STUDIA UNIV. "BABEŞ-BOLYAI", MATHEMATICA, Volume XLIV, Number 2, June 1999

LE PROBLÈME EXTERIEUR DE DIRICHLET EN DEUX DIMENSIONS POUR LES CHEMINEMENTS ALÉATOIRES SUR DES DÉMIGROUPS DISCRETS

OCTAVIAN MUSTAFA

Abstract. The paper examines some problems concerning the exterior Dirichlet problem for random walks on discrete semigroups.

1. Introduction. Périodicité et récurrence. La fonction caracteristique

Soit $(Z, \dot{+})$ un démigroupe commutatif, dénombrable et dans lequel toute équation $a + x = b$, où $a, b \in Z$, admet au plus une solution. Supplémentaire, $0 \in Z$.

Exemple 1.1. Toutes les parties stables d'un groupe lesquelles le zéro du groupe est contenu.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabolité, $f_n : \Omega \to Z$, $n \geq 1$ des variables aléatoires independentes et identiquement repatisées et $S_0 = 0$, $S_n \doteq f_1 + \cdots + f_n$, $n \geq 1$, un cheminement aléatoire sur Z.

Proposition 1.2. *Soit $z, z' \in Z$. Si l'équation $z + x = z'$ n'a pas de solution et $P(S_n = z) \neq 0$, alors*

$$P(S_{n+1} = z' | \, S_n = z) = 0.$$

On défini l'application $T : Z \times Z \to [0, 1]$ par

$$T(z, z') = \begin{cases} T(0, l), & \text{pour } z + l = z' \\ 0, & \text{en rest,} \end{cases}$$

où $T(0, l) = P(f_n = l)$, $n \geq 1$. Évidemment, $\sum_{z \in Z} T(0, z) = 1$. T est la fonction de transition du cheminement aléatoire considéré.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60H15.

Key words and phrases. Dirichlet problem, random walk, discrete semigropus.

Proposition 1.3. *Si $P(S_n = z) \neq 0$, alors*

$$T(z, z') = P(S_{n+1} = z' | \; S_n = z).$$

Supplémentaire,

$$T(z + l, z' + l) = T(z, z'), \; \textit{pour } z, z', l \in Z.$$

Et, si $z + z' = 0$, alors

$$T(z, 0) = T(0, z').$$

En effet, le chaine de Markov homogène $\{S_n | \; n \geq 0\}$ a la matrice des probabilités de transition

$$\mathbf{P} = \|T(z, z')\|_{z, z' \in Z}.$$

Pour $z, z' \in Z$, on défini

$$T_0 = \delta, \quad T_1 = T,$$

$$T_n(z, z') = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in Z} T(z, z_1) \ldots T(z_{n-1}, z'), \quad n \geq 2$$

où δ est le symbole de Kronecker. Biensûr, si $P(S_m = z) \neq 0$, alors

$$T_n(z, z') = P(S_{m+n} = z' | \; S_m = z), \quad n \geq 1.$$

Soit

$$F_0 = 0, \quad F_1 = T,$$

$$F_n(z, z') = \sum_{z_1, \ldots, z_{n-1} \neq z'} T(z, z_1) \ldots T(z_{n-1}, z').$$

Finalement,

$$G_n(z, z') = \sum_{k=0}^{n} T_k(z, z'), \quad n \geq 0.$$

Proposition 1.4. *a)* $F_n(z, z) = F_n(0, 0)$,

b) $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(z, z') \leq 1$,

c) $G_n(z, z') \leq G_n(0, 0)$,

d) $T_n(z + l, z' + l) = T_n(z, z')$,

e) $G_n(z, z) = G_n(0, 0)$,

$$f)\ T_n(z,z') = \sum_{k=1}^{n} F_k(z,z')T_{n-k}(z',z'), \quad n \geq 1, \quad z,z',l \in Z.$$

Un état $z \in Z$, avec $F(z,z) = 1$, où $F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, est récurrent. Du b) on obtient que $0 \leq F(z,z') \leq 1$, pour $z,z' \in Z$. Si $F(z,z) < 1$, l'état z est transitoire (à voit [4.3], I-er tome, pag. 353 et [4.4], pag.19).

Observation 1.5. Parce que $F(z,z) = F(0,0)$, $(\forall)$ $z \in Z$, si un état z du cheminement aléatoire est récurrent (transitoire), alors tous ses états sont récurrents (transitoires), le cheminement etant récurrent (transitoire).

On définit

$$\Sigma := \{z \in Z |\ T(z,0) > 0\}, \quad Z^+ := \{z \in Z |\ (\exists)\ n \geq 0,\ t_n(z,0) > 0\},$$

$$\overline{Z} := \{z \in Z |\ (\exists)\ z', z'' \in Z^+,\ z + z' = z''\}.$$

Proposition 1.6. *L'ensemble Z^+ contient toutes les sommes finies d'élèments de Σ et $(Z^+,+)$ est le plus petit démigroupe de Z pour lequel $\Sigma \subseteq Z^+$. $(Z^+,+)$ est le plus petit sousgroupe aditif de Z avec $Z^+ \subseteq \overline{Z}$.*

Proposition 1.7. *Si le cheminement est réccurent, alors $Z^+ = \overline{Z}$ et*

$$F(0,z) = 1, \quad z \in \overline{Z}, \quad F(0,z) = 0, \quad z \in Z \setminus \overline{Z}.$$

Observation 1.8. Les ensembles Σ et Z^+ sont les inverses des ensembles Σ et Z^+ definis en [4.2].

On dit que le cheminement aléatoire T est apériodique si et seulement si $Z = \overline{Z}$. Particulierement, Z doit être groupe.

Soit $Z \subseteq \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in Z$ et $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \mathbf{R}^d$ on utilisera les notations suivantes

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2, \quad |\theta|^2 = \sum_{i-1}^{d} |\theta_i|^2, \quad x\theta = \sum_{i=1}^{d} x^i\theta_i.$$

La fonction caracteristique asociée au cheminement aléatoire T est

$$\Phi(\alpha) := \sum_{x \in Z} T(0,x) e^{ix\alpha}, \text{ pour } \alpha \in \mathbf{R}^d.$$

Soit $C = \{\theta |\ |\theta_i| \leq 2\pi,\ 1 \leq i \leq d\}$. Alors,

$$a)\ [\Phi(\theta)]^n = \sum_{x \in Z} T_n(0,x) e^{ix\theta}, \quad \theta \in \mathbf{R}^d,$$

$$b)\ T_n(0,y) = (2\pi)^{-d} \int_C e^{-iy\Theta} [\Phi(\theta)]^n d\theta, \quad y \in Z.$$

Ici, $[\Phi]^n$ sera remplacée par Φ^n, en concordance qvec [4.2].

Si $d = 1$, soit

$$\mu_k = \sum_{x \in Z} x^k T(0,x), \quad k = 1,2, \quad m_1 = \sum_{x \in Z} |x| T(0,x).$$

Proposition 1.9. *Si $m_1 < \infty$, alors Φ est du classe C^1 et $\Phi'(0) = i\mu_1$.*

La réciproque n'est pas valable. Pourtant,

Proposition 1.10. *Si $T(0,x) = 0$ pour $x < 0$ et si*

$$0 \leq -i\Phi'(0) = \lim_{\theta \to 0} i \frac{1 - \Phi(\theta)}{\theta} = \alpha < \infty,$$

alors $\mu_1 = m_1 = \alpha$.

Finalement,

Proposition 1.11. *Si $\mu_1 = 0$ et $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 < \infty$, alors*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{x < \sqrt{n} \cdot \sigma \cdot t} T_n(0,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Démigroupes suffisants. La caracterisation des cheminements aléatoires sur les démigroupes suffisants

On dit qu'un sousgroupe G de $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, est suffisant si et seulement si:

$$\forall\ (A_k \subseteq G |\ \theta_k > 0,\ \theta \in A_k)\ \exists\ \left(\theta^{(k)} \in A_k |\ \theta_k^{(k)} = \min_{\theta \in A_k} \theta_k\right), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Proposition 2.1. *Pour tous les groupes suffisants $G \subseteq \mathbf{R}^d$ il existe $1 \leq k \leq d$ et des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ en G independents sur $\mathbf{R}$ tels que*

$$G = \mathbf{Z}z_1 \oplus \times \oplus \mathbf{Z}x_k$$

(G est un $\mathbf{Z}$-module de dimension k).

Démonstration. À voir [4.1], les pages 24-25. □

Un démigroupe (groupe) aditif Z, denombrable, inclus en $\mathbf{R}^d$ est consideré comme suffisant par raport au cheminement $T : Z \times Z \to [0,1]$ si et seulement si $\overline{Z}$ est un groupe suffisant de $\mathbf{R}^d$.

Exemple 2.2. Tous les cheminements sur le démigroupe suffisant $\mathbf{N}^d \subseteq (\mathbf{R}^d, +)$ sont transitoires ($F = 0$, $G = 1$, où $G = G(0,0)$, $G = \lim\limits_{n\to\infty} G_n$). Ce qui donne un reponse au celebre problème du vol des oiseaux!

Proposition 2.3. *Soit $Z \subseteq (\mathbf{R}^d, +)$ un groupe suffisant par raport au cheminement T. Alors, le cheminement est apériodique si et seulement si*

$$\{\theta \in \mathbf{R}^d |\ \Phi(\theta) = 1\} = \{\theta \in \mathbf{R}^d |\ (2\pi)^{-1} x\theta \in \mathbf{Z},\ x \in Z\}.$$

Démonstration. Biensûr, $X := \{\theta \in \mathbf{R}^d |\ (2\pi)^{-1} x\theta \in \mathbf{Z},\ z \in Z\} \subseteq E := \{\theta \in \mathbf{R}^d |\ \Phi(\theta) = 1\} = \left\{\theta \in \mathbf{R}^d |\ \Phi(\theta) = \sum\limits_{x\in Z} T(0,x)\cos(x\theta) = 1\right\}$.

Si $Z = \overline{Z}$ et $\Phi(\theta) = 1$, alors $\sum\limits_{x\in Z} T(0,x)\cos(x\theta) = \sum\limits_{x\in Z} T(-x,0)\cos(x\theta) = \sum\limits_{x\in Z} T(x,0)\cos(x\theta) = \sum\limits_{x\in \Sigma} T(x,0)\cos(x\theta) = 1$, donc $(2\pi)^{-1}x\theta \in \mathbf{Z}$, $x \in \Sigma$. Et $\Phi^n(\theta) = 1 = \sum\limits_{y\in Z} T_n(y,0)\cos(y\theta) = \sum\limits_{T_n(y,0)>0} T_n(y,0)\cos(y\theta) = 1$, donc $(2\pi)^{-1}x\theta \in \mathbf{Z}$, $x \in Z^+$ et $(2\pi)^{-1}x\theta = (2\pi)^{-1}(x_1 - x_2)\theta \in ZZ$, pour $x = x_1 - x_2$, où $x_1, x_2 \in Z^+$, d'où $(2\pi)^{-1}x\theta \in \mathbf{Z}$, $x \in \overline{Z} = Z$.

Reciproquement, si $\overline{Z}$ est un sousgroupe propre de Z, il existe des vecteurs independentes sur $\mathbf{R}$: $a_1, \ldots, a_k \in \overline{Z}$, $1 \leq k \leq d$, avec $\overline{Z} = \mathbf{Z}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}a_k$. Si $k \leq d-1$, soit $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_d\}$ unde base algébrique en $\mathbf{R}^d$ et β un vecteur dont les premières k coordonates sont nules. Alors, $a_i\beta = \beta a_i = 0$, $1 \le i \le k$, donc $x\beta = \beta x = 0$, $x \in \overline{Z}$ et

$$\Phi(\beta) = \sum_{x\in Z} T(x,0)e^{-ix\beta} = \sum_{x\in\Sigma} T(x,0)e^{-ix\beta} = \sum_{x\in\Sigma} T(x,0) = 1.$$

Soit $z \in Z \setminus \overline{Z}$. Il existe $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_d$ en $\mathbf{R}$ tels que $(2\pi)^{-1} \sum_{j=k+1}^{d} z^j\beta_j \notin \mathbf{Z}$, où $\beta = (0, \ldots, 0, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_d)$, c'est à dire $\beta \in E \setminus X$, où $z = (z^1, \ldots, z^d)$.

Si $k = d$, $\overline{Z} = \mathbf{Z}a_1 \oplus \times \oplus \mathbf{Z}a_d$. Il existe k^i, $1 \le i \le d$, pas tous entiers, tels que

$$z_0 = \sum_{i=1}^{d} k^i a_i \in Z \setminus \overline{Z}$$

et n_i, $1 \le i \le d$, des entiers nenuls ainsi que

$$\sum_{i=1}^{d} k^i n_i \notin \mathbf{Z}.$$

Soit $\theta_0 = 2\pi \left(\sum_{i=1}^{d} n_i (A_{1i}^{-1}, \ldots, A_{di}^{-1}) \right)$, où $A^{-1} = (A_{ij}^{-1})_{1\le i,j\le d}$ et A est la matrice des vecteurs $a_1, \ldots, a_d$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$. Évidemment, $(2\pi)^{-1}a_k\theta_0 = \sum_{i=1}^{d} n_i\delta(k,i) = n_k$ et $(2\pi)^{-1}z\theta_0 \in \mathbf{Z}$, $z \in \overline{Z}$. Enfin,

$$\Phi(\theta_0) = \sum_{x\in Z} T(x,0)e^{-ix\theta_0} = \sum_{x\in\Sigma} T(x,0) = 1.$$

Mais, $(2\pi)^{-1}z_0\theta_0 = \sum_{i=1}^{d} k^i (2\pi)^{-1} a_i\theta_0 = \sum_{i=1}^{d} k^i n_i \notin \mathbf{Z}$, $\theta_0 \in E \setminus X$. □

Observation 2.4. Pour $z = \mathbf{Z}^d$,

$$\{\theta \in \mathbf{R}^d | \ (2\pi)^{-1}x\theta \in \mathbf{Z},\ z \in Z\} = \{\theta \in \mathbf{R}^d | \ (2\pi)^{-1}\theta_k \in \mathbf{Z},\ 1 \le k \le d\}.$$

Théorème 2.5 (la caracterisation des cheminements aléatoires pour $d \ge 3$). *Soit T un cheminement aléatoires sur le démigroupe suffisant Z tel que $\overline{Z}$ soit un module de dimension d sur $\mathbf{Z}$. Alors,*

$$F(0,0) < 1$$

(le cheminement est transitoire).

3. Moment d'arrêt. Moment d'impact. La fonction H_A. Le problème exterieur de Dirichlet en deux dimensions

On considère l'espace de probabilité $(\Omega_z, \mathcal{F}_z, P_z)$, $z \in Z$, où

1) $\Omega_z = \{z\} \times \mathbf{Z}^{\mathbf{N}^*}$, i.e. $\omega \in \Omega_z$ si et seulement si $\omega_0 = z$, où $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

2) $\mathcal{F}_z$ est la plus petite des sous σ-algébres de Ω_z qui contient les cilindres

$$A_n = \{\omega \in \Omega_z \,|\, \omega_i = a_i, \; i = 1, \dots, n\}.$$

3) $P_z : \mathcal{F}_z \to [0,1]$ est l'unique mesure de probabilité avec

$$P_z(A_n) = T(z, a_1)T(a_1, a_2) \dots T(a_{n-1}, a_n)$$

Évidemment,

$$P_z(\omega \in \Omega_z \,|\, \omega_{i_1} = a_{i_1}, \dots, \omega_{i_m} = a_{i_m}) = T_{i_1}(z, a_{i_1})T_{i_2 - i_1}(a_{i_1}, a_{i_2}) \dots T_{i_m - i_{m-1}}(a_{i_{m-1}}, a_{i_m}).$$

Pour $X_k"\Omega_z \to Z$, $X_k(\omega) = \omega_k$, $k \geq 0$, on note avec S_0^*, S_n^* les fonctions $0, X_1 + \dots + X_n$ définies sur Ω_z. Dans ce cas-là, $\{S_n^* \,|\, n \geq 0\}$ est un cheminement aléatoire avec la fonction de transition T.

Proposition 3.1. *a)* $P(z + S_k = y_k;\; k = 1, \dots, n) = P_z(X_k = y_k;\; k = 1, \dots, n)$;

b) $P_z(X_{k+1} = X_k + z') = T(0, z')$, $k \geq 0$;

c) $P_z(X_{m+1} = X_m + v;\; X_{n+1} = X_n + t) = T(0, v)T(0, t)$, $m \neq n \geq 0$.

$\{X_n \,|\, n \geq 0\}$ signifie la translation de vecteur x du cheminement $\{S_n \,|\, n \geq 0\}$.

Soit $\mathcal{F}_{k,z}$, $k \geq 0$, la plus petite des sous σ-algébres de $\mathcal{F}_z$ qui contient tous les ensembles $\{\omega \in \Omega_z \,|\, \omega_n = y\}$, $y \in Z$, $k \geq n \geq 0$.

Une application $T : Z \times Z^{\mathbf{N}^*} \to \overline{\mathbf{N}}$, où $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, s'appelle moment d'arrêt si et seulement si

$$\{\omega \in \Omega_z \,|\, T|_{\Omega_z}(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_{k,z}, \; (\forall)\; k \geq 0, \; z \in Z.$$

Pour $A \subseteq Z$, soit $T_A : Z \times Z^{\mathbf{N}^*} \to \overline{\mathbf{N}}$ le moment d'arrêt:

$$T_A(\omega) = \min\{k \,|\, 1 \leq k \leq \infty : \; X_k(\omega) \in A\}, \quad \omega \in Z \times Z^{\mathbf{N}^*},$$

où $P_z[T_A = +\infty] := 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_z[X_k \in A]$, $z \in Z$, s'appelle le moment d'impact avec A. Pour $A = \{z\}$, on utilise la notation $T_A = T_z$.

Soit $H_A^{(n)} : Z \times A \to [0, \infty)$,

$$H_A^{(n)}(z,z') = \begin{cases} P_z[X_{T_A} = z';\ T_A = n],\ z \in Z \setminus A \\ 0,\ z \in A,\ n \geq 1 \\ \delta(z,z'),\ z \in A,\ n = 0. \end{cases}$$

Soit $H_A : Z \times A \to [0, \infty)$,

$$H_A(z,z') = \begin{cases} P_z[X_{T_A} = z';\ T_A < \infty],\ z \in Z \setminus A \\ \delta(z,z'),\ z \in A. \end{cases}$$

Proposition 3.2. *a)* $H_A^{(n)}(z,z') = \sum_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in Z \setminus A} T(z,z_1)\ldots T(z_{n-1},z')$, $z \in Z \setminus A$, $n \geq 1$;

b) $H_A(z,z') = \sum_{n=1}^{\infty} H_A^{(n)}(z,z')$, $z \in Z \setminus A$.

Proposition 3.3. *a)* $P_x[T_y = n] = F_n(x,y)$;

b) $P_z[T_z < +\infty] = F(z,z)$;

c) $P_z[T_{A+z} = n] = P_0[T_A = n]$, $x, y, z \in Z$.

Démonstration. c)

$$P_z[T_{A+z} = n] = \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_{n-1} \notin A+z} T(z,\omega_1)\ldots T(\omega_{n-2},\omega_{n-1}) \sum_{\omega_n \in A+z} T(\omega_{n-1},\omega_n)$$

Si $\omega_{k+1} \neq \omega_k + \omega'_{k+1}$, $(\forall)\ \omega'_{k+1} \in Z$, pour $0 \leq k \leq n-1$, où $\omega_0 = z$, alors $T(\omega_k, \omega_{k+1}) = 0$. Donc

$$P_z[T_{A+z} = n] =$$

$$= \sum_{\left\{\sum_{k=1}^{j} t_k \notin A,\, 1 \leq j \leq n-1;\, \sum_{k=1}^{n} t_k \in A\right\}} T(z, z+t_1)\ldots T(z+t_1+\cdots+t_{n-1}, z+t_1+\cdots+t_n) =$$

$$= \sum_{\{\omega_1,\ldots,\omega_{n-1} \notin A;\, \omega_n \in A\}} T(0,\omega_1)\ldots T(\omega_{n-1},\omega_n) = P_0[T_A = n], \quad z \in Z.$$

□

Soit $d = 2$, $(Z, +)$ un démigroupe par raport à T et A un sousensemble de Z. On pose le problème:

$$\text{(ProbDirich)} \quad \begin{cases} \sum_{y \in Z} T(x,y) f(y) = f(x), \;\; x \in Z \setminus A \\ f(x) = \varphi(x), \;\; x \in A \\ |f(x)| < \infty. \end{cases}$$

Si A est infinie, on ajoute la condition suivante:

$$\text{(infini)} \quad |\varphi(x)| < \infty.$$

Proposition 3.4. *Si T est la fonction de transition d'un cheminement aléatoire arbitraire (récurrent ou transitoire), alors le problème bidimensional exterieur de Dirichlet admet la solution*

$$f(z) = \sum_{y \in B} H_A(z,y) \varphi(y).$$

La solution est unique si:

a) le cheminement est récurrent et apériodique;

b) il y a $y \in A$, avec $Z \setminus A \subset y + \overline{Z}$ et T est récurrent (donc Z n'est pas necessairement un groupe!).

Démonstration. Pour $x \notin Z \setminus A$,

$$\sum_{t \in Z} T(x,t) H_A(t,y) = P_x[X_{T_A} = y;\ T_A = 1] + \sum_{t \in Z \setminus A} \sum_{k=1}^{\infty} T(x,t) P_x[X_{T_A} = y;\ T_A = k] =$$

$$= P_x[X_{T_A} = y;\ T_A = 1] + \sum_{t \in Z \setminus A} \sum_{k=1}^{\infty} P_x[X_1 = t;\ X_{T_A} = y;\ T_A = k+1] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_x[X_{T_A} = y;\ T_A = k] = P_x[X_{T_A} = y;\ T_A < +\infty] = H_A(x,y), \quad y \in A.$$

Évidemment, $|f(x)| \leq \sup_{y \in A} |\varphi(y)| < +\infty$, donc f est majorée. Si f_1, f_2 sont des solutions du problème de Dirichlet, $h = f_1 - f_2$ le serait aussi pour $\varphi|_A = 0$.

Soit $M > 0$, avec $|h(x)| \leq M$, $x \in Z$, d'où

$$|h(x)| \leq MP_x[T_A > n] \leq MP_x[T_y > n], \quad x \in Z \setminus A, \; y \in A, \; n \geq 1.$$

Á voir [4.2]. Enfin,

$$|h(x)| \leq \lim_{n \to \infty} MP_x[T_y > n] = \lim_{n \to \infty} M \left(F(x,y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x,y) + P_x[T_y = +\infty] \right) =$$
$$= MP_x[T_y = +\infty],$$

en concordance avec b) de la dernière proposition.

Mais $1 = P_x[T_y \in \overline{\mathbf{N}}] = F(x,y) + P_x[T_y = +\infty]$. D'après la condition b),

$$F(x,y) = F(z+y,y) = F(z,0), \; (\forall) \; x \in Z \setminus A, \; x = z + y, \; z \in \overline{Z}.$$

Maintenant,

1) la condition de récurrence a comme consequence

$$F(z,0) = 1, \; z \in \overline{Z}, \text{ d'où } P_x[T_y = +\infty] = 0, \; x \in Z \setminus A.$$

2) la condition d'apériodicité et récurrence implique

$$P_x[T_y = +\infty] = 0 = 1 - P_x[T_y < +\infty] = 1 - F(x,y) = 1 - F(0, y - x) = 0,$$

pour tous les x, y de Z. □

References

[1] Mustafa, O., *Mersul la întâmplare pe semigrupuri discrete*, Teză de licenţă, Univ. din Craiova, 1996.
[2] Spitzer, F., *Principes des cheminements aléatoires*, Dunod, Paris, 1970.
[3] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, I^{st}, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1957.
[4] Chung, K.L., *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, J. Springer, Berlin, 1960.

UNIVERSITY OF CRAIOVA, DEPT. OF MATHEMATICS