each chapter. I. Fundamental concepts of algebra. 1. Rings and related algebraic systems; 2. Subrings, homomorphisms, ideals; 3. Modules, direct products, and direct sums; Classical isomorphism theorems. II. Selected topics on commutative rings. 1. Prime ideals in commutative rings; 2. Prime ideals in special commutative rings; 3. The complete ring of quotients of a commutative semiprime ring; 4. Rings of quotients of commutative semiprime rings; 5. Prime ideal spaces. III. Classical Theory of associative rings. 1. Primitive rings; 2. Radicals; 3. Completely reducible modules; 4. Completely reducible rings; 5. Artinian and Noetherian rings; 6. On lifting idempotents; 7. Local and semiperfect rings. IV. Injectivity and related concepts. 1. Projective modules; 2. Injective modules; 3. The complete ring of quotients; 4. Rings of endomorphisms of injective modules; 5. Regular rings of quotients; 6. Classical rings of quotients; 7. The Faith-Utumi Theorem. V. Introduction to homological algebra. 1. Tensor products of modules; 2. Hom and $\otimes$ as functors; 3. Exact sequences; 4. Flat modules; Torsion and extension products. The book also gives a brief exposition of some recent work by Passmann and Connell on the group ring (Appendix 2) and includes an appendix by Connell himself (Appendix 3). This was published for the first time in book form. The same observation refers also to the concept of *the complete ring of quotients* of an arbitrary associative ring, which has emerged from the work by Johnson and Utumi. That has been applied to Goldie's Theorem on Noetherian prime rings. Each paragraph contains many exercices which contribute to the understanding of the theory and add to the theory itself. The book contains also a list of 182 references. The proofs are rigorous and elegant. The style is clear. The presentation is compact. Therefore the reading of the above book requires a great attention. Very few minor errors were encountered, all of a typographical nature. Although the author designes this book primarily for graduate students, it may be utilized in the research, too. The book has many special methodic and scientific qualities.

I. GY. MAURER

CRONICĂ

DEZVOLTAREA ÎN SERIE ÎNTREAGĂ A INVERSEI UNUI POLINOM

Rezumatul disertației susținute la 10 mai 1966, la Universitatea „Babeș—Bolyai" din Cluj, de NICOLAE V. GHIRCOIAȘIU pentru obținerea titlului de doctor în matematici

Se consideră dezvoltarea în serie după puterile variabilei x a inversei unui polinom $P(x)$ de gradul n, cu coeficienți reali

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1 - a_1x)(1 - a_2x) \ldots (1 - a_nx)} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_rx^r + \ldots \tag{1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt inversele rădăcinilor polinomului $P(x)$, iar p_r este funcția simetrică și omogenă de gradul r

$$p_r = \sum a_1^{i_1}a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n},$$

suma extinzîndu-se la toate valorile întregi nenegative ale indicilor $i_1, i_2, \ldots, i_n$, așa ca $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = r$.

Problemele fundamentale din lucrare sînt de a găsi condițiile ce trebuiesc impuse numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru ca toți coeficienții p_r să fie pozitivi începînd cu un anumit rang.

CONDIȚIA N. *Condiția necesară pentru ca seria de puteri (1) să aibă coeficienții nenegativi, este ca una dintre rădăcinile cu cel mai mic modul ale polinomului $P(x)$ să fie pozitivă.*

Rezultatele mai importante se obțin cu ajutorul unui șir de teoreme, dintre care amintim

TEOREMA A. *Dacă rădăcinile polinomului $P(x)$ sînt toate reale și Condiția N este îndeplinită, din dezvoltarea (1) se poate scădea un polinom astfel încît seria rămasă să aibă numai coeficienți nenegativi. Se dă o metodă pentru determinarea gradului polinomului care se scade.*

TEOREMA B. *Dacă pentru polinomul $P(x)$ este îndeplinită Condiția N, din dezvoltarea (1) se poate scădea un polinom, astfel încît seria rămasă să aibă numai coeficienți nenegativi, dacă inversele rădăcinilor complexe ale polinomului $P(x)$ se găsesc într-o vecinătate a originii.*

În ultima parte a lucrării se dau aplicații referitoare la convergența seriilor cu termenii dați de o relație de recurență liniară, rezolvîndu-se și problema nr. 4698 propusă în „Gazeta matematică" București (1935) de către acad. T. Popoviciu, de la care a pornit lucrarea. Se generalizează de asemenea unele rezultate referitoare la rădăcinile secțiunilor seriei (1), rezultate obținute de Laguerre, M. Ghermănescu, N. Obrechkoff, T. Popoviciu și L. Tchakaloff.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:
Acad. prof. GEORGE CĂLUGĂREANU
REFERENȚI:
— Prof. dr. ELENA MURGULESCU (Institutul politehnic București).
— Prof. dr. docent DUMITRU V. IONESCU (Universitatea din Cluj).
— Prof. dr. docent ADOLF HAIMOVICI (Universitatea din Iași).

Şedinţe de comunicări ale Facultăţilor de Matematică-mecanică şi Fizică în 1966.

11 ianuarie

P. Mocanu, Despre stelaritatea şi convexitatea funcţiilor olomorfe.

I. Stan, I. Pop, Mişcarea unui fluid vîscos în prezenţa unui cîmp magnetic.

23 februarie

Al. Bódi, O nouă metodă de măsurare a constantei dielectrice în ghizi de microunde.

M. Cristea, I. Stan, I. Pop, Influenţa variaţiei cîmpului magnetic asupra undelor Alfren.

M. Popescu, Asupra manualului de fizică al lui Emanoil Bacaloglu.

2 martie

I. Pop, I. Cosma, Antiferomagnetismul aliajelor de Ni—Cu.

A. Moţiu, L. Stănescu, L. Maxim, Studiul structural al sistemului de $BeO-Cr_2O_3$.

G. Cristea, Compuşi semiconductori din grupa $A_{III}B_V$.

9 martie

F. Constantinescu, V. Militaru, Producţia de entropie în fenomenul de polarizare dinamică a electronilor.

Cristea G., Semiconductori de grupa $A_{III}B_V$ (Preparare sub formă de monocristale).

11 martie

Gh. Pic, Despre o teoremă a lui Vl. Dlab.

I. Munteanu, Aplicaţii complet compacte între spaţii uniforme.

16 martie

I. Ursu, I. Barbur, Studiul prin rezonanţă electronică de spin a defectelor produse prin iradiere gama în compuşi cu azot şi sulf.

P. Cioară, Lucrul de extracţie. Informare.

23 martie

E. Magyari, I. Laufer, O problemă referitoare la teoria cîmpului.

G. Cristea, Semiconductori din grupa $A_{III}B_V$. Preparare sub formă de monocristale.

30 martie

F. Puskás, G. Honca, O instalaţie pentru măsurarea rezistenţei electrice şi a constantei Hall la semiconductori, în regim de impulsuri.

8 aprilie

F. Radó, Cîteva probleme din teoria ţesuturilor.

C. Kalik, P. Szilágyi, Probleme Dirichlet de tip Noether.

I. Kolumbán, Despre cîteva probleme de aproximaţie optimală.

13 aprilie

V. Mercea, Consfătuirea internaţională de spectrometrie de masă (Viena, 28. III—2. IV. 1966).

20 aprilie

V. Cristea, Creşterea monocristalelor de rutil aliat cu niobiu şi studiul proprietăţilor lor electrice (Expunere. Teza de doctorat susţinută la Universitatea din Leningrad în 1965).

4 mai

Al. Bódi, R. Baican, Măsurarea constantei dielectrice complexe şi a susceptibilităţii magnetice complexe în cavităţi de rezonanţă dreptunghiulare la frecvenţe foarte înalte.

V. Mihăilescu, G. Cristea, Al. Nicula, Influenţa cîmpului cristalin asupra despicării nivelelor energetice a ionului de V^{3+}.

A. Cişman (Universitatea Timişoara), Fenomene de stratificare spontană la pături subţiri depuse electrolitic.

6 mai

A. Lösche (Universitatea „Karl Marx" din Leipzig), Paramagnetic Investigations of Dopped Crystals.

13 mai

D. Stancu, Limbaje de programare automată.

M. Rădulescu, Proprietăţi ale primitivei.

M. Jalobeanu, Asupra ordonării parţiale a grupurilor.

20 mai

C. A. Hogarth (Colegiul Brunel-Londra), Dezvoltarea învăţămîntului ştiinţelor fizice la Colegiul Brunel.

1 iunie

I. Ursu, Unele aspecte ale cercetărilor de fizică din R. S. F. Iugoslavia.

I. Barbur, Lucrările celui de al II-lea Simpozion de chimia radiaţiilor, Tihany (Ungaria), 1966.

F. Kelemen, E. Cruceanu (I.F.B.), *A. Néda, D. Niculescu* (I.F.B.), Conductivitatea termică şi electrică a CdTe şi a unor soluţii de CdTe, CdS, CaTe, CdSe.

8 iunie

I. Pop, G. Honca, Efectul Hall în aliaje de Ni-Sn.

R. Baican, C. Bálintffi, A. Bódi, Măsurarea unor parametri ai feritelor de tipul $a(Fe_2O_3) + b(Cr_2O_3) + X_1(NiO) + X_2(ZnO)$ în banda X.

10 iunie

G. Călugăreanu, Asupra separatoarelor pe suprafeţe închise.

I. A. Rus, Asupra problemei lui Dirichlet.

21 iulie

D. Demco, Deplasarea de frecvenţă în aproximaţia Born cea mai joasă.

D. Demco, F. Constantinescu, Relaţii de dispersie timpi de relaxare, deplasări de frecvenţă.

L. Constantinescu (I.F.A.-Cluj), Intensitatea liniilor tranziţiilor interzise.

11 noiembrie

G. Călugăreanu, Congresul Internaţional al Matematicienilor de la Moscova.

Gh. Chiş, A. Pál, T. Oproiu, Variaţia elementelor orbitale ale sateliţilor artificiali.

I. Kolumbán, Despre o teoremă a lui I. Singer.

9 decembrie
COMEMORAREA PROFESORILOR N. ABRAMESCU ȘI GH. BRATU. Au luat cuvîntul acad. prof. *G. Călugăreanu*, acad. prof. *C. Iacob*, prof. *D. V. Ionescu*, prof. *Gh. Chiș*.

I. Gy. Maurer, Despre o afirmație a lui D. van Dantzig.

I. Pop, Asupra stratului limită nestaționar din jurul unui corp.

Participări la manifestări științifice din străinătate în 1966. (Facultatea de matematică-mecanică).

COLOCVIUL DE ECUAȚII FUNCȚIONALE DIN MISKOLC (R. P. UNGARĂ), 23–25 MAI.

Prof. D. V. Ionescu, Sur quelques extensions de l'équation fonctionnelle de D. Pompeiu.

Lect. *I. Gy. Maurer* – asist. *M. Szilágyi*, Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen.

CONGRESUL INTERNAȚIONAL AL MATEMATICIENILOR DE LA MOSCOVA, 16–26 AUGUST.

Acad. prof. *G. Călugăreanu*, Sur les courbes fermées tracées sur une surface fermée orientable.

Acad. prof. *T. Popoviciu*, Conservation de l'allure des fonctions par interpolation.

Conf. *P. Mocanu*, Sur les propriétés d'étoilement de la représentation conforme.

Conf. *E. Popovici*, Sur l'étude comparative des ensembles interpolateurs.

Lect. *A. Ney*, Un processus infini généralisé et ses applications au calcul numérique.

COLOCVIUL EQUADIFF-2, BRATISLAVA, 1–7 SEPTEMBRIE.

Acad. prof. *T. Popoviciu*, Remarques sur un critère de comparaison des équations différentielles ordinaires au point de vue de leurs propriétés interpolatoires.

COLOCVIUL DE TEORIA FUNCȚIILOR ȘI TOPOLOGIE, CRACOVIA, SEPTEMBRIE.

Conf. *P. Mocanu*, Sur les fonctions univalentes.

SIMPOZIONUL INTERNAȚIONAL ÎN PROBLEMA „CERCETĂRI ȘTIINȚIFICE CU AJUTORUL OBSERVĂRII SATELIȚILOR ARTIFICIALI AI PĂMÎNTULUI", POTSDAM, 21–28 OCTOMBRIE.

Prof. *Gh. Chiș*, conf. *A. Pál*, cercet. *T. Oproiu*, Opredelenie nekotorîh elementov orbiti sputnika Kosmos-44 iz nabliudenii, provedenîh v programe „Interobs".

*

Prof. *D. V. Ionescu* a ținut următoarele conferințe în R.S. Cehoslovacă, mai 1966:

— Reprezentarea diferențelor divizate prin integrale definite (19 mai, Universitatea din Praga).

— Resturile formulei de cuadratură a lui Gauss și P. Turán (20 mai, Universitatea din Brno).

Conf. *C. Kalik* a fost în U.R.S.S., pentru documentare, între 15 septembrie–15 noiembrie.

Asist. *I. Purdea* a fost la Universitatea din Moscova, pentru specializare, între 22 octombrie–22 decembrie.

Asist. *I. A. Rus* a fost trimis pentru specializare la Universitatea din Lund (Suedia), pe timp de 8 luni (octombrie 1966–iunie 1967).

Participări la manifestări științifice din țară.

SESIUNEA DE COMUNICĂRI ȘTIINȚIFICE ÎNCHINATĂ CELEI DE A 45-A ANIVERSĂRI A P.C.R., CLUJ, 6 MAI.

G. Călugăreanu, Asupra unor transformări în spații metrice.

D. V. Ionescu, Aplicarea unor formule de cubatură la calculul cu aproximație dată a unei integrale duble.

P. Mocanu, Asupra proprietăților de convexitate și stelaritate a transformărilor conforme.

F. Radó, Despre o schemă generală de calcul privind o clasă de problemă de optim.

A DOUA SESIUNE ȘTIINȚIFICĂ A TINERETULUI, BUCUREȘTI, 20–22 MAI.

I. Pop, Scurgerea nestaționară din jurul unui disc rotitor în prezența unui cîmp magnetic.

I. Purdea, Generalizarea produsului a două relații binare.

SIMPOZIONUL DE CIBERNETICĂ ORGANIZAT DE FILIALA DIN CLUJ A S.Ș.M. LA TIMIȘOARA, MAI.

E. Popoviciu, Aplicațiile matematicii în medicină.

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DE 3 ANI DIN ORADEA, 14–15 MAI.

A. Ney, Despre serii în spații ordonate.

I. Marușciac, Infrapolinoame și legătura lor cu derivata unui polinom.

AL III-LEA CONGRES INTERBALCANIC AL MATEMATICIENILOR, BUCUREȘTI, 12–19 SEPTEMBRIE.

G. Călugăreanu, Sur les générateurs du groupe d'un noeud.

T. Popoviciu, Une formule de moyenne de N. Ciorănescu et certaines généralisations de la formule de Simpson.

Gh. Chiș, Aspecte ale învățămîntului astronomiei în liceu.

Gh. Pic, Sur la notion de complement dans les réticules (lattices) distributifs.

C. Kalik–P. Szilágyi, Despre problema lui Dirichlet pentru sisteme tare eliptice.

P. Mocanu, Sur la géométrie de la représentation conforme.

E. Popoviciu, Observations sur l'approximation des fonctions continues.

F. Radó, B. Orbán, Interprétation géométrique de quelques propriétés extrémales et application à l'étude de l'erreur globale des nomogrammes à points alignés.

F. Radó, Le demi-anneau des endomorphismes d'un semigroupe et son application à la résolution d'un problème d'ordonnancement généralisé.

A. Turcu, T. Petrilă, Sur les vibrations dans les châteaux d'équilibre.

P. Enghiş, P. Sandovici, M. Ţarină, Sur le groupe des mouvements des espaces V_{2N} qui admet N champs de vecteurs isotopes parallèles.

M. Frenkel, Contribuţii la studiul unor polinoame minimizante.

I. Maruşciac, Infrapolinomî i ekstremalnîe reşenia differentialnîh uravnenîi.

I. Gy. Maurer, I. Virág, Sur le théorème de Cayley concernant les groupes finis.

I. Gy. Maurer, M. Szilágyi, Sur quelques topologies définies sur l'ensemble des applications univoques d'un ensemble dans un groupe d'opérateurs.

I. Munteanu, Sur la convergence quasi-uniforme.

A. Ney, Sur la rapidité de convergence de quelques compléments concernant la théorie classique des séries.

M. Rădulescu, Ob odnoi obobşenii ponatie integralî.

E. Schechter, Convergence Considerations for a Second Order Method of Approximate Solution of Parabolic Equations.

M. Ţarină, Espaces A_n sous-projectifs à groupe maximum de mouvements.

I. Kolumbán, Despre o problemă de aproximaţie optimală.

Gr. Moldovan, Asupra aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoamele lui Bernstein.

P. Pavel, Asupra unei formule de cuadratură de tip Turán.

I. Pop, Asupra stratului limită nestaţionar din apropierea unui disc rotitor.

M. Schechter, Relations de préordre.

SESIUNEA GENERALĂ ŞTIINŢIFICĂ A ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA CU OCAZIA CENTENARULUI ACADEMIEI, BUCUREŞTI, 21–24 SEPTEMBRIE.

T. Popoviciu, Asupra unor probleme de analiză numerică.

E. Popoviciu, Mulţimi de funcţii care au o proprietate de interpolare.

COLOCVIUL „MODELE ŞI METODE MATEMATICE APLICABILE ÎN PRACTICĂ", BRAŞOV, 23–26 SEPTEMBRIE.

D. V. Ionescu, Metode matematice noi de integrare a ecuaţiilor diferenţiale de tip *Adams*

F. Radó, O generalizare a problemelor de ordonanţare.

E. Schechter, Metode explicite şi implicite pentru integrarea numerică a ecuaţiilor de tip parabolic.

Gh. Micula, O formulă de cvadratură cu cinci noduri cu gradul de exactitate 5.

COLOCVIUL „APLICAŢII ALE TEORIEI FUNCŢIILOR COMPLEXE ÎN MECANICA MEDIILOR CONTINUE", SINAIA, 6–9 OCTOMBRIE.

I. Pop, Asupra stratului limită periodic tridimensional.

SEMINARUL „METODE MATEMATICE ÎN ORGANIZAREA ŞTIINŢIFICĂ A PRODUCŢIEI", BUCUREŞTI, 14–17 NOIEMBRIE.

F. Radó, L. Németi, Programarea în timp a fabricaţiei.

Vizite.

Facultatea de Matematică-mecanică a fost vizitată în anul 1966 de următorii oameni de ştiinţă din străinătate.

3 iunie

Conf. dr. *András Kósa* (Budapesta).

5–8 iunie

Conf. dr. *Sándor Gacsályi* (Debreţin).

Conf. dr. *Edit Lánczy* (Budapesta).

17–19 iunie

Prof. *I. D. Iongolovici* (Leningrad).

Dr. *V. V. Lavdovski* (Observatorul astronomic Pulkovo).

Dr. *V. M. Sobolev* (Observatorul astronomic Pulkovo).

14 octombrie

Prof. dr. *Iosif Kleczec* (Praga).

19 octombrie

Prof. dr. *Ákos Császár* (Budapesta).

22–26 decembrie

Prof. dr. *M. Altmann* (Varşovia).

Cerc. dr. *I. Plonka* (Wroclaw).

Asist. *S. Fajtlowicz* (Wroclaw).

Întreprinderea Poligrafică Cluj 462/1967

43875

Abonament anual: 20 lei seria, 160 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Preţul 10 lei