# Fraktál interpoláció

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

Fraktál függvények

Általánosított Hermite fraktál interpoláció

Spline fraktál interpoláció

# Fraktál interpoláció

Legyen $(X, d)$ egy teljes metrikus tér, $D(X)$ az X nem üres, kompakt részhalmazainak a halmaza.
$(D(X), h)$ teljes metrikus teret alkot a Hausdorff metrikával: $h : D(X) \times D(X) \to R$

$$h(A, B) := \sup\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\}$$

# Iterált függvény rendszer (IFR)

Legyen $N$ , $N > 1$ és $w_i : X \to X : i \in \{1, ..., N\}$ folytonos függvények. Ekkor $\{X, w_i : i = 1, ..., N\}$ egy *iterált függvény rendszer (IFR)*.
Ha megadható olyan $0 \leq k < 1$, amelyre tetszőleges $i \in \{1, ..., N\}$ esetén

$$d(w_i(x), w_i(x')) \leq kd(x, x'), \forall x, x' \in X,$$

az IFR *hiperbolikus*.

Legyen $W : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$

$$W(A) := \cup_{i=1}^{N} w_i(A),$$

ahol $w_i(A) = \{w_i(x) : x \in A\}$.
Akkor W egy kontrakció, ha az IFR hiperbolikus:

$$h(W(A), W(B)) \leq kh(A, B) \forall A, B \in \mathcal{D}(X).$$

$G \in D(X)$ esetén amelyre $W(G) = G$, az IFR *attraktor*ának nevezik.

## Theorem

*(Hutchinson) Legyen* $\{X, w_i \ , i = 1, ..., N\}$ *egy hiperbolikus IFR. Ekkor egyértelműen megadható egy kompakt halmaz* $G \subset X$*, úgy, hogy* $W(G) = G$*, és*

$$G := \lim_{n \to \infty} W^n(E), \ E \in \mathcal{D}(X),$$

# Fraktál interpolációs függvények

Legyen $\{(x_i, y_i) \in R^2, i = 0, 1, \cdots, N\}$ adottak, $I = [x_0, x_N]$. Az $f : I \to R,$ függvények, amelyek eleget tesznek az $f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., N$, interpolációs feltételeknek és amelyek grafikonja az IFR attraktorai, *fraktál interpolációs függvényeknek* nevezzük.

Legyen $X = I \times [a,b]$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$
$u_n : I \to I_n$, $n \in \{1,2,...,N\}$, olyan homeomorf leképezések, amelyekre

$$u_n(x_0) := x_{n-1},\ u_n(x_N) := x_n,\ \forall n \in \{1,\cdots,N\}.$$

$$|u_n(c_1) - u_n(c_2)| \leq l|c_1 - c_2|,\ c_1, c_2 \in I,\ 0 \leq l < 1$$

$v_n : X \to [a,b]$ folytonosak, és

$$v_n(x_0, y_0) := y_{n-1},\ v_n(x_N, y_N) := y_n,\ \forall n \in \{1,\cdots,N\}.$$

$$|v_n(c,d_1) - v_n(c,d_2)| \leq \alpha_n|d_1 - d_2|,\ c \in I,\ d_1, d_2 \in [a,b], 0 \leq \alpha_n <$$

Legyen $w_n : X \to X$, $n \in \{1,2,...,N\}$

$$w_n(x,y) = (u_n(x), v_n(x,y)).$$

$\{X, w_n : n = 1,2,...,N\}$ egy IFR, amely nem mindig hiperbolikus.

## Theorem

*(Barnsley) Az előbbi* $\{X, w_n : n = 1, 2, ..., N\}$ *IFR-re, megadható egy olyan az Euklideszi metrikával ekvivalens d metrika, amelyre az IFR hiperbolikus. Ekkor az IFR egyértelműen létező G attraktora ugyanakkor a grafikonja annak az* $f : I \to R$ *függvénynek, amely interpolálja az* $\{(x_i, y_i) \in R^2, i = 0, 1, \cdots, N\}$ *adatokat.*

# Példa

$\{(x_i, y_i) \in R^2, i = 0, 1, \cdots, N\}$, $N > 1$

$$w_n(x,y) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

ahol $|d_n| < 1$ adottak, $a_n, c_n, e_n, f_n$ valós számok, amelyekre

$$w_n(x_0, y_0) := (x_{n-1}, y_{n-1}),\ w_n(x_N, y_N) := (x_n, y_n)$$

innen következik, hogy

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0},$$

$$c_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n(y_N - y_0)}{x_N - x_0},$$

$$e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}$$

$$f_n = \frac{x_N y_{n-1} - x_0 y_n}{x_N - x_0} - \frac{d_n(x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}.$$

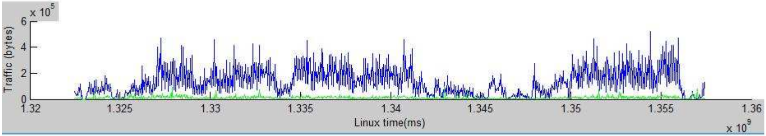


Figure: Fraktál interpolációs függvény

# Hermite fraktál interpoláció

Legyen
$\mathcal{G} = \{g : I \to \mathbb{R} | \texttt{g folytonos}, g(t_0) = x_0, g(t_N) = x_N\}$.
Tekintjük $\mathcal{G}$-n a következő metrikát

$$\rho(g,h) = \|g - h\|_\infty = max\{|g(t) - h(t)| : t \in I\}, \forall g, h \in \mathcal{G}.$$

A $(\mathcal{G}, \rho)$ teljes metrikus teren tekintjük a Read-Bajraktarević operátort:

$$Tg(t) = v_n(u_n^{-1}(t), g(u_n^{-1}(t))), t \in I_n, n = 1, 2, ..., N. \quad (1)$$

A T operátor folytonos a $[t_{n-1}, t_n],\ n = 1, 2, .., N$ intervallumokon és

$$\|Tf - Tg\|_\infty \le |\alpha|_\infty \|f - g\|_\infty \,,$$

ahol $|\alpha|_\infty = \max\{|\alpha_n|, n = 1, 2, ..., N\} < 1$, tehát a T operátornak egyértelműen létezik egy $f$ fix pontja.
A (1) alapján a fraktál interpolációs függvény eleget kell tegyen a következő összefüggésnek:

$$f(u_n(t)) = v_n(t, f(t)), t \in I, n = 1, 2, ..., N.$$

A leggyakrabban használt fraktál interpolációs függvény a következő IFR által értelmezett:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= a_n t + b_n \\ v_n(t, x) &= \alpha_n x + q_n(t), n = 1, 2, ..., N \end{aligned} \qquad (2)$$

ahol $\alpha_n$ a skálázási tényező,
$w_n(t, x) = (u_n(t), v_n(t, x)), n = 1, 2, ..., N$ és
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ az IFR skálázási vektora.

A $h$ folytonos függvényhez egy $\alpha$-fraktál függvény megszerkesztéséhez legyen $q_n(t) = h \circ u_n(t) - \alpha_n b(t)$, ahol $b$ egy valós folytonos függvény úgy, hogy $b \neq h, b(t_0) = x_0, b(t_N) = x_N$ és h-ra teljesüljön $h(t_i) = x_i, i = 1, 2, ..., N$.

## Theorem ([3])

$$\|h^\alpha - h\|_\infty \leq \frac{|\alpha|_\infty}{1 - |\alpha|_\infty} \|h - b\|_\infty .$$

Tekintjük a $t_n, x_n^{(k)},\ k = 0, 1, ..., r_n - 1, n = 0, 1, ..., N$, $t_0 < t_1 < ... < t_N$ valós számokat. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $H$ polinom, melynek fokszáma $r = -1 + \sum_{n=0}^{N} r_n$ és amelyre

$$H^{(\nu)}(t_n) = x_n^{\nu}, \nu = 0, 1, ..., r_n - 1, n = 1, 2, ..., N.$$

Ekkor a klasszikus Hermite interpolációs polinom

$$H(t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{r_n - 1} x_n^{(k)} H_{n,k}(t),$$

ahol a $H_{n,k}$ polinomok meghatározásához tekintjük a következő segéd polinomokat

$$l_{nk}(t) = \frac{(t-t_n)^k}{k!} \prod_{j=0, j\neq n}^{N} \left( \frac{t-t_j}{t_n-t_j} \right)^{r_j}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq k < r_n,$$

$H_{n,r_n-1} = l_{n,r_n-1},\ n = 0, 1, ..., N$ és rekurzívan
$k = r_n - 2, r_n - 3, ..., 0$

$$H_{n,k}(t) = l_{n,k}(t) - \sum_{s=k+1}^{r_n-1} l_{nk}^{(s)}(t_n) H_{n,s}(t).$$

Legyen a következő egyenlőközű pontrendszer
$t_0 < t_1 < ... < t_N$ és
$\{x_n^{(k)}, k = 0, 1, ..., r_n - 1, n = 0, 1, ..., N\}$. A skálázási tényezőre, $\alpha_m$ $m = 1, 2, ..., N$

$$|\alpha_m| < \frac{1}{N^p},\ p = \max\{r_n, n = 0, 1, ..., N\} - 1.$$

Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, ..., r_n - 1$ és rögzített $n$ esetén létezik egy $H^{\alpha}_{nk}$ fraktál függvény úgy, hogy

$$(H^{\alpha}_{nk})^{(\nu)}(t_m) = (H_{nk})^{(\nu)}(t_m), m = 0, 1, ..., N; \nu = 0, 1, ..., p.$$

Tekintjük a következő IFR-t:

$$\{(L_m, F^{nk}_m), m = 1, 2, ..., N\},$$

ahol $L_m(t) = \frac{t}{N} + b_m$, mivel $a_m = \frac{1}{N}$ és $F^{nk}_m(t, x) = \alpha_m x + q^{nk}_m(t)$ úgy, hogy

$$q^{nk}_m(t) = H_{nk} \circ L_m(t) - \alpha_m b_{nk}(t).$$

$$b_{nk}(t) = \sum_{\nu=0}^{p} H_{nk}^{(\nu)}(t_0)\tilde{H}_{0,\nu}(t) + \sum_{\nu=0}^{p} H_{nk}^{(\nu)}(t_N)\tilde{H}_{N,\nu}(t),$$

ahol $\tilde{H}_{0,\nu}$ és $\tilde{H}_{N,\nu}$ fundamentális Hermite polinomok,

$$\tilde{H}_{i,\nu}(t) = \tilde{l}_{i,\nu}(t) - \sum_{s=\nu+1}^{p} \tilde{l}_{i,\nu}^{(s)}(t_i)\tilde{H}_{i,s}(t)$$

$$\tilde{l}_{0,\nu}(t) = \frac{(t-t_0)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{t-t_N}{t_0-t_N}\right)^{p+1}, \tilde{l}_{N,\nu}(t) = \frac{(t-t_N)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{t-t_0}{t_N-t_0}\right)^{p+1}.$$

Az általánosított Hermite fraktál interpolációs függvény $H^{\alpha}$ a következőképpen értelmezett:

$$H^{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{r_n-1} x_n^{(k)} H_{n,k}^{\alpha}(t).$$

# Köbös spline fraktál interpoláció

Legyen $u_n(x) = a_n x + b_n$
és $v_n(x, y) = \alpha_n y + q_n(x)$
ahol $-1 < \alpha_n < 1$.
Az $f$ egy köbös spline fraktál interpolációs függvény, az $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., N\}, x_0 < x_1 < ...x_N$ adatokra, ha:

1. $f \in C^2[x_0, x_N]$,
2. $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., N$,
3. $\{\mathbb{R}^2; w_n(x, y), n = 1, 2, ..., N\}$, ahol $w_n(x, y) = (u_n(x), v_n(x, y))$.

A spline fraktál függvényt a momentumok segítségével $M_n = f''(x_n),\ n = 1, 2, ..., N$ szerkesszük meg. A fraktál interpolációs függvény fix pontja a Read-Bajraktarević operátornak

$$Tf(x) = v_n(u_n^{-1}(x), f(u_n^{-1}(x))) = f(x), n = 1, 2, ..., N. \quad (3)$$

A spline fraktál interpolációs függvény a momentumok segítségével a következőképpen írható fel

$$
\begin{aligned}
f(u_n(x)) = a_n^2 \Bigg\{ & \alpha_n f(x) + \frac{(M_n - \alpha_n M_N)(x - x_0^3)}{6(x_N - x_0)} + \\
+ \quad & \frac{(M_{n-1} - \alpha_n M_0)(x_N - x)^3}{6(x_N - x_0)} - \frac{(M_{n-1}\alpha_n M_0)(x_N - x_0)(x_N - x)}{6} - \\
- \quad & \frac{(M_N - \alpha_n M_N)(x_N - x_0)(x - x_0)}{6} + \left( \frac{y_{n-1}}{a_n^2} - \alpha_n y_0 \right) \frac{x_N - x}{x_N - x_0} - \\
+ \quad & \left( \frac{y_n}{a_n^2} - \alpha_n y_N \right) \frac{x - x_0}{x_N - x_0} \Bigg\}, n = 1, 2, ..., N.
\end{aligned}
$$

A momentumok meghatározásához a következő rendszert kell megoldani

$$
\begin{aligned}
& A_n^* f'(x_0) + A_n M_0 + \mu M_{n-1} + 2M_n + \\
+ \quad & \lambda M_{n+1} + B_n M_N + B_n^* f'(x_N) = \\
= \quad & \frac{6[(y_{n+1} - y_n)/h_{n+1} - (y_n - y_{n-1})/h_n]}{h_n + h_{n+1}} - \\
- \quad & \frac{6(a_{n+1}\alpha_{n+1} - a_n\alpha_n)}{h_n + h_{n+1}} \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0},
\end{aligned}
$$

ahol $x_n - x_{n-1} = h_n, n = 1, 2, ..., N$, és

$$
\begin{aligned}
A_n^* &= \frac{-6a_{n+1}\alpha_{n+1}}{h_n + h_{n+1}}, \\
A_n &= \frac{-(\alpha_n h_n + 2\alpha_{n+1} h_{n+1})}{h_n + h_{n+1}}, \\
\alpha_n &= \frac{6}{h_n + h_{n+1}}, \mu_n = 1 - \lambda_n, \\
B_n &= \frac{-(2\alpha_n h_n + \alpha_{n+1} h_{n+1})}{h_n + h_{n+1}}, \\
B_n^* &= \frac{6a_n\alpha_n}{h_n + h_{n+1}}, n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

A momentumok segítségével az IFR:

$$\{\mathbb{R}^2; w_n(x,y) = (u_n(x), v_n(x,y)), n = 1, 2, ..., N\}, \qquad (4)$$

ahol $u_n(x) = a_n x + b_n$ és

$$v_n(x,y) = a_n^2 \left\{ \alpha_n f(x) + \frac{(M_n - \alpha_n M_N)(x - x_0^3)}{6(x_N - x_0)} + \right.$$

$$+ \frac{(M_{n-1} - \alpha_n M_0)(x_N - x)^3}{6(x_N - x_0)}$$

$$- \frac{(M_{n-1}\alpha_n M_0)(x_N - x_0)(x_N - x)}{6} - \frac{(M_N - \alpha_n M_N)(x_N - x_0)(x - }{6}$$

$$\left. + \left(\frac{y_{n-1}}{a_n^2} - \alpha_n y_0\right) \frac{x_N - x}{x_N - x_0} + \left(\frac{y_n}{a_n^2} - \alpha_n y_N\right) \frac{x - x_0}{x_N - x_0} \right\}, n = \overline{1, N}.$$

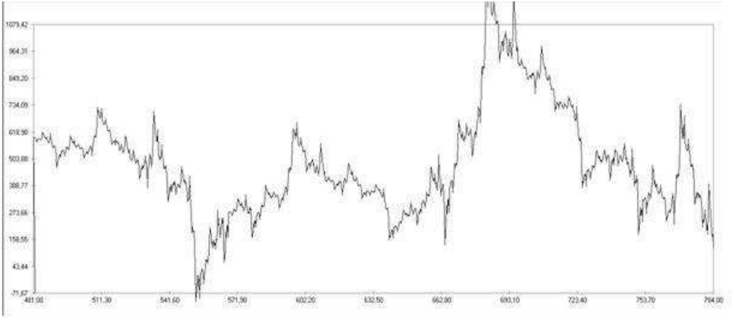


Figure: Köbös spline fraktál interpoláció

- Barnsley,M.F., *Fractals everywhere*, Academic Press, Orlando, Florida, 1988.
- Chand, A.K., Kapoor, G.P.,*Generalized cubic spline fractal interpolation functions*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 44, No. 2, pp. 655-676, 2006.
- Massopoust, P., *Interpolation and Approximation with Splines and Fractals*, Oxford Univ. Press, 2010.
- Navascues, M.A., Sebastian, M.V., *Some results of convergence of cubic spline fractal interpolation functions*, Fractals, 11, pp 1-7, 2008.

- Navascues, M.A., Sebastian, M.V., *Generalization of Hermite functions by fractal interpolation*, J. Approx. Theory, 131(1), pp. 19-29, 2004.
- Soos, A., Somogyi, I., Cătinaş, T., *Some comparison of fractal, spline and Shepard interpolation methods*, MaCs, Feb. 2-12, Siófok, 2012.
- Soos, A., Somogyi, I., *Interpolation methods for internet traffic*, Applied Stochastic Models and Data Analysis, pp. 179-181, 2013.
- Soos, A., Somogyi, I., *Spline and fractal spline interpolation*, NAAT, Cluj, Sep. 15-19, 2014.
- Soos, A., Somogyi, I., *Stochastic fractal spline interpolation functions*,(elküldve)


Figure: Fractal interpolation: for internet traffic data