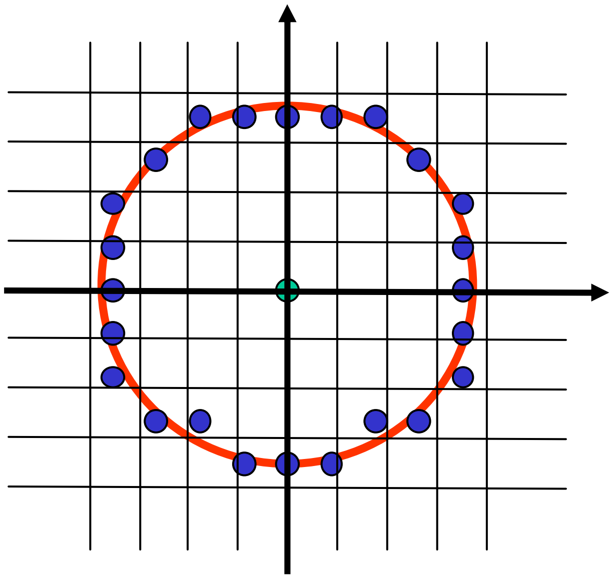
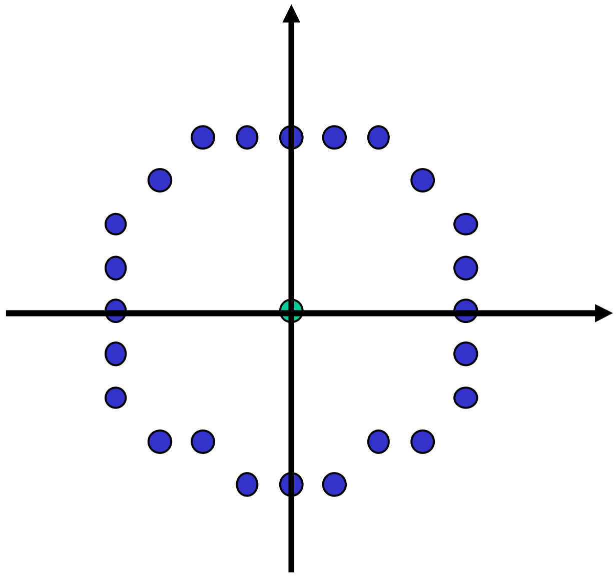
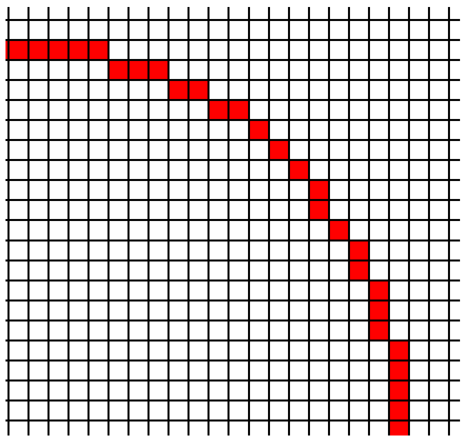
Generarea cercurilor

Exemple pentru generarea (desenarea) cercurilor pe ecran:

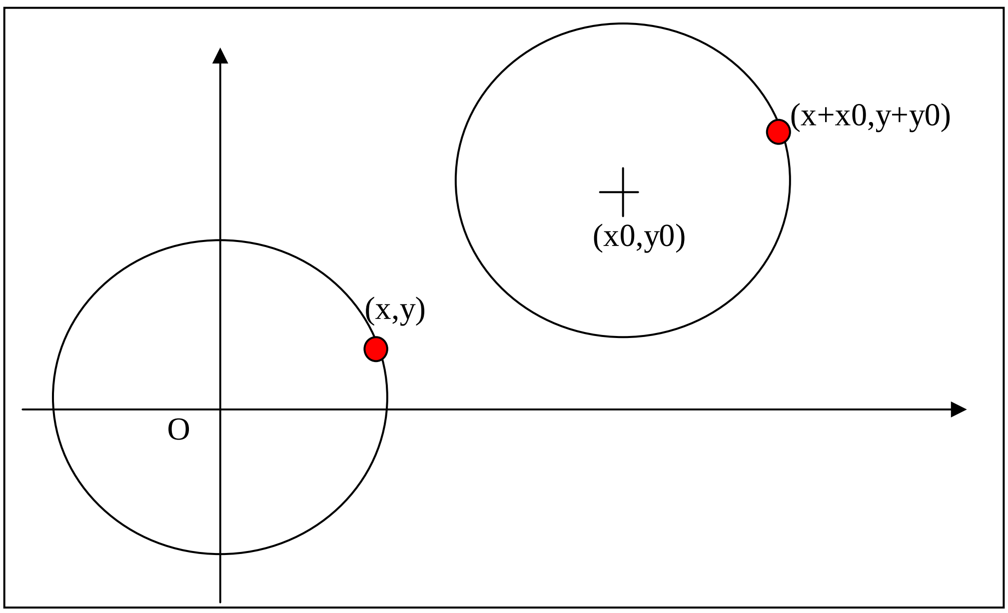






Metode de generare a punctelor de pe cerc

Presupunem că trebuie să generăm (desenăm) un cerc cu centrul în **(x0,y0)** şi de rază **R**. Pentru a realiza acest desen cât mai simplu, vom genera toate punctele de pe cercul cu centrul în origine şi de rază R, după care vom face o translatare a fiecărui punct cu valorile **x0** şi **y0** pe direcţia celor două axe.



Metoda 1 de desenare a cercului. O metodă de desenare (generare) va aproxima cercul printr-un poligon regulat cu un anumit număr de laturi. Pentru aceasta vom împărţi cercul în **n** părţi egale, fiecare astfel de arc având măsura $\alpha_0 = 2\pi / n$. Cele **n** arce obţinute se vor aproxima prin coarda ce uneşte extremităţile arcului. Pentru a calcula coordonatele extremităţilor arcelor vom pleca de la forma parametrică pentru ecuaţia cercului (cu centrul în origine):

$$x = R * \cos(\alpha), \quad y = R * \sin(\alpha)$$

Pentru a micşora timpul de execuţie trebuie evitată determinarea valorilor sin(α) şi cos(α) pentru fiecare valoare a lui α. Dacă **x** şi **y** sunt valorile obţinute pentru un unghi α, atunci prin mărirea lui α cu valoarea α_0 se obţine:

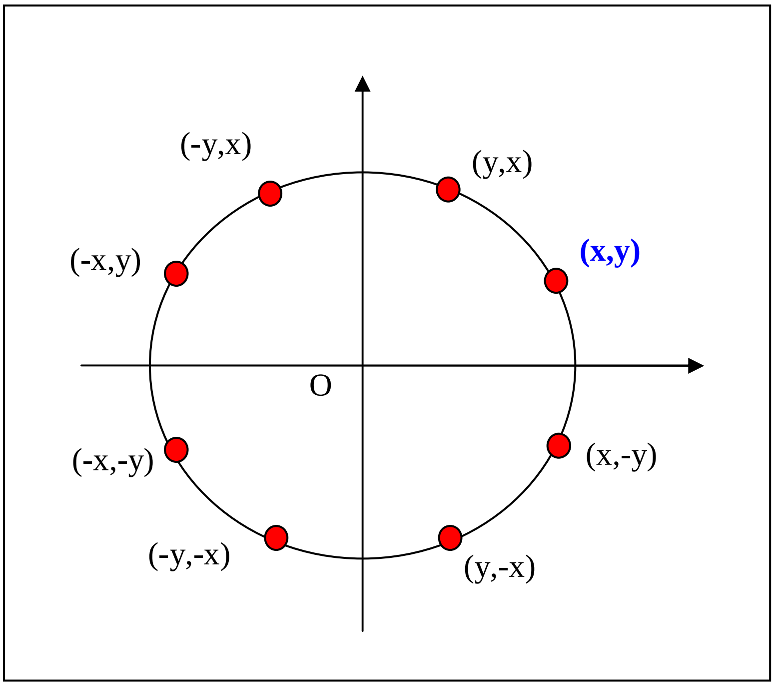
x' = R∗cos($\alpha + \alpha_0$)=R∗cos(α)∗cos(α_0)-R∗sin(α)∗sin(α_0)=x∗cos(α_0)-y∗sin(α_0);
y'=R∗sin($\alpha + \alpha_0$)=R∗sin(α)∗cos(α_0)+R∗cos(α)∗sin(α_0)=x∗sin(α_0)+y∗cos(α_0).

Dacă se calculează valorile **sin(** α_0 **)** şi **cos(** α_0 **)** înainte de a începe calculul coordonatelor vârfurilor de pe cerc, atunci noile valori **(x', y')** se calculează repede folosind coordonatele **(x,y)** ale punctului anterior după formulele următoare:

x'=x∗c-y∗s; y'=x∗s+y∗c,

unde s=sin(α_0), c=cos(α_0).

Optimizarea generării
Să presupunem că printr-un anumit procedeu am reuşit să găsim un punct de pe cerc, cu coordonatele (x,y). In continuare putem determina alte şapte puncte de pe cerc, aşa cum rezultă din figură.



In acest caz procedura ce desenează, cu o anumită culoare, punctul de coordonate (x,y) şi cele 7 puncte simetrice indicate mai sus este:

```
Procedure Simetrice(x,y,x0,y0,culoare){
  //(x0,y0) sunt coordonatele centrului cercului
  ScriePixel(x0+x,y0+x,culoare);
  ScriePixel(x0+y,y0+y,culoare);
  ScriePixel(x0-y,y0+x,culoare);
  ScriePixel(x0-x,y0+y,culoare);
  ScriePixel(x0-x,y0-y,culoare);
  ScriePixel(x0-y,y0-x,culoare);
  ScriePixel(x0+y,y0-x,culoare);
  ScriePixel(x0+x,y0-y,culoare);
}
```

Pentru a determina (genera) 1/8 dintr-un cerc se poate proceda în mai multe feluri.

Metoda a 2-a de desenare a cercului. Folosim ecuaţia cercului cu centrul în origine şi de rază R:

$$x^2+y^2=R^2,$$

se obţine:

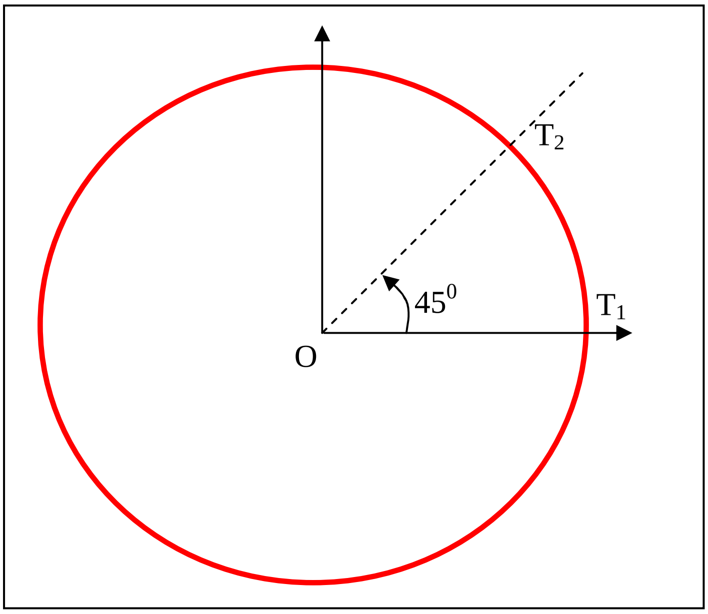
$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Pentru **y=0,1,...** vom determina valoarea lui **x** după formula precedentă. Pentru **y** vom lua valori până când se întâlneşte prima bisectoare (sau până la valoarea $R/\sqrt{2}$). Cu aceste valori se obţine 1/8 din cerc. Algoritmul pe care-l obţinem este simplu, dar din cauză că trebuie calculat radicalul dintr-un număr, se măreşte timpul de execuţie.

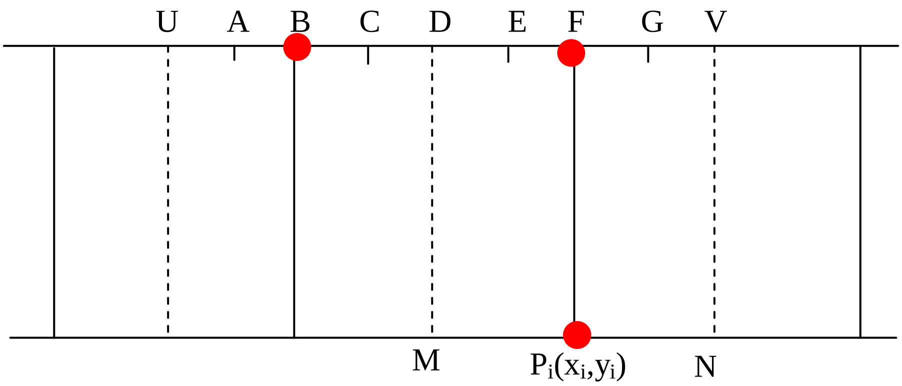
```
v=R*R;
y=0; x=R;
while (x>=y) {
  Simetrice(x,y,x0,y0,culoare);
  y=y+1;
  x=round(sqrt(v-y*y));
}
```

Observaţie: Punctele de pe axe şi de pe cele două bisectoare se generează de două ori.

Metoda a 3-a de desenare a cercului: algoritmul lui Bresenham. Acest algoritm permite generarea punctelor de pe 1/8 din cerc. Presupunem că această generare se referă la arcul $\mathbf{T_1T_2}$ din figura următoare, deci de pe cercul cu centrul în origine şi de rază R.



Dacă la un moment dat s-a selectat un punct **$P_i(x_i, y_i)$** ce aparţine cercului (iniţial se ia punctul **$P_0=T_1(R,0)$**), atunci următorul punct de pe cerc se alege între punctele **B**(x_i-1, y_i+1) şi **F**(x_i, y_i+1), deci **P_{i+1}**(x_{i+1}, y_{i+1}), cu $x_{i+1}= x_i$ sau x_i-1, iar $y_{i+1}=y_i+1$.



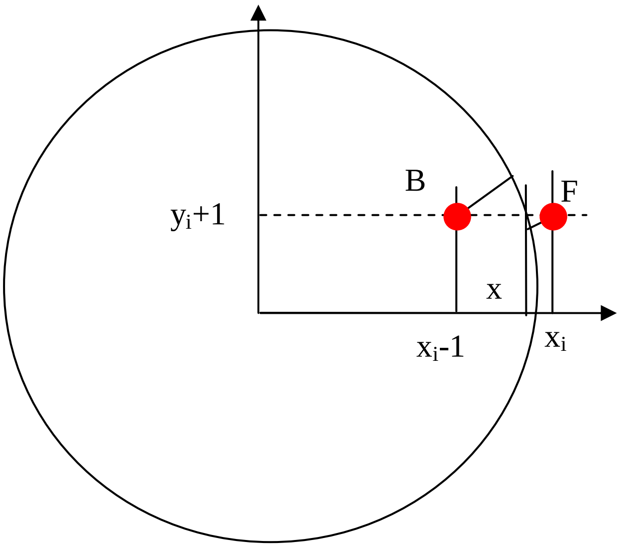
Fie (C) cercul: $x^2+y^2-R^2=0$.

Dacă $f(x,y)= x^2+y^2-R^2$, atunci:

- f(x,y)=0 pentru puncte (x,y) de pe cerc,
- f(x,y)<0 pentru punctele (x,y) din interiorul cercului (C)
- f(x,y)>0 pentru punctele (x,y) din exteriorul cercului (C)

Deoarece a fost selectat punctul **$P_i(x_i,y_i)$**, aşa cum este marcat pe figura de mai sus, se poate afirma că cercul (C) intersectează segmentul MN. Luând numai arcul T_1T_2, dintr-o figură precedentă, următoarea intersecţie ce ne interesează va fi în segmentul UV (orice coardă la arcul de cerc va fi paralelă cu tangenta la cerc într-un anumit punct interior al arcului de cerc, dar tangenta într-un astfel de punct va avea coeficientul unghiular cuprins între $-\infty$ şi -1).

Pe segmentul UV s-au reprezentat diferite situaţii de intersecţie ale cercului cu acest segment. Dintre punctele **B** şi **F** se alege acela care este mai apropiat de cerc. Pentru a verifica situaţia care apare, trebuie efectuale următoarele calcule:



$x = \sqrt{R^2 - (y_i + 1)^2}$,

d_i = diferenţa distanţelor de la punctele F şi B la cerc, care se aproximează cu diferenţa absciselor acestor puncte faţă de abscisa punctului de intersecţie:

$$d_i = (x_i - x) - [x - (x_i - 1)] = 2 * x_i - \sqrt{R^2 - (y_i + 1)^2} - 1$$

Dacă d_i>=0, atunci se alege **P_{i+1}=B**, altfel **P_{i+1}=F**. Deoarece calculul lui **d_i** este mai complicat (durează mai mult), vom înlocui valoarea lui **d_i** cu următoarea valoare:

(*) d_i = |f(F)|-|f(B)|.

Noua valoare este mai simplu de calculat şi are aproape acelaşi efect ca şi precedenta (cu excepţia unor puncte din jurul lui D). Această afirmaţie se justifică în continuare.

Pentru cazul în care cercul trece prin puncte de tipul B, C, D, E, F avem f(B)<=0, deci |f(B)|=-f(B), deci:

(**) d_i=f(F)+f(B)

Pentru puncte de tip G avem |f(F)|-|f(B)|<0, dar f(F)<0, f(B)<0, deci f(F)+f(B)<0. Deoarece dorim numai semnul valorii, putem lua d_i=f(F)+f(B).

Pentru puncte de tipul A avem f(B)>0, dar |f(F)|-|f(B)|>0 şi f(F)+f(B)>0, deci putem folosi (**) şi în aceste cazuri.

Valoarea (**) se poate calcula destul de uşor. Pentru a nu evalua **d_i** din (**) la fiecare pas, vom căuta o formulă de recurenţă. Avem:

$$d_i = f(F) + f(B) = x_i^2 + (y_i + 1)^2 - R^2 + (x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - R^2$$
$$d_i = 2x_i^2 - 2x_i + 2y_i^2 + 4y_i + 3 - 2R^2 .$$

Analog putem determina:

$$d_{i+1} = 2x_{i+1}^2 - 2x_{i+1} + 2y_{i+1}^2 + 4y_{i+1} + 3 - 2R^2$$

Scăzând cele două relaţii şi având în vedere că $y_{i+1} = y_i + 1$, obţinem:

$$d_{i+1} - d_i = 2(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i - 1) + 2(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i + 2),$$
$$d_{i+1} - d_i = 2(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i - 1) + 4y_i + 6.$$

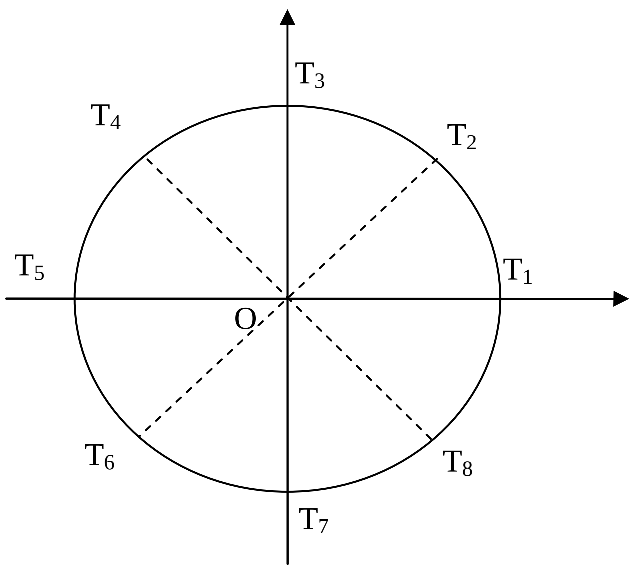
Dacă $d_i>=0$, atunci $P_{i+1}=B$ şi $x_{i+1}=x_i-1$, deci $d_{i+1}=d_i+4(y_i-x_i)+10$,
iar dacă $d_i<0$, atunci $P_{i+1}=F$ şi $x_{i+1}=x_i$, deci $d_{i+1}=d_i+4y_i+6$.

Pentru $\mathbf{P_0=T_1(R,0)}$, obţinem: $\mathbf{d_0=2R^2-2R+3-2R^2=3-2R}$.

Folosind aceste calcule, se poate scrie următoarea procedură (în pseudocod) pentru desenarea unui cerc:

```
Procedure Cerc(x0,y0,R,culoare){
  Var x,y,d: integer;
  y:=0; x:=R; d:=3-2*R;
  while x>=y {
    Simetrice(x,y,x0,y0,culoare);
    if d<0 then d:=d+4*y+6
    else {d:=d+4*(y-x)+10; x:=x-1;}
    y:=y+1;
  }
}
```

Desenarea unui cerc cu un model



Deoarece se generează numai 1/8 din cerc, celelalte 7 puncte obţinându-se prin simetrie, această variantă nu se poate folosi pentru a desena cercul cu ajutorul unui model. Pentru a putea realiza acest desen se poate alege una din soluţiile:

1. Efectuăm calculele pentru fiecare porţiune (de 1/8) din cerc.

2. Generăm punctele de pe arcul T_1T_2 aşa cum a fost descris. In continuare generăm punctele de pe acelaşi arc, dar în ordinea de la T_2 la T_1, iar pentru fiecare punct (x,y) generăm (y,x) de pe arcul T_2T_3.
Prin parcurgerea aceluiaşi arc T_1T_2, în diverse sensuri, se pot genera punctele de pe tot cercul.

3. La parcurgerea arcului T_1T_2 se memorează punctele obţinute. Prin parcurgerea acestui vector într-o anumită direcţie se pot genera punctele de pe orice arc T_iT_{i+1}.

Determinarea cercului ce trece prin trei puncte

Fie $P_i(x_i, y_i)$, i=1,2,3 trei puncte de pe ecran. Dacă C(x0,y0) este centrul cercului de rază R, ce trece prin aceste puncte, atunci obţinem relaţiile:

(1) $(x_1 - x0)^2 + (y_1 - y0)^2 = R^2,$
(2) $(x_2 - x0)^2 + (y_2 - y0)^2 = R^2,$
(3) $(x_3 - x0)^2 + (y_3 - y0)^2 = R^2,$

Va trebui ca din aceste relaţii să determinăm centrul cercului (x0,y0) şi raza R a acestuia.

Prin scăderea relaţiei (2) din (1) şi a relaţiei (3) din (2) obţinem:

(4) $$\begin{cases} -2*x0*(x_1-x_2)-2*y0*(y_1-y_2)+(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)=0, \\ -2*x0*(x_2-x_3)-2*y0*(y_2-y_3)+(x_2^2-x_3^2)+(y_2^2-y_3^2)=0 \end{cases}.$$

Dacă notăm:

$$a = 2(x_1 - x_2), \quad b = 2(y_1 - y_2),$$
$$c = 2(x_2 - x3), \quad d = 2(y_2 - y_3),$$
$$e = (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2),$$
$$f = (x_2^2 - x_3^2) + (y_2^2 - y_3^2)$$

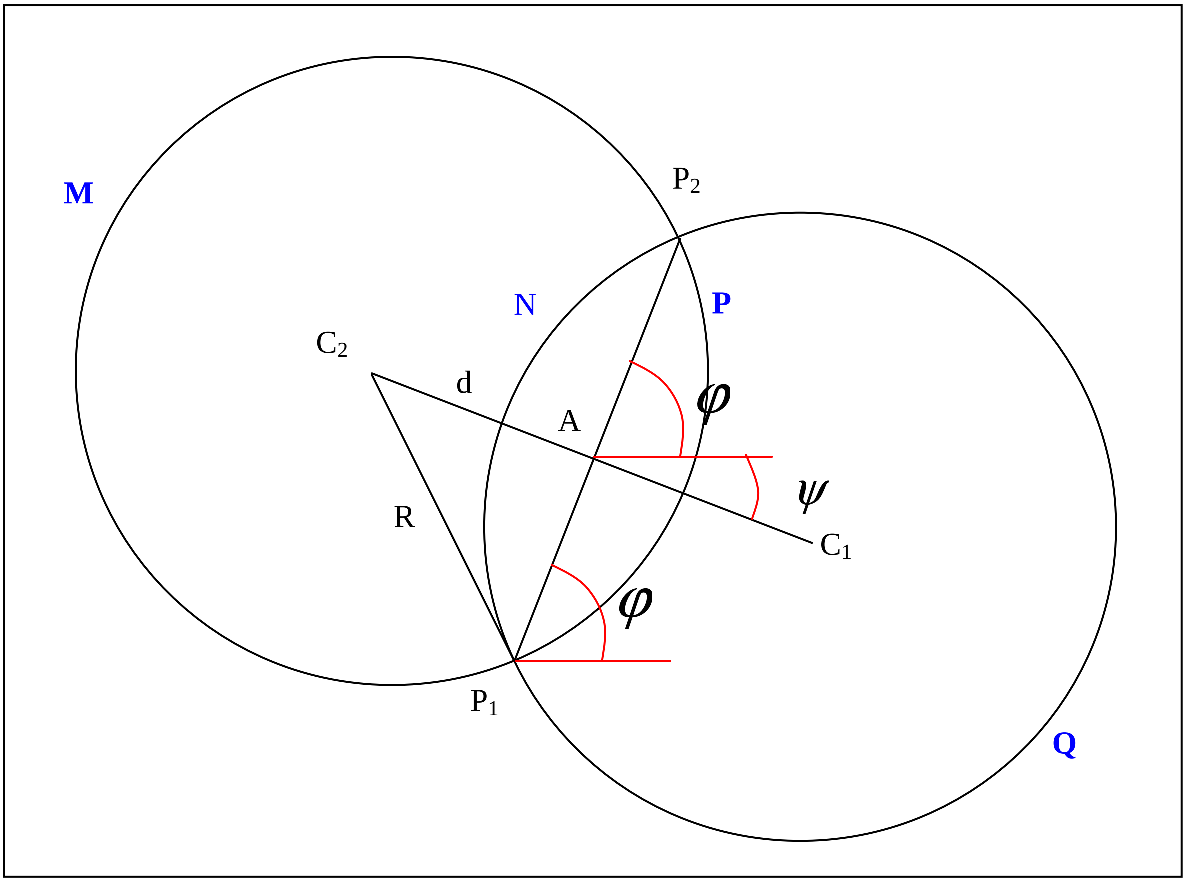
atunci soluţia sistemului (4) de mai sus este:

$$x0 = \frac{d*e-b*f}{a*d-b*c}, \quad y0 = \frac{a*f-c*e}{a*d-b*c}.$$

Numitorul a*d-b*c este nul dacă cele trei puncte: P_1, P_2, P_3 sunt coliniare. După determinarea centrului cercului se poate determina raza (de exemplu din (1)).

Determinarea unor arce de cerc

Se pune problema determinării unui arc de cerc care trece prin două puncte **$P_1(x_1, y_1)$** și **$P_2(x_2, y_2)$** și are o rază **R**. Deoarece există patru soluţii, mai trebuie anumite ipoteze, pe care le vom preciza mai târziu.



Centrul cercului ce trece prin $\mathbf{P_1}$ şi $\mathbf{P_2}$ şi are raza **R** se află pe mediatoarea segmentului $\mathbf{P_1P_2}$.

Mijlocul segmentului $\mathbf{P_1P_2}$ are coordonatele $\mathbf{A(x_A, y_A)}$, unde $x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_A = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Dreapta (P_1P_2) are coeficientul unghiular: $m = tg(\varphi) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Mediatoarea segmentului $\mathbf{P_1P_2}$ (pe care se află centrele cercurilor) are coeficientul unghiular:

$m' = -tg(\psi) = -\frac{1}{m}$.

Ecuaţia acestei mediatoare va fi:

(1) $$y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A)$$

Pe mediatoarea lui P_1P_2 vom lua un punct C_1 (sau C_2) aflat la o distanţă **R** de P_1 (R=raza cercului).
Dacă **d** este distanţa de la centrul cercului la A, atunci:

$d^2 = R^2 - P_1A^2 = v$.

Dacă:

- v<0, atunci centrul cercului nu se poate determina (raza este mai mică decât jumătatea distanţei dintre P_1 şi P_2;
- Dacă v=0, atunci centrul cercului este punctul A;
- Dacă v>0, atunci există două soluţii, C_1 şi C_2.

Dacă **(xc, yc)** sunt coordonatele centrului cercului (în acest moment sunt valori necunoscute), atunci:

$$d^2 = (x_A - xc)^2 + (y_A - yc)^2,$$

iar (xc, yc) verifică ecuaţia (1), deci: $d^2 = (y_A - yc)^2(1+m^2)$.

Cele două soluţii posibile sunt:

$$yc = y_A \pm \frac{d}{\sqrt{1+m^2}}, \quad xc = x_A \pm \frac{d*m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Dacă $x_1=x_2$ (punctele P_1 şi P_2 au aceeaşi abscisă), atunci calculele precedente nu mai trebuie efectuate ($m=\pm\infty$) şi se obţin valorile:

$$yc = y_A,\ xc = x_A \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2}.$$

Din figura precedentă se observă că există patru arce pentru soluţia problemei: P_1MP_2, P_1NP_2, P_1PP_2, P_1QP_2. Pentru a rămâne numai o soluţie sunt necesare ipoteze suplimentare. Una dintre ipoteze poate să se refere la trecerea de la P_1 (iniţial) la P_2 (final) în sens trigonometric, deci rămân numai două arce: P_1PP_2, P_1QP_2.

A doua ipoteză se poate referi la mărimea arcului (în cazul verificării ipotezei precedente):

- arcul mai mare: P_1QP_2
- arcul mai mic: P_1PP_2

Dacă P_1 şi P_2 sunt două puncte pe cercul de rază R cu centrul în C(xc,yc), atunci arcul P_1P_2 se obţine cu ecuaţiile:

(2) $$\begin{cases} x = xc + R*\cos(\varphi) \\ y = yc + R*\sin(\varphi) \end{cases}$$

pentru

$\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $cu\ \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$.