A középértékek szélsőérték tulajdonságáról

Zakariás Adrienn, Oláh-Gál Róbert

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar

zakariasadrienn@uni.sapientia.ro, olahgalrobert@uni.sapientia.ro

A közgazdaságtanban gyakran előfordul a szélsőérték-keresés, mint optimalizálási feladat. Például határozzuk meg egy keresleti vagy bevételi függvény alapján, hogy melyik az optimális ár az eladáshoz. Ugyanakkor a gazdasági feladatokban szintén sűrűn megjelennek a középértékek (például számtani átlag, medián), mint helyzetmutatók. Ezek összefoglaló jellemzést adnak az adatok eloszlásáról és segítséget nyújtanak a döntéshozatalban. Elsőre talán nem gondolnánk, de a két említett feladattípus szoros kapcsolatban van, összefügg egymással. A középértékek meghatározása szélsőérték-, pontosabban minimumkeresési feladatot jelent.

A négy, közgazdaságtani területen is sokszor alkalmazott és ismert, középérték a számtani, mértani, harmonikus átlag, illetve a medián. Míg a számtani átlag és medián úgy mikroökonómiai, mint makroökonómiai adatsorok összehasonlításakor előkerül (pl. fizetések, vállalati profitok stb.), addig a mértani átlagot bonyolultabb számításokkor, például befektetések, portfóliók hosszú távú hozamának kiszámításakor, valamint összetett árindexek meghatározásakor (Fischer-féle árindex), a harmonikus közepet pedig például árfolyam-nyereség arány (P/E ratio) meghatározásához használják.

Egy adatsor esetén a számtani átlag az attól való eltérések négyzetét minimalizálja, a medián viszont az abszolút eltérésekkel teszi ezt, ezért robusztusabb, kevésbé érzékeny a kiugró értékekre. A mértani átlag a logaritmusos eltérések négyzetét, a harmonikus pedig az adatok inverzével beszorzott négyzetes eltéréseket minimalizálja.

Legyenek a_i az adatsor egyes elemei, f_i az egyes elemek gyakoriságai. Keressük azon x valós számokat, melyek az alábbi függvényeket minimalizálják. Ezen x értékek rendre a számtani közepet, medián értéket, mértani és harmonikus közepet adják meg.

1. tétel. $Sz_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i (x - a_i)^2$

2. tétel. *Me (középső érték a növekvő sorrendben)* $= \min_{x\in\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i |x - a_i|$

3. tétel. $M_a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln x - \ln a_i)^2$

4. tétel. $H_a = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}(x - a_i)^2$

Ezen tételeknek a belátása szép bizonyítási folyamat, mely segíti megérteni a szélsőérték-keresés lényegét, ahogy azt a matematikus és pedagógus Pólya György megfogalmazta: „a maximum- és minimumfeladatok eszményítik a természet és saját magunk hajlamát arra, hogy minimális erőfeszítéssel optimális eredményt érjünk el.”