Gaussz–folyamatok előadás feladatai – 2008

Csató Lehel
Matematika–Informatika Tanszék
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

1. Értelmezzük a Brown-mozgást a $[0,1]$ intervallum. A véletlen folyamat átlagfüggvénye identikusan nulla és a kovariancia-függvénye

   $$K(x,x') = \min(x,x')\,.$$

   A Brown-híd azon folyamatokat választja ki, melyek teljesítik az $f(1) = 0$ feltételt.

   (a) Számoljuk ki a Brown-folyamat f_0 kezdőértékének átlagát és szórását;

   (b) Találjuk meg a Brown-híd kovariancia-függvényét;

   (c) Generáljunk mintákat a fenti kovariancia függvénnyel a $[0,1]$ intervallum egy diszkretizációján (Matlab);

2. Válasszuk ki a Brown-mozgások közül azokat, melyekre teljesül az $f_1 = 1$ feltétel.

   (a) Találjuk meg az így keletkezett véletlen-függvénycsalád
      - átlagfüggvényét, illetve
      - kovariancia-függvényét.

   (b) Vételezzünk a fenti átlag-, illetve kovariancia-függvénnyel rendelkező Gauss-folyamatból mintákat.

3. Legyen a következő véletlenfüggvény-család:

   $$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \left\{ f(x,\boldsymbol{w}) \;\middle|\; f(x,\boldsymbol{w}) = \sum_{j=0}^{p} w_j x^j, \text{ ahol } w_j \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma_j^2\right) \;,\; \sigma_j^2 = \binom{p}{j} \right\}$$

   ahol $\boldsymbol{w} = [w_0,\ldots,w_p]^T$ vektor elemei független normális eloszlású valószínűségi változók a fentiek szerint.

   (a) Számítsuk ki a generált Gaussz-folyamat átlag- és kovariancia-függvényét.

   (b) Generáljunk véletlen-függvényeket a kovariancia-függvény szerint a $p = 2$ és $p = 6$ értékekre. Magyarázzuk meg a generált függvények viselkedését.

A megoldásokat a `lehel.csato@cs.ubbcluj.ro` címre küldjétek.