STUDIA UNIV. "BABEŞ-BOLYAI", INFORMATICA, Volume II, Number 1, 1997

CONSTRUCTION DE LA PROBABILITÉ SUR UN SYSTEÈME DE PROPOSITIONS

CONSTANTIN LUPSOIU AND DOREL SAVULEA

Résumé. Dans cet article nous donnons un mode de construction d'une probabilité sur un système de propositions compatible avec la relation de déduction. Les propriétés qui doivent être satisfaites par la relation d'implication pour qu'il y ait une probabilité attachée à une proposition de l'algèbre boole $\mathcal{L}$ sont données.

1. Introduction

Une proposition est, par définition, l'énoncé d'un fait qui peut être vrai ou faux. Nous allons considérer que les propositions ne sont qu'un support de cette propriété et forment l'ensemble noté par L.

Définition 1.1. *Soit a et b deux propositions appartenant à L. On dit que a implique b et on note $a < b$ si l'affirmation de a implique l'affirmation de b.*

Supposons $(L, <)$ un treillis complet et orthonormé. Les éléments $a \wedge b$ et $a \vee b$ représentent le plus grand minorant et le petit majorant de a et b , et $O = \bigwedge_{a \in L} a$ constitue la proposition toujours fausse et $I = \bigvee_{a \in L} a$ est la proposition toujours vraie.

Définition 1.2. *Une orthocomplémentation est une correspondance biunivoque $\perp : L \rightarrow L$ qui a les propriétés suivantes:*

$$(a^{\perp})^{\perp} = a$$
$$a \wedge a^{\perp} = O$$
$$a < b \Rightarrow b^{\perp} < a^{\perp}$$

Définition 1.3. *Une famille de propositions $L = \{a_i, i \in K\}$ s'appelle $\perp$ – compatible si l'ensemble engendré par $\{a_i, a_i^{\perp}, i \in K\}$ forme une σ-algèbre booléenne, notée $\mathcal{L}$.*

Received by the editors: December 12, 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 68T01, 60A05.
1991 *CR Categories and Descriptors.* I.2 [**Artificial Intelligence**]: Deduction and Theorem Provin – *Uncertainty, "fuzzy" and probabilistic reasoning.*

Proposition 1.4. *(Loomis) Si $\mathcal{L}$ est une σ-algèbre booléenne de propositions, il y a un ensemble non vide Ω et $\mathcal{K}$ une σ-algèbre de parties de Ω homomorphe avec $\mathcal{L}$.*

Cette proposition montre que, si $\mathcal{L}$ est une famille de propositions $\perp$ - compatible , alors elle peut être représentée sur une σ-algèbre $\mathcal{K}$ des parties de Ω.

2. Hypothèses de construction de la probabilité

Nous allons considérer que l'ensemble non vide Ω est l'espace de toutes les observations élémentaires correspondantes au contenu des propositions de L. Les éléments de la famille $\mathcal{K} \subset P(\Omega)$ sont nommés des événements, formant une σ-algèbre. $\mathcal{K}$ forme un treillis par rapport à la relation $\prec$. Par exemple, on peut définir, la relation $\prec$ sur l'algèbre $\mathcal{K}$ de la façon suivante: $A \prec B$ si $|A| < |B|$ où par $|A|$ on a noté le cardinal de A.

Soit h un σ-morphisme donné par la proposition de Loomis, alors : $h : \mathcal{L} \to K$.

Si $h(a) = A$ et $h(b) = B$ alors:

$$h(a \wedge b) = h(a) \cap h(b) = A \cap B$$
$$h(a \vee b) = h(a) \cup h(b) = A \cup B$$
$$h(O) = \emptyset$$
$$h(I) = \Omega$$

Supposant qu'on ait choisi dans $\mathcal{K}$ une relation de vraisemblance : A est plus vraisemblant que B, noté $A \succ B$. Alors la relation de déduction doit être équivalente avec la relation de vraisemblance: $a < b \Leftrightarrow A \succ B$.

2.1. La construction indirecte.

Supposant que la relation de vraisemblance $\succ$ satisfasse les axiomes $S1 - S6$ [1] alors il y a une probabilité $P : \mathcal{K} \to [0, 1]$ compatible avec celle-ci. Alors nous attachons à a la probabilité correspondante à l'événement $h(a)$ qui satisfait la construction:

$$a < b \text{ si } P(h(a)) \geq P(h(b))$$

Remarque 2.1. *La construction de la probabilité sur l'espace des propositions dépend de la construction de h, $\mathcal{K}$, Ω et de la relation de vraisemblance difficilement à résoudre du point de vue practique.*

2.2. La construction directe.

Considérons que $(\mathcal{L}, <)$ est un treillis complet et $(\mathcal{L}, <)$ satisfait les hypothèses suivantes:

Hypothèse 2.2. *Quelles que soient les propositions $a, b \in \mathcal{L}$ a lieu une et seulement une des relations suivantes : $a < b$, $b < a$ ou $a \sim b$.*

Cette hypothèse résulte de la supposition que $(\mathcal{L}, <)$ est un treillis complet.

Hypothèse 2.3. *Si $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathcal{L}$ sont des propositions telles que : $a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 = 0$ et $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ alors $a_1 \vee a_2 < b_1 \vee b_2$.*

Nous pouvons démontrer plus simplement la véridicité de cette hypothèse, si nous utilisons la fonction caractéristique pour les propositions.

Définition 2.4. *Soit $f : \mathcal{L} \to \{0,1\}$. f est nomée fonction caractéristique pour les propositions, si:*

$$f(a) = 0 \text{ si } a \text{ est faux,}$$
$$f(a) = 1 \text{ si } a \text{ est vrai.}$$

Lemme 2.5. $a < b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.

La démonstration de la lemme résulte du tableau:

a	b	$a < b(a \to b)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Donc, si $f(a) > f(b)$ alors $a < b$ est fausse et réciproque.

Définition 2.6. *Soit $a, b \in \mathcal{L}$ deux propositions. Nous dirons que a et b sont indépendantes si $a \wedge b = 0$.*

Lemme 2.7. *Soit $a, b, d \in \mathcal{L}$ deux propositions telles que a et d, b et d soient indépendantes. Alors $a < b$ si et seulement si $a \vee d < b \vee d$.*

Démonstration. Puisque $a < b$ on peut appliquer l'hypothèse 2.3 et on obtient $a \vee d < b \vee d$.

Pour la réciproque nous pouvons supposer que $a > b$ et par l'application de l'hypothèse 2.3 on obtient $a \vee d > b \vee d$ ce qui contredit la relation $a \vee d < b \vee d$ de l'hypothèse. Donc $a < b$. □

Nous allons aussi donner par la suite des démonstrations qu'on pourra obtenir tout de suite en utilisant la fonction caractéristique antérieurement définie.

Des premières deux hypothèses 2.2 et 2.3 il résulte des conséquences importantes parmi lesquelles on mentionne, la transitivité de la relation $<$.

Théorème 2.8. *Soit $a, b, d \in \mathcal{L}$ des propositions telles que $a < b$ et $b < d$. Alors $a < d$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la fonction caractéristique pour les propositions.
De:

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$
$$b < d \Rightarrow f(b) \leq f(d)$$

on a: $f(a) \leq f(d) \Rightarrow a < d$. □

Le résultat suivant est une extension de l'hypothèse 2.3 ayant en vue la considération d'un nombre fini d'événements.

Théorème 2.9. *Soit $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathcal{L}$ des propositions indépendantes (c'est à dire $a_i \wedge a_j = 0$ $\forall i \neq j$ avec $i, j = 1, ..., n$) et $b_1, b_2, ..., b_n \in L$ des propositions indépendantes ($b_i \wedge b_j = 0$ $\forall i \neq j$ avec $i, j = 1, ..., n$) telle que $a_i < b_i$ $\forall i = 1, ..., n$. Alors:*

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i < \bigvee_{i=1}^{n} b_i$$

Le théorème est démontré par induction selon n.

Théorème 2.10. *Quels que soient $a, b \in \mathcal{L}$ avec $a < b$ on a $b^{\perp} < a^{\perp}$.*

Démonstration. En utilisant la fonction caractéristique pour les propositions nous obtenons:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow 1 - f(a) \leq 1 - f(b) \Leftrightarrow b^{\perp} < a^{\perp}. \square$$

Hypothèse 2.11. *Quel que soit $b \in \mathcal{L}$ il résulte:*

$$\bigwedge_{a \in L} a < b < \bigvee_{a \in L} a$$

Définition 2.12. *Soit $a, b \in \mathcal{L}$. On dit que $a \subset b$ s'il y a $c \in \mathcal{L}$ tel que $b = a \vee c$.*

Lemme 2.13. *Soit $a, b \in \mathcal{L}$. Pour $a \subset b$ on a, $a < b$.*

Démonstration. En utilisant la fonction caractéristique pour les propositions nous obtenons: $b = a \vee c \Leftrightarrow f(b) = f(a \vee c)$.
Donc, pour:

$$f(b) = 1 \Rightarrow f(a \vee c) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &1)\ f(a) = 1 \text{ et } f(c) = 1 \\ &2)\ f(a) = 1 \text{ et } f(c) = 0 \\ &3)\ f(a) = 0 \text{ et } f(c) = 1 \end{aligned}$$

$$f(a) = 1 \text{ et } f(b) = 1 \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow a < b$$
$$f(a) = 0 \text{ et } f(b) = 1 \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow a < b$$

Pour $f(b) = 0 \Rightarrow f(a \vee c) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$ et $f(b) = 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow a < b$. $\square$

Hypothèse 2.14. *Si $a_1 \supset a_2 \supset$ ...est une suite décroissante de propositions et $b \in \mathcal{L}$ est une proposition fixée telle que $a_i > b$, $i = 1, ...$ alors $\bigwedge_{i=1}^{\infty} a_i > b$.*

Le théorème suivant est considéré le double de l'hypothèse 2.14.

Théorème 2.15. *Si $a_1 \subset a_2 \subset$ ... est une suite croissante de propositions et $b \in \mathcal{L}$ est une proposition fixée telle que $a_i < b$, $i = 1, ...$ alors $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i < b$.*

La démonstration du théorème est réalisée à l'aide de l'hypothèse 2.14 et du théorème de complémentarité.

Théorème 2.16. *Soit $a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... \in \mathcal{L}$ des propositions indépendantes ($a_i \wedge a_j = b_i \wedge b_j = O \quad \forall i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, ...\}$) avec $a_i < b_i$, $i = 1, 2, ...$ Alors :*

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i < \bigvee_{i=1}^{\infty} b_i$$

Démonstration. Par le théorème 2.9 nous avons: $\bigvee_{i=1}^{n} a_i < \bigvee_{i=1}^{n} b_i$.

De la propriété de monotonie de la relation $<$ on a:

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i < \bigvee_{i=1}^{n} b_i < \bigvee_{i=1}^{\infty} b_i.$$

□

Certainement, la relation $<$ doit satisfaire aux hypothèses 2.2, 2.3, 2.11, 2.14 pour qu'il y ait répartition compatible avec elle. Pourtant, ces hypothèses ne sont pas suffisantes pour assurer l'existence d'une probabilité.

Nous allons introduire ensuite l'hypothèse 2.18, après quoi, nous allons donner le théorème de construction d'une répartition unique compatible avec la relation $<$ sur l'ensemble des propositions

Le problème de l'existance d'une répartition compatible avec la relation $\prec$ de vraiesemblance sur l'ensemble des événements dans le cas où celle-ci satisfait aux hypothèses concernant la vraisemblance, a été établi par Finetti, [2].

Nous allons considérer ensuite g variable aléatoire uniformément répartie.

Définition 2.17. *La variable aléatoire g qui satisfait à la condition:*

$$\{\omega | g(\omega) \in I_1\} \leq \{\omega | g(\omega) \in I_2\} \Leftrightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$$

s'appelle uniformément répartie.

Hypothèse 2.18. *Il y a une variable aléatoire uniformément répartie avec des valeurs en $[0, 1]$:*

$$x : (L, \mathcal{L}) \to ([0, 1], \mathcal{B})$$

avec $\mathcal{B}$ une σ-algèbre de sousintervalles de l'intervalle considéré $[0, 1]$.

Ensuite nous allons donner le théorème qui concerne la construction et l'unicité de la probabilité sur l'ensemble de propositions $\mathcal{L}$.

Théorème 2.19. *(Construction de la probabilité sur un système de propositions) Soit (L , $\mathcal{L}$, $<$) l'espace des propositions qui satisfait au xhypothèses 2.2, 2.3, 2.11, 2.14, 2.18, alors:*

i) il y a p^* unique, $p^* \in (0, 1)$ avec la propriété $a \sim G[0, p^*]$ où $a \in \mathcal{L}$ et

$$G[0, p^*] = \{b \in \mathcal{L} | x(b) \in [0, p^*]\}$$
$$G[p, q] = \{b \in \mathcal{L} | x(b) \in [p, q]\}$$

ii) Quel que soit $a \in \mathcal{L}$ une proposition, il y a $P(a)$ tel que $P(a) = p^*$.

iii) $P : \mathcal{L} \to [0, 1]$ est unique.

Démonstration. *i)* Soit $a \in L$. Notons avec $u(a) = \{p | p \in [0,1], G[0,p] > a\} \Rightarrow u(a) \neq \emptyset$,
$1 \in u(a)$ et $G[0,1] = I > a$.
Soit $p^* = inf\ u(a)$. Soit la suite décroissante $p_1 > p_2 > \ldots$ avec $p_i \in u(a)$,
$p_i \to p^*$ et $G[0,p_1] \supset G[0,p_2] \supset, \ldots, \supset G[0,p_i] > a$.
De l'hypothèse 2.14, il résulte:

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} G[0,p_i] > a \Rightarrow G[0,p^*] > a \qquad \textbf{(1)}$$

□

Nous allons considérer une suite croissante $q_1 < q_2 < \ldots$ avec $q_i \notin u(a)$
$q_i \to p^*$ et $G[0,q_i] < a \quad \forall i = 1, \ldots \quad G[0,q_1] \subset G[0,q_2] \ldots.$
Du théorème 2.15, il résulte:

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} G[0,q_i] = G[0,p^*] < a \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1)** et **(2)** il résulte $a \sim G[0,p^*]$.
Nous avons encore à démontrer l'unicité. Soit $p^* \neq p^*$. On va supposer que $p^* > p^*$
$\Rightarrow G[0,p^*] < G[0,p^*]$, on a un contradiction, donc p^*unique.

ii) Il y a aura à démontrer:
1) $P(a) \geq 0$
2) $P(I) = 1$
3) $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$ pour a et b indépendantes.
4) $P(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(a_i)$ avec $a_i \wedge a_j = 0\ \forall i \neq j$.
1) et 2) sont évidentes.
3) $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$ avec $a \sim G[0,P(a)]$ et $b \sim G[0,P(b)]$
$P(a \vee b) \sim G[0,P(a \vee b)]$
$G[P(a),P(a \vee b)] \sim G[0,P(b)]$.
Pour démontrer cette relation, supposons que $G[P(a),P(a \vee b)] \nsim G[0,P(b)]$.
Alors on suppose que $G[P(a),P(a \vee b)] > G[0,P(b)]$ il resulte:
$G[0,P(a)] \vee G[P(a),P(a \vee b)] > G[0,P(a \vee b)]$. Contradiction.
D'une manière analogue on démontre aussi l'inégalité inverse.
Donc, on a:
$G[P(a),P(a \vee b)] \sim G[0,P(b)]$.
$G[0,P(a)] \vee G[P(a),P(a \vee b)] = G[0,P(a \vee b)] \Rightarrow b \sim G[P(a),P(a \vee b)]$.
Il va résulter:
$P(a) + P(b) = P(a \vee b)$
4) Pour le démontrer on va introduire deux lemmes.

Lemme 2.20. *Soit la suite de propositions* $a_1 \supset a_2 \supset \ldots$ *tel que* $\bigwedge_{i=1}^{\infty} a_i = 0$. *Alors:*

$$\lim_{i \to \infty} P(a_i) = 0$$

Remarque 2.21. *Nous allons considérer comme satisfaisantes les hypothèses 2.2, 2.3, 2.11, 2.14, 2.18.*

Démonstration. $a_1 \sim G[0, P(a_1)]$, $a_2 \sim G[0, P(a_2)], \ldots$.
Soit $P(a_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \quad 0 \leq b_i \leq 1$. Conformément au lemme on a: $b_i \to b^*$. Il y a deux possibilités:

a) $b^* = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(a_i) = 0$

b) $b^* \neq 0$

$$G[0, P(a_1)] > G[0, b^*]$$
$$G[0, P(a_2)] > G[0, b^*]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De l'hypothèse 2.11 il résulte $\bigwedge_{i=1}^{\infty} G[0, P(a_i)] = \bigwedge_{i=1}^{\infty} a_i > G[0, b^*] \Rightarrow \emptyset > G[0, b^*] > \emptyset$ $\Rightarrow G[0, b^*] = \emptyset \Rightarrow G[0, b^*] \sim G[0, 0]$ mais b^*est unique $\Rightarrow b^* = 0$, contradiction. □

$$P(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i) = P(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) + P(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i)$$

Lemme 2.22. $P(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)$ *quel que soit* $a_i \wedge a_j = 0 \ \forall i \neq j$.

La démonstration est banale.

Démonstration. de 4) Nous allons noter : $b_n = \bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i$. Il résulte $b_1 \supset b_2, \ldots$ et du lemme 2.20 on a: $\lim_{n\to\infty} P(b_n) = 0$

$$P(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\right) + \lim_{n\to\infty} P(b_n) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) + 0$$

ainsi *ii)* est démontré.

iii) Supposons qu'il y a $P' : \mathcal{L} \to [0,1]$ avec $P \neq P'$.
On démontre que, quel que soit $a \in \mathcal{L}$, $P(a) = P'(a)$ avec $a \sim G[0, p^*]$.
$P'(a) = P'(G[0, p^*]) = p^* = P(G[0, p^*]) = P(a)$.
Le théorème est ainsi démontré. □

Bibliographie

[1] M. de Groot, *Optimal statistical decision*, Mc. Graw Hill, 1974.
[2] B. de Finetti, *Théorie de l'information*, Springer Verlag, 1974, pp. 21-36.
[3] J. Kampe de Feriet, P. Benvenuti, *Sur une classe d'informations*, C.R. Acad. Sci., Paris 269 (1971), p. 97-101.
[4] J. Sallatin, *Informations et trajectoires sur un système de propositions*, Colloques International, Paris, 1972, p. 186.
[5] J. Sallatin, *Systèmes de propositions et informations*, C.R. Acad. Sci. Paris 274A (1972), pp. 986.

[6] J. Sallatin, *Informations pures sur un système de propositions*, C.R. Acad. Sci. Paris, 275A, 1972, p. 65.
[7] J. Sallatin, *Informations, systèmes de propositions, et logique de la mecanique quantique*, Thèse de 3ème Cycle, Paris, Juin 1972.

Faculté de Mathématiques et Informatique, Université de Craiova, România