STUDIA UNIV. "BABEŞ-BOLYAI", MATHEMATICA, Volume XLIII, Number 4, December 1998

SUR LES OSCILLATIONS ENTRETENUES PAAR UNE FORCE PRESQUE PÉRIODIQUE DANS LE SENS DE BOHR

ADRIAN MUNTEAN AND TEODOR S. GROŞAN

Abstract. Dans cet article nous allons présenter le phénomène physique des oscillations entretenues par une fonction prériodique et nous allons insister sur une modélation plus fidèle des oscillations par les fonctions presque périodiques dans le sens de H. Bohr [3,6]. Ensuite, nous allons pérturber la force extérieure jusqu'àune force presque périodique et nous étudierons sur un cas particulier, àl'aide d'un algorithme de Fox Goodwin, de divers évaluations numériques de la solution de l'équation d'état [2,4].

1. Oscillations entretenues

Souvent, dans l'étude des oscillations harmoniques, on ignore l'influence de la force de frottement, mais si l'on tient compte de l'influence du milieu, l'importance de la fonction de frottement augumente en déterminant toutefois un amortissement du mouvement oscillatoire. Le sens de cette force s'oppose au sens de la vitesse du point materiel et, en plusieurs cas, elle est proportionelle à celle-ci: $F_f = -\gamma v$, où γ est un réel positif nommé coefficent d'amortissement.

Dans plusieurs problèmes pratiques nous sentons le besoin d'anéantir l'influence de la force de frottement pour obtenir des variations controlables des oscillations, nous désirons donc d'entretenir les oscillations. Pour réaliser cette chose nous devons imprimer à l'oscillateur une énergie de l'extérieur [2], [4], [7].

2. *Le modèle physique*

2.1. *La première approximation*

On suppose que notre système est soumis à l'action des trois forces: la force élastique $F_e = -kx$, où k est la constante d'élasticité, la force de frottement $F_f = \gamma v$

et une force parallèle à ox, dont l'intensité est une fonction périodique de temps

$$F : [0, +\infty[\to R, \quad \text{décrite de} \quad F(t) = F_0 \sin \omega t, \quad F_0, \omega \in R.$$

L'équation de mouvement prend la forme suivante:

$$mx'' + \gamma x' + kx = F_0 \sin \omega t$$

où bien,

$$x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \tag{1}$$

où $\delta = \delta(\gamma) > 0$, m>0 et ω_0, $\omega \in$ R sont les pulsations du mode de travail et de la force d'entretien. Si on regarde la relation (1) on observe facillement qu'une solution de l'équation linéaire homogène est

$$x_1(t) = A_0 \exp(-\delta t) \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2 t} + \varphi_0), \quad \text{où} \quad A, \varphi_0 \in R$$

et une solution particulière pour la même équation (1) a la forme:

$$x_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{où } A \text{ et } \varphi \text{ sont des réels inconnus.}$$

Le mouvement décrit par la solution (2) de l'équation (1) est en régime stationaire si les oscillations du système ont lieu à une fréquence égale à celle de la force d'entretien est qui est bien differente de la fréquence propre.

Les réels A et φ on les déterminent en remplaçant la rélation (2) dans l'équation (1) de la façon suivante:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + 2\delta\omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \tag{2}$$

En développant sin(ωt+φ) et cos(ωt+φ) nous obtenons, par une simple identification des coefficents, le système:

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\delta\omega A \cos \varphi = 0 \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\delta\omega A \sin \varphi = \frac{F_0}{m} \end{cases} \tag{3}$$

La résolution du système (4) nous montre que:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2}} \text{ et } \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \text{ quand } \omega^2 \neq \omega_0^2.$$

En général, les oscillations ne sont pas en phase avec la force de l'entretien, la valeur de l'amplitude A este une fonction de la pulsation ω de la force d'entretien, l'amplitude éxtrème A_{max} étant obtenue quand

$$\frac{dA}{d\omega}(\omega) = 0 \text{ et } \frac{d^2A}{d\omega^2}(\omega) < 0.$$

De cette manière nous avons obtenu maintenant une pulsation $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} > 0$ pour laquelle l'amplitude du mouvement prend la valeur maxime. Dans ce cas ω_r s'appelle pulsation de résonance.

$$A_{max} = A(\omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\omega_r}.$$

2.2. *Les fonctions presque périodiques dans le sens de Bohr*

Un sousensemble $S \subseteq R$ est relatif dense s'il existe un numeró positif l, de manière que [a,a+l]$\cap$S$\neq\emptyset$ pour tous les a$\in$R.

Soit f: R$\rightarrow$R une fonction bornée, et soit ε >0 fixé arbitrairement. Nous définissons l'ensemble

$$T(f,\varepsilon) = \{\tau \in R : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ pour tous les } t \in R\}.$$

Une fonction f: R$\rightarrow$R est presque périodique dans le sens de Bohr si pour tout ε >0, l'ensemble T(f,ε) est R-relatif dense.
On note cela par f$\in$AP(R).

Intuitivement, on remarque que les fonctions presque périodiques ne s'éloignent trop des fonctions périodiques.

2.2.1. *Théorème.* Soit f: R$\rightarrow$R une fonction. Les suivantes proprietés ont toujours lieu:

a) Si f$\in$AP(R), alors f est uniformément continue sur R;

b) Si f$\in$AP(R), g$\in$AP(R), alors nous avons f+g$\in$AP(R) et f·g$\in$AP(R);

c) Si f$\in$AP(R) et si f' est définie sur la doite réele, alors nous avons f'$\in$AP(R) si et seulement si f' est uniformèment continue.

La démonstration de cette théorème ainsi que la théorie de ces fonctions, se trouvent dans le travail [3].

2.3. *La deuxième approximation*

Nous nous trouvons maintenant dans la même situation d'un système oscillatoire harmonique mais cette fois dans un milieu à frottement. Cette fois-ci la force éxterieure ne sera plus d'une intensité périodique de temps, elle sera d'une intensité presque périodique dans le sens de Bohr, phénomène beaucoup plus approché de la réalité comparé à *la stricte périodicité pratiquement inéxistente.*

Soit donc la fonction F: $[0,+\infty] \to \mathrm{R}$ définie par $F(t) = F_0(t)\cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathrm{R}$ et $F_0 \in AP(R)$.

Avec le support de la théorème 2.2.1. on déduit que $F \in \mathrm{AP(R)}$, l'équation (1) devenant cette fois

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = F(t), \text{ pour } x \in R^R \text{ et } t \in [0, +\infty[.$$

Nous comptons sur l'aide des moyens de l'analyse numérique pour la résolution de cette dernière équation.

3. *La méthode de Fox Goodwin*

Fox Goodwin est une méthode spécialisée dans la résolution des équations differentielles linéaires de la forme suivante:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \text{ où } x \in [a, b]$$

Pour formuler le problème de Cauchy, nous formulons les conditions initiales

$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y'_0.$$

L' algorithme va calculer les valeurs de y en differents noeuds. Nous nous fixerons sur les n+1 noeuds construits de la manière:

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + kh, \text{ quand } k \in \{0, \ldots, n\} \text{ et } h = \frac{b-a}{n},\ n > 0.$$

Pour un k fixé, on note $\bar{y}_k, a_k, b_k, c_k$ les valeurs de y, a, b et c, calculés dans le noeud x_k.

L'algorithme est:

$$\bar{y}_{k+2} = \left(1 + \frac{h}{2}a_{k+1}\right)^{-1}\left[-\left(1 + \frac{h}{2}a_{k+1}\right)\bar{y}_k + (2 - h^2 b_{k+1})\bar{y}_{k+1} - h^2 c_{k+1}\right],$$

dont l'erreur de la méthode est:

$$\eta_{k+2} \cong \frac{1}{12} h^4 y^{(4)}(x_{k+1}), \text{ où } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

On observe que pour le bon fonctionnement de l'algorithme nous avons besoin de deux valeurs de départ $\bar{y}_0$ et $\bar{y}_1$. La valeur $\bar{y}_0 = y(a) = y_0$ nous l'avons et la valeur $\bar{y}_1$ se calcule en dévéloppant en série de Taylor [5].

4. *Un exemple numèrique*

Nous nous fixons maintenant sur le suivant problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 0.5x' + 10x = (\cos 314.16t + \cos 17.72t)\cos 314.16t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}, \text{ où } t \in [0, 10]. \tag{4}$$

C'est bien claire que la fonction $F_0(t) = \cos 314.16t + \cos 17.72t$ est presque périodique dans le sens de H. Bohr et F_0 n'est pas périodique, chose qui souligne une fois de plus le fait que l'éspace de fonctions périodiques n'est pas un éspace dans le sens de Banach. Le théorème 2.2.1.b) justifie que $F_0 \in AP(R)$. Pour montrer que F_0 n'est pas périodique nous reprenons la formule générale

$$F_0(t) = \cos \omega t + \cos \sqrt{\omega} t, \text{ où } t \in [0, +\infty[.$$

Supposons que F_0 soit périodique, donc il existe $T > 0$ avec la proprieté

$$F_0(t + T) = F_0(t), \text{ pour } t \geq 0. \tag{5}$$

En posons t=0 dans la relation (6) nous obtenons $\cos \omega T + \cos \sqrt{2}\omega T = 2$, et nous avons

$$\begin{cases} \cos \omega T = 1 \Rightarrow T = \frac{2n\pi}{\omega}, n \in N \\ \cos \sqrt{2}\omega T = 1 \Rightarrow \sqrt{2} T = \frac{2m\pi}{\omega}, m \in N \end{cases}$$

d'oùon remarque que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ce qui est absurde. Donc notre supposition est fausse. Il résulte que $F_0(t) \cos \omega t \in AP(R)$ et aussi la fonction

$$F(t) = (\cos 314.16t + \cos 17.72t) cos 314.16t \in AP(R), \text{ pour } t \in [0, 3].$$

Ce résultat peut etre facilement généralisé en prenant a la place de F une somme finie ou infinie des fonctions presque périodiques dans le sens de Bohr, en tenant compte de la structure d'éspace vectoriel topologique de AP(R) .

En appliquant la méthode de Fox Goodwin nous obtenons les suivantes evaluations pour la solution presque périodique du problème de Cauchy (5). On a:

Tableau de variation de l'oscillation x					
nr. crt.	t	$x(t)$	*nr. crt.*	t	$x(t)$
0	0.0	0	15	1.5	1.72321463
1	0.1	-1.22521782	16	1.6	1.19096839
2	0.2	-2.22468138	17	1.7	0.55492908
3	0.3	-3.88867235	18	1.8	-0.11387726
4	0.4	-3.17627549	19	1.9	-0.739344
5	0.5	-3.08133364	20	2	-1.23563397
6	0.6	-2.62782693	21	2.1	-1.55284929
7	0.7	-1.90001404	22	2.2	-1.68048322
8	0.8	-1.01691794	23	2.3	-1.61115265
9	0.9	-0.08499254	24	2.4	-1.35509455
10	1.0	0.79002186	25	2.5	-0.96647346
11	1.1	1.49523771	26	2.6	-0.50920916
12	1.2	1.95475125	27	2.7	-0.0287871
13	1.3	2.14632511	28	2.8	0.41838172
14	1.4	2.06395769	29	2.9	0.76669407

Nous remarquons dans le tableau antérieur , que l'oscillation x(t) est la petite pérturbation d'une fonction périodique, mais qui est entretenue tout de même dans un interval temporel bien détérminé.

Les valeurs de ce tableau ont été obtenues à l'aide d'un programme en C++ dont l'erreur de méthode est celle précisée auparavent . Le programme va aussi pour d'autres fonctions F(t). Pour le même probleme on peut utiliser aussi la méthode d'Adams-Störmer on obtenant résultats semblables avec une erreur peu differente de la notre.

On regardant les donées obtenues on remarque un aplatissement de l'oscillation, à cause de la force de friction [5]. Cet aplatissement est assez fort dans des milieux fluides compressibles et il est fort brusque dans des millieux fluides incompressibles. Le modele mathématique pour l'entretien des oscillations presque périodiques est identique a celui qui étudie les phénomenes de résonance et de battements dans les circuits RLC, plus exactement, l'étude de regime tranzitoire se fait d'habitude avec un modele mathématique qui introduit les distributions presque périodiques et aussi une transformée de Fourier tout a fait spéciale. Mais tout cela sera realisé dans un prochain travail.

Bibliographie

[1] Bogolioubov, N., Mitropolski, Y.: *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Ed. Gauthier- Vilars, Paris, 1962

[2] Ciubotariu, C., Păduraru, A.: *Fizică Generală*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[3] Fink, A., M.: *Almost Periodic Differential Equations,* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974

[4] Iacob, C.: *Mecanică Teoretică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[5] Ixaru, L.,G.: *Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii,* Editura Academiei, Bucureşti, 1979

[6] Muntean, I.: *Capitole speciale de analiză funcţională*, lito. Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1993

[7] Smith, P., Smith, R.C.: *Mechanics*, John-Wiley & Sons Editions, Chichester, New-York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.

E-mail address: amuntean@math.ubbcluj.ro

E-mail address: tgrosan@hera.ubbcluj.ro

L'Université "Babeş-Bolyai", La Faculté de Mathématique et Informatique, 1, rue M. Kogălniceanu, 3400, Cluj-Napoca, Roumanie