LA $\mathcal{T}$-TOPOLOGIE D'UN GROUPE ABÉLIEN

Grigore CĂLUGĂREANU*

Dédiée au professeur V. Ureche à l'occasion de son 60ème anniversaire

Reçu: le 28 juin, 1995
Classification AMS: 20K45

REZUMAT. - $\mathcal{T}$-topologia unui grup abelian. Este introdusă o nouă topologie functorială ideală şi discretă dar non-completabilă, intim legată de grupuri abeliene mixte. Sunt demonstrate proprietăţile de bază.

RÉSUMÉ. Une nouvelle topologie fonctorielle idéale discrète mais non complétable intimement lieé aux groupes abéliens mixtes est introduite. Les propriétés de base sont démontrées.

LEMME 1. *L'ensemble $\mathcal{T} = \{U \leq A \mid A/U$ groupe de torsion$\}$ ordonné par l'inclusion est un filtre dans le treillis des sous-groupes de A.*

Démonstration. Si $U \in \mathcal{T}$ et $U \leq V$, en utilisant l'épimorphisme canonique $p_{UV} : A/U \twoheadrightarrow A/V$ on déduit immédiatement que $V \in \mathcal{T}$. Par calcul élémentaire on déduit de $U, V \in \mathcal{T}$ que $U \cap V \in \mathcal{T}$. $\square$

La topologie linéaire déterminée par ce filtre va être nommée la $\mathcal{T}$-topologie de A. On va aussi utiliser $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} \mid U$ sans torsion$\}$.

* *Université "Babeş-Bolyai", Faculté de Mathematiques, 3400 Cluj-Napoca, Romania*

Remarque 1. *On a $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U + T(A)$ essentiel dans A.*

Démonstration. Si $U \in \mathcal{T}$ on a $U + T(A) \in \mathcal{T}$ (lemme) donc $A/(U + T(A))$ est un groupe de torsion. L'inclusion $S(A) \leq U + T(A)$ étant évidente, $U + T(A)$ est essentiel dans A (cf. [1], vol.1, ex.10, p.87). La condition est aussi suffisante car $A/(U + T(A))$ groupe de torsion implique A/U groupe de torsion (calcul élémentaire).□

Cette équivalence généralise l'équivalence connue: $T(A)$ essentiel dans $A \Leftrightarrow A$ groupe de torsion (cf. [1], ex. 11, p.87).

PROPRIÉTÉS immediates 1. *La $\mathcal{T}$-topologie d'un groupe A est plus fine que toutes les topologies les plus connues: **Z**-adique, p-adique, Prüfer et la topologie de l'indice fini.*

La $\mathcal{T}$-topologie d'un groupe A est discrète ssi A est un groupe de torsion (en effet: discrète ssi $0 \in \mathcal{T}$).

La $\mathcal{T}$-topologie d'un groupe A est grossière ssi $A = 0$.

En effet, si $A \neq 0$, ϕ, 0 et A sont deja trois ouvers.□

Dans la suite l'exposition suivra un parallélisme avec [2] pour des raisons évidentes.

D'ailleurs cette dernière propriété peut être aussi déduite de [2] (3.5): A

doit être un π'_d-groupe π_t-divisible; dans notre cas $\pi'_d = \phi$ donc A est un groupe de torsion avec $A[p] = 0$ pour chaque p prèmier. Donc $A = 0$.

PROPRIÉTÉS immediates 2. *Si A est un groupe mixte ou sans torsion, $\mathcal{T}$ ne contient pas de sous-groupes de torsion.*

Si A est sans torsion $\mathcal{T} = \mathcal{F}$.

Si A est mixte $\mathcal{F}$ est un système fondamental de voisinages de 0 *dans la $\mathcal{T}$-topologie.*

Démonstration. Si U et A/U sont des groupes de torsion, A le serrait aussi. Pour la dernière affirmation on prouve que: $U \in \mathcal{T}$ ssi il existe un $F \leq U$, $F \in \mathcal{F}$. En effet si A est un groupe mixte et $U \in \mathcal{T}$ nous avons $U \neq T(U)$. Si U est sans torsion, on a rien a démontrer. Si U est mixte, soit F un sous-groupe sans torsion maximal (nommée par la suite une *st-composante*) de U. Alors F est sans torsion et U/F est groupe de torsion (on a même F net dans U). A/U étant aussi groupe de torsion, A/F en est aussi, donc $F \in \mathcal{F}$. Réciproquement, tout est clair. □

Remarque 2. Si F est net dans U et A/U est groupe de torsion, généralement il n'est pas vrai que F est net dans A. Les st-composantes d'un groupe mixte ne forment pas un système fondamental de voisinages de 0 dans la $\mathcal{T}$-topologie.

Dans le cas contraire tout sous-groupe sans torsion $U \in \mathcal{F}$ contiendrait un sous-groupe sans torsion maximal dans A.

PROPRIÉTÉS immediates 3. *La $\mathcal{T}$-topologie d'un groupe A est toujours Hausdorff.*

Cela peut se démontrer de plusieurs manières:

(i) On peut démontrer aisement que l'intersection de toutes les st-composantes est 0. Alors $\cap\{U \leq A | A/U$ de torsion$\} = 0$ a aussi lieu.

(ii) Pour vérifier que $\cap\{U \leq A | U \in \mathcal{T}\} = 0$, on revient à: pour chaque $a \in A$, $a \neq 0$ il y a un $U \in \mathcal{T}$ tel que $a \notin U$. En effet, pour chaque $a \in A$, $a \neq 0$, le lemme de Zorn est applicable dans l'ensemble des sous-groupes de A qui ne contiennet pas a. L'ensemble contient donc un sous-groupe maximal pour lequel A/M est cocyclique ([1], (25.2)). Mais alors $M \in \mathcal{T}$. □

PROPRIÉTÉS immediates 4. *La $\mathcal{T}$-topologie est fonctorielle, idéale et donc minimale.* (Voir [2]).

La classe discrète $C(\mathcal{T})$ correspondante est la classe de tous les groupes de torsion (discrète et idéale).□

Remarque 3. $C(\mathcal{T})$ n'étant pas fermée pour des puissances arbitraires, $C(\mathcal{T})$

ne provient pas d'une famille topologique de radicaux (cf. [2] (2.11)). $C(\mathcal{T})$ est fermée aux extensions (c'est donc une classe Sèrre).

PROPRIÉTÉS immediates 5. *La $\mathcal{T}$-topologie d'un groupe contient les sous-groupes essentiels.*

En effet B essentiel dans A ssi $S(A) \leq B$ et A/B est groupe de torsion. Si A est un groupe sans torsion, on a $\mathcal{T} = \mathcal{F} = \{$sous-groupes essentiels$\}$, mais si A est un groupe mixte, aucune st-composante n'est pas un sous-groupe essentiel.□

PROPRIÉTÉS immediates 6. *La $\mathcal{T}$-topologie de A n'admet pas de sous-groupes denses autres que A.*

En effet, ([2] (3,2)(b)) B est dense dans A ssi A/B a la topologie grossière et on utilise une propriété antérieure.□

Remarque 4. On peut aussi utiliser un exercice de [1] (ex. 10, p.34) pour donner une autre démonstration:

si $B \neq A$ serait un sous-groupe dense on aurait $B + U = A$ pour chaque $U \in \mathcal{T}$. Pour $U = nA$ avec n naturel, on voit que B serait aussi dense dans la topologie Z-adique, donc A/B serait divisible. A/B n'est pas un groupe de torsion parce que alors $B \in \mathcal{T}$ et on aurait $B + B = B = A$. Donc $r_0(A/B) \neq 0$ et alors il existe un sous-groupe $C/B \cong Q$ (le théorème de structure pour les groupes divisibles) qui est aussi un facteur direct. On prend par example $E/B \leq C/B$ avec $E/B \cong \boldsymbol{Z}$ et alors $A/(E+D)) \cong (A/B)/(E/B \oplus D/C) \cong \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ si $A/B = C/B \oplus D/B$. Donc $E + D \in \mathcal{T}$ et $B + (E + D) = E + D = A$, contradiction.□

PROPOSITION 1. *Si pour une topologie fonctorielle T, la classe discrète $\mathcal{C}(T)$ est une classe Sèrre alors un sous-groupe B de A est T-concordant ssi $A/B \in \mathcal{C}(T)$.*

Démonstration. Un sous-groupe est T-concordant si sa topologie de sous-espace de $T(A) = A[\mathcal{U}_A]$ coincide avec la topologie fonctorielle de B. Donc B est T-concordant ssi $\mathcal{U}_B = B \cap \mathcal{U}_A$.

Premièrement, si B est T-concordant, de $\mathcal{U}_B \subseteq B \cap \mathcal{U}_A$ on déduit que pour chaque $U \leq B$, $B/U \in \mathcal{C}$ implique $A/U \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ étant fermée aux sous-groupes, on a $0 \in \mathcal{C}$ donc on peut prendre plus haut $U = B$. Donc $A/B \in \mathcal{C}$.

Réciproquement, $\mathcal{C}$ étant fermée aux sous-groupes, on déduit $B \cap \mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{U}_B$ (en effet pour $U \leq A$ on a $B \cap U \leq B$ et $B/(B \cap U) \cong (B + U)/U \leq A/U \in \mathcal{C}$; donc $B/(B \cap U) \in \mathcal{C}$). Si $A/B \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est une classe Sèrre, B/U et $A/B \in \mathcal{C} \Rightarrow A/U \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{U}_B \subseteq B \cap \mathcal{U}_A$ et B est T-concordant.□

Cas particulier. B est $\mathcal{T}$-concordant ssi A/B est un groupe de torsion.

PROPOSITION 2. *Tous les groupes quotients sont $\mathcal{T}$-concordants.*

En effet, $C(\mathcal{T})$ étant une classe idéale de groupes on applique [2] (3.2)(b).□

Remarque 5. On peut démontrer ce resultat aussi par voie directe:

$\mathcal{T}_{A/B} = \{C/B \leq A/B \mid (A/B)/(C/B) \cong A/C$ groupe de torsion$\} = \{C/B \leq A/B \mid p_B^{-1}(C/B) = C, A/C$ groupe de torsion$\}$ = la topologie quotient de A/B. (Ici $p_B: A \to A/B$ est la projection canonique).

Remarque 6. Le foncteur induit par la $\mathcal{T}$-topologie commute avec les sommes directes ([2], (3.21)).

PROPOSITION 3. *La $\mathcal{T}$-topologie n'est pas complétable.*

En effet, la classe $C(\mathcal{T})$ contient des groupes divisibles e.g. $\mathbf{Z}(p^\infty)$) donc le résultat se déduit de [2] (5.11). De la même façon on déduit que le complété de $\mathbf{Z}$ dans la $\mathcal{T}$-topologie est même que le complété dans la topologie $\mathbf{Z}$-adique: $\prod J_p$ pour tous les nombres prèmiers p (J_p est le groupe des entiers p-adiques): [2] (4.16).□

PROPOSITION 4. *Tout sous-groupe de A est fermé dans la $\mathcal{T}$-topologie de A.*

Démonstration. Si T est une topologie fonctorielle, $C(T)$ sa classe discrète et $\mathcal{D}$ le filtre de définition (i.e. $U \in \mathcal{D} \Leftrightarrow A/U \in C(T)$) pour un sous-groupe B de A, on a l'adhérence $\bar{B} = \cap\{B + U \mid U \in \mathcal{D}\}$, donc B est fermé ssi $B = \cap\{B$

$+ U|U \in \mathcal{D}\}$. On remarque alors aisement que pour deux topologies fonctorielles T_1 et T_2 avec $C(T_1) \subseteq C(T_2)$ (ou $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$; T_2 plus fine que T_1) si B est T_1-fermé il est aussi T_2-fermé ($B \subseteq \cap\{B + U|U \in \mathcal{D}_2\} \subseteq \cap\{B + U|U \in \mathcal{D}_1\} = B$ sont toutes egalités). Mais tout sous-groupe est fermé dans la topologie de Prüfer (Fuchs, vol. 1, p.31) et alors on obtient le résultat énoncé.□

Rappelons de [2] (3.12): un sous-groupe B est T-pur dans A si chaque $D \in C(T)$ est injectif relativement à la suite exacte

$$0 \to B \to A \to A/B \to 0.$$

La définition revient à la χ_*-purité (C.P.Walker;e.g. [1], p.131) donc on a: B est T-pur dans A ssi pour chaque $U \leq B$ pour lequel B/U est groupe de torsion, B/U est facteur direct dans A/U. Raisonnant comme plus haut, pour T_2 plus fine que T_1 si B est T_2-pur, il est aussi T_1-pur. Si on prend T_1 la topologie de Prüfer, T_2 la $\mathcal{T}$-topologie et on remarque que pour $\mathcal{T}_1$ = {groupes cocycliques} les sous-groupes χ_{1*}-purs sont exactement les sous-groupes purs, on voit que $\mathcal{T}$-pur doit être une notion intermédiaire entre pur et facteur direct.

Remarque 7. Si B est un sous-groupe $\mathcal{T}$-pur de torsion alors B est un facteur direct (en effet, dans ce cas $0 \in \mathcal{D}_B$ et alors $B/0$ est un facteur direct dans $A/0$).

PROPOSITION 5. *Si* Ext($A/B,T$) = 0 *a lieu pour chaque groupe de torsion T, alors B est $\mathcal{T}$-pur dans A.*

En effet, B/U est un groupe de torsion, $A/B \cong (A/U)/(B/U)$, donc A/U est une extension de B/U par A/B et alors B/U est un facteur direct de A/U. On sait (cf. [1], p.189) que Ext($A/B,T$) = 0 a lieu pour chaque groupe de torsion T ssi A/B est libre, donc cette condition implique deja B facteur direct de A.□

Conclusion: les groupes A dans lesquels chaque sous-groupe $\mathcal{T}$-pur est un facteur direct sont ceux pour lesquels on a

$$0 \to T \to G \to A/B \to 0 \Rightarrow \exists U \leq B\colon G \cong A/U.$$

Problèmme 1. Caractériser les groupes complets dans la $\mathcal{T}$-topologie.

Problèmme 2. Quels sont les groupes pour lesquels la $\mathcal{T}$-topologie et la $\boldsymbol{Z}$-topologie coincident?

Vu que la $\mathcal{T}$-topologie est plus fine que la topologie $\boldsymbol{Z}$-adique, les groupes recherchés sont exactement ceux qui on tous les groupes quotients groupes de torsion bornés.

Problèmme 3. Caractériser les sous-groupes $\mathcal{T}$-purs dans un groupe sans torsion ou un groupe mixte.

Problèmme 4. Étudier les liens de la $\mathcal{T}$-topologie les catégories Walk et Warf.

BIBLIOGRAPHIE

1. L.Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, vol.1, New York and London, 1970.
2. A.Mader, *Basic Concepts of Functorial Topologies* Springer Lecture Notes in Mathematics, Abelian Group Theory, 874, 1982, p.251-271.