Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul studenţesc de matematică "Traian Lalescu"
faza pe universitate – 22 aprilie 2013

1. a) Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n peste un corp K, iar W un subspaţiu vectorial al lui V, de dimensiune $r < n$. Să se demonstreze că

$$W = \bigcap_{U \in \mathcal{S}_{n-1}} U,$$

unde $\mathcal{S}_{n-1}$ este familia tuturor subspaţiilor vectoriale $(n-1)$-dimensionale U ale lui V, cu proprietatea că $W \subseteq U$.

b) Fie $m \in \mathbb{N}$ şi $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că

$$\|x_i\| = 1 \quad \text{oricare ar fi } i \in \{1, \dots, m\}$$

şi

$$\|x_i - x_j\| = 1 \quad \text{oricare ar fi } i, j \in \{1, \dots, m\},\ i \neq j.$$

Să se demonstreze că mulţimea $\{x_1, \dots, x_m\}$ este liniar independentă. (Norma considerată pe $\mathbb{R}^n$ este cea euclidiană.)

2. a) Să se determine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}\right)$.

b) Fiind dat un număr natural $p \geq 2$, să se determine

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor \sqrt[p]{n} \rfloor}\right).$$

(S-a notat cu $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x, adică cel mai mare număr întreg, mai mic sau cel mult egal cu x.)

3. a) Fie m, n numere întregi strict pozitive astfel ca $m \leq n$ şi fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ şi $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice cu proprietatea că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = m$. Să se demonstreze că există o matrice $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ astfel ca $ACB = I_m$.

b) Fie $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrice cu proprietatea $AB = A + B$. Să se demonstreze că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

4. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice interval $I \subseteq \mathbb{R}$ mulţimea $f(I)$ este tot un interval, iar intervalele I şi $f(I)$ au aceeaşi lungime.

Toate problemele sunt obligatorii; timp de lucru – 4 ore.