

Egy geometriai versenyfeladat és általánosításai

Németh László

Soproni Egyetem, Faipari és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet

nemeth.laszlo@uni-sopron.hu

A geometriai feladatok megoldása gyakran igényel kreatív gondolkodást. Ha egy kicsit is változtatunk a feltételeken, esetleg általánosítunk, akkor elképzelhető, hogy csak nagyon hosszú és összetett gondolat-sorral jutunk a megoldáshoz. Ha már megsejtettük a megoldást, már tudjuk, hogy mit kellene bizonyítani, akkor sokkal könnyebb helyzetben vagyunk. A GeoGebra szoftver a sejtések meghatározására jól alkalmazható.

Az előadásban a Nemzetközi Matematika Olimpia (International Mathematical Olympiad – IMO) egy geometria versenyfeladatát és annak általánosításait mutatjuk be.

1. feladat (IMO 1995 Problem 1). *Legyen A, B, C, D egy egyenes négy különböző pontja, amelyek ebben a sorrendben fekszenek az egyenesen. Az AC , ill. BD átmérő fölé rajzolt körök metszéspontjai legyenek X és Y . Az XY egyenes metszéspontja a BC egyenessel legyen Z . P legyen az XY egyenes egy Z -től különböző pontja. A CP egyenes metszéspontjai az AC átmérőjű körrel legyenek C és M , a BP egyenes metszéspontjai a BD átmérőjű körrel legyenek B és N . Bizonyítsuk be, hogy az AM , DN és XY egyenesek egy ponton mennek át. (<http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199517>)*

A feladatnak Hamzić és Šabanac [1] egy egyszerű analitikus megoldását adta. Később Hamzić, Németh, és Šabanac [2] általánosította a feladatot nem feltétlen metsző körökre és analitikusan bebizonyította, hogy a két kör hatványvonala lesz az az egyenes, amely invariáns. Metsző körök esetén, az 1. feladatban az invariáns egyenes az XY egyenes.

Csiba et al. [3] tovább általánosították az IMO feladatot körök helyett általános kúpszeletek (ellipszis, hiperbola, parabola, kör) esetére is. Meghatározták, hogy az 1. feladatban szereplő szerkesztést alkalmazva egy általános egyenes minden pontjára az egyenes képe kúpszelet. A szerzők a projektív geometria eszközeinek felhasználásával megadták az invariáns egyenesek eseteit is.

Hivatkozások

- [1] D. K. Hamzić and Z. Šabanac, Two plane geometry problems approached through analytic geometry, *Math. Gaz.*, vol. 104, no. 560, pp. 1271–1286, 2020.
- [2] D. K. Hamzić, L. Németh, and Z. Šabanac, Generalization of an IMO geometry problem, *Math. Gaz.*, in press, 2025.
- [3] P. Csiba, D. K. Hamzić, L. Németh, and Z. Šabanac, A projective geometric interpretation of an International Mathematical Olympiad problem, *J. Geom.*, submitted.