Proiecția

Pentru ca obiectele grafice 3D (care formează o scenă 3D) să poată fi redate (desenate) pe ecranul unui calculator trebuie să se facă proiectarea acestor obiecte pe un **plan de proiecție**.

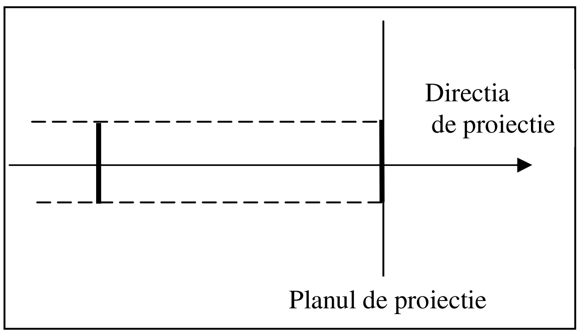
Proiecțiile pot să fie de două tipuri:

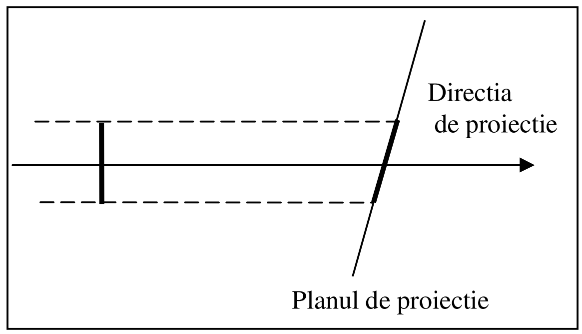
- **Proiecție paralelă** (sau cilindrică);
- **Proiecție centrală** (sau conică, sau perspectivă).

Ambele proiecții se formează cu ajutorul unor drepte, numite **drepte de proiecție**, care trec prin fiecare punct al obiectului grafic şi se rețin intersecțiile acestor drepte cu **planul de proiecție**.

Proiecția paralelă presupune că dreptele de proiecție sunt paralele cu o direcție de proiecție. In funcție de unghiul pe care îl face direcția de proiecție cu planul de proiecție, putem avea:

- **Proiecție ortogonală** - direcția de proiecție este perpendiculară pe planul de proiecție,
- **Proiecție oblică** - direcția de proiecție nu este perpendiculară pe planul de proiecție.





Proiecții ortogonale particulare:

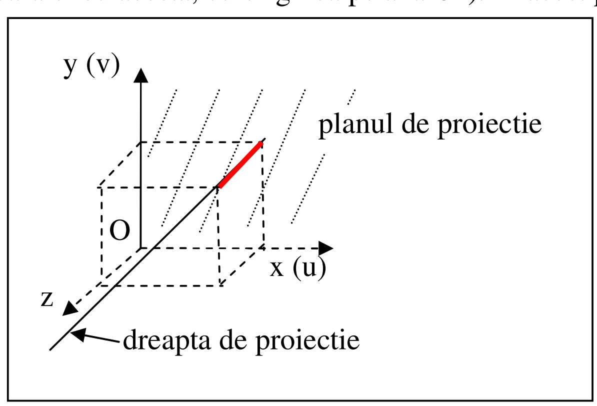
- **frontală:** vederea obiectelor din față (din poziția observatorului),
- **side:** vedere laterală,
- **top:** vedere de sus,
- **axonometrică:** dacă planul de proiecție nu este perpendicular pe axe. Dacă planul de proiecție face unghiuri egale cu cele trei axe, atunci se obține proiecția **izometrică**.

Determinarea matricelor de transformare pentru unele proiecții particulare

Proiecția paralelă ortogonală

a) **Frontală**:

- direcția de proiecție: paralelă cu Oz
- planul de proiecție: xOy (sau un plan paralel cu acesta, cu originea pe axa Oz). In acest plan de proiecție se consideră sistemul de axe coordonate uOv (care poate coincide cu xOy).



Transformarea este:

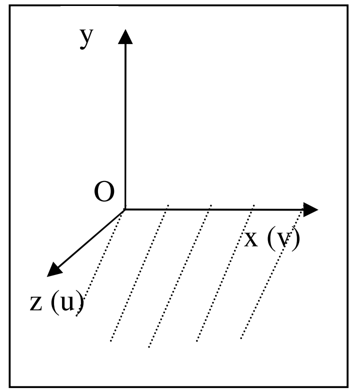
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

b). **Orizontală:**

- direcția de proiecție: paralelă cu Oy
- planul de proiecție: xOz, unde se ia sistemul uOv, care coincide cu zOx

Transformarea este:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

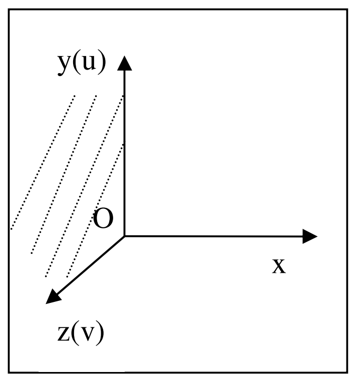


c).**Laterală**:

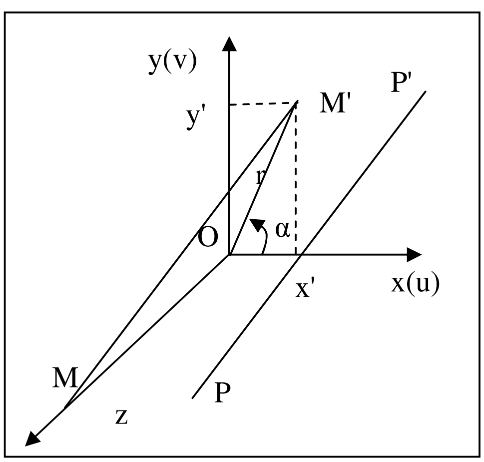
- direcția de proiecție: paralelă cu Ox
- planul de proiecție: yOz, cu sistemul de coordonate uOv, care coincide cu yOz.

Transformarea este:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Proiecția paralelă oblică



Se consideră că planul de proiecție este planul xOy. Pentru a defini direcția de proiecție se ia punctul M(0,0,1) şi se proiectează pe planul de proiecție xOy într-un punct M', definit de valorile **r** şi **α**, după cum se vede în figură. Dacă în planul xOy avem M'(x',y'), atunci**:**

x'=r∗cos(α), y'=r∗sin(α).

Fie P(x,y,z) un punct oarecare în spațiu, care se proiectează, după direcția MM', în punctul P'. După efectuarea calculelor se deduce următoarea transformare:

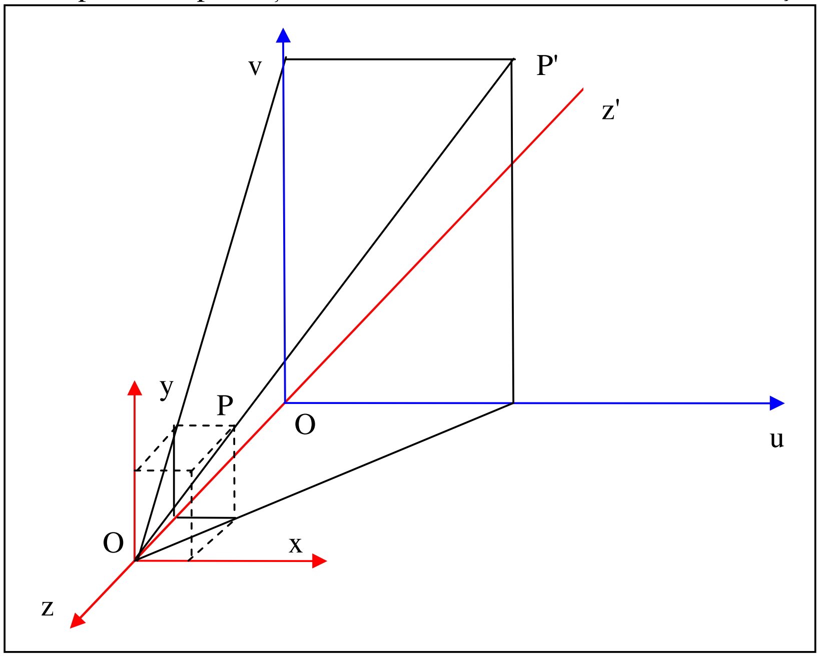
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & rz*\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & rz*\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proiecția centrală (perspectivă)

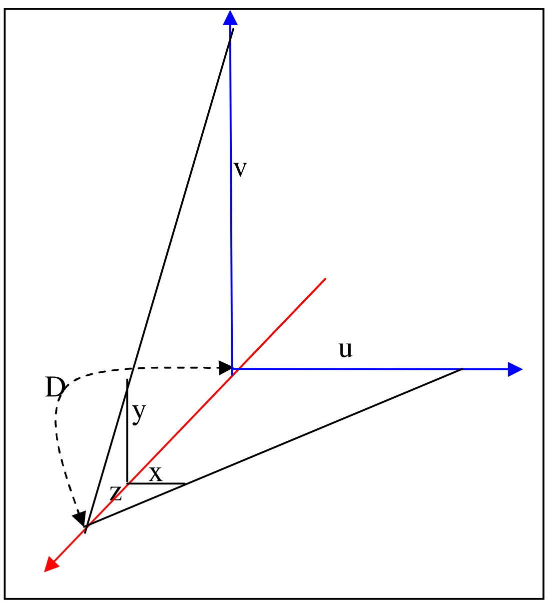
Pentru calculul unei matrice de transformare vom presupune:

- observatorul se află în origine si priveşte în direcția axei Oz'

- planul de proiecție este perpendicular pe Oz', la o distanță **D** față de observator
- în planul de proiecție vom considera un sistem de axe uOv, aşa cum se vede în figură.



Pentru un punct P(x,y,z) va trebui să determinăm P'(u,v), care este proiecția lui P pe planul z=-D (planul de proiecție este la distanța D față de observator, în direcția Oz'). Din asemănarea de triunghiuri se obține:



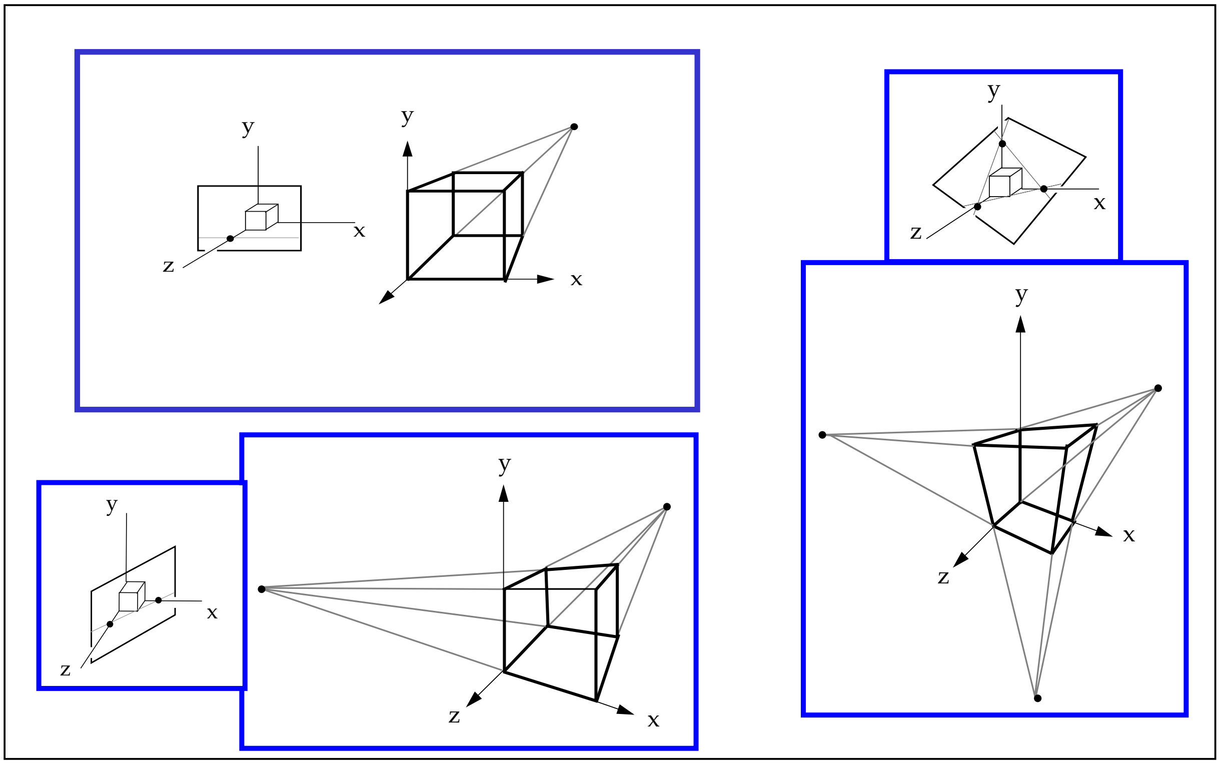
$$\frac{u}{x} = \frac{D}{z} \Rightarrow u = \frac{x * D}{z} \Rightarrow u = \frac{x}{z / D},$$

$$\frac{v}{y} = \frac{D}{z} \Rightarrow v = \frac{y * D}{z} \Rightarrow v = \frac{y}{z / D}$$

Dacă folosim coordonatele omogene, atunci dintr-un punct (u', v', w', t') în coordonate omogene se obține punctul (u'/t', v'/t', w'/t') în coordonate carteziene. Pentru relațiile precedente se deduc coordonatele (u,v) după matricea următoare:

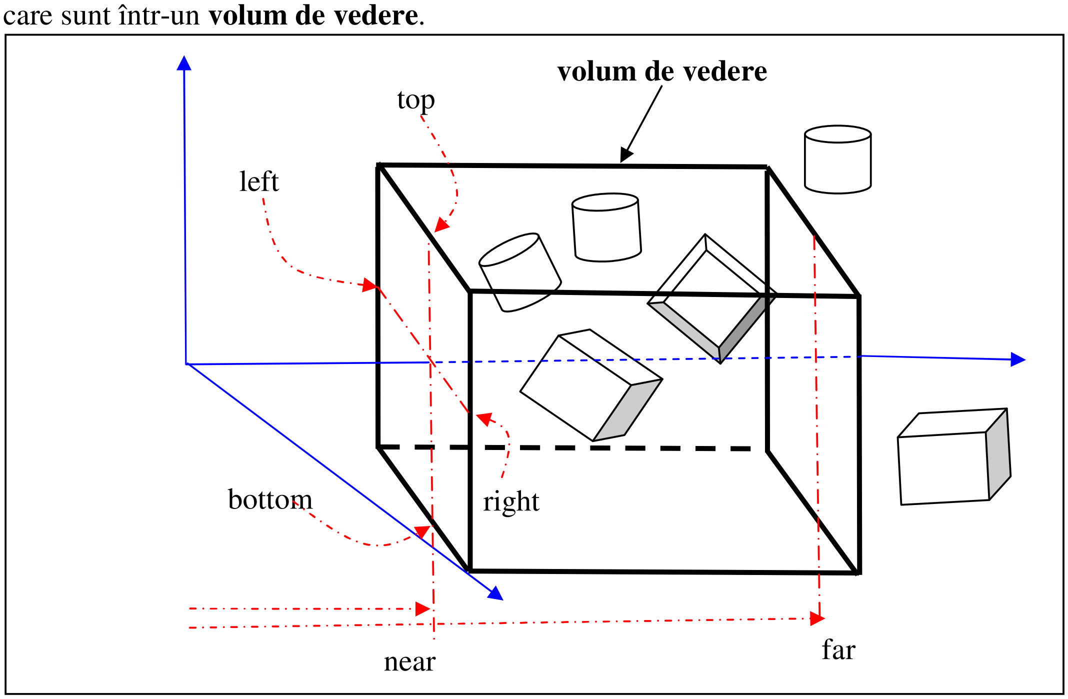
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

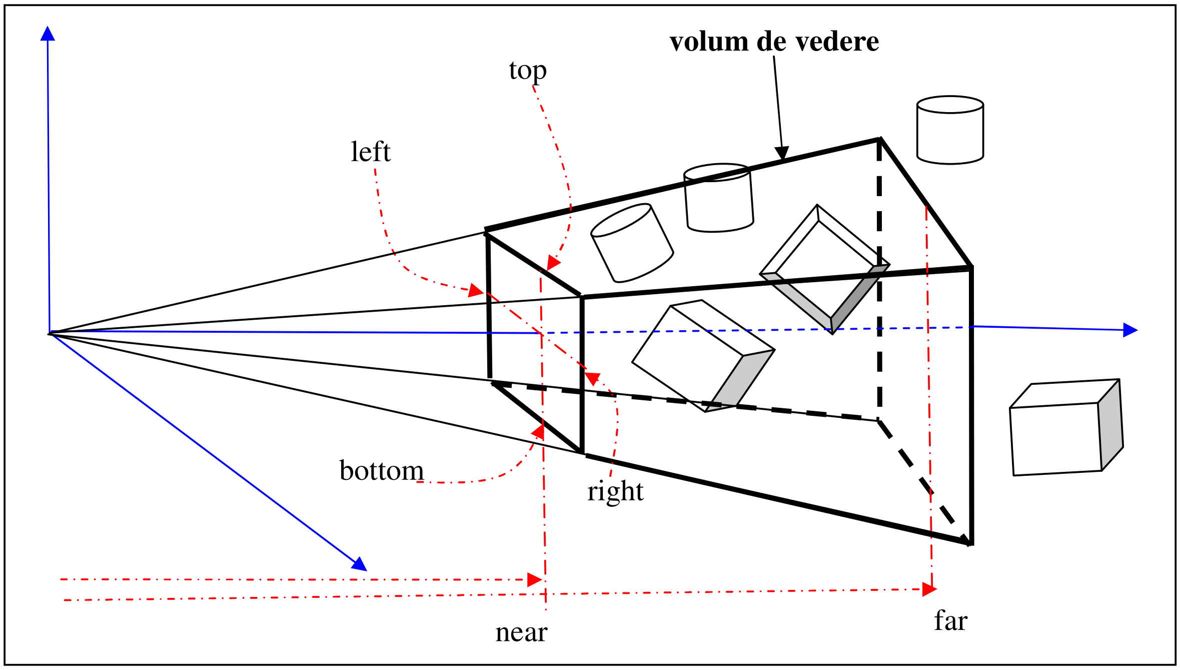
Observație. Transformarea descrisă mai sus este cu un singur punct de observare. Există transformări centrale (de perspectivă) cu 2 sau 3 puncte. In figura următoare se dă câte un exemplu pentru cele trei tipuri de proiecție amintite.



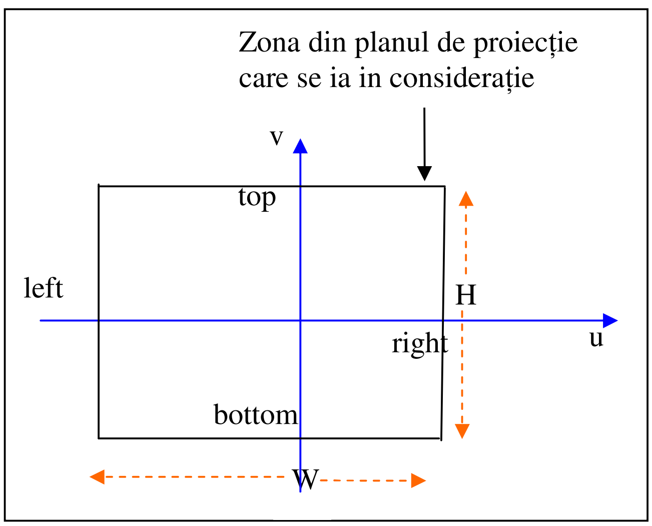
In general observatorul **nu se află în origine** şi direcţia de observare **nu este axa Oz'**. Pentru a duce observatorul în poziţia dorită din spaţiu este necesară o translaţie a acestuia, iar pentru ca direcţia de observare să fie cea dorită sunt necesare diverse rotaţii. Aceste transformări se precizează în acelaşi fel ca la definirea poziţiei unui obiect grafic în spaţiu. Fie **P** matricea de proiecţie (de transformare) în care se păstrează tipul de proiecţie şi eventualele transformări ale poziţiei observatorului.

Pentru vizualizare se vor lua în considerare numai obiecte grafice (sau părţi ale acestora) care sunt într-un **volum de vedere**.





Prin precizarea unui astfel de volum de vedere, se deduce faptul că în planul de proiecție **uOv** se vor lua numai punctele care vor fi într-un anumit dreptunghi. Fie W şi H dimensiunile



acestui dreptunghi. In momentul în care un punct aparține sau nu volumului de vedere, ar fi mai uşor dacă dreptunghiul de mai sus ar fi transformat la

[-1,1]x[-1,1]

(un punct care are una din coordonate supraunitară nu mai aparține volumului de vedere). Pentru aceasta vom aplica o nouă transformare ce aduce un punct din planul de proiecție în acest dreptunghi. Această transformare se determină dacă vom considera funcția:

$f:[a,b] \to [-1,1]$,

$$f(x) = \frac{2}{b-a} * x - \frac{a+b}{b-a}.$$

Comparațiile unui punct cu volumul de vedere se simplifică şi mai mult dacă valoarea celei de-a treia coordonate ar fi în intervalul [0,1] (sau se poate lua intervalul [-1, 1]). Pentru aceasta punctele din interiorul volumului de vedere, deci din intervalul [near,far] pentru axa Oz, ar trebui transformate în intervalul [0,1]. Pentru a determina această transformare este necesară funcția:

$f:[a,b] \to [0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{b-a} * x - \frac{a}{b-a}.$$

Din cele de mai sus rezultă următoarele că volumul de vedere:

$$[\text{left,right}] \times [\text{bottom,top}] \times [\text{near,far}]$$

se poate transforma în volumul normalizat:

$$[-1,1] \times [-1,1] \times [0,1].$$

In acest caz matricea de transformare (matricea de normalizare) este:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & \frac{1}{far-near} & -\frac{near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Precizarea tipurilor de proiecție în **OpenGL**:

- **Proiecția paralelă ortogonală:**

glOrtho(left, right, bottom, top, near, far),

unde argumentele sunt de tip **GLdouble**.

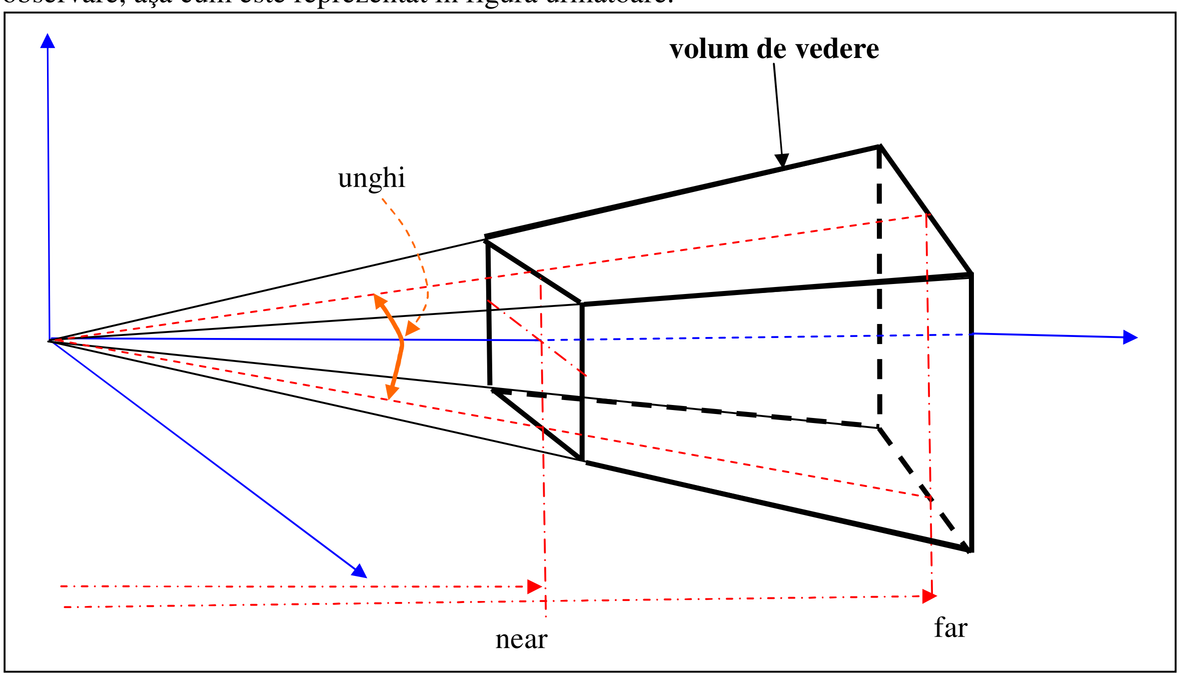
- **Proiecția centrală:**

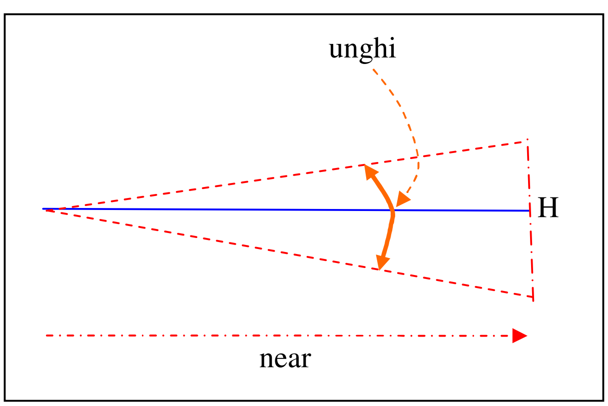
glFrustum(left, right, bottom, top, near, far)

sau:

gluPerspective(unghi, raport, near, far)

unde "unghi" este unghiul, pe verticală, sub care se vede volumul de vedere din punctul de observare, așa cum este reprezentat în figura următoare.





Folosind anumite elemente din figura precedentă se obține figura alăturată, din care se deduce:

$$tg\left(\frac{unghi}{2}\right) = \frac{H/2}{near} \quad \Rightarrow \quad H = 2 * near * tg\left(\frac{unghi}{2}\right).$$

Al doilea argument din funcția **gluPerspective** reprezintă: $raport = W / H$, deci raportul dintre lățimea și înălțimea dreptunghiului din planul de proiecție.

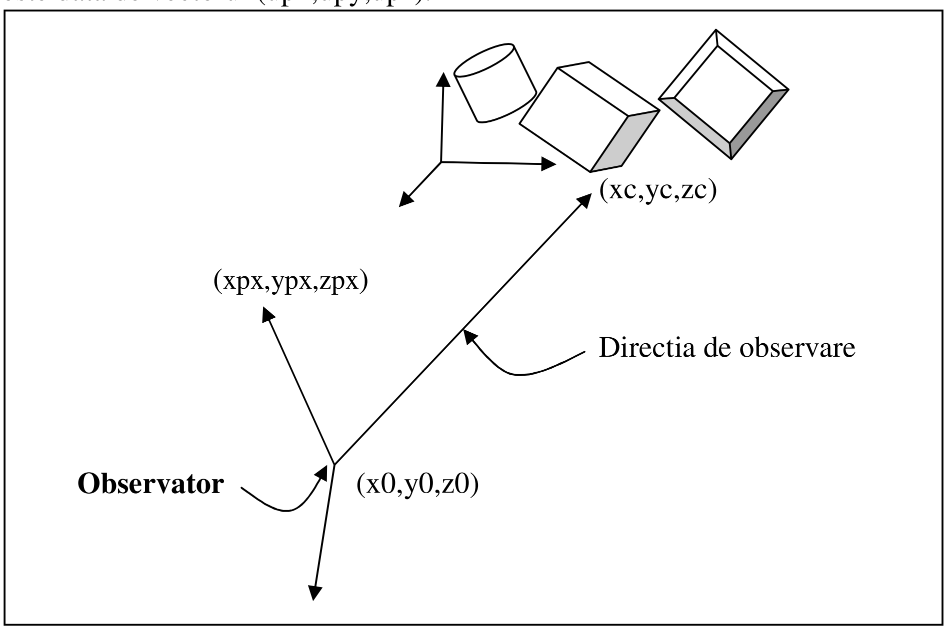
Prin precedentele funcții se precizează tipul de proiecție și volumul de vedere. Pentru fiecare din funcții se presupune că observatorul este în origine și privește în direcția axei Oz'.

Plecând de la aceste funcții se generează o matrice care se înmulţeşte cu matricea curentă de proiecție şi va rezulta o **matrice curentă de proiecție**. Dacă poziția observatorului se schimbă, sau se modifică direcția de observare, atunci se pot folosi funcții de translație şi rotație, deci matricea de proiecție curentă se înmulţeşte cu o matrice generată de aceste transformări.

O variantă mai simplă de precizare a poziției observatorului şi a direcției de observare constă în utilizarea funcției:

gluLookAt(x0,y0,z0,xc,yc,zc,upx,upy,upz)

După precizarea tipului de proiecție, se poate folosi aceasta comanda pentru a preciza ca observatorul se afla in (x0,y0,z0), priveste in punctul (xc,yc,zc), iar in planul de proiectie verticala este data de vectorul (upx,upy,upz).



Observație. La precizarea unui punct oarecare dintr-o primitivă de desenare trebuie să fie precizate transformările pentru spațiul modelului şi transformările necesare pentru proiecție. In această situație se determină imediat şi proiecția acestui punct înplanul de proiecție, şi de aici în obiectul unde se face desenarea.

```
gl.glMatrixMode(gl.GL_MODELVIEW);
gl.glLoadIdentity();
```
transformări pentru obiectul care se descrie

```
gl.glMatrixMode(gl.GL_PROJECTION);
gl.glLoadIdentity();
```
precizarea tipului de proiecție, poziția observatorului şi direcția de observare

```
gl.glBegin(gl....);   //tip primitiva
  gl.glVertex3f(... );  //punct curent
  ......
gl.glEnd();
```