

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru
Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai
2025



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

TRADITIO ET EXCELLENTIA

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru
Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai
2025

Coordonatori – autori:

lect. dr. Mihai Nechita

stud. Rareș Cotoi

stud. Cristian Crețu

Autori:

stud. Luca Crețu

stud. Mara Ielciu

stud. Ariana Ilieș

stud. Patricia Manciu

stud. Rareș Răhăian

Contributori:

prof. emer. dr. Dorel Duca

prof. dr. Simion Breaz

prof. dr. Septimiu Crivei

prof. dr. Mirela Kohr

prof. dr. Andrei Mărcuș

prof. dr. Sanda Micula

prof. dr. Adrian Petrușel

prof. dr. Nicolae Popovici[†]

cerc. pr. Maria Crăciun

conf. dr. Szilárd András

conf. dr. Cristina Blaga

conf. dr. Paul Blaga

conf. dr. Brigitte Breckner

conf. dr. Adriana Buică

conf. dr. Teodora Căținaș

conf. dr. Zoltán Finta

conf. dr. Tamás László

conf. dr. Hannelore Lisei

conf. dr. Cosmin Pelea

conf. dr. Gabriela Petrușel

conf. dr. Cornel Pinteă

conf. dr. Natalia Roșca

conf. dr. Agoston Róth

conf. dr. Tiberiu Trif

lect. dr. Ștefan Berinde

lect. dr. Anca Grad

lect. dr. Mihai Iancu

lect. dr. Andor Lukács

lect. dr. Ildikó Mezei

lect. dr. Veronica Nechita

lect. dr. Iulian Simion

lect. dr. Zsolt Szilágyi

lect. dr. István Szöllősi

lect. dr. George Țurcaș

asist. dr. Florin Albișoru

asist. dr. Sándor Kajántó

asist. dr. Tudor Micu

drd. Andrei Gasparovici

drd. Eduard Grigoriuc

drd. Andra Malina

drd. Cristian Rafiliu

stud. Ioana Gavrilă

stud. Florin Grigore

stud. George Lung

stud. Claudiu Pop

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru
Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai
2025

Coordonatori:

Mihai Nechita
Rareș Cotoi Cristian Crețu

Presă Universitară Clujeană
2024

Referenți științifici:

prof. univ. emer. dr. Octavian Agratini

prof. univ. emer. dr. Dorel Duca

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Probleme și teste grilă de matematică pentru Admiterea la

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Babeș-Bolyai: 2025 /

Mihai Nechita (coord.), Rareș-Andrei Cotoi (coord.),

Cristian-Emanuel Crețu (coord.), ... – Cluj-Napoca:

Presa Universitară Clujeană, 2024

Conține bibliografie

ISBN 978-606-37-2362-9

I. Nechita, Mihai

II. Cotoi, Rareș-Andrei

III. Crețu, Cristian-Emanuel

51

37

© 2024 Presa Universitară Clujeană

Universitatea Babeș-Bolyai

Presa Universitară Clujeană

Director: Codruța Săcelean

Strada Hasdeu nr. 51

400371 Cluj-Napoca, România

Tel.: (+40)-0264-597401

Email: editura@ubbcluj.ro

editura.ubbcluj.ro

libraria.ubbcluj.ro

Prefață

Cartea este destinată elevilor de liceu care doresc să își aprofundeze cunoștințele de matematică și să se pregătească în mod eficient pentru examenul de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. Scopul nostru este să oferim o resursă cuprinzătoare care să ajute atât la înțelegerea conceptelor fundamentale de matematică, cât și la dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor complexe.

Prima parte a cărții conține probleme de antrenament organizate pe capitole (algebră, analiză matematică, geometrie, trigonometrie). A doua parte conține testele de la toate sesiunile de admitere și de la toate edițiile concursului Mate-Info UBB dintre 2021 și 2024, precum și o serie suplimentară de teste de antrenament. A treia (și ultima) parte conține răspunsurile corecte și rezolvări pentru toate problemele din culegere.

Inițiativa și efortul principal de realizare a acestei cărți se datorează următorilor studenți: Rareș-Andrei Cotoi, Cristian-Emanuel Crețu, Tudor-Luca Crețu, Mara Ielciu, Ariana Ilieș, Patricia Manciu și Rareș Răhăian. Aceștia au propus probleme, au redactat soluții și au editat materialul sub coordonarea lect. dr. Mihai Nechita, cu sprijinul departamentului de matematică și al comisiei de admitere nivel licență – condusă de conf. dr. Szilárd András și formată din conf. dr. Tiberiu Trif (analiză matematică), lect. dr. Andor Lukács (algebră) și lect. dr. Ildikó Mezei (geometrie și trigonometrie). Le mulțumim tuturor cadrelor didactice și studenților care au contribuit la realizarea materialului prin propunerea de probleme, redactarea de soluții și realizarea de corecturi. Adresăm mulțumiri speciale pentru ajutorul acordat prof. dr. Andrei Mărcuș (director departament matematică), conf. dr. Marcel Șerban (decan), prof. dr. Adrian Petrușel (prorector).

Îi rugăm pe cei care observă erori (care aproape sigur s-au strecurat, în ciuda eforturilor noastre) sau au sugestii de îmbunătățire să îi contacteze pe coordonatorii culegerii.

De asemenea, le urăm mult succes elevilor în pregătirea lor pentru examenul de admitere și sperăm să-i întâlnim pe mulți dintre ei în sălile Facultății de Matematică și Informatică.

Cuprins

I	Probleme	1
1	Algebră	2
2	Analiză matematică	39
3	Geometrie	75
4	Trigonometrie	100
II	Teste	115
5	Admitere	116
6	Concurs	153
7	Antrenament	174
III	Răspunsuri și indicații	215
8	Răspunsuri	216
9	Rezolvări	226
10	Propunători	471

PARTEA

I

Probleme

Aritmetică și Divizibilitate

1. Notăm cu A mulțimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 și au proprietatea $\checkmark ?$ că dacă mutăm această cifră în fața numărului, obținem un număr de 4 ori mai mare. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?
- A Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$;
- B Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$;
- C Există $n \in A$ care are 8 cifre;
- D Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.
2. Câte numere naturale n nu au proprietatea că $\sqrt{2n^3 + 13n + 2} \in \mathbb{N}$? $\checkmark ?$
- A 5; B o infinitate; C nici unul; D 1.
3. Pentru câte valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ numărul a_n este pătrat perfect, unde $a_n = \checkmark ?$
 $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + \left(\frac{(n-1)n}{2} + 1\right) \left(\frac{(n-1)n}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$?
- A pentru nici una; C pentru două valori;
- B pentru o valoare; D pentru o infinitate de valori.
4. Dacă $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, atunci x^2 are $\checkmark ?$ valoarea:
- A $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$; B $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$; C $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.
5. Fie a_n o progresie aritmetică cu rația $r \neq 0$ și $a_1 = 1$. Pentru $\forall n \geq 1$ expresia $\checkmark ?$
 $C = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1}$ rămâne constantă. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $a_{31} = 63$;

C Rația este egală cu valoarea raportului;

B $a_{15} = 29$;

D $C = 3$.

6. Câte numere întregi pozitive de patru cifre există care conțin blocul 25 și sunt divizibile cu 75? (2250 și 2025 sunt două astfel de numere). ✓ ?

A 62;

B 31;

C 34;

D 63.

7. Fie trei numere întregi pozitive a, b și c astfel încât $21a = 9b = 7c$ și $a + 8, b$ și c sunt o progresie aritmetică. Care sunt aceste valori a, b, c ? ✓ ?

A $a = 21, b = 49, c = 81$;

C $a = 42, b = 105, c = 126$;

B $a = 12, b = 28, c = 36$;

D $a = 6, b = 14, c = 18$.

8. Dacă n este un multiplu de 5 și $n = p^2 \cdot q$, unde p și q sunt numere prime, care dintre următoarele este cu siguranță multiplu de 25? ✓ ?

A p^2 ;

B q^2 ;

C pq ;

D p^2q^2 .

9. Fie p un număr prim mai mare decât 3. Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru $p^2 - 1$? ✓ ?

A Expresia este divizibilă cu 12, dar nu și cu 24;

B Expresia este divizibilă cu 18, dar nu și cu 24;

C Expresia este divizibilă cu 24;

D Expresia este divizibilă cu 36, dar nu și cu 24.

10. În care dintre următoarele situații n divide $2^n - 2$? ✓ ?

A n este un număr prim;

B n este un număr impar;

C n este o putere a lui 2;

D n este o putere a lui 2 sau un număr prim.

11. Fie progresia aritmetică a_1, a_2, \dots, a_n cu rația r . Știind că $a_1 = 1$ și $a_{25} = 121$, câte pătrate perfecte sunt în progresie? ✓ ?

A 3;

B 4;

C 5;

D 6.

12. Fie o progresie aritmetică unde al cincilea termen este de trei ori mai mare decât al doilea, iar al nouălea este mai mare decât al treilea cu 24. Care este primul termen și rația progresiei? ✓ ?

A $a_1 = 1$ și $r = 4$; B $a_1 = 2$ și $r = 3$; C $a_1 = 3$ și $r = 2$; D $a_1 = 2$ și $r = 4$.

13. Două progresii aritmetice sunt definite ca $a_n = 3n + 7$ și $b_m = 5m + 2$. Care este cea mai mică valoare a lui k pentru care $a_k \in b_m$?

A $k = 8$; B $k = 6$; C $k = 5$; D $k = 9$.

Combinatorică

14. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulțime \mathcal{M} formată din n puncte distincte diferite de O . Numărul tuturor triunghiurilor $\triangle AOB$ cu $A, B \in \mathcal{M}$ este:

A A_n^2 ; B 2^n ; C C_{n+1}^3 ; D cel mult C_n^2 .

15. Fie M o mulțime cu n elemente. În câte moduri posibile putem alege trei submulțimi disjuncte $A, B, C \subseteq M$?

A $3n!$; B 3^n ; C 4^n ; D C_n^3 .

16. Mulțimea numerelor n care verifică inegalitatea $C_{n-1}^5 + C_{n-1}^4 < C_n^{n-3}$ este:

A $(-1, 8)$; B $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; C $\{6, 7\}$; D $[8, \infty) \cap \mathbb{N}$.

17. Notăm cu \mathcal{F} mulțimea tuturor funcțiilor cu domeniul $\{0, 1, 2, 3\}$ și codomeniul $\{1, 2, 3, 4\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Mulțimea \mathcal{F} conține 4^3 funcții;
- B Mulțimea \mathcal{F} conține 4 funcții strict monotone;
- C Mulțimea \mathcal{F} conține 4 funcții injective;
- D Probabilitatea ca o funcție f aleasă aleator din mulțimea \mathcal{F} să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{1}{16}$.

18. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_{n+1}^{k+1})^4}{C_n^k C_n^{k+1}}$, atunci:

A $x \geq 16(C_{2n}^n - 1)$; C $x = 16C_{2n}^n$;

B $x < 16(C_{2n}^n - 1)$; D $x \geq 16C_{2n}^n - 17$.

19. Câte funcții $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ au proprietatea că $\sum_{k=1}^n f(n) = 3$?

A C_n^2 ;

C $A_n^2 \cdot \frac{1}{2}$;

B C_n^3 ;

D 120, când $n = 10$.

20. Considerând mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, care este numărul ✓ ?
funcțiilor $f : A \rightarrow B$ strict descrescătoare? Dar numărul funcțiilor $f : B \rightarrow A$
crescătoare?

A C_6^4, A_9^3 ;

B C_6^4, C_{10}^4 ;

C A_6^4, C_9^3 ;

D C_6^4, C_9^3 .

21. Suma $1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$ este egală cu: ✓ ?

A $n \cdot 2^{n-1}$;

C $2^n(n+2)$;

B $2^{n-1}(n+2)$;

D $\sum_{k=0}^n C_n^k + n \cdot 2^{n-1}$.

22. Suma $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ este egală cu: ✓ ?

A $\frac{2^n - 1}{(n+1)!}$;

B $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;

C $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k$;

D $\frac{2^{n-1} - 1}{n+1}$.

23. Fie dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $n = 15$, dezvoltarea are exact 3 termeni raționali;

B Dacă $n = 24$, dezvoltarea are exact 5 termeni iraționali;

C Dacă $n = 30$, termenul corespunzător pentru $k = 18$ este irațional;

D Dacă $n = 18$, termenul corespunzător pentru $k = 9$ este irațional.

24. Pe dreptele $d_1 \parallel d_2$ se consideră punctele distincte $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \in d_1$ și $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 \in d_2$. Numărul triunghiurilor care se pot forma cu aceste puncte este: ✓ ?

A 120;

B 124;

C 135;

D 140.

Funcții logaritmice și exponențiale

25. Fie x și y , numere reale pozitive, $x, y > 1$, astfel încât $\log_x(y^x) = \log_y(x^{ey}) = 2\sqrt{\pi}$. ✓ ?
Să se indice care dintre următoarele variante reprezintă valoarea lui $x \cdot y$.

A $\frac{\pi^2}{e}$;

B $\frac{4\pi}{e}$;

C $\frac{\pi}{e}$;

D $\frac{2\sqrt{\pi}}{e}$.

26. Fie $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x - 6$. Aici $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim ✓ ?
de definiție al lui f . Atunci:

- A \mathbb{E} este un interval deschis;
- B ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție;
- C există un șir nemărginit $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) > 0$;
- D există un șir nemărginit $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) < 0$.

27. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este:

✓ ?

- A $\frac{4}{a}$;
- B $\frac{4(3-a)}{3+a}$;
- C $\frac{4+a}{4-a}$;
- D $\frac{4(3+a)}{3-a}$.

28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$. Dacă $L = \log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1$, atunci:

- A $L \geq 1$;
- B $L > 1$;
- C $L < 1$;
- D $L = 1$.

29. Fie ecuația $(\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x = 0$ și $I = [1, 4]$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A Există cel puțin o soluție a ecuației pe intervalul I ;
- B Nu există nicio soluție pe intervalul I ;
- C Există cel puțin o soluție pe intervalul $(1, 4]$;
- D Funcția $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x$ nu este definită pentru $x = 0$, deci nu există nicio soluție pe intervalul dat.

30. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 4 - \log_{\sqrt[3]{2}}(x), & x \geq 1 \end{cases}$. Pentru ce valori ale lui c ecuația $f(x) = c$ are exact 2 soluții?

✓ ?

- A $c = 2$;
- B $c = 1$;
- C $c = 3$;
- D $\forall c < 2$.

31. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_3 x + \log_6 x^2 + \log_{27} x^3 + \dots + \log_{3^n} x^n = n$, atunci:

✓ ?

- A $S \subseteq [0, 1)$;
- B $S \subseteq [1, 3)$;
- C S are exact 1 element;
- D S are exact 3 elemente.

32. Fie sistemul

✓ ?

$$\begin{cases} 4^{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}} = 32 \\ \log_9(x - y) + \log_9(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Care dintre următoarele perechi (x, y) sunt soluții ale sistemului?

- A $(2, 1)$;
 B $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
 C $(-2, -1)$;
 D Altă soluție.

33. Valoarea lui n care satisface ecuația $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n(n+1) = 10$ este ✓ ?

- A 1024;
 B 1023;
 C 2047;
 D 512.

34. Valoarea lui x care satisface ecuația $3 + e^{2x} = 7e^{2x}$ este ✓ ?

- A $-\ln \frac{1}{2}$;
 B $\ln \frac{1}{2}$;
 C $\ln \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 D $-\frac{1}{2} \ln 2$.

35. Se dă ecuația $S := \log(\log_{10^a}(\log_{10^b}(10^{1000}))) = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $a, b > 0$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt corecte, știind că M reprezintă mulțimea perechilor unice $\{a, b\}$, $a \neq b$ astfel încât $S = 0$. ✓ ?

- A $\text{card } M = 4$;
 B $\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 0$;
 C $\sum_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 123$;
 D $\sum_{k=1}^{\text{card } M} \left(\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k + \prod_{k=1}^{\text{card } M} b_k \right) + 6$ este un pătrat perfect.

Ecuatii și inecuații

36. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 11 \text{ și } xy(x + y) = 30\}$, atunci: ✓ ?

- A $x + y = 5$ sau $xy = 5$ pentru fiecare $(x, y) \in S$;
 B S are 2 elemente;
 C $x + y = 6$ sau $xy = 6$ pentru fiecare $(x, y) \in S$;
 D $S = \emptyset$.

37. Numărul de soluții reale ale ecuației $\sqrt{3-x} - x = 0$ este: ✓ ?

- A 0;
 B 1;
 C 2;
 D 3.

38. Fie S o submulțime a lui \mathbb{Z}_+ astfel încât: ✓ ?

- (a) $2 \in S$
 (b) $n \in S \Leftrightarrow n^2 \in S$
 (c) $(n+5)^2 \in S \Leftrightarrow n \in S$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $-5 \notin S$;
 B Numerele întregi, diferite de 1 și care nu sunt multipli de 5 aparțin lui S ;
 C $S = \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;
 D $S = \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

39. Numărul de soluții reale ale ecuației $(x^2 - 7x + 11)^{x^2 - 13x + 42} = 1$ este: $\checkmark ?$

- A 4; B 2; C 6; D 8.

40. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică descrescătoare care verifică relațiile $-a_7 a_9 a_{11} = 101 \cdot 129 + 8$ și $a_3 + a_4 + a_5 = -6$. Care dintre următoarele afirmații sunt false? $\checkmark ?$

- A $a_1 = 5$; C Suma primelor 10 elemente este -70;
 B $a_4^3 = -8$; D Rația progresiei este 3.

41. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[4]{x} = \frac{12}{7 - \sqrt[4]{x}}$ este: $\checkmark ?$

- A $S < 2^9$; B $S \in [2^8, 2^9]$; C $S \in (3^5, 2^8)$; D $S \notin (2^7, 7^3)$.

42. Valoarea minimă a expresiei $\sum_{k=1}^n |x_k + k|$, unde $\forall x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_{k+1} = x_k + 1$ este: $\checkmark ?$

- A $\frac{n^2 + 2n}{2}$; C $\frac{n^2 + 2n}{4}$;
 B $1011 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$; D $2023 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$.

43. Știind că, prin $[x]$ și $\{x\}$ înțelegem partea întreagă și partea fracționară a numărului real x , ecuația $x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4$ are, pe mulțimea numerelor reale: $\checkmark ?$

- A 3 soluții; C 3 soluții întregi;
 B 4 soluții; D 4 soluții întregi.

44. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ fixate. Notăm cu S_1 mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $ax + b = 0$, iar cu S_2 mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $ax + b \leq 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

- A Pentru $a = 1$ și $b = -5$ avem că $S_1 = 5$ și $S_2 = (-\infty, 5)$;
 B Pentru $a = 0$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -5, 0$ și $S_2 = \mathbb{R}$;
 C Pentru $a = -5$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -1$ și $S_2 = (-1, +\infty)$;
 D Pentru $a = 0$ și $b = 0$ avem că $S_1 = \mathbb{R}$ și $S_2 = \mathbb{R}$.

45. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - |x| = mx(x + 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$
- A S are cel puțin două elemente pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;
- B Există un interval nevid $I \subset \mathbb{R}$ a.î. $S \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ pentru fiecare $m \in I$;
- C Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este un interval nevid;
- D Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.
46. Fie $E \subset \mathbb{R}$ domeniul de existență al expresiei $\frac{x+1}{x^2-3x+5}$, iar $S \subset \mathbb{R}$ mulțimea $\checkmark ?$ soluțiilor inecuației $\frac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1$. Atunci:
- A $E = \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$ și $S = (-\infty, 3)$;
- B $E = S$;
- C $S = \mathbb{R}$;
- D $S \setminus E \neq \emptyset$.
47. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 4 \text{ și } xy(x + y) = 4\}$, atunci: $\checkmark ?$
- A S are 2 elemente;
- B $(0, 4) \in S$;
- C $(1 + i, 1 - i) \in S$;
- D $S = \emptyset$.
48. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$ este: $\checkmark ?$
- A 360;
- B alt răspuns;
- C 6!;
- D $4! \cdot 15$.
49. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$ și $x + \frac{1}{z} = 3, y + \frac{1}{x} = 27$. Să se indice $\checkmark ?$ care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă valoarea lui $y + \frac{1}{z}$.
- A $\frac{160}{7}$;
- B $\frac{96}{4}$;
- C $\frac{20}{7}$;
- D $\frac{180}{7}$.
50. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{2|x| - 2x} = m - x$. Atunci: $\checkmark ?$
- A $m \in S$ pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;
- B $m - 2 + 2\sqrt{1 - m} \in S$ pentru fiecare $m \in (-\infty, 0)$;
- C există un interval nevid, deschis, $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are un singur element pentru orice $m \in I$;
- D există un interval nevid, deschis, $J \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are trei elemente pentru orice $m \in J$.
51. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x \leq \frac{8}{x^2}$. Următoarele afirmații sunt $\checkmark ?$ adevărate:

A f și f^{-1} sunt strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt[3]{y}$;

B $(-\infty, 0) \subset S$;

C $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8\}$;

D S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.

52. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru fixat și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$. Atunci: ✓ ?

A S are 3 elemente pentru $a = 0$;

B f este strict crescătoare;

C S are cel mult un element;

D S are cel puțin un element.

53. Fie $n \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Ecuația $\sqrt{3-x} - x = a$ are cel puțin o soluție reală dacă: ✓ ?

A $a \in (-\infty, -10)$;

C $a \in \{-3, -2, -1, 0\}$;

B $a \in \{-10, -9, -8\}$;

D $a \in \{8, 9, 10\}$.

54. Considerăm în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$. Mulțimea soluțiilor ecuației este: ✓ ?

A $S = [3, 12]$;

B $S = [1, \infty)$;

C $S = [5, 10]$;

D $S = \{4, 11\}$.

55. Notăm cu $T = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k^2 + k}$, $T \in \mathbb{R}$. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin termenul general $x_n = \left[T + \frac{n}{2024} \right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $T \in \mathbb{N}$;

C $x_1 + x_2 + x_3 = 3$;

B $\sum_{i=1}^{2024} x_i = 2023$;

D $\sum_{i=1}^{2023} x_i = 2024$.

56. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de n numere reale, cu n număr natural par. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $a_n > 0$ pentru orice n , atunci $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq 2n$;

B Dacă $a_1, a_2 > 0$ și $a_1 a_2 = 3$, atunci $a_1 + a_2 \geq 3$;

C Dacă $(a_n)_{n \geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = 2n$;

Dacă $(a_n)_{n \geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = 0$.

57. Mulțimea soluțiilor inecuației $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 10 \cdot x^{\log_7 9} \leq 11^{1+\log_7 x} + x^{\log_7 11}$ este $\checkmark ?$ mulțimea:

$(0, +\infty)$; $[1, +\infty)$; $\{1\}$; $[1, 10]$.

58. Soluțiile ecuației $5^{2x} + 3x5^x + 2x^2 + 6 = 7 \cdot 5^x + 13x$, $x \in \mathbb{R}$, aparțin mulțimii: $\checkmark ?$

$[0, 1]$; $[-1, 4]$; $(-2, 0]$; $\{0, 1, 2\}$.

59. Soluțiile ecuației $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}$ aparțin mulțimii: $\checkmark ?$

$(0, 5)$; $(0, 4]$; $[1, 2)$; $[2, 5)$.

60. Soluțiile ecuației $40^x + 18^x + 3 \cdot 15^x + 4 \cdot 12^x + 3 \cdot 8^x = 30^x + 24^x + 3 \cdot 20^x + 16^x + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 6^x$ aparțin mulțimii: $\checkmark ?$

$[0, \log_2 3]$; $[-1, 1]$; $[0, 2)$; $[0, \log_4 9]$.

61. Fie funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{2024}$. Care dintre următoarele afirmații sunt **false**? $\checkmark ?$

$2f(6)$ este pătrat perfect al unui număr natural;
 $f(x) < 2024x + 1, \forall x \in [-1, \infty)$;
 $f(x) \geq 2024x + 1, \forall x \in [-1, \infty)$;
 după ridicarea la putere $f(x)$ are exact 2 termeni care **nu** depind de x .

62. Câte triplete (x, y, z) de numere naturale nenule verifică ecuația $2xyz + 2xy - xz - 2yz - x - 2y + z = 5$? $\checkmark ?$

2; 4; 10; nici unul.

63. Dacă $n \geq 2$ este un număr natural fixat, atunci ecuația $(1+2^x)(1+2^{-x}) + \dots +$ $\checkmark ?$

$(n + (n+1)^x) \left(n + (n+1)^{-x} \right) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6}, x \in \mathbb{R}$, are soluțiile în mulțimea:

$[0, +\infty)$; $[-1, 1]$; $[1, 3)$; $(-5, 4]$.

64. Se consideră șirurile de numere reale (a_n) și (b_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sum_{i=1}^n a_i = \sqrt{3}$ și $\checkmark ?$

$\sum_{i=1}^n b_i = 3$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{A}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2; & \boxed{\text{C}} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1; \\ \boxed{\text{B}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) < \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2; & \boxed{\text{D}} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} < 1. \end{array}$$

65. Considerăm în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x^2 - 6} = x^2 - 8$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A ecuația are exact 4 soluții; C ecuația are exact două soluții;
 B ecuația nu are soluții; D suma soluțiilor este 0.

66. Se consideră ecuațiile: $(7 - 4\sqrt{3})^x - 2 \cdot (2 - \sqrt{3})^x = 3$, $(3 - 2\sqrt{2})^y - 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^y = 3$. ✓ ?
 Știind că x și y sunt soluțiile celor două ecuații, atunci:

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{A}} \quad x + y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(2 - \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} - 1) \cdot \ln(2 - \sqrt{3})} \right]; \\ \boxed{\text{B}} \quad x + y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(2 + \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} + 1) \cdot \ln(2 + \sqrt{3})} \right]; \\ \boxed{\text{C}} \quad x - y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(2 - \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} - 1) \cdot \ln(2 - \sqrt{3})} \right]; \\ \boxed{\text{D}} \quad x - y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(2 + \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} + 1) \cdot \ln(2 + \sqrt{3})} \right]. \end{array}$$

67. Suma elementelor mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 3 \right\}$ este: ✓ ?

- A 2; B 10; C 9; D 11.

Numere Complexe

68. Considerăm z un număr complex. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $z^2 < 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
 B $z^2 \in \mathbb{R}$ și $z^2 \geq 0$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$;
 C $z^2 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă partea imaginară a lui z este 0 sau partea reală a lui z este 0;
 D $z^2 \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

69. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca numărul complex $(a + bi)^n - (ai + b)^n$ să fie real pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$;

C $n = 4k, k \in \mathbb{N}^*$;

B $n = 2k + 4, k \in \mathbb{N}$;

D $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

70. Să presupunem că există numere complexe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ diferite de zero, astfel încât z satisface ecuațiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt: ✓ ?

A $\{i, -i\}$;

B $\{1, -1\}$;

C $\{1, i, -1\}$;

D $\{1, i, -1, -i\}$.

71. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Numerele complexe z având modulul 1, pentru care $50z^{2017}(z^2 + 1) = z^{98} + 1$, aparțin mulțimii: ✓ ?

A $\{i, -i, 0\}$;

C $\{1, -i\}$;

B $\{-1, 1, i, -i\}$;

D $\{\cos \pi + i \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2} + i \cos \pi\}$.

72. Fie ecuația $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^3 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^2 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) + 1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuația are 4 soluții;

C Ecuația nu are soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

D Produsul soluțiilor ecuației este -1.

73. Fie z un număr complex de modul 1 astfel încât $|z^2 + \bar{z}^2| = 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuația are 4 soluții;

C Ecuația nu are soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

D Suma soluțiilor ecuației este 0.

74. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, număr prim și $z_n = i^1 + i^2 + \dots + i^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = \operatorname{Im} z_n = 0$;

C Există n prim a.î. $\operatorname{Im} z_n = 0$;

B Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = 0$;

D $\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice n prim.

75. Fie $z_1 = 0, z_2 = a > 0, z_3$ afixele vârfurilor unui triunghi echilateral și z_0 afixul centrului de greutate al triunghiului. Dacă $z_0 \neq 0$, atunci expresia $\frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2}{(z_0)^2}$ este egală cu: ✓ ?

A $(1 + i\sqrt{3});$

C $3;$

B $\frac{\frac{a^2}{2} \cdot (1 + i\sqrt{3})}{\frac{a^2}{6} \cdot (1 + i\sqrt{3})};$

D $\frac{\frac{a}{2} \cdot (1 - i\sqrt{3})}{\frac{a}{6} \cdot (1 - i\sqrt{3})}.$

76. Se consideră $S_n = \sum_{k=1}^n i^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $S_{174} = S_2;$

B $S_{102} = i - 1;$

C $S_{2024} = S_{102};$

D $S_{33} = 2i - 1.$

77. Să se afle numărul real α astfel încât $\operatorname{Im}\left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{\alpha + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)i}\right) = 0$. ✓ ?

A $\alpha = \frac{1}{2};$

C $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7} - 1};$

B $\alpha = \frac{2}{4\sqrt{7} - 2};$

D $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7} - 2}.$

78. Cu ce număr poate fi egală partea reală a numărului complex z , dacă z este soluția ✓ ?
ecuației: $\operatorname{Re}(z^2 + 1 + i) - \operatorname{Im}(3i\bar{z} + z\bar{z}) + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$?

A $\operatorname{Re} z = 0;$

B $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2};$

C $\operatorname{Re} z = 1;$

D $\operatorname{Re} z = 3.$

79. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{3}, |z - 2| = 1\}$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ?
sunt adevărate?

A $\operatorname{card}(M) = 1;$

C $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in M;$

B $\operatorname{card}(M) = \infty;$

D $\operatorname{card}(M) = 0.$

80. Fie numărul complex $z = \sqrt{7 + \sqrt{13}} + i\sqrt{7 - \sqrt{13}}$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ?
sunt adevărate?

A $\frac{z^2}{\sqrt{13}} \in \mathbb{R};$

C $|z|^{2024} = |(6 + 4i\sqrt{10})^{1012}|;$

B $|z|^n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N};$

D $|z\bar{z}|^4 \geq \frac{2|z^2|^3}{3}.$

81. Fie numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1, z_1 z_2 \neq -1$. Care dintre următoarele ✓ ?
afirmații sunt adevărate?

A $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{7}{3} \in \mathbb{R};$

C $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} + i \in \mathbb{R};$

B $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{7}{3} \notin \mathbb{R};$

D $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} + i \notin \mathbb{R}.$

82. Fie numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = 2\sqrt{3}n + (1 - 3n^2)i$, $z_2 = 2\sqrt{2}n + (n^2 - 2)i$, unde $n \in \mathbb{N}$ este un număr arbitrar, fixat. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{N}$; C $|z_1 z_2| \in \mathbb{N}$;
 B $|z_1| \in \mathbb{N}, |z_2| \notin \mathbb{N}$; D $|z_1| |z_2| \notin \mathbb{N}$.

83. Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$, $z = 1 + i$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ este o rădăcină de ordinul 3 a lui z ;
 B $z_0 + z_1 + z_2 = \sqrt[6]{2} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$, unde z_0, z_1, z_2 sunt rădăcinile de ordin 3 ale lui z ;
 C $z_0 + z_1 \notin \mathbb{N}$, unde z_0, z_1 sunt rădăcinile de ordin 2 ale lui z ;
 D $z_0 + z_1 \in \mathbb{N}$, unde z_0, z_1 sunt rădăcinile de ordin 2 ale lui z .

84. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 2, \operatorname{Im} \left(\frac{z+2}{z-2i} \right) = 0\}$. Câte elemente are mulțimea M ?

- A O infinitate; B 3 elemente; C 2 elemente; D niciunul.

85. Fie mulțimea $M = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \sqrt{2a^2 - 7} + i\sqrt{7 - 3b} \right| = \sqrt{17}, |a| \geq \sqrt{\frac{7}{2}}, b < \frac{7}{3} \right\}$.

Mulțimea M poate fi scrisă și ca:

- A $M = \left\{ (a, b) \mid b = \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3}, a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}} \right) \cup \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, 12 \right) \right\}$;
 B $M = \left\{ \left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3} \right) \mid a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}} \right] \right\}$;
 C $M = \left\{ \left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3} \right) \mid a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}} \right) \cup \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{12} \right) \right\}$;
 D $M = \left\{ \left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3} \right) \mid a \in \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{12} \right) \right\}$.

86. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid \frac{z-3}{z+3} \in \mathbb{R}\}$. Mulțimea M poate fi scrisă și ca:

- A $M = \emptyset$; C $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid z = -\bar{z}\}$;
 B $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid z = \bar{z}\}$; D $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Matrici

87. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. Dintre următoarele enunțuri sunt ✓ ? adevărate:

A $\text{rang}(A) = 2$;

C $a_{14}^2 + b_{14}^2 = 2^{18} * (a_7^2 + b_7^2)$;

B $a_{13}^2 + b_{13}^2 = 2^{18} * (a_7^2 + b_7^2)$;

D $A^{100} = 8^{50} * I_2$.

88. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A $A^{-1} = O_2$;

C $A^{16} = 4^3 i A^{13}$;

B $A^{51} = -2^{100} A$;

D $A^{101} = 16^{50} A$.

89. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos t & -\sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A $\det(A) = -1$;

B Ecuația $A * X = I_3$ nu are nicio soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

C $\text{rang}(A) = 2$;

D $\text{rang}(A) = 3$.

90. Se dă matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} y & y & y & y \\ y & x & x & y \\ y & y & x & x \\ y & x & y & x \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $A^{100}(10, 10) = 4^{100} A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

B Matricea $A(x, y)$ nu este singulară pentru $x = y$ sau $y = 0$;

C $A^{100}(10, 10) = 16^{25} A\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$;

D $A^{-50}(2, 2) = 8^{-49} A(2, 2)$.

91. Se consideră mulțimea M a matricelor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$ și funcția ✓ ?

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $f(z) = \frac{1}{2} * A(z)$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $f(zw) = f(z) * f(w)$;

C $\text{rang}(A(x)) = 3, \forall x \in \mathbb{C}$;

B Funcția f este injectivă;

D $f(z^3) = (f(z))^3$.

92. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 + a * A\}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $I_2 \notin G$;
- B $X(a) * X(b) = X(a + b + 3ab), \forall X(a), X(b) \in G$;
- C $X\left(\frac{-50}{3}\right) * X\left(\frac{-49}{3}\right) * \dots * X\left(\frac{49}{3}\right) * X\left(\frac{50}{3}\right) = X\left(\frac{-1}{3}\right)$;
- D $X(a) * X(b) = X(a + b + ab), \forall X(a), X(b) \in G$.

93. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ a & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}, a, x \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ✓ ?

Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A Pentru $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(B), \forall x \in \mathbb{R}$;
- B Pentru $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;
- C Pentru $a = 2$, matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;
- D Pentru $a = 3$, matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

94. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, a, x \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate ✓ ?

următoarele afirmații:

- A Pentru $a \in \left(-1, \frac{3}{10}\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;
- B Pentru $a \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;
- C Pentru $a \in (7, 9)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;
- D Pentru $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

95. Se notează cu E_n matricea pătratică de ordin n care are toate elementele egale cu 1. ✓ ?
Sunt **false** următoarele afirmații:

- A $\text{rang}(E_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- B $E_n^2 = n * E_n$;
- C $I_n * E_n$ nu este inversabilă;
- D $E_n^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} * E_n$.

96. În $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și relația $A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = a_n * A$, ✓ ?
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A Există un număr natural nenul x pentru care $A^3 = x * A$;

B Există un număr rațional nenul x pentru care $A^3 = x * A$;

C $a_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}$;

D $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

97. Se consideră mulțimea G a matricelor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. ✓ ?

Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $\text{rang}(A) = 2, \forall A \in G$;

C $A * B \in G, \forall A, B \in G$;

B $\text{rang}(A) = 3, \forall A \in G$;

D Există $B \in G$ astfel încât $A * B = A$.

98. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x & 1 \\ x & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A Există valori ale lui x pentru care $\text{rang}(A) = 1$;

B Există valori ale lui x pentru care $\text{rang}(A) = 4$;

C Există valori ale lui x pentru care $\text{rang}(A) = 3$;

D Pentru $x = 0$, $\text{rang}(A) = 3$.

99. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate ✓ ?
următoarele afirmații:

A $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ pentru $b = 0$;

C $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ pentru $b \in \mathbb{R}^*$;

B $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

D $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

100. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele ✓ ?
afirmații:

A $A^2 = O_3$ doar pentru $x = 0$;

B $A^2 = O_3$ doar pentru $z = 0$;

C Dacă $A^2 = O_3$, $I_3 - A$ e inversabilă și inversa ei e egală cu $I_3 + A$;

D $A^2 = O_3$ pentru $x * z = 0$.

101. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ și matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B = \checkmark ?$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A rang $(A) = \text{rang}(B)$ pentru $a = 0$;
 B $A^2 - (2 + a)A - aI_2 = O_2, \forall a \in \mathbb{R}$;
 C $A^2 - 2aA - aI_2 = O_2, \forall a \in \mathbb{R}$;
 D Pentru $a = -1$, există $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = k * I_2$.

102. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\checkmark ?$
 $f(X) = X^2 - 4X + 2I_2$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A $f(A) = O_2$;
 B există o matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(A) = (I_2 - A) * C$;
 C există o matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(I_2) - f(A) = (I_2 - A) * D$;
 D există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(I_2) = k * I_2$.

103. Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ este $\checkmark ?$

- A 2; C 0;
 B -5; D un număr din $\mathbb{R} \setminus \{2, -5, 0\}$.

104. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate afirmațiile: $\checkmark ?$

- A Matricea A este inversabilă și elementul din linia 2 și coloana 3 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{4}$;
 B Matricea A este inversabilă și elementul din linia 3 și coloana 2 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{4}$;
 C Matricea A este inversabilă și elementul din linia 3 și coloana 2 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{8}$;
 D Matricea A nu este inversabilă.

105. Se consideră a ecuația matriceală

✓ ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale.

- A Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1);
- B Ecuația (1) are soluții dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$;
- C Ecuația (1) are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
- D Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ atunci ecuația (1) nu are soluții.

106. Mulțimea tuturor valorilor $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $\begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ -2x - m & x + m & x - 2 \end{vmatrix} = 0$ admite o rădăcină dublă este:

- A $\{1, 2\}$; B $\{-2, 0, 2\}$; C $\{-2\}$; D $\{-2, 2\}$.

107. Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(X) = \det(A + X) = 0\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$ și $a \neq 2c$, atunci 1024 divide toți coeficienții lui X^6 ;
- B Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$ și $c = a^2 \neq 0$, atunci $\frac{b^2}{d} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;
- C Dacă $X, Y \in \mathcal{X}$, atunci $X + Y \in \mathcal{X}$;
- D Dacă $X \in \mathcal{X}$, atunci $-X \in \mathcal{X}$.

108. Valorile lui $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ care verifică ecuația $\begin{vmatrix} 1 + \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ \sin^2 \theta & 1 + \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 1 + 4 \sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$ sunt:

- A $\frac{7\pi}{24}$; B $\frac{5\pi}{24}$; C $\frac{11\pi}{24}$; D $\frac{\pi}{24}$.

109. Fie A o matrice pătratică de ordinul n , elementele acesteia fiind fie 1, fie -1 . Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate (pentru orice A cu proprietatea dată).

- A $\det(A) = 0$; B $2 \mid \det(A)$; C $|\det(A)| = 1$; D $2^n \mid \det(A)$.

110. Fie ecuația matriceală $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ cu rădăcinile $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $A_1 + A_2 = I_2$; C $A_1 * A_2 = -A_2 * A_1$;
 B $A_1 * A_2 = A_1^2$; D $A_1 * A_2 = -A_1^2$.

111. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A rang $(A) = 3$ pentru $b=0$ sau $a=1$; C $\det(X^3) = -b^3(a-1)^3$;
 B rang $(A) = 3$ pentru $b \in \mathbb{R}^*, a \neq 1$; D $\det(X^3) = b^3(a-1)^3$.

112. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A Suma elementelor de pe linia 5 a matricei A^5 este n^5 ;
 B Cel mai mic număr k pentru care $A^k = O_n$ este $n-1$;
 C Cel mai mic număr k pentru care $A^k = O_n$ este n ;
 D Cel mai mare număr k pentru care $A^k \neq O_n$ este $n-2$.

113. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 0$;
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n-1} \text{tr}(A^n)}{a^{n-2} \det(A^n)} = 0$, unde a este un număr real nenul;
 C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1$;
 D $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \text{tr}(A^n)}{a^{n-2} \det(A^n)} = 0$, unde a este un număr real nenul.

114. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și ecuația $X^n * \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \\ 3^n \end{pmatrix} * (1 \ 1 \ 1) =$ ✓ ?
 $1, n > 1$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A Ecuția are o singură soluție rațională;
- B Ecuția nu are soluții întregi;
- C Ecuția are 2 soluții naturale pentru n par;
- D Numărul de soluții distincte al ecuației este 3.

115. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$;
- B $A^{4k+5} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$;
- C $\det(A^{4k}) = \det(A^{4k+2}), \det(A^{4k+1}) = \det(A^{4k+3}), \det(A^{4k}) \neq \det(A^{4k+1})$;
- D $\det(A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3}) = \hat{0}$.

116. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha - 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde α e o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $\det(A) = 2\alpha + 2$;
- B $A^2 + A - I_2 = O_2$;
- C $\det(A) = -\alpha^2 + \alpha - 1$;
- D $A^2 + A - \alpha^2 I_2 = O_2$.

117. Numărul soluțiilor în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ este: ✓ ?

- A 2; B 3; C 4; D 6.

118. Fie $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ m & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Q}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $A(m)$ este inversabilă, $\forall m \in \mathbb{Q}$;
- B $\text{rang } A(3) = 3, \forall m \in \mathbb{Q}$;
- C $A(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & -n^2 - 2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- D $A(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2 - 2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sisteme

119. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} (a+1)x - 2y + 7z = 1, \\ ax + y - 2z = 0, \\ x - y - z = 7 + b \end{cases}$$
 cu a, b numere reale. Sunt $\checkmark ?$

false următoarele afirmații:

- A Sistemul este incompatibil pentru o infinitate de valori ale lui b ;
- B Sistemul este compatibil determinat pentru o valoare a lui a ;
- C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru 2 valori ale lui b ;
- D Sistemul este compatibil nedeterminat pentru 3 valori ale lui b .

120. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + bx_4 = c \end{cases}$$
 cu a, b, c numere reale. $\checkmark ?$

Sunt false următoarele afirmații:

- A Sistemul este incompatibil;
- B Sistemul este compatibil pentru $a = 10, b = -5, c = -\frac{15}{4}$;
- C Sistemul este compatibil pentru $a = 10, b = 7$;
- D Sistemul este incompatibil pentru $a = 10, b = -5, c = -\frac{15}{4}$.

121. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2 \end{cases}$$
 cu a, b, c, d numere reale. $\checkmark ?$

Sunt adevărate următoarele afirmații::

- A Pentru $\begin{cases} a \neq d \\ b \neq d \\ a \neq c \\ b = c \end{cases}$, sistemul este incompatibil;
- B Sistemul este incompatibil pentru $a = b = c = d$;
- C Sistemul este compatibil pentru $a = b = c = d$;
- D Pentru $\begin{cases} a \neq d \\ a = b = c \end{cases}$, sistemul este incompatibil.

122. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + ax_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + bx_4 = c \end{cases}$$
 cu a, b, c numere reale. $\checkmark ?$

Sunt false următoarele afirmații:

- A Sistemul este incompatibil pentru $a = 3$;

- B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = -2$;
- C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = 7$;
- D Sistemul este incompatibil pentru $a = 2, b = -2, c = -3$.

123. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$ cu a, b, c, d numere reale. Sunt adevărate $\checkmark ?$

următoarele afirmații:

- A Pentru $a = b = c = 0$ sistemul are soluție unică;
- B Sistemul este incompatibil pentru $a = b = 0, c = 8$;
- C Sistemul este compatibil pentru $a = 0, c \neq \pm b$;
- D $M = \{(1, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ este mulțimea soluțiilor pentru $a = 0, b = c$.

124. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 + ax_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + bx_4 = c \end{cases}$ cu a, b, c numere reale. $\checkmark ?$

Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A $(2, -1, 0, 4)$ este soluția sistemului pentru $a = -2, b = -18, c = -7$;
- B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -2, b = -18, c = -10$;
- C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = 7$;
- D Sistemul este incompatibil pentru $a = -2, b = -18, c = -3$.

125. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + bx_4 = c \end{cases}$ cu a, b, c numere reale. $\checkmark ?$

Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A $(-1, -1, 1, -1)$ este soluția sistemului pentru $a = -11, b = -7, c = 1$;
- B Sistemul este compatibil pentru $a > 3, b < 2, c = 0$;
- C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -11, b = -7, c \neq -\frac{8}{5}$;
- D Sistemul este incompatibil pentru $a = -11, b = -7, c \neq -\frac{8}{5}$.

126. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + 2z = 1, \\ ax + (2b - 1)y + 3z = 1, \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases}$ cu a, b, c, d numere reale. $\checkmark ?$

Sistemul este incompatibil pentru:

A $a = 1, b = -1$. B $a = 0, b = 2$. C $a = 1, b = 1$. D $a \neq 0, b = 1$.

127. Fie S mulțimea soluțiilor din $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + 13x + 56 = y \end{cases}$ Care \checkmark ?
dintre următoarele afirmații sunt **false**?

A $S = \{(-7, 14), (14, -7)\}$; C $S = \{(-7, 14)\}$;
 B $S = \emptyset$; D $S = \{(14, -7)\}$.

128. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru și sistemul de ecuații liniare cu 4 necunoscute \checkmark ?

$$\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + (\alpha + 2)x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Sistemul dat este incompatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$;
 B Pentru $\alpha = -5$ sistemul dat este compatibil;
 C Sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$;
 D Sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-5, 3\}$.

129. Câte triplete (x, y, z) de numere întregi verifică sistemul \checkmark ?

$$\begin{cases} x^2 - xy + 4yz + xz + 1 = 0 \\ xy + 2yz + 2xz - 2 = 0 \end{cases} ?$$

- A 5; B 4; C 1; D O infinitate.

130. Fie a, b, c, d numere reale. Când cele 2 parabole $y = ax^2 + c$ și $y = bx^2 - d$ se \checkmark ?
intersectează în exact 2 puncte?

- A $\frac{a}{b} < -\frac{c}{d}$; C $(c - d)(a - b) > 0$;
 B $a < b$; D $(d + c)(a - b) < 0$.

131. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 17, \\ x + yz = 26 \end{cases}$ cu soluții numere naturale. Sunt **false** \checkmark ?
următoarele afirmații:

- A $\frac{x - 7y}{3z} + \frac{x}{4} \in (-10, 0), \forall x, y, z$ soluții;
 B $\frac{x - 7y}{3z} + \frac{x}{4} \in (-12, 2), \forall x, y, z$ soluții;
 C $\frac{4z - y}{z} + \frac{3}{x} \in (-1, 2], \forall x, y, z$ soluții;

$$\boxed{\text{D}} \quad \frac{4z - y}{z} + \frac{3}{x} \in (-1, 10), \forall x, y, z \text{ soluții.}$$

132. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + 6y + mz = 1, \\ 2x - 6y + m^2z = m + 1, \\ x + (m + 1)z = m^2 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}. \text{ Notăm cu } S = \sum m, \checkmark ?$$
 pentru toate valorile lui m pentru care sistemul este incompatibil. Suma S este egală cu:

A $S = 2;$ B $S = -1;$ C $S = 1;$ D $S = 3.$

133. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_x (x + 2y) = 2, \\ -xy + 26y = y^3 \end{cases} . \text{ Sunt adevărate următoarele } \checkmark ?$$
 afirmații:

A Sistemul are o singură soluție reală; C Sistemul are două soluții reale;
 B Sistemul are trei soluții reale; D Sistemul are o infinitate de soluții.

134. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + (a + 1)y + (a + 2)z = a + 3, \\ bx + (b + 1)y + (b + 2)z = b + 3, \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases} \quad \text{cu } a, b, c \text{ numere } \checkmark ?$$
 reale. Sunt **false** următoarele afirmații:

A Sistemul este incompatibil;
 B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $c \neq 1, a = b;$
 C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = b = c = 1;$
 D Sistemul este incompatibil pentru $a = 10, b = -5, c = 1.$

135. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} (x + y)^{\frac{1}{2x}} = 4, \\ (x + y) \cdot 3^x = 48 \end{cases} \quad \text{cu soluții naturale. Fie } S \text{ suma } \checkmark ?$$
 divizorilor primi a tuturor soluțiilor sistemului. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $S = 2;$ C $S = 8;$
 B $S = 9;$ D S nu poate fi determinată.

136. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \hat{4} \\ 2x + 3y + z = \hat{7} \\ 3x + y + 2z = \hat{1} \end{cases} \quad \text{în } \mathbb{Z}_{10}. \text{ Sunt adevărate următoarele } \checkmark ?$$
 afirmații:

A Sistemul are 2 soluții; C $(\hat{8}, \hat{9}, \hat{9})$ este o soluție a sistemului;
 B $(\hat{3}, \hat{4}, \hat{4})$ este o soluție a sistemului; D Sistemul are o sută de soluții.

137. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -57 & 76 \\ 34 & 221 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A + B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 97 \\ 36 & -42 \end{pmatrix} \end{cases}$ în $M_2(\mathbb{R})$. ✓ ?

Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A Sistemul are două soluții;
- B $A = \begin{pmatrix} -16 & 22 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$ este o soluție a sistemului;
- C $A = \begin{pmatrix} -16 & 24 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$ este o soluție a sistemului;
- D Sistemul are soluție unică.

138. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} mx - y + z = \hat{1} \\ x + my - z = \hat{1} \\ -x + y + mz = \hat{1} \end{cases}$ în \mathbb{Z}_5 . Sunt adevărate următoarele ✓ ?

afirmații:

- A Pentru $m = \hat{0}$ sistemul este incompatibil;
- B Pentru $m \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ sistemul este incompatibil;
- C Pentru $m \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ sistemul este incompatibil;
- D Pentru $m \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$ sistemul este incompatibil.

Structuri algebrice

139. Pe mulțimea numerelor reale pozitive se consideră legea de compoziție $x * y = x^{y^{xy}}$. ✓ ?

Notăm rezultatul calculului $\sum_{t=2}^{2024} \frac{1}{\log_{t+1} \log_t(t * (t+1))}$ cu $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$. Atunci valoarea expresiei $b - a$ este:

- A 2025; B 2026; C 2027; D nu se poate determina.

140. Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se consideră legea de compoziție $x * y = xy + x + y$. Fie funcția ✓ ?
 $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6, f(x) = x * \hat{4}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A f este surjectivă, dar nu este injectivă;
- B f este injectivă, dar nu este surjectivă;
- C f nu este nici surjectivă, nici injectivă;
- D f este bijectivă.

141. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, bc = 1 \right\}$. Sunt adevărate afirmațiile: ✓ ?

- A M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor;
- B Înmulțirea matricelor este o operație asociativă pe M ;
- C Înmulțirea matricelor este o operație comutativă pe M ;
- D Înmulțirea matricelor este o operație pe M care admite element neutru.

142. Pe mulțimea $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ considerăm operațiile de adunare și înmulțire definite punctual, adică pentru orice $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funcțiile $f + g, f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt definite prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A Funcția identică $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = x$ este element neutru în $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \cdot)$;
- B $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este corp;
- C $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este inel, dar nu este corp;
- D $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nu este inel.

143. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție “o” prin $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Elementul neutru în raport cu “o” este 3;
- B Simetricul lui 4 în raport cu “o” este $\frac{8}{5}$;
- C Orice $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu “o”;
- D Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x - \frac{3}{2}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \circ)$ la grupul (\mathbb{R}^*, \cdot) .

144. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziție “*” prin $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Elementul neutru în raport cu “*” este $\frac{1}{2}$;
- B $\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$;
- C Legea de compoziție “*” este asociativă;
- D Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu “*” este $\frac{1}{9}$.

Problemele **145.** și **146.** se referă la legea de compoziție “*” definită pe \mathbb{R} , $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 7\alpha - 12$, unde $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

145. Se consideră mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Dacă $\alpha = 2$, atunci $(G, *)$ este: ✓ ?

- A Grup necomutativ; C Grup izomorf cu (\mathbb{R}_+^*, \cdot) ;
- B Grup abelian; D Monoid comutativ.

146. Mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea “*” pentru: ✓ ?

A $\alpha = 1$;

C $\forall \alpha \geq 2$;

B $\forall \alpha \in (-\infty, 0]$;

D $\alpha = 0$.

Problemele 147. și 148. se referă la legea de compoziție “*”, definită pe mulțimea $G = [0, 1)$, $x * y = \{x + y\}$, $\forall x, y \in G$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x .

147. Structura $(G, *)$ este: ✓ ?

A Monoid comutativ;

C Grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$;

B Grup abelian;

D Niciuna dintre variantele menționate.

148. Ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$ are: ✓ ?

A 2 soluții;

C 0 soluții;

B 3 soluții;

D 1 soluție.

149. Se consideră mulțimea $G = (12, \infty)$, iar pe mulțimea numerelor reale pozitive și nenule, se consideră legea de compoziție asociativă “*”, definită prin $x * y = xy - 12x - 12y + 156$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Știind faptul că $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 12$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A $a = \frac{1 * 2 * 3 * \dots * 2024}{6}$ este număr prim;

B $a = \frac{1 * 2 * 3 * \dots * 2024}{6}$ este număr par;

C $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024 \text{ ori}} = (x - 12)^{2024}, x \in G$;

D $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024 \text{ ori}} = (x - 12)^{2024} + 12, x \in G$.

150. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. În care dintre următoarele cazuri este f un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$? ✓ ?

A $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$;

C $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$;

B $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

D $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

151. Fie $U_{12} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 12 ale unității. Considerăm numărul complex $w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \in U_{12}$. Care este ordinul acestui element în grupul (U_{12}, \cdot) ? ✓ ?

- A 2; B 6; C 12; D 3.

152. Fie $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pe mulțimea \mathbb{Z} definim operațiile: $x \oplus y = x + y + \alpha$ și $x \odot y = (x + 7)(y + 7) - 7$. Atunci: ✓ ?

- A 0 este elementul neutru al operației \oplus ;
 B Operația \odot este asociativă;
 C \odot este distributivă față de \oplus dacă și numai dacă $\alpha = -7$;
 D $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil față de legea \odot dacă și numai dacă $x = -8$.

153. Fie legea de compoziție pe \mathbb{Q} definită de relația ✓ ?

$$x \circ y = x + y + 3xy.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A (\mathbb{Q}, \circ) este grup abelian;
 B Există $m \in \mathbb{Q}$ pentru care $(\mathbb{Q} \setminus \{m\}, \circ)$ este grup;
 C Legea “ \circ ” este asociativă;
 D Legea “ \circ ” are element neutru.

154. Fie $(\{0, 1, \alpha, \beta\}, +, \cdot)$ un corp cu patru elemente. Care dintre următoarele afirmații ✓ ? sunt adevărate?

- A $1 + 1 = 0$; C $\alpha + \beta = 0$;
 B $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$; D $1 + 1 + 1 + 1 = 0$;

155. Pentru un grup finit (G, \cdot) cu elementul neutru e și un număr natural nenul p , notăm ✓ ? $G_p = \{x \in G : x^p = e\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Există un grup finit G astfel încât G_2 să aibă 3 elemente;
 B Există un grup finit G astfel încât G_2 să aibă 4 elemente;
 C G_3 are un număr impar de elemente, pentru orice grup finit G ;
 D Există un grup finit G astfel încât G_3 să aibă 3 elemente.

156. Fie mulțimile de matrici: $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{B}_d = \{M \in \mathcal{M} \mid \det(A) = d\}$, ✓ ?

pentru orice $d \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}$ definită prin $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Fie $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$. Atunci:

- A f este o funcție injectivă;
 B f este un morfism de corpuri;

$$\boxed{\text{C}} \quad \mathbb{C} = \bigcup_{d \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad f(U_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legea de compoziție “*”, $(x, y) * (w, t) = (xw + yt, xt + wy)$.

Problemele **157.** și **158.** se referă la această lege de compoziție.

157. Elementul neutru al legii “*” este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad (0, 0); \quad \boxed{\text{B}} \quad (1, 0); \quad \boxed{\text{C}} \quad (0, 1); \quad \boxed{\text{D}} \quad (1, 1).$$

158. Fie $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, astfel încât $(-2024, 2024) * (-2023, 2023) * \dots * (2023, -2023) * (2024, -2024) = (a, b)$. Valoarea expresiei $a + b$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 2024; \quad \boxed{\text{B}} \quad 4048; \quad \boxed{\text{C}} \quad 0; \quad \boxed{\text{D}} \quad 1.$$

159. Fie (G, \cdot) un monoid cu elementul neutru e și $x \in G, x \neq e$ astfel încât $x^2 = e$. Dacă $y \in G, y \neq x$ astfel încât $xy = y^2$, atunci $y^{2024} = ?$

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad y^4; \quad \boxed{\text{B}} \quad e; \quad \boxed{\text{C}} \quad x; \quad \boxed{\text{D}} \quad y^2.$$

160. Fie $G = (\mathbb{Z}, +)$ grupul format din mulțimea numerelor întregi și operația de adunare. Notăm $End(\mathbb{Z})$ mulțimea endomorfismelor lui G și $Aut(\mathbb{Z})$ mulțimea automorfismelor lui G . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- $\boxed{\text{A}}$ Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \in End(\mathbb{Z}), \varphi(x) = \frac{x}{k}, k \in \mathbb{Z};$
 $\boxed{\text{B}}$ Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \in End(\mathbb{Z}), \varphi(x) = x \cdot k, k \in \mathbb{Z};$
 $\boxed{\text{C}}$ $Aut(\mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | \varphi(x) = x\};$
 $\boxed{\text{D}}$ $Aut(\mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | \varphi(x) = x \text{ sau } \varphi(x) = -x\}.$

Pe mulțimea \mathbb{N} definim legile de compoziție “ \oplus ” și “ \odot ” astfel:

$$x \oplus y = \text{cel mai mare divizor comun al numerelor } x \text{ și } y$$

$$x \odot y = \text{cel mai mic multiplu comun al numerelor } x \text{ și } y.$$

Problemele **161.** și **162.** se referă la aceste legi de compoziție.

161. Rezultatul calculului $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 2024 \oplus 2025$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 0; \quad \boxed{\text{B}} \quad 1; \quad \boxed{\text{C}} \quad 2025; \quad \boxed{\text{D}} \quad \text{nu se poate determina.}$$

162. Rezultatul calculului $1 \oplus 2 \odot 3 \oplus 4 \odot \dots \odot 2023 \oplus 2024 \odot 2025$ este:

✓ ?

A 0; C 2025; B 1; D nu se poate determina.

163. Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție “*”, $x * y = |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

 A Dacă $x * 3 \leq 5$, $x \in [-2, 2]$; C $x * y = x + y \iff x, y \leq 0$; B Dacă $x * 1 \leq 0$, $x \in (-\infty, -1]$; D $x * y \geq |x + y|$.

164. Fie mulțimea $G = (3, \infty)$ definim legea de compoziție “*”, $x * y = -3x - 3y + xy + 12$; $x, y \in G$. Fie funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in G$. Știind că f este un izomorfism între grupurile $(G, *)$, $(\mathbb{R}, +)$, atunci: ✓ ?

 A $a = 1, b = 2, c = 3$; C $a = 0, b = 1, c = 3$; B $a = 0, b = 1, c = -3$; D $a = 1, b = 2, c = -3$.

165. Fie $\xi = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Se știe că $(\mathbb{Z}[\xi], +, \cdot)$ este un inel, unde: $\mathbb{Z}[\xi] := \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Considerăm funcția: ✓ ?

$$\Phi : \mathbb{Z}[\xi] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

$$a + b\xi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & f(a, b) \end{pmatrix}$$

unde $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ este o funcție. Dacă Φ este un morfism de inele între $(\mathbb{Z}[\xi], +, \cdot)$ și $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

 A $\Phi(\xi) = -\Phi(\xi^2) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; C $f(x, y) = x - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$; B $f(x, y) = x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$; D $\Phi(\xi + 1) = \Phi(-\xi^2)$.

Polinoame

166. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $f = X^3 + \alpha X^2 - \alpha X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ și matricea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ din ✓ ?

$M_3(\mathbb{C})$ ale cărei elemente sunt rădăcinile lui f . Atunci:

 A Cel puțin un element din fiecare linie a lui A este 1; B Valorile lui α pentru care $A \in M_3(\mathbb{R})$ sunt $\alpha \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$; C $\det(A) \in \mathbb{R}$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$; D Valorile lui α pentru care $A \in M_3(\mathbb{R})$ sunt $\alpha \in [-3, 1]$.

167. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - (m + 2)X^2 + (m^2 + 2)X - 1$, $m \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului m pentru care toate rădăcinile polinomului sunt numere reale este: ✓ ?

- A -1 ; B 1 ; C 0 ; D 2 .

168. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinoamele $f = aX^2 + bX + 12$ și $g = X^3 + 2bX^2 + 3aX + 5$ să aibă o rădăcină întregă comună.

- A $a = 18, b = -30$; C $a = 20, b = 30$;
 B $a = 28, b = 40$; D Nu există valori care să îndeplinească condiția.

169. Câte polinoame $p \in \mathbb{R}[X]$ pentru care funcția polinomială asociată lui p să fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ există?

- A Un singur polinom; C O infinitate;
 B Două polinoame; D Nici unul.

Problemele **170.** și **171.** se referă polinomul $f = X^4 + aX^3 + \widehat{2}X^2 + aX + a + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

170. Polinomul f are rădăcină în \mathbb{Z}_3 dacă și numai dacă: ✓ ?

- A $a \in \{\widehat{0}, \widehat{2}\}$; B $a \in \mathbb{Z}_3$; C $a \in \{\widehat{1}, \widehat{2}\}$; D $a \in \emptyset$.

171. Mulțimea tuturor valorilor $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este reducibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ este: ✓ ?

- A $\{\widehat{0}, \widehat{2}\}$; B \emptyset ; C $\{\widehat{1}, \widehat{2}\}$; D $a \in \mathbb{Z}_3$.

172. Fie polinomul $h = X^4 - 5X^2 + 4$, astfel încât $h(w) = h(x) = h(y) = h(z) = 0$ și $w \neq x \neq y \neq z$. Care dintre următoarele afirmații despre produsul $S = (4 - w)(4 - x)(4 - y)(4 - z)$ nu sunt adevărate? ✓ ?

- A $(w \cdot x \cdot y \cdot z)^4 \leq S$; C $S \geq 4^3$;
 B $S = 196$; D $S = 180$.

173. Dacă polinomul $f(x) = x^3 - 2025x^2 + 2024x + 2023$ are ca rădăcini distincte numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, valoarea raportului $\frac{3 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)}$ este: ✓ ?

- A $\frac{4047}{2027}$; B $\frac{2025}{2027}$; C $-\frac{2025}{2024}$; D $\frac{2025}{2024}$.

Problemele **174.** și **175.** se referă polinomul $f = X^{2024} + 7X^{2023} + 3x^2 + 3, f \in \mathbb{R}[x]$.

174. Restul împărțirii lui f la polinomul $X + 1$ este: ✓ ?

- A 0; B $x^2 + 12x + 1$; C $x + 7$; D 10.

175. Dacă $x_i, i = \overline{1, 2024}$ sunt rădăcinile polinomului f , care este rezultatul calculului ✓ ?

$$\sum_{i=1}^{2024} x_i + \prod_{i=1}^{2024} x_i ?$$

- A π ; B -7; C $\pi\sqrt{3}$; D -4.

Problemele 176. și 177. se referă la polinomul $f = X^2 + mX - 2$, unde $m \in \mathbb{R}, m > 0$.

176. Valoarea lui m astfel încât $f : (X - m)$ este: ✓ ?

- A 1; B 2; C 2024; D 391.

177. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile polinomului f , valoarea lui m astfel încât $\frac{x_1 + x_2}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = 2$ este: ✓ ?

- A 1; B 2; C 2024; D 391.

178. Fie f un polinom de gradul 3 cu rădăcini complexe, astfel încât ✓ ?

$$\begin{cases} x_1 = i + 1, \text{ rădăcină a lui } f; \\ f(0) = f(1); \\ \text{coeficientul lui } X^3 \text{ este } 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $f(-1) = 0$; C $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;
 B $f(0) = f(1) = 0$; D $x_1 x_2 x_3 = -2$.

179. Se consideră polinomul $f = 5X^3 - 15aX^2 + 12X - 2$, unde $a \in \mathbb{R}$. Știind că rădăcinile lui f se află în progresie aritmetică, valoarea lui a poate fi: ✓ ?

- A $-\frac{1}{2}$; B $\frac{\sqrt{5}}{2}$; C $-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}$; D 1.

180. Fie a, b și c soluțiile ecuației $x^3 + 6x^2 + 16x + 8 = 0$. Valoarea expresiei $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ este: ✓ ?

- A 0; B 5; C 2; D 3.

181. Se consideră polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Restul împărțirii lui P la polinomul $X^2 + 2X - 63$ este:

- A $-\frac{(9^n + 7^n)}{2}X + \frac{3 \cdot 7^n + 9^n}{2}$; C $9^n \cdot X + \frac{25 \cdot (-9)^n - 9 \cdot 7^n}{16}$;
 B $\frac{9^n + 7^n}{2}$; D $\frac{(-9)^n + 7^n}{16}X + \frac{7 \cdot (-9)^n + 9 \cdot 7^n}{16}$.

182. Fie două polinoame $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ cu termenul liber $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 2$. Știind că ambele polinoame dau același rest la împărțirea cu $X - a$, termenul liber al polinomului $P_1(P_2(x)) - P_2(P_1(x))$ este:

- A 0; B 1; C 2024; D 3192.

183. Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$. Știind că funcția polinomială asociată acestuia are forma

$$P(x) = \frac{x^n}{a_n a_{n-1}} + \frac{x^{n-1}}{a_{n-1} a_{n-2}} + \dots + \frac{x^2}{a_2 a_1} + \frac{n}{a_1 a_n}$$

care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate, considerând că a_1, a_2, \dots, a_n sunt termenii unei progresii aritmetice?

- A $(X - 1) \nmid P$; C $P(1) = 0$;
 B $P(1) = n + \frac{n}{a_1 a_n}$; D $P(1) = n - 1 + \frac{n}{a_1 a_n}$.

184. Fie polinomul $P = 2021X^3 + 2022X^2 - 2023X + 2024$, cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3 .

Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ este:

- A 2023; B $\frac{4043}{2021}$; C 2024; D $\frac{4044}{2023}$.

185. Se consideră polinomul $f = (1 + X)^{25} = a_0 + a_1X + \dots + a_{25}X^{25}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $a_1 + a_3 + \dots + a_{25} = 2^{25}$; C $a_{19} = C_{25}^{12}$;
 B $a_1 + a_3 + \dots + a_{25} = 2^{24}$; D $a_{19} = a_6$.

186. Fie polinomul $S_k = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ dat de șirul de coeficienți $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)$. Rădăcinile acestui polinom sunt x_1, x_2, \dots, x_k . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Pentru $k = 3$ și șirul de coeficienți $(5, -11, 7, 3)$, valoarea sumei $x_1 \cdot (1 + x_2 + x_3) + x_2 \cdot (1 + x_1 + x_3) + x_3 \cdot (1 + x_1 + x_2) = \frac{3}{5}$;

B Pentru $k = 100$ și șirul de coeficienți $(1, 1, \dots, 1)$, valoarea sumei $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{1-x_i} = 50$;

C Pentru $k = 2$ și șirul de coeficienți $(3, 7, q)$, valoarea lui q este egală cu 3, știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{3}$;

D Pentru $k = 10$ și șirul de coeficienți $(1, 1, \dots, 1)$, valoarea sumei $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1-x_i} = 55$;

187. Fie polinomul $P = X^4 + aX^3 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 . Să se determine valoarea expresiei $x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3) + x_1P'(x_1) + x_4P'(x_4)$. ✓ ?

A $9c - 4a^2 + 2ab$; B $5ab + 4c$; C $a^4 - 3a^2b + 3ab + 3ac - 4c$; D $3a^4 + 3ac - 4c$.

188. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 2. Știind că $xP(x-2) = (x-4)P(x-1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $P(4) = 0$;
 B rădăcinile polinomului P sunt $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 1$;
 C $P(3) = 48$;
 D polinomul are gradul 5.

Diverse

189. Fie a, b, c trei numere întregi. Numărul de triplete (a, b, c) care satisfac ecuația $a^2 + b^2 - 8c = 6$ este: ✓ ?

A 1; B 2; C 3; D 0.

190. Notăm cu \mathcal{F} mulțimea tuturor funcțiilor cu domeniul $\{0, 1, 2, 3\}$ și codomeniul $\{1, 2, 3, 4\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Mulțimea \mathcal{F} conține 4^3 funcții;
 B Mulțimea \mathcal{F} conține 4 funcții strict monotone;
 C Mulțimea \mathcal{F} conține 4 funcții injective;
 D Probabilitatea ca o funcție f aleasă aleator din mulțimea \mathcal{F} să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{1}{16}$.

191. Fie $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Dacă

$$P = (a^{2x_1})^n \cdot a^{x_1} + (a^{2x_2})^n \cdot a^{x_2} + \dots + (a^{2x_n})^n \cdot a^{x_n} \text{ și}$$

$$Q = n(a^{2x_1} + a^{2x_2} + \dots + a^{2x_n}) - (n-1)(a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_n}), \text{ atunci:}$$

- A $P > Q$; B $P \geq Q$; C $P < Q$; D $P > Q - 1$.

192. Dacă ecuația de gradul al doilea $x^2 + ax + b = 0$, are coeficienții a și b întregi și rădăcinile întregi diferite de $k - 1$, k și $k + 1$, atunci numărul $b + ak + k^2$ este:

- A Compus (adică nu este prim); C 1;
 B Prim; D Poate fi și compus și prim.

193. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ și $a \geq 2$. Dacă $P = \prod_{k=1}^n (1 + a^{x_k} + a^{x_{k+1}+1})$ și $Q = a^{2(n+x_1+x_2+\dots+x_n)}$, unde $x_{n+1} = x_1$, atunci:

- A $P \geq Q$; B $P < Q$; C $P = Q - 1$; D $P = Q + 1$.

194. Care este cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y, z) = x + 2y + 3z$, atunci când numerele întregi x, y, z verifică relația $2x(3x - 1) + y(y - 4x) + 4z(z - x) = 1$?

- A 0; B -1; C -2; D 1.

195. Dacă $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci inecuația $f(g(f(x))) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$, are soluțiile incluse în mulțimea:

- A $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$; C $[-1, 1] \cup [2, 3]$;
 B $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$; D $[0, 1] \cup [2, 4]$.

196. Dacă x, y, z sunt numere întregi nenule astfel încât $4x + 7z = 7y + 9$, atunci restul împărțirii lui $2x + y + 5z$ la 6 este:

- A 1; B 2; C 3; D 4.

197. Valoarea expresiei $|1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \dots + 99^2 - 100^2|$ poate fi exprimată ca și:

- A $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$;
 B $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 196 + 198 + 200$;
 C $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{5059}{5060}$;
 D $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 199$.

Fie n și p numere naturale mai mari sau egale decât 2 și $x = \sqrt[n]{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} + \sqrt[n]{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}$

Problemele **198.** și **199.** se referă la această ecuație.

198. Dacă p nu este pătrat perfect, atunci x este:

✓ ?

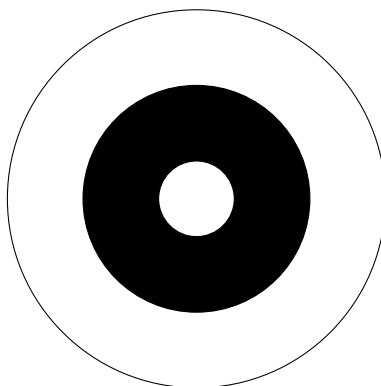
- A Întreg; B Rațional; C Irațional; D Natural.

199. Pentru $n = 2$, numerele p pentru care x este rațional au forma:

✓ ?

- A $4r^4$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$; C $(2r^2 - 3)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$;
 B $(2r^2 - 1)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$; D $(3r^2 - 1)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

200. Fie o țintă de darts, alcătuită din 3 cercuri concentrice, având razele 1, 3, 5 respectiv. O săgeată este aruncată la întâmplare și atinge ținta; care este probabilitatea ca săgeata să aterizeze pe zona neagră?



✓ ?

- A 32%; B 36%; C 40%; D 56%.

Analiză matematică

Șiruri

201. Termenul general al șirului (x_n) definit prin $x_{n+1} = x_n^{1+\frac{1}{n}}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, este: ✓ ?

- A $x_n = x_1^{\frac{1}{n}}$;
 B $x_n = x_1^{\frac{n+1}{n}}$;
 C $x_n = x_1^n$;
 D $x_n = x_1^{\frac{n+2}{n+1}}$.

202. Aflați termenul general al șirului (x_n) definit prin $x_1 = 2, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{4x_n x_{n+1}}{4x_n - x_{n+1}}$. ✓ ?

- A $x_n = \frac{2^n}{n}$;
 B $x_n = \frac{2^{n+1}}{n+1}$;
 C $x_n = \left(\frac{x_1}{1}\right)^n$;
 D $x_n = \frac{n+1}{2^n}$.

203. Pentru șirul (x_n) de numere pozitive cu $x_{n+1}^3 < 3x_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este adevărat că: ✓ ?

- A Șirul este crescător;
 C Șirul este mărginit superior;
- B Șirul este mărginit inferior;
 D Limita șirului este 1.

204. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$? ✓ ?

- A Șirul (x_n) este mărginit superior;
 C Șirul (x_n) este nemărginit;
- B Șirul (x_n) este mărginit inferior;
 D $x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

205. Pentru $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ valoarea lui $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{n(n+1)}\right)^n$ este: ✓ ?

- A $L = 1$;
 B $L = 2$;
 C $L = \infty$;
 D $L = e$.

206. Valoarea limitei șirului (x_n) definit prin $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n - \sqrt{n+2}}$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

207. Numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot n^2 + b \cdot n + 5}{b \cdot n^2 + 4 \cdot n + 7} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = \frac{1}{e}$ pot lua valorile: ✓ ?

- A $a = 2$; B $b = -2$; C $b = 2$; D $a = -2$.

208. Limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ este: ✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{2}$; C ∞ ; D $\ln 2$.

209. Valoarea expresiei $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ este egală cu: ✓ ?

- A 2; B -1; C 1; D -2.

210. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin $a_n = \{\sqrt{n^2 + 5n}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x . Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este egală cu: ✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{4}$; C $\frac{1}{5}$; D $\frac{1}{2}$.

211. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x - 1$ și x_n soluția ecuației $f(x) = \frac{n+1}{n}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$;
 B f este injectivă, dar nu surjectivă; D f este bijectivă.

212. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $x_0 = a$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Șirul (x_n) este divergent; C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$;
 B Șirul (x_n) este convergent; D $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2$.

213. Fie șirurile $(a_n), (b_n)$ definite prin $(1 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n \sqrt{5}$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ este: ✓ ?

- A $\sqrt{5}$; B $2\sqrt{5}$; C $e^{\sqrt{5}}$; D $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

214. Fie șirul (x_n) definit prin $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$. Limita șirului (x_n) este: ✓ ?

- A 0; B ∞ ; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{3}{4}$.

215. Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}$ pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_1 = a \geq 1$, și $x_{n+1} = x_n + x_n^2$. ✓ ?

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Șirul este convergent; C Șirul este divergent;
 B $L = \frac{1}{a}$; D $L = \frac{1}{2a}$.

216. Fie șirul (a_n) definit prin relația de recurență $n \cdot a_{n+1} = (2n+2)(a_n + n \cdot 2^n)$, $n \geq 1$, ✓ ? cu $a_1 = 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $a_n = n^2 \cdot 2^n$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
 B $a_n = (n+1)^2 \cdot 2^n$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

217. Dacă $a_n = \ln(n+1) - \ln n + \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este: ✓ ?

- A Nemărginit; C Monoton;
 B Convergent; D Mărginit inferior de 1.

218. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisface $x_1 = 1$ și $x_n = \frac{1}{2^n - 2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot x_{n-k}$, $n \geq 2$, atunci, pentru ✓ ? orice $n \in \mathbb{N}^*$, e adevărat că:

- A $(n+1) \cdot x_{n+1} = x_n$; C $x_n \leq 2^n \cdot x_{n+1}$;
 B $(n+1) \cdot x_{n+1} = n \cdot x_n$; D $x_n \leq 2022 \cdot x_{n+1}$.

219. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 2}$, cu $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2}$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Care ✓ ? dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este divergent; C $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$;
 B Șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător; D $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \cdot a_n = -1$.

220. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația de recurență $a_{n+1} = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{a_n})^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $a_0 = 0$. ✓ ? Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton; C Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită;
 B Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit; D Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent.

221. Definim șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ prin relația $a_{n+1} = \frac{1}{n} + a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu ✓ ? $a_1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\alpha = 1, \beta = 0;$ B $\alpha = 1, \beta = 1;$ C $\alpha = 1, \beta = 2;$ D $\alpha = 2, \beta = 1.$

228. Dacă $p > 0$ și $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p \sqrt{k^3}}{2 n^2} \right) - n \right)$, atunci: ✓ ?

- A $L = 0;$ B $L = -\frac{p^2}{32};$ C $L = \frac{p^2}{32};$ D $L = p.$

229. Dacă $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k + (k+1)^x)(k + (k+1)^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, atunci: ✓ ?

- A $\alpha(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R};$
 B $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| < 1$; $\alpha(x) = \frac{2}{3}$, dacă $|x| = 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| > 1$;
 C $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| \leq 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| > 1$;
 D $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| < 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| \geq 1.$

230. Fie $a \in (0, +\infty)$ și $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{a^n n!}{n^n} \leq x, \text{ pentru o infinitate de } n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Atunci: ✓ ?

- A $A = (0, \infty)$, dacă $a < e$;
 B $A = \emptyset$, dacă $a > e$;
 C $A = (a, \infty)$, dacă $a > e$;
 D $A = \emptyset$, dacă $a < e$;

231. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale pozitive cu $e^{n+1}x_{n+1} - e^n x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. ✓ ?
 Atunci:

- A $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător;
 B $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are un subșir care nu e convergent;
 C $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător;
 D $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

232. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5}$ este: ✓ ?

- A $\frac{1}{4};$ B $1;$ C $\frac{1}{5};$ D $0.$

233. Fie $a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ este: ✓ ?

- A 1; B $\frac{1}{2}$; C 0; D ∞ .

234. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci: ✓ ?

- A $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit; C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = e$;
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$; D $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

235. Fie $0 < c < 1$ și $k \in \mathbb{N}^*$. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k c^n$ este egală cu: ✓ ?

- A ∞ ; B 0; C 1; D e .

236. Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - en\right)$ este: ✓ ?

- A 0; B $-\frac{1}{2}$; C $\frac{e}{2}$; D $-\frac{e}{2}$.

237. Considerăm șirul seriei armonice $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Știind ✓ ?
 că șirul $(h_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent la constanta Euler-Mascheroni $\gamma = 0.57721\dots$,
 valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n})$ este:

- A 0; B e^γ ; C γ^e ; D $\ln \gamma$.

238. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sum_{i=1}^k i}$ și ✓ ?

$y_n = \frac{[1012(n+1)x_n]}{n+1}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . Notăm
 cu $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n \log_{\frac{2}{3}} \frac{k^2 + 4k + 3}{(k+2)^2}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații
 sunt adevărate.

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{2}\right)^n = \frac{1}{e}$; C $\sum_{k=1}^{2024} L = 1$;
 B $L = 2024$; D $L \leq 1$.

239. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $L = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n$ este: ✓ ?

- A 1; B e^{-1} ; C $\ln 2$; D $3 \ln 2$.

Funcții

240. Notăm cu ℓ valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{2x+1} - 1}$. Să se indice care dintre următoarele ✓ ?
 variante de răspuns **nu** reprezintă valoarea lui ℓ .

- A $\frac{2}{3}$; B $\frac{4}{3}$; C $\frac{3}{4}$; D 1.

241. Știind că $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) \dots \cos(nx)}{x^2}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, să se indice valoarea ✓ ? de adevăr a următoarelor propoziții.

- A $L_1 = \frac{1}{2}$; C $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$;
 B $L_1 = \frac{1}{4}$; D $L_n = \frac{n^2(2n+1)}{24}$.

242. Fie funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$, $2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1}$. Punctele în care funcția are limita ✓ ? sunt:

- A $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$; C $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$;
 B $(1, \infty) - \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$; D $(1, \infty) - \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

243. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate, știind că ✓ ? $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

- A f impară; C f marginită;
 B f pară; D $\text{Im}(f) = (-1, 1)$.

244. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}{n} = \frac{5}{2}$ este: ✓ ?

- A 2; B 3; C 4; D 1.

245. Notăm cu $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}x - \sin x}{\sin^3 x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\ell = 1/2$; B $\ell = 0$; C $\ell = 1/3$; D ℓ nu există.

246. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} - 1\right) \cdot \sin x$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C ∞ ; D alt răspuns.

247. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)}{\ln(x+1) + \ln(2x+1) + \dots + \ln(nx+1)}$ este: ✓ ?

- A $n(n+1)$; B $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; C $\frac{n(n+1)}{2}$; D 1.

248. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{\arctg x}{x}\right)^2$, ✓ ?

$$A := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) \in (0, \infty) \right\} \quad \text{și} \quad B := \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta f(x) \in (0, \infty) \right\}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Mulțimea $A \cup B$ este finită; C $0 \in B$;
 B $2 \in A$; D $A \cap B = \emptyset$.

249. Fie $f: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, și $M := \left\{ p \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^p f(x) \in (0, \infty) \right\}$. ✓ ?

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $M = \emptyset$; B $M \subseteq \mathbb{Q}$; C $M = (0, \infty)$; D $M \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

250. Dacă $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctg\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$, atunci valoarea lui l este egală cu: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{2}$; C 0; D 1.

251. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \frac{1}{\sin x}$? este: ✓ ?

- A 0; B 1; C e^2 ; D e .

252. Notăm cu $h = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) \right)$. Care dintre următoarele variante de ✓ ?
 răspuns indică valoarea lui h ?

- A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{4}$; C 1; D 0;

253. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sum_{k=1}^n \ln(1+kx) \right)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{2}{n^2}}$. Dacă l este de forma e^x , care dintre ✓ ?
 următoarele variante de răspuns indică valoarea lui x ?

- A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{4}$; C 1; D ∞ ;

254. Dacă $L = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\ln(x+1)}}{x\sqrt{x}}$, atunci valoarea lui L este: ✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{4}$; C 2; D ∞ ;

255. Se dă limita $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \ln(1-x^3) \right)$. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor. ✓ ?

- A $-1 < L < 1$; C $L \in \{-\infty, +\infty\}$;
 B $L > 0$; D limita nu există.

256. Fie $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tg(\sqrt{5-x}-2)}{x^2-1}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\ell = 0$; B $|\ell| \leq 1/4$; C $\ell \in \mathbb{Q}$; D $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

257. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 2$. Să se indice valoarea de $\checkmark ?$ adevăr a următoarelor afirmații.

- A $a < b$; B $a \neq b$; C $a = b = 1$; D $a^2 + 2b = 6$.

Problemele **258.** și **259.** se referă la funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{x} + \rho(x), \forall x \geq 1$, unde $\rho(x)$ notează distanța de la x la cel mai apropiat întreg.

258. Dacă $\alpha = \inf \{ \sup \{ f(x) : x \in [n, n+1) \} : n \in \mathbb{N}^* \}$, atunci: $\checkmark ?$

- A $\alpha = 0$; B $\alpha = 1/2$; C $\alpha = 1$; D $\alpha = 3/2$.

259. Dacă $\beta = \sup \{ \inf \{ f(x) : x \in [n, n+1) \} : n \in \mathbb{N}^* \}$, atunci: $\checkmark ?$

- A $\alpha = 0$; B $\alpha = 1/2$; C $\alpha = 1$; D $\alpha = 3/2$.

260. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = kx^3 - (k+1)x^2 + (2-k)x - k$ are un minim local în $\checkmark ?$ $x = 1$ pentru orice:

- A $k > 0$; B $0 < k < 1$; C $k > 1/2$; D $k \in \mathbb{R}$.

261. Numărul valorilor $a \in (0, 2\pi)$ pentru care $f(x) = |x^2 - 1| \sin(ax)$ este derivabilă pe $\checkmark ?$ \mathbb{R} este:

- A 0; B 1; C 3; D ∞ .

262. Inegalitatea $a^x \geq x + 1$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă: $\checkmark ?$

- A $a = e$; B $a = 1$; C $a = e^e$; D $a = 1/e$.

263. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x^2 - 6x + 6, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ și $g : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \checkmark ?$

$\int_{t-1}^t f(x) dx$. Numărul punctelor de extrem local ale lui g în intervalul $(1, 2)$ este:

- A 0; B 1; C 2; D 3.

264. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ -\frac{3}{2\pi\sqrt{2}} \sin(\pi x), & \text{altfel} \end{cases}$. Să se indice $\checkmark ?$

care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate.

- A f nu are puncte de întoarcere; C f are doua puncte de întoarcere;
 B f are un punct de întoarcere; D $x = 1$ este punct de întoarcere.

265. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ și $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(3)$. Stabiliți valoarea $\checkmark ?$ de adevăr a afirmațiilor.

- A G_f are o asimptotă oblică; C $L = 3$;
 B f are 3 puncte de extrem; D $L = 4$.

266. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Care dintre următoarele variante de $\checkmark ?$ răspuns sunt adevărate?

- A f injectivă; C $f(x) = 0$ are două soluții reale;
 B f surjectivă; D Suma părților întregi ale soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ este negativă.

267. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \cos\left(\frac{(2x-1)\pi}{2}\right)$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

- A funcția este continuă pe \mathbb{R} ; C funcția este discontinuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
 B funcția este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; D funcția este discontinuă pe \mathbb{Z} .

268. Dacă $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ x^a \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ pentru $a \in \mathbb{R}$, atunci: $\checkmark ?$

- A $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a este continuă pe \mathbb{R} ;
 B $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a este derivabilă pe \mathbb{R} ;
 C $\forall a \in \mathbb{R} : f_a$ este continuă pe \mathbb{R} ;
 D $\forall a \in \mathbb{R} : f_a$ este derivabilă pe \mathbb{R} .

269. Dacă $f(x) = \frac{1}{1-x}$ este o funcție definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, atunci ce valoare are $\checkmark ?$ a n -a derivată a lui f în $x = 0$?

- A $n!$; B $\frac{n!}{2}$; C $(-1)^n n!$; D $2n!$.

270. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ $\checkmark ?$ sunt parametri. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$, atunci funcția f este continuă pe \mathbb{R} ;

- B Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} ;
- C Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția f este discontinuă în 0 ;
- D $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

271. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate, dacă $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ✓ ?
funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- A Funcția $|f|$ este continuă în 0 ;
- B Funcția f are cel puțin un zero în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pentru că $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$;
- C Funcția f nu are niciun zero în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- D Funcția f nu are limită în 0 .

272. Fie $A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{funcția } f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 10x^2 + 9, \text{ este injectivă}\}$. ✓ ?
Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $A = \emptyset$;
- B $[3, \infty) \subseteq A$;
- C Mulțimea A are un cel mai mic element;
- D $2 \notin A$.

273. Fie $f: [0, 2\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = x - [x]$, unde $[x]$ desemnează partea ✓ ?
întregă a lui x . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Funcția f este continuă;
- B Funcția f are exact 3 puncte de discontinuitate;
- C Funcția f are exact 3 puncte de minim global;
- D $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x) dx = 12 - 6\sqrt{3}$.

274. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în origine, astfel încât $f(0) = 0$ și ✓ ?
 $f'(0) = 1$. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(2x) \dots f(nx)}{x^n}$ este:

- A $\frac{1}{n!}$;
- B 1 ;
- C 0 ;
- D $n!$.

275. Dacă $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă care satisface ecuația funcțională ✓ ?
 $e^{x+y} f(xy) = e^{(x+1)y} f(x) + e^{(y+1)x} f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)$, atunci f este derivabilă și

- A există un număr real $c \neq 0$ astfel încât $cx f'(x) = e^x (x \ln x + 1), \forall x \in (0, +\infty)$;
- B $f(x) = xe^x \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$;

C $f'(x) = e^x(x \ln x + 1), \forall x \in (0, +\infty)$;

D $xf'(x) = x \ln x + 1, \forall x \in (0, +\infty)$.

276. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x(\ln|x| - 1) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A f are limită $x = 0$;

C f are derivată în punctul $x = 0$;

B f este continuă în punctul $x = 0$;

D f este derivabilă în punctul $x = 0$.

277. Derivata de ordin n a funcției: $f(x) = x^n \ln x$, cu $x \in \mathbb{R}_+^*$. este:

✓ ?

A $n!x[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})]$;

C $n!x^{n-1}[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})]$;

B $n![\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})]$;

D $n!x^n[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})]$.

278. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2 + a)^2, \forall x \in \mathbb{R}$, unde a este un parametru real. Considerăm mulțimea

✓ ?

$$M = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ are exact două puncte de minim local}\}.$$

Aceasta este:

A $M = (-\infty, 0]$;

B $M = (-\infty, 0)$;

C $M = (0, +\infty)$;

D $M = [0, +\infty)$.

279. Fie $a > 0$ și $f : [-a, a] \rightarrow (0, a]$ o funcție derivabilă cu derivata continuă în punctul $x = 0$. Fie $x_1 \in [-a, a]$ și $x_n = f(x_{n-1}), n \geq 2$. Dacă șirul (x_n) converge la 0, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ este:

✓ ?

A $f(0)$;

B $f'(0)$;

C 0 ;

D $f'(0) + f(0)$.

280. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă care are proprietatea că

✓ ?

ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0, 1]$. Dacă $\alpha(p) = \int_0^1 f^p(x) dx$

și $\beta(p) = \frac{p^2}{2} \int_0^1 f^{2p-2}(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx, p \in \mathbb{N}^*$, atunci:

A $\alpha(p) \leq \beta(p), \forall p \in \mathbb{N}^*$;

C $\alpha(p) > \beta(p), \forall p \in \mathbb{N}^*$;

B $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha(p) \leq \beta(p)$;

D $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha(p) > \beta(p)$.

281. Considerăm funcția

✓ ?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2}x - 3 \right|, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2]; \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1); \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A f este surjectivă, dar nu este injectivă;
- B f este bijectivă;
- C f este injectivă, dar nu este surjectivă;
- D f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

282. Se dau funcțiile

✓ ?

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= (x^2 + 5x + 9) \ln x \\ g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) &= e^x(x^2 + 2x + 6) \end{aligned}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A f' este convexă pe $(0, \infty)$;
- B f' este concavă pe $(0, \infty)$;
- C g' este strict crescătoare pe $(0, \infty)$;
- D g' este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

283. Valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + (m+1) \cdot x + 1$ are în punctul de abscisă $x = 2$ tangenta paralelă cu prima bisectoare este:

- A $m = 4$;
- B $m = 12$;
- C $m = -12$;
- D $m = -4$.

284. Se dă funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2 + 2^x + \ln(x+1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A f este bijectivă;
- B f are asimptotă spre $+\infty$;
- C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)}{2^n} = 2 \ln 2$;
- D $\int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3} + \ln \frac{27}{4} + \frac{2}{\ln 2}$.

Grafice

285. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- A Graficul funcției f intersectează axa Oy în cel puțin 2 puncte;
- B Graficul funcției f nu intersectează axa Ox ;
- C Graficul funcției f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte;
- D Graficul funcției f nu intersectează axa Oy .

286. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, $x \geq 0$, are ca asimptotă oblică dreapta de ecuație:

- A $y = -1$;
- B $y = 2x + 1$;
- C $y = 0$;
- D $y = x - 1$.

287. Fie funcția f definită prin $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \ln x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Domeniul de definiție maximal al funcției f este \mathbb{R}^* ;
- B Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f ;
- C Funcția f nu are puncte unghiulare;
- D Punctul $(1, 4)$ este un punct de extrem global al funcției f .

288. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \frac{1+x}{e^{|x-1|}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă verticală la graficul funcției f ;
- B Funcția f nu are asimptote orizontale;
- C Punctul de coordonate $(1, 2)$ este un punct de întoarcere al graficului funcției f ;
- D Ecuația $f(x) = 1$ are exact două soluții reale.

289. Fie mulțimea $A = (-\infty, \frac{1}{2})$ și funcțiile $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = f'(x)$, $\forall x \in A$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

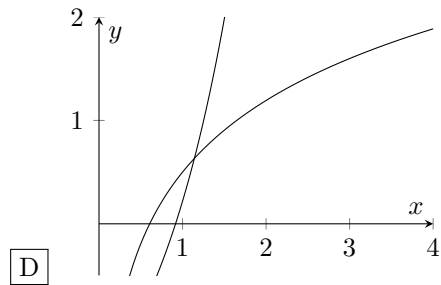
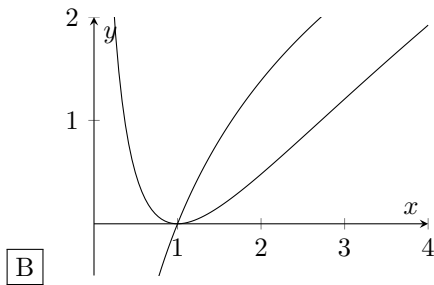
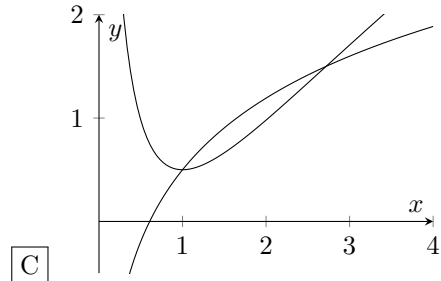
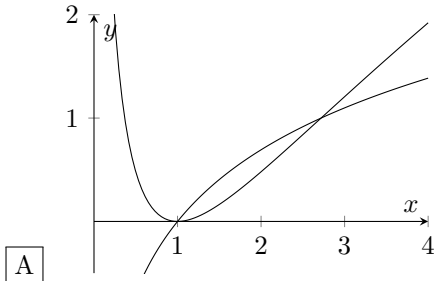
- A $\exists a \in A$ astfel încât $f(a) + g(a) \geq 0$;
- B $\forall a \in A$ are loc $f(a) + g(a) \geq 0$;
- C $\exists a \in A$ astfel încât tangentele la graficele celor două funcții în punctele de abscisă $x = a$ sunt ortogonale;
- D $\forall a \in A$ tangentele la graficele celor două funcții în punctele de abscisă $x = a$ sunt ortogonale.

290. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică spre ∞ a funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x}{ax + b}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $ab > 0$; B $a = b$; C $a^2 = |b|$; D $b < a$.

Problemele **291.** și **292.** se referă la ecuațiile $y = \ln x$ și $y = (\ln x)^2$.

291. Care dintre graficele de mai jos corespund celor două ecuații? ✓ ?



292. Care este aria suprafeței cuprinse între cele două ecuații? ✓ ?

- A $-e$; B $2e + 1$; C $e - 1$; D $3 - e$.

293. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sqrt{x} - 3| + |4 - \sqrt{x}|$. Care dintre următoarele ✓ ?
afirmații sunt corecte?

- A G_f intersectează axa Ox ; C G_f are două puncte unghiulare;
 B G_f are un punct de întoarcere; D niciuna din afirmațiile anterioare nu e corectă.

294. Considerăm funcția $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$. Considerăm de asemenea ✓ ?
și graficele restricțiilor funcțiilor \sin și \cos la același interval $[-2, 2]$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A G_f intersectează axa Ox în două puncte; C f are două subintervale de concavitate în $[-2, 2]$;
 B f aproximează $\cos x$; D f' aproximează $\sin x$.

295. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$. Considerăm de asemenea ecuația ✓ ?
 $ax^4 - x - a = 0, a \in \mathbb{R}$. Folosindu-vă de graficul funcției f , care dintre următoarele afirmații sunt corecte:

- A Dacă $a = 1$, ecuația are 4 soluții reale; C G_f are 2 asimptote;
- B f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$; D Dacă $a = 1$, ecuația are 2 soluții reale.

296. Fie funcția $f : \mathbb{R}/\{-2, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2x^3}{(x+1)(x+2)}$. Care dintre următoarele afirmații legate de graficul G_f al funcției sunt corecte? ✓ ?

- A $x = 1$ este asimptotă verticală; C G_f admite asimptotă oblică;
- B $y = -2x + 6$ este asimptotă oblică; D $y = -2x + 1$ este asimptotă oblică.

297. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$. Notăm cu: z -numărul de puncte de intersecție ale lui G_f cu axa Ox , l -numărul de puncte de extrem local, g -numărul de puncte de extrem global și i -numărul de puncte de inflexiune. Atunci: ✓ ?

- A $z \cdot (g+i) = 10$; B $z \cdot (g+4i) = 36$; C $z+l+g+i = 8$; D $z^2 \cdot g - i = 3$.

298. Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln|x| - 1}{x}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 4$. Folosind graficele celor 2 funcții, numărul de soluții al ecuației $\ln|x| = x^3 - 4x + 1$, $x \neq 0$ este: ✓ ?

- A 2; B 4; C 3; D 1.

Primitive

299. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 5}$. O primitivă a funcției f este: ✓ ?

- A Nu există; C $\arctg(2x + 1)$;
- B $\frac{2}{\sqrt{19}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right) + 19$; D $\frac{5}{\sqrt{17}} \arctg\left(\frac{5x+10}{\sqrt{17}}\right) + 17$.

300. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2 + 2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$. Fie F o primitivă a lui f . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A $F(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{dacă } x < 0, \\ \frac{x^3}{3} + 2x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$; C $F(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ \frac{x^3}{3} + 2x + 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$;
- B f admite primitive pe $[-1, 1]$; D f nu este continuă pe $[-1, 1]$;

Problemele 301. și 302. se referă la funcția $f(x) = \int \frac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx$, respectiv

șirul $I(n) = \int_0^{e^n} \frac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

301. Sunt primitive ale funcției f : ✓ ?

A $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 4x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2 - 1)^2};$

C $-\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 4x^4 + 8x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2};$

B $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + x^4 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} - \frac{2}{(x^2 - 1)^2};$

D $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + x^4 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} - \frac{4}{(x^2 - 1)^2}.$

302. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n^2} I(n) \right]$ este: ✓ ?

A $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right);$

B $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right);$

C $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right);$

D $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right).$

303. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ \cos x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$. Fie F o primitivă a lui f . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $F(-1) = \frac{1+e}{e};$

C $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2};$

B f derivabilă pe $\mathbb{R};$

D f nu admite primitive;

304. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită astfel: ✓ ?

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ x + 1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $G(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{dacă } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ este o primitivă a lui g ;

B $G(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + 1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ este o primitivă a lui g ;

C g admite primitive;

D g nu admite primitive.

305. Fie $F(x) = e^{3x}(a \sin 2x + b \cos 2x)$ și $f(x) = e^{3x} \cos 2x$. Știind că F este o primitivă a lui f , atunci: ✓ ?

A $a = \frac{1}{13}, b = \frac{2}{13};$

C $a = \frac{1}{13}, b = \frac{3}{13};$

B $a = \frac{2}{13}, b = \frac{3}{13};$

D $a = \frac{3}{13}, b = \frac{2}{13}.$

306. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{a \sin x + b}$. Considerând că f admite primitive, care sunt relațiile satisfăcute de constantele reale și pozitive a și b ? ✓ ?

- A $a > b$; B $a = b$; C $a < b$; D Alt răspuns.

307. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 6}$. Care dintre următoarele sunt $\checkmark ?$ primitive ale lui f ?

- A $F(x) = \frac{1}{\sqrt{23}} \arctg \left(\frac{e^x + 1}{\sqrt{23}} \right)$; C $F(x) = \frac{2}{\sqrt{23}} \arctg \left(\frac{2e^x + 1}{\sqrt{23}} \right) + 23$;
 B $F(x) = \frac{4}{23} \arctg \left(\frac{2e^x + 1}{23} \right)$; D f nu admite primitive.

308. Se dă funcția $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

- A f admite primitive pe domeniul $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
 B f nu admite primitive pe domeniul $(-1, 1)$;
 C $F(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{2}$ este o primitivă a lui f pe domeniul maximal de definiție;
 D $F(x) = -\frac{x}{(x+1)^2} + 1$ este o primitivă a lui f pe domeniul maximal de definiție.

309. Se dă funcția $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}}_{n \text{ ori}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt $\checkmark ?$ adevărate?

- A $\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$ este familia de primitive ale lui f ;
 B $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + C$ este familia de primitive ale lui f ;
 C f este funcția constantă zero;
 D $x = 0$ este un punct de discontinuitate al lui f .

310. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 4}{x^2 - x}$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

- A $F(x) = x^2 - 3x + 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1|$ este o primitivă a lui f ;
 B $F(x) = \ln \frac{e^{x \cdot (x-3)} \cdot x^3}{|x-1|^4}$ este o primitivă a lui f ;
 C $F(x) = x^2 + 3x + 3 \ln|x| - 4 \ln|x-1|$ este o primitivă a lui f ;
 D $F(x) = \ln \frac{e^{x \cdot (x-3)} \cdot x^4}{|x-1|^3}$ este o primitivă a lui f .

311. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}$. Familia de primitive a funcției f este: $\checkmark ?$

- A $\frac{1}{3} \sin \left(\arctg \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right) + C;$
 C $\frac{x\sqrt{3}}{3\sqrt{x^2+3}} + C;$
 B $\frac{1}{3} \cos \left(\arctg \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right) + C;$
 D $\frac{x}{3\sqrt{x^2+3}} + C.$

312. Se dă funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\ln x)$. Care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate?

- A $F(x) = \frac{x}{2} \cdot (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$ este o primitivă a funcției f ;
 B $F(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \left(\ln x - \frac{\pi}{4} \right)$ este o primitivă a funcției f ;
 C orice primitivă a lui f este o funcție periodică, care oscilează în jurul valorii 0;
 D orice primitivă a lui f se anulează într-o infinitate de puncte $x_n = e^{\frac{\pi}{4} + n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

313. Se dă funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ (x^2 + x - 1) \cdot e^{x-1}, & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A f nu admite primitive pe întreg domeniul de definiție;
 B $x = 1$ este un punct de discontinuitate de speța I;
 C $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{x-1} + C, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$ este familia de primitive ale lui f .
 D $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{x-1} + C, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$ este familia de primitive ale lui f .

314. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel:

$$f(x) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{2\pi}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} \cos \left(\dots \cos \left(\frac{2\pi}{3} x \right) \dots \right) \right) \right)}_{n \text{ ori}}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $F(x) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{3} \sin \left(\dots \sin \left(\frac{\pi}{3} x \right) \dots \right) \right) \right)}_{n \text{ ori}}$ este o primitivă a lui f ;
 B $F(x) = \frac{x}{2}$ este o primitivă a lui f ;
 C orice primitivă a lui f este o funcție periodică;

D f admite primitive pe întreg domeniul de definiție.

315. Se dă funcția $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arcsin x$. Care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate?

A $F(x) = \frac{\arcsin x}{2} \cdot (2x^2 - 1) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2}$ este o primitivă a lui f ;

B $F(x) = \frac{\arcsin x}{4} \cdot (2x^2 - 1) + \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - x^2}$ este o primitivă a lui f ;

C $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

D f nu admite primitive pe întreg domeniul de definiție.

316. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt $\checkmark ?$ adevărate?

A $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \cdot (x^2 - 18) + C$ este familia de primitive ale lui f ;

B $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \cdot (x^2 + 6) + C$ este familia de primitive ale lui f ;

C când $F(4) = \frac{5}{3}$, $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \cdot (x^2 - 18) + 5$;

D când $F(\sqrt{7}) = -18$, $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \cdot (x^2 + 6) - 6$.

317. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{1-x^2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt $\checkmark ?$ adevărate?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$;

B $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \infty$;

C orice primitivă a funcției f poate fi exprimată folosind funcții elementare;

D orice primitivă a funcției f admite două puncte de extrem local.

318. Se dă funcția $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

A $x = 0$ este un punct de discontinuitate de speța a II-a;

B există o funcție $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ care admite primitive;

C f admite primitive pe \mathbb{R} ;

D f se anulează în o infinitate de puncte $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

319. Se dă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{4 \sin^2 x + 10 \sin x - 3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $x = \arcsin \frac{\sqrt{37} - 5}{4}$ este un punct de discontinuitate;
- B domeniul de primitivabilitate este același cu cel de definiție;
- C $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{37}} \ln \left| \frac{\sin x + 5 - \sqrt{37}}{\sin x + 5 + \sqrt{37}} \right|$ este o primitivă a lui f , pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$;
- D $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{37}} \ln \left| \frac{\sin x + 5 + \sqrt{37}}{\sin x + 5 - \sqrt{37}} \right|$ este o primitivă a lui f , pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$;

320. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $F(x) = \arctg \left(\sin \left(\arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) + C$ este familia de primitive ale lui f ;
- B $F(x) = \arctg \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} + C$ este familia de primitive ale lui f ;
- C $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot C$;
- D f admite puncte de discontinuitate în \mathbb{R} .

321. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $F(x) = \frac{\arctg x^2}{2} + C$ este o primitivă a lui f , pentru $x \in (-1, 1)$;
- B $F(x) = \frac{\arcsin x^2}{2} + C$ este o primitivă a lui f , pentru $x \in (-1, 1)$;
- C când $F(0) = \frac{\pi}{8}$, $F(x) = \frac{\arctg x^2}{2} - \frac{\pi}{8}$,
- D când $F(0) = \frac{\pi}{4}$, $F(x) = \frac{\arcsin x^2}{2} - \frac{\pi}{4}$;

322. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel: ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & \text{dacă } x \leq -1, \\ 2 \ln(x + 2), & \text{dacă } x > -1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $F(x) = \begin{cases} m \frac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 2((x + 2) \ln(x + 2) - x) + \frac{2m}{3} - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este o primitivă a funcției f ;

- B $F(x) = \begin{cases} m\frac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 2((x+2)\ln(x+2) - x) + \frac{m}{3} - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este o primitivă a funcției f ;
- C $m = n + 2$;
- D $m = -n$.

323. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$. Care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate?

- A $F(x) = \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}-1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}+1|$ este o primitivă a lui f ;
- B $F(x) = \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}+1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}-1|$ este o primitivă a lui f ;
- C $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1} \right|$ este o primitivă a lui f ;
- D $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right|$ este o primitivă a lui f .

Integrale definite

324. Să se indice valoarea limitei $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin x) dx$. $\checkmark ?$

- A 0; B 1; C ∞ ; D π ;

325. Fie $\checkmark ?$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} dx.$$

Valoarea lui ℓ este

- A 0; B 1; C $\frac{\pi}{2}$; D π ;

326. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ și $L = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\int_0^y f(x) dx}{y}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. $\checkmark ?$

- A $L = \infty$; B $L = 1$; C $L \in \mathbb{N}$; D $L = 0$.

327. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^{2022}}$. Se notează cu $a = \int_{-1}^1 f(x) dx$ și $b = \int_0^1 (f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2) dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

A $a \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$;
 B $a \in [1, 2]$;
 C $b = \frac{1011}{4}$;
 D $b = -\frac{1011}{4}$.

328. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul definit prin $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$;
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
 C $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \infty}} na_n =$
 D $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = e$.

329. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

A Șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.
 C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.
 B Șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.
 D $I_{2022} = \pi$.

330. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx$ este: $\checkmark ?$

A $\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$;
 B alt răspuns;
 C $\frac{3\sqrt{2} - 1}{2}$;
 D $\frac{\sqrt{2} - 4}{2}$.

331. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$: $\checkmark ?$

A Nu există;
 C $L = 0$;
 B $L = 1$;
 D $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n} dx$.

332. Rezultatul calculului $\int_0^\pi \cos(x) \sin(\sin x) \cos(\sin x) dx$ este: $\checkmark ?$

A 0;
 B π ;
 C 1;
 D $\sqrt{3}$.

333. Valoarea parametrului real a pentru care $\int_0^1 \frac{ax}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{16}$ este: $\checkmark ?$

A $a = \frac{1}{8}$;
 B $a = 1$;
 C $a = \frac{1}{2}$;
 D $a = \frac{1}{4}$.

334. Notăm cu $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate.

A $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\sin x};$

C $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx;$

B $I < 1;$

D $I = -\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}.$

335. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x-4}{x+3} \, dx$ este:

✓ ?

A $1 - 7 \ln \frac{4}{3};$

B $1 + 7 \ln \frac{4}{3};$

C $1 - \frac{7}{2} \ln \frac{16}{9};$

D $1 - 7 \ln \frac{3}{4}.$

336. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x, \alpha) = \int_0^x e^{-\alpha t} \sin t \, dt$ unde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$ ✓ ?

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2};$

C $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \alpha)$ este convergentă;

B $\min f(x, 1), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = 0;$

D Toate afirmațiile sunt false.

337. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2t}{1 + \cos t} \, dt$ este:

✓ ?

A $\frac{\pi}{4} - \ln 2;$

C $\sqrt{2} + 2 \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{4};$

B $\frac{\pi}{4};$

D $2 - \sqrt{2} + 2 \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$

338. Considerăm funcția $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ definită pe intervalul $1 \leq x \leq 2.$ Fie S_f aria ✓ ?
dintre graficul funcției și axa $Ox.$ Care dintre următoarele afirmații sunt false?

A Funcția este strict descrescătoare pe $[1, 2];$

C $S_f = \sqrt{3} - \ln |2 + \sqrt{3}|;$

B Graficul funcției trece prin origine $(0, 0);$

D $S_f > \frac{1}{2}.$

339. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 x} \, dx,$ unde $m \in \mathbb{N}^*.$ Care dintre următoarele afirmații sunt ✓ ?
corecte?

A $I = \frac{1}{(e-1)(e+1)},$ pentru $m = e;$

C $I = \frac{16 \ln \pi - 32 \ln 2}{\pi^2 - 16},$ pentru $m = \frac{\pi}{4};$

B $(I)_{m \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător;

D Toate răspunsurile sunt false.

340. Dacă $\int_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{1+x^2} \, dx = A,$ atunci \sqrt{A} este egal cu: ✓ ?

A $\pm \frac{\pi}{2}$;

C $\frac{\pi}{4}$;

B $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n} \frac{\sin x}{x} dx$;

D $\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{1 - \ln x}{x} dx$.

341. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$;

B $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$;

C $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$;

D $\frac{2\pi\sqrt{3}}{36}$.

342. Fie șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, având ca termen general $s_k = \sum_{q=1}^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg}(x))^q}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_n = 0$;

C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n s_i = \frac{\pi}{8}$;

B $s_{2^{16}} = \frac{\pi}{4}$;

D $\forall k \in \mathbb{N}^*, s_k$ este constant.

343. Fie $f_n(x) = \int_0^3 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{x}}}}_{\text{de } n \text{ ori}}} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

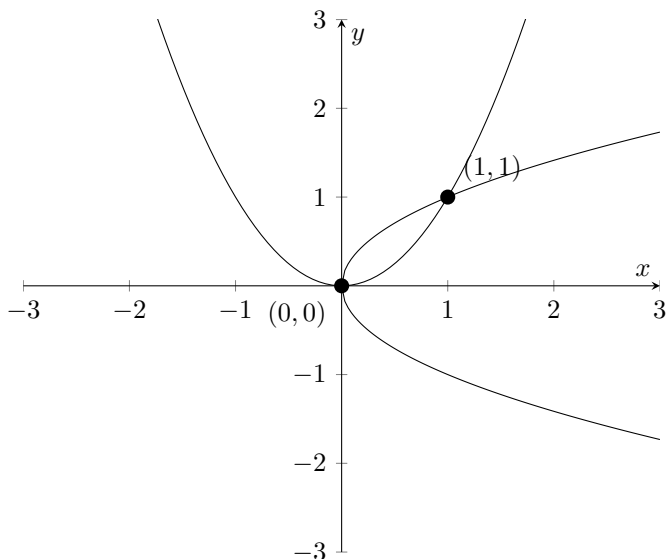
A $f_n(x)$ nu este continuă pe $[0, 3]$;

C $L \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x \sin 4x}{2x}$;

B $f_1(x) > L$;

D $L = 6$.

344. Fie S aria suprafeței cuprinsă între cele două parabole. Care dintre următoarele afirmații sunt **false**? ✓ ?



✓ ?

- A $S = \frac{2}{3}$;
- B $S = \frac{1}{2} \cdot M$, unde M este aria suprafeței cuprinsă între $y = x^2$ și $y = 2x$;
- C $S = \frac{1}{3}$;
- D $S = \frac{1}{2} \cdot T$, unde T este aria suprafeței determinată de graficul funcției $f(x) = \cos^3(x)$, unde $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.

345. Notăm $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 2x)} dx$. Valoarea lui I este:

✓ ?

- A $\frac{2 - 4\sqrt{2}}{3}$;
- B $\frac{1}{3}$;
- C $\frac{2}{3}$;
- D $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

346. Valoarea parametrului $a > 0$ pentru care aria regiunii plane mărginită de graficele funcțiilor $f(x) = \sqrt{a}x$ și $g(x) = (1 + a)x^2$ să fie maximă, este

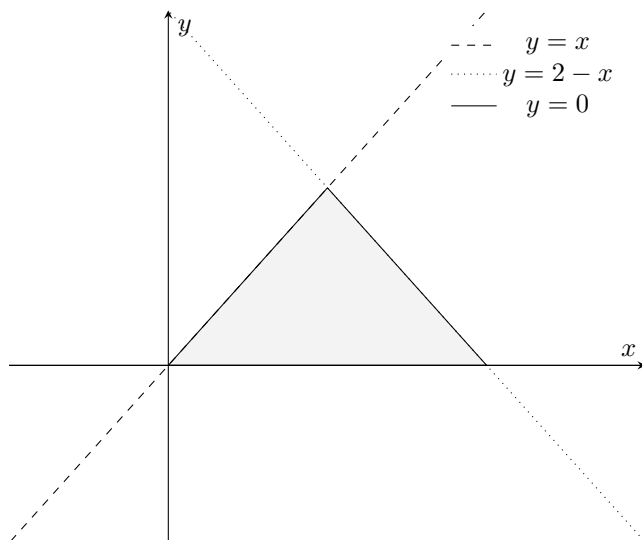
- A 2;
- B 3;
- C 4;
- D 1.

347. Se dă integrala $I = \int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^1 \min \left\{ \frac{1}{x}, 1 + x \right\} dx$. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor

- A $I = \frac{5 - \sqrt{5}}{4} + \ln \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$;
- B $I = \frac{3 + \sqrt{5}}{20} + \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;
- C $I = \frac{1}{2} \ln 5$;
- D $I = \frac{7 - \sqrt{5}}{5}$.

348. Notăm cu S aria delimitată de cele trei drepte:

✓ ?



✓ ?

Să se indice care dintre următoarele expresii indica valoarea lui S .

A $\int_0^2 (2 - x) dx;$

C $\int_0^1 (x - 0) dx + \int_1^2 (2 - x) dx;$

B $\int_0^1 (x - 2) dx + \int_0^2 (2 - x) dx;$

D $\int_0^1 (x + 1) dx + \int_1^2 (2 - x) dx.$

349. Care este valoarea maximă a integralei $\int_0^1 (x^2 f(x) - x f^2(x)) dx$, unde maximul se ia peste toate funcțiile continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

✓ ?

A $\frac{1}{12};$

B $\frac{1}{16};$

C $\frac{4}{16};$

D $\frac{1}{8}.$

350. Știind că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, să se indice care dintre următoarele variante de răspuns

✓ ?

reprezintă valoarea integralei $\int_0^1 x \sqrt{x^{\ln x} \sqrt[3]{x^{\ln^2(x)} \sqrt[4]{x^{\ln^3(x)} \sqrt[5]{\dots}}}} dx.$

A $e - \frac{1}{e};$

B $\frac{1}{e} - 1;$

C $\frac{e^2 - 1}{e};$

D $1 - \frac{1}{e}.$

351. Fiind dată funcția f și $f(ex) = 3f(x)$; $\int_0^1 f(x) dx = e$, să se indice care este valoarea integralei $\int_1^e f(x) dx.$

✓ ?

- A $6e$; B $6e - 2$; C $3e^2 - e$; D $6e^2 - 2e$.

352. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $\int_0^2 x^t dt = 3$. Să se indice valoarea de \checkmark ? adevăr a propozițiilor:

- A $\prod_{k=1}^{\text{card } S} 2^{s_k} < 1, \forall s_k \in S$; C $\sum_{k=1}^{\text{card } S} |s_k| \geq 2, \forall s_k \in S$;
 B $\text{card } S < 2$; D $S = \emptyset$.

353. Numărul soluțiilor ecuației $\int_x^{x^2} (2t^2 + 1) \cdot e^{t^2} dt = 0$ este diferit de: \checkmark ?

- A 0; B 2; C 4; D 1.

354. Fie $I = \int_1^4 \frac{e^x(x-1)}{(x+e^x)x} dx$ și $J = \int_0^3 \frac{2x}{x^2+2x+1} dx$. Să se stabilească care dintre \checkmark ? următoarele variante de răspuns sunt adevărate.

- A $J < 16$; C $I > J$;
 B $I = \ln\left(\frac{4+e^4}{1+e}\right)$; D $I + J = \ln\left(\frac{4^3(4e+e^5)}{1+e}\right)$.

355. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Știind că $f^{-1}(1) = e, f^{-1}(0) = F(e) = 1, F(1) = 0$, unde \checkmark ? F este o primitivă a funcției f , să se stabilească care dintre următoarele răspunsuri indică valoarea integralei $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$.

- A e ; B $e - 1$; C $-e$; D $1 - e$.

356. Fie $I(x) = e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^{e^{e^x}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? \checkmark ?

- A $e^{e^{e^x}} + e^{e^x} + 1$ este primitivă lui f ; C $e^{e^{e^x}} + 4e$ este primitivă lui f ;
 B $\int_0^e f(x) dx = e^{e^{e^{e-1}}}$; D $\int_0^e f(x) dx = e^{e^{e^{e+e-1}}} - e$;

357. Valoarea integralei $\int_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{x}{1-x^3}} dx$ este: \checkmark ?

- A $\frac{\pi}{6}$; B $\frac{\pi}{9}$; C $\frac{2\pi}{9}$; D $\frac{\pi}{3}$.

358. Fie funcția $I(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{tx}} dx, \forall t \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt \checkmark ? adevărate?

A $I(t) = 1 + \ln \frac{1 + e^{-t}}{1 + e^t}, \forall t \in \mathbb{R};$

C $I(t) + I(-t) = 2, \forall t \in \mathbb{R};$

B $I(0) = 1;$

D $I(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$

359. Fie $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I \in \mathbb{Q};$

C $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

B $I = \frac{1}{6};$

D $I = \frac{4}{3}(2\sqrt{3} - 1).$

360. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$, și $L := \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\int_0^y f(x) dx}{y}$. Să se indice care ✓ ? dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $L = \infty;$

B $L = 1;$

C $L \in \mathbb{N};$

D $L = 0.$

361. Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $\int_1^x e^{-t^2} dt$ are două puncte de extrem este: ✓ ?

A $\ln(2e);$

B alt răspuns;

C 1;

D 2.

362. Se consideră numărul $I = \int_0^1 \frac{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}{\sqrt[4]{x^3}} dx$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ? sunt adevărate?

A $I \in \mathbb{Z};$

B $\{I\} = 0;$

C $[I] = 9;$

D $[I] = 8.$

363. Fie funcția $f(x) = \arctg(x)$. Rezultatul calculului $\int_1^2 x^5 \sqrt{f'(x)} dx$ este: ✓ ?

A $\frac{8\sqrt{5}}{3};$

B $\frac{8\sqrt{5}}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{15};$

C $\frac{8\sqrt{5}}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{15};$

D $\frac{7\sqrt{2}}{15}.$

364. Dacă $I = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^n x}{2 + \sin^n x + \cos^n x} dx : n \in \mathbb{N}^* \right\}$, atunci mulțimea I are: ✓ ?

A cel mult 3 elemente;

C 1 element;

B cel puțin 3 elemente;

D o infinitate de elemente.

365. Dacă $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx, n \in \mathbb{N}^*$, atunci ✓ ?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0;$

C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{1}{2};$

B $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2};$

D $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(I_{n+1} - I_{n-1}) = -\frac{1}{2}.$

366. Dacă $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}$, atunci

✓ ?

A $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton;

C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0;$

B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0;$

D $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$

367. Valoarea integralei $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x} dx$. este:

✓ ?

A 0;

C $\operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \right) - 1;$

B $\operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right);$

D 1.

368. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate, știind că $S_n = \int_0^{\frac{1}{\ln 2}} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} dx$, cu $n \in \mathbb{N}$?

✓ ?

A $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = +\infty;$

B $S_n < 1;$

C $S_n = \frac{\ln 2}{\ln 2 - 1};$

D $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{e^n \ln 2} \frac{1}{k} \cdot S_n = 0.$

369. Valoarea integralei $\int_{\frac{1}{2021}}^{\frac{2021}{1}} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ este:

✓ ?

A 0;

B 1;

C 2;

D 3.

370. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $I = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2};$

C $I < \frac{\pi}{4};$

B $I > \frac{\pi}{3};$

D $8\pi < 16 \ln 2 + \pi^2.$

371. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$; B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n > 2$.

372. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ și $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_{2022} < \arctg e^{2023}$; C $I_{2022} \geq f(2022)$;
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0$.

373. Fie $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{4}{3}(2\sqrt{3} - 1)$; C $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 B $I = \frac{1}{6}$; D $I \in \mathbb{Q}$.

374. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + x^2 + 2x + 3} dx$ este: ✓ ?

A 1; B $\ln \frac{4e}{e+6}$; C $1 - e^{-1}$; D $\frac{1 - \ln(e+6) + 2 \ln 2}{2}$.

375. Fie $a = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$; B $a = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$; C $a = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$; D $a = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

376. Fie $L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L = 0$; B $L < \ln 3$; C $\ln 2 < L$; D $L < \frac{3}{2}$.

377. Fie $L = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x^4}{x^{10} + 2x^5 + 2} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; B $L = \infty$; C $L < \frac{1}{5}$; D $\frac{1}{10} < L$.

378. Fie $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a \in \mathbb{Q}$; B $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; C $\frac{4a+1}{\pi} \in \mathbb{N}^*$; D $a > 1$.

379. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_n \leq \ln \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n \in [0, \infty)$;

B $I_{2024} \leq \frac{1}{2025}$;

D $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$.

380. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$ este: ✓ ?

A 0;

B $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

C $\frac{\ln 2}{4}$;

D $\frac{1}{2}$.

381. Fie $I = \int_0^{2a} \frac{(a-x) + (a-x)^3 + \dots + (a-x)^{2021}}{1 + (a-x)^2 + \dots + (a-x)^{2022}} dx$, unde $a \in (0, \infty)$ este fixat. ✓ ?
Valoarea lui I este:

A $\frac{a}{2}$;

B 0;

C $2a$;

D $\frac{1}{2}$.

382. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{2}$;

B 0;

C $-\frac{\pi}{2} \ln 2$;

D $\frac{\pi}{4} \ln 2$.

383. Fie $I = \int_{-a}^a \frac{x^{2024}(1 - e^x)}{1 + e^x} dx, a \in \mathbb{R}$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A $2a$;

B 0;

C e ;

D $-2a + 2$.

384. Fie $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I \geq \frac{\pi^2}{4}$;

B $I \leq 0$;

C $I = \frac{\pi}{4}$;

D $I = \frac{\pi^2}{2}$.

385. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I < 0$;

B $I \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$;

C $I = \frac{\pi}{4}$;

D $I = 0$.

386. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Care afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$;

C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{2}$;

B $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-1}{2n-2} I_{n-1}$;

D $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

387. Fie $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{1-x})}{x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I < \sqrt{2}$;
 B $I = \frac{\pi}{2} - 1$;
 C $I < 1$;
 D $I = \pi - 2$.

388. Fie $L = \lim_{a \nearrow 1} \int_0^a \frac{x^9}{\sqrt{1-x^4}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $L < \frac{\pi}{10}$;
 B $L = \frac{3\pi}{32}$;
 C $L \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$;
 D $L = 0$.

389. Fie $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I = 0$;
 B $I = \pi$;
 C $I = \frac{\pi}{2}$;
 D $I \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

390. Fie $I = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})} dx$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

- A $I = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg}(2024) - \operatorname{arctg} \frac{1}{2024} \right)$;
 C $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})} dx = 0$;
- B $I = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2024^2 - 1}{1012}$;
 D $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})} dx = \frac{\pi}{4}$.

391. Fie $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I > e$;
 B $I < 0$;
 C $I = \pi$;
 D $I = 2\pi$.

392. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I \geq 0$;
 B $I < 0$;
 C $I = \pi$;
 D $I = \frac{\pi}{2}$.

393. Care afirmații sunt adevărate, știind că $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$? ✓ ?

- A valoarea medie a funcției f este $2 \cdot \sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$;
 B valoarea medie a funcției f este $\ln 8 + 4\sqrt{2} - 4$;
 C primitiva funcției f este descrescătoare;
 D primitiva funcției f este crescătoare.

394. Se dă șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \cdot e^{x^2} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_1 = \frac{1}{2}$;

C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$;

B $I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1)I_n$;

D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{e}{2}$.

395. Fie $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x \cos x}{1 + e^x} dx$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{2}$;

B 1;

C 0;

D $\frac{1}{2}$.

396. Fie $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x^5 - 2 \ln \frac{1-x}{1+x} \right) dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = 1$;

B $I = -1$;

C $I = 0$;

D $I \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

397. Dacă $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$, unde $f(x) = \max\left\{ \frac{1}{3^x}, 3^x \right\}$, $x \in [-1, 1]$, verificați dacă: ✓ ?

A $I = 0$;

B $I = \frac{4}{\ln 3}$;

C $I = \frac{2}{\ln 4}$;

D $I = \frac{3}{\ln 3}$.

Sume Riemann

398. Considerăm șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este: ✓ ?

A 0;

B 1;

C $\frac{\pi}{2}$;

D $\frac{\pi}{4}$.

399. Valoarea $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{1}{n^2 + 2n + 4} + \frac{1}{n^2 + 3n + 9} + \dots + \frac{1}{n^2 + n \cdot n + n^2} \right)$ este: ✓ ?

A 0;

B π ;

C $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$;

D $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

400. Fie L limita șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de termen general $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L > 0$;

B $L = \ln \frac{3}{2}$;

C $L = \ln 2$;

D $L \leq \frac{1}{2}$.

401. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \sqrt[n]{1 + \frac{2k}{n}}$ este: ✓ ?

A $\frac{3}{2} \ln 3 - 1$;
 B $\frac{1}{2}(\ln 9 + 2)$;
 C $\ln 27$;
 D $\frac{1}{2}(\ln 3 - 2)$.

402. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul de termen general $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{ne^{k/n} + k}}$ și fie ℓ limita șirului. ✓ ?

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\ell = 0$;
 B $\ell \geq \frac{1}{\sqrt{e+1}}$;
 C $\ell \leq 1$;
 D $\ell = \sqrt{\pi}$.

403. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 6^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + (3n)^2}} \right)$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{10})$;
 B $\frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{8})$;
 C $\frac{1}{3} \ln(3 + \sqrt{10})$;
 D $\frac{1}{2} \ln 3$.

404. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{2} \frac{k}{n}}}{n}$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{2}(e^2 - e)$;
 B e^2 ;
 C $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^2 - 1)$;
 D $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}} - 1)$.

405. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k^2} \right)$ este: ✓ ?

A $\arctg 1$;
 B $\frac{\pi}{3}$;
 C $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 D $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

406. Considerăm șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $a_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$. Limita șirului este: ✓ ?

A 1;
 B $\frac{1}{p}$;
 C $\frac{1}{p+1}$;
 D 0.

407. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{100i + 15n}{n^2 + 10in}$ este: ✓ ?

A $10 + \frac{1}{2} \ln 11$;
 B $\ln 5 + 6$;
 C 8;
 D $9 + \frac{1}{3} \ln 18$.

408. Notăm cu L limita șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ având ca termen general ✓ ?

$$a_n = \frac{7}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+7}} + \sqrt{\frac{n}{n+14}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+7(n-1)}} \right].$$

Să se indice valoarea lui L .

- A $\sqrt{2}$; B $2\sqrt{2}$; C $4\sqrt{2} - 2$; D $2\sqrt{2} - 2$.

409. Aria sub graficul funcției $y = \sqrt[4]{1+x^3}$ între $x = 1$ și $x = 5$ este dată de limita, $\checkmark ?$ când $n \rightarrow \infty$, a sumei:

- A $\frac{5}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{4 + \left(\frac{5i}{n}\right)^3}$; C $\frac{5}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{1 + \left(\frac{5i}{n}\right)^3}$;
 B $\frac{4}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{1 + \left(1 + \frac{4i}{3}\right)^3}$; D $\frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{1 + \left(1 + \frac{4i}{3}\right)^3}$.

410. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{kx}{n}$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

- A $\int_0^\pi x^2 f(x) dx \in \mathbb{Q}$; C f admite primitive pe $(0, \infty)$;
 B $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; D f nu este continuă pe $(0, \infty)$.

411. Valoarea $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2n^2 + 3n + 1} + \frac{1}{2n^2 + 6n + 4} + \dots + \frac{1}{2n^2 + 3n \cdot n + n^2} \right)$ este: $\checkmark ?$

- A 0; B $\ln \frac{4}{3}$; C $\frac{\pi}{4}$; D $\frac{\pi}{2}$.

412. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ Șirul definit prin $\checkmark ?$

$$x_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}{n}.$$

Se notează cu $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\ell = 1$; B $\ell = 0$; C $\ell = \frac{2}{\pi}$; D $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Geometrie

Geometrie sintetică

413. Cincizeci de cercuri concentrice sunt notate C_1, C_2, \dots, C_{50} . Oricare ar fi $i \in [1, 50)$, $\checkmark ?$ tangenta la cercul C_i intersectează cercul C_{i+1} în exact 2 puncte aflate la o distanță de 8 unități. Având în vedere faptul că raza lui C_1 este egală cu 2, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

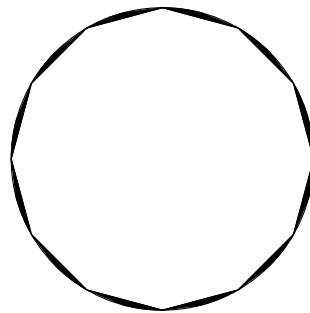
A Raza lui $C_{43} = 26$;

C Raza lui $C_{46} = 27$;

B Raza lui $C_{40} = 25$;

D Raza lui $C_{50} = 28$.

414. Poligonul din figură este un poligon cu 12 laturi egale și toate unghiurile interne $\checkmark ?$ egale și se numește dodecagon regulat. Având în vedere faptul că cercul din imagine intersectează poligonul în toate cele 12 vârfuri și are raza egală cu 1, care este aria suprafeței colorate cu roșu?



$\checkmark ?$

A $\pi - 6$;

B $\pi - 3.1$;

C $\pi - 3$;

D $\pi - 3.2$.

415. Un triunghi are laturile egale cu 20, 11 și x . Având în vedere faptul că triunghiul $\checkmark ?$ nu este isoscel, și x este cea mai scurtă latura a triunghiului, x poate fi egal cu:

- A 9; B 10; C 8; D 11.

416. Pentru un triunghi T , $f(T)$ este triunghiul format din mijloacele laturilor lui T iar \checkmark ?

$$f^n(T) = \underbrace{f(\dots f(T)\dots)}_{n \text{ ori}}.$$

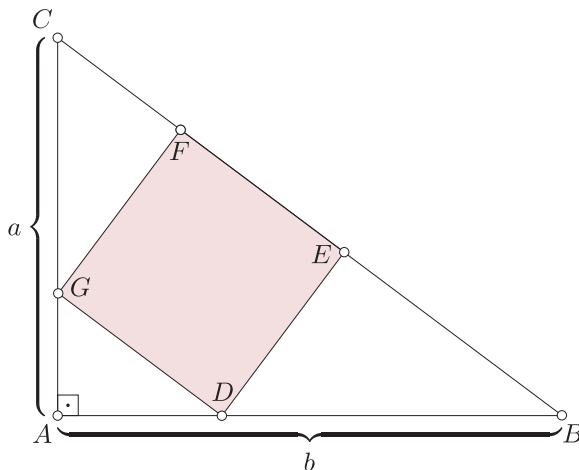
Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă T este echilateral sau dreptunghic atunci $f(T)$ este echilateral sau dreptunghic;
- B Centrele de greutate ale triunghiurilor T și $f^n(T)$ coincid pentru orice $n \geq 1$;
- C Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor T și $f^n(T)$ coincid pentru orice $n \geq 1$;
- D Dacă T are vârfurile $(1, 3)$, $(5, -4)$ și $(-6, 1)$, atunci centrul de greutate a lui $f(T)$ este $(0, 0)$.

417. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Luăm punctele E și F pe laturile consecutive \checkmark ?
 AB , respectiv BC ale dreptunghiului astfel încât aria triunghiurilor $\triangle AED$, $\triangle BFE$ și $\triangle CDF$ să fie $x > 0$, $y > 0$, respectiv $z > 0$. Știind că $2\sqrt{xz} < x + y + z$, alegeți fiecare afirmație corectă:

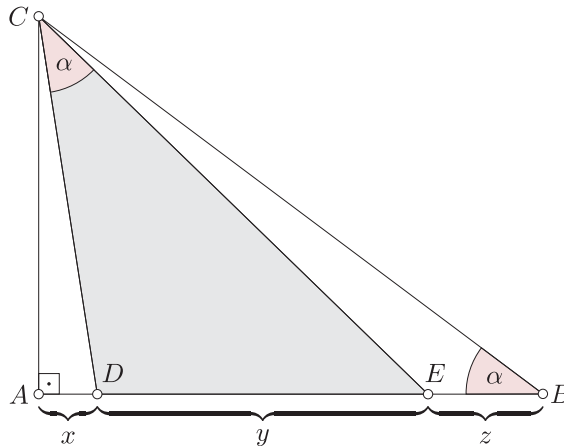
- A Aria triunghiului $\triangle DEF$ este $\mathcal{A}[\triangle DEF] = \sqrt{(x + y + z)^2 - 4xz}$;
- B Aria triunghiului $\triangle DEF$ este $\mathcal{A}[\triangle DEF] = \sqrt{2((x + y + z)^2 - 4xz)}$;
- C Aria triunghiului $\triangle DEF$ este $\mathcal{A}[\triangle DEF] = \sqrt{3((x + y + z)^2 - 4xz)}$;
- D Aria triunghiului $\triangle DEF$ este $\mathcal{A}[\triangle DEF] = 2\sqrt{(x + y + z)^2 - 4xz}$.

418. Considerând triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ din figură și pătratul $DEFG$ înscris în \checkmark ?
 el, alegeți fiecare afirmație corectă:



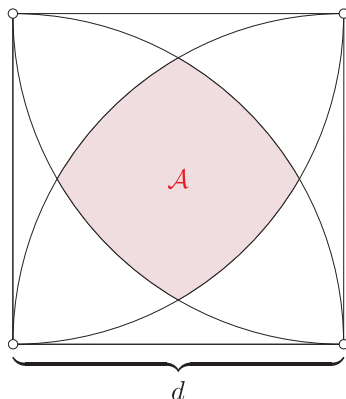
- [A] Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)^2}$;
- [B] Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \frac{ab(a^2 + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)^2}$;
- [C] Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \frac{a^2b^2(a + b)}{(a^2 + ab + b^2)^2}$;
- [D] Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{a^2 + ab + b^2}$.

419. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și cu punctele interioare $\checkmark ?$ D și E pe latura AB astfel încât $D \in (AE)$, $E \in (DB)$, $AD = x > 0$, $DE = y > 0$, $EB = z > 0$, $\widehat{ABC} = \widehat{DCE} = \alpha$ și $x \in (0, \sqrt{y(y+z)})$. Care afirmație este corectă:



- [A] Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{2(y^2 + yz - x^2)}$;
- [B] Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{y^2 + yz - x^2}$;
- [C] Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{3(y^2 + yz - x^2)}$;
- [D] Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = y \cdot \sqrt{y^2 + yz - x^2}$.

420. Figura atașată a fost obținută prin trasarea a 4 arce de cerc, centrate în fiecare vârf $\checkmark ?$ al unui pătrat, arcele fiind ale unor cercuri cu o raza egală cu lungimea laterală $d > 0$ a pătratului. Aria domeniului marcat este:



A $\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) d^2;$

C $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) d^2;$

B $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{2} + \frac{3}{4}\right) d^2;$

D $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1\right) d^2;$

421. Fie a, b, c laturile triunghiului $\triangle ABC$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Știind că $b = 2$ și $c = 1$, care este lungimea h_a a înălțimii din vârful A pe latura BC ?

A 2;

B $\sqrt{3};$

C 1;

D $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

422. Fie cercurile $\mathcal{C}(B; r_1)$ și $\mathcal{C}(C; r_2)$ care sunt tangente exterior unul altuia și amândouă tangente interior cercului $\mathcal{C}(D; r_1 + r_2)$. Fie acum cercul $\mathcal{C}(A; r_3)$ tangent exterior primelor două cercuri și interior cercului mare. Știind că $r_1 = 2$ și că $r_2 = 1$, care este lungimea razei r_3 ?

A $\frac{7}{9};$

B $\frac{7}{7};$

C $\frac{13}{11};$

D $\frac{6}{7}.$

423. Fie triunghiul echilateral $\triangle ABC$ cu latura de lungime $l = 4\sqrt{3}$. Fie un punct P în interiorul triunghiului astfel încât lungimea perpendicularelor din P pe două laturi ale triunghiului sunt 1 și 3. Lungimea celei de a treia perpendiculară este:

A $\sqrt{3};$

B 2;

C $\frac{3}{2};$

D $\sqrt{2}.$

424. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{2}$. Considerăm semicercul de rază r tangent catetelor AB și BC , a cărui diametru se află pe ipotenuza AC . Notăm cu p probabilitatea ca un punct ales la întâmplare de pe segmentul AC să se afle pe diametrul semicercului. Știind că $AB = 3$ și $BC = 4$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte:

A $r = \frac{10}{7}$;

B $p > \frac{2}{3}$;

C $AC = 5$;

D $r = \frac{15}{7}$.

425. Fie triunghiul ABC și M, N mijloacele laturilor AB respectiv BC astfel încât \checkmark ?
 $AN = BN$ și $CM = AM$. Atunci triunghiul ABC este:

 A dreptunghic;

 B oarecare;

 C isoscel;

 D degenerat.

426. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și $BC = 5$. Care este aria maximă pe care o \checkmark ?
 poate avea triunghiul ABC ?

A $\frac{37}{2}$;

B $\frac{25}{4}$;

C $\frac{17}{4}$;

D $\frac{19}{2}$.

427. Fie triunghiul $\triangle ABC$ ascuțitunghic și lungimile laturilor sale $AB = c, AC = \checkmark$?
 $b, BC = a$, care îndeplinesc relația $3b^2 + 3c^2 = 2\sqrt{3}bc + 3a^2$. Care dintre următoarele
 afirmații sunt adevărate?

A $\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

 C relația dată este adevărată pentru
 orice triunghi;

B $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

 D relația dată este adevărată doar dacă
 triunghiul este echilateral.

428. Fie triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AC = 5, AB = 5\sqrt{3}$ și D mijlocul \checkmark ?
 laturii BC . Știind că relația $AD^2 + DB^2 + AD \cdot DB = AB^2$ este corectă, care dintre
 următoarele afirmații sunt adevărate?

 A nu există triunghi care satisface toate condițiile simultan;

B $\sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

 C $\triangle ADB$ este dreptunghic;

 D raza cercului circumscris $\triangle ADB$ este egală cu 4.

429. Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$ cu AD și AF trisectoarele unghiului A , adică $\angle BAD = \checkmark$?
 $\angle DAF = \angle FAC = \frac{\angle A}{3}$; $D, F \in [BC], m(\angle B) = \frac{2\pi}{3}$. Știind că relația $BD(BD -$
 $\sqrt{2}AD) = (AB - AD)(AB + AD)$ este corectă, care dintre următoarele afirmații **nu**
 sunt adevărate?

A $m(\angle C) = \frac{\pi}{6}$;

C $\cos(\angle BDA) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

B $m(\angle A) = \frac{\pi}{4}$;

D $m(\angle A) = m(\angle BDA)$.

430. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $m(\angle C) = 150^\circ$. Să se indice care dintre următoarele \checkmark ?
 afirmații sunt adevărate.

- A lungimile laturilor $\triangle ABC$ sunt de forma: $BC = (m + 1)$, $AC = (m + 2)$, $AB = \sqrt{(m + 1)(m + 2)}$ cu $m \in (0, \infty)$;
- B lungimile laturilor $\triangle ABC$ sunt de forma: $BC = (m + 3)$, $AC = (m + 2)$, $AB = \sqrt{(m + 1)(m + 2)}$ cu $m \in (6, \infty)$;
- C lungimile laturilor $\triangle ABC$ nu pot fi de forma: $BC = m$, $AC = (m + 2)$, $AB = m^2 - 5$ cu $m \in \mathbb{R}$;
- D nicio afirmație nu este adevărată.

431. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care $\cos C = \frac{1}{2}$. Ținând cont de faptul că două dintre \checkmark ? laturi au lungimile de forma $BC = m^2 + 1$, $AC = m^2 - \frac{1}{2}$, unde $m \in (3, \infty)$, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A lungimea lui AB este de forma: $m + \frac{3}{2}$;
- B triunghiul $\triangle ABC$ nu poate fi echilateral;
- C $AB^2 = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{4} + m^4$ cu $m \in (3, \infty)$;
- D Niciuna dintre afirmațiile de mai sus nu sunt adevărate.

432. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea $\sqrt{2}\left(1 - \frac{AC}{AB + AC}\right) - \frac{BC}{AB + AC} = \frac{AB - AC}{BC}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? \checkmark ?

- A triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral;
- B $\sin B = \cos B$;
- C $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- D niciuna dintre afirmațiile de mai sus nu este adevărată.

433. Fie triunghiul $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$. Știind că lungimile laturilor satisfac relația $\frac{(BC - AB)(BC + AC)}{2AC^2} = -2$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? \checkmark ?

- A $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- B triunghiul este dreptunghic;
- C $m(\angle A) = \frac{2\pi}{3}$;
- D este imposibil ca triunghiul să fie isoscel.

434. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu lungimile laturilor $m^2 + m + 1$, $2m + 1$, $m^2 - 1$ cu $m \in (1, \infty)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? \checkmark ?

- A triunghiul $\triangle ABC$ are un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$ dacă și numai dacă $m = 5$;

B $\forall m \in (1, \infty)$ există un unghi al triunghiului care are măsura de $\frac{2\pi}{3}$;

C nu se poate afla măsura niciunui unghi al triunghiului;

D $\forall m \in (1, \infty)$ există un unghi al triunghiului care are măsura de $\frac{\pi}{3}$.

435. Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ ascuțitunghic. Știind că $\text{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $m(\angle ABC) = 75^\circ$;

C $m(\angle ABC) = 37^\circ 30'$;

B nu se poate stabili măsura unghiului ABC ;

D $\text{tg}(\angle ABC) = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}$.

436. Fie a, b, c măsurile unghiurilor unui triunghi. Care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate?

A $\sin \frac{a+b}{2} = \sin \frac{c}{2}$;

C $\sin \frac{a+b}{2} = \cos \frac{c}{2}$;

B $\sin \frac{a+c}{2} = \cos \frac{b}{2}$;

D $\frac{c}{2} = \arcsin\left(\sin \frac{a+b}{2}\right)$.

Operații cu vectori

437. Fie $ABCD$ un trapez $AB > CD$, $AB = 20$, $DC = 10$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv CD , iar O este intersecția dreptelor MN și AC ; știind că $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NM}$, valoarea lui k este:

A $\frac{1}{2}$;

B $-\frac{1}{2}$;

C $\frac{1}{3}$;

D $-\frac{1}{3}$.

438. În patrulaterul $ABCD$, notăm cu M, N, P și Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și respectiv DA . Atunci

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$;

D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

439. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , și DA ale paralelogramului $ABCD$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$;

C $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AC}$;

B $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$;

D $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DB}$.

440. Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele M, N mijloacele laturilor AB , respectiv AD . Notăm cu O intersecția diagonalelor paralelogramului și cu G centrul de greutate al triunghiului MNC . Atunci

A $G \in BD$;

C $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

B $G = O$;

D $2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}$.

441. Considerăm triunghiul neisoscel ABC în care notăm cu O, G, H centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$;

C $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$;

B $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$;

D $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$.

442. Fie M mijlocul diagonalei AC a patrulaterului oarecare $ABCD$. Notăm cu G_1, G_2, G centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BCD , respectiv BMD . Atunci

A $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$;

C $3\overrightarrow{CG_2} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

B G este mijlocul segmentului G_1G_2 ;

D $2\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

443. Considerăm în plan punctele distincte necoliniare A, B, C, D și punctele M, N astfel încât $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$. Din următoarele egalități, alegeți pe cele adevărate.

A $\overrightarrow{AC} = \frac{10}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AN}$;

C $\overrightarrow{AC} = \frac{10}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AM}$;

B $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AD}$;

D $6\overrightarrow{AM} = \frac{25}{3}\overrightarrow{BN} + 15\overrightarrow{AD} - \frac{50}{3}\overrightarrow{AN}$.

444. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de centru O cu proprietatea că vectorii $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE}$ și \overrightarrow{AD} nu sunt coliniari. Notăm cu $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ ortocentrele triunghiurilor FAB, ABC, BCD, CDE, DEF , respectiv EFA . Stabiliți care dintre afirmații sunt adevărate

A $H_1H_2H_3H_4$ este trapez;

C $H_1H_2H_4H_5$ este paralelogram;

B H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 sunt concurente;

D $H_2H_3H_5H_6$ este trapez.

445. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu M mijlocul segmentului AB și cu I centrul cercului înscris triunghiului OMB . Care dintre următoarele relații pentru \overrightarrow{OI} sunt adevărate?

A $\overrightarrow{OI} = \frac{2}{3 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$;

C $\overrightarrow{OI} = \frac{2}{3 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OM} - \frac{1}{1 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OE}$;

B $\overrightarrow{OI} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OM} - \frac{1}{3 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$;

D $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$.

446. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ construim triunghiurile DCF și AED astfel încât $\triangle DCF \sim \triangle DCO$, respectiv $\triangle AED \sim \triangle DOA$, unde am notat cu O intersecția diagonalelor AC și BD . Stabiliți care dintre următoarele relații sunt adevărate

A $\vec{EO} + \vec{FO} = \vec{DB}$;

C $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{CO}$;

B $\vec{FB} = 2\vec{FO} + \vec{ED}$;

D $\vec{DO} = \frac{1}{2}(\vec{DE} + \vec{DF})$.

447. În exteriorul pătratului $ABCD$ construiam pătratele $AMND, CDPQ$, respectiv $CRSB$. Alegeți relațiile vectoriale corecte

A $\vec{MP} - \vec{AR} = \vec{BD}$;

C $\vec{AN} + \vec{AQ} = \vec{BC}$;

B $\vec{BP} + \vec{AR} = 3\vec{AD}$;

D $\vec{CR} + \vec{AM} = \vec{NP}$.

448. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABD, BCE , respectiv CFA . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\vec{BF} = \vec{EC} + \vec{DA}$;

C $\vec{FC} - \vec{AD} = \vec{BE}$;

B $\vec{FB} = \frac{1}{2}\vec{FD} + \frac{1}{2}\vec{FE}$;

D $\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AF} + \vec{BE}$.

449. În exteriorul unui cerc de centru O considerăm un punct A din care construiam tangentele la cerc în punctele M , respectiv N . Admitem că în interiorul patrulaterului $AMON$ se poate înscrie un cerc tangent la laturile patrulaterului. Notăm cu I centrul acestui cerc. Știind că $m(\hat{A}) = 60^\circ$ alegeți expresiile vectoriale corecte

A $\vec{AI} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}\vec{AO}$;

C $\vec{MI} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\vec{MA} + \frac{2}{3 + \sqrt{3}}\vec{MN}$;

B $\vec{AI} = \frac{3}{3 + \sqrt{3}}\vec{AO}$;

D $\vec{MI} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3 + \sqrt{3}}\vec{MA} + \frac{2}{3 + \sqrt{3}}\vec{MN}$.

450. În exteriorul unui cerc de centru O considerăm un punct A din care construiam tangentele la cerc în punctele M , respectiv N . Dacă patrulaterul $AMON$ este inscripabil notăm cu O_1 centrul cercului în care este înscris. Determinați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate

A $\vec{O_1O} + \vec{O_1A} = \vec{0}$;

B Există puncte A pentru care patrulaterul $AMON$ să nu fie inscripabil;

C Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ$, O_1 este pe cercul de centru O ;

D Dacă $m(\hat{A}) = 60^\circ$, O_1 este pe cercul de centru O .

451. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 5, AC = 12$, respectiv $BC = 13$. Știind că punctele O, I, G, H sunt centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, centrul de greutate și respectiv ortocentrul triunghiului ABC , stabiliți care dintre afirmații sunt adevărate.

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{A}} \quad \vec{OI} = 5\vec{OC} + 12\vec{OB} + 13\vec{OA}; & \boxed{\text{C}} \quad \vec{OH} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}; \\ \boxed{\text{B}} \quad \vec{OI} = \frac{1}{30} (5\vec{OC} + 12\vec{OB} + 13\vec{OA}); & \boxed{\text{D}} \quad 2\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{AC}. \end{array}$$

452. Notăm cu M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA ale pătratului $ABCD$ și cu O intersecția segmentelor AC și BD . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{A}} \quad \vec{MC} + \vec{ND} = \vec{NO} + 3\vec{QD}; & \boxed{\text{C}} \quad \vec{AP} + \vec{BP} = 3\vec{MO}; \\ \boxed{\text{B}} \quad \vec{QM} + \vec{BD} = \vec{NC}; & \boxed{\text{D}} \quad \vec{NQ} + \vec{DC} = \vec{BO} + \vec{QM}. \end{array}$$

Pentru rezolvarea următoarelor exerciții se vor folosi următoarele rezultate teoretice. Pentru un poligon cu $n \geq 3$ vârfuri $A_1 A_2 \dots A_n$ definim centrul de greutate al poligonului ca fiind punctul din plan G cu proprietatea că $\vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \dots + \vec{GA}_n = \vec{0}$. Se poate demonstra că vectorul de poziție al punctului G este $\vec{r}_G = \frac{1}{n} (\vec{r}_{A_1} + \dots + \vec{r}_{A_n})$. În plus, dacă poligonul este regulat, centrul de greutate este centrul cercului în care poligonul este înscris.

453. Fie $A_1 A_2 \dots A_{60}$ un poligon regulat cu 60 de vârfuri. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale poligoanelor $A_1 A_3 \dots A_{59}$, $A_2 A_4 \dots A_{60}$, $A_1 A_2 A_4$, respectiv $A_{31} A_{32} A_{34}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

$$\boxed{\text{A}} \quad G_1 = G_2; \quad \boxed{\text{B}} \quad G_1 \in G_3 G_4; \quad \boxed{\text{C}} \quad G_1 \neq G_2; \quad \boxed{\text{D}} \quad G_2 \notin G_3 G_4.$$

454. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, G, M ortocentrul triunghiului ABC , ortocentrul triunghiului ADE , centrul de greutate al pentagonului, respectiv mijlocul segmentului $H_1 H_2$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate.

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{A}} \quad \vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}); \\ \boxed{\text{B}} \quad \vec{OH}_1 + \vec{OH}_2 = \vec{OA} + \vec{OG}; \\ \boxed{\text{C}} \quad \vec{OH}_1 + \vec{OH}_2 = \vec{OA} + 5\vec{OG}; \\ \boxed{\text{D}} \quad M = G \text{ dacă și numai dacă } \vec{OG} = \vec{0}. \end{array}$$

455. În hexagonul $ABCDEF$ notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor AD, BE , respectiv CF . Considerăm că punctele M, N, P sunt distincte două câte două. Mai notăm cu G_1, G_2 centrul de greutate al hexagonului, respectiv al triunghiului MNP . Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{A}} \quad G_1 = G_2 \text{ pentru orice hexagon } ABCDEF; \\ \boxed{\text{B}} \quad G_1 = G_2 \text{ dacă și numai dacă } ABCDEF \text{ este un hexagon regulat}; \\ \boxed{\text{C}} \quad G_1 \in MN; \\ \boxed{\text{D}} \quad \text{Nicio afirmație nu este adevărată.} \end{array}$$

456. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare în care notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor AB, CD , respectiv MN . Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$;

B $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$;

C P este centrul de greutate al patrulaterului;

D $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

Coliniaritate vectori

457. Considerăm în plan punctele M, N și triunghiul ABC . Știind că $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{CN} = q \cdot \overrightarrow{CB}$. A, M, N sunt coliniare, dacă și numai dacă: ✓ ?

A $p - q = p \cdot q$; B $p + q = p \cdot q$; C $\frac{p}{q} = p + 1$; D $\frac{p}{q} = p - 1$.

458. Considerăm paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii CD și O intersecția diagonalelor AC și BD . Notăm cu G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor AMB , respectiv AOB . Care dintre următoarele afirmații nu sunt adevărate? ✓ ?

A M, G_1, G_2 sunt coliniare; C G_1, O, G_2 sunt coliniare;
 B O aparține segmentului MG_1 ; D G_1 aparține segmentului MO .

459. Pe laturile triunghiului ABC construim triunghiurile echilaterale BCA_1, CAB_1, ABC_1 care au centrele de greutate G_1, G_2 , respectiv G_3 . Dacă notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC , iar punctele A, G, G_1 sunt coliniare, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă A, G_1, A_1 sunt coliniare;
 B Triunghiul ABC este isoscel în A ;
 C A, G_1, A_1 sunt coliniare;
 D Dacă punctele B, G, G_2 sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este echilateral.

460. În pentagonul $ABCDE$ notăm cu G, G_1, G_2, M centrul de greutate al pentagonului, centrul de greutate al triunghiului ABC , centrul de greutate al triunghiului ADE , respectiv mijlocul segmentului G_1G_2 . Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A A, M, G sunt coliniare;
 B $G_1G_2 \parallel CD$ dacă și numai dacă $CD \parallel BE$;
 C $G_1G_2 \parallel BE$ dacă și numai dacă $BC \parallel DE$;
 D A, M, G sunt coliniare dacă și numai dacă $BCDE$ este paralelogram.

461. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex în care notăm cu G, G_1, G_2, M centrul de greutate al hexagonului, centrul de greutate al triunghiului ABC , centrul de greutate al triunghiului DEF , respectiv mijlocul segmentului G_1G_2 . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A A, M, D sunt coliniare dacă și numai dacă $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AC} + \vec{AE}$;
- B Dacă $ABCDEF$ este un hexagon regulat, A, G, D sunt coliniare;
- C A, G, D sunt coliniare dacă și numai dacă A, M, D sunt coliniare;
- D A, M, D sunt coliniare dacă și numai dacă $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{0}$.

462. În triunghiul ABC notăm cu O, G, H , centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Vectorii \vec{OH} și \vec{GO} sunt coliniari;
- B Vectorii \vec{HO} și \vec{GO} sunt coliniari dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este isoscel;
- C Vectorii \vec{OH} și \vec{GO} sunt coliniari dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic;
- D Toate afirmațiile anterioare sunt corecte.

463. În plan se aleg punctele A, B, C, D , oricare trei necoliniare, cu proprietatea că există numere reale α și β cu proprietatea că $\vec{AC} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AD}$. Știind că vectorii \vec{AB} și $2\vec{AC} + 5\vec{AD}$ sunt coliniari, care sunt două valori posibile pentru parametrii α și β ?

- A $\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2}$;
- B $\alpha = 3, \beta = \frac{7}{2}$;
- C $\alpha = -3, \beta = -\frac{5}{2}$;
- D $\alpha = 1, \beta = -\frac{5}{2}$.

464. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ notăm cu O, G_1, G_2 intersecția diagonalelor AC și BD , centrul de greutate al triunghiului ACD , respectiv centrul de greutate al triunghiului BCD . Dacă vectorii $\vec{OG_1}$ și $\vec{OG_2}$ sunt coliniari, care este valoarea numărului real k cu proprietatea că $\vec{G_1O} = k\vec{G_2G_1}$?

- A $k = 2$;
- B $k = -2$;
- C $k = -\frac{1}{2}$;
- D $k = \frac{1}{2}$.

465. Pe laturile AD și DC ale paralelogramului $ABCD$ construim în exterior paralelogramele $ADFE$ și $CDFG$. Notăm cu O_1, O_2, O_3 centrele paralelogramelor $ABCD, ADFE$, respectiv $CDFG$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $AO_1O_3O_2$ este paralelogram;
- B $AO_1O_3O_2$ este trapez;
- C Dreapta care trece prin O_1 și prin mijlocul segmentului O_2O_3 este paralelă cu DF ;

- D) Dreapta care trece prin O_1 și prin mijlocul segmentului O_2O_3 este paralelă cu DF dacă și numai dacă \overrightarrow{BD} și \overrightarrow{DF} sunt coliniari.

466. Notăm cu B_1, C_1 mijloacele laturilor AC , respectiv AB ale triunghiului ABC . De asemenea, notăm cu G, G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, AGB_1 , respectiv AGC_1 . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A) G_1G_2BC este paralelogram; C) $G_1G_2 \parallel B_1C_1$;
 B) G_1G_2BC este trapez; D) $G_1G_2C_1B_1$ este paralelogram.

Vector poziție

467. Fie punctele $A(\alpha, 1), B(1, 1), C(\beta, 0)$ și $D(-1, 0)$, unde α, β sunt numere reale. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A) Avem o infinitate de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram;
 B) Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\alpha + 2\beta = 0$;
 C) Avem o singură pereche (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram;
 D) $ABCD$ nu este paralelogram pentru nicio pereche de numere (α, β) .

468. Fie punctele $A(0, 1), B(1, 0)$ și $C(\alpha, \alpha^2)$. Pentru ce valori ale lui α punctele A, B și C sunt coliniare? ✓ ?

- A) $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$; B) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; C) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$; D) $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

469. Fie reperul cartezian XoY cu versorii \vec{i} , respectiv \vec{j} și funcția $\vec{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$, $\vec{v}(x) = x^2 \cdot \vec{i} + 3x^2 \cdot \vec{j}$. Locul geometric descris de vârful vectorului de poziție al punctelor $\vec{v}(x)$ atunci când x parcurge pe \mathbb{R} este: ✓ ?

- A) un cerc; B) o dreaptă; C) o semidreaptă; D) o parabolă.

470. Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$ și $\alpha \in (0, \infty)$. Considerăm punctele M, N, P pe $[AB], [BC]$ respectiv $[CA]$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \alpha$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A) Triunghiurile ABC și MNP au același ortocentru;
 B) Triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate;
 C) Centrul cercului circumscris al triunghiului ABC și al triunghiului MNP coincid;
 D) Nicio afirmație de mai sus nu este corectă.

471. Fie A și B două puncte distincte în plan și fie funcția $\vec{v} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$, $\vec{v}(t) = t \cdot \vec{r}_A + (1 - t) \cdot \vec{r}_B$. Să se indice valoarea de adevăr a următoarelor afirmații: ✓ ?

A \vec{v} este injectivă;

C $\vec{v}(t) = \vec{r}_A \Rightarrow t = 1$;

B \vec{v} este surjectivă;

D $\vec{v}(t) = \vec{r}_B \Rightarrow t = 1$.

472. Fie A, B, C și G puncte în plan cu $\vec{r}_A = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_B = -\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{r}_C = \vec{i} + \vec{j}$. \checkmark ?
Punctul C , astfel încât G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC este dat prin vectorul de poziție:

A $\vec{r}_C = -\vec{i}$;

C $\vec{r}_C = \vec{i} + \vec{j}$;

B $\vec{r}_C = \vec{i}$;

D $\vec{r}_C = -\vec{i} + \vec{j}$.

473. Fie $G_0 = A$ și triunghiul ABC . Fie G_1 centrul său de greutate. Considerăm \checkmark ?
triunghiul G_1BC și G_2 centrul său de greutate. Procedând inductiv obținem un șir de triunghiuri $(G_nBC)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât G_{n+1} este centrul de greutate al triunghiului G_nBC , $\forall n \in \mathbb{N}$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate?

A Toate punctele G_n se află pe aceeași dreaptă;

B $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n \in [BC]$;

C $\vec{r}_{G_n} = \frac{1}{3^n} \vec{r}_A + \frac{(3^n - 1)^2}{4 \cdot 3^n} (\vec{r}_B + \vec{r}_C)$;

D $\vec{r}_{G_n} = \frac{1}{3^n} \vec{r}_A + \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} (\vec{r}_B + \vec{r}_C)$.

474. Fie A, B și C trei puncte coliniare astfel încât $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$. Dacă $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ sunt \checkmark ?
vectorii de poziție ai punctelor A, B, C , care dintre relații este adevărată?

A $\vec{r}_B = \frac{1}{2} (\vec{r}_A + \vec{r}_C)$;

C $\vec{r}_B = \frac{3}{2} \vec{r}_C - \frac{1}{2} \vec{r}_A$;

B $\vec{r}_B = \frac{1}{2} (\vec{r}_A - \vec{r}_C)$;

D $\vec{r}_B = \frac{3}{2} \vec{r}_A - \frac{1}{2} \vec{r}_C$.

475. Fie triunghiul ABC și M, N, P puncte pe (AB) , (BC) , respectiv (CA) . Numim \checkmark ?
triunghiul MNP *triunghi interior* dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Presupunem că există un șir de triunghiuri (nedeenerate) $(A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ este *triunghi interior* triunghiului $A_n B_n C_n$ și centrele cercurilor înscrise triunghiurilor $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ și $A_n B_n C_n$ coincid, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci triunghiul $A_0 B_0 C_0$ este:

A dreptunghic;

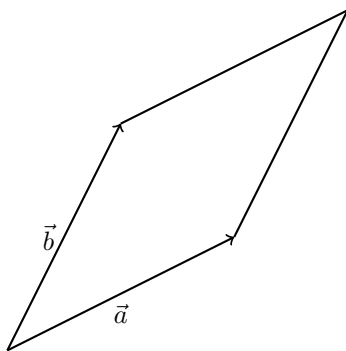
B oarecare;

C echilateral;

D obtuzunghic.

Produs scalar

476. Fie rombul din figură determinat de vectorii \vec{a} și \vec{b} . Să se indice care dintre \checkmark ?
următoarele afirmații sunt **false**.



✓ ?

- A $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; C $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$;
 B $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; D Nicio afirmație nu este falsă.

477. Dacă A, B, C și M sunt puncte distincte într-un plan astfel încât $6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, atunci: ✓ ?

- A B, C, M sunt coliniare; C $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$;
 B B, C, M sunt necoliniare; D $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

478. Dacă $A(-2, -1)$, $B(2, 1)$ și $C(-1, 2)$ sunt puncte într-un sistem de coordonate cartezian, atunci triunghiul ABC este: ✓ ?

- A obtuzunghic; B isoscel; C dreptunghic; D echilateral.

479. Fie $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$ și $C(2\alpha, \alpha^2 - 4\alpha + 4)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Valoarea lui α pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A este: ✓ ?

- A $\alpha = -1$; B $\alpha = 1$; C $\alpha = 0$; D $\alpha = 2$.

480. Fie $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(\alpha, \beta + 4)$ și $D(\alpha + 3, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Numărul de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este romb este: ✓ ?

- A una; B două; C o infinitate; D niciuna.

481. Fie \vec{a} și \vec{b} vectori nenuli din plan astfel încât $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Fie $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V}$, $\vec{v}(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, unde prin \mathcal{V} notăm mulțimea vectorilor din plan. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A Funcția \vec{v} este surjectivă;
 B Funcția \vec{v} este injectivă;
 C Funcția \vec{v} este inversabilă;
 D Nicio afirmație de mai sus nu este corectă.

482. Fie $A(3, 2)$, $B(0, 2)$ și $C(-2, 0)$. Atunci măsura unghiului ABC este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{3}$; B $\frac{\pi}{2}$; C $\frac{2\pi}{3}$; D $\frac{3\pi}{4}$.

483. Fie dreapta $d : 3x - 2y + 6 = 0$, $M(5, 4)$ și P proiecția punctului M pe dreapta d . ✓ ?
Atunci coordonatele lui P sunt:

A $P(2, 5)$; B $P(1, 4)$; C $P(2, 6)$; D $P(1, 5)$.

484. Fie triunghiul ABC și $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ astfel încât $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ și ✓ ?
 $\vec{b} \cdot \vec{c} \geq 0$. Atunci:

A $\triangle ABC$ este dreptunghic; C $\triangle ABC$ este degenerat;
 B $\triangle ABC$ este isoscel; D $\triangle ABC$ este obtuzunghic.

485. Fie vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} nenuli astfel încât $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ și $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Atunci ✓ ?
 \vec{a} și \vec{c} sunt:

A perpendiculari; B coliniari; C opuși; D alt răspuns.

Coordonate

486. Într-un sistem de coordonate cartezian ortonormat xOy se dau punctele $A(-1, -2)$, ✓ ?
 $B(3, 1)$ și $M(a, b)$. Triunghiul ABM este echilateral pentru:

A $a = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$; C $a = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$;
 B $a = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 - 4\sqrt{3}}{2}$; D $a = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 - 4\sqrt{3}}{2}$.

487. Se dă un triunghi ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1, 0)$, $B(4, 3)$, ✓ ?
 $C(0, 5)$ și punctele D, E, F situate pe laturile triunghiului, astfel încât $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$,
 $3\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{EA}$, $2\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $AD : 11x - 5y - 11 = 0$; C $CF : 8x - 7y - 35 = 0$;
 B $BE : x + 4y + 8 = 0$; D AD, BE, CF sunt concurente.

488. Dacă $A(1, 3)$, $B(6, 4)$ și $C(\frac{15}{4}, \frac{15}{4})$ sunt puncte într-un sistem de coordonate cartezian ✓ ?
cu originea în O , atunci:

A $[OC]$ este mediană în triunghiul AOB ;
 B OC este bisectoarea unghiului AOB ;
 C OC este perpendiculară pe AB ;
 D OC este mediatoarea segmentului $[AB]$.

489. Se consideră triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Față de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-4, 1), B(-7, 4), C(0, 5)$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

- A Triunghiul ABC este dreptunghic și $m(\widehat{A}) = 90^\circ$;
- B Triunghiul ABC și triunghiul MNP au același centru de greutate;
- C Triunghiul ABC și triunghiul MNP au același ortocentru;
- D Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și MNP coincid.

490. Un avion se află pe o pistă și dorește să decoleze. Pleacă dintr-un punct oarecare al pistei și accelerează până în punctul $A(0, 0)$ unde își începe desprinderea de la sol, urcând în linie dreaptă până în punctul $B(5\sqrt{3}, 5)$. Pe ruta sa, merge liniar și paralel cu axa Ox din punctul B până în punctul $C(10\sqrt{3}, 5)$, unde își începe aterizarea în linie dreaptă către punctul $D(5(1 + 2\sqrt{3}), 0)$. Notăm cu θ și γ unghiurile formate de traiectoria avionului la decolare și, respectiv, la aterizare cu sensul pozitiv al axei Ox . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\theta = \frac{\pi}{6}, \gamma = \frac{5\pi}{6}$;
- B $\theta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$;
- C $\theta = \frac{\pi}{6}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$;
- D $\theta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

491. Fie $(C_n(A_n; r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ șirul de cercuri $C_n(A_n; r_n)$ de rază $r_n > 0$ cu centrul A_n , definit recurent astfel: $C_1(A_1; r_1)$ este cercul de rază $r_1 = 1$, cu centrul A_1 situat pe prima bisectoare, tangent axelor de coordonate; $C_2(A_2; r_2)$ este cercul de rază $r_2 < r_1$, cu centrul A_2 situat pe prima bisectoare, tangent cercului $C_1(A_1; r_1)$ și axelor de coordonate; ș.a.m.d. Dacă cercul $C_n(A_n; r_n)$, ($n \in \mathbb{N}$) a fost construit, atunci $C_{n+1}(A_{n+1}; r_{n+1})$ este cercul de rază $r_{n+1} < r_n$, cu centrul A_{n+1} situat pe prima bisectoare, tangent cercului $C_n(A_n; r_n)$ și axelor de coordonate. ✓ ?

Dacă s_n notează aria cercului $C_n(A_n; r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_1 + s_2 + \dots + s_n),$$

este:

- A 2π ;
- B $\frac{8 + \sqrt{2}}{8}\pi$;
- C $\pi + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$;
- D 3π .

492. Andrei și-a creat propriul joc pe care l-a denumit "Labirintul". Acesta funcționează după următoarea regulă: jucătorul, la fiecare pas, aflându-se în punctul de coordonate (x, y) , se mută la punctul $(x + y, -y)$. Știind că pornește din punctul de coordonate $(2, 2)$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A La pasul 162, jucătorul este plasat pe dreapta de ecuație $x + 2y = 0$;
- B La pasul 2025, jucătorul se află în punctul de coordonate $(2, 2)$;
- C La pasul 163, jucătorul este plasat pe dreapta de ecuație $x + y = 0$;

D) Niciuna dintre afirmații nu este adevărată.

493. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1, 2)$, $B(-4, -1)$ și $C(2, -3)$, atunci coordonatele centrului său de greutate (notat G) sunt: ✓ ?

A) $G\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; B) $G\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; C) $G(-1, -1)$; D) $G\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

494. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1, 5)$, $B(1, 1)$ și $C(3, 1)$ și fie punctele M , N , P pe $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$ astfel încât $MBNP$ este pătrat. Alegeți afirmațiile adevărate

- A) lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{7}{3}$;
 B) lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{10}{3}$;
 C) lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{4}{3}$;
 D) Nu există pătrat $MBNP$ cu proprietățile cerute.

495. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(0, 2)$, $B(-1, 1)$ și $C(2, -1)$. Atunci coordonatele ortocentrului triunghiului ABC (notat H) sunt: ✓ ?

A) $H\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$; B) $H\left(-\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}\right)$; C) $H\left(\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}\right)$; D) $H\left(-\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

496. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(-1, -3)$, $B(0, 1)$ și $C(2, 0)$. Coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC (notat O) sunt: ✓ ?

A) $O\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$; B) $O\left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}\right)$; C) $O\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$; D) $O\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

497. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(2, 1)$, $B(-2, -1)$ și $C(2, -1)$. Atunci coordonatele centrului cercului înscris triunghiului ABC (notat I) sunt:

- A) $I(-1 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$; C) $I(1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$;
 B) $I(1 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$; D) $I(-1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$.

498. Fie punctele A , B și C și dreptele $AB : x - 2y + 4 = 0$, $BC : 2x + y - 2 = 0$ și $CA : x + 3y + 4 = 0$. Atunci: ✓ ?

- A) $A(-3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(0, -2)$; C) $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-1, -2)$;
 B) $A(-4, 0)$, $B(1, -1)$, $C(2, -2)$; D) $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -2)$.

499. Fie cercul de centru $C(0, 1)$, raza $R = 2$ și punctul $A(4, 2)$. Fie $M(x, y)$ pe cerc astfel încât dreapta AM este tangentă la cerc. Atunci: ✓ ?

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{A}} M \left(\frac{16 + 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 + 8\sqrt{13}}{17} \right); & \boxed{\text{C}} M \left(\frac{16 - 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 - 8\sqrt{13}}{17} \right); \\ \boxed{\text{B}} M \left(\frac{16 + 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 - 8\sqrt{13}}{17} \right); & \boxed{\text{D}} M \left(\frac{16 - 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 + 8\sqrt{13}}{17} \right). \end{array}$$

500. Fie punctul $M(x, y)$ și cercurile \mathcal{C}_1 de centru $O(0, 0)$ și rază $R = 1$ și \mathcal{C}_2 de centru M și rază $R = 1$. Locul geometric al punctelor M pentru care cercurile \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt tangente este:

- A o dreaptă; B o parabolă; C un cerc; D o elipsă.

501. Fie punctele $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$ și $M(x, y)$. Locul geometric al punctelor M pentru care triunghiul AMB este dreptunghic în M este:

- A o parabolă; B un cerc; C o dreaptă; D o elipsă.

502. Fie punctele $A(1, -3)$, $B_\alpha(-2, \alpha)$, $C_\beta(0, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $M(\alpha, \beta)$. Locul geometric al punctelor M pentru care triunghiurile $AB_\alpha C_\beta$ au același centru de greutate este

- A un cerc; B o dreaptă; C o elipsă; D o parabolă.

503. Fie $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ și $C(x_C, y_C)$. Numărul de puncte C pentru care aria triunghiului ABC este 2 este:

- A unul singur; B o infinitate; C două; D niciunul.

504. Fie segmentul $[AB]$ cu $A\left(2, \frac{7}{2}\right)$, $B(x_B, y_B)$ și punctul $C(1, 2)$ care aparține segmentului (AB) . Știind că $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, care este valoarea $(x_B + x_A)^2 - y_B$?

- A 1; C $\frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5} - 6}{1 + \sqrt{5}}$;
 B $\frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5} - 6}{1 + \sqrt{5}} + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}$; D $\frac{2}{3}$.

505. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5, -1)$, $B(2, 2)$ și $C(-4, 5)$. Știind că punctul P este ortocentrul triunghiului ABC , care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A P se află pe dreapta de ecuație $y = -\frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$;
 B $A_{\Delta PAB} = 71$;
 C simetricul punctului P față de dreapta BC are coordonatele $\left(\frac{1}{13}, \frac{119}{13}\right)$;
 D P este centrul de greutate al ΔABC .

506. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 2)$, $B(-2, 6)$ și $C(8, -2)$ și G ✓ ?
centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$. Știind că distanța de la G la dreapta de
ecuație $y = mx + 2$ este egală cu 2, iar $m > 0$, care este valoarea calcului $8m$?

A 6;

B 14;

C 3;

D 2.

507. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(2, -3)$, $C(-3, 4)$ și $D(x_D, y_D)$?
Știind că triunghiul format din centrul de greutate al triunghiului ABC , origine și D
este un triunghi isoscel și dreptunghic în O , $5 \frac{y_D}{x_D} + 2$ este egal cu?

A 3;

B 2;

C 4;

D 1.

Ecuația dreptei

508. Centrul de greutate G al unui triunghi ABC are coordonatele $G(6, 7)$, iar ecuațiile ✓ ?
a două dintre laturile sale sunt $BC : 2x - y + 1 = 0$, respectiv $AC : 5x - 7y + 16 = 0$.
Atunci ecuația celei de-a treia laturi a triunghiului este:

A $AB : 8x + 13y + 49 = 0$;

C $AB : 8x - 13y + 49 = 0$;

B $AB : 8x - 13y - 49 = 0$;

D $AB : 8x + 13y - 49 = 0$.

509. Să se indice care dintre următoarele drepte trec prin punctul $A(-1, -1)$ și formează ✓ ?
cu dreapta de ecuație $x + 2y + 5 = 0$ un unghi de 45° .

A $3x - y + 2 = 0$;

C $x + 3y + 4 = 0$;

B $x - 3y - 2 = 0$;

D $3x + y + 4 = 0$.

510. Un paralelogram $ABCD$ are centrul în punctul $M(2, 3)$, iar ecuațiile a două dintre ✓ ?
laturile sale sunt $AB : y = 2x$, respectiv $AD : y = 3x - 1$. Care dintre următoarele
afirmații nu sunt adevărate?

A Punctul $N(4, 7)$ este mijlocul segmentului $[BC]$;

B Punctul $P(1, 0)$ este mijlocul segmentului $[CD]$;

C Diagonala BD are ecuația $x + y - 5 = 0$;

D Diagonala AC are ecuația $x - y + 1 = 0$.

511. În reperul cartezian xOy se dau dreptele de ecuații $x + 2y - 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$. ✓ ?
Dreapta care trece prin punctul comun al dreptelor date și prin originea sistemului de
coordonaate are ecuația:

A $y = -2x$;

B $y = -x$;

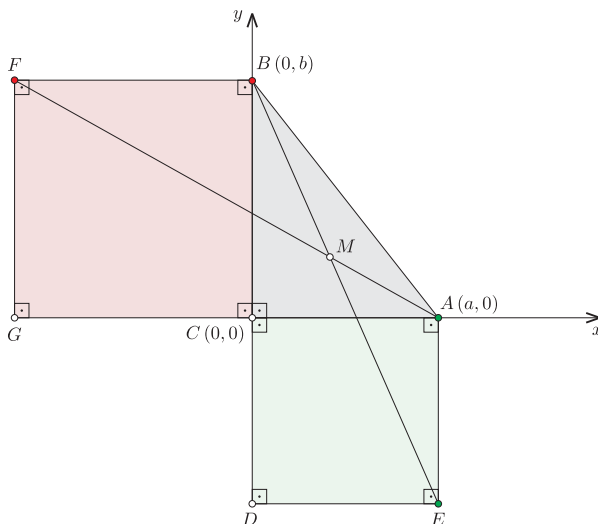
C $y = x$;

D $y = 2x$.

512. Considerăm ecuațiile dreptelor $d_1 : x = 1$ și $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziane cu originea în O . Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ și $B \in d_2$, avem:

- A $C \in d$, unde $d : x - y = 0$;
- B Distanța dintre A și B este cel puțin egală cu $\sqrt{2}$;
- C $C \in d$, unde $d : x + y = 2$;
- D Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puțin egală cu 1.

513. Vârfurile unui triunghi dreptunghic ABC_{Δ} sunt date de punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și $C(0, 0)$, unde $a, b > 0$ și $a \neq b$. Desenând pătrate pe catete, obținem figura atașată. Alegeți fiecare afirmație corectă:



- A Înălțimea din vârful C al triunghiului ABC_{Δ} are ecuația $ax - by = 0$;
- B Segmentele AF și BE se intersectează în punctul $M \left(\frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + ab + b^2} \right)$;
- C Înălțimea din vârful C al triunghiului ABC_{Δ} trece prin intersecția segmentelor AF și BE ;
- D Aria triunghiului AMC_{Δ} este $\mathcal{A} = \frac{a^2b^2}{2(a^2 + ab + b^2)}$.

514. Fie dreapta d_1 de ecuație $x + y - 4 = 0$. Dreapta d este mediatoarea segmentului format de intersecțiile dreptei d_1 cu axele Ox și Oy . Considerăm punctul A , un punct variabil pe dreapta d , și punctul B proiecția sa pe dreapta de ecuație $y = 3x$. În acest caz, mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație:

A $y = \frac{2}{3}x$;
 B $y = \frac{11}{7}x$;
 C $y - \frac{2}{3}x = 0$.
 D $x - \frac{7}{11}y = 0$;

515. Fie sistemul de inecuații $\begin{cases} -7x + 3y \leq -2 \\ x + 2y \leq 10 \\ -5x + 7y \geq -16 \end{cases}$. Aria mulțimii punctelor din plan a
cărui coordonate verifică sistemul este:

A 13;
 B 9;
 C 17;
 D 15.

516. Fie dreapta d_1 de ecuație $y = 5x - 2$ și d dreapta mediatoare a segmentului format
de intersecțiile dreptei d_1 cu axele Ox și Oy , intersecția acestora notându-se cu M .
Știind că dreapta d se intersectează cu dreapta de ecuație $y = \frac{5}{2}x - 4$ în punctul A și
dreapta d_1 se intersectează cu aceeași dreaptă în punctul B' , care este aria triunghiului
 MAB' ?

A $\frac{3075}{189}$;
 B $\frac{2075}{189}$;
 C 2075;
 D 2200.

517. Se consideră dreapta $d : 4x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{2} = 0$. Numim puncte **super** acele puncte
de pe dreapta d a căror distanță până la origine este un număr natural. Care dintre
următoarele afirmații sunt adevărate?

A nu există puncte **super** în cadranul III;
 B există 2 puncte **super** în cadranul III;
 C există 3 puncte **super** în cadranul III;
 D există 5 puncte **super** în cadranul III.

518. Fie P mulțimea tuturor punctelor din plan. Pentru o dreaptă oarecare de ecuație
 $d : ax + by + c = 0, a > 0$, definim funcția

$$f_d : P \rightarrow \{-1, 0, 1\}, f_d(M(x, y)) = \begin{cases} -1 & , \text{dacă } ax + by + c < 0 \\ 0 & , \text{dacă } ax + by + c = 0 \\ 1 & , \text{dacă } ax + by + c > 0 \end{cases}$$

Fie punctele $A(1, 3), B(2, 4), C(3, -1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A $f_{AB}(G)f_{BC}(G)f_{CA}(G) > 0$, unde G este centrul de greutate al ΔABC ;
 B $f_{AB}(C) + f_{BC}(A) = 0$;
 C $f_{AB}(X) = 0, \forall X \in P$ cu proprietatea că $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $X((1 - \alpha)x_a + \alpha x_b, (1 - \alpha)y_a + \alpha y_b)$;
 D $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC \iff f_{AB}(M)f_{AC}(M)f_{BC}(M) < 0$.

519. Ecuația locului geometric al punctelor din plan egal depărtate de punctul $O(0, 0)$ și
de dreapta $d : x = 1$ este:

$$\boxed{\text{A}} \quad x = \frac{y^2 - 1}{2}; \quad \boxed{\text{B}} \quad y = x^2 - 1; \quad \boxed{\text{C}} \quad x = \frac{y^2 - 1}{-2}; \quad \boxed{\text{D}} \quad y = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

520. Ecuația $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$ reprezintă: ✓ ?

- A originea planului $O(0, 0)$;
 B reuniunea a două drepte paralele;
 C reuniunea a două drepte concurente în $O(0, 0)$;
 D ecuația unei drepte.

521. Fie punctele $A(3, 4)$ și $B(-1, 7)$. Locul geometric al punctelor M din plan, ce satisfac ecuația $MA^2 - MB^2 = 4$ este: ✓ ?

- A punctul de coordonate $\left(0, \frac{29}{6}\right)$;
 B o dreaptă paralelă cu dreapta AB ;
 C un cerc;
 D o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB .

Paralelism. Perpendicularitate

522. Într-un reper cartezian ortonormat se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(1, 5)$. ✓ ?

Dreapta AC intersectează axa Oy în punctul E , iar dreapta BC intersectează axa Ox în punctul F . Fie M , N și P mijloacele segmentelor AB , OC și respectiv EF . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $AC \perp BC$; C $MN : x + 5y - 13 = 0$;
 B $P(3, -2)$; D M, N, P sunt coliniare.

523. Se dă dreapta de ecuație $d : y = \frac{4}{3}x + 1$. Care dintre următoarele drepte d' este paralelă cu dreapta dată și se află la distanța 3 de aceasta? ✓ ?

- A $d' : 3y = 4x + 18$; C $d' : 3y = 4x - 12$;
 B $d' : 3y = 4x + 12$; D $d' : 3y = 4x - 18$.

524. Se dă un triunghi ABC cu vârfurile $A(1, 0)$, $C(3, -2)$ și $G(2, 1)$ centrul de greutate al triunghiului. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $B(2, 5)$;
 B Aria triunghiului ABC este egală cu 12;
 C Distanța de la punctul B la latura AC este $3\sqrt{2}$;
 D Mediana din vârful B este perpendiculară pe axa Ox .

525. Fie dreptele d_1 și d_2 de ecuații: $x - 3y + 1 = 0$ și $3x + y + 2 = 0$, a un număr real și P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 , dacă a ia valoarea: ✓ ?

A $-\frac{1}{4}$;

B 0;

C $\frac{1}{4}$;

D $\frac{3}{2}$.

526. Considerăm ecuația dreptei $d : x - y = 1$ și punctele $A(-1, 0)$ și $B(1, 2)$. Oricare ar fi $M \in d$, notăm cu s_M suma lungimilor segmentelor $[AM]$ și $[BM]$. Atunci: ✓ ?

A $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$;

C $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$;

B $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$;

D $\exists M \in d$ astfel încât $s_M = \sqrt{2} + 2$.

527. Fie $A(1, a)$, $B(b, 1)$, $C(-1, c)$ și $D(d, -1)$ puncte într-un sistem de coordonate cartezian astfel încât $a, d \in (0, 1)$ și $b, c \in (-1, 0)$. Dacă S este aria patrulaterului $ABCD$, atunci: ✓ ?

A $S \in [2, 4)$;

B $S \in (2, 4)$;

C $S \in (4, 3\sqrt{2}]$;

D $S \in (4, 3\sqrt{2})$.

528. Se consideră triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor sale $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Față de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-4, 1)$, $B(-7, 4)$, $C(0, 5)$. ✓ ?

A Triunghiul ABC este dreptunghic și $m(\hat{A}) = 90^\circ$;

B Triunghiul ABC și triunghiul MNP au același centru de greutate;

C Triunghiul ABC și triunghiul MNP au același ortocentru;

D Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și MNP coincid.

529. Se consideră triunghiul ABC și D, E, F mijloacele laturilor sale $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Față de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-2, -1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 0)$. ✓ ?

A $|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2$ sau $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ sau $|CA|^2 = |BA|^2 + |BC|^2$;

B Aria triunghiului DEF este jumătate din produsul lungimilor a două dintre laturile sale;

C $|EF| \cdot \text{dist}(A, BC) = |FD| \cdot \text{dist}(B, CA) = |DE| \cdot \text{dist}(C, AB) = 10$;

D $\mathcal{A}_{\Delta AFE} = \mathcal{A}_{\Delta FBD} = \mathcal{A}_{\Delta EDC} = \mathcal{A}_{\Delta DEF} = \frac{5}{2}$.

530. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7, 5)$, $B(9, 1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu \mathcal{C} mulțimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d , și care trec prin A și B . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există în \mathcal{C} un cerc cu aria interioară egală cu π .

B Există în \mathcal{C} un cerc cu aria interioară egală cu 17.

C Există în \mathcal{C} un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct.

D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în \mathcal{C} .

531. Perpendiculara din origine pe dreapta d intersectează această dreaptă în punctul $P(3, 6)$. Ecuația dreptei d este: ✓ ?

Trigonometrie

Aplicații geometrice

535. Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv cercului circumscris, unui triunghi $\checkmark ?$ care are lungimile laturilor 3, 4 și 5, atunci:

- A $2R = 5r$;
 B $2Rr = 5$;
 C $R + r = Rr$;
 D $r < R < 2r$.

536. Dacă x este lungimea laturii unui pătrat care are vârfurile pe laturile unui triunghi $\checkmark ?$ cu lungimile 3, 4 și 5. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $x \in \left\{ \frac{50}{27}, \frac{35}{16}, \frac{60}{37} \right\}$;
 C $x \in \left\{ \frac{12}{7}, 2, \frac{60}{37} \right\}$;
 B $x \in \left\{ \frac{13}{7}, 2, \frac{15}{7} \right\}$;
 D $x \in \left\{ \frac{12}{7}, \frac{60}{37} \right\}$.

537. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, $\checkmark ?$ măsura unghiului \widehat{B} este 60° și lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$ este 1. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate?

- A aria $\triangle ABC$ este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
 B perimetrul $\triangle ABC$ este $3\sqrt{3}$;
 C $\triangle ABC$ este echilateral;
 D lungimea razei cercului înscris $\triangle ABC$ este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

538. Fie triunghiul ABC , ale cărui laturi au lungimile $BC = 6$, $CA = 10$, $AB = 8$. Fie $\checkmark ?$ I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și fie r raza cercului înscris. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A Triunghiul este ascuțitunghic; C $\mathcal{A}[\Delta BIC] = 6$;

B Lungimea înălțimii din A este 4; D $\frac{\mathcal{A}[\Delta AIB]}{\mathcal{A}[\Delta AIC]} = \frac{3}{5}$.

539. Știind că unghiurile triunghiului ΔABC formează în ordinea alfabetică o progresie aritmetică cu rația $r \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ fixată arbitrar, ce este valoarea expresiei trigonometrice

$$\frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) + \frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha),$$

unde $a > 0$ și $c > 0$ denotă lungimea laturii opuse unghiurilor $\alpha = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} - r$, respectiv $\gamma = \widehat{ACB}$?

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{2\sqrt{3}}{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

540. În triunghiul MNP avem $m(\hat{M}) = \frac{\pi}{3}$ și $\sin N + \cos N = \sin P + \cos P$. Atunci, triunghiul MNP este:

A dreptunghic; C dreptunghic isoscel;
 B echilateral; D nu există un astfel de triunghi.

541. Se consideră punctul $P\left(\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. Știind că punctul P' este simetricul său față de dreapta $y = 3x + 1$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $P \in$ află pe cercul trigonometric; C P nu se află pe cercul trigonometric;
 B P' nu se află pe cercul trigonometric; D $x_{P'} < 2$.

542. Punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ situat pe cercul trigonometric se rotește în sens orar în jurul originii cu 90° . Fie $x_{M'}$ și $y_{M'}$ coordonatele sale după exact o rotire. Valoarea expresiei $x_{M'} \cdot y_{M'}$ este:

A $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; B $\frac{\sqrt{3}}{4}$; C $-\frac{1}{4}$; D $\frac{1}{4}$.

543. Fie triunghiul ABC cu laturile a, b, c . Știind că unghiurile A, B, C sunt în progresie aritmetică, $a + b + c = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ și $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{4}(a + b + c)$, valoarea lui $\cos C$ este:

A 1; B $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{2}$.

544. Fie triunghiul ABC cu $\operatorname{tg} A = 3$ și $\operatorname{tg} B = 2$. Atunci $\sin C$ este egal cu: ✓ ?

A 1; B $\frac{\sqrt{2}}{2}$; C 0; D $\frac{1}{2}$.

545. Fie triunghiul ABC în care are loc relația $\sin A \sin B = \cos^2 \frac{C}{2}$. Fie a, b, c lungimile ✓ ?
laturilor triunghiului. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $a = b$; B $a^2 + b^2 = c^2$; C $a = b = c$; D $2c = a + b$.

546. Fie un șir de triunghiuri $(\triangle A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Știind că $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{2^n}$, unde r_n și ✓ ?
 R_n sunt raza cercului înscris, respectiv circumscris triunghiului $A_n B_n C_n$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = \infty$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} \in \mathbb{Q}$;
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = 1$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = 0$.

547. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu laturile a, b, c . Dacă $a^2 + b^2 = xc^2$, atunci mulțimea ✓ ?
valorilor lui x este:

A $[1, \infty)$; B $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; C $\{1\}$; D $(0, \infty)$.

548. Dacă în triunghiul ABC are loc relația $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$, atunci: ✓ ?

A $\triangle ABC$ isoscel; C $\triangle ABC$ dreptunghic în B ;
 B $\triangle ABC$ dreptunghic în A sau C ; D niciuna dintre variantele anterioare.

549. În triunghiul ABC are loc relația $a \cos B + b \cos C + c \cos A = p$, unde a, b, c sunt ✓ ?
lungimile laturilor triunghiului, A, B, C sunt unghiurile, iar p este semiperimetrul.
Triunghiul ABC este:

A degenerat; B dreptunghic; C oarecare; D isoscel.

550. Fie triunghiul ABC în care $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ?
sunt adevărate?

- A Triunghiul ABC este isoscel; C Triunghiul ABC este dreptunghic;
 B Triunghiul ABC este obtuzunghic; D Triunghiul ABC este echilateral.

Calcul de arii și puncte

551. În triunghiul ABC considerăm M, N, P mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Fie Q centrul de greutate al triunghiului MNP și K mijlocul segmentului MP . Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate.

- A punctele B, K, Q sunt coliniare; C $\frac{\mathcal{A}[\Delta PMN]}{\mathcal{A}[\Delta ABC]} = \frac{1}{3}$;
 B $\mathcal{A}[PMCN] = \frac{\mathcal{A}[\Delta ABC]}{2}$; D $\frac{KQ}{BN} = \frac{1}{4}$;

552. Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și cu D piciorul înălțimii duse din vârful A pe latura BC . Care dintre următoarele afirmații nu sunt adevărate?

- A D este ortocentrul triunghiului BHC ;
 B C este ortocentrul triunghiului BDA ;
 C A este ortocentrul triunghiului BHC ;
 D dacă $D = C$, atunci punctele A, H și B sunt coliniare.

553. Pe un cerc de centru O și rază $R > 0$ se iau 12 puncte echidistante A_1, A_2, \dots, A_{12} , în această ordine. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate.

- A $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \frac{R^2}{2}$; C $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \frac{R^2(\sqrt{3}-1)}{2}$;
 B $d(A_1, A_6A_7) = R \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{2}$; D $d(A_1, A_6A_7) = R \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

554. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c . Știind că produsul bc este constant, în care dintre următoarele cazuri ABC are aria maximă?

- A ABC isoscel; C ABC dreptunghic;
 B ABC echilateral; D ABC degenerat.

555. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A . Dacă $BC = 6$ și $\operatorname{tg} C = \frac{1}{2}$, atunci aria lui ABC este:

- A 7; B $\frac{36}{5}$; C 6; D $\frac{34}{5}$.

556. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și fie H ortocentrul triunghiului. Știind că $BC = 6$ și $\cos A = \frac{4}{5}$, lungimea lui AH este:

- A 7; B $\frac{9}{2}$; C 4; D 8.

557. Fie triunghiul ABC înscris într-un cerc de rază $R = 2$. Știind că $m(\hat{A}) = \frac{5\pi}{12}$ și $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{4}$, aria triunghiului ABC este:

- A $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; B $3 + \sqrt{3}$; C $1 + \sqrt{5}$; D 6.

Formule și ecuații trigonometrice

558. Fie ecuația $\cos 2t = \sin t$ dată pe intervalul $[0, 2\pi]$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Ecuația nu are nici o soluție; C Ecuația are trei soluții;
 B Ecuația are două soluții; D Ecuația are patru soluții;

559. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cos^4 x + 11 \sin^2 x - 6$. Valoarea minimă a funcției este:

- A $\frac{80}{8}$ B $\frac{81}{8}$ C $-\frac{81}{8}$ D $-\frac{80}{8}$

560. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\log_{\sin^2 x} \cos x + \log_{\cos^2 x} \sin x = \frac{5}{4e} \Rightarrow \sin^\alpha x = \cos^\beta x$. Să se indice care dintre următoarele variante reprezintă perechile (α, β) , pentru orice x soluție a ecuației.

- A $(2, 1)$; B $(1, 2)$; C $(1, 3)$; D $(0, 0)$.

561. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru orice $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$?

- A $\sin 2x < 0$; C $\sin 2x - 2 \sin x \leq 0$;
 B $2 \sin x \leq \sin x + \cos x$; D $\sin 2x + 2 \sin x \leq 0$.

562. Numărul de soluții pentru care $\operatorname{tg} x = \sin x$, pentru $x \in [0, 2\pi]$ este:

- A 0; B 1; C 2; D 3.

563. Dacă $\sin A + \sin^2 A = \frac{3}{2}$ și

$$a \cdot \cos^8 A + b \cdot \cos^6 A + c \cdot \cos^4 A + d \cdot \cos^2 A + e = 0,$$

atunci care dintre următoarele afirmații pot fi adevărate?

$$\boxed{\text{A}} \quad \frac{b}{a} + \frac{d}{c} - 8e = -\frac{21}{8};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{a+b+2c}{16e-4d} = \frac{10}{21};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{b}{a} + \frac{d}{c} - 8e = -\frac{17}{10};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \frac{a+b+2c}{16e-4d} = \frac{3}{20}.$$

564. Fie numerele $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $(\sin x + 3 \cos y)^2 + (\cos x - 3 \sin y)^2 = 10$. ✓ ?
Stabiliți care dintre următoarele afirmații pot fi adevărate.

$$\boxed{\text{A}} \quad x = 2y;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \sin(x - y) = 0;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \sin(x - 2y) = 0;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad x = y.$$

565. Pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ecuația $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$ are: ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 0 \text{ soluții};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 0 \text{ soluție};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad 2 \text{ soluții};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad 3 \text{ soluții}.$$

566. Considerăm ecuația $-\sin 4x - \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 3x$. Stabiliți care dintre ✓ ?
următoarele afirmații sunt adevărate.

$$\boxed{\text{A}} \quad -\frac{\pi}{4} \text{ este o soluție a ecuației};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \text{Soluțiile ecuației verifică } \cos 8x = 1;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \text{Nu există soluții în intervalul } \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \text{În intervalul } [0, 2\pi] \text{ există 6 soluții ale ecuației}.$$

567. Fie x, y astfel încât $\cos^7 x + \sin^{14} x = 1$. Atunci expresia $\sin x + \cos x$ ia toate ✓ ?
valorile din mulțimea:

$$\boxed{\text{A}} \quad \{0\};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \{-1, 1\}.$$

568. Fie $x \in \left(\frac{83\pi}{10}, \frac{42\pi}{5}\right)$ cu proprietatea că $\sin 5x = -\frac{15}{17}$, care dintre următoarele ✓ ?
afirmații sunt adevărate?

$$\boxed{\text{A}} \quad \cos 5x = \frac{8}{17};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \operatorname{tg} x < 0;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \cos 5x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \cos 10x = -\frac{161}{289}.$$

569. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x < \cos x$. Dacă se cunoaște $\sin 2x = m$, care dintre ✓ ?
următoarele variante de răspuns sunt adevărate?

$$\boxed{\text{A}} \quad \cos x = \sqrt{\frac{2-m^2}{2}};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \sin x = \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{2m};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{m};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \sqrt{1-m^2}}{2}.$$

570. Fie x o soluție a ecuației $3 \cos^2 2x - 4 \cos 2x = 0$. Care dintre următoarele afirmații \checkmark ?
au loc?

A $|\sin x| = |\cos x|$;

C $x \in \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

B $\frac{x}{\pi} \in \mathbb{Z}$;

D $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

571. Fie ecuația $\sin x - \cos x + \sqrt{3}(\sin x + \cos x) = 1 + \sqrt{3}$ și α o soluție a acesteia. Atunci \checkmark ?
 $\sin \alpha$ poate lua valoarea:

A $\frac{1}{2}$;

B -1 ;

C $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D 1 .

572. Care din următoarele mulțimi conțin soluții ale ecuației $\sin^2(2x) + \sin^2(3x) = \checkmark$?
 $\sin^2 x + \sin^2(4x)$?

A $\left\{ \frac{(3k+2)\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

C $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

B $\left\{ \frac{(4k+1)\pi}{10} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $\left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

573. Soluțiile ecuației $(1 - \cos 2x) \cdot \operatorname{ctgx} = 5 \sin x - 2 \operatorname{tgx}$ care se află în intervalul $[0, 10\pi]$ \checkmark ?
au suma:

A 55π ;

B $55\pi + \frac{\pi}{3}$;

C $105\pi - \frac{\pi}{3}$;

D 105π .

574. Dacă $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin(x+y) \leq \sqrt{\sin 2x \sin 2y}$, atunci care dintre \checkmark ?
următoarele afirmații pot fi adevărate?

A $x = y$;

C $x = 2y$ sau $y = 2x$;

B $x - y = \frac{\pi}{4}$;

D $\sin x + \sin y > \sqrt{3}$.

575. Numărul soluțiilor ecuației $\sin x \cdot \sin 5x + \cos 6x = \operatorname{ctgx}$, care se găsesc în intervalul \checkmark ?
 $[-2\pi, 2\pi]$ este:

A 4 ;

B 15 ;

C 24 ;

D 9 .

576. Pentru $a, b \notin \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, expresia $E(a, b) = 4 \cdot \frac{\sin(a+b) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sin 2a \cdot \sin 2b}$
este egală cu:

A $\operatorname{tga} - \operatorname{tgb} + \operatorname{ctga} - \operatorname{ctgb}$;

C $-\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} - \operatorname{ctga} + \operatorname{ctgb}$;

B $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{ctga} + \operatorname{ctgb}$;

D $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} - \operatorname{ctga} - \operatorname{ctgb}$;

577. Dacă $\sin a$ și $\cos 3b$ sunt soluțiile ecuației $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$, atunci pot avea ✓ ?
loc următoarele:

A $a = b$;

C $b \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

B $a \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $a = 3b$.

578. Soluțiile ecuației $\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 10 - 8 \cdot \operatorname{ctg} x$ aparțin următoarelor mulțimi: ✓ ?

A $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

C $\{-\operatorname{arctg} 4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

B $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $\{\operatorname{arctg} 2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

579. Se consideră inecuația $\sin 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se indice care dintre afirmațiile următoare ✓ ?
sunt adevărate.

A $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$;

B $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{24} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$;

C x poate lua valoarea 1;

D x poate lua valoarea $\frac{3\pi}{8}$.

580. Care dintre următoarele egalități sunt adevărate? ✓ ?

A $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

C $\operatorname{tg} \left(2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3}$;

B $\operatorname{arcsin}(\sin 7) = 2\pi - 7$;

D $\operatorname{arccos}(\sin 4) = 4 - \pi$.

581. Valoarea expresiei $\sin \left(2 \operatorname{arcsin} \frac{3}{5} \right)$ este: ✓ ?

A $\frac{24}{25}$;

B $\frac{4}{5}$;

C $2\frac{3}{5}$;

D $-\frac{4}{25}$.

582. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, atunci care dintre următoarele egalități sunt adevărate? ✓ ?

A $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = \sin \frac{x}{2}$;

C $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = \cos \frac{x}{2}$;

B $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2 \sin \frac{x}{2}$;

D $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2 \cos \frac{x}{2}$.

583. Valoarea minimă a expresiei $\frac{12 + 48x^2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x}$, pentru $0 < x < \pi$ este mai mică ✓ ?
decât:

- A 48; B 12; C 64; D 72.

Problemele **584.** și **585.** se referă la expresia $r \sin x + t \cos x$, $x, r, t \in \mathbb{R}$.

584. Care este valoarea maximă a expresiei? ✓ ?

- A 1; B \sqrt{rt} ; C $2\sqrt{r^4 + t^4}$; D $\sqrt{r^2 + t^2}$.

585. Pentru $x = \frac{\pi}{3}$, în care caz se obține valoarea maximă a expresiei? ✓ ?

- A $r = \sqrt{3}t$; B $rt = 1$; C $r = t + 1$; D $r = \frac{\sqrt{3}}{3}t$.

586. Fie expresia $S = 16 \cos 6^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 78^\circ$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ? sunt adevărate?

- A $S = -1$; B $S = 1$; C $S = 4$; D $S = 8$.

587. Știind că $\sin x + \cos y = 1$ și $\cos 2x - \cos 2y = 1$, care dintre următoarele afirmații ✓ ? sunt adevărate?

- A $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$; C $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
 B $x = (-1)^m \frac{\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$; D niciuna dintre afirmații nu este adevărată.

Reducere la primul cadran

588. Fie $S = \operatorname{tg}(1^\circ) \cdot \operatorname{tg}(2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3^\circ) \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}(89^\circ)$. S este egal cu: ✓ ?

- A 0; B 1; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$;

589. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; C $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 B $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

590. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\sin(2) < 0$; B $\sin(2) > 0$; C $\sin(4) < 0$; D $\sin(6) < 0$.

591. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$

C $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

B $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

D $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$

592. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

C $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0;$

B $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

D $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1.$

593. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{2}{3}$, care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(\pi - x) = \frac{2}{3};$

C $\sin(\pi + x) = \frac{2}{3};$

B $\sin(\pi - x) = -\frac{2}{3};$

D $\sin(2\pi - x) = -\frac{2}{3}.$

594. Fie $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$. Atunci punctele A, B, C de pe cercul trigonometric, extremitățile ✓ ?

arcelor de lungimi $x, x + \frac{\pi}{3}, x + \frac{2\pi}{3}$, sunt vârfurile unui triunghi:

 A isoscel;

 C dreptunghic;

 B echilateral;

 D nu se poate determina.

595. Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se dă ecuația: $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$. Soluția ecuației ✓ ? este:

A $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right];$

B $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$

C $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right];$

D $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

596. Știind că x aparține intervalului $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ și $\sin x = -\frac{3}{4}$, care dintre următoarele ✓ ? afirmații sunt adevărate?

A $\sin(x - \pi) = \frac{3}{4};$

C $\sin(2\pi - x) = \frac{3}{4};$

B $\sin(x - \pi) = -\frac{3}{4};$

D $\sin(2\pi + x) = \frac{3}{4}.$

597. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$;

C $\cos(240^\circ) = \frac{1}{2}$;

B $\cos(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D $\cos(240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

598. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\sin \frac{11\pi}{7} > 0$; B $\sin \frac{2\pi}{9} > 0$; C $\sin \frac{5\pi}{8} > 0$; D $\sin \frac{5\pi}{8} < 0$.

599. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\cos(5) > 0$; B $\cos(5) < 0$; C $\cos(\sqrt{8}) > 0$; D $\cos(\sqrt{8}) < 0$.

600. Pentru $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\sin 2x = -\frac{24}{25}$; B $\sin 2x = \frac{24}{25}$; C $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$; D $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

601. Dacă $\cos x = -\frac{1}{5}$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci:

✓ ?

A $\sin x = \frac{\sqrt{24}}{5}$; C $\sin 2x = -\frac{2\sqrt{24}}{25}$;

B $\sin x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$; D $\sin 2x = \frac{2\sqrt{24}}{25}$.

602. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6} = \sqrt{3}$; C $\cos \frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

B $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; D $\cos \frac{13\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

603. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A $\cos 169^\circ < 0$; B $\cos 169^\circ > 0$; C $\cos 220^\circ < 0$; D $\cos 324^\circ > 0$.

604. Care sunt funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea

✓ ?

$$2f(x) + 7f(\pi - x) = 8 \sin x ?$$

A $f(x) = \frac{8}{9} \sin x$;

C $f(x) = -\frac{8}{9} \sin x$;

B $f(x) = \frac{4}{3} \sin x$;

D $f(x) = \frac{4}{3} \cos x$.

605. Care sunt funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea:

✓ ?

$$5f(x) + f(2\pi - x) = 8 \cos x ?$$

A $f(x) = -\frac{2}{3} \cos x;$

C $f(x) = -\frac{4}{3} \cos x;$

B $f(x) = \frac{2}{3} \cos x;$

D $f(x) = \frac{4}{3} \cos x.$

606. Care sunt funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea:

✓ ?

$$f(2\pi + x) + 4f(2\pi - x) = 5 \cos x ?$$

A $f(x) = \cos x;$

C $f(x) = -\frac{1}{5} \cos x;$

B $f(x) = \frac{1}{5} \cos x;$

D $f(x) = \frac{1}{15} \cos x.$

607. Fie $T > 0$ mai mic număr pentru care $\cos(3x) = \cos(3x + T), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci T este:

✓ ?

A $\frac{\pi}{3};$

B $\frac{2\pi}{3};$

C $\pi;$

D $2\pi.$

608. Se consideră expresia $E(x) = \cos x + \sin(2x)$. Atunci cel mai mic număr $T > 0$ pentru care $E(x) = E(x + T), \forall x \in \mathbb{R}$ este:

✓ ?

A $\frac{\pi}{2};$

B $\pi;$

C $2\pi;$

D $4\pi.$

Sume și produse trigonometrice

609. Fie a, b astfel încât $a = b + \frac{\pi}{2}$ și $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Care este rezultatul calculului

✓ ?

$$S = \sum_{k=0}^n \sin(a+k) \cos(b+k) - \sum_{k=0}^n \sin(b+k) \cos(a+k) ?$$

A $0;$

B $\frac{\pi}{2};$

C $n;$

D $n + 1.$

610. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ în intervalul $[0, \pi]$ și se știe că $x_1 > x_2$, atunci valoarea raportului $\frac{x_1}{x_2}$ este:

✓ ?

A $5;$

B $2;$

C $6;$

D $4.$

611. Dacă $S_n = \sin(x) \cos((n-1)x) + \sin(2x) \cos((n-2)x) + \dots + \sin((n-1)x) \cos(x)$, atunci:

✓ ?

A $S_n = \frac{n-1}{2} \sin(nx);$

C $S_n = \frac{n-1}{2} \sin((n-1)x);$

B $S_n = \frac{n}{2} \sin(nx);$

D $S_n = \frac{n-1}{4} \sin(nx).$

612. Valoarea expresiei $\prod_{k=41}^{49} \operatorname{ctg}(k^\circ)$ este: ✓ ?

- A 1; B 0; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

613. Valoarea expresiei $16 \sin(10^\circ) \sin(30^\circ) \sin(50^\circ) \sin(70^\circ)$ este: ✓ ?

- A 1; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{1}{8}$.

614. Care este rezultatul produsului ✓ ?

$$\sin(-100^\circ) \cdot \sin(-99^\circ) \cdot \dots \cdot \sin(99^\circ) \cdot \sin(100^\circ) ?$$

- A 0; C -1;
 B 1; D Nu este definit.

615. Care este rezultatul sumei ✓ ?

$$\operatorname{tg}(1^\circ) + \operatorname{tg}(2^\circ) + \operatorname{tg}(3^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(89^\circ) + \operatorname{tg}(91^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(179^\circ) ?$$

- A 1; B 0; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{8}$.

616. Fie $P = \operatorname{tg}(1^\circ) \cdot \operatorname{tg}(2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3^\circ) \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}(89^\circ)$. Valoarea lui P este: ✓ ?

- A 1; B 0; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{8}$.

617. Care este rezultatul sumei: ✓ ?

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) ?$$

- A $\frac{3}{2}$; B $\frac{3}{4}$; C 0; D 3.

618. Care este rezultatul sumei ✓ ?

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx ?$$

- A $S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ B $S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin x}$

$$\boxed{\text{C}} \quad S = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\boxed{\text{D}} \quad S = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}$$

619. Valoarea expresiei $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 1;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 0;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad 4.$$

620. Valoarea expresiei $S = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 360^\circ$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 1;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 0;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -1.$$

621. Valoarea expresiei $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 2;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 4;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -4.$$

622. Expresia $\cos x + \sin x$ se poate simplifica în forma:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

623. Care este valoarea expresiei

✓ ?

$$\sin^3\left(\frac{x}{3}\right) + 3 \sin^3\left(\frac{x}{9}\right) + 3^2 \sin^3\left(\frac{x}{27}\right) + \dots + 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) ?$$

$$\boxed{\text{A}} \quad \frac{1}{4} \left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right);$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{1}{8} \left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right);$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{1}{4} \left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) - \sin x\right);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \frac{1}{4} \left(3^{(n-1)} \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right).$$

624. Expresia $\cos x - \sqrt{3} \sin x$ se poate simplifica în forma:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\boxed{\text{C}} \quad 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

625. Valoarea expresiei $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \left(\frac{x}{2^n}\right)$ este:

✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{\sin x}{2^{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{\cos x}{2^n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}.$$

626. Valoarea expresiei $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos(2^{n-1}x)$ este: ✓ ?

- A $\frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$; B $\frac{\sin(2^{n-1}x)}{2^n \sin x}$; C $\frac{\sin(2^n x)}{2^{n-1} \sin x}$; D $\frac{\sin(2^{n-1}x)}{2^{n-1} \sin x}$.

627. Numărul soluțiilor ecuației trigonometrice ✓ ?

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16 \sin x}$$

din $[-2\pi, 2\pi]$ este:

- A 8; B 12; C 16; D 32.

628. Fie ecuația $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$. Suma soluțiilor distincte ale ecuației în $[0, \pi]$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{2}$; B π ; C $\frac{3\pi}{2}$; D 2π .

PARTEA

II

Teste

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2024

629. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^{x+1} - 9^x,$$

✓ ?

atunci valoarea expresiei $f(\log_3 4)$ este:

A 4;

B -4;

C -11;

D -3.

630. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 2$, $AD = 1$ și $\widehat{C} = 60^\circ$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $BC = 1$;

B $CD = 1$;

C $AC = \sqrt{3}$;

D $BD = \sqrt{3}$.

631. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2^n} - \sqrt{n})$ este: ✓ ?

A 0;

B 2;

C 1;

D $+\infty$.

632. Fie A o mulțime cu n elemente. Dacă numărul submulțimilor lui A cu 2 elemente este 21, atunci: ✓ ?

A $n \in (2, 6]$;

C $n \in (10, 14]$;

B $n \in (6, 10]$;

D nu există astfel de valori ale lui n .

633. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$4^x - 2^x \cdot 3^{x+1} = 4 \cdot 9^x.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A S are exact două elemente;

C $\frac{2}{1 - \log_2 3} \in S$;

B S are exact un element;

D $\frac{2}{1 + \log_2 3} \in S$.

634. În triunghiul ABC avem $E \in (AB)$, $EB = 3 \cdot EA$, $F \in (AC)$ și $FC = 2 \cdot FA$. Știind că punctele A , E și F au coordonatele $A(1, 3)$, $E(3, 6)$ și $F(4, 18)$, coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt:

A $G\left(\frac{31}{6}, \frac{89}{6}\right)$; B $G\left(\frac{20}{3}, 22\right)$; C $G\left(\frac{61}{18}, \frac{73}{6}\right)$; D $G\left(\frac{50}{9}, 22\right)$.

635. Punctele $D(2, 1)$, $E(-2, 5)$ și $F(1, 4)$ sunt mijloacele laturilor AB , BC respectiv AC în triunghiul ABC . Aria triunghiului ABC este:

A 2; B 4; C 8; D 16.

636. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx$ este:

A $\frac{\pi}{6}$; B $\frac{\pi}{3}$; C $\frac{\pi}{12}$; D $\frac{\pi}{2}$.

637. Se consideră numărul real a , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și punctele $A(0, 1)$ și $B(2, 7)$. Valoarea lui a pentru care dreapta AB este tangentă la graficul lui f în punctul A este:

A 5; B 3; C 0; D -3.

638. În paralelogramul $ABCD$ avem $A(2, 1)$, $B(4, 3)$ și $C(7, 2)$. Ecuația dreptei BD este:

A $x - y - 1 = 0$; B $x + 3y - 13 = 0$; C $x - 5y + 3 = 0$; D $3x + y = 15$.

639. Fie $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ cu $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; C $\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$;
 B $\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$; D $\cos(2\alpha) = \frac{3}{5}$.

640. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura 1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$; C $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 B $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 1$; D $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

641. Numerele întregi b_1, b_2, \dots, b_{10} sunt în progresie geometrică cu rația $q = 2$ și $S = b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A S este divizibil cu 11; C Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr par;
- B Dacă S este pătrat perfect, atunci b_1 este divizibil cu 31; D Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr impar.

642. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații:

✓ ?

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -x - 2y + z = a \\ x + ay + 2z = -2. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul matricii sistemului este 0.
- B Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ sistemul admite soluție unică.
- C Dacă $a = 1$, atunci $x + y + 2z = 1$.
- D Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $x + y + 2z < 0$.

643. În grupul de permutări S_4 considerăm elementele

✓ ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x \in S_4$ este o permutare astfel încât $x\sigma = \tau$, atunci

- A x nu este unic determinat; C $x^2 = \tau$;
- B x este unic determinat; D $x^2 = \sigma$.

644. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = |x|$ și $g(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A Funcția $f + g$ este continuă pe \mathbb{R} . C Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} .
- B Funcția $f + g$ este strict monotonă pe \mathbb{R} . D Funcția $f \cdot g$ este derivabilă în punctul 0.

645. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 8}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al lui f . Dacă $x = -2$ este punct de extrem local al lui f , iar dreapta de ecuație $x = 2$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f , atunci valoarea sumei $a + b$ este:

✓ ?

- A -6 ; B -10 ; C 10 ; D -2 .

646. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru, iar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A Graficul funcției f are asimptotă spre $+\infty$.

- B Dacă $m = 2024$, atunci funcția f are un punct de maxim global.
- C Oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, funcția f are exact două puncte de extrem local.
- D Există $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f să aibă exact un punct de extrem local.

647. Fie \vec{i} și \vec{j} versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = (p+5)\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$ sunt perpendiculari, atunci parametrul $p \in \mathbb{R}$ poate să fie:

- A -10 ; B $-\frac{21}{5}$; C 0 ; D $\frac{29}{5}$.

648. În triunghiul ABC avem $A(1, 0)$, $B\left(5, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ și $\hat{A} = 60^\circ$. Ecuația dreptei AC poate să fie:

- A $3y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$; C $y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$;
- B $3y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$; D $x = 1$.

649. Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ notăm cu $\text{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X . Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

atunci valoarea expresiei $\text{Tr}(A^3) + \det(A^3)$ este

- A -1 ; B 1 ; C 0 ; D 2 .

650. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului

$$f = X^3 + X^2 + 10X + 2,$$

atunci valoarea expresiei $\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}$ este egală cu:

- A 0 ; B $\frac{13}{8}$; C $\frac{13}{7}$; D $-\frac{13}{8}$.

651. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ este:

- A 0 ; B $\frac{2}{3}$; C $\frac{1}{3}$; D $\frac{1}{6}$.

652. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$ este:

✓ ?

$\boxed{A} \ e;$

$\boxed{B} \ \frac{1}{e};$

$\boxed{C} \ \frac{1}{e^2};$

$\boxed{D} \ \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2024

653. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1},$$

atunci valoarea expresiei $f(\log_2 3)$ este

- A -1 ; B 2 ; C 3 ; D 5 .

654. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})$ este:

- A 0 ; B $\frac{1}{2}$; C 2 ; D 1 .

655. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 1$, $AD = 2$ și $\hat{B} = 60^\circ$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $CD = 2$; B $BC = 2$; C $AC = \sqrt{3}$; D $BD = \sqrt{3}$.

656. Fie A o mulțime cu n elemente. Dacă numărul submulțimilor lui A cu $(n-2)$ elemente este 10, atunci

- A $n \in (2, 6]$; C $n \in (10, 14]$;
 B $n \in (6, 10]$; D nu există astfel de valori ale lui n .

657. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$4^x - 2^x \cdot 5^{x+1} = 6 \cdot 25^x.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A S are exact două elemente; C $\frac{1 + \log_2 3}{1 + \log_2 5} \in S$;
 B S are exact un element; D $\frac{1 + \log_2 3}{1 - \log_2 5} \in S$.

658. În triunghiul ABC avem $E \in (AB)$, $EB = 2 \cdot EA$, $F \in (AC)$ și $FA = 3 \cdot FC$. Știind că punctele A , E și F au coordonatele $A(1, 3)$, $E(3, 6)$ și $F(4, 18)$, coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt:

- A $G\left(\frac{13}{3}, \frac{38}{3}\right)$; B $G\left(\frac{23}{9}, 10\right)$; C $G\left(\frac{47}{9}, \frac{70}{3}\right)$; D $G(7, 26)$.

659. În triunghiul ABC punctele $D(1, 5)$, $E(-4, 4)$ și $F(6, 2)$ sunt mijloacele laturilor AB , BC respectiv AC . Aria triunghiului ABC este:

- A 10; B 20; C 40; D 80.

660. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{2}$; C 1; D π .

661. Se consideră numărul real a , funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 1 + x + axe^{-x^2}$ ✓ ? și punctele $A(0, 1)$ și $B(-1, 3)$. Valoarea lui a pentru care dreapta AB este tangentă la graficul lui f în punctul A este:

- A -5; B -3; C 0; D 3.

662. În paralelogramul $ABCD$ avem $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ și $C(5, 3)$. Ecuația dreptei BD ✓ ? este:

- A $2x - y - 1 = 0$; B $x - 2y + 4 = 0$; C $2x + y - 1 = 0$; D $x + 2y + 4 = 0$.

663. Fie $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ cu $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; C $\cos(2\alpha) = -\frac{7}{8}$;
 B $\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$; D $\operatorname{tg}(\alpha) = -\sqrt{15}$.

664. Fie \vec{i} și \vec{j} versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + (p-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt paraleli, atunci parametrul $p \in \mathbb{R}$ poate să fie: ✓ ?

- A $\frac{1}{4}$; B $\frac{7}{4}$; C $\frac{19}{3}$; D 6.

665. Numerele întregi b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 sunt în progresie geometrică cu rația $q = 3$ și $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A S este divizibil cu 11. C Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr par.
 B S este pătrat perfect dacă și numai dacă b_1 este pătrat perfect. D Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr impar.

666. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații: ✓ ?

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y - z = 0 \\ x + ay + z = 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ determinantul matricei sistemului este nenul.
- B Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are cel puțin două soluții.
- C Dacă $a = 1$, atunci $x + y + z = 1$.
- D Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 0$.

667. În grupul de permutări S_4 considerăm elementele

✓ ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x \in S_4$ este o permutare astfel încât $\sigma x = \tau$, atunci

- A x nu este unic determinat; C $x^2 = \sigma$;
- B x este unic determinat; D x^2 este permutarea identică.

668. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ e^{bx} + 2 \sin x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă f este derivabilă pe \mathbb{R} , atunci valoarea sumei $a + b$ este:

- A 1; B 0; C -2; D -1.

669. Fiind dat un număr real a , se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

✓ ?

$f(x) = \frac{x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mulțimea valorilor lui a pentru care f are un punct de extrem local situat la distanța 1 față de axa Oy este:

- A $\{-3, 3\}$; B $\{-3\}$; C $\{3\}$; D mulțimea vidă.

670. Fie $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \int_{-\pi}^x t \sin t \, dt$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $x = 0$ este punct de extrem local pentru f ;
- B f este strict crescătoare pe $[-\pi, \pi]$;
- C f este strict descrescătoare pe $[-\pi, \pi]$;
- D $x = 0$ este punct de inflexiune pentru f .

671. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura 1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{1}{2};$

C $\vec{AB} \cdot \vec{DE} = -\frac{1}{2};$

B $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -\frac{1}{2};$

D $\vec{AB} \cdot \vec{EF} = -\frac{1}{2}.$

672. În pătratul $ABCD$ avem $A(1,0)$ și $B(5,2)$. Ecuația dreptei CD poate să fie: ✓ ?

A $x-2y-11=0;$
 B $x-2y-1=0;$
 C $x-2y+9=0;$
 D $x+2y-1=0.$

673. Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ notăm cu $\text{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X . Dacă ✓ ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

atunci valoarea expresiei $\det(A^2) - \text{Tr}(A^2)$ este

A 21;
 B 22;
 C 23;
 D 24.

674. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului ✓ ?

$$f = X^3 + X^2 + 6X + 2$$

atunci valoarea expresiei $\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$ este egală cu

A 1;
 B 0;
 C $i;$
 D $-i.$

675. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \frac{\cos x}{1 + e^x}$. Aria mulțimii plane cuprinse ✓ ?
între graficul lui f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -\frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{\pi}{2}$ este:

A 0;
 B $\frac{1}{2};$
 C 1;
 D 2.

676. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}{n^n}}$ este: ✓ ?

A $e;$
 B $\frac{4}{e};$
 C $\frac{1}{e};$
 D $\frac{2}{e}.$

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2023

677. Dacă $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$, și $g(x) = 2x + 1$, atunci $g(f(1))$ este egală cu ✓ ?

- A 6; B 7; C 8; D 9.

678. Dacă rădăcinile ecuației de gradul doi cu parametrul $m \in \mathbb{R}$ ✓ ?

$$x^2 - mx + m = 0$$

nu sunt numere reale, atunci

- A $m \in (-\infty, -4]$; C $m \in (0, 4)$;
 B $m \in (-4, 0]$; D nu există astfel de $m \in \mathbb{R}$.

679. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ este: ✓ ?

- A $\frac{1}{2}$; B 1; C 2; D $+\infty$.

680. Vârfulurile triunghiului ABC sunt $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$ și $C(6, -3)$. Mediana care ✓ ?
 aparține vârfului B , are lungimea

- A 4; B $2\sqrt{3}$; C $3\sqrt{2}$; D 5.

681. Considerăm vectorii $\vec{x} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{y} = b\vec{i} + 3\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și vectorii unitari \vec{i} și \vec{j} ✓ ?
 sunt perpendiculari. Care dintre următoarele enunțuri implică coliniaritatea vectorilor \vec{x} și \vec{y} ?

- A $a = 1, b = 6$; C $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$;
 B $a \cdot b = 6$; D $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{b^2 + 9}$.

682. Valoarea expresiei $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ este egală cu: ✓ ?

- A $\sqrt{3}$; B $\sqrt{2}$; C $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; D 2.

683. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $f(-2) = f(2)$; C f este surjectivă;
 B f este injectivă; D $\text{Im} f = [0, \infty)$.

684. Se consideră dreapta $d : x - 2y = 0$ și punctele $M(3, 4)$, $O(0, 0)$. Coordonatele punctului N de pe dreapta d , pentru care triunghiul MNO este dreptunghic în N , pot fi:

- A $N(4, 2)$; B $N(6, 3)$; C $N(5, \frac{5}{2})$; D $N(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$.

Problemele 685. și 686. se referă la funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \cos x + \cos(2x)$.

685. $f(\pi)$ este: ✓ ?

- A -3 ; B -2 ; C 2 ; D 3 .

686. Numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 1$ este: ✓ ?

- A 0 ; B 1 ; C 2 ; D 4 .

687. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$ este: ✓ ?

- A $+\infty$; B $-\frac{1}{4}$; C $\frac{1}{8}$; D $-\frac{1}{8}$.

688. Fie S mulțimea soluțiilor ecuației ✓ ?

$$\bar{z}z^2 = 2 + 2i,$$

unde z este număr complex. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $1 + i \in S$;
 B Dacă $w \in S$, atunci $|w| = \sqrt{2}$;
 C Dacă $w \in S$, atunci $\bar{w} \in S$;
 D Numărul elementelor în S este 2.

689. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + ay + az = 0 \\ x - y + az = 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Sistemul este compatibil pentru orice valoare a lui a ;
 B Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;
 C Există un singur număr a pentru care determinantul matricei sistemului este 0;
 D z ia aceeași valoare pentru orice a pentru care sistemul este compatibil.

690. În triunghiul ascuțitunghic ABC cunoaștem laturile $a = BC = 2$, $b = AC = \sqrt{6}$ și raza cercului circumscris triunghiului $R = \sqrt{2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $A = 45^\circ$; B $B = 30^\circ$; C $B = 60^\circ$; D $C = 75^\circ$.

691. Dreapta care trece prin $C(3, -1)$ și față de care punctele $A(2, 3)$ și $B(6, 1)$ sunt egal depărtate poate avea ecuația: ✓ ?

- A $4x + y - 11 = 0$;
 B $x + 2y - 1 = 0$;
 C $x - 4y = 7$;
 D $3x - y - 10 = 0$.

692. Fie triunghiul ABC și D un punct pe latura BC astfel încât AD să fie bisectoarea unghiului BAC . Dacă laturile triunghiului au lungimile $BC = 4$, $CA = 5$, $AB = 6$, atunci care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$; C $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$;
 B $\overrightarrow{BD} = \frac{6}{5}\overrightarrow{DC}$; D $\overrightarrow{AD} = \frac{6}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{11}\overrightarrow{AC}$.

693. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$ este: ✓ ?

- A $\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}$; B $\ln 2 - \frac{1}{2}$; C $\ln \sqrt{3} - \frac{1}{2}$; D $\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

694. Fie S mulțimea numerelor de patru cifre. Numărul elementelor din S divizibile cu 3 este ✓ ?

- A 2999; B 3000; C 3001; D 3333.

695. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$, se dă operația $x * y = x + y + |x - y|$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A operația "*" este comutativă;
 B $1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$;
 C $x * y \geq 1$ pentru orice $x, y \in G$;
 D operația "*" admite element neutru.

Problemele **696. 697. 698.** și **699.** funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = -x \ln x$.

696. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A f are limită laterală finită în punctul $x_0 = 0$;
 B f este strict crescătoare pe intervalul $(0, 1]$;
 C f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$;
 D f este concavă.

697. Numărul soluțiilor ecuației $f(x) = \frac{1}{3}$ este: ✓ ?

A 3;

B 2;

C 1;

D 0.

698. Dacă d este tangenta la graficul lui f care trece prin punctul $(0, 1)$, iar m este panta $\checkmark ?$ drepte d , care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $m \in [-2, 0]$;

C d trece prin punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

B $m \in (-\infty, -2]$;

D d trece prin punctul $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

699. Cel mai mic număr real a pentru care inegalitatea $f(x) \leq a - x$ are loc oricare ar $\checkmark ?$ fi $x \in (0, \infty)$ este:

A $\frac{1}{e}$;

C 2;

B $\frac{2}{e}$;

D 1.

700. Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\checkmark ?$

$$6 + f(x) = 2f(-x) + 3x^2 \left(\int_{-1}^1 f(t) dt \right) \quad \text{oricare ar fi } x \in [-1, 1].$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$;

C $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$;

B $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$;

D $f(-1) = -6$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2023

701. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 2$, atunci $f(f(1))$ este egală cu: ✓ ?

- A 6; B 7; C 8; D 9.

702. Dacă rădăcinile ecuației de gradul doi cu parametrul $m \in \mathbb{R}$ ✓ ?

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

coincid, atunci

- A $m \in (-\infty, -2)$; C $m \in (2, +\infty)$;
 B $m \in [-2, 2]$; D nu există astfel de $m \in \mathbb{R}$.

703. Panta unei drepte paralele cu dreapta $d: x - 3y + 4 = 0$ este ✓ ?

- A -3; B $-\frac{1}{3}$; C $\frac{1}{3}$; D 3.

704. Considerăm vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = b\vec{i} - 3\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și vectorii unitari \vec{i} și ✓ ?
 \vec{j} sunt perpendiculari. Care dintre următoarele enunțuri implică perpendicularitatea vectorilor \vec{u} și \vec{v} ?

- A $a = -2$, $b = -\frac{3}{2}$; C $3a + b = 0$;
 B $a \cdot b = 3$; D $a = 1$, $b = -3$.

705. Valoarea expresiei $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ este egală cu: ✓ ?

- A $\sqrt{6}$; B $2\sqrt{2}$; C $2\sqrt{3}$; D $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

706. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$ este: ✓ ?

- A $\frac{1}{e}$; B e ; C e^2 ; D e^{-2} .

707. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $f(-1) = f(1)$; C f este surjectivă;
 B f este injectivă; D $\text{Im} f = (-\infty, 0]$.

708. Se știe că aria triunghiului MNP este 10, unde $M(-2, 1)$, $N(2, 5)$, iar punctul P se află pe axa Ox . Coordonatele punctului P pot fi ✓ ?

- A $P(-8, 0)$; B $P(-2, 0)$; C $P(2, 0)$; D $P(8, 0)$.

Problemele **709.** și **710.** se referă la funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

709. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este ✓ ?

- A $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

710. Numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 1$ este ✓ ?

- A 1; B 2; C 3; D 4.

711. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right)$ este: ✓ ?

- A 0; B -1; C 1; D $+\infty$.

712. Fie S mulțimea soluțiilor ecuației ✓ ?

$$x^{\frac{1}{1+\log_4 x}} = 4x^4.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A S are exact un element;
 B S are exact două elemente;
 C Există un singur $a \in S$ astfel încât $a < 1$;
 D Există un singur $a \in S$ astfel încât $a \geq 1$.

713. Dacă $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ astfel încât ✓ ?

$$\begin{cases} X + \hat{2}Y = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{1} \end{pmatrix} \\ \hat{2}X - Y = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{6} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

atunci $\det X \cdot \det Y$ este egal cu

- A $\hat{0}$; B $\hat{1}$; C $\hat{2}$; D $\hat{4}$.

714. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in AB$, $N \in AC$ astfel încât ✓ ?
 $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AC}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Punctele D, N și M sunt coliniare dacă

- A $m = \frac{1}{2}$;
 B $m = \frac{3}{5}$;
 C $m = \frac{2}{3}$;
 D $m = \frac{4}{7}$.

715. Notăm cu \mathcal{C}_t cercul centrat în punctul $M(t, 0)$, care trece prin punctele $A(1, 1)$ și $B(1, -1)$. Raza cercului \mathcal{C}_t se notează cu r_t . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Pentru $t = 0$ avem $r_t = \sqrt{2}$.
 B Pentru orice $t \in (0, 4)$, avem $r_t \in (\sqrt{2}, \sqrt{10})$.
 C Există t astfel încât $r_t = \frac{1}{2}$.
 D Pentru $t = 2$ triunghiul AMB este dreptunghic.

716. În triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 45^\circ$, $AB = c$, $AC = \frac{2\sqrt{2}c}{3}$ și $BC = a$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\sin B = \frac{2c}{3a}$;
 B $\cos B = \frac{c}{3a}$;
 C $\operatorname{tg} B = 2$;
 D $\operatorname{tg} B = \sqrt{2}$.

717. Valoarea integralei $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ este:

- A 1;
 B 2;
 C -1;
 D -2.

718. Dacă S este mulțimea numerelor pare de patru cifre, atunci numărul elementelor din S este

- A 4500;
 B 4499;
 C 4501;
 D 5000.

719. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se dă operația $x * y = \frac{|x-y|}{x+y}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A operația "*" este comutativă;
 B $1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$;
 C $x * y < 1$ pentru orice $x, y \in G$;
 D operația "*" admite element neutru.

Problemele **720. 721. 722.** și **723.** se referă la funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

720. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A f este continuă în punctul $x_0 = 0$;
 B f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$;
 C f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$;
 D f este strict crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

721. Numărul punctelor de extrem local ale lui f este:

✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D 3.

722. Numărul punctelor de inflexiune ale graficului lui f este:

✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D 3.

723. Dacă d este tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă e , iar m este panta dreptei d , care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $m = 4e$; C $m = 2e$;
 B d intersectează axa Ox în punctul de abscisă $\frac{3e}{4}$; D d intersectează axa Oy în punctul de ordonată $-4e^2$.

724. Valoarea integralei $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x + \frac{\pi}{3})} dx$ este:

✓ ?

- A $\frac{\pi}{6}$; B $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \sqrt{3}$; C $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 3$; D $\frac{\pi}{3}$.

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2022

725. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 3n + 2} \right)^{n/3}$ este: ✓ ?

- A e^2 ; B $e - 2$; C $\frac{1}{e}$; D e^{-2} .

726. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{arctg} x}{x^2}$ este: ✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $\frac{3}{2}$.

727. Ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} + 2x + 1$ în punctul de abscisă $x = 0$ este: ✓ ?

- A $5x - y + 2 = 0$; B $5x + y - 2 = 0$; C $x - 5y + 2 = 0$; D $x + 5y - 2 = 0$.

728. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1, -1)$. Ecuația dreptei ce trece prin punctul M și are panta 3 este: ✓ ?

- A $3x - y + 4 = 0$; C $3x + y + 4 = 0$;
 B $3x - y - 4 = 0$; D $-3x + y - 4 = 0$.

729. Dacă măsura unghiului A este cuprinsă între 540° și 720° , iar $\cos A = -\frac{7}{25}$, atunci care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A $\sin \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$; B $\cos \frac{A}{2} = \frac{3}{5}$; C $\sin \frac{A}{2} = \frac{4}{5}$; D $\cos \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$.

730. Considerăm vectorii $\vec{u} = \vec{i} - (a+2)\vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - 3\vec{j}$, unde \vec{i} și \vec{j} sunt versorii axelor de coordonate Ox respectiv Oy în sistemul cartezian xOy . Dacă vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari, atunci valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ poate fi: ✓ ?

- A $a = -3$; B $a = 1$; C $a = -1$; D $a = 3$.

731. Suma coeficienților puterilor impare ale lui x din dezvoltarea binomului $(1+x)^{1011}$ este: ✓ ?

- A 2^{2022} ; B 2^{505} ; C 2^{1010} ; D 2^{1011} .

732. Dacă $1 + 5 + 9 + \dots + x = 496$, unde termenii care se însumează în membrul stâng sunt în progresie aritmetică, atunci: ✓ ?

A $x = 21$; B $x = 41$; C $x = 61$; D $x = 81$.

733. Numărul complex $(1 - i)^{2022}$ este egal cu: ✓ ?

A 2^{1011} ; B -2^{1011} ; C $-2^{1011}i$; D $2^{1011}i$.

734. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} dx$ este ✓ ?

A 0; B $\frac{\pi}{2}$; C $\ln(1 + \sqrt{2})$; D $1 + \sqrt{2}$.

735. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, are ca asimptotă spre ✓ ?
 $+\infty$ dreapta de ecuație

A $y = -1$; B $y = 2x + 1$; C $y = 0$; D $y = 2x + 2$.

736. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}})$ este: ✓ ?

A 1; B e; C $\frac{1}{e}$; D $e - 1$.

737. Fie $ABCD$ un paralelogram. Considerăm punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ✓ ?
și $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. Care dintre următoarele relații sunt adevărate?

A $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{CE}$; B $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{CE}$; C $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$; D $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$.

738. Fie ABC un triunghi oarecare cu proprietatea că $a > b > c$, unde am notat $BC = a$, ✓ ?
 $CA = b$, $AB = c$.

Care dintre următoarele relații sunt adevărate?

A $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{a + b}$; C $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$;
 B $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$; D $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{c}$.

739. Într-un triunghi ABC știm că măsurile unghiurilor \hat{A} , \hat{B} și \hat{C} (în această ordine), ✓ ?
sunt în progresie aritmetică, iar, dacă notăm cu a, b, c lungimile laturilor opuse acestor
unghiuri, avem $3a^2 = 2b^2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\hat{A} = 45^\circ$; B $\hat{C} = 75^\circ$; C $\hat{C} = 45^\circ$; D $\hat{A} = 60^\circ$.

740. Fie în \mathbb{R} ecuația $2\sqrt[3]{(x^2 + a)^2} - 3\sqrt[3]{x^2 + a} - 2 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre ✓ ?
următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $a = 8$, atunci $x = 0$ este o soluție a ecuației;
- B Ecuația are soluții pentru orice $a \leq -\frac{1}{8}$;
- C Ecuația are soluții pentru orice $a \geq -8$;
- D Ecuația are soluții pentru orice $a \leq 8$.

741. Fie sistemul de ecuații:

✓ ?

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ -4x + y = 3, \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a > 0$;
- B Când sistemul este compatibil determinat, soluția sa nu depinde de a ;
- C Există o valoare a pentru care sistemul este compatibil nedeterminat;
- D Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil.

742. Un grup de 11 copii vrea să joace fotbal. Pentru aceasta, copiii aleg un arbitru ✓ ?
dintre ei, apoi dintre ceilalți formează 2 echipe denumite X și Y , fiecare având câte 5
jucători. În câte moduri pot face acest lucru?

- A 462; B 2310; C 2772; D 5082.

743. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru, iar $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = x^2 -$ ✓ ?
 $2 \ln x + m$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Funcția f are exact un punct de maxim global.
- B Dacă $m = -2022$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții reale.
- C Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f este injectivă.
- D Există $m \in \mathbb{R}$ minim cu proprietatea că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

744. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = ax^3 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se știe că ✓ ?
tabelul de variație al lui f este cel prezentat mai jos.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	10
		\searrow	\searrow	2
		\nearrow	\nearrow	$+\infty$

✓ ?

Atunci valoarea sumei $|a| + |b| + |c|$ este

- A 11; B 13; C 20; D 14.

745. Valoarea limitei $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 - \sqrt{t}) dt}{x^3}$ este: ✓ ?

- A 0; B $-\frac{1}{3}$; C $-\frac{2}{3}$; D $-\infty$.

746. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar a și b două numere reale astfel încât $\overrightarrow{AD} = \checkmark ?$
 $a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$. Atunci numărul $b - 2a$ este egal cu:

- A -3 ; B 3 ; C -1 ; D 1 .

747. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile $A(1, 3)$, $B(-1, -5)$ și $C(2, 1)$. Fie D punctul situat pe segmentul BC astfel încât $\frac{BD}{DC} = 2$. Notăm cu d distanța de la punctul D la înălțimea din vârful B al triunghiului ABC . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Coordonatele punctului D sunt $(1, -1)$;
 B Coordonatele punctului D sunt $(0, -3)$;
 C $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$;
 D $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

748. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Știind că $x = 2$ este o soluție a ecuației $f(x) = 0$, care dintre numerele următoare sunt de asemenea soluții ale acestei ecuații?

- A $-1 - \sqrt{11}$; B $-1 + \sqrt{11}$; C $1 - \sqrt{13}$; D $1 + \sqrt{13}$.

749. Considerăm în \mathbb{R} ecuația

$$\left[\frac{x+2}{3} \right] = \frac{x+1}{4},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor acestei ecuații, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $S = [-9, 3]$; C $S = [-5, 3]$;
 B $S = \{-9, -5, -1, 3\}$; D $S = \{-5, -1, 3\}$.

750. Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi definim legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$.

Știind că legea este asociativă, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $(1 * 2) * 4 = 8$;

- B Operația admite element neutru;
- C Există exact două elemente simetrizabile în $(\mathbb{Z}, *)$;
- D $(\mathbb{Z}, *)$ este grup.

751. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim operațiile: $x \perp y = x + y - 1$, $x * y = x + y - xy$. Știind că $(\mathbb{R}, \perp, *)$ este corp și funcția $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, \perp, *)$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism de corpuri, unde $a, b \in \mathbb{R}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $a = b = 1$; B $a = -1, b = 1$; C $a = 1, b = -1$; D $a = 0, b = 1$.

752. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton; C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0$;
- B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

753. Într-un paralelogram lungimile laturilor sunt egale cu 5, respectiv 3, iar produsul diagonalelor este 32. Notăm cu α măsura unghiului ascuțit al paralelogramului. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 68.
- B $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{15}$.
- C Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 34.
- D $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{20}$.

754. Considerăm dreapta (d) $ax + by + c = 0$ ($abc \neq 0$) și punctele

$$M_1 \left(\frac{b-c}{a}, 0 \right), M_2 \left(-\frac{b+c}{a}, 0 \right), N \left(0, -\frac{c}{b} \right).$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Punctul de intersecție al dreptei d cu axa Ox este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$;
- B Dreapta d este paralelă cu axa Ox ;
- C Punctul de intersecție al dreptei d cu axa Oy este N ;
- D Aria triunghiului M_1M_2N este $\left| \frac{c}{a} \right|$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2022

755. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 2}{2n^2 + 3n + 1} \right)^{n+2}$ este: ✓ ?

- A e; B $e - 1$; C $\frac{1}{e}$; D e^{-2} .

756. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ este: ✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $\frac{3}{2}$.

757. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x + 1)e^x$ și punctul $P(0, f(0))$. Notăm cu d dreapta tangentă la graficul lui f în punctul P . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A d are ecuația $y = 2x + 1$; C d are ecuația $y = 2x - 1$;
 B d conține punctul $Q(3, 7)$; D d conține punctul $S(-3, -4)$.

758. În trapezul $ABCD$ avem $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$, $AB \parallel CD$ și AC perpendicular pe BD . Care dintre următoarele relații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$; B $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$; C $\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$; D $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

759. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1, 1)$. Ecuația dreptei ce trece prin punctul M și are panta 2 este: ✓ ?

- A $2x - y - 1 = 0$; B $2x + y - 1 = 0$; C $2x + y + 1 = 0$; D $2x - y + 1 = 0$.

760. Dacă măsura unghiului A este cuprinsă între 450° și 540° , iar $\cos A = -\frac{7}{25}$, atunci care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A $\sin \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$; B $\cos \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$; C $\sin \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$; D $\cos \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$.

761. Partea imaginară a numărului $(1 + i)^{2022}$ este egală cu: ✓ ?

- A 0; B 2^{1011} ; C -2^{1011} ; D 2^{2022} .

762. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației ✓ ?

$$\log_9(5x + 3) > \frac{1}{2} \log_3(x - 1)$$

este:

- A $(-1, +\infty)$; B $(-\frac{3}{5}, +\infty)$; C $(1, +\infty)$; D $(2, +\infty)$.

763. Suma primilor 8 termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 64, în timp ce suma primilor 19 termeni este egală cu 361. Care dintre următoarele afirmații este adevărată? ✓ ?

- A rația este 2; C rația este 4;
 B primul termen este 1; D primul termen este -8 .

764. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{2}$; C $\ln 2$; D $\ln(1 + \sqrt{2})$.

765. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$, are ca asimptotă spre $+\infty$ dreapta de ecuație ✓ ?

- A $y = -2$; B $y = 2x - 1$; C $y = -1$; D $y = 2x + 1$.

766. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (e^{\frac{1}{n}} + 2^2 e^{\frac{2}{n}} + \dots + n^2 e^{\frac{n}{n}})$ este ✓ ?

- A 1; B $e - 2$; C e^2 ; D $e - 1$.

767. Considerăm vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$, unde \vec{i} și \vec{j} sunt versorii axelor de coordonate Ox respectiv Oy în sistemul cartezian xOy . Dacă vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari, atunci valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ poate fi: ✓ ?

- A $a = -2$; B $a = 1$; C $a = -1$; D $a = 2$.

768. Care dintre următoarele relații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$; C $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$;
 B $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$; D $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$.

769. Dacă în triunghiul ascuțitunghic ABC are loc relația $BC = 2AC \sin \frac{A}{2}$, atunci: ✓ ?

- A $AB = \frac{AC}{2}$; B $AB = AC$; C $AB = \sqrt{2}AC$; D $AB = 2AC$.

770. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D -1.

771. Fie sistemul de ecuații:

✓ ?

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 & x & - & z = 5 - 3x - y + az = -9 \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a < 0$;
 B Când sistemul este compatibil determinat, soluția sa depinde de a ;
 C Există o valoare a pentru care sistemul este compatibil nedeterminat;
 D Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil.

772. În câte moduri pot fi așezate 5 persoane într-o mașină cu 7 locuri, dacă numai 3 dintre ele au permis de conducere și la volan este așezată o persoană cu permis?

✓ ?

- A 120; B 1080; C 2520; D 5040.

773. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = |x|(e^x - 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A Funcția f nu este derivabilă în 0; C Funcția f este injectivă;
 B Funcția f este continuă în 0; D Funcția f este surjectivă.

774. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se știe că tabelul de variație al lui f este cel prezentat mai jos.

✓ ?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-5	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	7	\nearrow	$+\infty$

✓ ?

Atunci valoarea sumei $|a| + |b| + |c|$ este

- A 7; B 5; C 10; D 8.

775. Valoarea limitei $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$ este:

✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{2}{3}$; D $+\infty$.

776. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 4)$, $B(7, 0)$ și $C(-1, -8)$. Fie D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A în triunghiul ABC . Atunci suma dintre abscisa și ordonata punctului D este:

✓ ?

A $\frac{36}{17}$;

B 2;

C $\frac{23}{9}$;

D $\frac{32}{19}$.

777. În paralelogramul $ABCD$ notăm $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$, $m(\widehat{DAB}) = \alpha$. Dacă $\alpha \neq 90^\circ$, atunci care dintre următoarele relații sunt adevărate?

A $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$;

C $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2$;

B $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$;

D $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

778. Fie $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $x_{n+1} < x_n$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

B $\frac{\sqrt{2}}{2} < x_n < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

C $x_2 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$;

D $2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

779. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ -2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Știind că $x = -2$ este o soluție a ecuației $f(x) = 0$, care dintre numerele următoare sunt de asemenea soluții ale acestei ecuații?

A $1 - \sqrt{5}$;

B $1 + \sqrt{5}$;

C $1 - \sqrt{7}$;

D $1 + \sqrt{7}$.

780. Considerăm în \mathbb{R} ecuația

$$\left[\frac{x+1}{2} \right] = \frac{x+1}{3},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor acestei ecuații, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $S = (-3, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$;

C $S = [-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2]$;

B $S = \{-1, 2\}$;

D $S = \{-4, -1, 2\}$.

781. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$. Știind că legea este asociativă, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $1 * (2 * 3) = 2$;

B Submulțimea $[0, +\infty)$ este parte stabilă în raport cu $*$;

C există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

D $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

782. Considerăm inelul $(R, +, \cdot)$, unde $R = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $(R, +, \cdot)$ are cel puțin 3 elemente inversabile;

B Suma elementelor inversabile ale lui $(R, +, \cdot)$ este 0;

C $(R, +, \cdot)$ are cel puțin un element inversabil care nu este număr real;

D $(R, +, \cdot)$ este un corp.

783. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$;

C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = +\infty$;

B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$;

D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n > 2$.

784. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{C}) = 90^\circ$) iar a, b și c lungimile catetelor și respectiv a ipotenuzei acestui triunghi. Considerăm, de asemenea, punctele $E(-1, 0)$, $F(1, 0)$, $M\left(\frac{b-c}{a}, 0\right)$ și dreapta (d) $ax + by + c = 0$. Notăm prin $\text{dist}(X, d)$ distanța de la punctul oarecare X la dreapta d . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Punctele $E(-1, 0)$, $F(1, 0)$ aparțin dreptei d ;

B $\text{dist}(M, d) = \frac{b}{c}$;

C Punctul $M\left(\frac{b-c}{a}, 0\right)$ aparține dreptei d ;

D $\text{dist}(E, d) \cdot \text{dist}(F, d) = \frac{b^2}{c^2}$.

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2021

785. Fie ecuația $x^2 + ax + 3 = 0$ cu soluțiile pozitive x_1 și x_2 astfel încât $x_1^2, x_2, 1$ sunt $\checkmark ?$ în progresie geometrică (în această ordine). Atunci valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ poate fi:

- A $2\sqrt{3}$; B $-2\sqrt{3}$; C $\sqrt{3}$; D $-\sqrt{3}$.

786. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ șirul de termen general $x_n = \frac{1}{4^n} C_{2n}^n$. Să se indice care dintre afirmațiile $\checkmark ?$ următoare sunt adevărate.

- A Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
 B Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.
 C Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.
 D Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

787. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}}$ este: $\checkmark ?$

- A 1; B e^2 ; C $\frac{1}{e^2}$; D 0.

788. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x + e^{-x} - 2}$ este: $\checkmark ?$

- A 1; B 2; C $\frac{1}{2}$; D 0.

789. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde vectorii unitari \vec{i} și \vec{j} sunt $\checkmark ?$ perpendiculari. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Pentru $a = -1$ și $b = -6$ vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari.
 B Vectorii \vec{u} și \vec{v} au aceeași lungime doar dacă $a = 2$ și $b = 3$.
 C Există o infinitate de numere reale a, b pentru care vectorii \vec{u} și \vec{v} au aceeași lungime.
 D Vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt perpendiculari, dacă $2a = 3b$.

790. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Notăm $\vec{AB} = \vec{u}$ și $\vec{AE} = \vec{v}$. Să se indice care $\checkmark ?$ dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \vec{v}$. C $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$.
 B $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. D $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

791. Dacă S este mulțimea soluțiilor ecuației $\frac{2 \lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1$, atunci: $\checkmark ?$

- A $S \subseteq [-2, 0]$; B $S \subseteq [-2, 1]$; C $S \subseteq [0, 1]$; D $S \subseteq [-2, -1]$.

792. Considerăm în \mathbb{R} ecuația

✓ ?

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este:

- A $S = [3, 12]$; B $S = [1, \infty)$; C $S = [5, 10]$; D $S = \{4, 11\}$.

793. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulțime \mathcal{M} formată din n puncte distincte diferite de O . Numărul tuturor triunghiurilor care au două vârfuri în mulțimea \mathcal{M} și un vârf în punctul O este:

- A A_n^2 ; B 2^n ; C C_{n+1}^3 ; D cel mult C_n^2 .

794. Considerăm sistemul de ecuații

✓ ?

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a+1)z = 1, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Există mai multe valori ale lui a pentru care determinantul sistemului este 0.
 B Există o singură valoare a lui a pentru care sistemul este compatibil.
 C Există mai multe valori ale lui a pentru care sistemul este compatibil.
 D Dacă sistemul este compatibil, atunci admite o unică soluție.

795. Dacă $\sin x = a$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci:

✓ ?

- A $\sin 2x = 2a$; C $\sin 2x = -2a\sqrt{1-a^2}$;
 B $\sin 2x = 2a\sqrt{1-a^2}$; D $\cos 2x = 1 - 2a^2$.

796. Dacă $A(-2, -1)$, $B(2, 1)$ și $C(-1, 2)$ sunt puncte într-un sistem de coordonate carteziane, atunci triunghiul ABC este:

- A obtuzunghic; B isoscel; C dreptunghic; D echilateral.

797. Într-un reper cartezian se consideră dreptele

✓ ?

$$d_1 : (m-1)x + (3m-7)y - 5 = 0 \text{ și } d_2 : (m-2)x + (2m-5)y = 0,$$

unde m este un parametru real. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Dreptele sunt paralele pentru $m = 3$.
- B Există o valoare a parametrului m pentru care dreptele coincid.
- C Dreptele sunt perpendiculare pentru o singură valoare a lui m .
- D Dreptele nu sunt perpendiculare pentru nicio valoare a lui m .

798. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$ și $H(3, 2)$, unde H este ? ortocentrul triunghiului ABC . Panta dreptei BC este egală cu:

- A 3; B -3 ; C $\frac{1}{3}$; D $-\frac{1}{3}$.

799. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$. Ecuația asimptotei ? oblice spre $+\infty$ la graficul lui f este:

- A $y = x$; B $y = x + 1$; C $y = x + 2$; D $y = x + 3$.

800. Fie $a \in \mathbb{R}$ și fie funcția $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x + a}{\sqrt{1 - x^2}}$. Valoarea ? lui a pentru care tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă 0 trece prin punctul $(-2, 5)$ este:

- A 9; B 7; C -5 ; D 5.

801. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 - \cos 2x} dx$ este: ?

- A $\ln 2$; B $\frac{1}{4} \ln 2$; C $\frac{1}{2} \ln 2$; D $\frac{1}{2}$.

802. Valoarea integralei $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ este: ?

- A 4; B $4e$; C $8e - 4$; D $2e + 2$.

803. În corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sistemul de ecuații ?

$$\begin{cases} x + \widehat{2}y = \widehat{3} \\ \widehat{2}x + \widehat{4}y = \widehat{2} \end{cases}$$

- A nu are soluții; C are exact cinci soluții distincte;
- B are soluție unică; D are exact zece soluții distincte.

804. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, unde $[x]$ reprezintă partea ? întregă a numărului real x . Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații.

- A Graficul funcției f intersectează axa Oy în cel puțin 2 puncte.

- B Graficul funcției f nu intersectează axa Ox .
- C Graficul funcției f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte.
- D Graficul funcției f nu intersectează axa Oy .

805. Considerăm ecuația matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

- A Ecuația are soluție unică.
- B Ecuația are exact două soluții.
- C Ecuația are mai mult de două soluții.
- D Suma tuturor soluțiilor ecuației este O_2 .

806. Punctele $A(0, 2)$, $B(2, 1)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$ și $G(2, 0)$ este $\checkmark ?$ centrul de greutate al triunghiului ABD . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Aria triunghiului ABD este egală cu 3.
- B Aria triunghiului ABD este egală cu 6.
- C Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 6.
- D Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 12.

807. Numerele reale a și b satisfac egalitatea $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = \checkmark ?$ $2 \cos^2 \frac{a-b}{2}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $a - b \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- B $a - b \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- C $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- D $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

808. Folosind notațiile obișnuite în triunghiul ABC avem $b = 5$, $c = 7$ și $m(\widehat{B}) = 45^\circ$. $\checkmark ?$ Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Există un singur triunghi ABC cu aceste date;
- B Există două triunghiuri ABC cu aceste date;
- C $\sin A \in \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$;
- D $a \in \{2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$.

809. Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \checkmark ?$ $\ln(1+x^2) - mx$ este crescătoare pe \mathbb{R} este:

- A $(0, \infty)$;
- B $(-\infty, -1]$;
- C $[-1, 1]$;
- D $[-1, \infty)$.

810. Pentru o matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ notăm $\text{tr}(X) = x + t$, suma elementelor de pe $\checkmark ?$ diagonala principală a lui X . Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)}$ este egală cu:

- A 0; B 2; C 1; D $+\infty$.

811. Fie a un parametru real și considerăm legea de compoziție

✓ ?

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

pe \mathbb{R} . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $*$ admite element neutru, atunci a este unic determinat; C Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = \frac{1}{a}$;
- B Există mai multe valori ale lui a pentru care $*$ admite element neutru; D Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = -\frac{1}{a}$.

812. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

✓ ?

- A $f'(0) = f''(0) = 0$;
- B 0 nu este punct de extrem local al funcției f ;
- C Funcția f' este strict monotonă;
- D 0 este punct de extrem global al funcției f'' .

813. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

✓ ?

- A $I_{n+1} + (n+1)I_n = e, \forall n \in \mathbb{N}^*$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$;
- B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 1$.

814. Diagonalele unui pătrat \mathcal{P}_α de latură α se află pe axele de coordonate ale unui sistem de coordonate carteziane ($\alpha \in (0, \infty)$). Fie N_α numărul de puncte din interiorul pătratului \mathcal{P}_α având coordonate numere întregi. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

✓ ?

- A Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 5$; C Există α astfel încât $N_\alpha = 41$;
- B Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 13$; D Există α astfel încât $N_\alpha = 67$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2021

815. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(3, 2)$. Ecuația dreptei OG , unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC , este: ✓ ?

- A $y = -2x$; B $y = -\frac{x}{2}$; C $y = 2x$; D $y = \frac{x}{2}$.

816. Relativ la un reper cartezian considerăm vectorul $\vec{v}_t(t, t^2)$ cu $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A Pentru $t = 2$ vectorul \vec{v} este perpendicular pe vectorul $\vec{a}(-1, \frac{1}{2})$;
 B Există t astfel încât \vec{v} să fie coliniar cu vectorul $\vec{b}(17, 19)$;
 C Există t astfel încât \vec{v} să fie coliniar cu vectorul $\vec{c}(-1, -1)$;
 D Există t astfel încât \vec{v} să fie coliniar cu vectorul $\vec{d}(0, 1)$.

817. Dacă $(-4, 0)$ și $(1, -1)$ sunt două vârfuri ale unui triunghi de arie 4, atunci cel de-al treilea vârf se poate afla pe dreapta: ✓ ?

- A $x + 5y = 0$; B $x + 5y + 8 = 0$; C $x + 5y - 4 = 0$; D $x + 5y + 12 = 0$.

818. Dacă dreapta de ecuație $ax + cy - 2b = 0$, cu $a, b, c > 0$, formează un triunghi de arie 2 cu axele de coordonate, atunci: ✓ ?

- A a, b, c sunt în progresie geometrică; C $a, 2b, c$ sunt în progresie geometrică;
 B $a, -b, c$ sunt în progresie geometrică; D $a, -2b, c$ sunt în progresie geometrică.

819. Considerăm funcția ✓ ?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2}x - 3 \right|, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Folosind eventual graficul funcției, stabiliți care din următoarele afirmații sunt adevărate.

- A f este surjectivă, dar nu este injectivă;
 B f este bijectivă;
 C f este injectivă, dar nu este surjectivă;
 D f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

820. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (2m + 1)x + m + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valoarea lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pentru care vârful parabolei asociate funcției f_m se găsește pe dreapta de ecuație $2x + 3y + 6 = 0$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{16}$;

B $-\frac{1}{32}$;

C $-\frac{1}{24}$;

D $-\frac{5}{32}$.

821. Considerăm sistemul de ecuații

✓ ?

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + z = 4, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

 A Determinantul sistemului nu depinde de parametrul a ;

 B Pentru $a < 0$ sistemul este compatibil determinat;

 C Pentru $a = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat;

 D Pentru $a = 1$ sistemul este incompatibil.

822. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

 A Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = O_2$.

 C Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = A$.

 B Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = I_2$.

 D Există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = (bbb)$.

823. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ șirul de termen general $x_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

 A Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

 C $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.

 B $0 < x_n < 1$ pentru orice $n \geq 1$.

 D $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

824. Fiind dat $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$ este ✓ ?

 A e^{-2a} ;

 B 1;

 C e^{2a} ;

 D ∞ .

825. Fie $L = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a xe^{-x} dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ?

 A $L = \infty$.

 B $L = 1$.

 C $L < e$.

 D L nu există.

826. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Valorile parametrilor reali a și b pentru care f este derivabilă pe \mathbb{R} sunt:

A $a = 3, b = 1.$

C $a = -3, b = -1.$

B $a = -3, b = 1.$

D $a = 1, b = 3.$

827. Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv cercului circumscris, unui triunghi care are lungimile laturilor 3, 4 și 5, atunci raportul $\frac{r}{R}$ este: ✓ ?

A $\frac{2}{5};$

B $\frac{5}{2};$

C $\frac{4}{5};$

D $\frac{1}{5}.$

828. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât M este mijlocul laturii AB , $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Valoarea parametrului real k , pentru care $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ este: ✓ ?

A $\frac{3}{2};$

B $\frac{1}{3};$

C $\frac{1}{2};$

D $\frac{2}{3}.$

829. Considerăm în \mathbb{R} ecuația

$$\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este:

A $S = \{0\};$

C $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\};$

B $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\};$

D $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}.$

830. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + x + 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 7}$ este: ✓ ?

A 12;

B -12;

C 2;

D -2.

831. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + |x^3 - x^2| + \max\{x^3, x^4\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$ oricare ar fi $x \in (-\infty, 0).$

C Funcția f nu este derivabilă în 0.

B $f(x) = x^2 - x$ oricare ar fi $x \in [0, 1].$

D Tangenta la graficul lui f în punctul $O(0, 0)$ este prima bisectoare.

832. Se consideră mulțimea

$$A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{funcția } f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 10x^2 + 2021 \text{ este strict crescătoare}\}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $A = \emptyset$.

C Mulțimea A are un cel mai mic element.

B $[3, \infty) \subseteq A$.

D $2 \notin A$.

833. Mulțimea valorilor parametrului real a pentru care ecuația $x^2(1 - \ln x) = a$ are două soluții reale distincte este: ✓ ?

A (\sqrt{e}, e) ;

B $(-\infty, \frac{e}{2})$;

C $(0, \frac{e}{2})$;

D $[0, \frac{e}{2}]$.

834. Dacă $\cos x = -\frac{7}{25}$ și $x \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, atunci: ✓ ?

A $\cos \frac{x}{2} = \frac{3}{5}$;

B $\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$;

C $\cos \frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$;

D $\cos \frac{x}{2} = -\frac{4}{5}$.

835. Folosind notațiile obișnuite în triunghiul ABC avem $a = 13$, $b = 1$ și $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{2}{3}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $c = 4\sqrt{10}$.

C $\sin C = \frac{12}{13}$.

D $\text{Aria}(ABC) = 6$.

B $c = 6\sqrt{5}$.

$\text{Aria}(ABC) =$

836. Dacă a este un parametru și ecuația $\cos 2x + a \sin x - 2a + 7 = 0$ are soluții, atunci: ✓ ?

A $0 < a \leq 5$;

B $2 \leq a \leq 6$;

C pentru $a = 5$ mulțimea soluțiilor este $S = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D pentru $a = 5$ mulțimea soluțiilor este $S = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

837. Fie $\alpha \neq 1$ o rădăcină a ecuației $z^3 = 1$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A $|\alpha| = 1$.

C $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$.

B $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.

D Numărul $-\alpha$ este rădăcină a ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

838. În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ecuația $x^2 + \widehat{4}x + \widehat{3} = \widehat{0}$

A nu are soluții;

C are exact două soluții distincte;

B nu are soluție unică;

D are exact patru soluții distincte.

839. Considerăm expresia

$$x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 4}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A * este lege de compoziție pe \mathbb{R} ; C $3 * (3 * 3) = \frac{18}{5}$;
 B * este lege de compoziție pe $(2, +\infty)$; D $x * 4 = x$ pentru orice $x > 3$.

840. Valoarea integralei $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 2x)} dx$ este: ✓ ?

A 0. B $\frac{4}{3}$. C $\frac{2}{3}$. D $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

841. Fie funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x - 1 - \ln(1 + x)$ și fie $a, b \in (-1, \infty)$ cu $a < b$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A Funcția f are un singur punct de minim global; C $\int_a^b (1 + \ln(1 + x)) dx < \int_a^b e^x dx$;
 B Funcția f este injectivă; D Funcția f are cel puțin un punct de maxim global.

842. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-6, 2)$, $B(4, -3)$, $M(\alpha, 0)$ și $N(0, \beta)$. Dacă suma $AM + MB + BN + NA$ este minimă, atunci: ✓ ?

- A $MN = 0$; B $MN = 1$; C $MN = \sqrt{2}$; D $MN = \sqrt{5}$.

843. Fie $A = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$. Câte sume egale cu 5044 se pot forma cu elementele mulțimii A (sumele neconținând repetiții de elemente)? ✓ ?

- A 3; B 4; C 5; D 6.

844. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$.
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2024

845. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 1$, $AD = 2$ și $m(\widehat{B}) = 60^\circ$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1$; B $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1$; C $\vec{BA} \cdot \vec{AD} = -1$; D $\vec{BA} \cdot \vec{CD} = 1$.

846. Dacă punctele $A(1, 2)$ și $B(4, 6)$ sunt vârfurile dreptunghiului $ABCD$, atunci ecuația dreptei AD este: ✓ ?

- A $4x + 3y - 11 = 0$; C $4x - 3y + 2 = 0$;
 B $3x + 4y - 11 = 0$; D $4x + 3y + 2 = 0$.

847. Fie \vec{i} și \vec{j} versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + b\vec{j}$ și $\vec{v} = (b+4)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari, atunci valoarea parametrului $b \in \mathbb{R}$ este: ✓ ?

- A -2 ; B -1 ; C 1 ; D 2 .

848. Dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface relația $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma elementelor lui X este: ✓ ?

- A -2 ; B 0 ; C 2 ; D 4 .

849. Considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + az = a \\ 3x + 2y + z = 2, \end{cases}$$

unde a este un parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;
- B Sistemul este compatibil pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
- C Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{7}{8}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{8}$;
- D Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$.

850. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ este: ✓ ?

- A \sqrt{e} ;
- B 1;
- C e;
- D e^2 .

851. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ ae^{-x} + be^x + cx(e^x - e^{-x}), & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ e^{2-x}, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Dacă f este continuă pe \mathbb{R} , atunci valoarea sumei $a + 2b + c$ este:

- A 0;
- B 2;
- C 1;
- D $\frac{1}{2}$.

852. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ cu $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
- B $\sin(2x) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$;
- C $\cos(2x) = \frac{7}{9}$;
- D $\text{tg}(x) = -2\sqrt{2}$.

853. În triunghiul ABC avem $D \in (AB)$, $DB = 2 \cdot AD$, $E \in (AC)$ și $AC = 3 \cdot EC$. Dacă punctele A, D și E au coordonatele $A(0, 6)$, $D(4, 4)$ și $E(-4, 2)$, atunci coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt: ✓ ?

- A $G(2, 2)$;
- B $G\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$;
- C $G(0, 0)$;
- D $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

854. Numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}, a_{99}, a_{100}$ sunt în progresie aritmetică și ✓ ?

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{96} + a_{98} + a_{100} = 200.$$

Notăm cu d rația progresiei aritmetice. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $d > 0$;
- B $d < 0$;

- C Progresia aritmetică este unic determinată de condițiile date;
 D Nu există astfel de progresie aritmetică.

855. Dacă $x > 0$ și al treilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{x} + (\sqrt{x})^{1+\lg x}\right)^5$ este 10000, atunci ✓ ?

- A $x \in \{\frac{1}{10}, 10\}$; C $x \in \{\frac{1}{10}, 1000\}$;
 B $x \in \{\frac{1}{1000}, 1000\}$; D $x \in \{\frac{1}{1000}, 10\}$.

856. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$\sqrt{x - 6\sqrt{x+1} + 10} + \sqrt{x + 6\sqrt{x+1} + 10} = 6,$$

atunci

- A $3 \in S$; C mulțimea S este finită;
 B $15 \in S$; D mulțimea S este infinită;

857. Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$. Notăm cu a cea mai mică valoare a lui f și cu b cea mai mare valoare a lui f . Atunci lungimea intervalului $[a, b]$ este: ✓ ?

- A 2; B 6; C 8; D 10.

858. Notăm cu I valoarea integralei $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A $I > \frac{\pi}{8}$; B $I < \frac{\pi}{8}$; C $I < \frac{1}{4} \ln 2$; D $I > \frac{1}{4} \ln 2$.

859. În triunghiul ABC avem $A(3, 4)$ și $B(2, 1)$, iar $D(0, 2)$ este mijlocul segmentului BC . Aria triunghiului ABC este egală cu: ✓ ?

- A 1; B 3; C 5; D 7.

860. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = 0\}$, atunci ✓ ?

- A $1 \in S$;
 B $-1 \in S$;
 C există exact două numere iraționale în S ;
 D există un singur număr irațional în S .

861. Dacă z este un număr complex astfel încât $z^2 = i$, atunci $(z^3 + \bar{z})^2$ este egal cu ✓ ?

- A $-2i$; B $2i$; C 2 ; D 0 .

862. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$ este: ✓ ?

- A 0 ; B 1 ; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

863. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. Aria mulțimii plane cuprinse ✓ ?
între graficul lui f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ este:

- A $\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$; C $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$;
 B $\sqrt{2}$; D $2\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$.

864. În rombul $ABCD$ avem $E \in (BC)$, $BE = 2 \cdot EC$, $F \in (DC)$ și $FD = 3 \cdot FC$. Care ✓ ?
dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; C $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
 B $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; D $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

865. În triunghiul ABC avem $A(2, 13)$, $B(-7, 1)$ și $C(7, 1)$. Știind că AD este bisectoare ✓ ?
cu $D \in (BC)$, lungimea segmentului BD este:

- A $\frac{13}{2}$; B 7 ; C $\frac{15}{2}$; D 8 .

866. Dacă funcția $f : (\mathbb{Z}_8, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$ este morfism de grupuri și $f(\hat{5}) = \hat{9}$, atunci ✓ ?

- A $f(\hat{1}) = \hat{0}$; C $f(\hat{1})$ nu este unic determinat de condițiile date;
 B $f(\hat{1}) = \hat{9}$; D nu există astfel de morfism.

867. Notăm cu A mulțimea tuturor perechilor de numere reale (x, y) cu proprietatea că ✓ ?
 $0 \leq x < y$ și $\frac{x}{2024^x} = \frac{y}{2024^y}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Mulțimea A este vidă; C Mulțimea A conține o infinitate de elemente;
 B Mulțimea A conține un singur element; D Mulțimea A conține un element de forma $(x, 1)$.

868. Fie $a \in \mathbb{R}$ și fie $(x_n)_{n \geq 0}$ șirul definit prin $x_0 = a$ și $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ oricare ar fi ✓ ?
 $n \geq 0$. Mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care șirul este convergent este:

A $\{-1, 0\}$;

B $[-1, 0]$;

C $[0, 1]$;

D $(-\infty, 0]$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2023

Fie $A(2, 2)$ și $B(-3, 7)$ vârfurile triunghiului ABC iar $G(-2, 5)$ centrul de greutate al triunghiului ABC . Problemele **869.** și **870.** se referă la acest triunghi ABC .

869. Coordonatele vârfului C sunt

✓ ?

- A $C(5, 6)$; B $C(-5, 6)$; C $C\left(\frac{2}{3}, 3\right)$; D $C(5, -6)$.

870. Panta dreptei perpendiculare pe dreapta AG este

✓ ?

- A $-\frac{4}{3}$; B $-\frac{3}{4}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{4}{3}$.

871. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ este:

✓ ?

- A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $+\infty$.

872. Aria triunghiului ABC este 6. Dacă laturile sale sunt de lungimi $AB = 8$ și $AC = 3$, atunci măsura unghiului BAC poate fi:

✓ ?

- A 30° ; B 60° ; C 120° ; D 150° .

873. Aria mulțimii plane cuprinsă între graficul funcției $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2 \ln x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x = e$ este:

✓ ?

- A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1 + e^3}{9}$; D $\frac{1 + 2e^3}{9}$.

874. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

✓ ?

$$\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 2,$$

atunci

- A $S \subseteq [0, 1)$; C S are exact două elemente;
 B $S \subseteq (1, 2]$; D S are exact un element.

875. Considerăm mulțimea

✓ ?

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m^2 + 1)x + (m + 1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A $1 \in S$; B $-1 \in S$; C $S = [0, \infty)$; D $S = \mathbb{R}$.

876. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \\ 1, & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ x^2, & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A f este injectivă; C f este crescătoare;
 B f este surjectivă; D f este bijectivă.

877. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 4\sqrt{3}$ și $BC = 4$. Atunci

✓ ?

- A $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$; C $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 24$;
 B $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 16\sqrt{3}$; D $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 48$.

878. Fie dreptele $d_1 : x - 3y + 2 = 0$, $d_2 : (m + 1)x - (2m - 3)y + 4 = 0$ și $d_3 : mx + y + m + 1 = 0$, unde m este un parametru real. Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate?

- A Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele pentru $m = -6$.
 B Dreptele d_2 și d_3 nu sunt paralele pentru nici o valoare a lui m .
 C Dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente pentru o singură valoare a lui m .
 D Dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente pentru două valori ale lui m .

879. Fie S un punct pe latura PQ a triunghiului PQR astfel încât $\frac{PS}{SQ} = \frac{1}{2}$ și fie T mijlocul segmentului SR . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} - \vec{QR})$; C $\vec{PS} = \frac{1}{3}\vec{QP}$;
 B $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} + \vec{QR})$; D $\vec{RT} = \frac{1}{3}\vec{RP} + \frac{1}{6}\vec{RQ}$.

880. Dacă numerele naturale nenule x, y îndeplinesc egalitatea

✓ ?

$$x(y + 1)C_{x+y+1}^{y+1} = 30C_{x+y+1}^{x+1},$$

atunci:

- A x este unic determinat; C $x < 10$;
 B y este unic determinat; D $x > 5$.

881. Numărul soluțiilor ecuației $\cos(3\pi x) = 0$ în intervalul $(0, 2023)$ este ✓ ?

- A 2022; B 2023; C 6066; D 6069.

882. Considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} 2x + 2z = 33x + 2y = 02x + ay + 2z = a + 3, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este 0;
 B Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu admite soluții;
 C Sistemul admite soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
 D Dacă numărul soluțiilor este finit, atunci y nu depinde de a .

883. Fie $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{C}$ prin ✓ ?

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A $a_n = d_n = i^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
 B $b_n = 2ni^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
 C $b_n = 2^n i^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
 D Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numerele a_n, b_n, c_n, d_n să fie toate reale.

884. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \sin \frac{1}{n}$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C e; D $+\infty$.

885. Pentru fiecare $a > 0$ se notează $I(a) = \int_0^a \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$. Care dintre următoarele ✓ ?
afirmații sunt adevărate?

- A $I(2) = \frac{\pi}{6}$; B $I(2) = \frac{\pi}{3}$; C $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{4}$; D $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

Problemele 886, 887, și 888, se referă la funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, unde a este un număr real fixat.

886. Ecuația asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$ este: ✓ ?

A $y = a;$
 B $y = x + a;$
 C $y = x - a;$
 D $y = x + \frac{a}{2}.$

887. Dacă d este tangenta la graficul lui f în punctul de intersecție a acestuia cu axa Oy , care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuație $y = ax;$
 B Pentru $a \neq 0$ dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{a}x;$
 C Pentru $a = 0$ dreapta d este paralelă cu axa $Ox;$
 D Pentru $a \neq 0$ dreapta d este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{a}x.$

888. Mulțimea valorilor lui a pentru care f are trei puncte de extrem local este: ✓ ?

- A $(-1, 1);$
 B $[-1, 1];$
 C $[-2, 2];$
 D $(-2, 2).$

889. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru real. În mulțimea numerelor reale definim operația “*” prin ✓ ?

$$x * y = (x - 2023)(y - 2023) + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Operația “*” este asociativă dacă și numai dacă $a = 2023;$
 B Dacă $a = 2023$, atunci 2024 este element neutru față de “*”;
 C Dacă operația “*” este asociativă, atunci $(\mathbb{R}, *)$ este grup;
 D $((a, +\infty), *)$ este grup pentru orice $a \in \mathbb{R}.$

890. Care dintre graficele de mai jos poate fi graficul funcției definite prin ✓ ?

$$f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2x + 3}$$

?

891. Într-un triunghi unghiul opus celei mai mari laturi este de două ori mai mare decât unghiul opus celei mai mici laturi. Dacă laturile triunghiului sunt numere naturale consecutive, atunci perimetrul triunghiului este: ✓ ?

- A 9;
 B 12;
 C 15;
 D 24.

892. Numerele distincte a, b, c sunt în progresie aritmetică, în această ordine, cu rația r , iar numerele $a - 1, b, c + 4$ sunt în progresie geometrică, în această ordine, tot cu rația r . Care dintre următoarele afirmații pot fi corecte? ✓ ?

$\boxed{\text{A}} \quad b = 0;$

$\boxed{\text{B}} \quad b = 6;$

$\boxed{\text{C}} \quad b = -\frac{2}{3};$

$\boxed{\text{D}} \quad b = -3.$

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2022

893. Fie $x = \sin \frac{12133}{6} \pi$. Atunci: ✓ ?

- A $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; B $x = \frac{1}{2}$; C $x > 0$; D $x < 0$.

894. Dacă într-un sistem cartezian de coordonate vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 4)$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci mijlocul F al segmentului AG are coordonatele ✓ ?

- A $F(0, 0)$; B $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; C $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; D altă valoare.

895. Numărul soluțiilor ecuației $3 \sin x - 2 = 0$ pe intervalul $[0, \pi]$ este ✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D infinit.

896. Considerăm în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x^2 - 3} = x^2 - 5$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Ecuația nu are soluții; C Ecuația are exact patru soluții;
 B Ecuația are exact două soluții; D Ecuația are numai soluții pozitive.

897. Numărul termenilor raționali din dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{300}$ este ✓ ?

- A 50; B 51; C 52; D 150;

898. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suma elementelor în matricea A^5 este: ✓ ?

- A 19; B 20; C 21; D 22.

899. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive, cu proprietatea că $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, oricare ar fi $n \geq 1$. Atunci limita șirului este: ✓ ?

- A 1; B ∞ ; C nu există; D 0.

900. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

este continuă dacă:

A $\alpha \in \mathbb{R}$;

C $\alpha = 0$;

B $\alpha = 1$;

D $\nexists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă.

901. Ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ în punctul de abscisă $x = 9$ este: ✓ ?

A $-12y + x - 15 = 0$;

C $y - 12x - 15 = 0$;

B $12y - x - 15 = 0$;

D $y + 12x + 15 = 0$.

902. Mulțimea soluțiilor ecuației

✓ ?

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

este

A $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

C $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

B $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

D $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

903. Vârfurile A și B ale paralelogramului $ABCD$ se găsesc pe dreapta de ecuație $3x - y - 4 = 0$, iar punctul de intersecție O al diagonalelor AC și BD are coordonatele $(3, 4)$. Dacă coordonatele vârfului A sunt $(0, -4)$, atunci ecuația dreptei CD este: ✓ ?

A $x+3y-42 = 0$; B $x - 3y - 6 = 0$; C $3x - y - 6 = 0$; D $y = 3x + 6$.

904. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - [2x]$, unde prin $[a]$ se notează partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A f are perioada $\frac{1}{2}$;

C f este surjectivă;

B f este injectivă;

D f este pară.

905. Fie suma $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde i este unitatea imaginară ($i^2 = -1$). Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A S_{2020} este un număr real;

C Partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011;

B $|S_{2020}|$ este un număr irațional;

D $|S_{2022}| = 1011$.

906. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ soluția sistemului de ecuații

✓ ?

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Valoarea expresiei $\log_{30}(x^3) - \log_{30} y$ este egală cu:

- A 0; B 12; C 1; D 10.

907. Suma soluțiilor ecuației $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ este ✓ ?

- A -1; B 0; C 1; D 2.

908. Punctul $A(3, 1)$ este vârful unui pătrat în care o diagonală se află pe dreapta de ecuație $y - x = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Distanța de la vârful A la această diagonală este egală cu 2;
 B Ecuația dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $x + y + 2 = 0$;
 C Aria pătratului este 4;
 D Punctul $C(1, 3)$ este de asemenea vârf al pătratului.

909. Fie triunghiul ABC , în care notăm $BC = a, AC = b, AB = c$. Presupunem că lungimea medianei AM este egală cu c . Atunci: ✓ ?

- A $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; B $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; C $\cos C = \frac{4a}{3b}$; D $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

910. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ este: ✓ ?

- A $-\frac{1}{3}$; B -1; C 0; D $\frac{1}{2}$.

911. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \arctg x + \operatorname{arcctg} x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$;
 B $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 C Funcția f este impară;
 D $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

912. Numărul soluțiilor reale ale ecuației $xe^x = -\frac{1}{3}$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D 3

913. Fie ABC un triunghi și $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\frac{BA'}{BC} =$ ✓ ?

$\frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha$. Dacă $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ este aria triunghiului $A'B'C'$, atunci

- A $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1 - \alpha);$
 C $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 12\alpha^2(1 - \alpha)^2;$
 B $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right];$
 D $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$

914. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} e^{t^2} dt}$ este ✓ ?

- A 1;
 B $\pi;$
 C 0;
 D -1.

915. Triunghiul ABC în care are loc relația $\sin(B) + \cos(B) = \sin(C) + \cos(C)$ este: ✓ ?

- A dreptunghic;
 C echilateral;
 B isoscel;
 D dreptunghic sau isoscel.

916. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul definit prin ✓ ?

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}}, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N}^*.$$

Se notează cu $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\ell = 0;$
 B $\ell = \frac{\sqrt{2}}{3};$
 C $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{Q};$
 D $\ell = \infty.$

917. Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele date prin ecuațiile: ✓ ?

$$(d_1) : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$(d_2) : 3x + 2y - 7 = 0$$

și unul din vârfurile sale este punctul $A(2, -3)$. Ecuațiile dreptelor pe care se află celelalte două laturi ale dreptunghiului sunt:

- A $2x - 3y - 13 = 0$ și $3x + 2y = 0;$
 C $2x - 3y + 13 = 0$ și $3x - 2y = 0;$
 B $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$ și $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2);$
 D $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$ și $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2).$

918. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru și sistemul de ecuații liniare cu 3 necunoscute ✓ ?

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 1 \\ 2x + 10y + z = 1. \end{cases}$$

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- A Matricea sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α ;
- B Matricea extinsă a sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α ;
- C Sistemul dat este incompatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$;
- D Sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$.

919. Fie $G \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime astfel încât expresia

✓ ?

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G$$

definește o lege de compoziție pe G . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A G poate fi intervalul $(0, 2)$;
- B G poate fi intervalul $(0, 1)$;
- C Dacă $G = (0, 1)$, atunci „ $*$ ” admite un element neutru;
- D Dacă $G = (0, 1)$, atunci simetricul lui $\frac{1}{3}$ este $\frac{2}{3}$.

920. Valoarea integralei

✓ ?

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

este:

- A 0;
- B 1;
- C 2;
- D 3.

921. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt în progresie geometrică cu rația un număr întreg diferit de 1.

✓ ?

- A Dacă y este pătrat perfect, atunci și z este pătrat perfect;
- B Dacă z este pătrat perfect, atunci și y este pătrat perfect;
- C Dacă y este pătrat perfect, atunci și x este pătrat perfect;
- D Dacă z este pătrat perfect, atunci și x este pătrat perfect.

922. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul definit prin $x_n = \int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}} dx$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

- A $x_{23} = \frac{1}{184}$;
- B $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_n = 1$;
- C $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = \frac{1}{8}$;
- D $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 0$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2021

923. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale nenule în progresie geometrică, cu rația $r \in \mathbb{R}$. $\checkmark ?$
Știind că expresia

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

are valoarea minimă posibilă, să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $r = \frac{1}{2}$;

C $a_5 a_2 + 2a_1 a_5 + a_0 a_5 > 0$;

B $\left| \frac{a_{12}}{a_9} \right| < \frac{1}{4}$;

D $a_n a_{n+1} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

924. Fie dreptele d_1 și d_2 respectiv de ecuații $x - 3y + 1 = 0$ și $3x + y + 2 = 0$, a un număr $\checkmark ?$
real și P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 , dacă a ia valoarea

A $-\frac{1}{4}$;

C $\frac{1}{4}$;

B 0;

D $\frac{3}{2}$;

925. Mulțimea soluțiilor ecuației $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ este $\checkmark ?$

A $\{1\}$;

B $\{9\}$;

C $\{5\}$;

D $\{1, 9\}$.

926. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conține pe x^6 din dezvoltarea $\checkmark ?$
binomului

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right)^{2021}$$

este

A C_{2021}^{1435} ;

B C_{2021}^{586} ;

C C_{2021}^{587} ;

D C_{2021}^{1434} .

927. Fie M , N , P respectiv Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv $[DA]$ al $\checkmark ?$
patrulaterului oarecare $ABCD$. Atunci

A $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{CB} + \vec{CD}$

C $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$;

B $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{0}$;

D $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{CA}$.

928. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ șirul de termen general $\checkmark ?$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1;$
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1;$
 C $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2;$
 D $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$

929. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este: ✓ ?

- A 4;
 B $\frac{4(3-a)}{3+a};$
 C $\frac{4+a}{4-a};$
 D $\frac{4(3+a)}{3-a}.$

930. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziție „*” prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru ✓ ?
 orice $x, y \in (-1, 1)$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Elementul neutru în raport cu „*” este $\frac{1}{2};$
 B $\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9};$
 C Legea de compoziție „*” este asociativă;
 D Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu „*” este $\frac{1}{9}.$

931. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt parametri. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Dacă $a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$, atunci funcția f este continuă pe $\mathbb{R};$
 B Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R};$
 C Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția f este discontinuă în 0;
 D $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}.$

932. Dacă $\cos x = -\frac{1}{7}$ și $\cos y = -\frac{13}{14}$, unde $x, y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci diferența $x - y$ poate ✓ ?
 fi

- A $-\frac{\pi}{3};$
 B $\frac{\pi}{6};$
 C $\frac{\pi}{3};$
 D $\frac{2\pi}{3}.$

933. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se definește funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = (2-x)^n$, $x \in \mathbb{R}$. ✓ ?
 Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $0 < f_n(x) < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [1, 2];$
 B $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, pentru orice $x \in [1, 2];$

- C Șirul $(f_n(4))_{n \geq 1}$ are un subsir crescător;
- D $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(4) = \infty$.

934. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, măsură unghiului \widehat{B} este 60° și lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este 1. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Aria triunghiului ABC este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
- B Perimetrul triunghiului ABC este $3\sqrt{3}$;
- C Triunghiul ABC este echilateral;
- D Lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

935. Considerăm ecuațiile dreptelor $d_1 : x = 1$ și $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziane cu originea în O . Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ și $B \in d_2$, avem:

- A $C \in d$, unde $d : x - y = 0$;
- B Distanța dintre A și B este cel puțin egală cu $\sqrt{2}$;
- C $C \in d$, unde $d : x + y = 2$.
- D Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puțin egală cu 1.

936. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Funcția f este derivabilă în punctul $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$;
- B Funcția f are exact un punct de extrem local;
- C Funcția f are cel puțin un punct de minim global;
- D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

937. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7, 5)$ și $B(9, 1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu \mathcal{C} mulțimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d , și care trec prin A și B . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Există în \mathcal{C} un cerc cu aria egală cu π ;
- B Există în \mathcal{C} un cerc cu aria egală cu 17.
- C Există în \mathcal{C} un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct;
- D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în \mathcal{C} ;

938. Se consideră ecuația matriceală

✓ ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1);
- B Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci ecuația (1) are cel puțin o soluție;
- C Ecuația (1) are cel puțin o soluție pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
- D Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, atunci ecuația (1) nu are nicio soluție.

939. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\tan x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $\ell = \infty$;
- B $\ell < 1$;
- C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- D $\ell \in (2, \infty)$.

940. Fie v valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = x^2 + 2y^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, unde x și y verifică ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci

- A $v > 0$;
- B $v = 1$;
- C $v < 1$;
- D $v = -\frac{1}{3}$.

941. Specificați care dintre următoarele condiții implică faptul că dreptele $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ și $(d_3) : cx + ay + b = 0$ au cel puțin un punct comun, a, b, c fiind numere reale nenule:

- A $a + b + c = 0$;
- B $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;
- C $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;
- D $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

942. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0)$ o funcție care admite primitive și fie F o primitivă a lui f . Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

este:

- A $m = 1$; B $m = 2$; C $m = 3$; D $m = 4$.

943. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \sin x$. Să se indice care dintre $\checkmark ?$ următoarele afirmații sunt adevărate.

- A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) ;
 B f este injectivă;
 C f este surjectivă;
 D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) .

944. Dacă S este mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $2 \cos^2 x \geq \cos x + 1$, atunci $\checkmark ?$

- A $2020\pi \in S$; C $[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}] \subset S$;
 B $2021\pi \in S$; D $20 \in S$.

945. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin(x^2)) dx$. Să se indice care $\checkmark ?$ dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $\ell = 0$; B $\ell = \frac{2}{3}$; C $\ell = \infty$; D $\ell = \pi$.

946. Să presupunem că există numere complexe a, b, c, d diferite de zero, astfel încât $\checkmark ?$ $z \in \mathbb{C}$ satisface ecuațiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt:

- A $\{i, -i\}$; B $\{1, -1\}$; C $\{1, i, -1\}$; D $\{1, i, -1, -i\}$.

947. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $\checkmark ?$

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{pentru orice } x \in (2k - 1, 2k + 1] \text{ și orice } k \in \mathbb{Z}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A Funcția f nu este continuă pe \mathbb{R} ;
 B Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
 C Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} ;
 D unctia f nu este continuă în punctele mulțimii $\{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

948. Fie $I = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt $\checkmark ?$ adevărate.

A $I = \infty$;
 B $I = \frac{\pi}{8}$;
 C $I = \frac{\pi}{4}$;
 D $I < \frac{1}{2}$.

949. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ și fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $n = 0$;
 B $n = 1$;
 C $n = 2$;
 D $n = 3$.

950. În triunghiul ABC mediana din vârful A al triunghiului este egală cu latura BC . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $5 \sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$;

B $5 \sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$;

C $3 \sin^2 A - 4 \sin B \sin C \cos A = 0$;

D $4 \sin^2 A - 3 \sin B \sin C \cos A = 0$.

951. Un segment MN paralel cu bazele unui trapez, cu capetele segmentului aflate pe cele două laturi neoparalele împarte aria trapezului în două părți egale. Dacă lungimea bazelor este a și b , $a > b$, atunci pentru lungimea l a segmentului MN avem:

A $l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$;
 B $l = \sqrt{ab}$;
 C $l > \frac{a + b}{2}$;
 D $l = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

952. Notăm cu A mulțimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 și au proprietatea că dacă mutăm această cifră în fața numărului, obținem un număr de 4 ori mai mare. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$;

B Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$;

C Există $n \in A$ care are 8 cifre;

D Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.

Antrenament

Testul 1

Problemele **953.** și **954.** se referă la polinomul $f = X^3 + aX^2 + 8X + 3, a \in \mathbb{R}$.

953. Pentru a aparținând cărui interval, expresia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este mai mică decât 0? ✓ ?

- A $[0, 5]$; B $[1, 5]$; C $(-4, 5]$; D $(-4, 4)$.

954. O valoare a lui a pentru care are loc egalitatea $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 9$ ✓ ? este:

- A 0; B 1; C 2; D 3.

955. Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PC}$ și ✓ ? $\overrightarrow{CN} = \frac{k}{5}\overrightarrow{NA}$, unde $k \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului k pentru care $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$ este:

- A 1; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{3}{2}$; D 3.

956. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$ și parametrul $a \in \mathbb{R}$. Pentru a ✓ ? aparținând cărui interval, dreapta de ecuație $y = a$ intersectează graficul funcției f în exact 3 puncte distincte?

- A $(-2e^3, 0)$; C $(0, \frac{6}{e})$;
 B $(-2e^3, \frac{6}{e})$; D $(\frac{6}{e}, 2e^3)$.

957. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{1}{x^4 - 16} dx$ este: ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad -\frac{\ln 3}{32};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{\ln 3}{32} + \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{16};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad -\frac{\ln 3}{32} - \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{16};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -\frac{\ln 3}{16} - \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{32}.$$

958. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2 + a)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde a este un parametru real. Considerăm mulțimea

$$M = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ este convexă}\}.$$

Aceasta este:

$$\boxed{\text{A}} \quad M = (-\infty, 0];$$

$$\boxed{\text{B}} \quad M = \{0\};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad M = [0, +\infty);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad M = \mathbb{R}.$$

959. Se consideră z un număr complex astfel încât $z^2 + z + 1 = 0$. Rezultatul calculului $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}}$ este:

$$\boxed{\text{A}} \quad i;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 1;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad -1;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -i.$$

960. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru și sistemul de ecuații liniare cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 & + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + (\alpha + 2)x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

$$\boxed{\text{A}} \quad \text{Sistemul dat este incompatibil dacă și numai dacă } \alpha \neq 3;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \text{Pentru } \alpha = -5 \text{ sistemul dat este compatibil};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \text{Sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă } \alpha \neq 3;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \text{Sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-5, 3\}.$$

961. Notăm cu A mulțimea numerelor reale a pentru care funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + 1}$$

este convexă într-o vecinătate a originii. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor:

$$\boxed{\text{A}} \quad 1 \in A;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad (-1, 1) \subseteq A;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad [1, +\infty) \subseteq A;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad A \neq \mathbb{R}.$$

962. Valoarea limitei $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin x) dx$ este:

- A 0; B 1; C ∞ ; D π .

963. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ este: ✓ ?

- A e ; B ∞ ; C 0; D $\frac{e+1}{e}$.

964. Suma soluțiilor pozitive ale ecuației ✓ ?

$$\log_{16} x + \log_x 16 = \log_{512} x + \log_x 512$$

poate fi scrisă ca și $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale și prime între ele. Valoarea sumei $a + b$ este:

- A 3257; B 652; C 4161; D 4097;

965. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \sin x$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt **false**: ✓ ?

- A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) ; C f este surjectivă;
 B f este injectivă; D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) .

966. Se consideră ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

- A Pentru orice soluție $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $\det(X) = 0$;
 B Pentru orice soluție $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $\text{tr } X = \sqrt{2}$, unde $\text{tr } X$ este urma matricii X ;
 C Ecuația are trei soluții diferite;
 D Suma soluțiilor ecuației este I_2 .

967. Valoarea integralei $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$ este: ✓ ?

- A $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$; B $\frac{1}{2}(e-1)$; C $\frac{1}{2}$; D $1 - \frac{1}{e}$.

968. Numărul de soluții reale ale ecuației $\sqrt{3-x} - x = -10$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D 3.

969. Ecuația $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ are soluția: ✓ ?

A $\{1\}$;

B $\{9\}$;

C $\{5\}$;

D $\{1, 9\}$;

Problemele **970.** și **971.** se referă la punctele $A(7, 5)$, $B(9, 1)$, relative la un reper cartezian ortonormat al planului .

970. Fie punctul $C(5, 1)$ și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Coordonatele punctului O sunt: ✓ ?

A $O\left(7, \frac{7}{3}\right)$;

B $O\left(7, \frac{5}{2}\right)$;

C $O\left(7, \frac{8}{3}\right)$;

D $O\left(7, \frac{5}{3}\right)$.

971. Notăm cu \mathcal{C} mulțimea tuturor cercurilor având centrul pe mediatoarea d a segmentului $[AB]$, și care trec prin A și B . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există în \mathcal{C} un cerc cu aria interioară egală cu π ;

B Există în \mathcal{C} un cerc cu aria interioară egală cu 17;

C Există în \mathcal{C} un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct;

D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în \mathcal{C} .

972. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}}$ este: ✓ ?

A 0;

B 1;

C 2;

D 3;

973. Considerăm elementul $\widehat{5} \in \mathbb{Z}_{14}$. Atunci în inelul \mathbb{Z}_{14} avem: ✓ ?

A $\widehat{5}^3 - \widehat{5} + \widehat{1} = \widehat{11}$;

C $\widehat{5}^{2021} = \widehat{5}$;

B $\widehat{5}^{13} = \widehat{1}$;

D $\widehat{5}^{123} + \widehat{5}^{210} = \widehat{0}$.

974. Se consideră polinomul $f = X^{2024} + 7X^{2023} + 3x^2 + 3$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Restul împărțirii lui f la polinomul $X + 1$ este: ✓ ?

A 0;

B $X + 12$;

C $X^2 + 12X$;

D $X^3 + 12X^2$.

975. Valoarea expresiei $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$ este: ✓ ?

A $\frac{45}{2}$;

B 0;

C 1;

D $\frac{91}{2}$.

976. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n}$ este: ✓ ?

A $\sqrt{2}$;

B 1;

C 0;

D $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Testul 2

977. Valoarea integralei $\int_0^1 t(1-t)^{99} dt$ este: ✓ ?

- A $\frac{1}{100}$; B $\frac{1}{1000}$; C $\frac{1}{10000}$; D $\frac{1}{10100}$.

978. Considerăm șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de relația $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$, și fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. ✓ ?
Valoarea lui l este:

- A 0; B 1; C $\frac{\pi}{2}$; D $\frac{\pi}{4}$.

979. Fie segmentul $[AB]$ cu $A\left(2, \frac{7}{2}\right)$, $B(x_B, y_B)$ și punctul $C(1, 2)$ care aparține acestui ✓ ?
segment (AB) . Știind că $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, care este valoarea expresiei $(x_B + y_A)^2 - y_B$?

- A $\frac{94 - 23\sqrt{5}}{4}$; C $\frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} + 1}$;
 B $\frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5} - 6}{1 + \sqrt{5}} + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}$; D $\frac{49 - 17\sqrt{5}}{4}$.

980. Fie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul 3, având: ✓ ?

$$h(1) = 1, h(2) = 2, h(3) = 3, h(4) = 6,$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $h(16) = 826$; C $h(6) = 26$;
 B $h(16) < 42$; D $h(6) \cdot h(2) \leq 108$.

981. Dacă $a, b \in (-1, \infty)$, care este valoarea logaritmului $\ln^2 ab$, știind că ✓ ?

- $\log_a(b^a) = \log_b(a^{eb}) = \frac{e}{\sqrt{5}}$
- A $\ln \frac{e^2}{5}$; B $\ln^2 \frac{e}{\sqrt{5}}$; C $\ln^2 \frac{e}{5}$; D $(1 - \ln 5)^2$.

982. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, să se stabilească care dintre ✓ ?
următoarele afirmații sunt false:

- A Dacă $x \neq \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$; C $\det(A^2) = y^2(1 + 2x)^2$;
 B $\text{rang}(A) = 3$ pentru $x = \frac{1}{2}$ sau $y = 0$; D $\det(A^2) = y^2[(1 + 2x)^2 - 8x]$.

983. Fie A_n egal cu numărul total de șiruri de n numere din mulțimea 2023, 2024, 2025 ✓ ? care nu conțin nicio instanță a secvenței **2024, 2025** (în această ordine), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele relații reprezintă o relație de recurență validă pentru $A_n, n > 1$?

A $A_{n+1} = 3A_n - A_{n-1}$;

C $A_{n+1} = 3A_n$;

B $A_n = 3A_{n-1} - 1$;

D $A_n = A_{n-1} - A_{n-2}$.

984. Dacă γ este o soluție a ecuației $3 - 4 \sin x = \sqrt{17 - 24 \sin x}$, pentru care $\sin \gamma \in$ ✓ ? $(-1, 0)$, care este valoarea lui $f(\gamma)$, unde $f(x) = \operatorname{tg} x$?

A $f(\gamma) = \frac{1}{4}$;

B $f(\gamma) = -1$;

C $f(\gamma) = 3$;

D $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.

985. Notăm cu a_k numărul de cifre din numărul 4^k . Știind că $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 =$ ✓ ? $3, \dots$ și că $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $L = \lg 4$;

B $L \geq \log_4 12$;

C $L = \lg \sqrt{4}$;

D $L = 2 \lg 4$.

986. Să se indice care dintre următoarele drepte trece prin punctul de coordonate $A(2, -3)$ ✓ ? și formează cu dreapta de ecuație $2x + 3y - 7 = 0$ un unghi de 45° .

A $2x - 2y - 10 = 0$;

C $-x + 2y = -8$;

B $x - 5y + 17 = 0$;

D $5x + y - 7 = 0$.

987. Valoarea lui $k \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + (k-2)x^2 + 3x$ ✓ ? are în punctul de abscisă $x = 1$ tangenta perpendiculară pe dreapta $y = -x + 5$ este:

A $k = -\frac{1}{5}$;

B $k = 3$;

C $k = -1$;

D $k = \frac{1}{4}$.

988. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziție “ \diamond ” prin $x \diamond y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru ✓ ? orice $x, y \in (-1, 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A elementul neutru în raport cu \diamond este 0;

B $\frac{1}{2} \diamond \left(\frac{1}{2} \diamond \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{5}$;

C legea de compoziție \diamond este asociativă;

D simetricul lui $\frac{1}{2}$ în raport cu \diamond este $-\frac{1}{2}$.

989. Fie punctele $P(1, 2), Q(3, 1)$ și $R(\beta, \beta^2)$. Pentru ce valori ale lui β punctele P, Q și ✓ ? R sunt coliniare?

$$\boxed{\text{A}} \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \beta = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}.$$

990. Se consideră $T_n = \sum_{k=1}^n i^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad T_{256} = T_4;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad T_{98} = -1 - i;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad T_{2025} = T_{101};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad T_{37} = -i.$$

991. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $I = \int_0^\alpha e^{\sqrt{x}} dx$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns nu sunt adevărate. ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad I = 2\sqrt{\alpha} \cdot e^\alpha;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad I = 2\alpha \cdot e^\alpha;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad I = 2\alpha \cdot e^{\sqrt{\alpha}};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \text{Alt răspuns.}$$

992. Fie sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} a \left(y - \frac{1}{3} \right) + \frac{x}{2} = 0 \\ 3y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

unde a este o constantă reală. Pentru ce valoare a lui a sistemul are o infinitate de soluții (x, y) ?

$$\boxed{\text{A}} \quad -\frac{3}{2};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{5}{6};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad 3;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \text{Alt răspuns.}$$

993. Fie β astfel încât $y = \beta$ să împartă regiunea delimitată de $y = x^2$ și $y = 4$ în două regiuni de suprafață egală. Dacă $x, y > 0$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^{\frac{1}{n}} + n}{n + 1};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \beta = \frac{4}{\log_2 4};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \beta \text{ este o soluție pentru } x^2 - 4x + 4 = 0;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \beta = \frac{3}{2} \int_0^4 \sqrt{x} dx.$$

994. Dacă $\frac{x^2}{x-2} = 3x$, atunci ce valori pentru S și P sunt corecte, dacă S reprezintă suma soluțiilor, respectiv P reprezintă produsul soluțiilor ecuației? ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad S = 3; P = 3;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad S = 3; P = 1;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad S = 3; P = 0;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad S = 4; P = 0.$$

995. Fie o progresie aritmetică unde al șaselea termen este de patru ori mai mare decât al treilea, iar al zecelea este mai mare decât al patrulea cu 30. Care este primul termen și rația progresiei? ✓ ?

A $a_1 = 0$ și $r = 5$;

C $a_1 = -10$ și $r = 5$;

B $a_1 = -5$ și $r = 5$;

D $a_1 = -5$ și $r = 10$.

996. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{m \cos x + n}$, unde m și n sunt constante reale $\checkmark ?$ pozitive. Care relație între m și n este o condiție suficientă pentru ca f să admită primitive pe \mathbb{R} ?

A $m > n$;

B $m = n$;

C $m < n$;

D $m : n$.

997. Fie dreptele d_1 și d_2 cu ecuațiile respective: $2x + y - 3 = 0$ și $x - 2y + 1 = 0$, b un $\checkmark ?$ număr real și Q punctul de coordonate $(b, 0)$. Punctul Q este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 , dacă b ia valoarea

A $-\frac{2}{3}$;

B $-\frac{4}{3}$;

C $\frac{2}{3}$;

D $\frac{12}{3}$.

998. Fie triunghiul ascuțitunghic DEF cu $\operatorname{tg} D = \frac{1}{2}$ și $\operatorname{tg} E = \frac{3}{4}$. Atunci, $\cos F$ este: $\checkmark ?$

A $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

C $\frac{5}{13}$;

D $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Problemele **999.** și **1000.** se referă la funcția $f(x) = \sqrt{2 - x^3}$, respectiv funcția $h(x, y) = \int_x^y t^5 \cdot f(t) dt$.

999. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

(a) f descrescătoare pe domeniul de definiție

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

(c) f are un singur punct de extrem

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

A a) și b);

B Doar a);

C a) și c);

D a), c) și d).

1000. Valoarea limitei $L = \lim_{n \rightarrow -\infty} h(n, \sqrt[3]{2})$ este: $\checkmark ?$

A ∞ ;

B 0;

C nu există;

D $-\infty$;

Testul 3

1001. Fie numărul complex z cu proprietatea că $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{12}$. Valoarea lui $z^4 + \frac{1}{z^4}$ este: ✓ ?

- A 1; B $\sqrt{2}$; C $i\sqrt{3}$; D i .

1002. Valoarea limitei $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x(\sin x - x)}{x^2}$ este: ✓ ?

- A 1; B e ; C 0; D $-\frac{1}{6}$.

1003. Fie mulțimea de puncte $M(x, y)$ din plan, care satisfac ecuația $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - y = 0$. Ce reprezintă această mulțime în planul xOy ? ✓ ?

- A reuniunea a 2 drepte perpendiculare ce trec prin origine;
 B reuniunea a 2 drepte perpendiculare ce trec prin $(0, 1)$;
 C reuniunea a 2 drepte paralele, una trecând prin $(0, 1)$ și una prin origine;
 D reuniunea a 2 drepte paralele, una trecând prin $(1, 0)$ și una prin $(1, 1)$.

1004. Valoarea integralei $\int_{2024}^{2025} \frac{e^{x-2024}}{e^{x-2024} + e^{2025-x}} dx$ este: ✓ ?

- A 1; B 1012; C $\frac{2025}{2}$; D $\frac{1}{2}$.

1005. Pe mulțimea $(-1, 1)$ definim legea de compoziție "*" astfel: $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \forall x, y \in (-1, 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte: ✓ ?

- A 0 este element neutru al legii "*"; C $((-1, 1), *)$ este un grup;
 B "*" are un element absorbant; D $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{35}{36}$.

1006. Fie $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 2x + 1} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I = \frac{\pi}{6}$; B $I > \frac{1}{4}$; C $I = \frac{\pi}{12}$; D $I < 0$.

1007. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 + 9 \sin^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $3I = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{2}$; C $3I = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 B $I = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$; D $I = \operatorname{arctg} 3\sqrt{3}$.

1008. Fie polinomul $f = mx^4 + nx + p$, cu $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Care dintre următoarele afirmații $\checkmark ?$ sunt adevărate?

A $f(3) - f(1)$ este număr par;

C $\frac{f(x) - f(y)}{x^2 - y^2} \in \mathbb{Z} \forall x, y;$

B $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{Z} \forall x, y;$

D $\frac{f(x) - f(y)}{x + y} \in \mathbb{Z} \forall x, y.$

A f nu are limită pentru $x \rightarrow \infty;$

C $L = 0;$

B $L = 1;$

D alt răspuns.

1009. Care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă ecuația dreptei care trece $\checkmark ?$ prin punctul $A(2, 3)$ și face cu axa Ox un unghi de 45° ?

A $y = x + 1;$

B $y = x - 1;$

C $\sqrt{2}y = x - 1;$

D $\sqrt{2}y = x + 1.$

1010. Fie $f(x) = (x^2 + x + 1)^{50} + (x^2 - x + 1)^{50}$ și dezvoltarea sa de forma: $f(x) = \checkmark ?$ $a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $a_{17} = 0;$

C $a_0 + a_1 + \dots + a_{100} = 3^{50} + 1;$

B $a_{31} = 0;$

D $a_0 + a_1 + \dots + a_{100} = 3^{50} + 3.$

1011. Valoarea lui $\arctg\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right)$ este:

$\checkmark ?$

A $\frac{\pi}{6};$

B $\frac{5\pi}{6};$

C $-\frac{\pi}{6};$

D $-\frac{5\pi}{6}.$

1012. Se considera triunghiul ABC cu laturile $AB = 7$ și $AC = 9$, iar AD este bisectoarea $\checkmark ?$ unghiului A , punctul D este pe dreapta AB . Valorile numerelor x și y pentru care are loc egalitatea: $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ sunt:

A $y = \frac{7}{8};$

B $x = \frac{9}{16};$

C $y = \frac{7}{16};$

D $x = \frac{9}{8}.$

1013. Dacă $L = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{6x + 1}{x + 5} - \frac{7x - 4}{2x} \right) \cdot \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$, atunci care dintre următoarele $\checkmark ?$ afirmații sunt adevărate?

A $L > \frac{1}{20};$

B $L = \frac{21}{20};$

C $L = \frac{21}{400};$

D $L = \frac{21}{200}.$

1014. Fie ecuația $4x - 5x^2 = 25^{\log_5 x} + 8^{\log_2 x} - 8 \log_{0.25} \frac{1}{64}$. Care dintre următoarele $\checkmark ?$ enunțuri sunt adevărate?

A ecuația are o singură soluție reală pozitivă;

- B ecuația are două soluții pozitive;
 C ecuația are o singură soluție negativă;
 D ecuația are o singură soluție întreagă.

1015. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} A_y^x = 9A_y^{x-1} \\ \frac{1}{3}C_y^x = 5C_y^{x+1} \end{cases}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A $x = 119, y = 127$ verifică sistemul; C $x \geq y, \forall x, y$ soluții;
 B $x = 100, y = 108$ verifică sistemul; D $x \leq y - 8, \forall x, y$ soluții.

1016. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} i & -6 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, matricea $B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt[3]{2} \\ 2 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$ și $X(\alpha, \beta) = A^\alpha - \beta A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dintre următoarele enunțuri sunt false: ✓ ?

- A există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^k = 2A$. C $\det(X(2024, -1)) = \det(B^3)$.
 B $A^{2024} = A^{156}$ și $A^{705} = A^{343}$. D $\det(X(150, 30)) = \det\left(\frac{6293}{14}B^3\right)$.

1017. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{4n}$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4} - 2$; B $\frac{\pi}{12} - 1$; C $1 - \frac{8}{\pi}$; D $\frac{4}{\pi} - 1$.

1018. Cu ce număr poate fi egală partea reală a numărului complex z care este soluția ecuației: $\operatorname{Re}(6z^2 - 3i + 2) - \operatorname{Im}(7i * \bar{z} - 2z * \bar{z}) + 6 \operatorname{Im}(\bar{z})^2 = 7$? ✓ ?

- A $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{12}$; B $\operatorname{Re}(z) = -\frac{11}{12}$; C $\operatorname{Re}(z) = -\frac{7}{12}$; D $\operatorname{Re}(z) = -\frac{21}{12}$.

1019. Dacă în triunghiul ABC are loc relația $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$ atunci: ✓ ?

- A triunghiul poate fi dreptunghic; C triunghiul poate fi echilateral;
 B triunghiul poate fi isoscel; D triunghiul poate fi doar dreptunghic.

1020. Se dă șirul $a_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n+1}n$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

- A cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n < 0$ este 2;
 B cel mai mare număr pozitiv n pentru care $a_n \leq -20$ este 41;
 C cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 399;
 D cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 400.

1021. Fie $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{3\pi}{4}$;

B $I = \sqrt{2}$;

C $I = 0$;

D $I = \frac{\ln 2}{2}$.

1022. Valoarea expresiei $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$ este: ✓ ?

A 1;

B $\frac{1}{2}$;

C 0;

D $-\frac{1}{2}$.

1023. Fie $L = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{3}{2}$;

B $I = \frac{1}{2}$;

C $I = 0$;

D $I = -\frac{1}{2}$.

Testul 4

1024. Fie $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $L < 1$; B $L = 0$; C $\frac{3}{2\sqrt{7}}$; D $L = \sqrt{7}$.

1025. Câte soluții are ecuația $8^{\cos^2 x} + 4^{\sin^2 x} = 2$? ✓ ?

- A 0; B 1; C 2; D ∞ .

1026. Fie ecuația $\log_c((e^{-x})^x) - \log_a\left(\frac{1}{c^3}\right) \log_a(b^2) + \log_a\left(\frac{c^{2x}}{b^{3x}}\right) + \log_a\left(\frac{c^2}{a^x}\right) = 0$, $a, b, c > 0$ și $\neq 1$. Ce condiție este necesară astfel încât ecuația are o rădăcină dublă? ✓ ?

- A $a = b = c$; C $b^3 = 8ac$;
 B $b = -\sqrt{\frac{c}{a^2}}$; D $a = \frac{1}{c^2 b^3}$.

1027. Dacă $(\sin x)^n + (\cos x)^n = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

- A n poate lua o singură valoare; C n poate lua o infinitate de valori;
 B n poate lua două valori; D dacă n este multiplu de 2 se verifică relația.

1028. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Dintre următoarele enunțuri sunt false: ✓ ?

- A $\det(A) = 0$.
 B ecuația $B^{2024} = A$ are 2 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.
 C ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
 D ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

1029. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{1}{|n-x| + 2024} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I_{n+1} < I_n$; B $I_{n+1} > I_n$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$.

Problemele **1030.**, **1031.** și **1032.** se referă la șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de relația de recurență $x_{n+1} = x_n - \ln(1 + x_n)$, $x_0 > 0$.

1030. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ strict descrescător; C $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge la 1;
 B $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge la e ; D $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.

1031. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ este: ✓ ?

- A 1; B $\ln 2$; C 0; D e .

1032. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ este: ✓ ?

- A 1; B 0; C e ; D ∞ .

1033. Știind că în triunghiul ABC lungimile laturilor sunt $a = 3, b = 4, c = 5$, valoarea ✓ ?
expresiei $\sin A + \sin B + \sin C$ este:

- A $\frac{12}{5}$; B $\frac{11}{6}$; C $\frac{15}{4}$; D $\frac{10}{3}$.

1034. Fie patrulaterul $ABCD$ cu $A(1, 3), B(4, 5), C(1, 0), D(10, 6)$. Care dintre următoarele ?
afirmații sunt adevărate?

- A $ABCD$ paralelogram; C $ABCD$ trapez;
 B $\mathcal{A}_{ABCD} = 9$; D $\mathcal{A}_{ABCD} = 18$.

1035. Fie $I = \int_{-\pi/3}^0 e^{-3x} \cos(3x) dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I < 0$; B $I = \frac{e^\pi + 1}{6}$; C $I = 0$; D $I = -\frac{e^\pi + 1}{6}$.

1036. Valoarea lui $\sin \frac{\pi}{10}$ este: ✓ ?

- A $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; B $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; C $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$; D $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$.

1037. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x}{4x^2 + 1}$. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt ✓ ?
adevărate?

- A f are două puncte de extrem global; C $\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx = \ln 2$;
 B f are un punct de inflexiune; D f este convexă pe $[1, \infty)$.

1038. Se dă sistemul de ecuații
$$\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y + z = \hat{8} \\ x + \hat{4}y + \hat{3}z = b \\ \hat{3}x + ay + z = \hat{3} \end{cases}$$
 în $\mathbb{Z}_{11}, a, b \in \mathbb{Z}_{11}$. Fie A mulțimea ✓ ?

ce conține valorile lui a pentru care determinantul sistemului este nul și B mulțimea ce conține valorile lui b pentru care sistemul este incompatibil. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\text{card}(A) = \text{card}(B) = 1;$

C $\text{card}(A) = \text{card}(B) = 10;$

B $\text{card}(A) = 1, \text{card}(B) = 2;$

D $\text{card}(A) = 1, \text{card}(B) = 10.$

1039. Expresia $\sin(x - \arcsin x) \cdot \sin(x + \arcsin x)$, $x \in [-1, 1]$ este echivalentă cu: ✓ ?

A $1 + \sin^2 x - x^2;$

C $(\frac{\pi}{2} - x)^2 - \sin^2 x;$

B $\sin^2 x - x^2;$

D $\sin^2 x + \frac{1}{2}x^2.$

1040. Valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A_n^{k+1} = aA_n^{k-1}$ sunt: ✓ ?

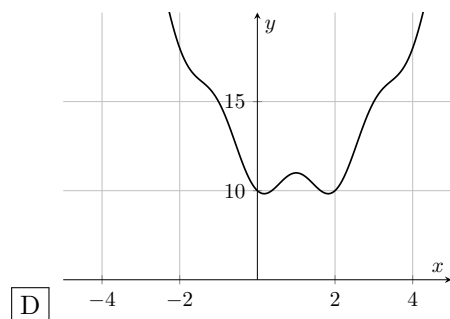
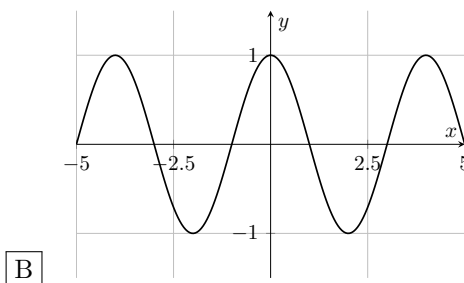
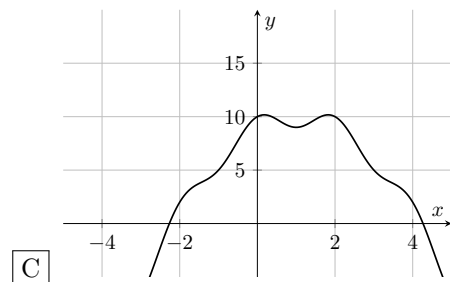
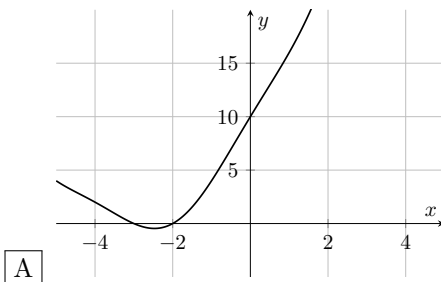
A $a \in \emptyset;$

C $a \in \{2, 6, 12, \dots\};$

B $a \in \{0, 1, 2, \dots\};$

D $a \in \{0, 2, 6, \dots\}.$

1041. Care dintre următoarele este o reprezentare corectă a funcției $y = \cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + (x+3)^2$? ✓ ?



1042. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate, dacă a și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul dintre $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$ să fie de 60° , iar unghiul dintre $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{y} = (b-2)\vec{i} - b\vec{j}$ să fie de 135° ? ✓ ?

A $a = 2 + \sqrt{3};$

B $a = 8;$

C $b = -1;$

D $b = \frac{3}{2}.$

1043. Fie polinomul $f = x^4 + 3x^3 + ax^2 - 4x + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4 . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)(1 - x_4^2) = (a + 1)(a + 3);$

B $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)(1 - x_4^2) = (a + 1)^2;$

C $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 9 - 2a;$

D $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 9 - 4a.$

1044. Fie $ABCD$ un trapez, iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor AD, BC, AC și BD , respectiv. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC});$

C $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC});$

B $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC});$

D $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}).$

1045. Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \int_{n-1}^{n+1} \frac{x^4 + 9}{x^9 + 16} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L = 0;$

B $L = 2;$

C $L = 1;$

D $L < 0.$

1046. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 10x + 10y + 45$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $(-10) * (-9) * \dots * 9 * 10 > -\frac{5}{2};$

C legea nu admite element neutru;

B elementul neutru al legii este $-\frac{9}{2};$

D $(-10) * (-9) * \dots * 9 * 10 < -3.$

1047. Se dă șirul $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, cu termenul general $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$. Care este limita lui? ✓ ?

A $e^{-1};$

B $0;$

C $2e^{-1};$

D $4e^{-1}.$

Testul 5

1048. Cum mai poate fi scrisă expresia $\log_{13}(14!)$? ✓ ?

- A $1 + 3 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 8 + 2 \log_{13} 70 + \log_{13} 11 + 2 \log_{13} 3$;
 B $2 + 3 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 8 + 2 \log_{13} 70 + \log_{13} 11 + 4 \log_{13} 3$;
 C $1 + 4 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 14 + 3 \log_{13} 2 + \log_{13} 10 + \log_{13} 22 + \log_{13} 15$;
 D $1 + 5 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 10 + 2 \log_{13} 11 + 2 \log_{13} 14 + \log_{13} 22$.

1049. Fie $I = \int_{-5}^5 x^3 \sqrt{x^4 + 5} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I < 0$;
 B $I = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{25}$;
 C $I = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{5}$;
 D $I = 0$.

1050. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} i & -\sqrt{17} \\ \sqrt{17} & i \end{pmatrix}$ și $A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. Dintre următoarele enunțuri sunt adevărate: ✓ ?

- A $\operatorname{rang}(A) = 2$.
 B $a_{14}^2 - 2^{24} a_8^2 = 16^6 b_8^2 - b_{14}^2$.
 C $a_{14}^2 - 2^{24} a_8^2 = 4^6 b_8^2 - b_{14}^2$.
 D $\frac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{30}^2 + b_{30}^2} = 16^{10}$.

1051. Fie sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (\alpha + 1)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = -1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sunt adevărate următoarele afirmații:

- A pentru $\alpha = 0$, expresia $x_1^2 - x_2 x_3 + 3x_1$ atinge valoarea maximă în punctul $x = \frac{3}{2}$;
 B pentru $\alpha = 0$, expresia $x_1^2 - x_2 x_3 + 3x_1$ atinge valoarea minimă în punctul $x = -\frac{1}{2}$;
 C sistemul este compatibil determinat pentru 3 valori distincte ale parametrului α ;
 D pentru $\alpha = -3$, sistemul este incompatibil.

1052. Valoarea integralei $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{\cos^2 x - 3} dx$ este: ✓ ?

- A $-\frac{\pi}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$;
 B $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$;
 C $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + 2$;
 D $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$.

1053. Știind că $\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, numărul soluțiilor din intervalul $(0, \pi)$ ale ecuației ✓ ?

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\cos x} = 8$$

este:

- A 1; B 2; C 3; D 4.

1054. Care este coeficientul termenului care îl conține pe x^{32} din dezvoltarea $\left(\frac{3}{\sqrt[5]{9x^2}} - x^3\right)^n$, dacă valoarea coeficientului celui de al șaselea termen al dezvoltării este -3^{14} .
3003? ✓ ?

- A $3^7 C_{15}^{10}$; B $-3^{\frac{42}{5}} C_{15}^9$; C $-3^{\frac{42}{5}} C_{14}^9$; D $-3^7 C_{14}^{10}$.

1055. Fie $L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - x}{x^2 - 16}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $L = -\frac{1}{8}$; B $L = \frac{3}{32}$; C $L = -\frac{7}{64}$; D $L = -\frac{3}{32}$.

1056. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de relația de recurență $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $x_0 > 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ divergent; C $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 0$;
 B $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent; D $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.

1057. Fie o mulțime $M \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ pentru care definim mulțimea de matrice ✓ ?

$H_3(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{M} \right\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $(H_3(\mathbb{R}), \cdot)$, unde “ \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor, este un grup;
 B $(H_3(\mathbb{Z}), \cdot)$, unde “ \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor, nu este un grup;
 C “ \cdot ” este o lege de compoziție pe $H_3(\mathbb{C})$;
 D $\exists A \in H_3(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A) \neq 1$.

1058. Valoarea lui $\arccos \left(\cos \left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos \frac{3}{5} \right) \right)$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{3\pi}{4}$; C $\frac{\pi}{3}$; D $-\frac{\pi}{4}$.

1059. Fie mulțimea $M = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n+1}{7n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A M admite o infinitate de puncte de acumulare;
- B $\pm \frac{1}{7}$ sunt puncte de acumulare ale lui M ;
- C M nu admite niciun punct de acumulare;
- D 0 este un punct de acumulare al lui M .

1060. Soluția generală a ecuației $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$ este: ✓ ?

- A $\pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$; C $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
- B $\pm \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; D $\pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1061. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{x + \pi} \right)$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi\sqrt{4}}{3}$; B $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; C $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$; D $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

1062. Fie triunghiul ABC cu $A \left(-\frac{1}{15}, \frac{8}{15} \right)$, $B \left(-\frac{3}{5}, 0 \right)$, $C \left(-\frac{1}{7}, 0 \right)$. Dintre următoarele ✓ ?
ecuații, care corespunde uneia din bisectoarele unghiului \hat{A} (fie bisectoarei interioare, fie celei exterioare)?

- A $x + 2y - 1 = 0$; C $10x - 5y - 2 = 0$;
- B $-x + 2y + 4 = 0$; D $12x - 6y + 4 = 0$.

1063. Fie numerele complexe $a, z \in \mathbb{C}$, unde $a = 4 + 4i$. Care este reprezentarea geomet- ✓ ?
rică a punctelor din plan ce satisfac inegalitatea: $2 < |z - a| < 3$?

- A interiorul parabolei $y^2 = 6x$;
- B coroana circulară dintre cercurile centrate în $(2, 4)$ de raze 2, respectiv 3;
- C \emptyset ;
- D parabola $y^2 = 6x$.

1064. Fie $I = \int_0^4 \frac{1}{4 + 2^x} dx$. Care variante de răspuns indică valoarea lui I ? ✓ ?

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{\pi}{2}$; D 0.

1065. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Care dintre următoarele afirmații sunt ✓ ?
corecte?

- A $y = 1$ este asimptotă oblică pentru G_f ;

- B $y = -2x + 7$ este ecuația tangentei la G_f în $x = 2$;
 C ecuația $a = f(x)$ are soluție unică pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
 D G_f are două asimptote.

1066. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2 \sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4 + 1)^3}}$ este: ✓ ?

- A $\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{\frac{17}{16}}$; B $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$; C $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{2}$; D $\sqrt[4]{\frac{13}{12}} - \sqrt[4]{3}$.

1067. Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Dacă are loc egalitatea $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$ ✓ ? atunci care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A triunghiul este echilateral; C triunghiul este dreptunghic;
 B triunghiul este isoscel; D triunghiul este oarecare.

1068. Se consideră polinomul $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$. Pentru ce valori ale lui a ✓ ? polinomul are toate rădăcinile reale?

- A $(-\infty, -1]$; C $[-1, 3]$;
 B $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$; D $[3, \infty)$.

1069. Fie $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \cdot (\sin x + \cos x)} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt ✓ ? adevărate?

- A $I = \ln 2 - 1$; B $I = -\ln 2 + 1$; C $I < 0$; D $I > 0$.

1070. Fie A, B, C vârfurile unui triunghi echilateral. Circumferința cercului format prin ✓ ? unirea celor trei vârfuri este egală cu 16. Fie a aria triunghiului, P perimetrul și r raza cercului înscris triunghiului. Sunt adevărate următoarele afirmații:

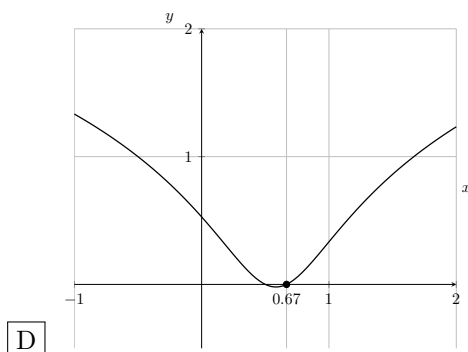
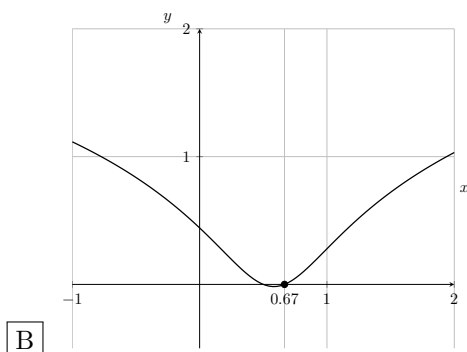
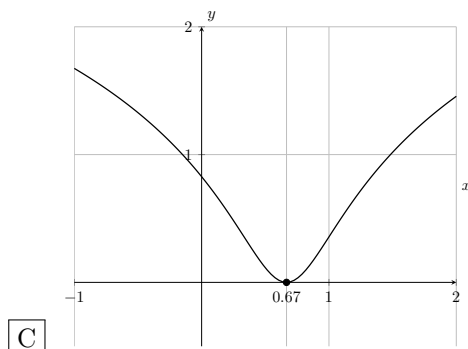
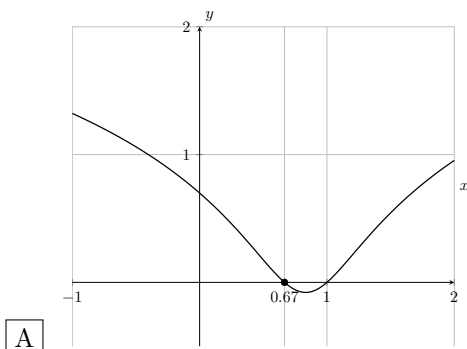
- A $\frac{a}{P^2} \in \mathbb{Q}$; B $P < r$; C $\frac{P}{a} = \frac{\pi}{2}$; D $a > P^2$.

1071. Numărul legilor de compoziție comutative ce pot fi definite pe o mulțime finită cu ✓ ? n elemente este:

- A $n^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$; B $n^{\frac{n \cdot n}{2}}$; C $n^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$; D $(n+1)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$.

Testul 6

1072. Care dintre următoarele grafice reprezintă corect funcția $y = \log_7(9x^2 - 12x + 5)$? ✓ ?



1073. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; B $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; C $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; D $I = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

1074. Care este valoarea minimă a expresiei $\cos^{2^{n+1}} x + \sin^{2^{n+1}} x$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$? ✓ ?

A $\frac{1}{2^{2^n-1}}$; B $\frac{1}{2^{2^n}}$; C $\frac{1}{2^n}$; D 0.

1075. Fie $\triangle ABC$ în care are loc relația: $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$. Ce fel de triunghi este $\triangle ABC$? ✓ ?

A dreptunghic; B isoscel; C echilateral; D obtuzunghic.

1076. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

$$\begin{array}{ll} \text{A} \lim_{x \rightarrow 3} \left(x \cdot \det \left(\sum_{k=1}^{2024} A^k \right) \right) = 6072. & \text{C} \lim_{x \rightarrow 3} \left(x \cdot \det \left(\sum_{k=1}^{2024} A^k \right) \right) = 0. \\ \text{B} \lim_{x \rightarrow 3} \left(x \cdot \det \left(\sum_{k=1}^{2024} A^k \right) \right) = 3. & \text{D} A^{2024} = 10^{2023} A. \end{array}$$

1077. Fie $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln 2((x+h)^n - x^n)}{h}$, unde $n \geq 2$. Care este valoarea lui L ? ✓ ?

$$\text{A} \ln 2; \quad \text{B} 0; \quad \text{C} \ln 2 \cdot n \cdot x^{n-1}; \quad \text{D} \ln 2 \cdot x.$$

1078. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ și următoarele afirmații: ✓ ?

- (i) pentru $a = 1$ sistemul este incompatibil
- (ii) pentru $a = 1$ și $a = -2$ sistemul este incompatibil
- (iii) pentru $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ sistemul este compatibil determinat cu $x = y = z$
- (iv) pentru $a = -2$ sistemul este incompatibil
- (v) pentru $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ sistemul este incompatibil
- (vi) pentru $a = 1$ sistemul este compatibil determinat cu $x = y = z = \frac{1}{a+2}$

Sunt adevărate:

$$\text{A} \text{ (i), (ii), (v)}; \quad \text{B} \text{ (iii), (iv)}; \quad \text{C} \text{ (v), (vi)}; \quad \text{D} \text{ (ii), (vi)}.$$

1079. Fie $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + 2 \cos x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$$\begin{array}{ll} \text{A} I = \ln \frac{2}{3}; & \text{C} I > 0; \\ \text{B} I = 2(\ln 2 - \ln 3); & \text{D} I = \ln \frac{4}{3}. \end{array}$$

1080. Fie mulțimea $M = \{C_{5n}^0, C_{5n}^1, C_{5n}^1, \dots, C_{5n}^{5n-1}, C_{5n}^{5n}\}$, unde n este număr natural $\neq 0$. Care este elementul cel mai mare din mulțime? ✓ ?

$$\text{A} C_{5n}^{5n}; \quad \text{B} C_{5n}^{5n-1}; \quad \text{C} C_{5n}^{\frac{5n}{2}-1}; \quad \text{D} C_{5n}^{\frac{5n}{2}}.$$

1081. Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^4 x$. Primitiva lui f a cărei grafic trece prin punctul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi+9}{32}\right)$ este: ✓ ?

$$\text{A} F(x) = \frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{16} + \frac{1}{16};$$

$$\text{B } F(x) = \frac{\sin(4x) + 4 \sin(2x) + 12x}{32} + \frac{\pi}{32};$$

$$\text{C } F(x) = \frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{32};$$

$$\text{D } F(x) = \frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{32} + \frac{1}{32}.$$

1082. Care este valoarea maximă a expresiei $(36 \cos^2 x + 36 \sin x - 34)^2$? ✓ ?

$$\text{A } 0; \quad \text{B } 121; \quad \text{C } \text{alt răspuns}; \quad \text{D } 4.$$

1083. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ este: ✓ ?

$$\text{A } 1; \quad \text{B } \frac{\pi}{4}; \quad \text{C } \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{D } \frac{\pi}{2}.$$

1084. Fie 33 de puncte în plan dintre care 8 sunt coliniare și oricare alte 3 puncte nu sunt. Dacă ar fi să unim toate aceste puncte, de câte drepte este nevoie? ✓ ?

$$\text{A } 500 \text{ drepte}; \quad \text{B } 502 \text{ drepte}; \quad \text{C } 501 \text{ drepte}; \quad \text{D } 499 \text{ drepte}.$$

1085. Fie $z = \sqrt{3} + 3i$ și z_0, z_1, z_2, z_3 rădăcinile de ordin 4 ale lui z . Care dintre următoarele afirmații sunt false? ✓ ?

$$\text{A } z_0^2 + z_1^2 + \frac{1}{2} z_2 z_3 \in \mathbb{R}; \quad \text{C } z_0^2 + z_1^2 + \frac{1}{2} z_2 z_3 = -\frac{\sqrt{12}}{4} \cos \frac{4\pi}{3};$$

$$\text{B } z_0^2 + z_1^2 + \frac{1}{2} z_2 z_3 \in \mathbb{R}; \quad \text{D } z_0^2 + z_1^2 + \frac{1}{2} z_2 z_3 \notin \mathbb{R}.$$

1086. Fie $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 - 2x - 1)}{\ln(x^7 + 3x - 4)}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$$\text{A } L = 0; \quad \text{B } L = \infty; \quad \text{C } L = \frac{3}{7}; \quad \text{D } L = \frac{7}{3}.$$

1087. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu latura de 5 cm. Care dintre următoarele variante de răspuns indică modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$? ✓ ?

$$\text{A } 15; \quad \text{B } 20; \quad \text{C } 10; \quad \text{D } 25.$$

1088. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(2^{2^n})} + \frac{1}{\ln(3^{3^n})} + \dots + \frac{1}{\ln(n^{n^2})} \right)$ este: ✓ ?

$$\text{A } 1; \quad \text{B } \frac{1}{2}; \quad \text{C } 0; \quad \text{D } \frac{1}{2 \ln 2}.$$

1089. Fie $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = -2x, v(x) = 2 + x$. Știind că funcția $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = 4x$ este rezultatul aplicării funcțiilor u și v într-o anumită ordine și de un anumit număr de ori, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A funcția v este aplicată mereu de un număr par de ori;
 B funcția v este aplicată mereu de un număr putere a lui 2 de ori;
 C funcția v este aplicată mereu de un număr impar de ori;
 D niciuna dintre variante.

1090. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3 \sin x + 4}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$; C $I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} \right)$;
 B $I = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$; D $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} \right)$.

1091. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{x^2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = e$; C $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right), \forall x \in (0, \infty)$;
 B f are un punct de extrem global; D f este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

1092. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^{\pi} x} dx$. Valoarea lui I este:

- A π ; B 0 ; C $\frac{\pi}{4}$; D $\frac{\pi}{2}$.

1093. Fie $A(0, 0), B(4, 0), C(2, 3)$ varfurile unui triunghi. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Lungimea medianei din A este $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; C Lungimea medianei din A este $\frac{3\sqrt{5}}{4}$;
 B Coordonatele centrului de greutate sunt $(2, 1)$; D Coordonatele centrului de greutate sunt $(3, 2)$.

1094. Fie $I = \int_3^7 \frac{\ln(x-3)}{\ln[(x-3)(7-x)]} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $I = 4$; B $I = 0$; C $I < 0$; D $I = 2$.

1095. Se consideră legea de compoziție definită pe intervalul $(2, \infty)$ prin: $x * y = (x - 2)^{\ln(y-2)} + 2$. Sunt false următoarele afirmații:

- A legea de compoziție este comutativă;

- B legea de compoziție admite element neutru;
- C $\ln 2$ este element neutru pentru lege;
- D $e + 2$ este element neutru pentru lege.

Testul 7

1096. Rezultatul calcului $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ este: ✓ ?

- A 0; B 1; C π ; D nu există.

1097. Știind că $E(x) = \sin x + \sin(2x) - \sin(3x)$, atunci: ✓ ?

- A $E(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$; C $E(x) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin(3x)}$;
 B $E(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$; D $E(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{7x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

1098. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(4, 2)$, $B(-2, 6)$ și $C(8, -2)$, și G centrul ✓ ?
de greutate al acestui triunghi. Distanța de la G la dreapta de ecuație $l: x - y + 2 = 0$
este egală cu:

- A $\frac{10}{3\sqrt{2}}$; B $\frac{10}{3}$; C $\frac{5}{3\sqrt{2}}$; D $\frac{5}{6}$.

1099. Fie dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^n$. Cunoscându-se relația $\frac{T_6}{T_{n-5}} = 20$, care ✓ ?
dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $n \in \{9, 10\}$; B $n \in \{3, 9\}$; C $n = 9$; D niciuna.

1100. Notăm $a = \log_7 125$ și $b = \log_7 3$. Atunci valoarea expresiei $\log_7(1, 80)$ este: ✓ ?

- A $\frac{3b + 5a}{2}$; B $\frac{b - 2a}{7}$; C $\frac{6b - a}{3}$; D $\frac{5b + a}{3}$.

1101. Valoarea integralei $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2 \sin x - 3 \cos x + 5} dx$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{5}\right)$; C $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
 B $\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; D $\frac{\pi\sqrt{2}}{5}$.

1102. Fie triunghiul ABC , astfel încât lungimile laturilor sale satisfac relația ✓ ?

$$\frac{AB}{AC + BC} + \frac{BC}{AC + AB} = 1.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{6}$;

C $\cos(\hat{B}) = \frac{1}{2}$;

B $\triangle ABC$ este dreptunghic;

D $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$.

1103. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos(2x\pi) + i \sin(2x\pi)$. Atunci:

✓ ?

A f este un morfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul (\mathbb{C}^*, \cdot) ;

B f este injectivă și surjectivă;

C $f(x)$ este o rădăcină de ordinul 4 a unității pentru $x \in \{\frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

D Grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) sunt izomorfe.

1104. Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție "∗", $x ∗ y = 3(x-2)(y-2) + 2$. Ecuația $x ∗ x ∗ x = x$ are:

A o soluție;

B 2 soluții;

C 3 soluții;

D 4 soluții.

1105. Se consideră o funcție $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f'(x) = \frac{8x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$. Știind că în legea de definiție a funcției f , coeficientul termenului liber este 0, imaginea funcției este:

✓ ?

A \mathbb{R} ;

B $[\frac{1}{4}, \infty)$;

C $[-\frac{3}{8}, \infty)$;

D $(-\infty, \frac{3}{8}]$.

1106. Fie polinomul $f = 2x^3 - 24x^2 + 94x - 120$. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f , cu $x_1 < x_2 < x_3$, atunci rezultatul calculului $\frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}$ este:

✓ ?

A $\frac{1}{6}$;

B $\frac{1}{2}$;

C $\frac{4}{5}$;

D 1.

Problemele 1107. și 1108. se referă la funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x \cdot x$.

1107. Rezultatul calculului $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^1 f(x) dx$ este:

✓ ?

A 1;

B $\frac{1}{2}$;

C $\frac{1}{8}$;

D 0.

1108. Suprafața plană determinată de graficul funcției $g, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu:

✓ ?

A 0;

B 1;

C e ;

D e^2 .

1109. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci rezultatul calculului

✓ ?

$$A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2$$

este:

- A O_2 ; B I_2 ; C A^2 ; D A^{12} .

1110. Valoarea limitei

✓ ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$$

este:

- A 0; B ∞ ; C $\frac{\pi}{2}$; D π .

1111. Fie sistemul de ecuații

✓ ?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

și tripletul (x, y, z) , o soluție nenulă a sistemului. Valoarea expresiei $\frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ este:

- A $\frac{7x}{5}$; B $\frac{73}{75}$; C $\frac{y - 7z}{5}$; D $\frac{77}{75}$.

Problemele 1112. și 1113. se referă la numărul complex și nenul z , unde $(z+1)^2 = z$.

1112. Rezultatul calculului $\frac{z^{4044} + 1}{z^{2022}}$ este:

✓ ?

- A z^2 ; B 1; C 2; D z .

1113. Notăm $P = \sum_{k=1}^{2024} z^k$ și $Q = \prod_{k=1}^{2024} z^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $P, Q \in \mathbb{R}$; C $P + Q = 0$;
 B $P \leq Q$; D $P > Q$.

1114. Fie un poligon cu n laturi și vârfurile A_0, A_1, \dots, A_n . Atunci rezultatul calculului

✓ ?

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_k \cdot A_{k+1}} + \overrightarrow{A_n \cdot A_0}$$
 este:

- A $\overrightarrow{A_{n-1} \cdot A_n}$; B $\vec{0}$; C $\overrightarrow{A_n \cdot A_0}$; D $\overrightarrow{A_0 \cdot A_n}$.

1115. Fie polinomul $f = x^3 - x^2 + x + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3 . Valoarea determinanțului

✓ ?

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

este:

- A x_1^2 ; B x_2^2 ; C x_3^2 ; D 0.

1116. Valoarea limitei

✓ ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2023} + 2^{2023} + \dots + n^{2023}}{n^{2024}}$$

este:

- A 0; B ∞ ; C $\frac{1}{2024}$; D 2024.

1117. Fie polinomul $f = 2X^{2024} + 6X^{2023} + 17X^2 + 8$. Dacă $x_i, i = \overline{1, 2024}$ sunt rădăcinile

✓ ?

polinomului f , rezultatul calculului $\sum_{i=1}^{2024} x_i \cdot \prod_{i=1}^{2024} x_i$ este:

- A -12; B 6; C -2024; D 17.

1118. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 2x - 2)$. Care dintre următoarele afirmații

✓ ?

sunt adevărate?

- A f crescătoare pe $[-4, +\infty)$; C f crescătoare pe $(-\infty, -4]$;
 B $f(x) \leq 6e^{-4}, \forall x \in (-\infty, 0]$; D f descrescătoare pe \mathbb{R} .

1119. Rezultatul calculului $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)} dx$ este:

✓ ?

- A $\frac{2}{7}$; B $\frac{4}{3}$; C $\frac{\pi}{4}$; D $\frac{4\pi}{3}$.

Testul 8

1120. Fie matricea $F = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $F^{4k+1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix};$

C $F^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix};$

B $F^{4k+2} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix};$

D $\det \sum_{i=0}^3 F^{4k+i} = \hat{0}.$

1121. Fie \vec{i} și \vec{j} versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (p+2)\vec{j}$ și $\vec{v} = 9\vec{i} - 6\vec{j}$ sunt paraleli, atunci parametrul $p \in \mathbb{R}$ poate să fie: ✓ ?

A $-2;$

B $-4;$

C $0;$

D $2.$

1122. Se notează cu ℓ valoarea limitei ✓ ?

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

A $\ell = \infty;$

B $\ell < 1;$

C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

D $\ell \in (2, \infty).$

1123. Suma soluțiilor ecuației $9^{x+1} - 6^x = 2^{2x}$ este ✓ ?

A $-2;$

B $-9;$

C $2;$

D $20.$

1124. Punctele $P(1,3)$, $Q(3,2)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $PQRS$ și $H(2,1)$ este centrul de greutate al triunghiului PQR . Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A Aria triunghiului PQR este egală cu 4.5.

B Aria triunghiului PQR este egală cu 9.

C Aria paralelogramului $PQRS$ este egală cu 9.

D Aria paralelogramului $PQRS$ este egală cu 18.

1125. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ este ✓ ?

A $0;$

B $1;$

C $\sqrt{2} - 1;$

D $\ln(1 + \sqrt{2}).$

1126. Dacă funcția $f: (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$ este morfism de grupuri și $f(\hat{2}) = \hat{4}$, atunci ✓ ?

- A $f(\hat{1}) = \hat{2}$;
 B $f(\hat{1}) = \hat{8}$;
 C $f(\hat{3}) = \hat{5}$;
 D Nu există astfel de morfism.

1127. Fie k un parametru real și considerăm sistemul de ecuații

✓ ?

$$\begin{cases} x - ky + z = 0 \\ -x + ky + z = 0 \\ x + y - kz = 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Sistemul este compatibil pentru orice valoare a lui k ;
 B Există $k \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;
 C Există un singur număr k pentru care determinantul matricei sistemului este 0;
 D z ia aceeași valoare pentru orice k pentru care sistemul este compatibil.

1128. Un grup de 9 copii doresc să organizeze un meci de volei. Pentru aceasta, copiii aleg un arbirtu dintre ei, apoi dintre ceilalți formează 2 echipe denumite A și B , fiecare având câte 4 jucători. În câte moduri pot face acest lucru?

✓ ?

- A 630;
 B 252;
 C 504;
 D 1260.

1129. Valoarea integralei $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 3x)} dx$ este:

✓ ?

- A $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$;
 B $\frac{\sqrt{3}}{4}$;
 C $\frac{1}{2}$;
 D $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Problemele 1130. și 1131. se referă la funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

1130. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ este

✓ ?

- A $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$;
 B $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$;
 C $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 D $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1131. Numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ în intervalul $[0, \pi]$ este

✓ ?

- A 1;
 B 2;
 C 3;
 D 4.

1132. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ este:

✓ ?

- A 0;
 B $\frac{1}{2}$;
 C 1;
 D $+\infty$.

1133. Fie a un parametru real și considerăm legea de compoziție $x*y = xy + 2ax + 2ay + 4$ pe \mathbb{R} . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $*$ admite element neutru, atunci a este unic determinat;
- B Există mai multe valori ale lui a pentru care $*$ admite element neutru;
- C Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = \frac{2}{a}$;
- D Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = -\frac{2}{a}$.

1134. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax)}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ bx + 3x^2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă f este derivabilă pe \mathbb{R} , atunci valoarea sumei $a + b$ este:

- A 2; B -1; C 0; D Alt răspuns.

1135. Folosind notațiile obișnuite în triunghiul ABC avem $a = 10$, $b = 2$ și $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$. ✓ ?
Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

- A $c = 4\sqrt{5}$. C $\sin C = \frac{4}{5}$.
- B $c = 6$. D $\operatorname{Aria}(ABC) = 8$.

1136. Fiind dată funcția g cu $g(3x) = 4g(x)$, $\int_0^1 g(x) dx = 3$, să se indice care este ✓ ?
valoarea integralei $\int_1^3 g(x) dx$.

- A 12; B 24; C 33; D 36.

1137. Dacă M este mulțimea numerelor impare de cinci cifre, atunci numărul elementelor ✓ ?
din M este

- A 45000; B 44999; C 45001; D 50000.

1138. Partea imaginară a numărului $(1+i)^{2024}$ este egală cu:

✓ ?

- A 0; B 2^{1012} ; C -2^{1012} ; D 2^{2024} .

1139. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_4 x + \log_{16} x^2 + \log_{64} x^3 + \dots + \log_{4^n} x^n = n$, atunci ✓ ?

A $S \subseteq [0, 2)$;

C S are exact 1 element;

B $S \subseteq [1, 4]$;

D S sunt exact 3 elemente.

1140. Fie polinomul $Q \in \mathbb{R}[x]$. Știind că acesta are forma

✓ ?

$$Q(x) = \frac{x^m}{b_m b_{m-1}} + \frac{x^{m-1}}{b_{m-1} b_{m-2}} + \cdots + \frac{x^2}{b_2 b_1} + \frac{m}{b_1 b_m}$$

care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate, considerând că b_1, b_2, \dots, b_m sunt termenii unei progresii geometrice?

A $(x-1) \nmid Q$;

C $Q(1) = 0$;

B $Q(1) = m + \frac{m}{b_1 b_m}$;

D $Q(1) = m - 1 + \frac{m}{b_1 b_m}$.

1141. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $J_n = \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3} dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

✓ ?

A $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{3n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C $\lim_{n \rightarrow \infty} n J_n = \frac{1}{3}$.

B $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

D $\lim_{n \rightarrow \infty} n J_n = \frac{1}{6}$.

1142. Fie șirul (b_n) cu $b_1 = 3$ și definit prin relația de recurență

✓ ?

$$n \cdot b_{n+1} = (3n+3)(b_n + n \cdot 3^n), \quad n \geq 1.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $b_n = n^2 3^n$

C $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

B $b_n = (n+1)^2 3^n$

D $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

1143. Considerăm triunghiul dreptunghic PQR ($m(\hat{Q}) = 90^\circ$), unde p, q sunt lungimile catetelor și r lungimea ipotenuzei acestui triunghi. Considerăm, de asemenea, punctele $G(-2, 0)$, $H(2, 0)$, $N\left(\frac{q-r}{p}, 0\right)$ și dreapta (d) $px + qy + r = 0$. Notăm prin $\text{dist}(X, d)$ distanța de la punctul oarecare X la dreapta d . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

✓ ?

A Punctele $G(-2, 0)$ și $H(2, 0)$ aparțin dreptei d ;

B $\text{dist}(N, d) = \frac{q}{r}$;

C Punctul $N\left(\frac{q-r}{p}, 0\right)$ aparține dreptei d ;

D $\frac{|q^2 - 3 \cdot p^2|}{r^2}$.

Testul 9

1144. Numărul de valori a lui $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ care verifică ecuația ✓ ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin \theta & \cos \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \cos^2 \theta & 1 - \sin^2 \theta & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

sunt:

- A 1; B 2; C 3; D 0.

1145. Rezultatul calculului $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!}$ este: ✓ ?

- A 0; B ∞ ; C $\frac{1}{2024}$; D 2024.

1146. Notăm cu $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $S \in [1, 2)$; B $S = -1$; C $S \in \mathbb{Z}$; D $S < 0$.

1147. Fie triunghiul ABC , cu $A(2, 0)$, $B(-3, -3)$ și $G(-1, \frac{1}{3})$, unde G reprezintă centrul de greutate al triunghiului. Fie d_1 perpendiculara dusă din B pe AC , d_2 perpendiculara dusă din C pe AB și d_3 perpendiculara dusă din A pe BC . Notăm cu α unghiul ascuțit format de d_1 și d_2 , cu θ unghiul ascuțit format de d_1 și d_3 , cu γ unghiul ascuțit format de d_2 și d_3 . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\tan \alpha = 3 \tan \theta$; C $\tan \gamma = 4 \tan \alpha$;
 B $\tan \alpha + 3 \tan \theta + 13 \tan \gamma = 24$; D $12 \tan \theta = 13 \tan \gamma$.

1148. Considerăm T ca fiind cel mai mic număr natural cu suma și produsul cifrelor egale cu 42. Atunci numărul cifrelor lui T este: ✓ ?

- A 30; B 31; C 32; D 33.

1149. Fie $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I = \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$; C $I = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}$;
 B $I > 0$; D $I < 0$.

1150. În inelul \mathbb{Z}_{11} considerăm elementul $\hat{3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\widehat{3}^1 + \widehat{3}^5 = \widehat{4}$;

C $\widehat{3}^{2024} = \widehat{1}$;

B $\widehat{3}^{22} - \widehat{3}^{14} - \widehat{3}^{13} = \widehat{0}$;

D $\widehat{3}^{2024} + \widehat{3}^{7073} + \widehat{3}^{9174} = \widehat{2}$.

1151. Fie ecuația $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$, cu $x \in [0, \pi]$. Numărul soluțiilor distincte ale ecuației este: ✓ ?

A 1;

B 2;

C 3;

D 4.

1152. Notăm $I = \int_6^{21} \frac{4(x^7 + 7x^6 + 3x^4 + 8x^3 + 12x^2)}{2x^3(x^3 + 7x^2 + 3) + 8x(2x + 3)} dx$. Atunci: ✓ ?

A $I = 105$;

B $I = 405$;

C $I = 201$;

D $I = 441$.

1153. Fie \vec{i} și \vec{j} versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = (m + 2)\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = (m - 2)\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari, atunci parametrul $m \in \mathbb{R}$ are valoarea: ✓ ?

A $-\frac{2}{3}$;

B $-\frac{4}{3}$;

C 0;

D $\frac{2}{3}$.

1154. Valoarea lui $\arctg \sqrt{5} - \arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$ este: ✓ ?

A $\arcsin \frac{2}{3}$;

B $\arccos \frac{3}{\sqrt{5}}$;

C $\operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{5}}$;

D $\arctg \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Problemele **1155.** și **1156.** se referă la polinomul $f = x^3 + mx^2 + 20x + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f .

1155. Dacă $m = 2\sqrt{15}$ și $n \neq 0$, atunci valoarea expresiei $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$ este: ✓ ?

A 7;

B $2x_2^2$;

C x_1^2 ;

D 0.

1156. Dacă $x = -\frac{m}{4}$ este o rădăcină dublă a polinomului f , cu $m > 0$, atunci valoarea lui n este: ✓ ?

A 4;

B 8;

C 16;

D 20.

1157. Fie $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{-2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 3} \right|$;

B $I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2} - 3}{-2\sqrt{2} - 3} \right|$;

$$\boxed{\text{C}} \quad I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right| - \ln \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} \right| \right);$$

$$\boxed{\text{D}} \quad I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} \right| - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right| \right).$$

1158. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$ cu soluții în \mathbb{R} . Fie $x + y + z = \frac{a}{b}$, $\checkmark ?$

unde tripletul (x, y, z) este soluție a sistemului de ecuații. Atunci rezultatul calculului $a - b$ este:

$$\boxed{\text{A}} \quad 11;$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 15;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad 17;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad 29.$$

1159. Rezultatul calculului $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \arctg x}$ este: $\checkmark ?$

$$\boxed{\text{A}} \quad L = \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad L = \frac{4}{2};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad L = \frac{1}{3};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad L = -\frac{1}{2}.$$

Problemele **1160.** și **1161.** se referă la funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)$.

1160. Pe $(1, +\infty)$, funcția f este: $\checkmark ?$

$$\boxed{\text{A}} \quad \text{crescătoare};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \text{concavă};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \text{descrescătoare};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \text{convexă}.$$

1161. Rezultatul calculului $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n f'(k)$ este: $\checkmark ?$

$$\boxed{\text{A}} \quad -\frac{3}{2};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{3}{2};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -\frac{1}{2}.$$

1162. Fie $I = \int_0^e \frac{e^x}{e^x + e^{e-x}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? $\checkmark ?$

$$\boxed{\text{A}} \quad I = \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad I = \frac{e}{2};$$

$$\boxed{\text{C}} \quad I = e;$$

$$\boxed{\text{D}} \quad I = 0.$$

1163. Se consideră două drepte d_1 și d_2 , astfel încât $d_1 : 3x + 2y - 5 = 0$ și $d_2 : 2x + 3y + 1 = 0$. Fie a un număr real și P punctul de coordonate $(2, a)$, astfel încât punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 . Atunci valoarea lui a poate fi: $\checkmark ?$

$$\boxed{\text{A}} \quad -\frac{6}{5};$$

$$\boxed{\text{B}} \quad 0;$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \frac{5}{6};$$

$$\boxed{\text{D}} \quad -4.$$

1164. Se dă inecuația $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$. Care dintre următoarele variante de răspuns $\checkmark ?$ sunt soluții ale acesteia?

A 2;

B 3;

C 4;

D 5.

1165. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2n}{2k+n} \right)$ este: ✓ ?

A $1 + \ln 3$;

B $\ln \frac{5}{3}$;

C $1 + 2\sqrt{3}$;

D $\frac{1}{2} \ln 3$.

Problemele **1166.** și **1167.** se referă la șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 1}$, $z_n = \sum_{k=1}^n i^k$.

1166. Rezultatul calculului $\frac{z_{2025} + z_{2026} + z_{2027}}{2}$ este: ✓ ?

A i ;

B $1 + i$;

C $-1 + i$;

D 1.

1167. Notăm $S = \sum_{k=1}^{2024} z_k$. Atunci rezultatul calculului $|S + \bar{S}|$ este: ✓ ?

A 2024;

B -2024;

C 1012;

D -1012.

Testul 10

1168. Fie $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos \frac{x}{2}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I = 1$; B $I = 2$; C $I = 4$; D $I = 0$.

1169. Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă are loc relația $\sin x = 5 \cos(x + y) \sin y$, valoarea maximă a lui $\operatorname{tg} x$ este: ✓ ?

- A $\frac{4}{\sqrt{5}}$; B 1; C $\frac{5}{2\sqrt{6}}$; D $\frac{1}{5}$.

1170. Valoarea lui $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$ este: ✓ ?

- A $\frac{\pi}{5}$; B $\frac{6\pi}{5}$; C $-\frac{\pi}{5}$; D $\sin \frac{\pi}{5}$.

1171. Punctul $B(7, 2)$ este vârful unui romb în care una dintre diagonale se află pe dreapta de ecuație $2y - x = 1$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Distanța de la vârful B la diagonală dată este egală cu $\sqrt{5}$;
 B Ecuația dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $2y + x - 10 = 0$;
 C Dacă punctul $A(9, 5)$ este un vârf al rombului, aria rombului este $\frac{16\sqrt{61}}{10}$;
 D Punctul $D\left(\frac{27}{5}, \frac{26}{5}\right)$ este de asemenea vârf al rombului.

1172. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2n-k)(2n+k)}}$ este: ✓ ?

- A 1; B $\frac{\pi}{6}$; C $\frac{\pi}{4}$; D $\frac{1}{2}$.

1173. Fie $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{\sqrt{2} - x}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$; B $I = \frac{1}{\sqrt{2}}$; C $I = \frac{1}{2}$; D $I = -\frac{1}{2}$.

1174. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(1-x)^3 + |x|$. Știind că $-5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și că ecuația $-5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 1 = 0$ are o singură rădăcină reală pozitivă aproximativ egală cu $a = 1.38342$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

- A f este crescătoare pe $(0, \infty)$; C f are un punct unghiular;
 B f are două puncte de extrem local; D f este crescătoare pe $(0, a)$.

1175. Fie $I = \int_0^\pi \sin^3 x dx$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată? ✓ ?

- A $I = \frac{4}{3}$; B $I = \frac{3}{2}$; C $I = \frac{2}{3}$; D $I = 0$.

1176. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 3$. Care este valoarea lui $\frac{3}{7} \cdot (\sin 2x + \cos 4x)$? ✓ ?

- A $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1}{2}$; D $-\frac{1}{3}$.

1177. Fie $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{2x-1}\right)^x = e^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $a = 2, b = 1$; B $a = 2, b = -1$; C $a = 2, b = 3$; D $a, b \notin \mathbb{R}$.

1178. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conține pe x^5 din dezvoltarea binomului ✓ ?

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{2020}$$

este:

- A C_{2020}^{807} ; B C_{2020}^{1213} ; C C_{2020}^{806} ; D C_{2020}^{1214} .

1179. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ definită prin $g(x) = e^x$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

- A g este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{R}^*, \cdot) ;
 B g este injectivă;
 C g este surjectivă;
 D g este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{R}^*, \cdot) .

1180. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ soluție a sistemului de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} \log_{100} a + \log_{81} b = 0 \\ \log_a 100 - \log_b 81 = 1. \end{cases}$$

Valoarea expresiei $\log_{30}(a^2) - \log_{30} b$ este egală cu:

- A 0; B 8; C 4; D 12.

1181. Piciorul perpendicularei din $(1, 2)$ pe dreapta d este $A(5, 4)$. Ecuația dreptei d este: ✓ ?

- A $4x - 2y + 13 = 0$; C $2x + y - 14 = 0$;
 B $2x + y + 7 = 0$; D $6x - 3y + 1 = 0$.

1182. Fie A un punct pe latura BC a triunghiului BCD astfel încât $\frac{BA}{AC} = \frac{3}{4}$ și fie M mijlocul segmentului AD . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$; C $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$;
 B $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})$; D $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{14}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$

1183. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$\sqrt{x - 5\sqrt{x+2} + 11} + \sqrt{x + 5\sqrt{x+2} + 11} = 7,$$

atunci

- A $2 \in S$; C mulțimea S este finită;
 B $14 \in S$; D mulțimea S este infinită;

1184. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n = \frac{n^n}{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}$. Care este limita acestui șir? ✓ ?

- A 0; B 1; C -1; D 2.

1185. Care este aria maximă a unui triunghi a cărui semiperimetru este $p = 4$? ✓ ?

- A $\sqrt{\frac{256}{27}}$; B $\sqrt{\frac{512}{27}}$; C $\sqrt{\frac{128}{9}}$; D $\sqrt{\frac{1024}{81}}$.

1186. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ este: ✓ ?

- A 1; B e ; C 0; D \sqrt{e} .

1187. Fie $I = \int_0^{\pi^2/16} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$$\boxed{\text{A}} \quad L = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \boxed{\text{B}} \quad L = -2\ln \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \boxed{\text{C}} \quad L = \frac{\ln 4}{2}; \quad \boxed{\text{D}} \quad L = \frac{\ln 2}{2}.$$

1188. Fie ecuația $\left(\frac{2+iw}{2-iw}\right)^2 + \left(\frac{2-iw}{2+iw}\right) + 1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații ✓ ? sunt adevărate?

- A Ecuția are 3 soluții; C Ecuția nu are soluții reale;
 B Ecuția are 1 soluție reală; D Suma soluțiilor ecuației este -1 .

1189. Se dă inecuația $\log_2(2x+3) - 2\log_2 \frac{x}{8\sqrt{2}} < 7$. Care sunt valorile lui x care satisfac ✓ ? această inecuație?

- A $x \in (0, 1) \cup (3, \infty)$; C $x \in (-\infty, -1)$;
 B $x \in (3, \infty)$; D Nu există valori pentru x care satisfac inecuația.

1190. Fie (G, \cdot) un grup abelian cu elementul neutru e și $x, y \in G$ astfel încât $\text{ord}(x) = 2$ ✓ ? și $xy = y^2$. Atunci $y^{6561} = ?$

- A 1; B e ; C y ; D y^2 ;

1191. Se consideră dreapta $d : 4x - y = 0$ și punctele $A(2, 3)$, $B(0, 0)$. Coordonatele ✓ ? punctului C de pe dreapta d , pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în C , pot fi:

- A $C\left(\frac{14}{17}, \frac{56}{17}\right)$; B $C\left(\frac{34}{17}, \frac{136}{17}\right)$; C $C\left(\frac{13}{17}, \frac{42}{17}\right)$; D $C\left(\frac{10}{17}, \frac{40}{17}\right)$.

PARTEA

III

Răspunsuri și indicații

Răspunsuri

-
- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D | 23. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D | 45. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 67. <input type="checkbox"/> D |
| 2. <input type="checkbox"/> C | 24. <input type="checkbox"/> C | 46. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 68. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C |
| 3. <input type="checkbox"/> A | 25. <input type="checkbox"/> B | 47. <input type="checkbox"/> D | 69. <input type="checkbox"/> D |
| 4. <input type="checkbox"/> B | 26. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 48. <input type="checkbox"/> B | 70. <input type="checkbox"/> D |
| 5. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 27. <input type="checkbox"/> B | 49. <input type="checkbox"/> A | 71. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B |
| 6. <input type="checkbox"/> C | 28. <input type="checkbox"/> A | 50. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 72. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D |
| 7. <input type="checkbox"/> B | 29. <input type="checkbox"/> A | 51. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 73. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D |
| 8. <input type="checkbox"/> D | 30. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 52. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 74. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C |
| 9. <input type="checkbox"/> C | 31. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 53. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 75. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C |
| 10. <input type="checkbox"/> D | 32. <input type="checkbox"/> A | 54. <input type="checkbox"/> C | 76. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B |
| 11. <input type="checkbox"/> D | 33. <input type="checkbox"/> B | 55. <input type="checkbox"/> C | 77. <input type="checkbox"/> D |
| 12. <input type="checkbox"/> D | 34. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 56. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 78. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D |
| 13. <input type="checkbox"/> C | 35. <input type="checkbox"/> C | 57. <input type="checkbox"/> B | 79. <input type="checkbox"/> C |
| 14. <input type="checkbox"/> D | 36. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C | 58. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 80. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D |
| 15. <input type="checkbox"/> C | 37. <input type="checkbox"/> B | 59. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 81. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D |
| 16. <input type="checkbox"/> C | 38. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D | 60. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 82. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C |
| 17. <input type="checkbox"/> D | 39. <input type="checkbox"/> C | 61. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 83. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D |
| 18. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> D | 40. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 62. <input type="checkbox"/> B | 84. <input type="checkbox"/> D |
| 19. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 41. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B | 63. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 85. <input type="checkbox"/> C |
| 20. <input type="checkbox"/> D | 42. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C | 64. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C | 86. <input type="checkbox"/> B |
| 21. <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> D | 43. <input type="checkbox"/> B | 65. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 87. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B |
| 22. <input type="checkbox"/> B | 44. <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 66. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C | 88. <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> C |

89. B C
90. A B
91. A B D
92. B C
93. A B
94. A C
95. A D
96. A B D
97. B C D
98. A B
99. C D
100. C D
101. B D
102. B C
103. c
104. A C
105. A B
106. D
107. A D
108. A C
109. B D
110. D
111. B C
112. C
113. C
114. B
115. A D
116. A
117. C
118. A B D
119. B C D
120. A D
121. A C D

122. A C
123. B
124. B D
125. B D
126. A B
127. A B D
128. B C
129. C
130. D
131. A C
132. A
133. B
134. A D
135. C
136. B C
137. B D
138. A
139. C
140. D
141. A
142. C
143. B
144. C
145. B C D
146. C
147. A B
148. B
149. A B D
150. C
151. B
152. B
153. B C D
154. A B D

155. B C D
156. A B C
157. B
158. C
159. A D
160. B D
161. B
162. C
163. A D
164. B
165. A C D
166. A B C
167. B
168. A B
169. D
170. C
171. D
172. A B
173. B
174. A
175. D
176. A
177. B
178. A C D
179. C D
180. A
181. D
182. A
183. B C
184. B
185. B D
186. B
187. C

188. B C
189. D
190. D
191. B
192. A
193. A
194. C
195. A C D
196. C
197. A
198. C
199. B
200. A
201. C
202. A
203. B C D
204. A B D
205. A
206. B
207. A C
208. D
209. A
210. D
211. A D
212. A C
213. A
214. A
215. B C
216. A C
217. B C D
218. A C
219. B C D
220. B C

221. A
222. A B C
223. C D
224. B C
225. B D
226. C D
227. A
228. B
229. B
230. A B
231. C D
232. C
233. A
234. B
235. B
236. D
237. B
238. A C D
239. B
240. A B D
241. C
242. B
243. A C D
244. C
245. A
246. A
247. D
248. A D
249. B D
250. A
251. C
252. A
253. C
254. B
255. B C
256. B C
257. A B D
258. B
259. A
260. A
261. B
262. A
263. B
264. C D
265. A D
266. B D
267. A B
268. A
269. A
270. A B C
271. A C D
272. B C D
273. B D
274. D
275. A
276. A B C
277. B
278. B
279. B
280. A B
281. B
282. A C
283. C
284. A C D
285. C
286. B
287. C D
288. D
289. A C D
290. C D
291. A
292. D
293. C
294. A B
295. B D
296. B C
297. C
298. C
299. B
300. D
301. A
302. A D
303. C
304. B C
305. B
306. C
307. C
308. A D
309. b
310. A D
311. A D
312. B D
313. D
314. B D
315. B
316. A C
317. A
318. A B D
319. A C
320. A B C
321. B D
322. A D
323. A D
324. A
325. A
326. C D
327. A B D
328. B D
329. A B C
330. A
331. C D
332. A
333. C
334. B D
335. A C
336. A B C
337. D
338. A B C
339. A C
340. C
341. B C
342. C D
343. B
344. A B
345. C
346. B
347. B
348. C
349. B
350. D
351. C
352. C

353. A C D
354. A
355. B
356. B C
357. B
358. B C D
359. C D
360. C D
361. B
362. C
363. B
364. A C
365. A D
366. A B D
367. B
368. A
369. A
370. C
371. B D
372. A B D
373. A C
374. B D
375. A C
376. B C D
377. A C D
378. B C
379. A B C
380. C
381. B
382. C
383. B
384. A
385. B C

386. A D
387. A D
388. A B
389. B
390. A B D
391. A C
392. A
393. A D
394. A B D
395. D
396. C D
397. B
398. D
399. D
400. A B D
401. A
402. B C
403. C
404. D
405. A D
406. C
407. A
408. C
409. B
410. A B C
411. B
412. C
413. A
414. C
415. B
416. A B D
417. A
418. A

419. B
420. D
421. C
422. D
423. B
424. B C
425. D
426. B
427. B
428. B
429. A D
430. D
431. B C
432. B
433. A C
434. B
435. C
436. A D
437. D
438. B C
439. A C
440. A B C
441. B D
442. B C
443. C
444. B C
445. A C D
446. A B
447. A B
448. A B C
449. A D
450. A D
451. B C D

452. A D
453. A B
454. C
455. A
456. A C D
457. A C
458. D
459. B C D
460. A B
461. B C
462. A
463. C D
464. C
465. A D
466. B C
467. A
468. B D
469. C
470. B
471. A C
472. B
473. A B D
474. A D
475. C
476. A B D
477. A C
478. B C
479. C
480. C
481. A B C
482. D
483. C
484. C

485. B
486. A D
487. A
488. B
489. A B
490. C
491. B C
492. A B
493. A
494. C
495. D
496. B
497. A
498. D
499. B D
500. C
501. B
502. B
503. B
504. B
505. A C
506. A
507. A
508. C
509. B D
510. C
511. C
512. B C D
513. A B C
514. B D
515. C
516. B
517. C
518. B C
519. C
520. C
521. D
522. A C D
523. A C
524. A C D
525. A D
526. A
527. A B
528. A B
529. C D
530. B D
531. D
532. B
533. A B C
534. C
535. A B
536. C D
537. B C
538. C
539. C
540. B
541. A B D
542. A
543. C
544. B
545. A
546. C D
547. B
548. B
549. A D
550. C
551. A B
552. A B D
553. A D
554. C
555. B
556. D
557. B
558. C
559. C
560. A B
561. A C
562. D
563. B C
564. C D
565. D
566. A D
567. D
568. A D
569. D
570. A C
571. C D
572. B C D
573. C
574. A
575. A
576. B
577. A B
578. A C
579. A C D
580. A C
581. A
582. B
583. C D
584. D
585. A
586. A
587. A C
588. B
589. A D
590. B C D
591. A C
592. B C
593. A D
594. A
595. D
596. A C
597. A
598. B C
599. A D
600. A C
601. B D
602. B C
603. A C D
604. A
605. D
606. A
607. D
608. C
609. D
610. A
611. A
612. A
613. A
614. A
615. B
616. A

617. A
618. C
619. A
620. B
621. B
622. A
623. A
624. A
625. A
626. A
627. D
628. C
629. B
630. A D
631. D
632. B
633. B C
634. B
635. D
636. A
637. B
638. D
639. A B D
640. A
641. A B D
642. B D
643. B
644. A D
645. A
646. A C
647. A
648. A D
649. C
650. D
651. C
652. C
653. C
654. D
655. B C
656. A
657. B D
658. A
659. C
660. A
661. B
662. A
663. A C
664. A
665. A B D
666. A C
667. B D
668. D
669. A
670. B D
671. B D
672. A C
673. B
674. B
675. C
676. B
677. B
678. C
679. B
680. D
681. A B D
682. B
683. A D
684. A
685. B
686. C
687. D
688. A B
689. A C D
690. A C D
691. B D
692. B C
693. A
694. B
695. A
696. A C D
697. B
698. A C
699. D
700. B C D
701. C
702. B
703. C
704. A B
705. A
706. B
707. A D
708. A C
709. C
710. D
711. C
712. A C
713. D
714. B
715. A D
716. A B C
717. B
718. A
719. A C
720. A D
721. D
722. C
723. A B
724. D
725. B
726. B
727. A
728. B
729. A B
730. A B
731. C
732. C
733. D
734. C
735. B
736. A
737. A C
738. C
739. A B
740. A B D
741. A D
742. C
743. B D
744. D
745. C
746. A
747. A C
748. A B

749. D
750. B C
751. B
752. A B D
753. A B
754. A C D
755. C
756. D
757. A B
758. A C D
759. A
760. A B
761. C
762. C
763. A B
764. C
765. C
766. B
767. A B
768. B C
769. B
770. D
771. A C
772. B
773. B C D
774. D
775. C
776. C
777. A D
778. A D
779. A B
780. B
781. A C
782. B
783. B D
784. B D
785. B
786. B C D
787. C
788. A
789. A C
790. B
791. B C
792. C
793. D
794. C
795. B D
796. B C
797. A D
798. B
799. D
800. B
801. C
802. A
803. A
804. C
805. B D
806. A C
807. B
808. B C D
809. B
810. C
811. B D
812. A C D
813. A B C
814. B C
815. C
816. A B C
817. C D
818. A B
819. B
820. B
821. B D
822. B C D
823. A C D
824. C
825. B C
826. C
827. A
828. D
829. C
830. D
831. A D
832. B C D
833. C
834. C
835. A C D
836. B C
837. A C D
838. B D
839. B
840. C
841. A C
842. D
843. B
844. A B D
845. B D
846. B
847. A
848. C
849. A D
850. D
851. B
852. B C
853. A
854. A C
855. C
856. A D
857. C
858. A D
859. D
860. A C
861. D
862. C
863. A
864. A B D
865. C
866. B
867. C D
868. B
869. B
870. D
871. C
872. A D
873. D
874. B D
875. A C
876. C
877. A D
878. A B D
879. B D
880. A C

881. D
882. A C D
883. A B
884. B
885. A D
886. B
887. A C D
888. D
889. A B
890. D
891. C
892. B C
893. B C
894. B
895. C
896. B
897. B
898. C
899. D
900. C
901. B
902. B
903. C
904. A
905. B C
906. B
907. B
908. C D
909. B D
910. A
911. B D
912. C
913. A B
914. D
915. D
916. C
917. A B
918. B D
919. B C D
920. A
921. A B
922. A C
923. B D
924. A D
925. B
926. A B
927. B C
928. B D
929. B
930. C
931. A B C
932. C
933. C
934. B C
935. B C D
936. A B D
937. B D
938. A B
939. C D
940. A C
941. A B C
942. C
943. A
944. A B C
945. B
946. D
947. B
948. B D
949. D
950. B C
951. A C
952. A D
953. D
954. C
955. D
956. C
957. B
958. C
959. C
960. B C
961. A B D
962. A
963. C
964. C
965. B C D
966. A
967. A
968. A
969. B
970. B
971. B D
972. C
973. D
974. A
975. D
976. C
977. D
978. D
979. B
980. C D
981. C D
982. A C
983. A
984. B
985. C
986. D
987. C
988. A C D
989. B
990. A C
991. A B C
992. A
993. D
994. C
995. B
996. C
997. C D
998. D
999. D
1000. D
1001. A
1002. C
1003. C
1004. D
1005. A C
1006. B C
1007. A
1008. A B
1008. C
1009. A
1010. A B C
1011. C

1012. B C1013. A C1014. A1015. A D1016. B C1017. D1018. C1019. A B1020. A C1021. C1022. B1023. C1024. A C1025. A1026. D1027. A1028. B C1029. A C1030. A D1031. C1032. B1033. A1034. C D1035. A D1036. B1037. A D1038. D1039. B1040. C1041. A1042. A C D1043. A C1044. A D1045. B1046. D1047. D1048. A C1049. D1050. A B1051. A D1052. D1053. C1054. A1055. C1056. A D1057. A C1058. C1059. B1060. C1061. C1062. A D1063. B1064. B1065. A B D1066. A1067. A1068. B1069. B D1070. C1071. A1072. C1073. C1074. A1075. A1076. C D1077. C1078. B1079. C D1080. D1081. D1082. B1083. B1084. C1085. D1086. C1087. A1088. C1089. D1090. B C1091. B C1092. C1093. A B1094. D1095. C1096. B1097. B1098. A1099. D1100. C1101. C1102. C D1103. A C1104. C1105. C1106. D1107. D1108. C1109. A1110. C1111. B1112. C1113. A B C1114. B1115. B1116. C1117. A1118. B C1119. B1120. A B D1121. B1122. C D1123. B1124. A C1125. C1126. A B1127. A C D1128. A1129. A1130. A1131. A1132. B1133. B D1134. C1135. A C D1136. C1137. A1138. A1139. B C1140. B C1141. A B D1142. A C1143. B D

1144. A1145. A1146. B C D1147. A B D1148. B1149. B C1150. A B D1151. C1152. B1153. D1154. A D1155. D1156. C1157. A C1158. B1159. D1160. B D1161. A1162. B1163. A D1164. B C1165. A1166. C1167. A1168. B1169. C1170. C1171. C D1172. B1173. B1174. B C D1175. A1176. B1177. C1178. A B1179. A B1180. B1181. C1182. B D1183. C1184. B1185. A1186. A1187. B C1188. B1189. B1190. C1191. C

Rezolvări

1. Pentru un $n \in A$, notăm y numărul cifrelor sale. Dacă $x = (n - 6)/10$, atunci obținem egalitatea $4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, adică $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Numărul $10^{y-1} - 4$ are forma $99 \dots 96$, deci e divizibil cu 3. Din $(3, 13) = 1$ rezultă $3 \mid x$, deci și $3 \mid n$. Observăm că x trebuie să fie par. Deci n se termină în 06, 26, 46, 66 sau 86 și rezultă că $4 \nmid n$. Presupunem că $y = 8$, deci $13 \mid 10^7 - 4$, ceea ce este fals. Se constată că ecuația în x și y are soluția (particulară) $y = 5$ și $x = 15384$. De aici rezultă că $n = 15384 \in A$.

2. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $n, p \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2n^3 + 13n + 2 = p^2$. Cum, pe de o parte, pătratul oricărui număr natural nu este multiplu de 3 plus 2 (dacă $p = \mathcal{M}_3 \implies p^2 = \mathcal{M}_3$; dacă $p = \mathcal{M}_3 + 1 \implies p^2 = \mathcal{M}_3 + 1$; dacă $p = \mathcal{M}_3 + 2 \implies p^2 = \mathcal{M}_3 + 1$), iar, pe de altă parte, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $E = 2n^3 + 13n + 2$ este multiplu de 3 plus 2 (dacă $n = \mathcal{M}_3 \implies E = \mathcal{M}_3 + 2$; dacă $n = \mathcal{M}_3 + 1 \implies E = \mathcal{M}_3 + 2$; dacă $n = \mathcal{M}_3 + 2 \implies E = \mathcal{M}_3 + 2$), suntem conduși la o contradicție.

3. Ultima cifră a numărului a_n este 7, $\forall n \geq 2$, deci a_n nu poate fi pătrat perfect.

4. Fie $\alpha = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\sqrt{5}+2 + \sqrt{5}-2 + 2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}+1} =$
 $\frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4}}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1} = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$. Deci $x = \alpha + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} =$
 $\alpha + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{3\alpha}{2} - \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. De aici, $x^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

5. Adunăm 1 la ecuația dată, de unde rezultă $C + 1 = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} +$

$$\frac{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} = \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{2n \cdot \frac{a_1 + a_{2n}}{2}}{n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}} = 2 \cdot \frac{a_1 + a_{2n}}{a_1 + a_n} = 2 \cdot \frac{2a_1 + (2n-1) \cdot r}{2a_1 + (n-1) \cdot r}. \text{ Fie}$$

$$R = \frac{C+1}{2}, \text{ tot o constantă. } 2a_1 + (2n-1) \cdot r = (2a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot R \Rightarrow n \cdot r(R-2) =$$

$$(R-1)(2-r), \text{ care trebuie să fie adevărat pentru } \forall n \Rightarrow \begin{cases} n \cdot r(R-2) = 0 \\ (R-1)(2-r) = 0 \end{cases}, \text{ dar}$$

$$n, r \neq 0 \Rightarrow R = 2, \text{ deci } r = 2. a_{15} = a_1 + 14 \cdot r = 29.$$

6. Numerele trebuie să fie de forma $\overline{25xy}$, $\overline{x25y}$ sau $\overline{xy25}$, de asemenea știm că un

număr este divizibil cu 75 atunci când este divizibil cu 3 și 25. Pentru cele de forma

$\overline{25xy}$, ultimele două cifre trebuie să fie 00, 25, 50, 75 pentru a fi divizibile cu 25, dar dintre

acestea, doar 2550 este divizibil și cu 3, deci singura soluție pentru prima formă. Când

vine vorba de $\overline{x25y}$, cifra unităților trebuie să fie 0 pentru ca numărul să fie divizibil cu

25, iar prima cifră a numărului trebuie să aducă suma cifrelor la un multiplu de 3 (2, 5, 8),

deci există 3 numere de această formă care respectă condițiile. Rămâne forma $\overline{xy25}$, care

este divizibilă cu 25 pentru orice valori ale primelor două cifre. 7 este de forma $3k + 1$,

deci trebuie să adăugăm $3m + 2$ pentru ca suma să fie divizibilă cu 3. Numerele \overline{xy} vor

fi deci într-o progresie aritmetică cu rația 3, cel mai mic număr fiind 11 iar cel mai mare

$98 = 11 + 3 \cdot (n-1)$. Dacă rezolvăm ecuația, aflăm că există $n = 30$ astfel de numere în

interval. Deci în total avem $1 + 3 + 30 = 34$ numere de 4 cifre care satisfac condițiile.

$$7. 21a = 9b = 7c \Rightarrow a = \frac{k}{21}, b = \frac{k}{9}, c = \frac{k}{7}. \text{ Astfel } \frac{k}{21} + 8 + \frac{k}{7} = \frac{2k}{9} \Rightarrow \frac{4k}{21} + 8 = \frac{2k}{9} \Rightarrow$$

$$12k + 504 = 14k \Rightarrow k = 252.$$

8. Fiindcă n este un multiplu de 5, fie p , fie q trebuie să fie 5. Dacă $p = 5$, răspunsurile

corecte ar fi $\boxed{A} \boxed{D}$. Dacă $q = 5$, răspunsurile corecte ar fi $\boxed{B} \boxed{D}$. Pentru a fi siguri că

expresia este multiplu de 25, alegem ca ambele numere prime să fie ridicate la pătrat.

9. $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. $p, p+1, p-1$ sunt 3 numere consecutive, astfel ca unul dintre

numere trebuie să fie divizibil cu 2, iar altul cu 3. p fiind prim, știm că este de asemenea

impar, deci $p-1$ și $p+1$ sunt pare, unul divizibil cu 2 iar celălalt cu 4 (fiindcă sunt două

numere pare consecutive). Din moment ce p nu e divizibil cu 3 (fiind prim), $p+1$ sau

$p - 1$ este divizibil cu 3. De aici rezultă că $(p - 1)(p + 1)$ este divizibil cu $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, dar din nou știm că $p - 1$ sau $p + 1$ este divizibil și cu 4, deci $(p - 1)(p + 1)$ este divizibil cu $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ oricare ar fi p număr prim mai mare decât 3.

10. Dacă n este un număr prim, conform Miciei Teoreme a lui Fermat $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, adică $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$ (n divide $2^n - 2$). Fie $n = 2^k$ pentru un $k \geq 1$. Pentru $k = 1 \Rightarrow n = 2$ care divide $2^2 - 2$. Presupunem că pentru $k = m, n = 2^m$ divide $2^{2^m} - 2$. Demonstrăm că $n = 2^{m+1}$ divide $2^{2^{m+1}} - 2$. Observăm că $2^{2^{m+1}} - 2 = (2^{2^m})^2 - 2$. Din moment ce $2^{2^m} \equiv 2 \pmod{2^m}$, $(2^{2^m})^2 \equiv 2^2 \equiv 2 \pmod{2^{m+1}}$. Deci 2^{m+1} divide $2^{2^{m+1}} - 2$. Astfel orice putere a lui 2 divide $2^{2^{m+1}} - 2$. Un contra-exemplu pentru $\boxed{\text{B}}$ ar fi $n = 9$.

11. $a_{25} = a_1 + 24 \cdot r \Rightarrow 121 = 1 + 24 \cdot r \Rightarrow r = 5$. De aici deducem $a_n = 5n - 4 = k^2 \Rightarrow n = \frac{k^2 + 4}{5}$. Astfel ca n să fie un număr întreg, $k^2 + 4$ trebuie să fie divizibil cu 5, deci $k \equiv 1 \pmod{5}$ și $k \equiv 4 \pmod{5}$. **Cazul 1.** $k \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow k = 1 : k^2 = 1, n = 1; k = 6, k^2 = 36, n = 8; k = 11, k^2 = 121, n = 25$. **Cazul 2.** $k \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow k = 4 : k^2 = 16, n = 4; k = 9, k^2 = 81, n = 17; k = 14, k^2 = 196, n = 40$. În total, **6** elemente.

$$12. \quad \begin{cases} a_5 = 3 \cdot a_2 \\ a_9 = a_3 + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 4r = 3 \cdot (a_1 + r) \\ a_1 + 8r = a_1 + 2r + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = r \\ 6r = 24 \Rightarrow r = 4 \end{cases} \quad \text{Astfel,}$$

$$a_1 = 2.$$

$$13. \quad a_k \in b_m \Rightarrow 3k + 7 = 5m + 2 \Rightarrow 3k - 5m = -5 \Rightarrow 3k = 5m - 5 \Rightarrow 3k = 5(m - 1).$$

Notăm $m - 1 = n$, deci $k = \frac{5n}{3}$. Fiindcă k este un număr întreg, n trebuie să fie un multiplu de 3 $\Rightarrow n = 3p, k = 5p \Rightarrow m = 3p + 1$. Pentru a găsi cea mai mică valoare a lui k începem substituția: $p = 1 \Rightarrow k = 5, m = 3 + 1 = 4$. Verificăm $a_5 = 3 \cdot 5 + 7 = 22$ și $b_4 = 5 \cdot 4 + 2 = 22, a_5 = b_4$, deci $k = 5$ este varianta corectă.

14. Când formăm un triunghi ordinea de scriere a vârfurilor nu contează, prin urmare, ceea ce numărăm sunt mulțimi de forma $\{O, A, B\}$ cu $A, B \in \mathcal{M}$. Alegerea submulțimilor $\{A, B\} \subseteq \mathcal{M}$ se poate face în C_n^2 moduri, dar O, A și B formează un triunghi $\triangle AOB$ dacă și numai dacă O, A, B nu sunt puncte coliniare. Prin urmare, răspunsul corect este furnizat de $\boxed{\text{D}}$.

Chiar dacă orice 3 puncte din $\mathcal{M} \cup \{O\}$ ar fi necoliniare, răspunsurile celelalte ar fi greșite deoarece:

A în numărul $A_n^2 = |\{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{M}\}|$, fiecare triunghi OAB este numărat de 2 ori, o dată ca $\triangle OAB$, o dată ca $\triangle OBA$.

B 2^n numără toate submulțimile lui \mathcal{M} , dar e evident că unele dintre acestea nu determină triunghiuri ca cele din enunț.

C C_{n+1}^3 numără toate submulțimile cu 3 elemente ale lui $\mathcal{M} \cup \{O\}$, deci și (posibile) triunghiuri care nu au un vârf în O .

15. Fiecare element $m \in M$ aparține uneia dintre mulțimile $A, B, C, M \setminus (A \cup B \cup C)$.

Deci numărul configurațiilor posibile este egal cu numărul funcțiilor de la o mulțime cu n elemente la o mulțime cu 4 elemente.

16. Se știe că pentru ca numărul C_m^k al combinațiilor de m elemente luate câte k să

fie definit trebuie ca $m, k \in \mathbb{N}$ și $k \leq m$. Așadar, o rezolvare începută cu stabilirea

$$\text{condițiilor asupra lui } n \Rightarrow \begin{cases} n-1 \in \mathbb{N} \\ n-1 \geq 5 \\ n-1 \geq 4 \\ n-3 \in \mathbb{N} \\ n \geq n-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 6 \end{cases}, \text{ arată imediat că variantele de}$$

răspuns **A** și **B** sunt false. Fie prin calcule, fie folosind formula de recurență pentru

numărul de combinații, putem rescrie inegalitatea dată astfel: $C_n^5 < C_n^{n-3} \Leftrightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} <$

$\frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow (n-4)(n-3) < 4 \cdot 5 \Leftrightarrow n^2 - 7n - 8 < 0$. Cum soluțiile din \mathbb{R} ale ecuației

$x^2 - 7x - 8 = 0$ sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = 8$, în \mathbb{R} avem $x^2 - 7x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 8)$. În

condițiile deja stabilite asupra lui n , mulțimea soluțiilor inecuației $n^2 - 7n - 8 < 0$ este

$(-1, 8) \cap \mathbb{N} \cap [6, \infty) = \{6, 7\}$. Prin urmare, varianta de răspuns **C** este adevărată și **D**

este falsă.

17. Mulțimea \mathcal{F} conține 4^4 funcții, pentru că domeniul și codomeniul au patru elemente.

Funcțiile strict monotone din mulțimea \mathcal{F} sunt

$$f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ definită prin } f(k) = k + 1, k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$g : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definită prin $g(k) = 4 - k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Mulțimea \mathcal{F} conține $4!$ funcții injective.

Probabilitatea ca o funcție f aleasă aleator din mulțimea \mathcal{F} să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{4^2}{4^4} = \frac{1}{16}$.

18. Dacă a și b sunt numere reale strict pozitive, atunci din $0 \leq (a^2 + b^2 - 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 + b^2) + (2ab)^2$ deducem că $(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 + b^2) + (2ab)^2 \geq 8ab(a^2 + b^2)$, de unde $(a^2 + b^2 + 2ab)^2 \geq 8ab(a^2 + b^2)$. Așadar, $\frac{(a+b)^4}{ab} \geq 8(a^2 + b^2)$. Dacă aici luăm $a = C_n^k$ și $b = C_n^{k+1}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și apoi însumăm după $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ relațiile obținute, găsim că $x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_{n+1}^{k+1})^4}{C_n^k C_n^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_n^k + C_n^{k+1})^4}{C_n^k C_n^{k+1}} \geq 8 \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ (C_n^k)^2 + (C_n^{k+1})^2 \right\} = 8 \left\{ 2 \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 - 2 \right\} = 16(C_{2n}^0 - 1)$ deoarece $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$. oricare ar fi $n \geq 1$, și $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$ și $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

19. Funcția aleasă trebuie să ia valoarea 1 în 3 elemente din domeniu, iar restul iau valoarea 0. Cele 3 elemente din domeniu pot fi alese în C_n^3 moduri. Pentru $n = 10$, $C_{10}^3 = 120$.

20. Mulțimea A are 4 elemente, iar mulțimea B are 6 elemente, deci există $C_6^4 = 15$ moduri de a construi funcții strict descrescătoare (pentru orice $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) > f(x_2)$). În ce privește funcțiile crescătoare, numărul funcțiilor crescătoare de la B la A este dat de numărul de moduri de a distribui 6 elemente în 4 clase ordonate cu ajutorul formulei C_{n+k-1}^k , unde n este numărul de elemente de împărțit (în acest caz 6), și k este numărul de clase (în acest caz 4).

21. $(k+1)C_n^k = C_n^k + n \cdot C_{n-1}^{k-1}$. Astfel $\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k + n \cdot \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} =$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k + n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

22. $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n C_{n+1}^k -$

$$C_{n+1}^0 \right) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - C_{n+1}^0) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

23. Fiecare termen al dezvoltării are forma $C_n^k(\sqrt{2})^{n-k}(\sqrt[3]{3})^k$. Astfel, termenii raționali ai dezvoltării sunt toți cei care îndeplinesc simultan condițiile: $(n-k):2$ și $k:3$. Concluzionăm că pentru $n = 15$, dezvoltarea are într-adevăr 3 termeni raționali (pentru $k = 3, 9, 15$), iar pentru $n = 24$, dezvoltarea are 19 termeni iraționali. Termenul corespunzător pentru $k = 18$ este $C_{30}^{18}(\sqrt{2})^{12}(\sqrt[3]{3})^{18}$, rațional, iar termenul corespunzător pentru $k = 9$ este $C_{18}^9(\sqrt{2})^9(\sqrt[3]{3})^9$, irațional.

24. Un triunghi format din aceste puncte vârf pe d_1 și 2 vârfuri pe d_2 sau 2 vârfuri pe d_1 și 1 vârf pe d_2 . Fixând un punct pe d_1 , există C_5^2 moduri de a alege alte 2 de pe $d_2 \implies 6 \cdot 10 = 60$ de triunghiuri care conțin un punct pe d_1 . Fixând un punct pe d_2 , există C_6^2 moduri de a alege alte 2 de pe $d_1 \implies 5 \cdot 15 = 75$ de triunghiuri care conțin un punct pe d_2 . În total, $60 + 75 = 135$ de triunghiuri.

25. Separăm egalitățile astfel: $x \cdot \log_x(y) = 2\sqrt{\pi}$ și $ey \cdot \log_y(x) = 2\sqrt{\pi}$ după care le înmulțim: $e \cdot xy \cdot (\log_x(y) \cdot \log_y(x)) = 4\pi$ Cum $\log_x(y) \cdot \log_y(x) = 1 \implies xy = \frac{4\pi}{e}$.

26. Ne propunem să determinăm mulțimea \mathbb{E} . $x \in \mathbb{E} \Leftrightarrow x > 0$ și $x \neq 1$. Deci $\mathbb{E} = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Prin urmare **[A]** este falsă. Ne propunem să rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Observăm că $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$ și $\log_{\sqrt{x}} x = 2$, deci $f(x) = 2 \log_3 x - 4$, $\forall x \in \mathbb{E}$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$. Observăm că $9 \in \mathbb{E}$. Deci $x = 9$ e singura soluție a ecuației $f(x) = 0$. Prin urmare, **[B]** este adevărată. Ne propunem să rezolvăm inecuația $f(x) > 0$. Avem $2 \log_3 x - 2 > 0 \Leftrightarrow \log_3 x > 2 \Leftrightarrow x > 9$. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 0$ este $S = (9, \infty)$. Fie $x_n = n + 10, n \in \mathbb{N}^*$. Avem că (x_n) e nemărginit și $x_n \in (9, \infty), n \in \mathbb{N}^*$. Deci $f(x_n) > 0$. Prin urmare, **[C]** este adevărată. Rezolvăm inecuația $f(x) < 0$. Avem $2 \log_3 x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 9$. Cum $x \in \mathbb{E}$, deducem că mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 0$ este $S = (0, 1) \cup (1, 9)$. Deducem că **[D]** este falsă.

27. Folosind proprietățile logaritmilor, avem că: $\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3}$.

Din relația $a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3}$, rezultă că $\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$. Prin urmare, obținem $\log_6 16 = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

28. Pentru orice $a, b > 1$, avem $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \frac{\ln b}{\ln a}$ și atunci, în baza inegalității mediilor:

$$\begin{aligned} & \log_{a_1^n} a_2 + \log_{a_2^n} a_3 + \dots + \log_{a_{n-1}^n} a_n + \log_{a_n^n} a_1 = \frac{1}{n} \left(\frac{\ln a_2}{\ln a_1} + \frac{\ln a_3}{\ln a_2} + \dots + \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} + \frac{\ln a_1}{\ln a_n} \right) \\ & \geq \sqrt[n]{\frac{\ln a_2}{\ln a_1} \frac{\ln a_3}{\ln a_2} \dots \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} \frac{\ln a_1}{\ln a_n}} = 1. \text{ Egalitatea are loc dacă și numai dacă } \frac{\ln a_2}{\ln a_1} = \frac{\ln a_3}{\ln a_2} = \\ & \dots = \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} = \frac{\ln a_1}{\ln a_n}, \text{ adică dacă și numai dacă } a_1 = \dots = a_n. \end{aligned}$$

29. Fie $f(x) = (\sqrt{x}-2)^3 + \ln x$ și $I = [1, 4]$. Funcția $f(x)$ este suma a două funcții continue

pe intervalul $[1, 4]$, prin urmare funcția este continuă pe intervalul I . Evaluând capetele intervalului, observăm că pentru $x = 1, f(x) = -1$ și pentru $x = 4, f(x) = \ln 4 > 0$.

Aplicând proprietatea lui Darboux, putem spune că funcția intersectează axa Ox pe intervalul $[1, 4]$ în cel puțin un punct. Răspunsul \boxed{C} este incorect deoarece proprietatea este valabilă doar pe un interval închis și mărginit, iar $0 \notin I$, motiv pentru care afirmația

\boxed{D} este doar parțial corectă.

30. Pentru funcția dată, $f(x) = c$ pe prima ramură ne dă $c < 2$, iar pe cea de-a doua

$$4 - \log_{\sqrt[4]{2}}(x) = c \Rightarrow \log_{\sqrt[4]{2}}(x) = 4 - c \Rightarrow 4 \log_2(x) = 4 - c \Rightarrow x = 2^{\frac{4-c}{4}} \geq 1 \Rightarrow c \leq 4.$$

Pentru ca să fie îndeplinită condiția, funcția trebuie să ia valori pe ambele ramuri, motiv pentru care răspunsul $\forall c < 2$ este corect.

$$\mathbf{31.} \quad \log_{3^k} x^k = k \cdot \log_{3^k} x = k \cdot \frac{1}{\log_x 3^k} = \frac{1}{\log_x 3} = \log_3 x \Rightarrow \text{ecuația devine } n \cdot \log_3 x = n,$$

de unde singura soluție reală este $x = 1$.

$$\mathbf{32.} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \log_4 32 \\ \log_9(x^2 - y^2) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}. \text{ În prima ecuație facem substituția}$$

$z = \frac{x}{y}$, iar ecuația devine $2z^2 - 5z + 2 = 0$, de unde găsim două valori pentru z : $z_1 = 2$

și $z_2 = \frac{1}{2}$. **1)** $x = 2y$: $4y^2 - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1$, deci $y = \pm 1$, $x = \pm 2$. **2)** $x = \frac{y}{2}$:

$$\frac{y^2}{4} - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = -4, \text{ ecuație care nu are soluții reale. Astfel } x_{1,2} = \pm 2 \text{ și } y_{1,2} = \pm 1,$$

dintre care doar $(2, 1)$ satisface toate condițiile de existență pentru logaritmi.

$$\mathbf{33.} \quad \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10 \Rightarrow \log_2(n+1) = 10 \Rightarrow n+1 = 2^{10}$$

$$\mathbf{34.} \quad 3 + e^{2x} = 7e^{2x} \Rightarrow 6e^{2x} = 3 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

35. Ridicând relația la puterea 10, obținem $\log_{10^a}(\log_{10^b}(10^{1000})) = 1$. Ridicând din nou

la puterea 10^a , obținem $\log_{10^b} 10^{1000} = 10^a \Rightarrow \frac{1000}{b} = 10^a$. Astfel, obținem următoarele

perechi (a, b) sunt numere întregi pozitive) $\{(3, 1), (2, 10), (1, 100)\}$.

$$36. \text{ Notăm } x + y = s \text{ și } xy = p. \text{ Avem } (x, y) \in S \iff \begin{cases} s + p = 11 \\ sp = 30 \end{cases} \iff \{s, p\}$$

e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 11z + 30 = 0$. Deci $\{s, p\} = \{5, 6\}$. Avem două posibilități ($s = 6$ și $p = 5$) sau ($s = 5$ și $p = 6$). Pentru $s = 6$ și $p = 5$, avem $x + y = 6$ și

$xy = 5 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 6z + 5 = 0$. Deci $\{x, y\} = \{1, 5\}$.

Pentru $s = 5$ și $p = 6$, avem $x + y = 5$ și $xy = 6 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor

ecuației $z^2 - 5z + 6 = 0$. Deci $\{x, y\} = \{2, 3\}$. În concluzie $S = \{(1, 5), (5, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Astfel, sunt adevărate $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

37. Observăm că nu pot exista 2 sau mai multe răspunsuri corecte, motiv pentru care

ne propunem să aflăm mulțimea soluțiilor. Condițiile de definiție: $3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$.

Deci $D = (-\infty, 3]$ este domeniul de definiție. Cum ecuația se scrie $\sqrt{3-x} = x$; impunem

condiții de compatibilitate $x \geq 0$. Așadar ecuația nu are soluții în afara intervalului $[0, 3]$.

Rezolvăm ecuația ridicând la putere: $3-x = x^2 \iff x^2 + x - 3 = 0 \iff x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

și $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$, dar $x_2 \notin [0, 3]$. Verificăm dacă $0 \leq x_1 \leq 3 \iff 0 \leq -1 + \sqrt{13} \leq$

$6 \iff 1 \leq \sqrt{13} \leq 7 \iff 1 \leq 13 \leq 49$ adevărat. Prin urmare, $S = \{x_1\}$, iar singurul

răspuns corect este $\boxed{\text{B}}$.

38. Combinând condițiile b) și c), $n \in S \Rightarrow n + 5 \in S$, iar fiindcă $2 \in S$ din b) con-

cluzionăm că $7^2 = 49 \in S$, deci și $(49 + 5)^2 = 54^2 \in S$. Deoarece $54^2 \equiv 1 \pmod{5}$, toate

numerele întregi pozitive suficient de mari care dau restul 1 la împărțirea cu 5 sunt în

S . Fie $a > 1$ un număr întreg, care nu este multiplu de 5. Secvența $a, a^2, a^4, a^8, a^{16}, \dots$

nu este mărginită, iar folosind *Mica Teoremă a lui Fermat* (dacă p este un număr prim

și a este un număr întreg care nu este multiplu al lui p , atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$), toți

termenii din șir, începând cu a^4 sunt $\equiv 1 \pmod{5}$. De aici concluzionăm că $a \in S$. Este

ușor să verificăm apoi că toate numerele întregi pozitive mai mari decât 1 și care nu sunt

multiplii ai lui 5 satisfac condițiile a), b), c), motiv pentru care răspunsurile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$

sunt corecte.

39. Există 3 cazuri în care putem obține 1: **1)** $1^k = 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 11 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \{2, 5\}$;

2) $k^0 = 1 \Rightarrow x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \{6, 7\}$; **3)** $(-1)^{2k} = 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow$

$x_{5,6} = \{3, 4\}$ și $3^2 - 13 \cdot 3 + 42 = 12$ par și $4^2 - 13 \cdot 4 + 42 = 6$ par .

40. Scriem termenii progresiei în cele doua ecuații date în funcție de a_1 și rația r :

$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_1 + 9r = -6 \Rightarrow a_1 = -2 - 3r$; $-a_7 a_9 a_{11} = -(a_1 + 6r)(a_1 + 8r)(a_1 + 10r) = -105r^3 + 142r^2 - 50r + 8 = 13037 \Rightarrow r = -3$, deci \boxed{D} este fals. Calculăm $a_1 = -2 - 3r = -2 - 3 \cdot (-3) = 7 \Rightarrow \boxed{A}$ este de asemenea fals. $a_4 = a_1 + 3r = 7 + 3 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow (a_4)^3 = -8 \Rightarrow \boxed{B}$ este adevărat. Suma primilor 10 termeni ai progresiei este $10a_1 + 45r = 70 - 135 = -65$. Afirmațiile false sunt \boxed{A} , \boxed{C} și \boxed{D}

41. Notăm $t = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3, 4 \Rightarrow x = 81, 256, S = 337$

42. Pentru a obține valoarea minimă, vom lua x_1 (valoarea inițială) ca $-n \Rightarrow x_1 =$

$-n, x_2 = -n + 1$, etc. Astfel avem $S = n - 1 + n - 2 + \dots + 0 + 1 + 2 + \dots + n$

Astfel suma finală va fi $2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + 2n}{4}$.

43. Înlocuind $x^2 = ([x] + \{x\})^2$, obținem $([x] + 2\{x\})^2 = 4$, de unde rezultă faptul că

$2\{x\} \in \mathbb{Z}$, deci $\{x\} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \iff x \in \left\{-2, 2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$.

44. Pentru $a = 1$ și $b = -5$ $S_1 = 5$, $S_2 = (-\infty, 5]$. Pentru $a = 0$ și $b = -5$ $S_1 = \emptyset$,

$S_2 = \mathbb{R}$. Pentru $a = -5$ și $b = -5$ $S_1 = -1$, $S_2 = (-1, +\infty)$. Pentru $a = 0$ și $b = 0$

$S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = \mathbb{R}$.

45. Observăm că $-1, 0 \in S, \forall m \in \{R\}$. Căutăm soluții în $(0, \infty)$, deci ecuația devine

$x^2 - x = mx(x+1) \Rightarrow x-1 = m(x+1) \Rightarrow x(m-1) = -m-1$. Pentru $m = 1$ ecuația devine

$0 = -2$, deci nu are nicio soluție. Pentru $m \neq 1$ avem $x = \frac{-m-1}{m-1}$. Aceasta este soluție,

doar dacă $\frac{-m-1}{m-1} > 0 \iff \frac{m+1}{m-1} < 0 \iff m \in (-1, 1)$. Deci, $S \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ pentru

fiecare $m \in (-1, 1)$. Mai mult, pentru $m \in (-1, 1)$ avem că $S \cap (0, \infty) = \left\{\frac{-m-1}{m-1}\right\}$,

iar pentru $m \in \mathbb{R} - (-1, 1)$ avem că $S \cap (0, \infty) = \emptyset$. Pentru $m = 1$ expresia $\frac{-m-1}{m-1}$

nu este bine definită: $x^2 - |x| = x^2 + x \iff |x| = -x \iff x \in (-\infty, 0]$, deci

pentru $m = 1$ avem $S \in (-\infty, 0]$; iar pentru $m = -1$ expresia $\frac{-m-1}{m-1}$ are valoarea 0:

$x^2 - |x| = -x^2 - x \iff 2x^2 + x - |x| = 0$. Știm deja că ecuația nu are soluții în $(0, \infty)$ și că

$0 \in S$, deci căutăm soluții în $(-\infty, 0)$: $2x^2 + x + x = 0 \iff 2x(x+1) = 0 \iff x = -1$.

Pentru $m = -1$ avem $S = \{0, -1\}$. Dacă D este adevărată, atunci $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Căutăm soluții în $(-\infty, 0)$, ecuația devine $x^2 - (-x) = mx(x+1) \iff x^2 + x =$

$mx(x+1) \iff x+1 = m(x+1) \iff (x+1)(1-m) = 0 \iff x = -1$. Atunci $S \cap (-\infty, 0) = \{-1\}$, $S \cap (0, \infty) = \emptyset$ și $0 \in S$, prin urmare, în acest caz $S = \{-1, 0\}$, deci \boxed{D} este fals.

46. Deoarece $x^2 - 3x + 5$ nu are rădăcini reale ($\Delta = -11$), aceasta este mereu pozitivă, astfel putem rescrie inecuația $\frac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1 \iff x+1 \leq x^2-3x+5 \iff 0 \leq x^2-4x+4 \iff 0 \leq (x-2)^2$ - adevărat pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. De aici, concluzionăm că $E = S = \mathbb{R}$.

47. Notăm $x+y = s$, $xy = p$. $(x, y) \in S \iff s+p = 4$ și $sp = 4 \iff \{s, p\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 4z + 4 = 0 \iff \{s, p\} = \{2, 2\} \iff s = p = 2 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor reale ale ecuației $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff \{x, y\} = \emptyset$. Prin urmare $S = \emptyset$, iar unicul răspuns este \boxed{D} .

48. Notăm cu $t = x^2 + 18x + 30 \Rightarrow t = 2\sqrt{t+15}$, de unde obținem soluțiile valide $x = \pm\sqrt{61} - 9 \Rightarrow$. Produsul lor este $81 - 61 = 20$.

49. Dacă înmulțim $(x + \frac{1}{z}) \cdot (y + \frac{1}{x}) \cdot (y + \frac{1}{z})$ obținem $80t = \frac{27}{z}(y + \frac{1}{z}) + xy \cdot t$, unde $t = (y + \frac{1}{z}) \Rightarrow 27 + xyz = 80z \Rightarrow z = \frac{7}{20} \Rightarrow x + \frac{20}{7} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{7} \Rightarrow y = 20 \Rightarrow t = \frac{160}{7}$.

50. Verificăm dacă $x = m$ este soluție. $\sqrt{2|m|-2m} = 0 \iff m = |m| \iff m \in$

$[0, \infty)$, deci \boxed{A} este falsă. Ne propunem să găsim S în funcție de m . **1)** Căutăm soluțiile din $[0, \infty)$: avem $|x| = x, \forall x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $x = m$, deci dacă $m \in (-\infty, 0)$,

ecuația nu are soluții. Dacă $m \in [0, \infty)$, ecuația are o singură soluție, anume $x = m$. **2)**

Căutăm soluții în $(-\infty, 0)$: Avem $|x| = -x, x \in (-\infty, 0)$, ecuația devine $\sqrt{-4x} = m - x$.

Căutăm soluții $x \leq m$ și obținem $-4x = (m - x)^2 \iff x^2 - 2(m - 2)x + m^2 = 0(*)$;

$\Delta = 4(m-2)^2 - 4m^2 = 16(1-m)$. Dacă $m \in (1, \infty)$ atunci $\Delta < 0$ și $S \cap (-\infty, 0) = \emptyset$. Dacă

$m = 1$, ecuația devine $x^2 + 2x + 1 = 0$, adică $(x+1)^2 = 0$. Prin urmare $S \cap (-\infty, 0) = \{-1\}$.

Dacă $m \in (-\infty, 1)$ atunci $\Delta > 0$. Notând cu $\{x_1, x_2\}$ rădăcinile ecuației (*) avem

$x_1 + x_2 = m - 2 < 0$ și $x_1 x_2 = m^2 > 0$. Astfel, $x_1 < 0$ și $x_2 < 0$. Verificăm dacă $x_1 \leq m$

și $x_2 \leq m$. Cum $x_1 = m - 2 + 2\sqrt{1-m}$ și $x_2 = m - 2 - 2\sqrt{1-m}$. Observăm că $x_2 \leq m$,

iar $x_1 \leq m \iff -2 + 2\sqrt{1-m} \leq 0 \iff \sqrt{1-m} \leq 1 \iff 1 - m \leq 1 \iff m \geq 0$.

Prin urmare dacă: **1)** $m \in (-\infty, 0)$ atunci $S \cap (-\infty, 0) = \{x_2\}$; **2)** $m \in [0, 1)$ atunci

$$S \cap (-\infty, 0) = \{x_1, x_2\}.$$

51. Rezolvăm inecuația $x \leq \frac{8}{x^2}$ înmulțind cu x^2 (presupunând că $x^2 \neq 0$, împărțirea la 0 fiind nedefinită). Astfel, ajungem la $x^3 \leq 8 \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{8} \Rightarrow x \leq 2$. Astfel, $S = (-\infty, 3]$, însă când substituim $x = 0$ în inecuația inițială ajungem la o situație nedefinită, deci 0 nu face parte din mulțimea soluțiilor $\Rightarrow S = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$. Afirmatia **A** este, evident, adevărată, deoarece pentru $f(y) = \sqrt[3]{y}$, $f'(y) = \frac{1}{3y^{2/3}}$ pozitivă pentru $\forall y \neq 0$, iar inversa $f^{-2}(y) = y^3$, care este de asemenea strict crescătoare.

52. Pentru $a = 0$ ecuația $f(x) = 0 \iff x^3 + x = 0 \iff x(x^2 + 1) = 0 \iff x_1 = 0; x_2 = i; x_3 = -i$. Cum $S \subset \mathbb{R}$ avem $S = \{0\}$, deci **A** este falsă. Funcția f este polinomială, deci este continuă și ori de câte ori derivabilă. Calculăm $f'(x) = 3x^2 + 1$. Observăm că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și deducem că f este strict crescătoare, deci **B** este adevărată. Dacă prin absurd ar exista: $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) = f(x_2)$, ceea ce ar contrazice injectivitatea lui f . Deci, **C** este adevărată. Avem că **D** este adevărată pentru că o ecuație de gradul 3 are cel puțin o rădăcină reală.

53. $D = (-\infty, 3]$, iar $x+a \geq 0 \iff x \geq -a$. Dacă $a < -3$ avem că $(-\infty, 3] \cap [-a, +\infty) = \emptyset$, adică ecuația nu are nicio soluție. Deci **A** și **B** sunt false. Dacă $a = -3$ avem ecuația $\sqrt{3-x} = x-3$, care are unica soluție $x = 3$. Dacă $a > -3$ avem că ecuația nu are soluție în afara intervalului $[-a, 3]$. Rezultă că $3-x = (x+a)^2 \iff 3-x = x^2 + 2ax + a^2 \iff x^2 + (2a+1)x + a^2 - 3 = 0(*)$ $\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2 - 3) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 12 = 4a + 13$. Cum $a > -3$, avem că $\Delta > 1$ deci ecuația (*) are 2 rădăcini reale, $x_1 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{4a+13}}{2}$ și $x_2 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{4a+13}}{2}$. Avem de verificat dacă $-a \leq x_1 \leq 3$ sau $-a \leq x_2 \leq 3$. $-a \leq \frac{-(2a+1) + \sqrt{4a+13}}{2} \leq 3 \iff -2a \leq -2a - 1 + \sqrt{4a+13} \leq 6 \iff 1 \leq \sqrt{4a+13} \leq 2a+7 \iff 1 \leq 4a+13 \leq (2a+7)^2 \iff a \geq -3$ și $4a^2 + 28a + 29 - 4a - 13 \geq 0 \iff 4a^2 + 24a + 36 \geq 0 \iff a^2 + 6a + 9 \geq 0 \iff (a+3)^2 \geq 0$ - adevărat. Deci $x_1 \in [-a, 3]$. Deducem că pentru fiecare $a > -3$ ecuația dată are cel puțin o soluție reală. Am arătat că pentru $a = -3$ ecuația dată are, de asemenea, cel puțin o soluție reală. Prin urmare, **C** și **D** sunt adevărate.

54. Se folosesc expresiile: $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = x - 1 - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2$,

$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = x - 1 - 6\sqrt{x-1} + 9 = (\sqrt{x-1} - 3)^2$. Condițiile de existență sunt: $x - 1 \geq 0$, de unde $x \in [1, \infty)$, $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 2)^2 \geq 0$, evident pentru $x \in [1, \infty)$, $x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 3)^2 \geq 0$, evident pentru $x \in [1, \infty)$. Deci, $x \in [1, \infty)$. Ecuația poate fi scrisă astfel: $|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = |\sqrt{x-1} - 2| + |3 - \sqrt{x-1}| = 1 = |\sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1}|$. Avem deci egalitate în inegalitatea triunghiului, de unde rezultă că $\sqrt{x-1} - 2$ și $3 - \sqrt{x-1}$ au același semn sau una dintre ele este zero. Obținem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = [5, 10]$.

55. Pentru T , avem $T = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$, de unde rezultă că afirmația **A** este falsă. Deci, $x_n = \left\lfloor \frac{2023}{2024} + \frac{n}{2024} \right\rfloor$. Adică, $x_1 + x_2 + x_3 = \left\lfloor \frac{2023}{2024} + \frac{1}{2024} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2024} + \frac{2}{2024} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2024} + \frac{3}{2024} \right\rfloor = 1 + 1 + 1 = 3$, deci **C** este adevărată. Cum $T \in \mathbb{R}$ și $2024 \in \mathbb{N}$, putem aplica Identitatea lui Hermite și avem $\sum_{i=1}^{2023} x_i = [2024T] - [T] = 2023$. Adăugând $x_{2024} = \left\lfloor \frac{2023}{2024} + 1 \right\rfloor = 1$, obținem că afirmațiile **B** și **D** sunt ambele false.

56. (Adaptare după OLM Cluj 2024, cls. VIII P2) Avem $(a_n - 1)^2 > 0$ pentru orice n și cum numerele sunt pozitive, rezultă că $a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2$, deci $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq 2n$. Aplicând inegalitatea menționată anterior strict pentru a_1 și a_2 , avem $a_1 + a_2 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq 4$. Aducând la numitor comun, înmulțim cu $a_1 a_2$ și obținem $(a_1 + a_2)(1 + a_1 a_2) \geq 4a_1 a_2$, deci $a_1 + a_2 \geq 3$, de unde rezultă că afirmațiile **A** și **B** sunt adevărate. Dacă șirul de numere reprezintă rădăcinile polinomului f , putem aplica Relațiile lui Viete și avem $S_1 = \sum_{i=1}^n a_i = -\frac{-n}{1} = n$, $S_{n-1} = a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1} = -\frac{n}{1} = -n$ și $S_n = \prod_{i=1}^n a_i = -1$ (de remarcat este faptul că n este par, conform cerinței, deci avem un număr par de Relații ale lui Viete, fapt care ne ajută să determinăm semnul sumelor). Putem deci, în relația $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ să aducem la numitor comun și să grupăm termenii și avem $\frac{\prod_{i=1}^n a_i (\sum_{k=1}^n a_k) + S_{n-1}}{\prod_{i=1}^n a_i} = \frac{(-1) \cdot n - n}{-1} = 2n$, de unde rezultă că și afirmația **C** este adevărată.

57. Evident, inecuația are sens pentru $x > 0$. Deoarece $8^{\log_7 x} = x^{\log_7 8}$ și $11^{1+\log_7 x} = 11 \cdot x^{\log_7 11} \Rightarrow x^{\log_7 10} + x^{\log_7 8} + 10 \cdot x^{\log_7 9} \leq 12 \cdot x^{\log_7 11}$, care este echivalentă cu inecuația

$x^{\log_7 \frac{10}{11}} + x^{\log_7 \frac{8}{11}} + 10 \cdot x^{\log_7 \frac{9}{11}} \leq 12$, deoarece $x^{\log_7 11} > 0$, oricare ar fi $x > 0$. Pe de altă parte funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{\log_7 \frac{10}{11}} + x^{\log_7 \frac{8}{11}} + 10 \cdot x^{\log_7 \frac{9}{11}}$, $\forall x > 0$ este strict descrescătoare. Întrucât $f(1) = 12$, deducem că soluția inecuației date este mulțimea $[1, +\infty)$.

58. Ecuția poate fi scrisă sub forma $(5^x)^2 + (3x - 7)5^x + 2x^2 - 13x + 6 = 0 \implies 5^x = \frac{7 - 3x \pm \sqrt{(3x - 7)^2 - 4(2x^2 - 13x + 6)}}{2} = \frac{7 - 3x \pm \sqrt{(x + 5)^2}}{2} = \frac{7 - 3x \pm |x + 5|}{2}$. Deci $5^x = -x + 6$ sau $5^x = -2x + 1$. Întrucât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 5^x + x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este strict crescătoare, deducem că ecuația $5^x + x - 6 = 0$ are o singură soluție reală, $x = 1$. Analog, ecuația $5^x + 2x - 1 = 0$ are o singură soluție reală; $x = 0$. Așadar, ecuația dată are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

59. Ecuția are sens pentru $x > 0$. Evident $x = 1$ este soluție a ecuației; să arătăm că este singura. Deoarece $8^{\log_7 x} = x^{\log_7 8}$, ecuația devine $x^{\log_7 10} + x^{\log_7 8} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}$. Împărțind ambii membri ai ecuației cu $x^{\log_7 12}$ obținem $x^{\log_7 \frac{5}{6}} + x^{\log_7 \frac{2}{3}} + 2 \cdot x^{\log_7 \frac{3}{4}} = 4$. Deoarece $\log_7 \frac{5}{6} < 0$, $\log_7 \frac{2}{3} < 0$, și $\log_7 \frac{3}{4} < 0$ deducem că funcțiile $f, g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) := x^{\log_7 \frac{5}{6}}$, $g(x) := x^{\log_7 \frac{2}{3}}$, $h(x) := x^{\log_7 \frac{3}{4}}$, $\forall x > 0$, sunt strict descrescătoare. Atunci și funcția $f + g + h$ este strict descrescătoare și deci ecuația are soluția unică $x = 1$.

60. Dacă punem $2^x = u$, $3^x = v$, $5^x = w$ ecuația dată devine $u^3 w + uv^2 + 3vw + 4u^2 v + 3u^3 = uvw + u^3 v + 3u^2 w + u^4 + 3v^2 + 3uv$, care este echivalentă cu ecuația $(u^2 - v)(u - 3)(w - u - v) = 0$. Obținem: 1) $4^x = 3^x$ de unde rezultă $x = 0$. 2) $2^x = 3$ de unde rezultă $x = \log_2 3$. 3) $5^x = 2^x + 3^x$ sau echivalent $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$. Cum funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definită prin $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ este strict descrescătoare, deci injectivă și $f(1) = 0$, deducem că $x = 1$ este unica soluție a ecuației $5^x = 2^x + 3^x$. Prin urmare, ecuația dată are soluțiile 0, 1 și $\log_2 3$.

61. Ultima cifră a numărului $2f(6)$ este 2, deci nu poate fi pătrat perfect. Folosind Binomul lui Newton, ultimul termen al dezvoltării $f(x)$ este singurul care nu depinde de valoarea parametrului x . $f(0) = 2024 \cdot 0 + 1$. Prin urmare, afirmațiile \boxed{A} , \boxed{B} și \boxed{D} sunt

false. De asemenea, aplicând Inegalitatea lui Bernoulli pentru $f(x)$, obținem că afirmația

\square e adevărată.

62. Ecuația dată este echivalentă cu ecuația $(x-1)(2y-1)(z+1) = 1 \times 2 \times 3$.

Cum $2y-1$ este impar, urmează că avem următoarele cazuri:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 1 \\ 2y-1 = 1 \\ z+1 = 6 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{array} \right. \text{ soluție; } \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 6 \\ 2y-1 = 1 \\ z+1 = 1 \end{array} \right. \implies \text{imposibil în } \mathbb{N}^*; \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 1 \\ 2y-1 = 3 \\ z+1 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right. \text{ soluție; } \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 2 \\ 2y-1 = 1 \\ z+1 = 3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right. \text{ soluție; } \\ \text{e) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 2 \\ 2y-1 = 3 \\ z+1 = 1 \end{array} \right. \implies \text{imposibil în } \mathbb{N}^*; \quad \text{f) } \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 3 \\ 2y-1 = 1 \\ z+1 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right. \text{ soluție;} \end{array}$$

63. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, avem $(k + (k+1)^x)(k + (k+1)^{-x}) = k^2 + k[(k+1)^x + (k+1)^{-x}] + 1 = (k+1)^2 + k[(k+1)^{x/2} - (k+1)^{-x/2}]^2 \geq (k+1)^2$; egalitatea având loc dacă și numai dacă $x = 0$. Urmează că $(1+2^x)(1+2^{-x})$

$$+ (2+3^x)(2+3^{-x}) + \dots + (n+(n+1)^x)(n+(n+1)^{-x}) \geq 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6}; \text{ egalitatea având loc dacă și numai dacă } x = 0.$$

64. Variantele \square și \square se referă strict la inegalitatea Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz, care este corect enunțată în varianta \square . Variantele \square și \square se referă la Lema lui Titu Andreescu, derivată din inegalitatea menționată anterior. Astfel, conform acestei leme,

$$\text{vom avea } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i} = \frac{3}{3} = 1.$$

65. Impunem condițiile: $x^2 - 6 \geq 0 \implies x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$, $x^2 - 8 \geq 0 \implies x \in (-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, \infty)$. Așadar, domeniul de definiție este $D = (-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, \infty)$.

$$\text{Notăm } \sqrt{x^2 - 6} = t \geq 0 \implies t = t^2 - 2 \implies t^2 - t - 2 = 0 \implies \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \text{ nu convine.} \end{cases}$$

$$\text{Așadar, } \sqrt{x^2 - 6} = 2 \implies x^2 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10}.$$

$$\text{66. } (7 - 4\sqrt{3})^x - 2 \cdot (2 - \sqrt{3})^x = 3 \implies (2 - \sqrt{3})^{2x} - 2 \cdot (2 - \sqrt{3})^x = 3$$

Folosim substituția $(2 - \sqrt{3})^x = t > 0 \implies t^2 - 2t - 3 = 0 \implies \begin{cases} t_1 = 3 > 0 \\ t_2 = -1 < 0 \text{ nu convine} \end{cases}$

$t = 3 \implies (2 - \sqrt{3})^x = 3 \implies x = \log_{2-\sqrt{3}} 3$. $(3 - 2\sqrt{2})^y - 2(\sqrt{2} - 1)^y = 3 \implies$

$(\sqrt{2} - 1)^{2y} - 2(\sqrt{2} - 1)^y = 3$; Folosim substituția $(\sqrt{2} - 1)^y = t > 0 \implies t^2 - 2t - 3 = 0 \implies$

$\begin{cases} t_1 = 3 > 0 \\ t_2 = -1 < 0 \text{ nu convine} \end{cases} \quad t = 3 \implies (\sqrt{2} - 1)^y = 3 \implies y = \log_{\sqrt{2}-1} 3 \implies x + y =$

$\log_{2-\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{2}-1} 3 \implies \implies x + y = \frac{\ln 3}{\ln(2 - \sqrt{3})} + \frac{\ln 3}{\ln(\sqrt{2} - 1)} \implies \implies x + y =$

$\ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(2 - \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} - 1) \cdot \ln(2 - \sqrt{3})} \right]$. Similar, $x - y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(2 - \sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2} - 1) \cdot \ln(2 - \sqrt{3})} \right]$.

67. $\left[\frac{x+1}{2} \right] = 3 \implies 3 \leq \frac{x+1}{2} < 4 \implies 5 \leq x < 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{5, 6\} \implies$

suma este 11.

68. Fie $z = a + bi$ un număr complex scris în formă algebrică ($a, b \in \mathbb{R}$). Cum

$z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \implies z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $b = 0$ ceea ce arată că

afirmația **C** este adevărată. Cum pentru $a = 0$ avem $z^2 = -b^2 \leq 0$ se deduce imediat că pentru a avea ($z^2 \in \mathbb{R}$) și $z^2 \geq 0$ e necesar ca $b = 0$, caz în care, evident, $z^2 = a^2 \geq 0$.

Așadar, $z^2 \in \mathbb{R}$ și $z^2 \geq 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că și afirmația **B** este adevărată. Afirmațiile **A** și **D** sunt, evident, false deoarece există numere complexe de pătrat pozitiv (de exemplu, $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) și există numere complexe de pătrat negativ (de exemplu, $i \in \mathbb{C}$ are pătratul -1).

69. $(a+bi)^n - (ai+b)^n = (a+bi)^n - i^n(a-bi)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} bi + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} i^{n-1} + b^n i^n - i^n(a^n - C_n^1 a^{n-1} bi + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} i^{n-1} + (-1)^n b^n i^n) \in \mathbb{R}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

70. După înmulțirea primei ecuații cu z avem $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0$. Din aceasta scădem a doua ecuație pentru a obține $az^4 - a = 0$. Deoarece $a \neq 0$, trebuie să avem $z^4 = 1$. Rădăcinile unității de ordinul patru sunt următoarele: $1, i, -1, -i$. Putem obține toate acestea cu excepția 1 prin setarea $a = b = c = d = 1$, astfel încât ambele ecuații devin $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Dacă $z = 1$, atunci trebuie să avem $a + b + c + d = 0$, și găsim foarte ușor astfel de a, b, c și d . Deci toate cele patru valori pe care le-am găsit sunt valori

posibile ale lui z .

71. Ecuația dată este echivalentă cu $50z^{2017}(z^2 + 1) = (z^2 + 1)(z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \dots - z^2 + 1)$. Dacă $z^2 + 1 \neq 0$, atunci ecuația este echivalentă cu ecuația $50z^{2017} = z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \dots - z^2 + 1$. Cum $|z| = 1$ obținem că $50 = 50|z^{2017}| = |z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \dots - z^2 + 1| \leq |z^{96}| + |z^{94}| + |z^{92}| + |z^{90}| + \dots + |z^2| + 1 = 49$, ceea ce este fals.

Rezultă că $z^2 + 1 = 0$. Urmează că $z \in \{i, -i\}$.

72. Notăm cu $t = \frac{1 - iz}{1 + iz}$ și ecuația devine $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ care are soluțiile $-1, i, -i$.

egalam pe rand fracția $\frac{1 - iz}{1 + iz}$ cu $-1, i, -i$ și obținem două soluții $z_1 = 1, z_2 = -1$.

73. Fie $z = a + bi$. Din $|z| = 1$ avem $a^2 + b^2 = 1$. Atunci, $z^2 + \bar{z}^2 = (a + bi)^2 + (a - bi)^2 = 2a^2 - 2b^2$. Atunci când $|a^2 - b^2| = 1$, avem două cazuri: 1) $a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow$ Avem $a^2 - b^2 = 1$ și $a^2 + b^2 = 1$. Adunând cele două ecuații, avem $b = 0$ și $a = \pm 1$, obținem $z_1 = 1$ și $z_2 = -1$; 2) $a^2 - b^2 = -1 \Rightarrow$ Avem $a^2 - b^2 = -1$ și $a^2 + b^2 = 1$ obținem $z_3 = i$ și $z_4 = -i$.

74. Cunoaștem faptul că, pentru un număr $k \in \mathbb{N}$, $i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k} = 1$. Cum n este prim, nu este multiplu de 4, deci afirmația **A** este falsă. Afirmațiile **B** și **C** rezultă imediat pentru numere precum $n = 3$ sau $n = 5$, de unde afirmația **D** se exclude automat.

75. Știind că $z_1 = 0$ și $z_2 = a \Rightarrow |z_3 - z_1| = a, |z_3 - z_2| = a \Rightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = a^2$ și $\sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} = a^2$, unde x, y sunt coordonatele lui z_3 . Asta înseamnă că $(x - a)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - a^2(x - a)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3 = \frac{a}{2} \pm i \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Astfel, $(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 = \frac{a^2}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Centrul de greutate este $z_0^2 = \frac{a^2}{6}(1 + i\sqrt{3})$.

76. Știm că $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, deci $S_{2024} = 0$ pt că 2024 este multiplu de 4;

$$S_{102} = S_{100} + i^{101} + i^{102} = 0 + i + i^2 = i - 1 = S_2, S_{33} = S_{32} + i^{33} = i.$$

77. Raționalizăm numărul complex $z = \frac{1 + i\sqrt{7}}{\alpha + (\alpha + \frac{1}{2})i}$ și ajungem la $z = \frac{\alpha + \sqrt{7}(\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2} +$

$i * \frac{\sqrt{7}\alpha - (\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2}$. Egalăm coeficientul părții imaginare cu 0 pentru a satisface condiția

din enunț și aflăm $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7} - 2}$, având în vedere că $\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2 \neq 0$.

78. Pt. $z = a+bi$, avem $Re(z^2+1+i) = Re((a+bi)^2+1+i) = a^2-b^2+1$, $Im(3i*\bar{z}+z*\bar{z}) = Im(3i*(a-bi) + (a+bi)(a-bi)) = Im(3ai + 3b + a^2 + b^2) = 3a$, $Im(z)^2 = b^2 \Rightarrow Re(z^2+1+i) - Im(3i*\bar{z}+z*\bar{z}) + Im(z)^2 = a^2 - b^2 + 1 - 3a + b^2 = a^2 - 3a + 1$. Egalăm cu 1 $\Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a=0$ sau $a=3$.

79. Pt. $z = a + bi$, avem
$$\begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = 1, \\ a^2 + b^2 = 3, \end{cases} \quad \text{deci } a = \frac{3}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ card}(M) = 2.$$

80. $z^2 = 2\sqrt{13} + 12i \notin \mathbb{R}$. $|z| = \sqrt{14} \Rightarrow |z|^n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n$ este par. $|z|^{2024} = \sqrt{14}^{2024} = 14^{1012}$, $|(6 + 4i\sqrt{10})^{1012}| = \sqrt{36 + 160}^{1012} = \sqrt{196}^{1012} = 14^{1012}$. $|z * \bar{z}| = 14 \Rightarrow |z * \bar{z}|^4 = 14^4$, $\frac{2|z^2|^3}{3} = \frac{2 * 14^3}{3} \Rightarrow |z * \bar{z}|^4 \geq \frac{2|z^2|^3}{3}$.

81. $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{7}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$ astfel, $Im(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}) = 0$. Din enunț știm că $|z_1| = |z_2| = 1$, deci $|\bar{z}| = \frac{1}{z}$. Un număr complex este real dacă și numai dacă este egal cu conjugatul său: $z = \bar{z}$. Astfel $(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}) = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \Rightarrow (\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}) = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$. De aceea $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{7}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} + i \notin \mathbb{R}$.

82. $|z_1| = \sqrt{12n^2 + (1 - 3n^2)^2} = \sqrt{(3n^2 + 1)^2} = 3n^2 + 1 \in \mathbb{N}$. Calculăm modulul și pentru numărul $z_2 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{8n^2 + (n^2 - 2)^2} = \sqrt{8n^2 + n^4 - 4n^2 + 4} = \sqrt{n^4 + 4n^2 + 4} = \sqrt{(n^2 + 2)^2} = n^2 + 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_1 z_2| \in \mathbb{N}$.

83. Rădăcinile de ordin 2 ale lui z sunt $z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$, $z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right) \Rightarrow z_0 + z_1 = 0$. Rădăcinile de ordin 3 ale lui z sunt $z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$, $z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \Rightarrow z_0 + z_1 + z_2 = \sqrt[6]{2} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

84. Scriem $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z - 3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$. Verificăm $Im\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = 0 \Leftrightarrow Im\left(\frac{x+2+yi}{x+(y-2)i}\right) \Leftrightarrow Im\left(\frac{(x+2+yi)(x-(y-2)i)}{x^2+(y-2)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$. Înlocuim $y = x + 2$ în $(x-3)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ nu există nicio soluție reală.

85. Calculăm modulul și ajungem la relația $b = \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3}$. Știm din enunț că

$$b < \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3} < \frac{17}{3} \Rightarrow a^2 < 12 \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{2}} \leq |a| < \sqrt{12}.$$

86. Notăm numărul complex z cu $a + bi \Rightarrow$ și ajungem la relația $Im\left(\frac{a-3+bi}{a+3+bi}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{z-3}{z+3} \in \mathbb{R}$. Raționalizăm și rezultă $6b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = \bar{z}$.

87. $\det(A) = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Matricea $\frac{1}{2\sqrt{2}}A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ este o

matrice de rotație, de unde $A^n = (2\sqrt{2})^n * \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} & -\sin \frac{n\pi}{4} \\ \sin \frac{n\pi}{4} & \cos \frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$, obținând astfel formula generală a termenilor a_n și b_n : $a_n = (2\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$, $b_n = (2\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$, care satisfac relația: $a_n^2 + b_n^2 = 8^n$.

88. $\det(A) = 0 \Rightarrow$ matricea A nu e inversabilă. Folosind Teorema Cayley-Hamilton pentru o matrice pătratică, avem: $A^2 - \text{tr}(A) * A + \det(A) * I_2 = O_2$, dar $\det(A) = 0 \Rightarrow A^2 = 4iA$, $A^3 = (4i)^2A$, \dots , $A^n = (4i)^{n-1}A$.

89. $\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ matricea A e inversabilă și $\text{rang}(A) = 3$. Din faptul că A este inversabilă, se poate determina că ecuația $A * X = I_3$ are cel puțin o soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

90. $\det(A) = 2y(x-y)^3 \Rightarrow$ matricea nu e inversabilă pentru $x = y$ sau $y = 0$.

$A^2(10, 10) = 40A(10, 10)$, $A^3 = 40^2A(10, 10)$, \dots , $A^{100}(10, 10) = 4^{99}A(10, 10) = 4^{99} * 10 * A(1, 1) = 4^{100}A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Nu există $A^{-50}(2, 2)$ deoarece suntem în cazul $x = y$ și nu există $A^{-1}(2, 2)$.

91. $\det(A(x)) = 0 \Rightarrow$ matricea are rangul diferit de 3. $f(z) * f(w) = \frac{1}{2} * A(z) * \frac{1}{2} * A(w) =$

$$\frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 2zw & 0 & 2zw \\ 0 & 0 & 0 \\ 2zw & 0 & 2zw \end{pmatrix} \Rightarrow f(z) * f(w) = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} zw & 0 & zw \\ 0 & 0 & 0 \\ zw & 0 & zw \end{pmatrix} = \frac{1}{2} * A(zw) = f(zw).$$

Pe baza explicațiilor anterioare, $f(z^3) = f(z * z^2) = f(z) * f(z^2) = f(z) * f(z) * f(z) = (f(z))^3$.

Pentru a verifica dacă funcția f este injectivă, trebuie să urmărim relația: $f(z_1) =$

$$f(z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_1 = z_2. \text{ Relația se poate verifica ușor: } f(z_1) = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & z_1 \end{pmatrix},$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2.$$

$$92. \quad I_2 = I_2 + 0 * A \Rightarrow I_2 \in G. \quad X(a) = I_2 + a * A = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 2a & 1+2a \end{pmatrix} \Rightarrow X(a) * X(b) =$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ 2a & 1+2a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1+b & b \\ 2b & 1+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(a+b+3ab) & a+b+3ab \\ 2(a+b+3ab) & 1+2(a+b+3ab) \end{pmatrix} = X(a+b+3ab).$$

Pentru a verifica răspunsul C, folosim relația de la subpunctul B și căutăm $X(a)$

a.î. $X(a) * X(x) = X(x) * X(a) = X(a), \forall x \in \mathbb{R}$. $X(a) * X(b) = X(b) * X(a) \Rightarrow$ comu-

tativitate $\Rightarrow X(a) * X(x) = X(x) * X(a) \Rightarrow X(a) * X(x) = X(a) \Rightarrow X(a+x+3ax) =$

$X(a) \Rightarrow a+x+3ax = a \Rightarrow x(1+3a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$. De aici rezultă faptul că

$$X\left(\frac{-50}{3}\right) * X\left(\frac{-49}{3}\right) * \dots * X\left(\frac{49}{3}\right) * X\left(\frac{50}{3}\right) = X\left(\frac{-50}{3}\right) * X\left(\frac{-49}{3}\right) * \dots * X\left(\frac{-1}{3}\right) * \dots * X\left(\frac{49}{3}\right) * X\left(\frac{50}{3}\right) = X\left(\frac{-1}{3}\right).$$

$$93. \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ a & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (2-a)x^2 - 4x + 3a + 1. \quad \text{Determinantul trebuie să}$$

fie diferit de 0 pentru ca matricea A să fie inversabilă sau să îndeplinească egalitatea

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

94. Se urmăresc pașii de la exercițiul anterior. Pentru ca A să fie inversabilă $\delta < 0 \Rightarrow$

$$-2a^2 + 5a - 2 < 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty).$$

95. $\det(E_n) = 0$, pentru că avem 2 coloane/linii egale $\Rightarrow \text{rang}(E_n) < n \Rightarrow \det(I_n * E_n) =$

0, E_n nu este inversabilă.

$$E_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = n * E_n.$$

$$96. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3 * A \Rightarrow A^3 = A * A^2 = A * 3 * A = 3 * A^2 = 3 * 3 * A = 9 * A \Rightarrow x = 9.$$

Pe baza relației care se poate observa între A^n și A, $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = 3^{n-1} * A, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

suma cerută este egală cu $3^0 A + 3^1 A + 3^2 A + \dots + 3^{n-1} A = \frac{3^n - 1}{2} A$.

$$97. \det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3. \text{ Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ -x-y & 1 & -xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ -(x+y) & 1 & \frac{(x+y)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow \text{matricea } I_2$$

îndeplinește condiția $A * I_2 = A$.

98. Există un minor care nu depinde de parametrul x , de dimensiune 2 diferit de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2, A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rang}(A) \leq 3. \text{ Pentru } x = 0 \text{ matricea}$$

$$\text{este egală cu } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ din care putem alege minorul } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = 3$.

$$99. \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ b & b & 0 \end{vmatrix} = b^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$100. A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Leftrightarrow xz = 0. \det(I_3 - A) = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow I_3 - A$$

e inversabilă. Pentru a verifica dacă inversa ei este $I_3 + A$, observăm că $(I_3 - A)(I_3 + A) =$

I_3 .

$$101. \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{vmatrix} = -a, \det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 0. \det(B) = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(B) = 3.$$

Din Teorema Cayley-Hamilton avem relația $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, care se poate regăsi în varianta B. $A^3 = -1 * I_2$.

102. $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * C \Rightarrow C = -I_2. f(I_2) = -I_2 \Rightarrow f(I_2) - f(A) =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Egalăm } f(I_2) - f(A) \text{ cu } (I_2 - A) * D, \text{ unde } D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

103. Întrucât coloana 3 este egală cu jumătate din suma coloanelor 2 și 4, $\det A = 0$.

104. Urmărind liniile 2 și 4 ale matricei A avem $\det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Adunând

liniile 2, 3 și 4 la prima linie, avem $\det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{l_1+l_2}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$16 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-2) \cdot 2 = -64. \text{ Cum } \det A \neq 0, \text{ matricea } A \text{ este inversabilă.}$$

Cum inversa matricei A este rezultatul înmulțirii scalarului $\frac{1}{\det A} = -\frac{1}{64}$ cu adjuncta matricei A , elementul matricei A^{-1} situat în linia 2 și coloana 3 este produsul lui $-\frac{1}{64}$ cu complementul algebric al elementului lui A situat în linia 3 și coloana 2, adică

$$-\frac{1}{64} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{l_1+l_2}{=} \frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

iar elementul matricei A^{-1} situat în linia 3 și coloana 2 este produsul lui $-\frac{1}{64}$ cu com-

plementul algebric al elementului lui A situat în linia 2 și coloana 3, adică

$$-\frac{1}{64} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{l_1+l_2}{=} \frac{1}{32} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}.$$

105. Matricile X care verifică (1), dacă există, sunt matrici coloană de forma $X =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2). \text{ Rezultă imediat că varianta de răspuns } \boxed{A} \text{ este adevărată. Pentru ca } X \text{ din}$$

(2) să fie o soluție a ecuației (1) este necesar și suficient ca $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ să fie o

$$\text{soluție a sistemului de 3 ecuații liniare cu 4 necunoscute } \begin{cases} 2x_1 + 3ax_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \quad (3).$$

$$\text{Matricele } A = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ sunt matricea sistemului}$$

(3), respectiv matricea extinsă a sistemului (3), iar Teorema Kronecker-Capelli ne spune că

$$\text{sistemul (3) este compatibil dacă și numai dacă } \text{rang } A = \text{rang } \bar{A}. \text{ Cum minorul } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

5, „decupat” din prima și ultima coloană a lui A , este nenul, $\text{rang } A \geq 2$. Putem borda

acest minor în două moduri pentru a obține un minor de ordinul 3 al lui A . Avem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{c_1+2c_3 \\ c_2+c_3}}{=} = -7(5-a-2) = 7(a-3). \text{ Dacă } a \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ atunci}$$

$\text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A}$. În caz contrar, adică dacă $a = 3$, pentru a stabili rangul lui A mai

$$\text{trebuie calculat minorul de ordinul 3 } \begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{l_1-2l_3 \\ l_2-l_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{l_1=7l_2}{=} =$$

0. Rezultă că $\text{rang } A = 2$ și pentru a afla rangul matricei \bar{A} trebuie calculat minorul său de ordinul 3 (care este, în acest caz, singurul minor caracteristic corespunzător minorului

principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ al sistemului (3)) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Acest minor fiind

nenul, $\text{rang } \bar{A} = 3 \neq 2 = \text{rang } A$. Așadar, sistemul (3) și, implicit, ecuația (1) au soluții dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ și astfel afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{\substack{l_1 \leftrightarrow l_3 \\ l_2 - l_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3a - 2 & -7 \\ 0 & 1 & a - 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}.$$

Cum pentru $a = \frac{5}{3}$ ecuația (1) are soluție, sistemul (3) fiind compatibil, afirmația $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

106. Dezvoltând determinantul se obține ecuația $f(x) = x^3 - 3x + m = 0$. Ea admite rădăcină dublă $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Obținem $\alpha \in \{-1, 1\}$, ce ce conduce la $m \in \{-2, 2\}$.

107. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$. Din $\det(X) = 0$ rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Din condiția $\det(A + X) = 0$ rezultă $a = 3b$ sau $\lambda = \frac{1}{2}$. Deci $X = \begin{pmatrix} 3b & b \\ 3d & d \end{pmatrix}$ cu $b, d \in \mathbb{Z}$

sau $X = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbb{Z}$. Pentru $\boxed{\text{A}}$, constatăm că X are forma a doua, de

unde rezultă că $X^2 = 4bX$. De aici se deduce că $X^6 = 4^5 b^5 X$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă pentru că ipoteza din enunț implică $d = 3b^2$. Și $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

De exemplu, $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$, deci $\det(X + Y) \neq 0$. Afirmația $\boxed{\text{D}}$

este evident adevărată.

108. Adunăm coloana a doua la coloana întâi în determinant și obținem ecuația sub

forma:
$$\begin{vmatrix} 2 & \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ 2 & 1 + \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ 1 & \cos^2 \theta & 1 + 4 \sin 4\theta \end{vmatrix} = 0.$$
 Scădem acum prima linie din liniile doi și trei și

obținem
$$\begin{vmatrix} 2 & \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
 sau, dacă dezvoltăm după linia a doua, $4 \sin 4\theta + 2 = 0$,

adică $\sin 4\theta = -\frac{1}{2}$. Soluția generală a acestei ecuații este $4\theta = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, de

unde $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{24}$. Este ușor de constatat că soluțiile aflate în intervalul considerat

sunt cele care corespund lui $n = 1$: $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$ și $n = 2$: $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$. Dacă

$n \leq 0$, soluția este negativă, în timp ce dacă $n > 2$, soluția este mai mare decât $\frac{\pi}{2}$.

Astfel, răspunsurile corecte sunt **A** și **C** (numerele de la **B** și **D** sunt în interval, dar nu sunt soluții).

109. Scădem oricare linie (sau coloană) din oricare alta, apoi aplicăm metoda Laplace (și inducție după n pentru **D**).

110. Soluțiile ecuației sunt $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 * A_2 = -A_1^2$.

111. $\det(X) = b(1-a) \Rightarrow \det(X) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ sau $a = 1$. Știm că $\det(X^k) =$

$\det(X)^k \Rightarrow \det(X^3) = b^3(1-a)^3 = -b^3(a-1)^3$.

112. Observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^n = O_n$. De asemenea, suma elementelor de pe linia 5 a matricei A^5 este egală cu 0.

113. Aplicăm un artificiu clasic pentru a afla forma generală a matricei A^n , scriind A ca

suma a 2 matrici astfel: $A = I_2 + X$, $X = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Se poate observa folosind teorema Cayley-Hamilton că $X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)I_2 = O_2 \Rightarrow X^2 = 2X \Rightarrow X^n = 2^{n-1}X$.

Ridicăm A la puterea n folosind binomul lui Newton: $A^n = (I_2 + X)^n = C_n^0 I_2^n + C_n^1 I_2^{n-1} X + C_n^2 I_2^{n-2} X^2 + \dots + C_n^k I_2^{n-k} X^k + \dots + C_n^n X^n \Leftrightarrow A^n = I_2 + C_n^1 X + C_n^2 2X + \dots + C_n^k 2^{k-1} X + \dots + C_n^n X^n \Leftrightarrow A^n = I_2 + (C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + 2^{k-1} C_n^k + \dots + 2^{n-1} C_n^n) X$.

Notăm cu $S = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + 2^{k-1} C_n^k + \dots + 2^{n-1} C_n^n = \frac{3^n - 1}{2} [3^n = (1 + 2)^n =$

$$1 + 2S] \Rightarrow A^n = I_2 + S * X = \begin{pmatrix} 2 * 3^n - 1 & 4(1 - 3^n) \\ \frac{3^n - 1}{2} & 2 - 3^n \end{pmatrix}. \quad \text{tr}(A^n) = 3^n + 1, \det(A^n) =$$

$$3^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1.$$

114. Prin inducție aflăm $X^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ și se ajunge, calculând partea stângă

a ecuației, la egalitatea $3^{n+1} * \alpha^n = 1 \Rightarrow \alpha^n = \frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow$ ecuația nu are soluții raționale, doar reale.

$$\mathbf{115.} \quad A^{4k} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A^{4k+1} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix}, A^{4k+2} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}, A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

$$A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3}) = \hat{0}.$$

116. $\det(A) = \alpha^3 - \alpha(\alpha - 1) = \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha$. Din faptul că α e o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\alpha - 1 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha * \alpha^2 = \alpha * (-\alpha - 1) = -\alpha^2 - \alpha = 1 \Rightarrow \det(A) = 1 + \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 2$. Din teorema Cayley-Hamilton rezultă relația $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 - (\alpha^2 + \alpha)A + (2\alpha + 2)I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + A + (2\alpha + 2)I_2 = O_2$.

$$\mathbf{117.} \quad \text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 2 \\ c(a+d) = -2 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \\ a+d \neq 0 \\ (a-c)(a+c) = 0 \\ (d-c)(d+c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Cazul I} \begin{cases} a-c = 0 \\ d-c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = c = d = i, \quad b = \mp i \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}; \text{Cazul II} \begin{cases} a+c = 0 \\ d+c = 0 \end{cases}$$

$$-c \cdot (-2c) = 2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow a = b = d = \mp 1 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{Cazul III} \begin{cases} a-c = 0 \\ d+c = 0 \end{cases}; \text{Cazul IV} \begin{cases} a+c = 0 \\ d-c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Soluțiile sunt: } X_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$118. \det A(m) = 1 - 3m^2 + m - 2m = -3m^2 - m + 1 = 0 \iff \begin{cases} m_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q} \\ m_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Așadar, $A(m)$ este inversabilă, $\forall m \in \mathbb{Q}$. Mai mult de atât, $\text{rang } A(3) = 3, \forall m \in \mathbb{Q}$.

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B \Rightarrow A(0)^n = I_3 + n \cdot B + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & -3n \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n^2 + n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2 - 2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

119. Fie A matricea sistemului. $\det(A) = -12a - 6 \Rightarrow \det(A) = 0$ pentru $a = -\frac{1}{2}$.

Pentru $a = -\frac{1}{2}$, cu minorul principal ales din ecuațiile 2 și 3, cu necunoscutele principale y

și $z: m_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, iar minorul caracteristic $m_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 7+b \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -24-3b$.

Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -\frac{1}{2}$ și pentru $b = -8$.

120. Dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar \bar{A} este matricea

extinsă a sistemului, sistemul este compatibil, $\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & : & 2 \\ 3 & 1 & a & -1 & : & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem

$d := \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - a$.

Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 10$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil.

Caz 2: $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = 10$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} = -4(b+5)$. **Caz 2.1:**

$d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -5$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2:** $d_2 =$

$0 \Leftrightarrow b = -5 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & c \end{vmatrix} =$

$-(4c+15)$. **Caz 2.2.1:** $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -\frac{15}{4}$. Atunci sistemul este incompatibil. **Caz**

2.2.2: $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{15}{4}$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil.

121. Avem $d := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$, fiind un determinant Vandermonde.

Caz 1: $d \neq 0 \Leftrightarrow a, b, c$ distincte două câte două și obținem un sistem Cramer. **Caz**

2: $d = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) < 3$. **Caz 2.1:** $a \neq b = c$ (se rezolvă la fel pentru $b \neq a =$

$c, c \neq a = b$) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & b & c & : & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & : & d^2 \end{pmatrix}$, $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) =$

$$2, d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = (b-a)(d-a)(d-b). \text{ Știm că } b-a \text{ nu este egal cu } 0. \text{ Caz}$$

2.1.1: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow d \neq a$ și $d \neq b \Rightarrow$ sistem incompatibil. **Caz 2.1.2:** $d_c = 0 \Rightarrow$ și considerăm $d = b$ (analog cu $d = a$). Atunci $\text{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz**

$$\text{2.2: } a = b = c. \text{ Atunci } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & a & a & : & d \\ a^2 & a^2 & a^2 & : & d^2 \end{pmatrix}. \text{ Avem 2 determinanți caracteristici:}$$

$$d_{c1} := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{vmatrix} = d - a; d_{c2} := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix} = (d-a)(d+a). \text{ Caz 2.2.1: } d_{c1} \neq 0 \Leftrightarrow d \neq a \Rightarrow$$

sistem incompatibil. **Caz 2.2.1:** $d = a \Rightarrow d_{c1} = d_{c2} = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil.

122. Dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar \bar{A} este matricea

$$\text{extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 & : & -1 \\ 1 & 9 & a & 3 & : & 3 \\ 5 & -6 & 10 & b & : & c \end{pmatrix}. \text{ Avem}$$

$$d := \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2. \text{ Calculăm } d_1 := \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & a \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix} = -3a + 6. \text{ Caz}$$

1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2:**

$$d_1 = 0 \Leftrightarrow a = 2. \text{ Calculăm } d_2 := \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & b \end{vmatrix} = 21(b+2). \text{ Caz 2.1: } d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2.$$

Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2:** $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow$

$$\text{rang}(A) = 2. \text{ Calculăm determinantul caracteristic } d_c := \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & c \end{vmatrix} = 21(c+2).$$

Caz 2.2.1: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -2$. Atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.2.2:** $d_c =$

$0 \Leftrightarrow c = -2$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat:

ecuații principale $\rightarrow (1), (2)$; necunoscute principale $\rightarrow x_1, x_2$; necunoscute secundare

$\rightarrow x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

123. Avem $d := \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$. **Caz 1:** $d \neq 0 \Leftrightarrow a, b, c \neq 0$ și obținem un sistem

compatibil determinat Cramer. **Caz 2:** $d = 0 \Rightarrow abc = 0$. **Caz 2.1:** $a = b = c = 0 \Rightarrow$

soluția: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$ **Caz 2.2:** $a = b = 0, c \neq 0$. Atunci sistemul este incompatibil (dacă

înlocuim datele în a prima ecuație a sistemului, avem $0 = c$ care este o contradicție).

Caz 2.3: $a = 0, b, c \neq 0 \Rightarrow$ sistemul $\begin{cases} bx = c \\ cx = b \\ cy + bz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{c}{b} \\ x = \frac{b}{c} \\ y = -\frac{b}{c}z \end{cases}$. **Caz 2.3.1:**

$a = 0, \frac{c}{b} \neq \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 \neq c^2 \Leftrightarrow c \neq \pm b \Rightarrow$ sistem incompatibil. **Caz 2.3.2:** $a = 0, c =$

$\pm b \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{c} = \pm 1$. Obținem sistemul: $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ **Caz 2.3.2.1:** mulțimea

soluțiilor $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.3.2.2:** mulțimea soluțiilor $\begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Analog se discută și celelalte cazuri.

124. Dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar \bar{A} este matricea

extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & : & -1 \\ -1 & 1 & a & 2 & : & 2 \\ -1 & -3 & 2 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem

$d := \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & a \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 7a + 14$.

Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_3 și necunoscuta secundară

$x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2:** $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = -2$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & b \end{vmatrix} = b + 18$.

Caz 2.1: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -18$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_4 și necunoscuta secundară

$x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.2:** $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -18 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & c \end{vmatrix} = c + 10$. **Caz 2.2.1:** $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -10$. Atunci

sistemul este incompatibil. **Caz 2.2.2:** $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -10$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat: ecuații principale $\rightarrow (1), (2)$; necunoscute principale $\rightarrow x_1, x_2$; necunoscute secundare $\rightarrow x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

125. Dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar \bar{A} este matricea

extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. $\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 4 & : & 1 \\ 1 & -2 & a & 3 & : & 0 \\ 3 & 2 & -1 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem

$d := \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a + 11$.

Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -11$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_3 și necunoscuta secundară

$x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2:** $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = -11$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = 5b + 35$.

Caz 2.1: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -7$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_4 și necunoscuta secundară

$x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.2:** $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -7 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & c \end{vmatrix} = 5c + 8$. **Caz 2.2.1:** $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -\frac{8}{5}$. Atunci sistemul

este incompatibil. **Caz 2.2.2:** $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{8}{5}$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat: ecuații principale $\rightarrow (1), (2)$; necunoscute principale $\rightarrow x_1, x_2$; necunoscute secundare $\rightarrow x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

126. Avem $d := \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} = a(b-1)(b+1)$. **Caz 1:** $d \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b \neq 1, b \neq$

-1 și obținem un sistem Cramer, compatibil determinat. **Caz 2:** $d = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) < 3$.

Caz 2.1: $a = 0, \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2 & : & 1 \\ 0 & 2b-1 & 3 & : & 1 \\ 0 & b & b+3 & : & 2b-1 \end{pmatrix}$, $d_1 = \begin{vmatrix} b & 2 \\ 2b-1 & 3 \end{vmatrix} = -b+2$. **Caz**

2.1.1: $a = 0, d_1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2$, atunci $\text{rang}(A) = 2$. $d_c = \begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2b-1 & 3 & 1 \\ b & b+3 & 2b-1 \end{vmatrix} =$

$(b-1)(-b+5)$. **Caz 2.1.1.1:** $a = 0, b \neq 2, d_c \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1, b \neq 5$, atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.1.1.2:** $a = 0, b = 1$ sau $b = 5$ ($d_c = 0$), atunci sistemul este compatibil. Ecuații principale : 1 și 2; necunoscute principale : y, z ; necunoscute

secundare: $x = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sistem Cramer $\begin{cases} by + 2z = 1 \\ (2b-1)y + 3z = 1 \end{cases}$ cu $b = 1$ sau $b =$

5. Caz 2.1.2: $a = 0, d_1 = 0 \Rightarrow b = 2$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & : & 1 \\ 0 & 3 & 3 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & : & 3 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq$

$0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic: $d_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$

sistemul este incompatibil. **Caz 2.2:** $d = 0, a \neq 0 \Rightarrow b = 1$ sau $b = -1$. **Caz 2.2.1:**

$a \neq 0, b = 1$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & : & 1 \\ a & 1 & 3 & : & 1 \\ a & 1 & 4 & : & 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Calculăm determinantul

caracteristic: $d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2.2:** $a \neq 0, b = -1$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & : & 1 \\ a & -3 & 3 & : & 1 \\ a & -1 & 2 & : & -3 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$ Calculăm determinantul caracteristic:

$d_c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

127. Adunând cele două ecuații rezultă $x^2 + 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -7.$

Înlocuind în oricare dintre cele două ecuații, rezultă $y = 14.$ Se verifică ușor că perechea găsită $(-7, 14)$ este soluție a sistemului. Deci singura afirmație adevărată este $\boxed{C}.$

128. Matricea sistemului și matricea extinsă sunt $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 \\ 4 & -1 & \alpha + 2 & 5 \\ 2 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix},$ respectiv

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha + 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Minorul matricei A de ordin 2: $d = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 =$

2 este nenul și poate fi bordat în două moduri la un minor de ordinul 3 al matricei $A.$

Să considerăm minorul $d' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & \alpha + 2 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \alpha + 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\alpha - 2 + 5) =$

$2(3 - \alpha).$

Dacă $\alpha \neq 3$ atunci $d' \neq 0,$ prin urmare $\text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A}$ și, conform Teoremei Kronecker-Capelli, sistemul dat este compatibil. Dacă $\alpha = 3$ atunci, pentru a decide care este rangul matricei A (și, implicit, compatibilitatea sistemului dat) trebuie să calculăm

celălalt minor de ordinul 3 ce se obține din bordarea lui $d:$ $d'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_2 - 2l_3 \end{matrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & -21 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-21 + 21) = 0. \text{ Aceasta arată că } d \text{ este minor principal și, echiva-}$$

$$\text{lent, rang } A = 2. \text{ Cum minorul caracteristic corespunzător lui } d \text{ este } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 - 2c_3}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(2 - 1) = -2 \neq 0. \text{ Fie folosind teorema lui Rouché și constatând că}$$

acest minor caracteristic este nenul, fie aplicând teorema Kronecker-Capelli și constatând că $\text{rang } \bar{A} = 3 \neq 2 = \text{rang } A$, deducem că sistemul dat este incompatibil. Deci sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$. În particular, dacă $\alpha = -5 \neq 3$ atunci sistemul este compatibil. Așadar, afirmațiile **[B]** și **[C]** sunt adevărate, iar **[A]** și **[D]** sunt false.

129. Scăzând cele două ecuații obținem $(x - z)(x - 2y) = -3$. Cum numerele x, y și z

$$\text{sunt întregi, trebuie să avem } \begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} x - z = 3 \\ x - 2y = -1. \end{cases} \quad (2)$$

a) În cazul (1) suntem conduși la $7x^2 + 3x - 10 = 0$ sau echivalent $(x - 1)(7x + 10) = 0$, de unde rezultă $x = 1$ și apoi $y = 2$ și $z = 0$. ($x = -\frac{7}{10} \notin \mathbb{Z}$). **b)** În cazul (2) suntem conduși la $7x^2 - 15x - 10 = 0$, pentru care $\delta = 505$, care nu este pătrat perfect, astfel x nu va fi întreg. Așadar, sistemul dat are o singură soluție $x = 1, y = 2, z = 0$.

130. Avem relația $ax^2 + c = bx^2 - d \Leftrightarrow (a - b)x^2 = -(d + c)$. Dacă $a - b = 0$, există două

cazuri: $c \neq d \Rightarrow$ ecuația nu are nicio soluție, sau $c = d \Rightarrow$ ecuația are o infinitate de soluții.

Putem elimina cazul $a = b$ și putem împărți cu $(a - b) \Rightarrow x^2 = -\frac{d + c}{a - b} \Rightarrow$ există 2 rădăcini distincte pentru $-\frac{d + c}{a - b} > 0 \Rightarrow \frac{d + c}{a - b} < 0$. Înmulțind cu $(a - b)^2 > 0 \Rightarrow (d + c)(a - b) < 0$.

131. Din prima ecuație scădem a doua $\Rightarrow y + z - yz = -9 \Rightarrow (z - 1)(y - 1) = 10$. Soluțiile

$$\in \mathbb{N} \Rightarrow 4 \text{ posibilități: } \begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 10 \end{cases}, \begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 5 \end{cases}, \begin{cases} y - 1 = 5 \\ z - 1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} y - 1 = 10 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Re-}$$

$$\text{zolvând sistemul} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 11 \\ z = 2 \end{cases}$$

132. Calculăm determinantul sistemului și egalăm cu 0: $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 =$

$-1, m_2 = 3$. Verificăm compatibilitatea sistemului pentru fiecare dintre cele 2 valori ale

lui m : alegem determinantul principal $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$; pentru $m=-1 \Rightarrow d_c =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{sistem incompatibil}; \text{ pentru } m=3 \Rightarrow d_c = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

sistem incompatibil. Observăm că pentru $m = -1$ și $m = 3$ sistemul este incompatibil,

deci suma $S = 2$.

133. Din prima ecuație a sistemului aflăm următoarele date: $x = 25 - 2y, x > 0, x \neq$

$$1; \log_x(x + 2y) = \frac{\log_5(x + 2y)}{\log_5 x} \Rightarrow \log_5(x + 2y) = 2 \Rightarrow x + 2y = 25 \Rightarrow x = 25 - 2y.$$

Înlocuim x în cea de-a doua ecuație și rezultă: $y(2y - 25) + 26y = y^3 \Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - y =$

$$0 \Leftrightarrow y(y^2 - 2y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1 + \sqrt{2}, y_3 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 25, x_2 = 23 - 2\sqrt{2}, x_3 =$$

$$23 + 2\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{134.} \text{ Calculăm } d = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & c-1 & c^2-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & c-1 & c^2-c \end{vmatrix} =$$

$$(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c-1 & c^2-c \end{vmatrix} = (a-b)(c-1)^2. \mathbf{Caz 1:} d \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 1, a \neq b. \text{ Atunci sistemul}$$

este compatibil determinat. **Caz 2:** $d = 0 \Leftrightarrow a = b$ sau $c = 1$. **Caz 2.1:** $c = 1$. Atunci

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ b & b+1 & b+2 & : & b+3 \\ 1 & 1 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Calculăm determinantul}$$

$$\text{caracteristic: } d_c = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+3 \\ b & b+1 & b+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sistem compatibil simplu nede-}$$

terminat. **Caz 2.2:** $c \neq 1, a = b$. Atunci $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ 1 & c & c^2 & : & c^3 \end{pmatrix}$, $d_2 =$

$\begin{vmatrix} a & a+1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = ac - a - 1$. **Caz 2.2.1:** $c \neq 1, a = b, d_2 \neq 0 \Leftrightarrow ac - a - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$. Atunci sistemul este compatibil simplu nedetermi-

nat. **Caz 2.2.2:** $c \neq 1, a = b, d_2 = 0 \Leftrightarrow ac = a + 1$. Calculăm $d_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} = ac^2 - a - 2 = (a+1)c - a - 2 = ac + c - a - 2 = c - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$.

Atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

135. Ridicând prima ecuație la puterea $2x$, ajungem la egalitatea $x + y = 4^{2x} \Rightarrow 4^{2x} \cdot 3^x = 48 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow S = 3 + 5 = 8$.

136. Calculăm determinantul sistemului: $d = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{2}\hat{4} = \hat{4} \neq \hat{0} \Rightarrow$ sistem de

tip Cramer. $d_x = \begin{vmatrix} \hat{4} & \hat{2} & -\hat{3} \\ \hat{7} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = -\hat{18} = \hat{2}; d_y = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{4} & -\hat{3} \\ \hat{2} & \hat{7} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{6}\hat{6} = \hat{6}; d_z = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{7} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{6} \Rightarrow x \in \{\hat{3}, \hat{8}\}, y \in \{\hat{4}, \hat{9}\}, z \in \{\hat{4}, \hat{9}\}$.

137. Notăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}; a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Înlocuind în prima

ecuație a sistemului rezultă sistemul (1):
$$\begin{cases} -a + b + e + 2g = -57 \\ -c + d + 2e - g = 34 \\ a + 2b + f + 2h = 76 \\ c + 2d + 2f - h = 221 \end{cases}, \text{ iar din a doua}$$

ecuație a sistemului rezultă sistemul (2):
$$\begin{cases} a + c + f = 51 \\ -a + h = 36 \\ b + d - f = 97 \\ -b - h = -42 \end{cases} .$$
 Scriem toate necunoscutele

din sistemul (2) în funcție de a și c :
$$\begin{cases} h = 36 + a \\ b = 6 - a \\ f = 51 - a - c \\ d = 142 - c \end{cases} .$$
 Înlocuim în $a + 2b + f + 2h =$

$76 \Rightarrow a + 12 - 2a + 51 - a - c + 72 + 2a = 76 \Rightarrow c = 59 \Rightarrow d = 83; c + 2d + 2f - h = 221 \Rightarrow a =$
 $-16 \Rightarrow h = 20, b = 22, f = 8 \Rightarrow e = -15, g = -40. A = \begin{pmatrix} -16 & 22 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$

138. Calculăm determinantul sistemului:
$$d = \begin{vmatrix} m & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & m & -\hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{1} & m \end{vmatrix} = m^3 + \hat{3}m = m(m^2 +$$

$\hat{3}); d = \hat{0} \Leftrightarrow m = \hat{0}$ sau $m^2 + \hat{3} = \hat{0}$. Nu există valoare m în \mathbb{Z}_5 pentru care $m^2 + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow d = \hat{0} \Leftrightarrow m = \hat{0}$. Pentru $m = \hat{0}$ observăm, adunând toate ecuațiile sistemului, că rezultatul este incorect $\hat{0} = \hat{3} \Rightarrow$ sistem incompatibil.

139. Înlocuind în numitorul fracției din sumă, rămânem cu
$$\sum_{t=2}^{2024} \frac{1}{t(t+1)} = \sum_{t=2}^k \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2025} = \frac{2023}{4050}$, deci $b - a = 2027$.

140. Aplicând funcția f pentru fiecare element din domeniu, $f(x_1) \neq f(x_2)$, de unde rezultă proprietatea de injectivitate. Cum $Im f = \mathbb{Z}_6$, funcția este și surjectivă, deci este bijectivă.

141. Două matrici arbitrare $A, A' \in M$ sunt determinate de numerele arbitrare

$a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$ cu ajutorul cărora pot fi scrise:
$$A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & c \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} b' & 0 \\ a' & c' \end{pmatrix} .$$

Avem $A \cdot A' = \begin{pmatrix} bb' & 0 \\ ab' + ca' & cc' \end{pmatrix}$. Cum $bb', ab' + ca', cc' \in \mathbb{Q}$ și $(bb')(cc') = (bc)(b'c') =$

$1 \cdot 1 = 1$, se deduce că $AA' \in M$. Prin urmare afirmația **A** este adevărată, iar cum orice matrici $A, A', A'' \in M$ sunt din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este asociativă, avem, evident, $(A \cdot A') \cdot A'' = A \cdot (A' \cdot A'')$, $\forall A, A', A'' \in M$. Așadar și afirmația **B** este adevărată. Elementul neutru $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din monoidul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$

aparține lui M , ceea ce implică $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, $\forall A \in M$. Deci și afirmația **D** este adevărată. Afirmația **C** este falsă. De exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$ și

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

142. Mulțimea $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ este mulțimea funcțiilor reale cu domeniul \mathbb{R} , iar operațiile din enunț sunt operații foarte des utilizate la analiză matematică. Se știe sau se deduce foarte ușor că adunarea funcțiilor reale din enunț este asociativă, comutativă, admite element neutru pe $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$ și că orice $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ are opusă (pe $-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(-f)(x) = -f(x)$), deci $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ este grup abelian. Înmulțirea funcțiilor reale din enunț este asociativă, comutativă, admite element neutru pe $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon(x) = 1$ și este distributivă față de adunare. Așadar, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este un inel. Rezultă imediat că afirmațiile **A** și **D** sunt false. O funcție $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ are inversă în $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (pe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$) dacă și numai dacă $f(x) \neq 0$ pentru toți $x \in \mathbb{R}$, prin urmare există funcții diferite de θ care nu sunt elemente inversabile în inelul nostru (de exemplu, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care se anulează în $x = 0$). Prin urmare, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nu este corp. Deci, afirmația **C** este adevărată și **B** este falsă.

143. Din $x \circ e = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ obținem că elementul neutru este $e = 2$, deci **A** este falsă. Rezolvând ecuația $4 \circ y = 2$ obținem $y = \frac{8}{5}$, deci **B** este adevărată. Ecuația $x \circ x' = 2$ cu necunoscuta x' nu are soluție pentru $x = \frac{3}{2}$, deci **C** este falsă. Funcția f este bijectivă, dar nu avem $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, deci **D** este falsă.

144. Se verifică ușor că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem

$(x * y) * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x * (y * z)$, deci **C** este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, deci **B** este falsă. Din $x * e = x$ pentru orice

$x \in (-1, 1)$ obținem că elementul neutru este 0, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru $x \in (-1, 1)$, din egalitatea $x * x' = 0$ obținem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

145. Cum $x, y \in G_2$, pornim de la inegalitățile $x > 2$ și $y > 2 \iff (x-2) > 0, (y-2) > 0$, deci $3(x-2)(y-2) > 0$ și cum, în acest caz, $\alpha = 2$, avem $3(x-2)(y-2) + 14 - 12 > 2$, deci $*$ este bine definită pe G_2 (1). Comutativitatea și asociativitatea operației rezultă imediat, folosind definițiile (2). Fie $e \in G_2$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in G_2$. Avem $3(x-2)(e-2) + 2 = x \iff 3(x-2)(e-2) - (x-2) = 0 \iff (x-2)(3(e-2) - 1) = 0 \iff 3e - 7 = 0 \Rightarrow e = \frac{7}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție (3). Pentru elemente simetrice, vom căuta $x' \in G_2$ astfel încât $x * x' = x' * x = \frac{7}{3}, x \in G_2$ și obținem că simetricul fiecărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{1}{9(x-2)} + 2, \forall x \in G_2$ (4). Deci, din (1), (2), (3) și (4) rezultă că structura $(G, *)$ este grup abelian, deci afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate. De asemenea, $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sunt izomorfe prin izomorfismul $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3(x-2)$.

146. Legea de compoziție se poate rescrie și $x * y = 3(x-2)(y-2) + 2 + 7(\alpha-2)$, deci $\forall \alpha \geq 2, G_\alpha$ va fi parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu $*$. (Sursa: Bacalaureat 2009 M1).

147. Pentru a determina dacă $(G, *)$ este grup abelian, vom verifica proprietățile de comutativitate, asociativitate, element neutru și elemente simetrizabile. Comutativitatea este directă datorită comutativității adunării. Pentru a demonstra asociativitatea, folosim definiția părții fracționare: $(x * y) * z = \{\{x + y\} + z\} = \{x + y - [x + y] + z\} = \{x + y + z\} = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$. Elementul neutru este $e = 0$, iar simetricul fiecărui element $x \in (0, 1)$ este de forma $1 - x$. Simetricul lui $x = 0$ este 0, deci grupul $(G, *)$ este abelian (implicit și monoid comutativ). Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \{x\}$ ar fi un morfism valid între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$. Cu toate acestea, se observă că f nu este izomorfism, deoarece f nu este o funcție injectivă. Să observăm că elementul $\frac{1}{2}$ are ordinul 2 în $(G, *)$. Pe de altă parte, toate elementele nenule din $(\mathbb{R}, +)$ au ordin infinit. Așadar cele două grupuri nu sunt izomorfe.

148. Ecuația este, de fapt, $\{3x\} = \frac{1}{2}$ și, cum $x \in G$, avem $0 \leq 3x \leq 3$. Deci, singurele variante posibile sunt $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$, adică $x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}\right\}$.

149. Legea de compoziție se poate rescrie ca $x * y = (x-12)(y-12) + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Se observă faptul că $x * 12 = 12 * x = 12, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Deoarece legea de compoziție este asociativă, putem nota $\alpha = 1 * 2 * 3 * \dots * 11$ și $\beta = 13 * 14 * \dots * 2024$, iar numărul a devine, conform observației de mai sus, $a = \frac{\alpha * 12 * \beta}{6} = \frac{12 * \beta}{6} = 2$, care este număr prim. Notăm mulțimea $G = (12, \infty)$ și avem $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 12$ izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) . Aplicând funcția f din cerința numărului x_{2024} , avem $f(x_{2024}) = f(\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024 \text{ ori}})$. Rezultă $f(\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024 \text{ ori}}) = (f(x))^{2024} = (x - 12)^{2024}$, deci $x_{2024} = (x - 12)^{2024} + 12$.

150. Pentru ca f să fie morfism de grupuri este nevoie să verifice condiția $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. **[A]** este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 2 \neq 1 = f(1) \cdot f(1)$. **[B]** este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 3 \neq 4 = f(1) \cdot f(1)$. **[D]** este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 4 \neq 1 = f(1) \cdot f(1)$. **[C]** este adevărată deoarece pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem: $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$.

151. Fie $\alpha = \arg(w)$. Scriind w sub formă trigonometrică, $w = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$, obținem: $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ De aici obținem $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ca unică posibilitate. Fie $k \in \mathbb{Z}$ ordinul lui w în grupul (U_{12}, \cdot) . Din $|U_{12}| = 12$ deducem $k \mid 12$. Verificăm deci valorile divizorilor lui 12, în ordine crescătoare. $w \neq 1$, deci calculăm: $w^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \neq 1$, ceea ce exclude cazul **[A]**. $w^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -1 \neq 1$, ceea ce exclude cazul **[D]**. $w^6 = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1$, ceea ce confirmă cazul **[B]**. **[C]** este falsă, în virtutea minimalității ordinului unui element al unui grup.

152. \oplus este o operație comutativă, deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru operația \oplus dacă pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x \oplus e = x$. Avem $x \oplus e = x$ dacă și numai dacă $x + e + \alpha = x$, dacă și numai dacă $e = -\alpha$. Aceasta înseamnă că $-\alpha \neq 0$ este singurul element neutru posibil al operației \oplus , deci **[A]** este falsă. Operația \odot este asociativă dacă și numai dacă pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$ avem $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$. $(x \odot y) \odot z = ((x+7)(y+7)-7) \odot z = ((x+7)(y+7)-7+7)(z+7)-7 = (x+7)(y+7)(z+7)-7$. $x \odot (y \odot z) = x \odot ((y+7)(z+7)-7) = (x+7)((y+7)(z+7)-7+7)-7 = (x+7)(y+7)(z+7)-7$. Am arătat, deci, că operația \odot este asociativă, așa că afirmația **[B]** este adevărată. Verificăm acum distributivitatea. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$. $(x \oplus y) \odot z = (x + y + \alpha) \odot z =$

$(x + y + \alpha + 7)(z + 7) - 7 = xz + yz + \alpha z + 7z + 7x + 7y + 7\alpha + 42$. $(x \odot z) \oplus (y \odot z) = (x + 7)(z + 7) - 7 + (y + 7)(z + 7) - 7 + \alpha = xz + 7x + 7z + 42 + yz + 7y + 7z + 42 + \alpha$. Deci \odot este distributivă față de \oplus dacă și numai dacă pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$ este adevărat că $\alpha z + 7\alpha = 7z + 42 + \alpha$, ceea ce este echivalent cu $(\alpha - 7)(z + 6) = 0$. Astfel \odot este distributivă față de \oplus dacă și numai dacă $\alpha = 7$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Pentru a putea discuta inversabilitatea față de legea \odot trebuie să găsim elementul neutru față de această lege. \odot este o operație comutativă, deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru operația \odot dacă pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x \odot e = x$. Avem $x \odot e = x$ dacă și numai dacă $(x + 7)(e + 7) - 7 = x$, dacă și numai dacă $(x + 7)(e + 6) = 0$. Aceasta înseamnă că $e = -6$ este singurul element neutru posibil al operației \odot . Un element $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil față de \odot dacă și numai dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x \odot x' = -6$, ceea ce este echivalent cu: $(x + 7)(y + 7) = 1$. Acest lucru înseamnă că $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil față de \odot dacă și numai dacă $x + 7 \in \{-1, 1\}$, ceea ce înseamnă $x \in \{-8, -6\}$, adică $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

153. Se verifică imediat că \circ este asociativă, comutativă și are elementul neutru pe $0 \in \mathbb{Q}$. Deoarece $x' = \frac{-x}{1 + 3x}$ rezultă că A este falsă. În plus, B. este adevărată, deoarece $(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, \circ)$ este grup.

154. Din proprietățile corpului (nu are divizori ai lui zero) rezultă că $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$, $\alpha \cdot \alpha = \beta$. În plus, în orice inel $(A := \{0, 1, \alpha, \beta\}, +, \cdot)$ are loc relația $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ (de exemplu, arătând că funcția $f : A \rightarrow A$, $f(x) = 1 + x$ este bijecție). Presupunând că $1 + 1 \neq 0$ rezultă $1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$, o contradicție. Din tabla adunării mai rezultă $\alpha + \beta = 1$.

155. Presupunem că există un grup G astfel încât G_2 să aibă trei elemente. Orice element din $G \setminus G_2$ este diferit de inversul său (având ordinul mai mare ca 2), deci $G \setminus G_2$ are un număr par de elemente, iar $|G| = 2k + 1$. Dacă $g \in G_2$, atunci $g^2 = e$, iar din $g^{2k+1} = e$ obținem $g = e$, deci $G_2 = \{e\}$. În concluzie, G_2 nu poate să aibă 3 elemente, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. În grupul permutărilor S_3 mulțimea G_2 este formată din permutarea identică și din cele trei transpoziții, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Pentru orice grup finit G , avem $e \in G_3$. Dacă există $g \in G_3 \setminus \{e\}$, atunci $\text{ord } g = 3$, deci $g \neq g^{-1}$ și $g^{-1} \in G_3$. În concluzie, G_3 are un număr impar de elemente, și $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Considerăm grupul $(\mathbb{Z}_3, +)$, pentru

care G_3 are 3 elemente, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

156. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 = a_1 + ib_1$ și $z_2 = a_2 + ib_2$. Atunci: $f(z_1) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $f(z_2) =$

$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$. Dacă $f(z_1) = f(z_2)$, atunci $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ de unde deducem

$a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$, deci $z_1 = z_2$. Astfel f este injectivă și $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Se poate arăta ușor că \mathcal{M} este corp. Pentru a verifica dacă f este un morfism de corpi,

luăm ca înainte $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$. Avem: $f(z_1 + z_2) = f((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) +$

$f(z_2)$; $f(z_1 \cdot z_2) = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $f(1) = f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Acestea arată

că f este un morfism de corpi, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Pentru orice $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avem $f^{-1}(\mathcal{B}_d) \subseteq \mathbb{C}$. Vom arăta că $\mathbb{C} \subseteq \bigcup_{d \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$. Atunci:

$f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_{a^2 + b^2}$, de unde avem: $z \in f^{-1}(\mathcal{B}_{a^2 + b^2})$. Pentru că z a fost ales

arbitrar în \mathbb{C} , deducem că $\mathbb{C} \subseteq \bigcup_{d \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$, ceea ce arată că: $\mathbb{C} = \bigcup_{d \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$, de

unde $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Avem $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ și: $f(1) = f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$f(-1) = f(-1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(i) = f(0 + i \cdot 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(-i) =$

$f(0 + i \cdot (-1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. De aici rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

157. $(x, y) * (1, 0) = (1, 0) * (x, y) = (x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

158. Observăm că $(\alpha, \beta) * (0, 0) = (0, 0) * (\alpha, \beta) = (0, 0), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Așadar, rezultatul expresiei se va rezuma la $(\alpha, \beta) * (0, 0) * (\alpha_1, \beta_1) = (0, 0)$.

159. Avem $xy = y^2$, deci $y^3 = y^2 \cdot y = (xy) \cdot y = x \cdot (yy) = xy^2 = x \cdot xy = x^2y = ey = y$.

Analog, obținem $y^4 = xy$, $y^5 = y$ și observăm că: $y^{2k+1} = y$, iar $y^{2k} = xy$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci, $y^{2024} = xy = y^4 = y^2$. Cum $y \neq x$ și $x \neq e$, variantele $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$ se exclud.

160. Mulțimea Z este generată de elementul 1, deci având $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ endomorfism, putem observa următoarele: $\varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2\varphi(1)$, $\varphi(3) = \varphi(1) + \varphi(1) + \varphi(1) = 3\varphi(1)$, ...
 $\varphi(n) = \underbrace{\varphi(1) + \varphi(1) + \dots + \varphi(1)}_{n \text{ ori}} = n\varphi(1)$. Așadar, notând $\varphi(1) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, se verifică imediat că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum automorfismele sunt bijective, se impune condiția ca $\varphi(1) = 1$ sau $\varphi(1) = -1$, deci și afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

161. Vom efectua calculul succesiv și observăm: $1 \oplus 2 = 1$, $1 \oplus 3 = 1 \dots 1 \oplus 2024 = 1$.

162. Din nou, efectuăm calculul succesiv și avem $1 \oplus 2 = 1$, $1 \odot 3 = 3$, $3 \oplus 4 = 1$, ... $1 \odot 2023 = 2023$, $2023 \oplus 2024 = 1$, $1 \odot 2025 = 2025$.

163. Înlocuind în legea de compoziție obținem imediat varianta $\boxed{\text{A}}$ ca fiind adevărată.

Folosim proprietatea modulului pentru 2 numere reale x, y : $|x| + |y| \geq |x + y|$ și obținem varianta $\boxed{\text{D}}$ ca fiind, de asemenea, adevărată.

164. Legea de compoziție se restrânge la $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Cum f izomorfism, $f(x * y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in G$. Așadar, obținem $f((x - 3)(y - 3) + 3) = f(x) + f(y) \iff \ln(a((x - 3)(y - 3) + 3)^2 + b((x - 3)(y - 3) + 3) + c) = \ln((ax^2 + bx + c)(ay^2 + by + c)) = (a((x - 3)(y - 3) + 3)^2 + b((x - 3)(y - 3) + 3) + c) = ((ax^2 + bx + c)(ay^2 + by + c))$. Pentru $a = 0$, desfacem parantezele și rămânem cu $b^2 = b$, deci $b = 1$ (altfel funcția \ln nu ar fi corect definită) și $c = -3$. Obținem $f(x) = \ln(x - 3)$ care, într-adevăr, este un izomorfism. Pentru $a = 1$, desfăcând parantezele și efectuând calculele obținem $b = -6$ și $c = 9$ care nu se regăsesc printre variantele de răspuns.

165. Observăm că $\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, adică avem $\xi^3 = 1$, de unde $\xi^2 + \xi + 1 = 0$,

deoarece $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se poate ajunge la această relație și prin calcul direct: $\xi^2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{-3}{4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\xi - 1$.

Dacă Φ este un morfism de inele, atunci pentru orice $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ trebuie să avem:

$\Phi((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)) = \Phi(a_1 + b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi)$. Pe de altă parte, avem:

$(a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi) = a_1a_2 + \xi(a_1b_2 + b_1a_2) + b_1b_2\xi^2$. Înlocuind $\xi^2 = -\xi - 1$, obținem: $(a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2)\xi$. De aici

deducem că dacă Φ este un morfism de inele, atunci, pentru orice $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, avem:

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2 & f(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & f(a_1, b_1) \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & f(a_2, b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1f(a_2, b_2) \\ a_2b_1 + f(a_1, b_1)b_2 & -b_1b_2 + f(a_1, b_1)f(a_2b_2) \end{pmatrix}$. Identificăm elementele de pe poziția (1, 2) din ambele matrici și obținem: $-(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) = -a_1b_2 - b_1f(a_2, b_2) \Rightarrow b_1(a_2 - b_2 - f(a_2, b_2)) = 0$. Această identitate este valabilă pentru orice $b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$. Alegem $b_1 \neq 0$, deci pentru orice $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ avem: $f(a_2, b_2) = a_2 - b_2$.

Astfel, răspunsul $\boxed{\text{B}}$ este fals. Pentru a putea concluziona că $\boxed{\text{C}}$ este adevărat, mai trebuie să verificăm că pentru $f(a, b) = a - b$ funcția Φ este, într-adevăr, un morfism de inele. Avem deci: $\Phi : \mathbb{Z}[\xi] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), a + b\xi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a - b \end{pmatrix}$.

Astfel: $\Phi((a_1 + b_1\xi) + (a_2 + b_2\xi)) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \Phi(a_1 + b_1\xi) + \Phi(a_2 + b_2\xi)$ Avem și: $\Phi((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)) =$

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2) \\ a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2 & a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \Phi(a_1 + b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 + b_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 - b_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 - b_1a_2 - a_1b_2 + b_1b_2 \end{pmatrix}$ Deci pentru orice elemente $a_1 + b_1\xi$ și $a_2 + b_2\xi$ din $\mathbb{Z}[\xi]$ avem: $\Phi((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)) = \Phi(a_1 +$

$b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi)$ Este ușor de văzut că $\Phi(1) = \Phi(1 + 0 \cdot \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, care e elementul unitate din inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Am arătat, deci, că Φ este, într-adevăr, morfism de inele

pentru $f(a, b) = a - b$, deci afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. În ceea ce privește afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$, am fi putut să le analizăm chiar înainte de a găsi funcția f . Într-adevăr, din

faptul că Φ trebuie să fie morfism de inele deducem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi(0) = \Phi(\xi^2 + \xi + 1) =$

$\Phi(\xi^2) + \Phi(\xi) + \Phi(1)$ Pentru că $\Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem: $\Phi(\xi) = -\Phi(\xi^2) - \Phi(1)$ deci $\boxed{\text{A}}$

este adevărată. În același timp, din $\Phi(\xi^2 + \xi + 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem: $\Phi(\xi + 1) = \Phi(-\xi^2)$,

deci afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

166. **1)** Condiția din enunț este echivalentă cu faptul că 1 este rădăcină a polinomului

f . $f(1) = 0$; **2)** $f = (X-1)[X^2 + (\alpha+1)X + 1]$, $A \in M_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ soluțiile ecuației $x^2 + (\alpha+1)x + 1 = 0$ sunt reale. Calculul lui $\Delta = (\alpha-1)(\alpha+3)$. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$;

3) Scrierea relațiilor lui Viète pentru f : $\det A = \alpha^3 + 3\alpha^2 \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

167. Scriind Relațiile lui Viète, avem $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$.

Pentru ca toate rădăcinile polinomului să fie numere reale, în ecuația $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, $\forall m \in \mathbb{R}$, trebuie să avem $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, $(x_2 - x_3)^2 \geq 0$ și $(x_3 - x_1)^2 \geq 0$. Prin urmare, și $-4(m-1)^2 \geq 0$, deci $(m-1)^2 \leq 0$. Cum $m \in \mathbb{R}$, rezultă că $(m-1)^2 = 0$, adică $m = 1$.

168. Polinoamele f și g au o rădăcină comună $\alpha \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha|12$ și $\alpha|5 \Leftrightarrow \alpha|(12,5) = 1$

$\Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$. **1)** $\alpha = 1$ este rădăcină comună $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -12 \\ 3a + 2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -30 \end{cases}$ **2)**

$\alpha = -1$ este rădăcină comună $\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -12 \\ 3a - 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 \\ b = 40 \end{cases}$

169. Funcția f are o infinitate de zerouri. Presupunând că $p \in \mathbb{R}[X]$ ar induce pe f ,

rezultă că p ar avea ca rădăcini zerourile lui f , prin urmare ar avea o infinitate de rădăcini.

Dar atunci $p = 0$ și funcția polinomială asociată $\tilde{p} = f$ e funcția nulă, contradicție.

170. Polinomul f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ dacă și numai dacă $f(\hat{0}) = \hat{0}$ sau

$f(\hat{1}) = \hat{0}$ sau $f(\hat{2}) = \hat{0}$. Întrucât $f(\hat{0}) = a + \hat{1}$, deducem că $f(\hat{0}) = \hat{0}$ dacă și numai

dacă $a + \hat{1} = \hat{0}$ adică dacă și numai dacă $a = -\hat{1} = \hat{2}$. Întrucât $f(\hat{1}) = \hat{1}$ rezultă că f

nu are rădăcina $\hat{1}$ pentru niciun $a \in \mathbb{Z}_3$. Întrucât $f(\hat{2}) = \hat{2}a + \hat{1}$, deducem că $f(\hat{2}) = \hat{0}$

dacă și numai dacă $\hat{2}a + \hat{1} = \hat{0}$ adică dacă și numai dacă $a = \hat{1}$. Așadar polinomul f are

rădăcină în \mathbb{Z}_3 dacă și numai dacă $a \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$.

171. Analizăm cele trei cazuri posibile pentru a . Pentru $a = \widehat{0}$ obținem $f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$. Astfel, deducem că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $a = \widehat{1}$ obținem $f = X^4 + X^3 + \widehat{2}X^2 + X + \widehat{2}$ și cum $f(\widehat{2}) = \widehat{0}$, înseamnă că f are rădăcină $\widehat{2}$ în \mathbb{Z}_3 , deducem că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $a = \widehat{2}$ obținem $f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{2}X^2 + \widehat{2}X$. Cum $f(\widehat{0}) = \widehat{0}$, rezultă că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. În concluzie, f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}_3$.

172. Deoarece w, x, y, z sunt rădăcini ale polinomului $h \Rightarrow h(t) = (t-w)(t-x)(t-y)(t-z)$.

Dacă înlocuim $t = 4 \Rightarrow S = (4-w)(4-x)(4-y)(4-z) = h(4) = 180$.

173. Dând factor comun, raportul devine, de fapt, $\frac{1}{(1-a^2)} + \frac{1}{(1-b^2)} + \frac{1}{(1-c^2)}$.

$\frac{1}{(1-a^2)}$ poate fi scris ca $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} \right)$, analog pentru b, c . Obținem astfel raportul $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(1-a)(1-b)+(1-a)(1-c)+(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} + \frac{(1+a)(1+b)+(1+a)(1+c)+(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \right)$. Folosind relațiile lui Viète, obținem $a + b + c = 2025$, $ab + ab + ac = 2024$, $abc = -2023$. Astfel, efectuând calculele obținem $\frac{1}{2} \left(\frac{-2023}{2023} + \frac{6077}{2027} \right) = \frac{2025}{2027}$.

O soluție alternativă folosește $f(1) = (1-a)(1-b)(1-c)$, $-f(-1) = (1+a)(1+b)(1+c)$ și $f'(1) = (1-a)(1-b) + (1-a)(1-c) + (1-b)(1-c)$.

174. $x = -1$ rădăcină a lui f , deci f este divizibil cu $X - (-1) = X + 1$.

175. Din relațiile lui Viète, suma rădăcinilor va fi -7 , iar produsul acestora va fi 3 (gradul polinomului este un număr par, deci vom avea un număr par de relații). De aici, rezultă varianta D.

176. Pentru ca f să fie divizibil cu $X - m$ trebuie să avem $x_1 = m$ rădăcină a lui f .

Așadar avem $f(m) = 2m^2 - 2 = 0$ și cum $m > 0$, avem $m = 1$.

177. Raportul este, de fapt, echivalent cu $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$. Scriind Relațiile lui Viète, avem

$S_1 = x_1 + x_2 = -m$ și $S_2 = x_1 x_2 = -2$. Cum $x_1^2 + x_2^2 = S_1^2 - 2S_2$, avem $(m-2)^2 = 0$, deci $m = 2$.

178. Inițial avem $f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Cum $f(0) = c$ și $f(1) = 1 + a + b + c$, avem $a + b = -1$. De asemenea, avem $f(i+1) = i(2a + b + 2) + b + c - 2 = 0$, deci $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$. Așadar, polinomul f este, de fapt, $f = X^3 - X^2 + 2$, cu rădăcinile

$x_1 = i + 1$, $x_2 = -i + 1$ și $x_3 = -1$.

179. Fie $x_1 = \alpha - r$, $x_2 = \alpha$ și $x_3 = \alpha + r$ rădăcinile polinomului f , $\alpha \in \mathbb{R}$ și r rația progresiei aritmetice. Scriind Relațiile lui Viète, avem $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$, deci $\alpha = a$. Cum $f(a) = -10a^3 + 12a - 2$, avem $(a - 1)(10a^2 + 10a - 2) = 0$, deci $a = 1$ sau $a = \frac{-5 \pm 3\sqrt{5}}{10}$.

180. Scăzând $4x$ din expresia inițială, avem $(x + 2)^3 = -4x$, adică $x + 2 = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x}$,

de unde rezultă sistemul:
$$\begin{cases} a + 2 = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{a} \\ b + 2 = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{b} \\ c + 2 = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{c} \end{cases}$$
 Din prima relație a lui Viète, avem

$a + b + c = -6$, deci adunând egalitățile din sistem obținem $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

181. $X^2 + 2X - 63 = (X + 9)(X - 7)$, deci putem rescrie $P = Q(X + 9)(X - 7) + aX + b$,

unde $Q \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru $x = -9$, avem $(-9)^n = -9a + b$, iar pentru $x = 7$, avem $7^n = 7a + b$. Scăzând relațiile, urmează că $16a = (-1)^{n+1} \cdot 9^n + 7^n$, deci $a = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 9^n + 7^n}{16}$, $b = \frac{7 \cdot (-9)^n + 9 \cdot 7^n}{16}$.

182. Avem $a = P_1(0) = P_2(0)$. Pentru $x = 0$, $P_1(P_2(0)) - P_2(P_1(0)) = P_1(a) - P_2(a) = 0$.

183. $P(1) = \frac{1}{a_n a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_2 a_1} + \frac{n}{a_1 a_n}$. Fie r rația progresiei a_1, a_2, \dots, a_n .

Avem $P(1) = \frac{1}{r} (a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1) + \frac{n}{a_1 a_n} = \frac{a_n - a_1}{r} + \frac{n}{a_1 a_n} = n - 1 + \frac{n}{a_1 a_n}$.

184. Adunând coloanele, avem $(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 - 1 \\ 1 & x_2 - 1 & x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 +$

$x_3 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 - 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 - 1) \cdot (-1)$. Din prima Relație a lui Viète,

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2022}{2021}$, deci determinantul este egal cu $\frac{4043}{2021}$.

185. Pentru $x = 1$, avem $a_0 + a_1 + \dots + a_{25} = 2^{25}$, iar pentru $x = -1$, avem

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{25} = 0$. Deci, scăzând cele două relații, $a_1 + a_3 + \dots + a_{25} = 2^{24}$.

Conform Binomului lui Newton, $T_{k+1} = C_{25}^k \cdot x^{25-k}$, deci $a_{19} = C_{25}^6 = C_{25}^{19} = a_6$.

186. Fie $f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \Rightarrow f'(x) =$

$nx^{n-1} + \dots + 2x + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{x-x_i}$. Pentru $x=1$ suma este egală cu $\frac{n}{2}$. Pentru $\boxed{\text{D}}$, avem

$\sum_{i=1}^{10} \frac{f(x)}{x-x_i} \frac{1}{1-x_i} = 5$. Similar se procedează pentru $\boxed{\text{B}}$, în cazul $n=100$. Pentru $\boxed{\text{A}}$,

folosim relațiile lui Viète. Avem $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{11}{5}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{7}{5} \Rightarrow$ suma

este egală cu 5. Pentru $\boxed{\text{C}}$, $x_1 + x_2 = \frac{-7}{3}$, $x_1x_2 = \frac{q}{3} \Rightarrow q = -3$.

187. $x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3) + x_1P'(x_1) + x_4P'(x_4) = \sum_{i=1}^4 x_i(4x_i^3 + 3ax_i^2 + b) = 4 \sum_{i=1}^4 x_i^4 +$

$3a \sum_{i=1}^4 x_i^3 + b \sum_{i=1}^4 x_i \Rightarrow (x_i^4 = -ax_i^3 - bx_i - c)$ suma devine $-a \sum_{i=1}^4 x_i^3 - 3b \sum_{i=1}^4 x_i - 4c$. Știm

din formulele lui Viète că $\sum_{i=1}^4 x_i = -a$, $\sum_{i=1}^4 x_i^3 = -a^3 + 3ab - 3c \Rightarrow P'(x_2) + x_3P'(x_3) +$
 $x_1P'(x_1) + x_4P'(x_4) = -a(-a^3 + 3ab - 3c) - 3b(-a) - 4c = a^4 - 3a^2b + 3ab + 3ac - 4c$.

188. Pentru $x=0 \Rightarrow 0 = -4P(-1) \Rightarrow P \dot{=} (X+1)$. Pentru $x=4 \Rightarrow 4P(2) =$

$0 \Rightarrow P \dot{=} (X-2) \Rightarrow P = (X+1)(X-2)F$, unde $F \in \mathbb{R}[X]$. Folosim relația inițială

$x(x-1)(x-4)F(x-2) = (x-4)x(x-3)F(x-1) \Leftrightarrow (x-1)F(x-2) = (x-3)F(x-1)$.

Pentru $x=1 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow F \dot{=} X$. Pentru $x=3 \Rightarrow 2F(1) = 0 \Rightarrow F \dot{=} (X-1) \Rightarrow$

$F = X(X-1)Q$, unde $Q \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow P = X(X+1)(X-1)(X-2)Q$. Înlocuim din nou în

relația inițială $x(x-1)(x-4)(x-3)(x-2)Q(x-2) = (x-4)(x-3)x(x-2)(x-1)Q(x-1) \Rightarrow$

$Q(x-2) = Q(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(x) = c \in \mathbb{R}$ (constantă) $\Rightarrow c = 2$ (coeficientul dom-

inant) $\Rightarrow P = 2X(X+1)(X-2)(X-1) \Rightarrow P(4) = 240$, $P(3) = 48$.

189. (Problemă dată inițial la Canadian Math Olympiad, 1969) Notăm $t = a^2 + b^2$. În

\mathbb{Z}_8 avem $a^2, b^2 \in \{0, 1, 4\}$, numere care nu pot forma în nicio combinație suma 6, deci

ecuația nu are nicio soluție.

190. Mulțimea \mathcal{F} conține 4^4 funcții, pentru că domeniul și codomeniul au patru el-

emente. Funcțiile strict monotone din mulțimea \mathcal{F} sunt $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

definită prin $f(k) = k + 1, k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $g : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definită prin

$g(k) = 4 - k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Mulțimea \mathcal{F} conține $4!$ funcții injective. Probabilitatea ca o

funcție f aleasă aleator din mulțimea \mathcal{F} să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{4^2}{4^4} = \frac{1}{16}$.

191. Inegalitatea din enunțul problemei poate fi scrisă sub forma $\sum_{k=1}^n a^{(2n+1)x_k} +$

$(n-1) \sum_{k=1}^n a^{x_k} \geq n \sum_{k=1}^n a^{2x_k}$, ceea ce ne sugerează următoarea abordare a rezolvării. Deoarece $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, în baza inegalității mediilor, avem $a^{(2n+1)x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + \dots + a^{x_n} = \frac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+\dots+x_n}} + a^{x_2} + a^{x_3} + \dots + a^{x_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+\dots+x_n}} \cdot a^{x_2} \cdot a^{x_3} \cdot \dots \cdot a^{x_n}} = n \sqrt[n]{a^{2nx_1}} = na^{2x_1}$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $a^{(2n+1)x_1} = a^{x_2} = a^{x_3} = \dots = a^{x_n}$. Prin urmare, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem $a^{(2n+1)x_k} + a^{x_1} + \dots + a^{x_{k-1}} + a^{x_{k+1}} + \dots + a^{x_n} \geq na^{2x_k}$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $a^{(2n+1)x_k} = a^{x_1} = \dots = a^{x_{k-1}} = a^{x_{k+1}} = \dots = a^{x_n}$, adică dacă și numai dacă $(2n+1)x_k = x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = x_n$. Adunând ultimele n inegalități, obținem că $P \geq Q$; egalitatea având loc dacă și numai dacă $(2n+1)x_k = x_j$, oricare ar fi $k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ de unde deducem că $x_k = 0$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

192. Dacă notăm cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației, atunci $b + ak + k^2 = x_1x_2 - k(x_1 + x_2) + k^2 = (x_1 - k)(x_2 - k)$. Deoarece $x_1 - k$ și $x_2 - k$ sunt întregi, diferite de $-1, 0$ și 1 , deducem că $b + ak + k^2$ este produsul a două numere întregi $(x_1 - k)$ și $(x_2 - k)$.

193. Pentru început observăm că pentru orice $a \geq 2, 2 \leq 1 + a^t \leq a^{t+1}$, oricare ar fi $t \geq 0$. Atunci, pentru orice $a \geq 2$ și $t, s \geq 0$, avem $1 + a^t + a^{s+1} \leq a^{t+1} + a^{s+1} = \frac{2-a^{s+1}}{2}a^{t+1} + \frac{2-a^{t+1}}{2}a^{s+1} + a^{t+s+2} \leq a^{t+s+2}$. De aici deducem inegalitățile $1 + a^{x_1} + a^{x_2+1} \leq a^{x_1+x_2+2}$; $1 + a^{x_2} + a^{x_3+1} \leq a^{x_2+x_3+2}$; \dots ; $1 + a^{x_{n-1}} + a^{x_n+1} \leq a^{x_{n-1}+x_n+2}$; $1 + a^{x_n} + a^{x_1+1} \leq a^{x_n+x_1+2}$ care, prin înmulțire membru cu membru, ne conduc la $\prod_{k=1}^n (1 + a^{x_k} + a^{x_{k+1}+1}) \leq a^{2(n+x_1+x_2+\dots+x_n)}$.

194. Relația din enunțul problemei poate fi scrisă sub forma $(x-1)^2 + (2x-y)^2 + (x-2z)^2 = 2$; (*) Urmează că $(x-1)^2 \leq 2$, deci $x \in \{0, 1, 2\}$. **a)** Dacă $x = 0$, relația (*) devine $y^2 + 4z^2 = 1$. Așadar $y^2 \leq 1$, deci $y \in \{-1, 0, 1\}$. **a₁)** Dacă $y = -1$, obținem $4z^2 = 0$, deci $z = 0$. **a₂)** Dacă $y = 0$, obținem $4z^2 = 1$ imposibil pentru că $z \in \mathbb{Z}$. **a₃)** Dacă $y = 1$, obținem $4z^2 = 0$ deci $z = 0$. **b)** Dacă $x = 1$, relația (*) devine $(2-y)^2 + (1-2z)^2 = 2$. Urmează că $(2-y)^2 \leq 2$, deci $y \in \{1, 2, 3\}$. **b₁)** Dacă $y = 1$ obținem $(1-2z)^2 = 1$ și deci $z = 0$ sau $z = 1$. **b₂)** Dacă $y = 2$ obținem $(1-2z)^2 = 2$ imposibil pentru că $z \in \mathbb{Z}$. **b₃)** Dacă $y = 3$ obținem $(1-2z)^2 = 1$ și deci $z = 0$ sau $z = 1$. **c)** Dacă $x = 2$ relația (*) devine $(4-y)^2 + (2-2z)^2 = 1$. Urmează că $(4-y)^2 \leq 1$, deci $y \in \{3, 4, 5\}$. **c₁)** Dacă $y = 3$ obținem $(2-2z)^2 = 0$ deci $z = 1$. **c₂)** Dacă $y = 4$ obținem $(2-2z)^2 = 1$ imposibil

pentru că $z \in \mathbb{Z}$. **c₃**) Dacă $y = 5$ obținem $(2 - 2z)^2 = 0$ deci $z = 1$. Prin urmare $(x, y, z) \in \{(0, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 3, 0), (1, 3, 1), (2, 3, 1), (2, 5, 1)\}$. De aici deducem că cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y, z)$ este -2 și este atinsă pentru $(x, y, z) = (0, -1, 0)$.

195. Fie $y = g(f(x))$; obținem inecuația $f(y) \leq 0$, adică inecuația $y^2 - 3y + 2 \leq 0$,

cu soluția $y \in [1, 2]$. Fie $z = f(x)$; obținem $g(z) = y \in [1, 2]$, deci $1 \leq \frac{z+1}{z^2+1} \leq 2$ adică

$$\begin{cases} z^2 - z \leq 0 \\ 2z^2 - z + 1 \geq 0 \end{cases} . \text{Urmează că } z \in [0, 1] \text{ Prin urmare } 0 \leq z = f(x) = x^2 - 3x + 2 \leq 1.$$

Inecuația $0 \leq x^2 - 3x + 2$ ne conduce la $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ iar inecuația $x^2 - 3x + 2 \leq 1$,

adică inecuația $x^2 - 3x + 1 \leq 0$ ne conduce la $x \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$ Obținem $x \in$

$$\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1 \right] \cup \left[2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right].$$

196. Din relația $4x + 7z = 7y + 9$ rezultă că $2x + y + 5z = 6(x - y + 2z - 2) + 3$ și deci

restul împărțirii lui $2x + y + 5z$ la 6 este 3.

197. Grupăm termenii astfel: $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + (99^2 - 100^2)$. Cum $n^2 - (n+1)^2 =$

$-(2n+1) \Rightarrow$ suma devine egală cu $-(3 + 7 + 11 + \dots + 199)$. Aceasta este o progresie

aritmetică cu rația 4 \Rightarrow suma este egală cu $-\frac{50}{2} \cdot (3 + 199) = -5050$.

198. Presupunem că p nu este pătrat perfect; atunci $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notăm $\sqrt[n]{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}}$

cu a . Întrucât $\sqrt[n]{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}} = \frac{1}{a}$, obținem că $x = a + \frac{1}{a}$ și $a^n + \frac{1}{a^n} = 2\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Pre-

supunem prin absurd că $x \in \mathbb{Q}$. Cum $x = a + \frac{1}{a}$, deducem că $a^2 + \frac{1}{a^2} = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}$.

Deoarece $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = (a + \frac{1}{a})(a^k + \frac{1}{a^k}) - (a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}})$, $k \geq 2$, folosind metoda

inducției matematice, deducem imediat că $a^k + \frac{1}{a^k} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $k \geq 2$. Urmează că

$a^n + \frac{1}{a^n} = 2\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, fals.

199. b) Din a) rezultă că p trebuie să fie pătrat perfect; fie $p = q^2$, cu $q \in \mathbb{N}$,

$q \geq 2$. Atunci $x = \sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} + \sqrt{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}} = \sqrt{q + \sqrt{q^2-1}} + \sqrt{q - \sqrt{q^2-1}} =$

$$\sqrt{q + \sqrt{q^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{q + \sqrt{q^2-1}}} = \frac{q+1 + \sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q + \sqrt{q^2-1}}} = (q+1 + \sqrt{q^2-1}) \sqrt{q - \sqrt{q^2-1}}$$

$= \sqrt{2(q+1)}$. Urmează că $x \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $q+1 = 2r^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.

Așadar, $x \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă există $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ astfel încât $p = (2r^2 - 1)^2$.

200. Aria cercului = 25π , iar aria zonei negre este $9\pi - \pi = 8\pi$. Probabilitatea =

$$\frac{\text{favorabil}}{\text{posibil}} = \frac{8\pi}{25\pi} = 0,32 \Rightarrow 32\%.$$

201. Aplicăm logaritmul și obținem $\ln x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \ln x_n$, adică $\frac{1}{n+1} \ln x_{n+1} =$

$\frac{1}{n} \ln x_n$. Notăm $y_n := \frac{1}{n} \ln x_n$ și obținem $y_{n+1} = y_n$, deci $y_n = y_1 = \ln x_1$ și $x_n = x_1^n$.

202. Rescriem $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{4x_n}$. Notăm $\frac{1}{x_n} =: y_n$ și obținem relația de recurență

de ordinul doi: $y_{n+2} = y_{n+1} - \frac{1}{4}y_n$. Ecuația caracteristică este $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Deci soluția generală este $y_n = a\frac{1}{2^n} + bn\frac{1}{2^n}$. Înlocuim pentru $n = 1$ și $n = 2$ și obținem $a = 0$ și $b = 1$. Astfel, rezultă $y_n = \frac{n}{2^n}$ și $x_n = \frac{2^n}{n}$.

203. Scăzând x_n^3 în ambii membri avem $x_{n+1}^3 - x_n^3 < 3x_n - 2 - x_n^3 = -(x_n + 2)(x_n - 1)^2 \leq 0$,

de unde $x_{n+1}^3 \leq x_n^3$, $x_{n+1} \leq x_n$, deci șirul este descrescător și mărginit superior. Cum șirul are termeni pozitivi, el este și mărginit inferior, deci convergent. Notăm limita șirului cu ℓ și obținem $\ell^3 \leq 3\ell - 2$, de unde $-(\ell + 2)(\ell - 1)^2 \geq 0$, deci $\ell = 1$.

204.
$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(k^2 + k + 1) - (k^2 - k + 1)}{(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdots + \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$
 Prin urmare, șirul este mărginit superior și inferior, cu $x_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

205. Observăm că putem rescrie $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, deci $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Avem $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)^2} \right)^n = e^0 = 1$.

206.
$$x_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}} + \sqrt{n+\sqrt{n+2}}} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

207. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot n^2 + b \cdot n + 5}{b \cdot n^2 + 4 \cdot n + 7} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}$ este finită dacă și numai dacă avem cazul de nede-

terminare 1 la infinit, ceea ce implică $a = b$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot n^2 + a \cdot n + 5}{a \cdot n^2 + 4 \cdot n + 7} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n(a-4) - 2}{a \cdot n^2 + 4 \cdot n + 7} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(a-4) - 2}{a \cdot n^2 + 4 \cdot n + 7} \cdot \frac{n^2+3}{n+1}} = e^{-\frac{a-4}{a}}$, de unde $\frac{a-4}{a} = -1$, deci $a = b = 2$.

208. Reamintim că $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge la constanta Euler $\gamma \in (0, 1)$.

Avem $x_n = (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n)$, de unde $x_n = c_{2n} - c_n + \ln(2n) - \ln(n) \rightarrow \ln(2)$, căci c_n și c_{2n} converg ambele la γ .

209. Observăm că expresia $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ este limita șirului (x_n) definit recursiv prin $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, cu $x_1 = \sqrt{2}$. Putem arăta prin inducție că $x_n < 2$, deci șirul e mărginit. Cum $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) < 0$ pentru $x \in (-1, 2)$, avem că $x_n < x_{n+1}$, deci șirul e crescător. Așadar șirul (x_n) este convergent. Trecând la limită în relația de recurență obținem $x^2 = 2 + x$, de unde $x = 2$ (cazul $x = -1$ este imposibil).

210. Pentru valori mari ale lui n avem $(n + 2)^2 < n^2 + 5n < (n + 3)^2$, de unde $[\sqrt{n^2 + 5n}] = n + 2$. Atunci $\{\sqrt{n^2 + 5n}\} = \sqrt{n^2 + 5n} - (n + 2) = \frac{n^2 + 5n - n^2 - 4n - 4}{\sqrt{n^2 + 5n} + (n + 2)} = \frac{n - 4}{\sqrt{n^2 + 5n} + (n + 2)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

211. Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și f e continuă (deci are proprietatea lui Darboux), rezultă că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f e surjectivă. Cum $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, avem că f e crescătoare, deci f e injectivă. Așadar f e bijectivă și inversa f^{-1} e continuă. Avem $x_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) \rightarrow f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 1$.

212. $x_0 > 0 \Rightarrow x_n > 0$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > x_n$. Fiind crescător, șirul are limită și o vom nota cu ℓ . Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, trecând la limită în relația de recurență obținem $\ell^2 = \ell^2 + 1$, imposibil. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci $\ell = \infty$. Folosind Stolz-Cesaro avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} (x_{n+1} + x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} + 1\right) = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 2$. Deci limita căutată este $\sqrt{2}$.

213. $(1 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$, $(1 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$, $a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{2}$, $b_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$, deci $\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{5} \left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n} \right)$. Dând factor comun forțat $(1 + \sqrt{5})^n$ și simplificând, se obține prin trecere la limită valoarea $\sqrt{5}$.

214. $0 < x_n = \frac{\sqrt{1 \cdot 3} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \sqrt{(2n-3) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$ Folosind inegalitatea mediilor, avem că numărătorul este mai mic decât $\frac{1+3}{2} \cdot \frac{3+5}{2} \cdot \frac{2n-3+2n-1}{2} \cdot \sqrt{2n-1}$. Deci $x_n < \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot \sqrt{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} \rightarrow 0$, de unde folosind criteriul cleștelui rezultă că $x_n \rightarrow 0$.

215. Avem $x_n \geq 1$ și $x_{n+1} > x_n$. Cum șirul e crescător, acesta are o limită ℓ . Pre-

supunând că $l \in \mathbb{R}$, din relația de recurență rezultă $l = l + l^2$, adică $l = 0$, ceea ce reprezintă o contradicție, căci $x_n \geq 1, \forall n$. Rezultă deci că $l = \infty$. Folosind $\frac{1}{1+x_k} =$

$$\frac{x_k}{x_k \cdot (x_k + 1)} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_k^2}{x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{x_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{a}.$$

216. Avem $\frac{a_{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{a_n}{n \cdot 2^n} + 1$. Fie $b_n = \frac{a_n}{n \cdot 2^n}$, cu $b_1 = 1$. Atunci $b_{n+1} = b_n + 1$,

de unde $b_n = n$, deci $a_n = n^2 \cdot 2^n$.

217. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) =$

$$\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}, x \geq 0. \text{ Cum } f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0, \forall x \geq 0, \text{ avem}$$

că f este crescătoare. Așadar șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător, mărginit inferior de $f(0) = 1$, mărginit superior de $f(1)$ și convergent.

218. Se observă că $x_n = \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$, verifică relația de recurență, folosind binomul lui

Newton. Deoarece avem valoarea inițială $x_1 = \frac{1}{1!}$, acesta este unicul șir care satisface

condițiile problemei.

$$\begin{aligned} \mathbf{219.} \text{ Fie } n \geq 2. \text{ Scriem } a_n &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2} = \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})^2 - 4n}{\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2}} \\ &= \frac{2\sqrt{n^2-4} - 2n}{\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2}} = \frac{-8}{(\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n^2-4} + n)}. \end{aligned}$$

Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este convergent. Pentru orice $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$,

are loc inegalitatea $a_n < \frac{-8}{(\sqrt{n+3} + 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{(n+1)^2-4} + n+1)}$, așadar șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător.

$$\text{Calculăm limitele } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = -8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2})\left(\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} + 1\right)} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot n \cdot a_n = -8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 2 + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} + 1\right)} = -1.$$

220. Relația dată se mai scrie $2\sqrt{a_{n+1}} = 1 - \sqrt{a_n}$ și cu substituția $b_n = \sqrt{a_n} - \frac{1}{3}$ ea devine

$$2b_{n+1} = -b_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } b_0 = -\frac{1}{3}. \text{ Soluția acestei recurențe este } b_n = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci $a_n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Astfel rezultă $a_n \rightarrow \frac{1}{9}$. Șirul are limită finită, deci este mărginit și convergent. Șirul este oscilant în jurul valorii $\frac{1}{9}$, deci nu este monoton.

221. $a_2 = 1$ și inductiv rezultă $a_n > 1, \forall n > 2$. Apoi $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} + a_n(a_n - 1) > 0$, astfel șirul este strict crescător, deci monoton și are limita $l > 1$. Dacă șirul ar fi mărginit atunci ar fi și convergent (l finit). Trecând la limită în relația dată obținem $l \in \{0, 1\}$, ceea ce este absurd. Deci șirul nu este nici mărginit nici convergent.

222. Inductiv se obține că $a_n \notin \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$; Apoi $a_{n+4} = \frac{2}{2 - a_{n+3}} = \frac{2 - a_{n+2}}{1 - a_{n+2}} = 2 - \frac{2}{a_{n+1}} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este periodic; Cum $a_n \in \{a_0, a_1, a_2, a_3\}, \forall n \in \mathbb{N}$, șirul este mărginit, iar din faptul că $a_1 = \frac{2}{2 - a_0} \neq a_0, \forall a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă că șirul este periodic neconstant, deci nu are limită, deci nu este convergent.

223. Cum $a_1 = 1 > \frac{1}{2} = a_2$, șirul nu este strict crescător. Folosind inegalitatea $n! \leq n^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

224. Întrucât $a_0 < a_1$ și $a_3 < a_2$, șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este monoton. Se poate arăta prin inducție matematică faptul că $3^n < n!$, oricare ar fi $n \geq 7$. De aici rezultă că $a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, oricare ar fi $n \geq 7$. Cum $a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, teorema cleștelui implică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

225. Din definiție, este evident că $x_n > 0, \forall n \geq 1$.

Monotonia: Din relația de recurență, avem pentru orice $n \geq 2, x_n^2 = a + x_{n-1}$, deci $a = x_n^2 - x_{n-1} = x_{n-1}^2 - x_{n-2}$, de unde rezultă că $(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_{n-1} - x_{n-2}$. Cum $(x_n + x_{n-1}) > 0$, rezultă că $\text{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \text{sgn}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \dots = \text{sgn}(x_2 - x_1)$. Dar $x_2 - x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}} - \sqrt{a} = \frac{a + \sqrt{a} - a}{\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{a}} > 0$. Deci șirul (x_n) este strict crescător.

Mărginirea: Din faptul că $\{x_n\}$ este strict crescător, deducem $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n$, deci $x_n^2 - x_n - a < 0$. Rădăcinile polinomului $x^2 - x - a$ sunt $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0$ și $\beta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > 0$. Atunci $x^2 - x - a < 0$ pentru $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. Cum $x_n > 0, \forall n \geq 1$, pentru ca $x_n^2 - x_n - a$ să fie strict negativ, trebuie să avem $x_n \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. Așadar șirul (x_n) este mărginit și, deci, convergent. Din cele de mai sus rezultă că răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}, \boxed{\text{D}}$.

226. Pentru fiecare $k \in \{1, \dots, n\}$, avem $a_{2n+1-k} = -\sqrt{p+k} - \sqrt{2p+2k-1}$ și $(a_k + a_{2n+1-k})^2 = 2(p+k) - 2\sqrt{(p+k-1)^2} = 2$. Cum $|a_k| > |a_{2n+1-k}|$, avem

$a_k + a_{2n+1-k} = \sqrt{2}$, iar $a_k a_{2n+1-k} = 1 - p - k$. Deducem că $A = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n} \right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^n}$ și $G = (-1)^n p(p+1)\dots(p+n-1)$. Așadar, **a)** dacă n este par, atunci $A < G$, sau **b)** dacă n este impar, atunci $A > 0 > G$.

227. Metoda inducției matematice ne permite să afirmăm că $n-1 \leq x_n \leq n$, $\forall n \geq 1$.

1. (*) Într-adevăr, pentru $n = 1$, afirmația (*) este adevărată. Presupunând că afirmația (*) este adevărată pentru numărul natural $k \geq 1$, adică avem $k-1 \leq x_k \leq k$, atunci, pe de o parte $x_{k+1} = 1 + \frac{k^2}{1+x_k} \geq 1 + \frac{k^2}{1+k} \geq 1 + \frac{k^2-1}{1+k} = 1+k-1 = k$, iar, pe altă parte, $x_{k+1} = 1 + \frac{k^2}{1+x_k} \leq 1 + \frac{k^2}{1+k-1} = 1+k$, ceea ce ne arată că afirmația (*) este adevărată pentru $k+1$. Din (*) urmează imediat că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = 0$.

228. Fie $\varepsilon > 0$. Din $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ există un număr real $\delta > 0$

astfel încât pentru orice $x \in (0, \delta)$, avem $\left| \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^2} \right| < \frac{\varepsilon}{p^2}$, sau echivalent

$\left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right| < \frac{\varepsilon}{p^2} x^2$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, deducem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n} < \left(\frac{\delta}{p}\right)^2$, $\forall n \geq n_0$. Urmează că, pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$, avem $0 <$

$p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2} \leq p \frac{\sqrt{n^3}}{n^2} = p \sqrt{\frac{1}{n}} < p \frac{\delta}{p} = \delta$ și atunci $\left| \sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - 1 - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} + \frac{1}{8} p^2 \frac{k^3}{n^4} \right| <$

$\frac{\varepsilon}{p^2} p^2 \frac{k^3}{n^4} \leq \frac{\varepsilon}{n}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - 1 - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} + \frac{1}{8} p^2 \frac{k^3}{n^4} \right| < \varepsilon$, $\forall n \geq$

n_0 . Din $\left| \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - 1 - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} + \frac{1}{8} p^2 \frac{k^3}{n^4} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - 1 - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} + \right.$

$\left. \frac{1}{8} p^2 \frac{k^3}{n^4} \right|$ și $\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - 1 - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} + \frac{1}{8} p^2 \frac{k^3}{n^4} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} \right) - n +$

$\frac{1}{8} p^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ deducem că $\left| \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} \right) - n + \frac{1}{8} p^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right| <$

ε , $\forall n \geq n_0$. Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} \right) - n + \frac{1}{8} p^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 0$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8} p^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right) = \frac{p^2}{32}$ obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + p \frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p \sqrt{k^3}}{2n^2} \right) - n \right\} = -\frac{p^2}{32}$.

229. Aplicăm teorema lui Cèsaro-Stolz; obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \left(k + \binom{x}{k} \right) \left(k + \binom{-x}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+2)^x + \binom{-x}{n+2}}{3n+3+\frac{1}{n}}. \text{ Deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^x + \binom{-x}{n+2}}{3n+3+\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |x| < 1 \\ \frac{1}{3}, & \text{dacă } |x| = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } |x| > 1, \end{cases} \text{ deducem că}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \left(k + \binom{x}{k} \right) \left(k + \binom{-x}{k} \right) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{dacă } |x| < 1 \\ \frac{2}{3}, & \text{dacă } |x| = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$$

230. Fie $a > 0$ și $x_n = \frac{a^n n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$ și

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \frac{a}{e}$. Cum $(1+\frac{1}{n})^n$ converge strict crescător la e , avem că: **1)** Dacă $a < e$, atunci

șirul (x_n) este strict descrescător de la un rang încolo, iar din criteriul raportului rezultă că limita lui este 0. **2)** Dacă $a > e$, atunci șirul (x_n) este strict crescător cu limita $+\infty$.

231. $e^{n+1}x_{n+1} - e^n x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Așadar

șirul este descrescător, deci este mărginit superior de x_1 . Dar cum șirul este cu termeni pozitivi, rezultă că $x_n \in [0, x_1], \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit. Din monotonie și mărginire deducem convergența lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, deci orice subșir al său converge.

232. Aplicăm lema Stolz-Cèsaro cu $a_n = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ și $b_n = n^5$, care este cu termeni

pozitivi, strict crescător și nemărginit superior: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5 - n^5}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + \binom{4}{1}n^3 + \dots + 1}{n^5 + \binom{5}{1}n^4 + \dots + 1 - n^5} = \frac{1}{5}. \text{ Așadar } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \in \mathbb{R} \text{ și atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{5}.$$

233. $\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \frac{n}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} \Rightarrow$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq na_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1} \text{ Din criteriul cleștelui rezultă că: } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1.$$

234. $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul este strict crescător Presupunem că

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit superior. În acest caz șirul ar fi convergent și i-am putea afla

limita, pe care o vom nota cu $x \in \mathbb{R}$, trecând la limită în relația de recurență: $x =$

$x + e^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2} = 0$, contradicție cu $x \in \mathbb{R}$ Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ Cèsaro-Stolz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x_n^2}}{1} = 0.$$

235. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k c^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^n}$. Trecem la limite de funcții: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^x}$

Dacă aplicăm regula lui L'Hopital de k ori, obținem: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{\left(\ln \frac{1}{c}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^x} =$

0, deoarece $\frac{1}{c} > 1$.

236. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - en\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}}$ Putem

trece la limite de funcții: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}}$ L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow \infty}$

$\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}}$ Putem împărți limita în 2 și vom aplica din nou reg-

ula lui L'Hôpital în cea de-a doua: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)}}{\frac{2}{x^3}}$ Prima limită este egală cu e și avem că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - en\right) = \frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} [x^3 \cdot \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)}\right)] = \frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2 + 2x + 1} = -\frac{e}{2}$

237. $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{h_n} \cdot \frac{(e^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1}$ Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, vom

folosi cunoscuta limită: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Așadar, avem că: $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{h_n} \cdot \frac{(e^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} =$

$1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{h_n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{h_n}}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$ Împărțim limita în două și obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n}) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{h_n}}{e^{\ln n}} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{h_n - \ln n} = e^\gamma.$$

238. Termenul general x_n este, de fapt, $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{n+1}$, adică $x_n = \frac{2n}{n+1}$.

Înlocuind în limita \boxed{A} cu termenul general, avem $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2(n+1)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, deci varianta \boxed{A} este corectă.

Cum $x_n = \frac{2n}{n+1}$, avem $y_n = \frac{[2024n]}{n+1}$. Din inegalitatea $2024n - 1 < \frac{[2024n]}{n+1} \leq 2024n$ și aplicând Criteriul cleștelui, rezultă imediat că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2024n]}{n+1} = 2024$.

$$\begin{aligned} \text{Prelucrând numărătorul, } \sum_{k=1}^n \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{k^2 + 4k + 3}{(k+2)^2}\right) &= \sum_{k=1}^n \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right) = \\ &= \log_{\frac{2}{3}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right) = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\prod_{k=1}^n (k+1) \cdot \prod_{k=1}^n (k+3)}{\prod_{k=1}^n (k+2)^2}\right) = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{n+3}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 1$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{k^2 + 4k + 3}{(k+2)^2}\right) = 1$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{k^2 + 4k + 3}{(k+2)^2}\right)}{y_n} = \frac{1}{2024}, \text{ de unde rezultă și variantele } \boxed{C} \text{ și } \boxed{D}.$$

(co-autor: prof. Simona Simonca, Colegiul Național "Mihai Viteazul" Turda)

239. Suma este, de fapt, $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$, deci limita devine $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = e^{-1}$.

240. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[4]{1+2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+2x)^{\frac{1}{4}} - 1}$. Folosim $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$ și aducem

$$\text{la forma: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} \cdot \frac{2x}{(1+2x)^{\frac{1}{4}} - 1} \cdot \frac{x}{2x} = 1.$$

$$\mathbf{241.} \quad L_n - L_{n+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos 2x \dots \cos nx - \cos x \cos 2x \dots \cos(n+1)x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos 2x \dots \cos nx (\cos(n+1)x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos((n+1)x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{r'Hospital}}{=} -\frac{(n+1)^2}{2}.$$

$$\text{Deci, } L_{n+1} - L_n = \frac{(n+1)^2}{2}, L_2 - L_1 = \frac{2^2}{2}, L_3 - L_2 = \frac{3^2}{2}, \dots, L_n - L_{n-1} = \frac{n^2}{2}, L_n - L_1 = \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2} \Rightarrow L_n = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

242. Logaritmăm inegalitatea: $2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1}$, deci $\log_2 \left(2^{f(x)}\right) \leq \log_2 x <$

$\log_2 \left(2^{f(x)+1}\right)$; $f(x) \leq \log_2 x < f(x) + 1$ De aici, obținem: $\log_2 x - 1 < f(x) \leq \log_2 x$

Cum $f(x)$ are valori în \mathbb{N} , rezultă că: $f(x) = [\log_2 x]$ Funcția $f(x)$ este definită ast-

$$\text{fel: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [2^0, 2^1), \\ 1, & \text{dacă } x \in [2^1, 2^2), \\ 2, & \text{dacă } x \in [2^2, 2^3), \\ \vdots & \\ n, & \text{dacă } x \in [2^n, 2^{n+1}). \end{cases} \quad \text{Prin urmare, funcția } f(x) \text{ are limită în intervalul}$$

$(1, \infty)$ exceptând punctele de forma 2^k , adică: $f(x)$ are limită în $(1, \infty) - \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

243. Pentru $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, deci f este impară. Considerăm inegalitatea $f(x) <$

$1 \iff \sqrt{x^2 + x + 1} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \iff 2x - 1 < 2\sqrt{x^2 - x + 1}$, evident pentru $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Pentru $x > \frac{1}{2}$, inegalitatea $4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 - 4x + 4$ este adevărată, deci $f(x) < 1$ pentru orice $x > 0$ și pentru că f impară, deducem că $-1 < f(x) < 1$.

244. Avem nedeterminarea $\frac{0}{0} \Rightarrow \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx} - \ln n \right]' =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^x} = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow n = 4$$

245. Înlocuim $\text{tg } x$ cu $\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} \Rightarrow \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$.

246. Calculăm limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{-\sin t}{2} =$

0, unde am aplicat regula lui l'Hospital de două ori. Deoarece funcția \sin este mărginită, valoarea limitei este 0.

247. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)}{\ln(x+1) + \ln(2x+1) + \dots + \ln(nx+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} + 2 \frac{\sin(2x)}{2x} + \dots + n \frac{\sin(nx)}{nx} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\ln(x+1)}{x} + 2 \frac{\ln(2x+1)}{2x} + \dots + \frac{\ln(nx+1)}{nx} \right)}$. Reamintim limitele remarcabile $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ și avem, deci $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = 1$.

248. $\lim_{x \searrow 0} x^\alpha f(x) = \begin{cases} \infty, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta f(x) = \begin{cases} 0, & \beta < 2 \\ \frac{\pi^2}{4}, & \beta = 2 \\ \infty, & \beta > 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{0\}$ și

$B = \{2\}$.

$$249. \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p f(x) = \begin{cases} \infty, & p < 1 \\ 1, & p = 1 \\ 0, & p > 1 \end{cases} \Rightarrow M = \{1\}.$$

250. Ținem cont de relația $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}x$, pentru orice $x \in$

$$\mathbb{R}. \text{ Așadar, } \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \sum_{k=1}^n (\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}k) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}1.$$

Atunci valoarea limitei este $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

$$251. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} \right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \right]^{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\cos x - \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}} = e^2$$

$$252. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right) \right). \text{ Folosind propri-$$

etatea: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)} = 1$. Deci, limita initiala devine $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} -$

$$\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{x+1}}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1 - \tan\frac{x}{x+1}}{1 + \tan\frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1 - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{(x+1) - x}{(x+1) + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$253. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \ln(1+x) + \ln(2+x) + \dots + \ln(1+nx) \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x) + \ln(2+x) + \dots + \ln(1+nx)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(2+x)}{x} + \dots + \frac{\ln(1+nx)}{x} \right)} = e^{1+2+\dots+n} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}. \text{ Deci limita finala devine}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} \right]^{\frac{2}{n^2}}$$

= e.

$$254. \text{ Descompunem în produs de limite } L = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \cdot \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$255. \text{ Cu regula lui l'Hopital deducem } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \ln(1-x^3)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-3x-2x^3}{4x^2(1-x^3)} =$$

$+\infty$, deci răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

$$256. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{\sqrt{5-x}-2} \cdot \frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{\sqrt{5-x}-2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(\sqrt{5-x} + 2) \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{5-x} + 2) \cdot (x+1)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

257. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Din enunțul problemei

rezultă că dreapta de ecuație $y = -ax - b + 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ a funcției f .

$$\begin{aligned} \text{Pe de altă parte, egalitățile } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \\ -1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

implică faptul că dreapta de ecuație $y = -x - \frac{1}{2}$ este

asimptotă oblică spre $-\infty$ a funcției f . Întrucât funcția f are o singură asimptotă oblică spre $-\infty$, rezultă că $a = 1$ și $-b + 2 = -\frac{1}{2}$, deci $b = \frac{5}{2}$.

Metoda 2:

Notăm $y = -x$, astfel limita devine: $\lim_{y \rightarrow \infty} (\sqrt{y^2 - y + 1} - ay + b)$ Pentru ca limita să

nu fie infinită, trebuie ca $a = 1$. Astfel, limita devine: $\lim_{y \rightarrow \infty} (\sqrt{y^2 - y + 1} - y + b)$;

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2 - y + 1 - y^2}{\sqrt{y^2 - y + 1} + y} + b &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-y}{\sqrt{y^2 - y + 1} + y} + b = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-y}{y \left(\sqrt{1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}} + 1 \right)} + b = \\ -\frac{1}{2} + b; \text{ Avem: } \frac{-1}{2} + b &= 2. \text{ Rezolvând, obținem } b = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

258. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\rho(x) = \begin{cases} x - n, & \text{dacă } x \in [n, n + \frac{1}{2}) \\ n + 1 - x, & \text{dacă } x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1) \end{cases}$ și

$$\text{atunci } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + x - n, & \text{dacă } x \in [n, n + \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{x} - x + n + 1, & \text{dacă } x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1). \end{cases} \text{ Funcția } f \text{ este crescătoare}$$

pe $[n, n + \frac{1}{2})$, și atunci $\frac{1}{n} = f(n) \leq f(x) \leq f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2n+1}$, $\forall x \in [n, n +$

$\frac{1}{2})$. Pe de altă parte, funcția f este strict descrescătoare pe $[n + \frac{1}{2}, n + 1)$, și atunci

$$\frac{1}{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2n+1}, \forall x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1). \text{ Urmează că}$$

$$\inf \{f(x) : x \in [n, n+1)\} = f(n+1) = \frac{1}{n+1} \text{ și } \sup \{f(x) : x \in [n, n+1)\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2n+1}.$$

$$\text{Așadar } \inf \{ \sup \{f(x) : x \in [n, n+1)\} : n \in \mathbb{N}^* \} = \inf \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{2n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = \frac{1}{2}.$$

$$\textbf{259.} \quad \sup \{ \inf \{f(x) : x \in [n, n+1)\} : n \in \mathbb{N}^* \} = \sup \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = \frac{1}{2}.$$

260. Avem $f'(x) = 3kx^2 - 2(k+1)x + 2 - k$, $f'(1) = 0$, deci $x = 1$ este un punct critic.

Vom folosi derivata a doua: dacă $f''(1) > 0$, atunci $x = 1$ este punct de minim local; dacă $f''(1) < 0$, atunci $x = 1$ punct de maxim local. Avem $f''(x) = 6kx - 2(k+1)$, $f''(1) = 4k - 2 > 0$ pentru $k > 1/2$.

$$261. \quad \text{Avem } f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin ax + (x^2) \cdot a \cos ax, & x < -1, \\ -2x \sin ax - (x^2 - 1) a \cos ax, & -1 < x < 1, \\ 2x \sin ax + (x^2 - 1) a \cos ax, & x > 1. \end{cases} \quad \text{Derivabilitatea e}$$

de discutat doar în $x = \pm 1$, unde impunem condiția de egalitate a derivatelor laterale:

$$f'_s(\pm 1) = f'_d(\pm 1). \quad \text{Avem } f'_s(1) = -2 \sin a = f'_d(1) = 2 \sin a \text{ și } f'_s(-1) = -2 \sin(-a) = 2 \sin a = f'_d(-1) = 2 \sin(-a) = -2 \sin a, \text{ de unde } \sin a = 0, a \in (0, 2\pi), \text{ deci } a = \pi.$$

262. Definind $f(x) = a^x - x$, avem $f(x) \geq 1 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim global, de unde $f'(0) = 0$. Cum $\ln a - 1 = f'(0) = 0$, avem $a = e$.

263. $g(t) = \int_{t-1}^t f(x) dx = F(t) - F(t-1)$, unde F este o primitivă a lui f . Cum g este derivabilă, punctele sale de extrem local în $(1, 2)$ se află printre punctele critice. $g'(t) = 0 \iff F'(t) - F'(t-1) = 0 \iff f(t) - f(t-1) = 0$. Cum $t \in (1, 2)$, avem $f(t) = 2t^2 - 6t + 6$, $f(t-1) = t$, deci $f(t) = f(t-1) \iff 2t^2 - 7t + 6 = 0 \iff (2t-3)(t-2) = 0$. Singura soluție este $t = \frac{3}{2} \in (1, 2)$.

$$264. \quad \text{Expliciteaza funcției: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} & \text{dacă } x \in (0, 1) \cup (2, 3) \\ \sqrt{-x^2 + 3x - 2} & \text{dacă } x \in [1, 2] \\ \frac{3}{2\pi\sqrt{2}} \sin(\pi x) & \text{dacă } x \leq 0 \cup x \geq 3 \end{cases}$$

de unde se deduce ca $x = 1$ și $x = 2$ sunt puncte de întoarcere, fiindcă derivatele laterale în aceste puncte sunt infinite și diferite.

265. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Din tabelul de variație al funcției rezultă că 0 și 2 sunt

puncte de extrem. Fie $u(x) = \frac{1}{x-1}$, derivata de ordin n a funcției $u(x)$ este $u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(3) = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^{(k)}(3) = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 4$.

266. $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$, $f(0) = f(\sqrt{3})$, deci f nu e injectivă. Cum f este con-

tinuă și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, avem că f este surjectivă. Observăm că $f(-2)f(-1) < 0$, $f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$, deci ecuația $f(x) = 0$ are 3 rădăcini reale cu părțile întregi -2, 0, 1, a căror sumă este -1.

267. Pentru $x \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, avem $f(x) = n \cos\left(\frac{(2x-1)\pi}{2}\right)$ deci f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Fie $n \in \mathbb{Z}$. Avem $f(n) = 0$, $\lim_{x \searrow n} f(x) = n \cdot \cos\left(\frac{2n-1\pi}{2}\right) = 0$, $\lim_{x \nearrow n} f(x) = (n-1) \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0$. Deci funcția este continuă pe \mathbb{Z} , așadar pe \mathbb{R} .

268. Avem $\lim_{x \searrow 0} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$ deci $\lim_{x \searrow 0} x^a \ln(1+x) = \lim_{x \searrow 0} x^{a+1} \frac{\ln(1+x)}{x} =$

$\begin{cases} 0, & a > -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & a < -1 \end{cases}$. Din $\lim_{x \searrow 0} e^{ax} = 1$ deducem că f_a este continuă $\Rightarrow a = -1$. Derivata

lui f_{-1} în 0 la stânga este $\lim_{x \nearrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$ și la dreapta este $\lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{2x} = -\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}$, deci nu există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

269. Se observă că $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ și $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Prin inducție, se poate demonstra că $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Prin urmare, $f^{(n)}(0) = n!$.

270. A $a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$: f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$, iar $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx^3 = 0 = f(0)$. Deci, f este continuă pe \mathbb{R} .

B Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$ f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, respectiv pe $(0, \infty)$; Fie $x_1 \in (-\infty, 0]$ și $x_2 \in (0, \infty)$; evident $x_1 < x_2$; atunci $f(x_1) = x_1^4 + 1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. $\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .

C $a = 1$ și $b = -1$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 + 1 = f(0) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^3 = 0$. Deci, f este discontinuă în 0.

D $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ oricare ar fi $b \in (-\infty, 0)$.

Așadar, pentru $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty, 0)$ avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

271. Egalitățile $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1 = |f(0)|$ implică continuitatea funcției $|f|$

în 0, iar egalitățile $\lim_{x < 0} f(x) = -1$ și $\lim_{x > 0} f(x) = 1$ arată că f nu are limită în 0. Din

definiția lui f rezultă că f nu are niciun zero în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

272. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Atunci $g'(x) = 4x(x^2 - 5)$. Rezultă că

funcția g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt{5}]$, strict crescătoare pe $[-\sqrt{5}, 0]$, strict descrescătoare pe $[0, \sqrt{5}]$ și strict crescătoare pe $[\sqrt{5}, \infty)$. De asemenea, $\lim_{n \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = \infty, g(-\sqrt{5}) = g(\sqrt{5}) = -16$ și $g(0) = 9$. Rezultă că $A = [\sqrt{5}, \infty)$.

273. Avem că

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 3) \\ x - 3, & x \in [3, 2\sqrt{3}], \end{cases}$$

deci punctele 1, 2, 3 sunt punctele de discontinuitate ale lui f , iar punctele 0, 1, 2, 3 sunt

punctele de minim global ale lui f . De asemenea, $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x - 1) dx + \int_2^3 (x - 2) dx + \int_3^{2\sqrt{3}} (x - 3) dx = 12 - 6\sqrt{3}$.

274. Avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(2x) \dots f(nx)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(nx)}{x}$. Pentru fiecare

limită (care e de forma $\frac{0}{0}$) aplicăm regula lui l'Hôpital. Deci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(2x) \dots f(nx)}{x^n} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(2x)}{1} \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nf'(nx)}{1} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!. \text{ Deci singurul răspuns corect este } \boxed{\text{D}}.$$

275. Dacă $g: (0, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$ este funcția definită prin $g(x) = e^{-x} f(x), \forall x \in$

$(0, +\infty)$, atunci ecuația funcțională dată în enunțul problemei devine $e^{xy} e^{x+y} g(xy) = e^{(x+1)y+x} g(x) + e^{(x+1)y+x} g(y)$ sau echivalent $g(xy) = g(x) + g(y), \forall x \in (0, +\infty)$.

Așadar g satisface ecuația funcțională a funcției logaritm, prin urmare $g(x) = \log_a x, \forall x \in$

$(0, +\infty)$, unde $a \in (0, +\infty), a \neq 1$. Atunci $\log_a x = e^{-x} f(x)$, deci $f(x) = e^x \log_a x = \frac{1}{\ln a} e^x \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$. Rezultă că f este derivabilă și $f'(x) = \frac{1}{\ln a} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right), \forall x \in$

$(0, +\infty)$. Așadar, există $c = \ln a \neq 0$ astfel încât $cx f'(x) = e^x(x \ln x + 1)$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

276. $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, deci limita funcției există și funcția este continuă în punctul $x = 0$. Apoi $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln |x| - 1) = -\infty$, deci funcția are derivată, dar nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

$$\mathbf{277.} \quad f'(x) = nx^{n-1} \left(\ln x + \frac{1}{n} \right),$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \left(\ln x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right),$$

...

$$f^{(n)}(x) = n! \left[\ln x + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right] \text{ prin inducție sau cu formula lui Leibniz.}$$

278. Funcția f este derivabilă pe un interval deschis, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, deci punctele sale de extrem se găsesc printre rădăcinile reale ale ecuației $f'(x) = 0$, adică $4x(x^2 + a) = 0$. Pentru ca f să aibă exact două puncte de minim global este necesar ca această ecuație să aibă cel puțin două rădăcini distincte, ceea ce revine la faptul că $a \in (-\infty, 0)$. Fie $a \in (-\infty, 0)$. Atunci, ecuația $f'(x) = 0$ are de fapt trei rădăcini distincte: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{-a}$ și $x_3 = \sqrt{-a}$. Întrucât f este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} , $f''(x_1) = a < 0$ și $f''(x_2) = f''(x_3) = -8a > 0$, rezultă că x_1 este un punct de maxim local (fără a fi minim local) iar x_2 și x_3 sunt puncte de minim local. Prin urmare, f are exact două puncte de minim local dacă și numai dacă $a \in (-\infty, 0)$. Cu alte cuvinte, avem $M = (-\infty, 0)$.

279. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n}$. Întrucât funcția f este derivabilă, în baza teoremei lui l'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. Cum șirul (x_n) converge către 0, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = f'(0)$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = f'(0)$.

280. Fie $p \geq 1$ și $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Atunci $f^p(x) = \int_{x_0}^x (f^p(t))' dt = p \int_{x_0}^x f^{p-1}(t) f'(t) dt$. Întrucât $(pa - b)^2 \geq 0$, sau echivalent, $pab \leq \frac{p^2}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, obținem $p f^{p-1}(t) f'(t) \leq \frac{p^2}{2} f^{2p-2}(t) + \frac{1}{2} (f'(t))^2$, oricare ar fi $t \in [x_0, x]$ și deci $f^p(x) = p \int_{x_0}^x f^{p-1}(t) f'(t) dt \leq \frac{p^2}{2} \int_{x_0}^x f^{2p-2}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (f'(t))^2 dt \leq \frac{p^2}{2} \int_0^1 f^{2p-2}(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$. Prin urmare, $\alpha(p) \leq \beta(p)$.

281. Cum $\frac{1}{2}x - 3 < 0$ pentru orice $x \leq -2$, legea de corespondență a funcției f se rescrie

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty) \end{cases}.$$

Faptul că singura afirmație adevărată este **B** rezultă imediat din analiza graficului funcției f .

Chiar și în lipsa graficului, folosind proprietățile funcției de gradul I se deduce cu ușurință că $f((-\infty, -2]) = [4, \infty)$, $f((-2, 1)) = (1, 4)$, $f([1, \infty)) = (-\infty, 1]$. Funcția f este bijectivă deoarece pentru orice element b al codomeniului \mathbb{R} există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = b$. Pentru $b \in (-\infty, 1]$, acest unic x este $x = \frac{3-b}{2} \in [1, \infty)$, pentru $b \in (1, 4)$, $x = b - 3 \in (-2, 1)$, iar pentru $b \in [4, \infty)$, $x = 6 - 2b \in (-\infty, -2]$.

282. $f'(x) = (2x + 5) \ln x + \frac{x^2 + 5x + 9}{x}$. $f''(x) = 2 \ln x + \frac{2x + 5}{x} + 1 - \frac{9}{x^2}$. $f'''(x) = \frac{2x^2 - 5x + 18}{x^3} > 0, \forall x \in (0, \infty) \implies f'(x)$ convexă pe $(0, \infty)$. $g'(x) = e^x(x^2 + 2x + 6) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 8)$. $g''(x) = e^x(x^2 + 4x + 8) + e^x(2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 12) > 0, \forall x \in (0, \infty) \implies g'$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

283. Ecuația tangentei în $x = 2$ este: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ Fiindcă panta primei bisecatoare este 1, $f'(2) = 1$. Așadar, $3x^2 + m + 1 = f'(x) \implies 3 \cdot 4 + m + 1 = 1 \implies m = -12$.

284. $f'(x) = 2x + 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x+1} > 0$, deci f este injectivă. Cum $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

∞ și f este continuă pe $[0, \infty]$ (deci cu proprietatea lui Darboux), imaginea funcției este $[1, \infty]$. Cum imaginea și codomeniul funcției coincid, funcția este surjectivă, deci, în

final, bijectivă. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \implies \nexists$ asimptotă orizontală spre $+\infty$. Datorită faptului că

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, nici asimptota oblică nu există. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)}{2^n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot n}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 \cdot (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n)}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{2^n} =$

$2 \ln 2$. Așadar, limita inițială este $2 \ln 2$. $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 + 2^x + \ln(x+1)) dx =$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^2 + \int_1^2 x' \cdot \ln(x+1) dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} + x \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \frac{4}{3} + \frac{2}{\ln 2} + \ln \frac{27}{4}.$$

285. Cunoscând definiția noțiunii de funcție, se deduce imediat că afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$

sunt false. Să observăm că pentru un $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, $x - [x] = \{x\} \in [0, 1)$ este partea fracționară a lui x . Prin urmare, toate numerele reale de forma $k + \frac{1}{2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$ sunt zerouri ale lui f , ceea ce arată că afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată și afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

286. Soluție: asimptota oblică are ecuația generală: $y = mx + n$ unde $m, n \in \mathbb{R}$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 2, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$$

287. $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este falsă deoarece funcția logaritm este definită pe $(0, \infty)$.

Celelalte componente fiind polinomiale, sunt definite pe \mathbb{R} . De aceea domeniul acestei funcții este $(0, \infty)$.

$\boxed{\text{B}}$. Această proprietate este falsă. Constatăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - 9 \frac{\ln x}{x^3} \right)$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$, constatăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, deci funcția nu are asimptotă orizontală.

$\boxed{\text{C}}$. Această proprietate este adevărată, deoarece problema existenței punctelor unghiulare se pune în acele puncte în care funcția este continuă, dar nu este derivabilă. Funcția f este derivabilă pe întreg domeniul de definiție.

$\boxed{\text{D}}$ Această proprietate este adevărată. Funcția f este de două ori derivabilă pe întreg domeniul de definiție. Deoarece derivata de ordinul întâi $f'(x) = 3x^2 + 6x - \frac{9}{x} = \frac{3}{x}(x^3 + 2x^2 - 3) = \frac{3}{x}(x-1)(x^2 + 3x + 3)$ are ca singură soluție reală $x = 1$. Din moment ce ecuația $x^2 + 3x + 3 = 0$ nu are soluții reale, semnul funcției f este determinat doar de $(x-1)$. Constatăm astfel că f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $(1, 4)$ este un punct de minim global al funcției f .

288. $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este falsă deoarece asimptotele verticale au ecuații de forma $x = \text{constantă}$. Verificând clasic existența asimptotelor verticale, constatăm că existența

lor se pune doar în punctul $a = 1$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$, funcția nu are asimptote verticale.

B. Această proprietate este falsă. Constatăm că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, deci dreapta de ecuație $y = 0$ este o asimptotă orizontală la atât la stânga cât și la dreapta graficului funcției f .

C. Această proprietate este falsă. Constatăm că funcția f este continuă în punctul 1 deoarece $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2 = \lim_{x \downarrow 1} f(x)$. Ea este derivabilă pe $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$. Constatăm că: $\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim_{x \uparrow 1} (2+x)e^{x-1} = 3 \in \mathbb{R}$ și $\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim_{x \downarrow 1} -xe^{1-x} = -1 \in \mathbb{R}$. Deoarece ambele limite laterale există și sunt finite, punctul $(1, f(1)) = (1, 2)$ este un punct unghiular, nu un punct de întoarcere.

D. Această afirmație este adevărată deoarece analizând graficul funcției, constatăm că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ în două puncte.

289. $g(x) = -(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ și $f(a)+g(a) = -\frac{2}{3}(1-2a)^{\frac{1}{2}}(1+a) \geq 0, \forall a \in A \setminus (-1, \frac{1}{2})$. Derivata funcției $g(x)$ este: $g'(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. Panta tangențelor în punctul de abscisă $x = a$ este $f'(a)$ și $g'(a)$, iar $f'(a) \cdot g'(a) = ((1-2a)^{-\frac{1}{2}}) \cdot (-(1-2a)^{\frac{1}{2}}) = -1$. Deci, tangentele sunt ortogonale, oricare ar fi a .

290. Din $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 + x}{x(ax + b)} = \frac{1}{a}$ rezultă $\frac{1}{a} = 2$, deci $a = \frac{1}{2}$, iar din

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1-2b)x - 2}{x + 2b} = 2(1-2b)$ se obține $2(1-2b) = 3$, deci $b = -\frac{1}{4}$.

291. Punctele de intersecție sunt $x = 1$ și $x = e$.

292. Din ex. anterior rezultă că avem $A = \int_1^e \ln x - (\ln x)^2 dx$. Prin schimbarea de

variabilă $u = \ln x \Rightarrow A = \int_0^1 (u - u^2) \cdot e^u du = \left[(u - u^2)e^u - (1 - 2u)e^u - 2e^u \right]_0^1 = 3 - e$.

293. $f(x) = \begin{cases} 7 - 2\sqrt{x} & \text{dacă } x \in (0, 9] \\ 1 & \text{dacă } x \in (9, 16) \\ 2\sqrt{x} - 7 & \text{dacă } x \in [16, \infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 9) \\ 0 & \text{dacă } x \in (9, 16) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (16, \infty) \end{cases}$

Derivatele laterale atât în $x = 9$ cât și în $x = 16$ sunt finite, dar diferite, deci acestea vor fi puncte unghiulare: $f'_s(9) = -\frac{1}{3}, f'_d(9) = 0, f'_s(16) = 0, f'_d(16) = \frac{1}{4} \Rightarrow (9, 1), (16, 1)$ puncte unghiulare pentru G_f .

x	0	9	16	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	7	\searrow 1	\rightarrow 1	\nearrow $+\infty$

Din tabelul de variație reiese faptul că G_f nu intersectează axa Ox .

294. Calculăm derivatele de ordinul 1 și 2 ale lui f : $f'(x) = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} = -x + \frac{x^3}{3!}$.

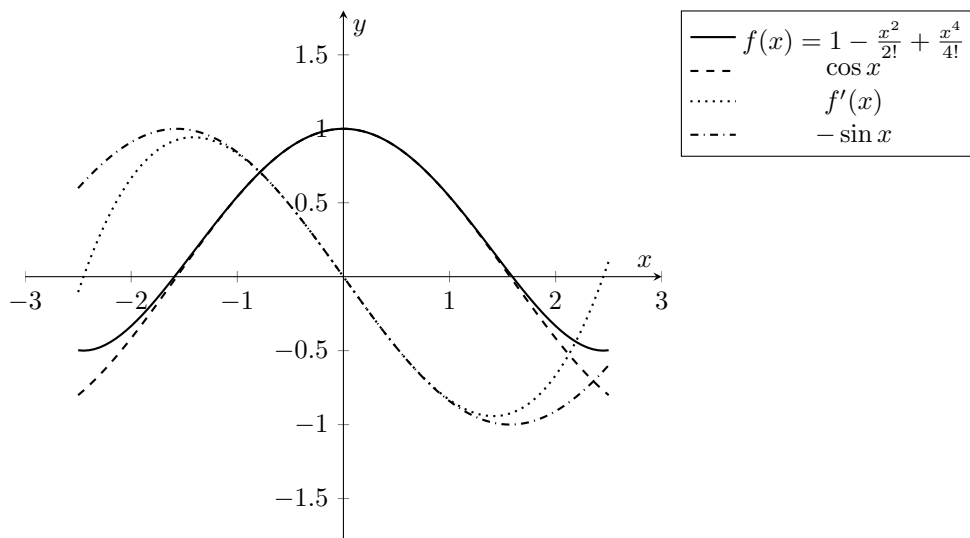
Observăm că singura soluție în $[-2, 2]$ a ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 0$.

$f''(x) = -1 + \frac{x^2}{2!}$. Punctele de inflexiune ale lui f sunt așadar $x = -\sqrt{2}$ și $x = \sqrt{2}$.

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	\nearrow	1	\searrow	$-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f$ este concavă pe $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ și convexă pe $(-2, -\sqrt{2})$ și $(\sqrt{2}, 2)$. De asemenea, cum f este continuă, va rezulta că $f(x) = 0$ are două rădăcini în intervalul $[-2, 2]$.

Pentru a observa faptul că f aproximează $\cos x$ se pot schița graficele celor două funcții pe $[-2, 2]$. f' aproximează $-\sin x$, fapt care reiese și din $(\cos x)' = -\sin x$.



295. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală pentru

G_f . $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty$, deci $x = 1$ este asimptotă verticală pentru G_f .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^4 - 1} = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală. În concluzie G_f

are 3 asimptote. Calculăm derivata lui f pentru a putea crea tabelul de variație al funcției

și a trasa graficul: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^4 - 1) - x \cdot 4x^3}{(x^4 - 1)^2} = -\frac{3x^4 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \Rightarrow f$

este strict descrescătoare pe $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Tabelul de variație a lui f este:

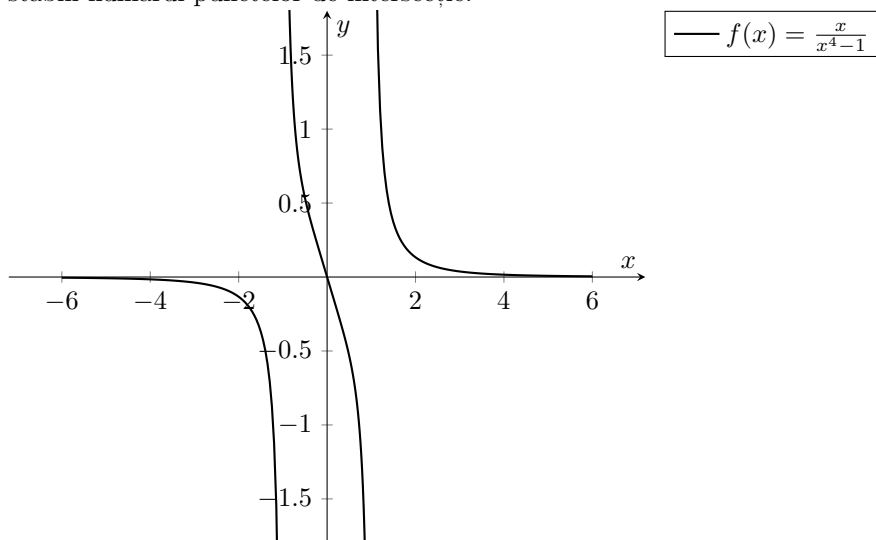
x	$-\infty$	-1	1	∞	
$f'(x)$	-		-		-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$\infty \searrow -\infty$		$\infty \searrow 0$

Pentru a afla numărul de soluții a ecuației, o putem rescrie sub forma: $ax^4 - x - a =$

$0 \Rightarrow a = \frac{x}{x^4 - 1} \Rightarrow$ soluțiile ecuației sunt punctele de intersecție ale lui f cu graficul lui

$y = a, a \in \mathbb{R}$. Putem trasa graficul funcției f și trasa linii paralele cu axa Ox pentru a

stabili numărul punctelor de intersecție:



Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, ecuația are 2 soluții. Dacă $a = 0$, ecuația are soluția unică $x = 0$.

296. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \infty$, deci $x = -2$ asimptotă verticală. Analog, $x = -1$

asimptotă verticală. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, rezultă că f nu admite asimptote orizontale.

Verificăm dacă f admite asimptote oblice: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^3}{x(x+1)(x+2)} = -2 \in \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (-2)x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^3 + 2x(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 2x^2 + 4x}{(x+1)(x+2)} = 6 \in \mathbb{R}$
 Așadar, f admite asimptota oblică $y = -2x + 6$ la $\pm\infty$.

297. Calculăm derivatele de ordinul 1 și 2 ale lui f pentru a crea tabelul de variație:

$f'(x) = 4x^3 - 8x^2 - 4x + 8 = 4x^2(x-2) - 4(x-2) = 4(x^2-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{-1, 1, 2\}$. $f''(x) = 12x^2 - 16x - 4$, $f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x - 1 = 0$, ecuație care are soluțiile $x_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ și $x_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$, $f(-1) = -\frac{19}{3}$; $f(1) = \frac{13}{3}$; $f(2) = \frac{8}{3}$

Tabelul de variație:

x	$-\infty$	-1	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	2	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\infty \searrow$	$-\frac{19}{3}$	\nearrow	$\frac{13}{3}$	\searrow	$\frac{8}{3}$	$\nearrow \infty$

Așadar, se poate observa atât din tabel, cât și dacă se schițează graficul funcției f că: $l = 3$, $g = 1$, $i = 2$. Punctul $x = -1$ va fi de extrem global.

Din tabel rezultă că $z = 2$. Făcând calculele, obținem faptul că doar varianta C este corectă.

298. $\ln|x| = x^3 - 4x + 1 \iff \frac{\ln|x| - 1}{x} = x^2 - 4$, deci numărul de soluții a ecuației

este egal cu numărul de puncte de intersecție a graficelor celor 2 funcții date.

Pentru g , minimumul se obține în $x = 0$ și este egal cu $g(0) = -4$, iar punctele de intersecție cu axa Ox sunt $x = -2$ și $x = 2$. Graficul lui g este o parabolă.

Pentru a putea schița graficul lui f vom construi tabelul de variație.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2 - \ln(-x)}{x^2} & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{2 - \ln x}{x^2} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff \ln|x| = 2 \iff x \in \{-e^2, e^2\}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-5 + 2 \ln(-x)}{x^3} & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{-5 + 2 \ln x}{x^3} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \iff 2 \ln|x| = 5 \iff x \in \{-e^{\frac{5}{2}}, e^{\frac{5}{2}}\}$$

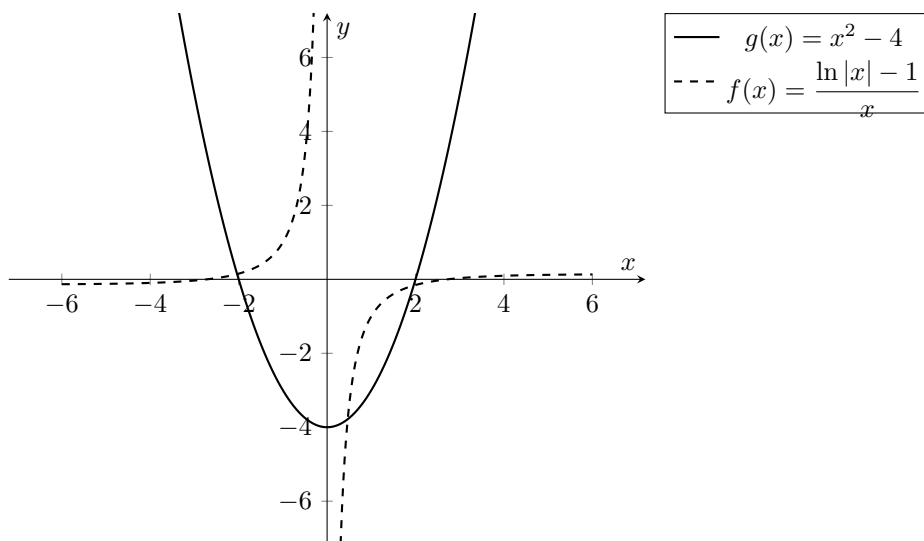
Calculăm limitele lui f :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, deci $y = 0$ asimptotă orizontală pentru G_f .

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \frac{-\infty}{0_-} = \infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{-\infty}{0_+} = -\infty$, deci $x = 0$ asimptotă verticală pentru G_f .

Tabelul de variație:

x	$-\infty$	$-e^{\frac{5}{2}}$	$-e^2$	0	e^2	$e^{\frac{5}{2}}$	∞	
$f'(x)$	-	-	0	+ +	0	-	-	
$f''(x)$	-	0	+	+ -	-	0	+	
$f(x)$	0	\searrow	$-e^{-2}$	\nearrow	∞ $-\infty$	$\nearrow e^{-2}$	\searrow	0



Cum $f(1) = -1$ și $g(1) = -3$, observăm din grafic că în semiplanul pozitiv al lui x , graficul lui f va tăia parabola g în două puncte, unul în intervalul $(0, 1)$ și unul în $(1, \infty)$. Pe de altă parte, în semiplanul negativ al lui x , f va intersecta g doar într-un punct care se va afla în intervalul $(-\infty, 0)$. Deci vor exista 3 puncte de intersecție.

299. $\int \frac{1}{x^2 + x + 5} = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}} = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{19}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{19}} \arctg \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{19}} \right) + C$, deci varianta **B** este o primitivă validă.

300. Observăm că limitele laterale ale lui f în 0 sunt 1 și 2, deci f e discontinuă în 0 (de speța întâi). Din acest motiv, f nu admite primitive, căci imaginea funcției f nu este un

interval (f nu are proprietatea lui Darboux). Singurul răspuns corect este \boxed{D} .

301. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3$ și $x^3 + x = x(x^2 + 1)$.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx = \int \frac{x^3 - x + 2x}{(x^2 - 1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} dx + \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^3} dx$$

Cu schimbarea de variabilă $u = x^2 - 1$, rezultă $\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du + \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2} \left(\frac{u+1}{u^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)^2 + C$. În variantele de răspuns, $C = \pm 2, 1$.

302. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n}} = e^{2n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{e^{4n}}{e^{4n} - e^{2n} + 1} = -\frac{1}{2}; \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ și } \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

303. $F(-1) = \frac{1}{e} + C_1$. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin x + C_2 = \sin x + C_1 + 1$. Pentru $x < 0$, $f(x) = e^x$

derivabilă, pentru $x > 0$, $f(x) = \cos(x)$ derivabilă. Pentru $x = 0$, calculăm limitele la capetele din stânga și din dreapta: $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \Rightarrow f$ nu este derivabilă pe \mathbb{R} .

304. Constatăm că g este continuă în $x = 0$. Pentru $x < 0$, $g(x) = x + 1$ este o funcție polinomială, deci continuă și derivabilă pe intervalul $(-\infty, 0)$. Pentru $x \geq 0$, $g(x) = e^x$ este o funcție exponențială, continuă și derivabilă pe intervalul $[0, \infty)$. Astfel, aceasta admite primitive pe întreg domeniul de definiție. Din condiția de continuitate în $x = 0$ a unei primitive G , se obține faptul că $c_2 = 1 + c_1$, unde c_1 și c_2 sunt constantele funcției G pe cele două ramuri.

305. $F'(x) = f(x) = (3a - 2b)e^{3x} \sin 2x + (3b + 2a)e^{3x} \cos 2x$. Deci, $3a - 2b = 0$ și

$$3b + 2a = 1. \text{ În concluzie, } a = \frac{2}{13} \text{ și } b = \frac{3}{13}.$$

306. Pentru ca f să admită primitive, este nevoie ca $a \sin x + b = 0$ să nu aibă soluții

reale. Așadar, luând în considerare faptul că a și b sunt reale și pozitive, este necesar ca

$$-\frac{b}{a} < -1 \implies b > a.$$

307. F este un raport de funcții continue, al cărui numitor este mereu diferit de zero,

deci aceasta admite primitive. Rescriem numitorul în următorul mod: $e^{2x} + e^x + 6 = \left(e^x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{23}{4}$. Considerăm integrala nedefinită și următoarea schimbare de variabilă:

$$t = e^x + \frac{1}{2} \implies dt = e^x dx. \text{ Obținem: } \int \frac{dt}{t^2 + \frac{23}{4}} = \frac{2}{\sqrt{23}} \arctg \frac{2t}{\sqrt{23}} + C. \text{ În concluzie,}$$

familia de primitive a funcției f este: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{2e^x + 1}{\sqrt{23}} + C$.

308. Domeniul maximal de definiție este $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Pentru a calcula primitiva

pe domeniul de definiție, folosim substituția $t = x + 1$. $F(t) = \int \frac{t-2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^2} dt - 2 \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + C = -\frac{x}{(x+1)^2} + C$.

309. $f(x) = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}} \dots = x^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}$. Folosim, apoi, următoarea formulă pentru suma

termenilor unei progresii geometrice infinite, cu rația r , $r \in (-1, 1)$ și a_1 primul termen al progresiei: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Deci, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

În concluzie, primitiva funcției f este $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

310. Împărțim numărătorul la numitor folosind algoritmul împărțirii polinoamelor și

obținem $f(x) = 2x - 3 + \frac{x-4}{x^2-x}$. Integrând în raport cu x , obținem $\int f(x) dx = \int \left(2x - 3 + \frac{x}{x^2-x} - \frac{4}{x^2-x} \right) dx = \int \left(2x - 3 + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x(x-1)} \right) dx = \int \left(2x - 3 + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x} \right) dx = x^2 - 3x + \ln|x-1| - 4 \ln|x-1| + 4 \ln|x| + C = x^2 - 3x - 3 \ln|x-1| + 4 \ln|x| + C = \ln \frac{e^{x \cdot (x-3)} \cdot x^4}{|x-1|^3} + C$.

311. Folosim substituția $x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} t \implies dx = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$. $F(t) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right) + C$.

Folosind formula $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, obținem $F(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+3}} + C$.

312. Fie $F(x) = \int \sin(\ln x) dx$. Folosim metoda integrării prin părți: $u = \sin(\ln x) \implies$

$du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$, iar $dv = 1 \implies v = x$. Integrala devine $F(x) = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) dx$. Folosim, din nou, metoda integrării prin părți pentru noua integrală:

$u = \cos(\ln x) \implies du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$, iar $dv = 1 \implies v = x$. Integrala devine $\int \cos(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x) dx$. Așadar, $F(x) = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x - F(x) + C \implies F(x) = \frac{x}{2} \cdot (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$. Folosind următoarea formulă, obținem

$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \implies F(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \left(\ln x - \frac{\pi}{4} \right) + C$ Această funcție oscilează în jurul axei $y = 0$ și o intersectează când $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $\sin(\ln x) - \cos(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\pi}{4} + n\pi}, n \in \mathbb{Z}$. Cu toate acestea, aceasta

nu este o funcție periodică, deoarece atât funcția logaritmică ($\ln x$), cât și cea liniară (x) sunt monoton crescătoare.

313. $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 1 \implies$ funcția este continuă în punctul $x = 1$,

deci aceasta admite primitive în intervalul $[0, \infty)$. Pentru a determina primitiva funcției f când $x \in [0, 1]$, vom folosi substituția $x = \sin t \implies dx = \cos t dt$. $F(t) = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot$

$\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$. În ceea ce privește f în intervalul

$(1, \infty)$, vom folosi metoda integrării prin părți: $u = x^2 + x - 1 \implies du = (2x + 1)dx$, iar $v' = e^{x-1} \implies v = e^{x-1}$. Așadar, $F(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^{x-1} - \int (2x + 1) \cdot e^{x-1} dx$.

În continuare, folosim, din nou, metoda integrării prin părți: $u = 2x + 1 \implies du = 2dx$, iar $v' = e^{x-1} \implies v = e^{x-1}$. Așadar, $F(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^{x-1} - (2x + 1) \cdot e^{x-1} + 2 \int e^{x-1} dx = (x^2 - x) \cdot e^{x-1} + C, x \in (1, \infty)$.

În concluzie, $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ (x^2 - x) \cdot e^{x-1} + C, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$ este familia de primitive ale

funcției f .

314. Funcția cosinus este continuă pe $\mathbb{R} \implies f$ admite primitive pe întreg domeniul

de definiție. Aplicând funcția cosinus asupra lui $\frac{2\pi}{3}f(x)$, obținem $\cos\left(\frac{2\pi}{3}f(x)\right) = f(x)$,

deoarece numărul de funcții cosinus din expresia funcției f este $n, n \rightarrow \infty$, iar aplicarea funcției trigonometrice încă o dată va duce la aceeași expresie, deci $f(x) = \frac{1}{2}$. Așadar,

primitiva lui f este $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x + C$. Aceasta nu este o funcție periodică.

315. Funcția arcsinus este continuă pe $\mathbb{R} \implies$ domeniul de primitivabilitate este \mathbb{R} .

Pentru a calcula primitiva, folosim substituția $x = \sin t \implies dx = \cos t dt$. Așadar,

$\int x \arcsin x dx = \int t \cdot \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin 2t dt$. Considerăm, apoi, următoarea in-

tegrare prin părți $u = t \implies du = dt$, iar $dv = \sin 2t \implies v = -\frac{1}{2} \cos 2t dt$. Așadar,

$F(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2t\right) - \frac{1}{2} \cdot \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = -\frac{t}{4} \cdot \cos 2t + \frac{1}{8} \cdot \sin 2t + C$.

Știind că $x = \sin t$, obținem $\begin{cases} t = \arcsin x, \\ \cos 2t = 1 - 2x^2, \\ \sin 2t = 2x\sqrt{1 - x^2}. \end{cases}$

În concluzie, $F(x) = \frac{\arcsin x}{4} \cdot (2x^2 - 1) + \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - x^2} + C$.

316. Integrăm și rescriem funcția în următorul mod: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int \frac{x \cdot (x^2+9)}{\sqrt{x^2+9}} dx - \int \frac{9x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sqrt{x^2+9} dx - \frac{9}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} dx$. Folosim în rezolvarea ambelor integrale substituția $t = x^2 + 9 \implies dt = 2x dx$. Așadar, $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{3} (x^2+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} \sqrt{x^2+9} + C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+9} \cdot (x^2 - 18) + C$.

317. Pentru a calcula limita dată, vom folosi Teorema de medie.

Folosind faptul că f continuă pe $[n, n+1] \implies \exists k \in [n, n+1]$ astfel încât $\int_n^{n+1} f(x) dx = (n+1 - n) \cdot f(k) = e^{1-k^2}$. Observăm că $k \in [n, n+1] \implies$ când $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Aplicând limita, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1-k^2} = 0$. Primitiva funcției date este similară cu cea a lui Poisson și asemeni acelei integrale, nici acesta nu poate fi exprimată prin intermediul funcțiilor elementare. Primitiva funcției nu are puncte de extrem.

318. Limitele laterale în $x = 0$ nu există, deci $x = 0$ este un punct de discontinuitate de speța a II-a. Cum g este o funcție cu proprietatea lui Darboux, g admite primitive.

319. Cu schimbarea de variabilă $t = \sin x, dt = \cos x dx, F(x) = \int \frac{1}{4t^2 + 10t - 3} dt = \int \frac{1}{\left(2t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}} dt$. Folosim, apoi, substituția $u = 2t + \frac{5}{2}, du = 2dt$ și avem $F(u) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2} du = \frac{1}{2\sqrt{37}} \ln \left| \frac{u - \frac{\sqrt{37}}{2}}{u + \frac{\sqrt{37}}{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{37}} \ln \left| \frac{\sin x + 5 - \frac{\sqrt{37}}{2}}{\sin x + 5 + \frac{\sqrt{37}}{2}} \right| + C$

320. Folosim substituția $x = \operatorname{tg} t \cdot \sqrt{2}, dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt, F(t) = \int \frac{1}{(2\operatorname{tg}^2 t + 1)\sqrt{2\operatorname{tg} t + 2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{(2\operatorname{tg}^2 t + 1)\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 t + 1}{\cos^2 t} \cdot \cos t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t + 1} dt$. Folosim, apoi, substituția $u = \sin t, du = \cos t dt$ și avem $F(u) = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg} \left(\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) + C$. Folosim faptul că $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, F(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$. De asemenea, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \implies F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot C$.

321. Folosim substituția $t = x^2 \implies dt = 2x dx, F(t) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt =$

$$\frac{\arcsin t}{2} + C = \frac{\arcsin x^2}{2} + C.$$

322. Din condiția de continuitate a funcției f obținem $m = -n$.

$$F(x) = \begin{cases} m \cdot \frac{x^3}{3} + nx + C_1, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 2(x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)) + C_2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Din condiția de continuitate a funcției F , obținem $-\frac{m}{3} - n + C_1 = 2 + C_2$. Fixând $C_1 = 0$, obținem $C_2 = \frac{2m}{3} - 2$.

$$F(x) = \begin{cases} m \cdot \frac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 2(x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)) + \frac{2m}{3} - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

323. Folosim substituția $u = \sqrt{x^2 + 1} \implies du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. $F(u) = \int \frac{1}{u^2 - 1} du =$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u+1} du = \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| + C. \text{ În concluzie, familia de prim-$$

itive ale lui f este $F(x) = \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 1} - 1| - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 1} + 1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right| + C$.

324. $\left| \frac{1}{t^2} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin x) dx \right| \leq \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t \sqrt{x} dx + \int_0^t |\sin x| dx \right) \leq \frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + t \right)$

325. $\frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \frac{x^{2019} - x^{2020}}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \frac{x^{4040} + x^{2019} - x^{4040} - x^{2020}}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)}$

$$= \frac{x^{2019}(x^{2021}+1) - x^{2020}(x^{2020}+1)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \frac{x^{2019}}{x^{2020}+1} - \frac{x^{2020}}{x^{2021}+1}.$$

Atunci $\int_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} dx = \int_0^n \frac{x^{2019}}{x^{2020}+1} dx - \int_0^n \frac{x^{2020}}{x^{2021}+1} dx = \frac{1}{2020} \ln(x^{2020} + 1) \Big|_0^n - \frac{1}{2021} \ln(x^{2021} + 1) \Big|_0^n = \frac{1}{2020} \ln(n^{2020} + 1) - \frac{1}{2021} \ln(n^{2021} + 1) = \ln \sqrt[2020]{n^{2020} + 1} -$

$$\ln \sqrt[2021]{n^{2021} + 1} = \ln \frac{\sqrt[2020]{n^{2020} + 1}}{\sqrt[2021]{n^{2021} + 1}} = \ln \frac{n \cdot \sqrt[2020]{1 + \frac{1}{n^{2020}}}}{n \cdot \sqrt[2021]{1 + \frac{1}{n^{2021}}}} = \ln \frac{\sqrt[2020]{1 + \frac{1}{n^{2020}}}}{\sqrt[2021]{1 + \frac{1}{n^{2021}}}}. \text{ Astfel,}$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[2020]{1 + \frac{1}{n^{2020}}}}{\sqrt[2021]{1 + \frac{1}{n^{2021}}}} = \ln 1 = 0.$$

326. Din $\int f(x) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}(x+1) + C$ rezultă, utilizând regula lui

L'Hôpital, că $L = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(y+1) - \frac{\pi}{4}}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y+1} = 0$.

327. Funcția f este pară, deci $a = 2 \int_0^1 f(x) dx$. Deoarece $x \in [0, 1]$, avem $x^{2022} \leq x^2$. Astfel, $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^{2022}} \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Integrând aceste relații, obținem $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$. Rezultă $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$. Înmulțind cu 2, avem $\frac{\pi}{2} \leq a \leq 2$. Deci afirmațiile **[A]** și **[B]** sunt adevărate.

Integrăm prin părți $\int_0^1 f(x)f''(x) dx = [f(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)f'(x) dx$. Rezultă că avem $\int_0^1 f(x)f''(x) dx + \int_0^1 (f'(x))^2 dx = [f(x)f'(x)]_0^1$. Cum $f'(x) = -\frac{2022x^{2021}}{(1+x^{2022})^2}$, pentru $x = 0$ și $x = 1$, avem $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = -\frac{2022}{4}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Rezultă $b = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2022}{4} \right) - 1 \cdot 0 \right] = -\frac{1011}{4}$. Deci afirmația **[D]** este adevărată.

328. Folosim substituția $\ln x = t \implies x = e^t \implies dx = e^t dt$. Rescriem: $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$. Deoarece $t \in [0, 1]$, avem $e^t \leq e$. Astfel, $0 \leq t^n e^t \leq t^n e$, $t \in [0, 1]$. Integrând această inegalitate, obținem $0 \leq \int_0^1 t^n e^t dt \leq \int_0^1 t^n e dt$. Rezultă $0 \leq a_n \leq e \int_0^1 t^n dt = e \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$. Folosind Teorema cleștelui, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Deci afirmația **[B]** este adevărată. Calculăm a_{n+1} folosind integrarea prin părți: $a_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$. Rezultă $a_{n+1} = e - (n+1)a_n \implies a_n = \frac{e - a_{n+1}}{n+1}$. Observăm că pentru $n \rightarrow \infty$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = e$. Deci afirmația **[D]** este adevărată.

329. Cu substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt$. Adunând cele două expresii pentru I_n , avem $2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, deci $I_n = \frac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Afirmațiile **[A]**, **[B]** și **[C]** sunt adevărate.

330. Integrala devine: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$. Folosim substituția $t = \cos x$, deci $dt = -\sin x dx$. Scriem integrala: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$; Aceasta se poate scrie: $\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[t + \frac{1}{t} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) - (1 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

331. Integrând prin părți, cu $f(x) = \ln x$, și $g'(x) = x^n$ obținem $I_n = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{\frac{1}{e}}^1 -$

$\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$. Astfel, obținem limita $L = 0$.

Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n} dx$ se reduce la $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cdot \cos nx\right) \Big|_0^1 = 0$

332. Realizăm schimbarea de variabilă $t = \sin(\sin x)$, $dt = \cos(x) \cos(\sin x) dx$, iar rezultatul integralei nedefinite este $\frac{1}{2} \sin^2(\sin x)$. Evaluând integrala de la 0 la π , rezultatul este 0.

333. Folosind substituția $t = x^2$ obținem $\frac{a}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{a \cdot \pi}{8} = \frac{\pi}{16} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

334. Știind că $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \dots \sin \frac{x}{2^{n-1}} = 2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}$.

Înmulțind aceste egalități, obținem $\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{x}{2^k}\right)$. Luând $n \rightarrow \infty \Rightarrow$

$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{x}$. Astfel integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \Rightarrow I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

335. Separând termenii, obținem $\int_0^1 \frac{1}{x+3} - \frac{7}{x+3} dx = 1 - 7 \cdot (\ln 4 - \ln 3)$.

336. Pentru $f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, folosim integrarea prin părți, unde $f(t) = e^{-t}$, $g'(t) = \sin(t)$, de

unde obținem $-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$. Pentru $\min f(x, 1)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

observăm atât din rezolvarea anterioară, cât și din faptul că $e^{-x} \sin x$ este întotdeauna pozitiv în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x, 1)$ este strict crescător pe acest interval. Minimul apare când $x = 0 \Rightarrow f(0, 1) = 0$.

337. Cu substituția $u = 1 + \cos t$, $du = -\sin t dt$, integrala devine $-2 \int_2^{2+\sqrt{2}} \frac{u-1}{u} du =$

$2 - \sqrt{2} + 2 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ Frația devine $\frac{2 \sin t \cos t}{1 + 2 \cos \frac{t}{2} - 1}$. Folosind substituția $u = \frac{t}{2}$, integrala

devine $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2u - \operatorname{tg} u du = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} + 1$.

338. Funcția nu este definită pentru $x \in (-1, 1)$, deci nu trece prin origine. Totodată,

funcția este crescătoare pe $[1, 2]$. Aria este dată de $I = \int_1^2 \sqrt{x^2-1} dx$. Folosind inte-

grarea prin părți, cu $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g'(x) = 1 \Rightarrow I = \sqrt{x^2-1} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x dx =$

$2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 2 + \sqrt{3}$.

339. Înlocuind $\operatorname{tg} x$ cu $\frac{\sin x}{\cos x}$, obținem: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x} dx$. Folosim schimbarea

de variabilă $t = \sin x \Rightarrow \int_0^1 \frac{t}{1 + (m^2 - 1)t^2} dt$. Folosim altă substituție $u = t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + (m^2 - 1)u} du$. Integrând, obținem $\frac{\ln m}{m^2 - 1}$.

340. Folosind formula de integrare prin părți: $\int u dv = uv - \int v du$, cu $u =$

$\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ și $dv = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow A = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \left[\arcsin \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) \cdot \operatorname{arctg}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{arctg}(x) \cdot \frac{2}{1+x^2} dx$. Efectuând calculele, obținem $A = \frac{\pi^2}{8} - 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. Folosim substituția $t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2} dx \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{8} - 2 \cdot \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{\pi}{4}$.

341. Folosim substituția $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow$ integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

342. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{1+\operatorname{tg}^q x} = \frac{\cos^q x}{\cos^q x + \sin^q x}$. Cum $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)} dx = \frac{b-a}{2} \Rightarrow$ integrala este egală cu $\frac{\pi}{4}$, indiferent de valoarea lui q . Astfel, $s_k = k \cdot \frac{\pi}{4}$.

343. $\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{x}}} = x^{-\frac{1}{2^n}}$. Pentru $x \in [0, 3]$, $f(x)$ este continuă. $f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^3 x^{-\frac{1}{2^n}} dx = 3 = \sqrt{9}$. $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{9}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x \sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos x \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 3 \cos 0 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

344. Din $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$ (sau din graficul funcției), observăm punctele de intersecție $x = 0$

și $x = 1$.

Parabola roșie corespunde funcției $f(x) = x^2$, iar cea albastră $y = \sqrt{x}$ și $y = -\sqrt{x} \rightarrow g(x) = \sqrt{x}$ (pt. $y > 0$). $\Rightarrow S = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2| dx = \frac{1}{3}$. Similar pentru $M =$

$\int_0^2 |2x - x^2| dx = \frac{4}{3}$. $T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^3(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (1 - \sin^2(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cdot \cos x dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

345. Cum funcția de integrat este pară obținem $I = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x} \sin x dx$, deci

$$I = \frac{4\sqrt{2}}{3} (1 - \cos x) \frac{3}{2} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}.$$

346. Graficele celor două funcții se intersectează în punctele de abscisă $x = 0$ și

$x = \frac{\sqrt{a}}{1+a}$. Aria regiunii este egală cu $\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{1+a}} |f(x) - g(x)| dx = \frac{a\sqrt{a}}{6(1+a)^2}$. Maximul acestei expresii se atinge pentru $a = 3$.

347. Avem $1+x \leq \frac{1}{x}, \forall x \in \left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ și $\frac{1}{x} \leq 1+x, \forall x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$, deci

$$I = \int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1+x)dx + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \ln x \Big|_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 = \frac{3+\sqrt{5}}{20} + \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

348. Împărțim triunghiul în două - între punctele $x = 0, x = 1$ și $x = 1, x = 2$

și obținem două triunghiuri dreptunghice. Pentru triunghiul stâng, calculăm aria între

$y = x$ și $y = 0$, iar pentru triunghiul din partea dreaptă $y = 2 - x$ și $y = 0$. $S = \int_0^1 (x-0) dx + \int_1^2 [(2-x)-0] dx$.

349. Folsind inegalitatea mediilor $m_g \leq m_a$, rezultă că $(x^2 f(x) - x f^2(x)) = x f(x) \cdot$

$$(x - f(x)) \leq x \cdot \left(\frac{f(x) + x - f(x)}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4} \cdot \int_0^1 (x^2 f(x) - x f^2(x)) dx \leq \int_0^1 \frac{x^3}{4} dx = \frac{1}{16}.$$

350. Expresia de sub integrală $x \sqrt{x^{\ln x}} \sqrt[3]{x^{\ln^2(x)}} \sqrt[4]{x^{\ln^3(x)}} \sqrt[5]{\dots}$ poate fi rescrisă ca și

$$x^1 \cdot x^{\frac{\ln x}{2}} \cdot x^{\frac{\ln^2(x)}{3 \cdot 2}} \dots = x^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^{n-1}}{n!}} = x^{\frac{1}{\ln x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!} = e^{\ln x} - 1 = x - 1. \text{ Astfel avem: } \int_0^1 \frac{1}{x \ln x^{(x-1)}} dx =$$

$$\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{x-1}} dx = \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

351. $f(x) = \frac{f(ex)}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(ex)}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^e f(u) du \cdot \frac{1}{e} = e \Rightarrow$

$$\int_0^e f(u) du = 3e^2$$

Scădem din ultima integrală $\int_0^1 f(u) du = e \Rightarrow \int_1^e f(u) du = 3e^2 - e$

352. $\int_0^2 x^t dt = \frac{x^t}{\ln x} \Big|_0^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \ln x$. Notăm $f(x) = x^2 - 1 - 3 \ln x$. Pentru

a obține rădăcinile funcției: $f(x) = 2x - \frac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\text{card } S} |s_k| =$

$$2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6} \geq 2 \text{ și } \prod_{k=1}^{\text{card } S} 2^{s_k} = 2^0 = 1.$$

353. $\int_x^{x^2} (2t^2 + 1) \cdot e^{t^2} dt = \int_x^{x^2} 2t^2 \cdot e^{t^2} dt + \int_x^{x^2} e^{t^2} dt$. Deoarece $\int_x^{x^2} e^{t^2} dt$ nu este

elementară, vom rescrie prima integrală ca $\int^{x^2} t \cdot 2t \cdot e^{t^2} dt$. Folosind integrarea prin părți $u = 2t \cdot e^{t^2}$, rezultă că $\int_x^{x^2} 2t^2 \cdot e^{t^2} dt + \int_x^{x^2} e^{t^2} dt = t \cdot e^{t^2} - \int_x^{x^2} e^{t^2} dt + \int_x^{x^2} e^{t^2} dt = t \cdot e^{t^2} \Big|_x^{x^2} = x^2 e^{x^4} - x e^{x^2} = 0$, de unde obținem cele două soluții $x = 0$ și $x = 1$.

354. Integrala I se desparte în $\int_1^4 \frac{e^x}{x + e^x} dx - \int_1^4 \frac{e^x}{(x + e^x)x} dx = \int_1^4 \frac{e^x + 1 - 1}{x + e^x} dx - \int_1^4 \frac{e^x + x - x}{(x + e^x)x} dx = \int_1^4 \frac{e^x + 1}{x + e^x} dx - \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln 4 + e^4 - \ln 1 + e - \ln 4 = \ln \left(\frac{4 + e^4}{4(1 + e)} \right)$, folosind substituția $t = x + e^x$.

Pentru integrala J , adunăm și scădem 2, obținând $\int_0^3 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} dx - 2 \int_0^3 \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \ln x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x + 1} \Big|_0^3 = \ln \left(\frac{16}{\sqrt{e^3}} \right)$. \boxed{A} este singurul răspuns corect.

355. Vom folosi substituția $u = f^{-1}(x) \Rightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u)du = dx$. Integrala devine $\int_1^e u \cdot f'(u) du = u \cdot f(u) - F(u) \Big|_1^e = e \cdot f(e) - 1 - f(1) = e - 1$

356. Folosim substituția $u = e^{e^x} \Rightarrow du = e^{e^x} \cdot e^x dx$. Integrala devine $\int_0^e e^u du = e^{e^{e^x}} \Big|_0^e = e^{e^{e-1}}$.

357. Folosim substituția $u = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{3} \arcsin u \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{9}$.

358. $I(0) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$; $I(t) + I(-t) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1 + e^{tx}} + \frac{e^{tx}}{1 + e^{tx}} \right) dx = \int_{-1}^1 dx = 2, \forall t \in \mathbb{R}$;

Cu schimbarea de variabilă $x = -u$, rezultă $I(-t) = I(t), \forall t \in \mathbb{R}$, deci $I(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$;

Prima afirmație este falsă.

359. $\int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{\text{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = \frac{1}{3} \text{tg}^3 x + \text{tg} x - 2 \text{ctg} 2x + C$. Utilizând formula Leibniz-Newton, se obține $I = \frac{4}{3}(2\sqrt{3} - 1)$.

360. Din $\int f(x) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \arctg(x+1) + C$ rezultă, utilizând regula lui

L'Hôpital, că $L = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\arctg(y+1) - \frac{\pi}{4}}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y+1} = 0$.

361. Derivând obținem $e^{-x^2} > 0$, deci funcția este strict crescătoare și nu are puncte de extrem (finite).

362. Integrala se poate rescrie ca $I = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(x^{\frac{2}{3}} + 1)^3 dx$. Folosind substituțiile lui

Cebâșev, $m = \frac{-3}{4}$, $n = \frac{2}{3}$ și $p = 3$. Deci, facem schimbarea de variabilă $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$. Astfel, $I = 12 \int_0^1 t^2(t^8 + 1)^3 dt = 12 \int_0^1 t^{26} + 3t^{18} + 3t^{10} + t^2 dt = \frac{18080}{1881}$. Cum $[\frac{18080}{1881}] = 9$, obținem varianta \boxed{C} ca fiind singura corectă.

363. Integrala este, de fapt, $I = \int_1^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. Realizăm schimbarea de variabilă $u =$

$x^2 + 1$ și integrala devine $I = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_2^5 u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{8\sqrt{5}}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{15}$.

364. Notăm $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^n x}{2 + \sin^n x + \cos^n x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - x$

implică $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^n t}{2 + \cos^n t + \sin^n t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - I_n$, deci $I_n = \frac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

365. $\frac{x^{2n}}{1+1} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{x^2+x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, implică $\frac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq$

$\frac{1}{2(2n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)I_{n+1}}{nI_n} =$

1. Din $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1) - x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n} dx - I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

deducem $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} =$

$\frac{-2}{(2n+1)(2n-1)}$, $\forall n \geq 2$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(I_{n+1} - I_{n-1}) = -\frac{1}{2}$.

366. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x^n \geq x^{n+1}$, $\forall x \in [0, 1]$, deci $I_n \geq I_{n+1}$. Așadar, șirul este

monoton descrescător. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e^{-x} \leq 1$, $\forall x \in [0, 1] \implies I_n \leq \int_0^1 x^n dx =$

$\frac{1}{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. Integrând prin părți, $(n+1)I_n = x^{n+1}e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} dx =$

$e^{-1} + I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ținând cont de limita anterioară, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e^{-1}$. Relația anterioară

poate fi rescrisă $\frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{e^{-1}}{(n+1)I_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ținând cont de limita anterioară,

avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

367. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{\frac{\sin^2 x}{x^2 + \sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} dx$

$= \arctg\left(\frac{x}{\sin x}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \arctg\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \arctg\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \arctg\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \arctg\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$

368. Rescriem S_n ca $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} dx$. Schimbăm ordinea sumei și obținem $S_n =$

$\sum_{k=1}^n k \int_0^{\frac{1}{\ln 2}} x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\ln^k x}$. Cum $\frac{1}{\ln 2}$ este mai mare decât 1, fiecare termen al sumei va fi mai mare decât cel anterior, astfel suma va crește exponențial bazată pe n . Din asta

rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Deci **[A]** adevărată și **[B]** falsă. Aplicând formula termenului

general într-o progresie geometrică, obținem $S_n = \frac{(\frac{1}{\ln 2})^{n+1} - \frac{1}{\ln 2}}{\frac{1}{\ln 2} - 1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{e^{n \ln 2}} \frac{1}{k} \cdot S_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \cdot S_n$. Dar cum S_n crește exponențial, iar $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ crește logaritmic, produsul lor va fi divergent și va tinde spre infinit.

369. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ și $\int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{2021}^{\frac{1}{2021}} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} dt$.

$\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^2+1} dt = \int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{-\ln t}{t^2+1} dt = -\int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln t}{t^2+1} dt = -\int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$. În

consecință $\int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$.

370. Folosind formula de integrare prin părți, se obține $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x(\operatorname{tg}^2 x + 1) - x) dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\operatorname{tg} x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \left(x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$. Rezultă $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{8\pi - 16 \ln 2 - \pi^2}{32}$. Așadar $I < \frac{\pi}{4}$. Din faptul că $I > 0$, se obține inegalitatea

$8\pi > 16 \ln 2 + \pi^2$. În concluzie, doar afirmația **[C]** este adevărată.

371. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că $0 \leq x^n e^x \leq x^n \cdot e$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, rezultă

$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \cdot e dx = \frac{e}{n+1}$. Așadar $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. Afirmația **[A]** este deci falsă și **[B]** adevărată.

Folosind formula de integrare prin părți, se obține, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, egalitatea $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, deci $nI_n = e - I_n - I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Ținând cont de faptul că

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, prin trecere la limită cu $n \rightarrow \infty$ în egalitatea de mai sus, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$,

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n > 2$. Afirmația **[C]** este deci falsă și **[D]** adevărată.

372. Din $\int f(x) dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \operatorname{arctg} e^x + C$ se obține că $I_n = \operatorname{arctg} e^{n+1} -$

$\arctg e^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $\arctg x > 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă $I_n < \arctg e^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Afirmatia **A** este deci adevărată. Ținând cont de faptul că $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, se deduce din I_n că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, prin urmare și afirmația **B** este adevărată.

Întrucât $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. De aici se obține inegalitatea $I(n) < f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Așadar afirmația **C** este falsă. Aplicând regula lui L'Hospital, se obține $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}} = 0$, de unde se deduce că $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(n) = 0$. De aici și din inegalitățile $0 \leq n I(n) \leq n f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} n I(n) = 0$.

Afirmația **D** este deci adevărată.

$$\begin{aligned} 373. \quad & \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx \\ & = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx \\ & = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x + C. \text{ Utilizând formula Leibniz-Newton, se obține } I = \frac{4}{3} (2\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 374. \quad & \text{Avem } \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + x^2 + 2x + 3} dx = \int_0^1 \frac{(e^x + x^2 + 2x + 3) - (e^x + 2x + 2)}{e^x + x^2 + 2x + 3} dx = \\ & \int_0^1 \left(1 - \frac{(e^x + x^2 + 2x + 3)'}{e^x + x^2 + 2x + 3} \right) dx = [x - \ln(e^x + x^2 + 2x + 3)] \Big|_0^1 = 1 - \ln(e + 6) + \ln 4 = \\ & 1 - \ln(e + 6) + 2 \ln 2 = \ln \frac{4e}{e + 6}. \text{ Deci răspunsurile corecte sunt } \boxed{\text{B}}, \boxed{\text{D}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 375. \quad & \text{Integrând prin părți obținem } \int x \cdot \left(\frac{-\cos x}{\sin x} \right)' dx = -x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \\ & a = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$376. \quad \text{Folosind substituția } t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x} = \frac{3}{2} \ln 1 + \sqrt[3]{x^2} + C \Rightarrow L = \frac{3}{2} \cdot \ln 2.$$

$$\begin{aligned} 377. \quad & \text{Folosind schimbarea de variabilă } x^5 + 1 = t \Rightarrow \int \frac{x^4}{x^{10} + 2x^5 + 2} dx = \frac{1}{5} \arctan t + \\ & C \Rightarrow L = \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 378. \quad & \text{Fie } b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx \Rightarrow a + b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cdot \cos x) dx = \frac{\pi - 1}{2} \Rightarrow a = \\ & - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt \Rightarrow 2a = \frac{\pi - 1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi - 1}{4}. \end{aligned}$$

$$379. \quad I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n \cdot (1-x) \cdot (1-x^{2n+1})}{(1+x^{2n}) \cdot (1+x^{2n+2})} dx \geq 0 \Rightarrow I_n \geq I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ este descrescător } \Rightarrow I_n \leq I_1, \forall n \in \mathbb{N}^*. I_1 = \ln \sqrt{2}. \text{ Cum } 0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \Rightarrow$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$

380. Folosim substituția $x = \frac{\pi}{4} - t$. Atunci $dx = -dt$ și integrala devine: $I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{\pi}{4} - t}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - t}{1 + \cos 2t} dt.$$

Folosim formula unghiului dublu, apoi separăm integrala în două părți: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - t}{1 + \cos 2t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}}{2 \cos^2 t} dt =$

$$\frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} dt.$$

Pentru prima parte: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$. Pentru a doua parte folosim integrarea prin părți: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} dt = [t \tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt =$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Rezultatul este suma celor două părți: $I = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}\right) = \frac{\ln 2}{4}$

381. Folosim substituția $a - x = t$. Atunci $dx = -dt$ și integrală devine:

$$I = - \int_a^{-a} \frac{t + t^3 + \dots + t^{2021}}{1 + t^2 + \dots + t^{2022}} dt = \int_{-a}^a \frac{t + t^3 + \dots + t^{2021}}{1 + t^2 + \dots + t^{2022}} dt.$$

Observăm că funcția $f(t) = \frac{t + t^3 + \dots + t^{2021}}{1 + t^2 + \dots + t^{2022}}$ este impară, deoarece: $f(-t) = -f(t)$. Astfel, integrala unei

funcții impare pe un interval simetric este zero: $I = \int_{-a}^a f(t) dt = 0$

382. Folosim substituția $t = \frac{\pi}{2} - x$. Știind că $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, obținem: $I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt.$$

Deci, $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x) \cos(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx$. Folosind

$$\text{apoi substituția } t = 2x, \text{ obținem: } 2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2) +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt.$$

Pentru integrala rămasă, folosim substituția $x = t - \frac{\pi}{2}$. $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$

În concluzie: $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

383. Fie $f(x) = \frac{x^{2024}(1 - e^x)}{1 + e^x}$. Observăm că $-f(x) = f(-x)$, adică f este o funcție

impară. Prin integrarea acesteia pe un interval simetric, vom obține 0.

384. Folosim următoarea formulă: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$. Obținem, astfel:

$$2I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Folosind schimbarea de variabilă $t = \sin x$, obținem: $I = \frac{\pi^2}{4}$.

385. Folosim substituția $t = \frac{\pi}{2} - x \implies dt = -dx$. Obținem: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} dt$.

Adăugând cele 2 ecuații pentru I, obținem: $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

În concluzie, $I = \frac{\pi}{4}$.

$$386. \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^n} dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx.$$

Prin părți, $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} \Big|_0^1 + \frac{1}{2n-2} \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx = -\frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$. Înlocuind apoi în ecuația inițială, obținem $I_n = I_{n-1} + \frac{2^{-n+1}}{2n-2} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$. În concluzie, $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$. Conform Teoremei de medie, $I_n = \frac{1}{(k^2 + 1)^n}$, $k \in (0, 1)$. În concluzie, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

$$387. \quad I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{1-x})}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{1-x})}{\sqrt{x}} dx.$$

Integrând prin părți cu $u = \ln(1 + \sqrt{1-x})$, $u' = \frac{-1}{(2\sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}$, $v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $v = 2\sqrt{x}$, avem $I = 2\sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{1-x}) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} dx$. Cu

substituția $t = \sqrt{1-x}$, $x = 1 - t^2$, $dx = -2tdt$, integrala devine $I = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(1+t) \cdot t} \cdot (-2t) dt = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$. Cu substituția $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sin x} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) dx = \pi - 2$.

388. Notăm cu I integrala din interiorul limitei. Cu substituția $t = x^2$, $dt = 2x dx$, $I =$

$$\frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt. \text{ Substituind } t = \sin u, dt = \cos u du, I = \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin a^2} \frac{\sin^4 u \cdot \cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\arcsin a^2} \frac{\sin^4 u \cdot \cos u}{\cos u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin a^2} \sin^4 u du = \frac{1}{8} \int_0^{\arcsin a^2} (1 - \cos 2u)^2 du = \frac{1}{8} \cdot$$

$$\int_0^{\arcsin a^2} (1 - 2\cos 2u + \cos^2 2u) du = \frac{1}{8} \int_0^{\arcsin a^2} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2u + \frac{1}{2} \cos 4u \right) du. \text{ Aplicând}$$

$$\text{limita, obținem } L = \left(\frac{3}{16} u - \frac{1}{2} \sin 2u + \frac{1}{16} \sin 4u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{32}.$$

$$389. \quad t = 1-x, dt = -dx, I = - \int_1^0 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \ln \left(\frac{1-t}{t} \right) dt = - \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \ln \left(\frac{t}{1-t} \right) dt.$$

$$\text{Prin adunare, obținem } 2I = \int_0^1 \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) dx = \int_0^1 \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \cdot$$

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x} \cdot (1-x)} dx. \text{ Integrând prin părți } u = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right), u' = -\frac{1}{(x-1) \cdot x}, v' = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$v = -2\sqrt{x-x^2}. 2I = \left(\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \cdot (-2\sqrt{x-x^2}) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x-x^2}}{(x-1) \cdot x} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x) \cdot x}} dx. \text{ Așadar, } I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x) \cdot x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx.$$

$$\text{În final, cu } x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt, I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sin t\right)^2}} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \pi.$$

390. Folosim substituția $t = \frac{1}{x} \implies dx = -\frac{1}{t^2} dt$. $I = \int_{2024}^{\frac{1}{2024}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{t^{2024}}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{2024}^{\frac{1}{2024}} \frac{-t^{2024}}{(t^2 + 1)(t^{2024} + 1)} dt = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{t^{2024}}{(t^2 + 1)(t^{2024} + 1)} dt$. Adunând cele două ecuații pentru I , obținem $2I = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^{2024})} dx + \frac{x^{2024}}{(x^2 + 1)(x^{2024} + 1)} dx$

$$= \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1 + x^{2024}}{(1 + x^2)(1 + x^{2024})} dx = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctg(2024) - \arctg\left(\frac{1}{2024}\right).$$

În concluzie, $I = \frac{1}{2} \left(\arctg(2024) - \arctg\left(\frac{1}{2024}\right) \right)$. Folosim următoarea formulă, $\arctg x - \arctg y = \arctg\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$, pentru $xy > -1$.

Așadar, $I = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2024^2 - 1}{1012}\right)$. $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^{2024})} dx = \frac{\pi}{4}$ deoarece $\arctg x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ când $x \rightarrow \infty$.

391. Folosim următoarea formulă: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$. Obținem, astfel, $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{\sin(2\pi - x)}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{-\sin x}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x}}{1 + e^{\sin x}} dx$. Adunăm cele două ecuații pentru I , avem: $2I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + e^{\sin x}} + \frac{e^{\sin x}}{1 + e^{\sin x}} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{\sin x}}{1 + e^{\sin x}} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$. În concluzie, $I = \pi$.

392. Folosim următoarea formulă: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$. Obținem, astfel, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\right) dx$. Adunând cele două ecuații pentru I , obținem $2I = 0 \implies I = 0$.

393. Valoarea medie a unei funcții continue pe un interval $[a, b]$ este dată de valoarea $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. Pentru a o calcula, folosim metoda integrării prin părți $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}, v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \implies v = 2\sqrt{x}$. Integrala devine $I = 2 \ln x \cdot \sqrt{x} \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

$$2 \cdot \sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{x} \Big|_1^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4.$$

$$394. \quad I_1 = \int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{ Relația de recurență este } I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n+3} e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{2n+2} (e^{x^2})' =$$

$$\frac{1}{2} x^{2n+2} e^{x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (2n+2) e^{x^2} x^{2n+1} dx = \frac{e}{2} - (n+1) \int_0^1 x^{2n+1} e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - (n+1) I_n \implies$$

$$I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1) I_n. \text{ Limita este dată de: } 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1 \implies 1 \leq e^{x^2} \leq$$

$$e \implies x^{2n+1} \leq x^{2n+1} e^{x^2} \leq e \cdot x^{2n+1} \implies \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{2n+2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n =$$

$$0 I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1) I_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{e}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{e}{2}.$$

$$395. \quad I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x \cos x}{1+e^x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \cdot \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx =$$

$$\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{e^{-t} + 1} (-dt) = 1 - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^t \cdot \cos t}{e^t + 1} dt = 1 - I.$$

$$\text{Așadar, } I = 1 - I \implies 2I = 1 \implies I = \frac{1}{2}.$$

$$396. \quad f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 2 \ln \frac{x-1}{x+1} \quad f(-x) = -x^5 - 2 \ln \frac{1+x}{1-x} = -x^5 +$$

$$2 \ln \frac{1-x}{1+x} = -\left(x^5 - 2 \ln \frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x) \implies I = 0.$$

$$397. \quad f(x) = \begin{cases} 3^{-x} \text{ dacă } 3^{-x} \geq 3^x \implies -2x \geq 0 \implies x \in [-1, 0] \\ 3^x \text{ dacă } 3^{-x} < 3^x \implies -2x < 0 \implies x \in [0, 1] \end{cases} \cdot \int_{-1}^1 f(x) dx =$$

$$\int_{-1}^0 3^{-x} dx + \int_0^1 3^x dx = \frac{-3^{-x}}{\ln 3} \Big|_{-1}^0 + \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{-1}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{4}{\ln 3}.$$

$$398. \quad \text{Observăm că termenul general } a_n \text{ se poate rescrie astfel: } a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Așadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$.

Cum f este integrabilă, rezultă că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$399. \quad \text{Termenul general se poate rescrie ca } n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + kn + k^2} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)} =$$

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}}$, așadar ca suma Riemann asociată funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$ a intervalului $[0, 1]$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$.
Cu $t = x + \frac{1}{2}$, $dt = dx$, avem $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

400. Termenul general a_n se poate rescrie astfel: $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k}{n}}$. Așadar, a_n

reprezintă suma Riemann asociată funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2 + x}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln \frac{3}{2} > \ln 1 = 0$. Folosim inegalitatea: $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$ pentru $x = \frac{1}{2}$ și obținem $\ln \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$.

401. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \sqrt[n]{1 + \frac{2k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2k}{n}\right) =$

$$\int_1^3 \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x(\ln x - 1)\right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (\ln 3 - 1) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\ln 1 - 1) = \frac{3}{2} \ln 3 - 1.$$

402. $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{ne^{k/n} + k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{e^{k/n} + \frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x + x}} dx$. Con-

siderăm funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + x}}$, care este continuă pe $[0, 1]$. Fiindcă

funcția este strict descrescătoare pe $[0, 1]$, avem: $\max_{x \in [0, 1]} f(x) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ și

$\min_{x \in [0, 1]} f(x) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e+1}}$. Prin urmare $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e+1}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x + x}} dx \leq \int_0^1 1 dx$ și

obținem $\frac{1}{\sqrt{e+1}} \leq \ell \leq 1$.

403. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 6^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + (3n)^2}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3k}{n}\right)^2}} =$

$$\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx. \text{ Evaluăm integrala: } \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx =$$

$\left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right]_0^3 = \ln \left(3 + \sqrt{10}\right) - \ln 1 = \ln \left(3 + \sqrt{10}\right)$. Astfel, rezultatul final este:

$$\frac{1}{3} \ln \left(3 + \sqrt{10}\right).$$

404. Rescriem limita astfel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\sqrt{2} \frac{k}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\sqrt{2} \frac{k}{n}} = \int_0^1 e^{\sqrt{2}x} dx$. Calculăm

această integrală: $\int_0^1 e^{\sqrt{2}x} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}x} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\sqrt{2}} - 1)$.

405. $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2 + k^2} \right) \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{n^2}{n^2 + k^2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \right)$. Observăm că limita este o sumă

Riemann: $\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

406. Putem rescrie termenul general astfel: $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^p$.

Se observă suma Riemann asociată funcției integrabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$. Așadar,

trecând la limită obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

407. Vom rescrie suma din limită într-o sumă Riemann atașată funcției $f : [0, 5] \rightarrow$

\mathbb{R} , $f(x) = \frac{4x+3}{2x+1}$: $\sum_{i=1}^n \frac{100i+15n}{n^2+10in} = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot \frac{20i+3n}{n+10i} = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot \frac{20 \frac{i}{n} + 3}{10 \frac{i}{n} + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot$

$\frac{4 \cdot \frac{5i}{n} + 3}{2 \cdot \frac{5i}{n} + 1}$. Am obținut astfel suma Riemann atașată lui f , diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{5}{n}, \dots, \frac{5n}{n} \right)$

și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{5}{n}, \dots, \frac{5n}{n} \right)$. Trecând la limită obținem:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{100i+15n}{n^2+10in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot \frac{4 \cdot \frac{5i}{n} + 3}{2 \cdot \frac{5i}{n} + 1} = \int_0^5 \frac{4x+3}{2x+1} dx = \int_0^5 \frac{2(2x+1)+1}{2x+1} dx =$
 $\int_0^5 \left(2 + \frac{1}{2x+1} \right) dx = (2x + \ln 2x + 1) \Big|_0^5 = 10 + \frac{1}{2} \ln 11$.

408. Folosind suma Riemann cu diviziunea $\left\{ \frac{7k}{n} \mid k = \overline{0, n} \right\}$ și sistemul de puncte intermediare $\left\{ \frac{7k}{n} \mid k = \overline{0, n-1} \right\}$ pentru funcția $f : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, limita șirului este

$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(2\sqrt{2}-1)$.

409. Observăm că suma B este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [1, 5] \rightarrow$

\mathbb{R} , $f(x) = \sqrt[4]{1+x^3}$, diviziunii $\Delta_n = \left(1, 1 + \frac{4}{n}, \dots, 1 + \frac{4n}{n} \right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(1 + \frac{4}{n}, \dots, 1 + \frac{4n}{n} \right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[1, 5]$.

$$410. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{kx}{n} = \int_0^1 t \sin(xt) dt, f(x) = -\frac{t \cos(xt)}{x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{x} dt$$

$$= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*. \text{ Afirmația } \boxed{\text{A}}: \int_0^\pi x^2 f(x) dx = \int_0^\pi (-x \cos x + \sin x) dx = 4 \in$$

$$\mathbb{Q}. \text{ Afirmația } \boxed{\text{B}}: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{2x} = 0. \text{ Afirmația}$$

$\boxed{\text{C}}: f$ este continuă pe $(0, \infty)$, deci va admite primitive pe acest interval.

$$411. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3kn + 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2(2 + \frac{3k}{n} + \frac{k^2}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{3k}{n} + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, f$ continuă și integrabilă pe \mathbb{R} . Pentru

fiecare n se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0, 1]$ și $\xi_n =$

$(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n . Pentru fiecare n ,

termenul x_n este suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și sistemului de puncte

intermediare ξ_n , adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ și, cum f este in-

tegrabilă, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx =$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln \frac{4}{3}.$$

$$412. \text{ Înmulțim } x_n \text{ cu } \pi: \pi x_n = \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right). \text{ Pentru}$$

fiecare n , considerăm diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi)$ intervalului $[0, \pi]$ și

punctele intermediare $\xi_k = \frac{k\pi}{n}$ pentru $k = 1, 2, \dots, n-1$: $\pi x_n = \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$. Ob-

servăm că această sumă este o sumă Riemann pentru funcția $f(x) = \sin x$ pe intervalul

$[0, \pi]$. Astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi x_n = \int_0^\pi \sin x dx$. Calculăm integrala: $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi =$

$-\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$. Prin urmare, $\pi \ell = 2 \implies \ell = \frac{2}{\pi}$. Deci afirmația $\boxed{\text{C}}$ este

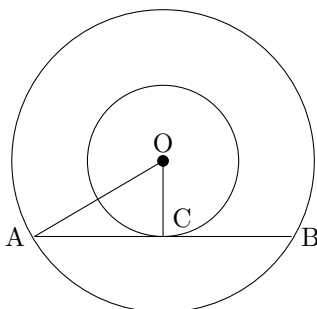
adevărată.

413. Din imaginea de mai jos se poate observa relația dintre cercurile C_i și C_{i+1} , unde

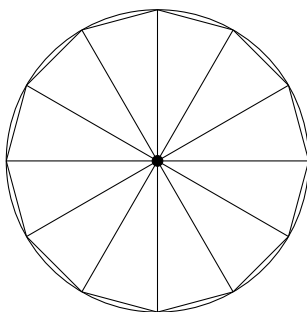
$OC = R_i$ (raza cercului C_i), $OA = R_{i+1}$ (raza cercului C_{i+1}), $AC = CB = 4$. De aseme-

nea, triunghiul AOC este dreptunghic în C de unde rezultă relația între razele cerurilor

C_i și C_{i+1} : $R_{i+1}^2 = R_i^2 + 4^2$. Prin inducție se arată că $R_i^2 = 4 + 16 \cdot (i-1)$.



414. Aria suprafeței colorate este egală cu diferența dintre aria cercului de rază 1 și aria poligonului. Aria poligonului este de 12 ori mai mare decât aria triunghiului isoscel intern cu cele 2 laturi egale de lungime 1 (raza cercului) și unghiul dintre acestea egal cu 30° . De aici rezultă ușor că $\mathcal{A} = \pi - 12 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin(30^\circ)}{2} = \pi - 3$.

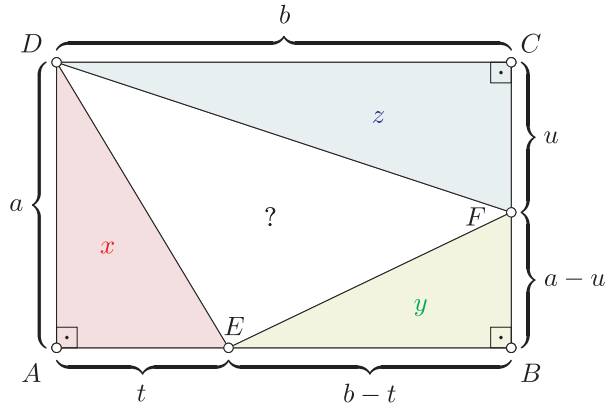


415. Laturile unui triunghi trebuie să respecte inegalitatea $a + b > c$, unde a, b și c sunt lungimile laturilor. De aici rezultă $x > 20 - 11$, $x > 9$ și $20 + 11 > x$, $31 > x \Rightarrow x \in (9, 31)$. Din variantele de răspuns, doar $x = 10$ este corectă.

416. Laturile triunghiului $f(T)$ sunt liniile mijlocii ale triunghiului T . Prin urmare, T și $f(T)$ sunt triunghiuri asemenea, deci A este adevărată. Centrul de greutate al triunghiului T este intersecția medianelor. Deoarece mediana unei laturi înjumătățește linia mijlocie paralelă cu latura, medianele lui $f(T)$ sunt incluse în cele ale lui T . Deci T și $f(T)$ au același centru de greutate. Prin inducție obținem că B este adevărată. Centrul cercului circumscris este intersecția mediatoarelor laturilor, iar în cazul unui triunghi dreptunghic, se află pe ipotenuză. Deci, dacă T este dreptunghic, T și $f(T)$ au

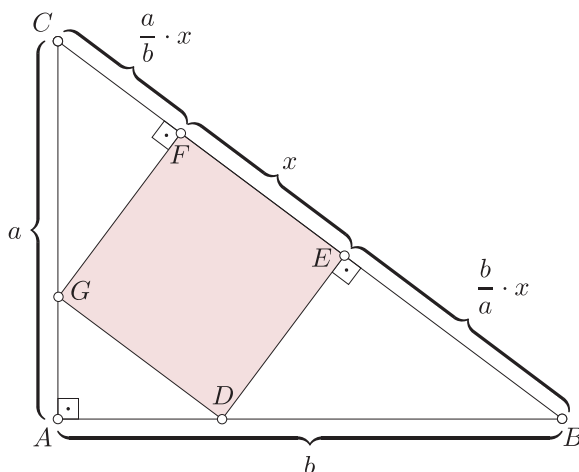
ipotenuze paralele, deci $\square C$ este falsă. Centrul de greutate al triunghiului indicat este $\left(\frac{1+5-6}{3}, \frac{3-4+1}{3}\right)$ deci $\square D$ este adevărată.

417.



Dacă urmărim notațiile figurii, atunci: $\mathcal{A}[AED_{\Delta}] = x = \frac{at}{2} \rightarrow t = \frac{2x}{a}$, $\mathcal{A}[CDF_{\Delta}] = z = \frac{bu}{2} \rightarrow u = \frac{2z}{b}$, $\mathcal{A}[BFE_{\Delta}] = y = \frac{1}{2}(b-t)(a-u) = \frac{1}{2}\left(b - \frac{2x}{a}\right)\left(a - \frac{2z}{b}\right)$, $2(ab)y = ab\left(b - \frac{2x}{a}\right)\left(a - \frac{2z}{b}\right) = ab\left(b - \frac{2x}{a}\right)\left(a - \frac{2z}{b}\right) = (ab)^2 - 2(ab)(x+z) + 4xz$,
 $m := \mathcal{A}[ABCD_{\square}] = ab$, $m^2 - 2m(x+y+z) + 4xz = 0$, $\Delta = 4(x+y+z)^2 - 16xz = 4\left[(x+y+z)^2 - 4xz\right]$, $2\sqrt{xz} < x+y+z > 0$, $m_{1,2} = \frac{2(x+y+z) \pm 2\sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}}{2} = x+y+z \pm \sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$, $\mathcal{A}[ABCD_{\square}] > x+y+z \implies m = m_2 = x+y+z + \sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$, $\mathcal{A}[DEF_{\Delta}] = \mathcal{A}[ABCD_{\square}] - (x+y+z) = m - (x+y+z) = \sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$.

418. Problema se poate rezolva folosind triunghiuri asemenea, iar o posibilă soluție este schițată în figura următoare:



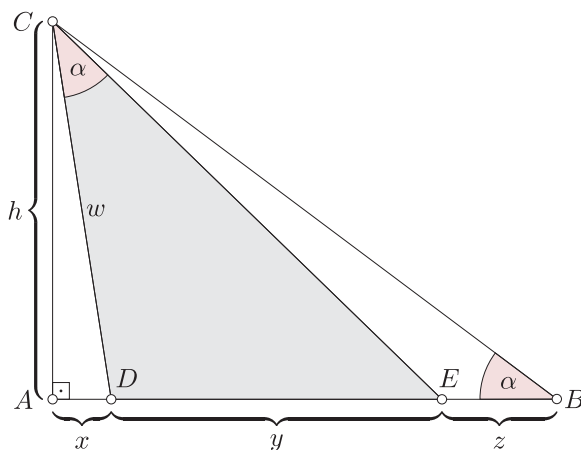
$$\frac{a}{b} \cdot x + x + \frac{b}{a} \cdot x = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)^2}$$

419. **Metoda 1.** Folosim notațiile: $w = CD$, $h = AC$. În acest caz, ideea rezolvării

problemei este aceea de a observa că triunghiurile DBC_{Δ} și DCE_{Δ} sunt asemenea, de

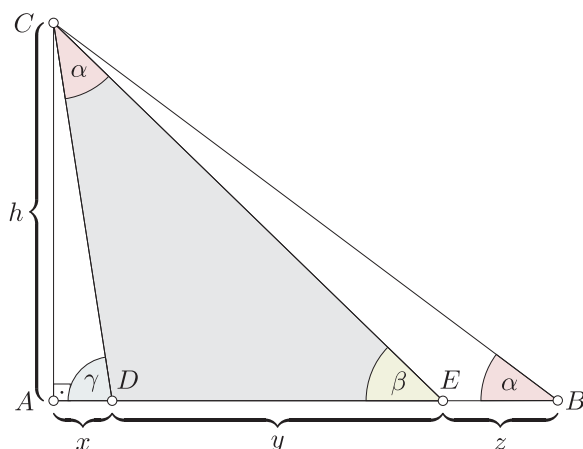
unde se obține că: $\frac{w}{y} = \frac{y+z}{w} \Rightarrow w^2 = y(y+z) \Rightarrow h^2 = w^2 - x^2 = y^2 + zy - x^2 \Rightarrow$

$$\mathcal{A}[CDE_{\Delta}] = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{y^2 + yz - x^2}.$$



Metoda a 2-a. În acest caz, vom folosi identitatea trigonometrică $\tan(\alpha + \beta) =$

$$\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}, \text{ unde } \beta = \widehat{CED}.$$

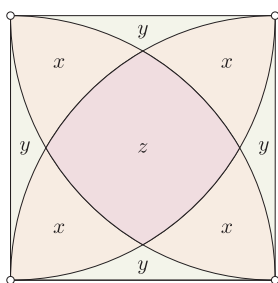


Notând cu γ unghiul $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{CDE} = \pi - [\pi - (\alpha + \beta)] = \alpha + \beta$, din triunghiurile dreptunghice ABC_{Δ} , AEC_{Δ} și ADC_{Δ} obținem că: $\tan(\alpha) = \frac{h}{x+y+z}$, $\tan(\beta) = \frac{h}{x+y}$, $\tan(\gamma) = \frac{h}{x}$. Avem $\frac{h}{x} = \tan(\gamma) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

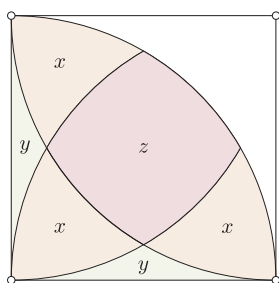
$$= \frac{\frac{h}{x+y+z} + \frac{h}{x+y}}{1 - \frac{h}{x+y+z} \cdot \frac{h}{x+y}} = \frac{(2(x+y) + z)h}{(x+y)^2 + z(x+y) - h^2},$$

$$h^2 = (x+y)^2 + z(x+y) - (2(x+y) + z)x = y^2 + zy - x^2, \quad h = \sqrt{y^2 + zy - x^2}.$$

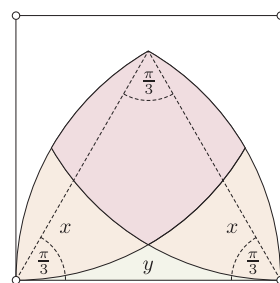
420. Soluția este ilustrată în figura de mai jos:



$$4x + 4y + z = d^2$$



$$3x + 2y + z = \frac{d^2\pi}{4}$$



$$2x + y + z = \left(\frac{d^2\pi}{6} - \frac{d^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{d^2\pi}{6} = \frac{d^2\pi}{3} - \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$$

Soluția sistemului
$$\begin{cases} 4x + 4y + z = d^2 \\ 3x + 2y + z = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ 2x + y + z = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot d^2 \end{cases}$$
 este
$$\begin{cases} x = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot d^2, \\ y = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot d^2, \\ z = \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1\right) \cdot d^2. \end{cases}$$

421. Notăm cu h_a, h_b, h_c lungimea înălțimilor din A, B , respectiv C și cu S aria triunghiului ABC . Avem că $S = \frac{ah_a}{2} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{\frac{bh_b}{2} + \frac{ch_c}{2}}$. Cum $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{rezultă că } h_b = c \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, h_c = b \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}b \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{2a}{\frac{bc\sqrt{3}}{2} + \frac{bc\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{bc\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2c^2} \text{ Putem exprima } a^2 \text{ în funcție de } b \text{ și } c \text{ folosind teorema cosinusului:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - bc}{b^2c^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{bc} \right).$$

Înlocuind în această ultimă relație cu valorile date, obținem: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow h_a = 1$.

422. Cum D se afla pe segmentul AB putem aplica teorema lui Stewart în $\triangle ABC$:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = BC(AD^2 + DB \cdot DC) \Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB - AD^2 \cdot BC =$$

$$BC \cdot DB \cdot DC \Rightarrow (r_1 + r_3)^2 r_1 + (r_2 + r_3)^2 r_2 - (r_1 + r_2 - r_3)^2 (r_1 + r_2) = (r_1 + r_2) r_2 r_1 \iff$$

$$r_1^3 + 2r_1^2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_2^3 + 2r_2^2 r_3 + r_2 r_3^2 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1 r_2 - 2r_2 r_3 - 2r_1 r_3)(r_1 + r_2) = r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2$$

$$\iff r_1^2 r_3 + r_2^2 r_3 + r_1 r_2 r_3 = r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2. \text{ În această ultimă egalitate putem înlocui } r_1 \text{ și } r_3$$

cu valorile lor numerice și vom obține: $4r_3 + r_3 + 2r_3 = 4 + 2 \iff 7r_3 = 6 \iff r_3 = \frac{6}{7}$.

423. Cunoscând lungimea unei laturi într-un triunghi echilateral putem afla aria acestuia: $s = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{48 \sqrt{3}}{4} = 12 \sqrt{3}$. Considerăm acum cele 3 triunghiuri interioare lui ABC formate folosind punctul P ca unul din vârfuri: APB, BPC, CPA .

Aria lui ABC va fi suma ariilor acestor 3 triunghiuri. Ariile a două dintre ele pot fi determinate: $s_1 = \frac{1 \cdot 4 \sqrt{3}}{2} = 2 \sqrt{3}, s_2 = \frac{3 \cdot 4 \sqrt{3}}{2} = 6 \sqrt{3}$. Fie x lungimea celei de

a treia perpendiculară. Aria celui de al treilea triunghi este: $s_3 = \frac{x \cdot 4 \sqrt{3}}{2} = 2x \sqrt{3}$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{3} + 6 \sqrt{3} + 2x \sqrt{3} = 12 \sqrt{3} \Rightarrow x = 2.$$

424. Fie s aria triunghiului ABC . Fie de asemenea O centrul semicercului, D punctul

de tangență pe AB și E punctul de tangență pe BC . Din proprietățile cercului, știm

că $OD \perp AB$ și că $OE \perp BC$. Așadar, putem exprima aria s în următoarele moduri:

$$s = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{OD \cdot AB}{2} + \frac{OE \cdot BC}{2} \Rightarrow AB \cdot BC = r \cdot AB + r \cdot BC \Rightarrow r = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC} = \frac{12}{7}$$

Din teorema lui Pitagora avem că $AC = 5$. $p = \frac{2r}{AC} = \frac{24}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35} > \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

425. Presupunem că ABC este un triunghi nedegenerat. Cum $AN = BN$ și N este

mijlocul lui BC atunci $AN = BN = NC$. Fie acum $x = m(\angle BAN)$ și $y = m(\angle CAN)$. Cum triunghiurile ANB și ANC sunt isoscele vom avea că $m(\angle B) = x$ și $m(\angle C) = y$, dar $m(\angle A) = m(\angle BAN) + m(\angle CAN) = x + y$. Acum folosind faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este π radiani, obținem că: $(x+y) + x + y = \pi \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$, deci $m(\angle A) = \frac{\pi}{2}$. În mod analog se obține că $m(\angle C) = \frac{\pi}{2}$, deci $m(\angle B) = 0$, deci triunghiul ABC este degenerat.

426. Fie $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$. Folosind teorema lui Pitagora avem că $b^2 + c^2 = a^2 = 25$. Aria triunghiului ABC este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$. Acum folosind inegalitatea dintre media geometrică și cea pătratică obținem că: $\sqrt{b \cdot c} \leq \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \Leftrightarrow b \cdot c \leq \frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} \leq \frac{25}{4}$. Deci aria maximă este $\frac{25}{4}$ și se atinge în cazul egalității $b = c$, deci în cazul în care triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

427. Relația $3b^2 + 3c^2 = 2\sqrt{3}bc + 3a^2$ se poate rescrie $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Din teorema cosinusului pentru unghiul A deducem $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Cum $\sin A > 0$, se află $\operatorname{tg} A = \sqrt{2}$.

428. Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul $\triangle ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \Rightarrow BC = 10$. De asemenea, avem $AD = \frac{BC}{2} = 5$, de unde $\triangle ADB$ isoscel și, folosind reciproca teoremei unghiului de 30° , deducem și că $m(\angle B) = \frac{\pi}{6}$. Aplicând relația dată se obține $\frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB} = -\frac{1}{2} = \cos D \Rightarrow \sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Din teorema sinusului în triunghiul $\triangle ADB$ rezultă $\frac{AB}{\sin D} = 2R \Rightarrow R = 5 \neq 4$.

429. Fie $AD = b$, $BD = a$, $AB = d$. Relația dată devine $a(a - \sqrt{2}b) = (d - b)(d + b) \Leftrightarrow a^2 - ab\sqrt{2} = d^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - d^2 = \sqrt{2}ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos ADB \Rightarrow m(\angle ADB) = \frac{\pi}{4}$. Acum se poate calcula ușor că $m(\angle A) = \frac{\pi}{4}$.

430. Fie $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Aplicăm teorema cosinusului pentru unghiul C și avem $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dacă înlocuim cu formele de la \boxed{A} sau \boxed{B} ajungem la ecuații de gradul 2 în m care fie nu au soluții reale (în cazul \boxed{A}), fie au soluții reale negative (în cazul \boxed{B}). Înlocuind cu forma din \boxed{C} se ajunge la o ecuație de gradul 4 în m și se poate arăta că aceasta are 2 soluții reale. Dintre acestea, o soluție este mai mare decât 3, iar pentru această valoare BC , AC și AB pot fi laturile unui triunghi, deoarece

verifică inegalitatea triunghiului. Așadar nici \boxed{C} nu este corect. Raspunsul corect este \boxed{D} .

431. Ținând cont de lungimile lui BC și AC , triunghiul nu poate fi echilateral, deci \boxed{B} este adevărat. Calculăm lungimea lui AB folosind teorema cosinusului pentru unghiul C și obținem

$$\frac{(m^2 + 1)(m^2 + 1) + (m^2 - \frac{1}{2})^2 - c^2}{2(m^2 + 1)(m^2 - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}, \text{ de unde rezultă}$$

$$c^2 = m^4 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}m^2 = AB^2. \text{ Așadar și } \boxed{C} \text{ este corect.}$$

432. Notăm $AB = c, AC = b, BC = a$. Relația dată devine $\sqrt{2}(1 - \frac{b}{c+b}) - \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}$. Ultima este echivalentă cu $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}b}{c+b} - \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}c-a}{c+b} = \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow a(\sqrt{2}c-a) = c^2 - b^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}ac - a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Acum, folosind teorema cosinusului deducem că $m(\angle B) = 45^\circ$, de unde rezultă raspunsul.

433. Fie $AB = c, AC = b, BC = a, c = b$. Relația din ipoteză se scrie $2 + \frac{(a-c)(a+b)}{2b^2} = 0$. Aceasta este echivalentă cu $2 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 3b^2}{2b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2b^2} - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{a^2}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$. Folosind teorema cosinusului deducem $m(\angle A) = \frac{2\pi}{3}$.

434. Fie $a = m^2 + m + 1, b = 2m + 1, c = m^2 - 1$ lungimile laturilor BC, CA și respectiv AB . Aplicăm teorema cosinusului unghiului A și deducem că oricare ar fi $m \in (1, \infty)$, avem $\cos \angle A = \frac{(m^2 - 1)^2 + (2m + 1)^2 - (m^2 + m + 1)^2}{2(m^2 - 1)(2m + 1)} = -\frac{2m^3 - 2m + m^2 - 1}{2(2m^3 - 2m + m^2 - 1)} = -\frac{1}{2}$. Rezultă că oricare ar fi $m \in (1, \infty)$, avem $m(\angle A) = \frac{2\pi}{3}$. Dacă exprimăm cosinusurile altor unghiuri, se observă că expresiile nu vor fi constante pentru $m \in (1, \infty)$. Așadar singurul răspuns este \boxed{B} .

435. Rescriem $\text{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}$ Adică $\text{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \text{ctg}(\angle ABC) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$$\frac{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ} = \frac{\cos \frac{75^\circ}{2}}{\sin \frac{75^\circ}{2}}. \text{ Așadar } \text{ctg} \frac{75^\circ}{2}. \text{ Cum } \text{ctg} \text{ este bijectivă pe } (0, \pi), \text{ deducem}$$

$$\text{că } m(\angle ABC) = \frac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'.$$

436. Se folosește relația $a + b = 180 - c$. De aici rezultă relațiile $\sin \frac{a+b}{2} = \cos \frac{c}{2}$.

Așadar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Similar, $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Cum $0 \leq \frac{c}{2} \leq \pi$, avem $\frac{c}{2} = \arccos \left(\cos \frac{a+b}{2} \right)$. Așadar $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt afirmațiile false.

437. $\frac{CO}{OA} = \frac{NO}{OM} = \frac{NC}{AM} = \frac{1}{2}$ deci $\frac{NO}{OM} = \frac{1}{2}$ deci $\frac{NO}{NM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{NO} = -\frac{1}{3}\vec{MN}$.

438. Pentru a verifica egalitățile vectoriale de mai sus, încercăm să transformăm membrul stâng al egalității astfel încât în el să apară vectorii din membrul drept.

Astfel, pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{A}}$ $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{CB} + \vec{CD}$ scriem $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{CD} + 2\vec{AC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{A}}$ este falsă.

Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{B}}$ $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{0}$ scriem $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{MB} + \vec{BN} + \vec{PD} + \vec{DQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) = \vec{0}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{B}}$ este adevărat.

Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{C}}$ $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$ scriem $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{D}}$ $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{CA}$ scriem $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{AC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este fals.

439. Avem că $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. În mod asemănător obținem

că $\vec{PQ} = \vec{PD} + \vec{DQ} = \frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \frac{1}{2}\vec{CA}$. Însumând cei doi vectori obținem că

$\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{0}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pornind de la afirmația anterioară avem că

$\vec{NM} + \vec{PQ} = \vec{MN} + \vec{PQ} + 2\vec{NM} = 2\vec{NM}$, adică afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Deoarece

$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{CA}$, avem că $\vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. Prin urmare, $\vec{MN} + \vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AC}$,

adică afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. O să arătăm că $\boxed{\text{D}}$ este falsă calculând fiecare vector în parte.

Mai întâi, $\vec{MQ} = \vec{MA} + \vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{BD}$. Asemănător,

$\vec{NP} = \vec{NC} + \vec{CP} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{BD}$. Dacă însumăm cei doi vectori ajungem la

faptul că $\vec{MQ} + \vec{NP} = \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{BD}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

440. Pentru a afla informații referitoare la poziția punctului G vom calcula vectorul \vec{OG} ,

adică $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OC})$. Deoarece M și N sunt mijloacele laturilor AB și AD

vom avea că $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ și $\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$. Dacă înlocuim aceste relații

mai sus obținem că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$ deoarece $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. De aici putem concluziona că $O = G$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată și implicit și $\boxed{\text{A}}$ este adevărată deoarece $O \in BD$. Cum G este centru de greutate pentru triunghiul MNC se verifică relația $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, adică $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Similar, deoarece G este centru de greutate avem că $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC})$ sau echivalent $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}$, deci afirmația $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

441. Din Teorema lui Sylvester avem identitatea $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ care este echivalentă cu $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AH}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Putem să mai scriem echivalent relația de mai sus astfel $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{HA}$, ceea ce ne conduce la faptul că $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ se observă că $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ sau $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. Deoarece $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OG}$, adică $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

442. Folosind faptul că G este centru de greutate în triunghiul MBD putem ajunge la relația $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD})$ sau echivalent $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Similar, datorită faptului că G_1 este centru de greutate în triunghiul BCD avem că $\overrightarrow{CG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$, adică afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Analog avem că $\overrightarrow{DG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DD})$ sau $3\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ deoarece G_2 este centru de greutate în triunghiul ABD . Astfel obținem că $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Pentru a verifica veridicitatea afirmației $\boxed{\text{B}}$ vom calcula vectorii $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2})$ și \overrightarrow{BG} . Avem că $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BD}\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD})$. $\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD})$. Astfel am obținut că $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2})$, deci afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

443. Ar trebui mai întâi remarcat faptul că $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ alături de necoliniaritatea punctelor implică că oricare trei puncte din $\{A, B, C, D\}$ sunt necoliniare. În caz contrar, dacă presupunem că avem trei puncte coliniare, putem arăta că al patrulea se găsește pe aceeași dreaptă folosind relația de mai sus. Mai departe, cum oricare trei puncte sunt necoliniare, deducem că și vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ sunt necoliniari. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmațiilor vom începe prin a exprima vectorii $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ în funcție de vec-

torii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AD} . Astfel avem că $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, de unde mai reiese și că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De asemenea, $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$. Înlocuind expresiile vectorilor \overrightarrow{AM} și \overrightarrow{AN} în relația lui \overrightarrow{AC} obținem că $\overrightarrow{AC} = \frac{10}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AM}$, deci $\square C$ este adevărată. Deoarece vectorii \overrightarrow{AM} și \overrightarrow{AN} sunt necoliniari reprezentarea aceasta este unică, de unde putem că $\square A$ este falsă. Pentru a afla valoarea de adevăr a afirmației $\square B$ vom înlocui expresia lui \overrightarrow{BN} pentru a obține că $\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AD}$, de unde $\square C$ este falsă. Înlocuind cele știute și la afirmația $\square D$ obținem că $15\overrightarrow{AD} = -\frac{25}{3}(2\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}) + 15\overrightarrow{AD}$ sau echivalent $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN}$, adică $3\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Astfel concluzionăm că $\square D$ este falsă.

444. Deoarece hexagonul $ABCDEF$ este înscris într-un cerc, punctul O este centrul cercului circumscris pentru fiecare dintre triunghiurile FAB, ABC, BCD, CDE, DEF și EFA . Conform teoremei lui Sylvester avem relațiile $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH_5} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ și $\overrightarrow{OH_6} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA}$. De aici reiese că mijloacele segmentelor H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 coincid deoarece $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_5}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_3} + \overrightarrow{OH_6})$. Astfel putem deduce că cele trei drepte sunt concurente în acest punct, adică $\square B$ este adevărată. În plus, deoarece segmentele H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 au același mijloc vom avea că fiecare pereche dintre acestea sunt diagonalele unui paralelogram. De aici reiese că $H_1H_2H_4H_5$ este paralelogram, adică $\square C$ este adevărată, și $H_2H_3H_5H_6$ este paralelogram, deci $\square D$ este falsă. Pentru a determina valoarea de adevăr a lui $\square A$ vom determina dacă doi vectori sunt paraleli. Este suficient să calculăm vectorii $\overrightarrow{H_1H_2}, \overrightarrow{H_1H_3}$ și $\overrightarrow{H_1H_4}$ și să vedem dacă sunt paraleli cu vectorii corespunzători. Avem că $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$ și $\overrightarrow{H_3H_4} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BE}$. Acești doi vectori evident nu sunt paraleli deoarece dreptele BE și FC se intersectează în interiorul cercului. Printr-un raționament similar se ajunge la faptul că $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{H_2H_4} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD}$, care din același motiv ca mai devreme nu sunt paraleli, și că $\overrightarrow{H_1H_4} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$, respectiv $\overrightarrow{H_2H_3} = \overrightarrow{AD}$. Această ultimă pereche de vectori nu este paralelă din ipotezele problemei. Astfel, $\square A$ este adevărată.

445. Pentru a putea calcula vectorul \overrightarrow{OI} este necesar să calculăm lungimile segmentelor OM, OB și BM . Fără a restrânge generalitatea putem considera că cercul are raza 1.

Atunci segmentul $OB = 1$ deoarece este rază. Deoarece lungimea segmentului OM este jumătate din lungimea segmentului AB și triunghiul AOB este echilateral vom avea că $BM = \frac{1}{2}$. Lungimea segmentului OM se poate calcula folosind Teorema lui Pitagora în triunghiul OMB sau calculând aria triunghiului AOB în două moduri pentru a obține $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Acum putem calcula vectorul \vec{OI} deoarece $\vec{OI} = \frac{1}{OM + MB + BO}(OM \cdot \vec{OB} + MB \cdot \vec{OO} + BO \cdot \vec{OM}) = \frac{2}{3 + \sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{OB} + \vec{OM}) = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}\vec{OB} + \frac{2}{3 + \sqrt{3}}\vec{OM}$. De aici reiese că A este adevărată și B este falsă. Pentru a determina valoarea de adevăr a lui C vom începe prin a observa că $\vec{OE} = -\vec{OB}$ deoarece avem de a face cu un hexagon regulat. Astfel, C este adevărată. În expresia lui \vec{OI} putem înlocui \vec{OM} cu $\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ pentru a obține că $\vec{OI} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}\vec{OB} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}}\vec{OA} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}}\vec{OB} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}\vec{OA} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{OB}$. Astfel concluzionăm că D este și ea adevărată.

446. Pentru fiecare pereche de triunghiuri asemenea avem o latură comună, deci cele două perechi de triunghiuri sunt de fapt congruente. De aici obținem că patrulateralele $OCFD$ și $OAED$ sunt paralelograme și prin urmare vom avea că $\vec{FD} = \vec{CO}$, $\vec{FC} = \vec{DO}$, $\vec{EA} = \vec{DO}$ și $\vec{ED} = \vec{AO}$. Puteam acum să folosim aceste egalități pentru a determina valoarea de adevăr a afirmațiilor. $\vec{EO} + \vec{FO} = \vec{ED} + \vec{DO} + \vec{FD} + \vec{DO} = \vec{AO} + \vec{CO} + 2\vec{DO} = 2\vec{DO} = \vec{DB}$, deci A este adevărat. Mai departe, $2\vec{FO} + \vec{ED} = 2\vec{FD} + 2\vec{DO} + \vec{ED} = 2\vec{CO} + 2\vec{DO} + \vec{AO} = 2\vec{DO} + \vec{CO} = \vec{DB} + \vec{FD} = \vec{FB}$, deci B este adevărat. Avem că $\vec{AD} + \vec{CO} = \vec{AD} + \vec{OA} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$, deci C este falsă. Pentru D avem că $\vec{DF} + \vec{DE} = \vec{CO} + \vec{AO} = \vec{0}$, deci această afirmație este falsă.

447. Deoarece punctele A, D și P sunt coliniare în această ordine și $AD = DP$ avem că $\vec{AP} = 2\vec{AD}$. Similar avem că $\vec{AS} = 2\vec{AB}$. Atunci relația de la A se poate scrie echivalent $\vec{MA} + \vec{AP} - \vec{AS} - \vec{SR} = \vec{BA} + \vec{AD}$. Deoarece M, A, B sunt coliniare în această ordine și $MA = BA$ avem că $\vec{MA} = \vec{AB}$, iar din faptul că $BC \parallel SR$ și $AD = SR$ avem că $\vec{SR} = \vec{AD}$. Putem acum înlocui mai sus pentru a obține că $\vec{MP} - \vec{AP} = \vec{AB} + 2\vec{AD} - 2\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}$. Astfel A este adevărată. Putem scrie relația de B echivalent în felul următor $\vec{BP} + \vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AP} + \vec{AD} + \vec{DC} = 2\vec{AD} + \vec{AD} = 3\vec{AD}$, deci B este adevărat. Am folosit mai sus faptul că $\vec{AB} = \vec{CD}$, deci $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{0}$. În continuare, vom folosi raționamente similare pentru a exprima vectorii $\vec{AN}, \vec{AQ}, \vec{CR}$ și \vec{NP} , însă nu vom descrie

în detaliu acest proces. Vom înlocui formele echivalente ale acestor vectori în \boxed{C} pentru a obține $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$, deci \boxed{C} este falsă. Similar avem $\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, de unde și \boxed{D} este falsă.

448. Pentru început putem observa că patrulaterele $ADBC, ABEC, ABCF$ sunt romburi deoarece au toate laturile egale. Astfel ele sunt și paralelograme, iar de aici putem deduce următoarele egalități $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$. Folosind aceste egalități putem scrie echivalent afirmațiile după cum urmează. $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$, adică \boxed{A} este adevărată. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB}$, relație care este echivalentă cu \boxed{B} , deci această afirmație este adevărată. În continuare, $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$, deci \boxed{C} este adevărat. Se poate observa că $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF}$, de unde \boxed{D} este falsă.

449. Considerăm punctul B ca fiind intersecția dintre dreptele AM și NO . Deoarece cercul cu centru în I este tangent la fiecare dintre laturile triunghiului ANB , acesta este chiar centrul cercului înscris triunghiului BNA . Asta înseamnă că pentru a putea calcula vectorii \overrightarrow{AI} și \overrightarrow{MI} trebuie să aflăm lungimea segmentelor AB, BN și NA . Deoarece dreapta AN este tangentă la cercul de centru O , unghiul $\angle ONA$ este drept, deci și unghiul BNA este drept. Cum $m(\hat{A}) = 60^\circ$ va rezulta că $m(\hat{B}) = 30^\circ$. Putem considera fără lipsă de generalitate că raza cercului cu centru în O este 1. Atunci, deoarece triunghiul ONA este dreptunghic în N și $m(\angle OAN) = 30^\circ$ ca rezulta că $NA = \sqrt{3}$. Revenind în triunghiul BNA avem că $\sin(\angle NBA) = \frac{1}{2}$ de unde rezultă că $BA = 2AN = 2\sqrt{3}$. De asemenea, $\cos(\angle NBA) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde rezultă că $BN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{3} = 3$. Acum putem calcula vectorul \overrightarrow{AI} . $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3}(\sqrt{3}\overrightarrow{AB} + 2\sqrt{3}\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AA}) = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}(\sqrt{3}\overrightarrow{AB} + 2\sqrt{3}\overrightarrow{AN}) = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AN})$. Deoarece $\frac{BO}{ON} = 2$ avem că $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AN})$ de unde reiese că $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AO}$. Dacă înlocuim asta mai sus obținem că $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}\overrightarrow{AO}$, deci \boxed{A} este adevărat și \boxed{B} este fals. Mai departe avem că $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3 + 3\sqrt{3}}(\sqrt{3}\overrightarrow{MB} + 2\sqrt{3}\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MA}) = \frac{1}{3 + 3\sqrt{3}}(3 - \sqrt{3})\overrightarrow{MA} + \frac{2\sqrt{2}}{3 + 3\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$, deoarece $BM = AM$ și punctele A, B sunt de o parte și de alta a punctului M . Dacă

simplificăm formula anterioară ajungem la $\overrightarrow{MI} = \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$, de unde putem concluda că $\boxed{\text{C}}$ este fals și $\boxed{\text{D}}$ este adevărat.

450. Deoarece dreptele AM și AN sunt tangente la cercul de centru O avem că $m(\angle AMO) + m(\angle ANO) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, deci patrulaterul $AMON$ este inscribibil. Atunci punctul O_1 există indiferent de poziția punctului A în plan. Asta înseamnă că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Cercul circumscris patrulaterului $AMON$ este și cercul circumscris triunghiului AMO . Cum acesta este dreptunghic, centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul segmentului OA . Atunci punctele O, O_1, A sunt coliniare în această ordine și $AO_1 = OO_1$, ceea ce înseamnă că $\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_1A} = \vec{0}$. De aici, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Vom considera că punctul O_1 se află pe cercul de centru O . Atunci vom avea că $OA = 2OO_1$. Folosind această informație putem afla $\sin(\angle MAO) = \frac{OM}{OA} = \frac{OO_1}{2OO_1} = \frac{1}{2}$, de unde $m(\angle MAO) = 30^\circ$ și implicit $m(\angle MAN) = 60^\circ$. Astfel, $\boxed{\text{C}}$ este falsă și $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

451. Se poate observa că triunghiul ABC este dreptunghic în A deoarece $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = BC^2$. Atunci ortocentrul triunghiului ABC coincide cu A , deci $A = H$. Dacă ținem cont de faptul că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, obținem că $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ care implică faptul că $\boxed{\text{C}}$ este adevărat. De asemenea, centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul segmentului BC , de unde $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ sau echivalent $2\overrightarrow{AO}$, adică $\boxed{\text{D}}$ este adevărat. Vectorul \overrightarrow{OI} este dat de formula $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{5+12+13}(13\overrightarrow{OA} + 12\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{30}(13\overrightarrow{OA} + 12\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC})$. Astfel obținem că $\boxed{\text{A}}$ este fals și $\boxed{\text{B}}$ este adevărat.

452. Vom evidenția câteva proprietăți ale punctului M care se găsesc în forme analoge și la celelalte mijloace de laturi. Mai exact, $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. De asemenea, pentru punctul O avem că $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Putem folosi aceste informații pentru aflarea afirmațiilor adevărate. Putem manipula egalitatea de la $\boxed{\text{A}}$ astfel $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NO} + 3\overrightarrow{QD}$, de unde $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Similar, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$, deci $\square C$ este falsă. Pentru ultima afirmație avem că $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{NO}$, de unde $\square D$ este adevărat.

453. Poligonul $A_1A_3 \dots A_{59}$ regulat deoarece triunghiurile $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ sunt toate congruente între ele, având două perechi de laturi congruente și unghiurile dintre aceste două laturi congruente. Similar și poligonul $A_2A_4 \dots A_{60}$ este regulat. Atunci centrele de greutate ale acestor poligoane coincide cu centrul cercului în care sunt înscrise poligoanele. Cum cercul circumscris poligonului $A_1A_2 \dots A_{60}$ este circumscris și celor două poligoane cu 30 de vârfuri, centrele de greutate ale celor două poligoane mai mici coincide cu centrul de greutate al poligonului mare, deci $G_1 = G_2$. Astfel, $\square A$ este adevărată și $\square C$ este falsă. Mai rămâne de văzut dacă aceste centre de greutate se află sau nu pe dreapta G_3G_4 . Pentru asta putem calcula vectorii $\overrightarrow{G_1G_3}$ și $\overrightarrow{G_1G_4}$. Mai întâi, $\overrightarrow{G_1G_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1A_2} + \overrightarrow{G_1A_4})$. La calculul lui $\overrightarrow{G_1G_4}$ vom folosi și faptul că $\overrightarrow{G_1A_{31}} = -\overrightarrow{G_1A_1}$. Acest fapt este adevărat deoarece dreapta A_1A_{31} trece prin centrul cercului circumscris poligonului $A_1A_2 \dots A_{60}$, deci segmentul A_1A_{31} este diametru și prin urmare A_1, G_1, A_{31} sunt coliniare în această ordine și $G_1A_1 = G_1A_{31}$. Atunci putem scrie $\overrightarrow{G_1G_4}$ în felul următor $\overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_{31}} + \overrightarrow{G_1A_{32}} + \overrightarrow{G_1A_{34}}) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1A_2} + \overrightarrow{G_1A_4}) = -\overrightarrow{G_1G_3}$. Putem nota cu M mijlocul segmentului G_3G_4 . Atunci $\overrightarrow{G_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1G_3} + \overrightarrow{G_1G_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1G_3} - \overrightarrow{G_1G_3}) = \vec{0}$, ceea ce înseamnă că G_1 este mijlocul segmentului G_3G_4 și implicit $G_1 \in G_3G_4$. Putem astfel concluziona că $\square B$ este adevărat și $\square D$ este fals.

454. Cercul în care este înscris pentagonul este și cercul circumscris triunghiurilor ABC și AED . Conform Teoremei lui Sylvester, avem că $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$. Atunci $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$. Dacă ținem seama de faptul că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$, obținem că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 5\overrightarrow{OG}$. Atunci putem scrie $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OG}$, deci $\square B$ este falsă și $\square C$ este adevărată. Vectorul $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$, ceea ce înseamnă că $\square A$ este falsă. Pentru stabilirea valorii de adevăr a afirmației $\square D$ vom verifica implicația $\overrightarrow{OG} = \vec{0} \implies M = G$.

Am văzut mai înainte că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{OG}$. Presupunem că $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ și vrem să arătăm că $M = G$. Cum $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, avem că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\vec{0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \neq \vec{0} = \overrightarrow{OG}$. Astfel, $M \neq G$ și afirmația $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

455. Vom începe prin a calcula vectorul $\overrightarrow{G_1G_2}$. Avem că $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1M} + \overrightarrow{G_1N} + \overrightarrow{G_1P})$.

Cum punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor AD, BE respectiv CF , rezultatul precedent se mai poate scrie și $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1D}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1E}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1F})\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1F})$. Cum G_1 este centrul de greutate al hexagonului avem că $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1F} = \vec{0}$, de unde reiese că $\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$, adică $G_1 = G_2$. Astfel $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Cum raționamentul anterior a fost făcut în lipsa vreunei proprietăți a hexagonului deducem că $G_1 = G_2$ în orice hexagon. Putem deduce de aici că $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Cum $G_1 = G_2$ și G_2 este centrul de greutate al triunghiului MNP deducem că G_1 este centrul de greutate al triunghiului MNP . Triunghiul MNP fiind propriu, acesta are centrul de greutate în interiorul său și prin urmare $G_1 \notin MN$. De aici rezultă că $\boxed{\text{C}}$ este fals.

456. Vom începe prin a verifica dacă punctul P este centrul de greutate al patrulaterului.

Deoarece P este mijlocul segmentului MN avem că $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$. Putem în continuare să folosim faptul că punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv CD . În consecință vom avea că $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$ și $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$. Dacă înlocuim mai sus obținem că $\vec{0} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ sau echivalent $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$, ceea ce înseamnă că $\boxed{\text{A}}$ este adevărat.

Această condiție este echivalentă și cu faptul că P este centrul de greutate al patrulaterului, deci și $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Deoarece P este centru de greutate avem că

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, formulă care diferă de cea de la $\boxed{\text{B}}$. Pentru a afirma că $\boxed{\text{B}}$ este fals mai trebuie verificat că $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$. Acest

fapt este ușor de văzut deoarece, din construcția sa, punctului P nu poate fi pe dreapta

AB , deci nu poate coincide cu A . Așadar, $\boxed{\text{B}}$ este într-adevăr fals. Similar ca mai sus,

$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărat.

457. $A\vec{M} = p \cdot A\vec{B} + A\vec{C}$; $A\vec{N} - A\vec{C} = q \cdot A\vec{B} - q \cdot A\vec{C}$; $A\vec{N} = q \cdot A\vec{B} + (1 - q) \cdot A\vec{C}$;

A, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{p}{q} = \frac{1}{1-q}$; deci variantele $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

458. Vom calcula vectorii \overrightarrow{OM} , $\overrightarrow{OG_1}$ și $\overrightarrow{OG_2}$ pentru a determina care puncte sunt coliniare.

Avem că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Deoarece $ABCD$ este paralelogram avem că $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului AMB va avea loc $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$. Mai avem că $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG_1}$. Aceste relații arată că punctele O, M, G_1, G_2 sunt toate coliniare, deci $\boxed{\text{A}}$, respectiv $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate. Deoarece $\overrightarrow{OG_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$, avem că O aparține segmentului MG_1 . Prin urmare $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ se exclud reciproc, $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

459. Vom începe prin a calcula vectorii \overrightarrow{AG} și $\overrightarrow{AG_1}$. Mai întâi, deoarece G este centrul

de greutate al triunghiului ABC vom avea că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Mai departe, deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului BCA_1 vom avea că

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Astfel, $\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AG}$. Deoarece punctele A, G, G_1 sunt coliniare și vectorii \overrightarrow{AG} și $\overrightarrow{AG_1}$ sunt coliniari.

Putem deduce de aici că și cei doi vectori sunt coliniari și cu $\overrightarrow{AA_1}$ pentru că

$\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AG}$. Atunci punctele A, G, G_1, A_1 sunt toate coliniare. Deci afirmația

$\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Deoarece triunghiul BCA_1 este echilateral vom avea că $A_1G_1 \perp BC$.

Deoarece A, G, G_1, A_1 sunt coliniare și $AG \perp BC$. Atunci AG este mediatoarea segmentului

BC , deci triunghiul ABC este isoscel în A . Prin urmare, $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Afirmația

$\boxed{\text{A}}$ este falsă deoarece punctele A, G_1, A_1 sunt coliniare indiferent de triunghiul ABC ,

deci coliniaritatea lor nu poate implica că acesta este mai mult decât isoscel în A . Putem

face un raționament similar ca la început pentru a arăta că, dacă punctele B, G, G_2 sunt

coliniare, triunghiul ABC este isoscel în B . Triunghiul fiind isoscel și în B , el este echi-

lateral. Astfel, $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

460. Pentru a determina dacă punctele A, M, G sunt coliniare vom calcula vectorii

\overrightarrow{AM} și \overrightarrow{AG} . Punctul G este centrul de greutate al pentagonului, deci vom avea că

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$. Mai departe, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$. Atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AG}$, deci punctele A, M, G sunt coliniare și prin urmare **A**

este adevărat. Raționamentul anterior a fost făcut fără a presupune vreo proprietate a patrulaterului $BCDE$, deci faptul că A, M, G sunt coliniare este adevărat și dacă $BCDE$ nu este paralelogram. Din asta va rezulta că **D** este falsă. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmațiilor **B** și **C** vom calcula vectorul $\overrightarrow{G_1G_2}$ și vom obține $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE})$. Dacă $G_1G_2 \parallel CD$ avem că vectorii $\overrightarrow{G_1G_2}$ și \overrightarrow{CD} sunt coliniari. Prin urmare și perechea de vectori $\overrightarrow{G_1G_2}$ și \overrightarrow{BE} sunt coliniari. Atunci $BE \parallel CD$. Reciproc, dacă $BE \parallel CD$ avem că vectorii \overrightarrow{CD} și \overrightarrow{BE} sunt coliniari, iar atunci și $\overrightarrow{G_1G_2}$ va fi colinar cu ei. Deci, $G_1G_2 \parallel CD$ și implicația reciprocă este adevărată. Așadar, **B** este adevărat. Putem face un raționament similar pentru a arăta că, dacă $G_1G_2 \parallel BE$, $G_1G_2 \parallel CD$. Afirmația **C** este falsă deoarece putem considera pentagonul $ABCDE$ în care patrulaterul $BCDE$ este trapez cu $CD \parallel BE$. Atunci vom avea că $G_1G_2 \parallel BE$, dar BC și DE nu sunt paralele. Prin urmare, cele două condiții nu sunt echivalente.

461. Avem că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$ și $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) \right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AM}$, deci $M = G$. Am folosit mai sus faptul că G, G_1, G_2 sunt centre de greutate. Afirmația **A** este falsă deoarece coliniaritate punctelor implică faptul că există un număr real nenul k astfel încât $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AD}$ sau echivalent $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (6k - 1)\overrightarrow{AD}$. Egalitatea vectorială de la **A** este doar o particularizare pentru $k = \frac{1}{3}$. **B** este adevărată deoarece centrul de greutate al unui hexagon regulat este centrul cercului în care acesta poate fi înscris. În acest caz avem și că AD este diametru, deci A, G, D sunt coliniare. **C** este clar adevărată deoarece $M = G$. Condiția $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$ este echivalentă cu faptul că A este centrul de greutate al hexagonului, deci $A = M$. Atunci A este și mijlocul segmentului G_1G_2 . Cum hexagonul este convex, aceste puncte se găsesc în interiorul său și prin urmare și mijlocul segmentului se găsește în interiorul hexagonului. Deoarece A este un vârf al hexagonului,

el nu poate fi în interior. Astfel, condiția ca $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$ este mereu falsă. Pe de altă parte, am văzut că, în cazul unui hexagon regulat, A, M, D sunt coliniare. Astfel cele două afirmații nu pot fi echivalente și \boxed{D} este falsă.

462. Din Teorema lui Sylvester avem că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului vom avea că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Astfel se poate observa că are loc egalitatea $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ sau $\overrightarrow{OH} = -3\overrightarrow{GO}$, deci vectorii sunt coliniari și prin urmare \boxed{A} este adevărată. Raționamentul anterior este valabil pentru orice triunghi ABC , deci din simpla condiție de coliniaritate nu putem deduce proprietăți ale triunghiului. Prin urmare \boxed{C} este falsă deoarece condiția de coliniaritate nu poate implica faptul că triunghiul este dreptunghic. Deoarece $\overrightarrow{OH} = -3\overrightarrow{GO}$, avem și că $-\overrightarrow{HO} = -3\overrightarrow{GO}$ care se scrie echivalent $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$, deci coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{OH} și \overrightarrow{GO} este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{HO} și \overrightarrow{GO} . Cum prima coliniaritate nu poate implica faptul că triunghiul ABC este isoscel, nici coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{HO} și \overrightarrow{GO} nu poate implica faptul că triunghiul ABC este isoscel. Prin urmare, \boxed{B} este falsă. \boxed{D} este clar falsă deoarece \boxed{B} și \boxed{C} sunt false.

463. Pornim de la faptul că dacă vectorii \overrightarrow{AB} și $2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari există un număr real nenul k astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2k\overrightarrow{AC} + 5k\overrightarrow{AD} = 2k(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}) + 5k\overrightarrow{AD} = 2\alpha k\overrightarrow{AB} + (2k\beta + 5k)\overrightarrow{AD}$. Cum vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AD} sunt necoliniari și k este nenul, vom obține că $2\beta + 5 = 0$ sau $\beta = -\frac{5}{2}$. Valoarea parametrului α poate fi orice număr real nenul deoarece pentru un $\alpha \in \mathbb{R}^*$ putem alege $k = \frac{1}{2\alpha}$ pentru a avea loc condiția de coliniaritate. Prin urmare, afirmațiile pentru care $\alpha \neq 0$ și $\beta = -\frac{5}{2}$ sunt singurele adevărate. Astfel, \boxed{A} și \boxed{B} sunt false, iar \boxed{C} și \boxed{D} sunt adevărate.

464. Începem prin a calcula vectorii $\overrightarrow{OG_1}$ și $\overrightarrow{OG_2}$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului ACD , avem că $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Din faptul că G_2 este centrul de greutate al triunghiului BCD avem că $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Din faptul că vectorii $\overrightarrow{OG_1}$ și $\overrightarrow{OG_2}$ sunt coliniari va exista un număr real nenul α astfel încât $\overrightarrow{OG_1} = \alpha\overrightarrow{OG_2}$, care se poate scrie echivalent $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{OD}$. Vom rescrie această egalitate astfel $\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OB} = (\alpha - 1)(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. În continuare vom folosi faptul că există un număr real nenul β astfel încât $\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OD} = \beta\overrightarrow{OB}$.

Acest fapt este adevărat deoarece $\triangle AOB \sim \triangle COD$. Rescriem relația de mai sus astfel: $\overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} = \beta(\alpha - 1)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Deoarece vectorii \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} sunt necoliniari va rezulta că $1 = \beta(\alpha - 1)$ și $-\alpha = \beta(\alpha - 1)$. Astfel putem ajunge la faptul că $\alpha = -1$, deci $\overrightarrow{OG_1} = -\overrightarrow{OG_2}$. Înlocuim în relația $\overrightarrow{G_1O} = k\overrightarrow{G_1G_2}$ pentru a obține $\overrightarrow{G_1O} = k(\overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OG_2}) = k(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_1}) = 2k\overrightarrow{OG_1}$. Deoarece vectorul $\overrightarrow{OG_1}$ este nenul, deducem că $2k = -1$ sau $k = -\frac{1}{2}$. Atunci singura afirmație corectă este $\boxed{\text{C}}$.

465. Deoarece patrulateralele $ABCD, AEFD$ și $DFGC$ sunt paralelograme avem că

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE}$. În plus, $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AO_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ și $\overrightarrow{AO_3} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$. Se poate observa că $\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{AO_3}$, deci patrulaterul $AO_1O_3O_2$ este paralelogram. De aici deducem că $\boxed{\text{A}}$

este adevărată și $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Rezultatul precedent se mai poate demonstra și arătând că $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{AO_3} - \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AO_1}$.

Atunci vom avea că $AO_1 \parallel O_2O_3$ și $AO_1 = O_2O_3$. În continuare vom nota cu M mijlocul segmentului O_2O_3 . Avem că $\overrightarrow{O_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_1O_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_1O_3}) = \overrightarrow{O_1O_3} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AO_2} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Dacă $O_1M \parallel DF$, atunci $\overrightarrow{O_1M}$ și \overrightarrow{DF} sunt coliniari, deci și \overrightarrow{BD} este colinar cu acești vectori. Reciproc, dacă vectorii \overrightarrow{BD} și \overrightarrow{DF} sunt coliniari, rezulta că $\overrightarrow{O_1M}$ este colinar cu ei, deci $O_1M \parallel DF$. Astfel obținem că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. $\boxed{\text{C}}$ este falsă deoarece putem construi paralelogramele astfel încât vectorii \overrightarrow{BD} și \overrightarrow{DF} să fie necoliniari. De exemplu, putem considera că $BECF$ este un paralelogram și punctele A, D sunt alese pe BE , respectiv CF astfel încât $AD \parallel BC$. Atunci vectorii \overrightarrow{BD} și \overrightarrow{DF} nu sunt coliniari.

466. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmațiilor $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ vom calcula vectorul

$\overrightarrow{G_1G_2}$. Vom avea nevoie mai întâi de vectorii $\overrightarrow{GG_1}$ și $\overrightarrow{GG_2}$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului AGB_1 , avem că $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB_1}) = \frac{1}{3} \left[\overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) \right] = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{GC}$. Similar, $\overrightarrow{GG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC_1}) = \frac{1}{3} \left[\overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \right] = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{GB}$. Atunci $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{GG_2} - \overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{GC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$. De aici $BC \parallel G_1G_2$ și $BC = 6G_1G_2$. Astfel G_1G_2BC este trapez, dar nu este paralelogram, deci $\boxed{\text{A}}$ este fals și $\boxed{\text{B}}$ este adevărat.

Avem $\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$, deoarece B_1C_1 este linie mijlocie în triunghiul ABC .

Prin urmare \boxed{C} este adevărat și \boxed{D} este fals.

467. Considerăm originea reperului cartezian xOy ca fiind originea vectorilor de poziție.

$ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\vec{i} + \vec{j} = \vec{j} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$.

Deci avem o infinitate de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram.

468. A, B, C sunt coliniare \Leftrightarrow există t număr real astfel încât $\overrightarrow{r_C} = t \cdot \overrightarrow{r_A} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow \alpha \vec{i} + \alpha^2 \vec{j} = t \vec{j} + (1 - t) \vec{i} \Leftrightarrow \alpha = 1 - t$ și $\alpha^2 = t$. Eliminând t obținem: $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ sau $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

469. În reperul cartezian xOy considerăm \vec{i} versorul axei Ox , iar \vec{j} versorul axei Oy .

Căutăm o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v}(t) = t \cdot \vec{i} + f(t) \cdot \vec{j}$. Astfel obținem că: $t \cdot \vec{i} + f(t) \cdot \vec{j} = x^2 \cdot \vec{i} + 3x^2 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow t = x^2$ și $f(t) = 3x^2 \Leftrightarrow f(t) = 3t$ și $t = x^2, x \in \mathbb{R}$ Dar $D = \{t \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } t = x^2\} \Rightarrow D = [0; \infty]$. Avem că $f : [0; \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 3t$, deci locul geometric este o semidreaptă.

470. $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_A} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_B}$. $\overrightarrow{r_N} = \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_B} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_C}$,

$\overrightarrow{r_P} = \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_C} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_A}$. Fie G și G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv MNP . Atunci: $\overrightarrow{r_G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$, respectiv. $\overrightarrow{r_{G'}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_P}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_A} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_B} + \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_B} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_C} + \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_C} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \overrightarrow{r_A} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + \alpha)(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})}{1 + \alpha} = \overrightarrow{r_G}$, deci triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

Arătăm că afirmațiile \boxed{A} și \boxed{C} sunt false. Pentru aceasta construim

un contraexemplu: Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , și $\alpha = 1$, deci MNP va fi triunghiul format cu mijloacele laturilor triunghiului ABC . Arătăm că triunghiul MNP este dreptunghic în N . $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = (\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M}) \cdot (\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_N}) = \frac{\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}}{2} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, deoarece $AB \perp AC$. Ortocentrul triunghiului ABC este A , iar ortocentrul triunghiului MNP , este N , (ambele fiind triunghiuri dreptunghice), iar în ceea ce privește centrul cercului circumscris, în cazul triunghiului ABC este mijlocul lui BC , iar în cazul triunghiului MNP este mijlocul lui MP (ambele fiind triunghiuri dreptunghice).

471. Fie $t, u \in [0, 1]$ astfel încât $\vec{v}(t) = \vec{v}(u) \Leftrightarrow t \cdot \overrightarrow{r_A} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{r_B} = u \cdot \overrightarrow{r_A} + (1 - u) \cdot \overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow (t - u) \cdot \overrightarrow{r_A} - (t - u) \cdot \overrightarrow{r_B} = 0 \Leftrightarrow (t - u) \cdot (\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}) = 0 \Leftrightarrow (t - u) \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. Dar $\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$

(punctele A și B sunt distincte) deci $t - u = 0 \Leftrightarrow t = u$, deci \vec{v} este injectivă. Presupunem că \vec{v} ar fi surjectivă, și considerăm vectorul $-\vec{r}_A + 2\vec{r}_B$. Atunci va exista $t \in [0, 1]$ cu $\vec{v}(t) = -\vec{r}_A + 2\vec{r}_B \Leftrightarrow t \cdot \vec{r}_A + (1-t) \cdot \vec{r}_B = -\vec{r}_A + 2\vec{r}_B \Leftrightarrow (t+1)\vec{B}\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow t = -1$ ceea ce este imposibil. Acum fie $t \in [0, 1]$ astfel încât $\vec{v}(t) = \vec{r}_A \Leftrightarrow (t-1) \cdot \vec{r}_A + (1-t) \cdot \vec{r}_B = \vec{0} \Leftrightarrow (t-1) \cdot \vec{B}\vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 1$. Deci $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

472. Fie $\vec{r}_C = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 \cdot \vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C \Leftrightarrow 3\vec{i} + 3\vec{j} = (2+x)\vec{i} + (3+y)\vec{j} \Leftrightarrow x = 1$ și $y = 0$.

473. Calculăm \vec{r}_{G_n} , $\forall n \in \mathbb{N}$. Mai întâi avem că $\vec{r}_{G_{n+1}} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{G_n} + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(1). Arătăm prin inducție că $\vec{r}_{G_n} = \frac{1}{3^n}\vec{r}_A + \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (\star). Cazul $n = 0$ este trivial, deoarece $\vec{r}_{G_0} = \vec{r}_A$. Acum presupunem afirmația adevărată pentru $k \in \mathbb{N}$

și arătăm că este adevărată și pentru $k + 1$. $\vec{r}_{G_k} = \frac{1}{3^k}\vec{r}_A + \frac{3^k - 1}{2 \cdot 3^k}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Folosind

(1) avem că $\vec{r}_{G_{k+1}} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{G_k} + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3^{k+1}}\vec{r}_A + \frac{3^k - 1}{2 \cdot 3^{k+1}}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) + \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3^{k+1}}\vec{r}_A + \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2 \cdot 3^{k+1}}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3^{k+1}}\vec{r}_A + \frac{3^{k+1} - 1}{2 \cdot 3^{k+1}}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Deci afirmația

este adevărată și pentru $k + 1$ deci conform inducției matematice (\star) este adevărată, deci

$\boxed{\text{D}}$ este adevărată. $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}\vec{r}_A + \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, deci $\boxed{\text{B}}$

este adevărată. Pentru a arăta că toate punctele G_n se află pe aceeași dreaptă, arătăm

că fiecare punct G_n se află pe dreapta AM , unde M este mijlocul lui BC . Evident că

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, și folosind (\star) avem că $\vec{r}_{G_n} = \frac{1}{3^n}\vec{r}_A + \frac{3^n - 1}{3^n}\vec{r}_M$. Cum $\frac{1}{3^n} + \frac{3^n - 1}{3^n} = 1$

obținem că G_n se află pe dreapta AM , $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

474. Distingem două cazuri: $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ sau $\vec{AC} = -2\vec{AB}$. În primul caz avem că:

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = 2\vec{r}_B - 2\vec{r}_A \Rightarrow \vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)$$

$$\text{În al doilea caz } \vec{r}_C - \vec{r}_A = -2\vec{r}_B + 2\vec{r}_A \Rightarrow \vec{r}_B = \frac{3}{2}\vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_C.$$

475. Fie I_n, G_n centrul cercului înscris, respectiv centrul de greutate al triunghiului

$A_n B_n C_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cum $I_n \equiv I_{n+1} (\equiv I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\frac{A_n A_{n+1}}{A_{n+1} B_n} = \frac{B_n B_{n+1}}{B_{n+1} C_n} = \frac{C_n C_{n+1}}{C_{n+1} A_n} =$

$$\alpha \Rightarrow \vec{r}_{G_{n+1}} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{A_{n+1}} + \vec{r}_{B_{n+1}} + \vec{r}_{C_{n+1}}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\alpha}\vec{r}_{A_n} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{r}_{B_n} + \frac{1}{1+\alpha}\vec{r}_{B_n} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{r}_C + \frac{1}{1+\alpha}\vec{r}_C + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{r}_{A_n}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+\alpha)(\vec{r}_{A_n} + \vec{r}_{B_n} + \vec{r}_C)}{1+\alpha} = \vec{r}_{G_n} \Rightarrow G_n \equiv$$

$G_{n+1} (\equiv G)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fie acum $\mathcal{S}_n = \text{int}(A_n B_n C_n)$ (mulțimea punctelor interioare tri-

unghiului $A_n B_n C_n$). Evident că $\mathcal{S}_{n+1} \subsetneq \mathcal{S}_n$, și $\{I, G\} \subseteq \mathcal{S}_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{I, G\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Dar triunghiurile $A_n B_n C_n$ devin din ce în ce mai mici, și nu au laturi comune, deci la limită ele vor degenera. Astfel $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ va conține un singur punct $\Rightarrow I = G$, deci triunghiul $A_0 B_0 C_0$ este echilateral.

476. Vectorii nu sunt perpendiculari $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$.

477. $6\vec{AM} = 3\vec{AB} + 3\vec{AC} - 5\vec{BC} \Rightarrow 6(\vec{AB} + \vec{BM}) = 3\vec{AB} + 3\vec{AC} - 5\vec{BC} \Rightarrow 6\vec{BM} = -3\vec{AB} + 3\vec{AC} - 5\vec{BC} = 3\vec{BC} - 5\vec{BC} = -2\vec{BC} \Rightarrow B, C, M$ sunt coliniare și $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = -3|\vec{BM}|^2 < 0$. Deci, avem **A** și **C** adevărate.

478. $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0$, $|\vec{AC}|^2 = 1^2 + 3^2 = |\vec{BC}|^2 \Rightarrow ABC$ este dreptunghic isoscel.

479. Fie xOy reperul cartezian cu \vec{i}, \vec{j} versorii axei Ox , respectiv Oy . Triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă $AB \perp AC \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, dar $\vec{AB} = -\vec{i} - \vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Analog se obține că $\vec{AC} = (2\alpha - 2)\vec{i} + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3(2\alpha - 2) - 2(\alpha^2 - 4\alpha + 3) \Rightarrow -2\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Rightarrow C(0, 4)$ sau $\alpha = 1 \Rightarrow C(2, 1)$. Deci convine doar varianta cu $\alpha = 0$ deoarece în celălalt caz punctul C coincide cu punctul A , și astfel triunghiul ABC este degenerat.

480. Dacă $ABCD$ este romb atunci el este paralelogram și diagonalele sale sunt perpendiculare. Cum $\vec{AB} = -3\vec{i} + 4\vec{j} = \vec{DC}$ obținem că $ABCD$ este paralelogram. Mai trebuie să impunem condiția ca diagonalele să fie perpendiculare, deci $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$. $\vec{AC} = (\alpha - 3)\vec{i} + (\beta + 4)\vec{j}$ și $\vec{BD} = (\alpha + 3)\vec{i} + (\beta - 4)\vec{j} \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \alpha^2 + \beta^2 - 25 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 25$, ceea ce ne arată că avem o infinitate de perechi de numere reale (α, β) pentru care $ABCD$ este romb.

481. Pentru ca \vec{v} să fie injectivă, fie $(m, n), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ și $\vec{v}(m, n) = \vec{v}(s, t) \Leftrightarrow m\vec{a} + n\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{b}$. Înmulțind relația la dreapta cu \vec{a} se obține că $(m\vec{a} + n\vec{b}) \cdot \vec{a} = (s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{a} \Leftrightarrow m\vec{a} \cdot \vec{a} + n\vec{b} \cdot \vec{a} = s\vec{a} \cdot \vec{a} + t\vec{b} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow m \cdot |\vec{a}|^2 = s \cdot |\vec{a}|^2$. Dar $|\vec{a}| \neq 0 \Rightarrow m = s$. Analog înmulțind relația la dreapta cu \vec{b} se obține că $n = t \Rightarrow (m, n) = (s, t)$, deci \vec{v} este injectivă. Fie \vec{u} un vector din plan. Căutăm (α, β) astfel încât $\vec{v}(\alpha, \beta) = \vec{u} \Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{u}$. Utilizând același raționament ca și mai sus, după înmulțire la dreapta cu \vec{a} se obține că $\alpha \cdot |\vec{a}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{a} \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$.

Analog se obține că $\beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$, deci $\vec{u} \in \text{Im } \vec{v}$, $\forall \vec{u}$ vector din plan, deci \vec{v} este surjectivă, iar folosind faptul că este și injectivă, ea va fi și inversabilă.

482. $\vec{BA} = 3\vec{i}$ și $\vec{BC} = -2\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow BA = 3$ și $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) = -6$. Dar $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\angle ABC) \Leftrightarrow -6 = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos(\angle ABC) \Rightarrow \cos(\angle ABC) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ABC = \frac{3\pi}{4}$.

483. Se observă că punctele $A(0, 3)$ și $B(-2, 0)$ se află pe dreapta d . Atunci $\vec{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$. Acum fie $P(x, y)$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ proiecția lui M pe dreapta d . Evident că $P \in d$, deci $3x - 2y + 6 = 0$, și $\vec{MP} = (x - 5)\vec{i} + (y - 4)\vec{j}$. Impunem condiția că $MP \perp d$, adică $\vec{MP} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow -2(x - 5) - 3(y - 4) = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 22 = 0$.

Așadar am obținut sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ -2x - 3y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ și } y = 6, \text{ deci } P(2, 6).$$

484. ABC este triunghi deci $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. După înmulțire cu \vec{b} se obține

că: $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, dar fiecare termen din membrul stâng este pozitiv $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$, deci $B \equiv C \Rightarrow$ triunghiul ABC este degenerat.

485. $|\vec{c}|^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$. Dar $|\vec{c}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$. Deci $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cdot (1 - \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))) = 0$, deci $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 1 \Rightarrow$ vectorii \vec{a} și \vec{b} sunt coliniari. În cazul în care ar fi opuși atunci $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, ceea ce ar contrazice faptul că \vec{c} este nenul.

486. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. **Metoda 1.** $AB = AM = BM \Leftrightarrow AB^2 = AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 2)^2 = (a - 3)^2 + (b - 1)^2 = 25 \dots$

Metoda 2 Fie C mijlocul segmentului $[AB]$; notăm cu d mediatoarea segmentului $[AB]$.

$d \perp AB, C \in d \Rightarrow C(1, -\frac{1}{2}); m_{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_d = -\frac{4}{3}$. $d : y - y_c = m_d(x - x_c) \Rightarrow$

$d : 4x + 3y - \frac{5}{2} = 0$. $AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB : -3x + 4y + 5 = 0$. $h_A =$

$dist(M, AB) = \frac{|-3x_M + 4y_M + 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|-3x_M + 4y_M + 5|}{5} \Rightarrow |-3x_M + 4y_M + 5| =$

$$\frac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x_M + 3y_M - \frac{5}{2} = 0 \\ -3x_M + 4y_M + 5 = -\frac{25\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

487. $D\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $E\left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}\right)$, $F\left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $AD : 11x - 5y - 11 = 0$, $BE : x - 4y + 8 = 0$,

$CF : 8x + 7y - 40 = 0$.

488. Fie M mijlocul lui AB astfel încât $M\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Dreapta OC are ecuația $y = x$,

deci M aparține lui OC . Prin urmare, OC este mediana lui AB . Panta lui OC este 1 iar panta lui AB este $-\frac{1}{5}$, deci dreptele nu sunt perpendiculare. Astfel, OC este mediana, dar nu înălțimea. Prin urmare, triunghiul AOB nu este isoscel, ceea ce înseamnă că nu mai poate fi o altă linie importantă.

489. Într-adevăr pantele dreptelor AB și AC sunt $m_{AB} = -1$ respectiv $m_{AC} = 1$.

Așadar $AB \perp AC$ deoarece $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$. **[B] Adevărat.** Orice triunghi XYZ are același centru de greutate cu triunghiul său median întrucât dreapta suport a oricărei mediane a triunghiului XYZ este dreaptă suport pentru o mediană a triunghiului median al ΔXYZ . **[C] Fals.** Ortocentrul triunghiului dreptunghic ABC este vârful drept $A(-4, 1)$, iar ortocentrul triunghiului median MNP , care este dreptunghic, este vârful drept $M\left(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

[D] Fals. Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC

este mijlocul $M\left(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ al ipotenuzei sale, iar centrul cercului circumscris triunghiului

dreptunghic MNP este mijlocul $U\left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$ al ipotenuzei sale. **Observație.** Pen-

tru calculul coordonatelor centrului de greutate, al ortocentrului sau centrului cercului circumscris unui triunghi există formule binecunoscute. În cazul problemei noastre alternativa aplicării acestora ar însemna soluții mai lungi mai ales pentru punctele C și D .

Totuși, pentru B alternativa mai sus menționată este rezonabilă: Coordonatele centrului

de greutate al triunghiului ABC sunt $\left(\frac{-4 + (-7) + 0}{3}, \frac{1 + 4 + 5}{3}\right)$ adică $G_{\Delta ABC}\left(\frac{-11}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

Ținând seama de faptul că $M\left(\frac{-7 + 0}{2}, \frac{4 + 5}{2}\right)$, $N\left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right)$, $P\left(\frac{-4 + (-7)}{2}, \frac{1 + 4}{2}\right)$

adică $M\left(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $N(-2, 3)$, $P\left(\frac{-11}{2}, \frac{5}{2}\right)$, deducem că centrul de greutate al triunghiului

lui MNP are coordonatele $\left(\frac{-7}{2} + (-2) + \left(\frac{-11}{2}\right), \frac{9}{2} + 3 + \frac{5}{2}\right)$ adică $G_{\Delta MNP}\left(\frac{-11}{3}, \frac{10}{3}\right)$,

fapt care arată că $G_{\Delta ABC} = G_{\Delta MNP}$.

490. Din definiția pantei tangentei, $m_{AB} = \tan \theta$ și $m_{CD} = \tan \gamma$. Cum $m_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $m_{CD} = -1$, obținem $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

491. Evident A_1 are coordonatele $(1, 1)$. Cercul $C_2(A_2; r_2)$ are centrul A_2 de coordonate (a_2, a_2) și raza $r_2 = a_2$. Condiția de tangență cu cercul $C_1(A_1; r_1)$ ne conduce la valoarea $r_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Cercul $C_{n+1}(A_{n+1}; r_{n+1})$ are centru A_{n+1} de coordonate (a_{n+1}, a_{n+1}) și rază $r_{n+1} = a_{n+1}$. Condiția de tangență cu cercul $C_n(A_n; r_n)$ ne conduce la valoarea $r_{n+1} = (3 - 2\sqrt{2}) r_n$. Urmează că $r_n = (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Atunci $s_n = \pi (r_n)^2 = \begin{cases} \pi, & \text{dacă } n = 1 \\ \pi (3 - 2\sqrt{2})^{2n-3}, & \text{dacă } n \in \mathbb{N} \text{ și } n \geq 2 \end{cases}$, deci $s_1 + s_2 + \dots +$

$s_n = \pi + \frac{\pi}{8} \sqrt{2} \left(1 - (3 - 2\sqrt{2})^{2n-3}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_1 + s_2 + \dots + s_n) =$

$\frac{8 + \sqrt{2}}{8} \pi$. $s_n = \pi (r_n)^2 = \begin{cases} \pi, & \text{dacă } n = 1 \\ \pi (3 - 2\sqrt{2})^{2n-2} & \text{dacă } n \in \mathbb{N} \text{ și } n \geq 2 \end{cases}$ deci $s_1 + s_2 + \dots +$

$s_n = \pi \left(1 + (3 - 2\sqrt{2})^2 + (3 - 2\sqrt{2})^4 + \dots + (3 - 2\sqrt{2})^{2(n-1)}\right) = \pi \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{2n}}{1 - (3 - 2\sqrt{2})^2} =$

$\pi \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{2n}}{12\sqrt{2} - 16}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_1 + s_2 + \dots + s_n) = \frac{1}{12\sqrt{2} - 16} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{8} \pi$.

492. Observăm următoarea regulă: Dacă numărul pasului este multiplu de 2, jucătorul se află în punctul $(4, -2)$, iar în caz contrar în punctul $(2, 2)$.

493. Coordonatele centrului de greutate sunt: $G\left(\frac{1 + (-4) + 2}{3}, \frac{2 + (-1) + (-3)}{3}\right) =$

$G\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

494. Deoarece $\overrightarrow{BA} = 4\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i}$, atunci $AB \perp BC$, deci triunghiul ABC este

dreptunghic în B . Fie acum $P(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $P \in [CA]$. $MBNP$ este pătrat \Rightarrow

$MP \perp BA \Rightarrow MP \parallel BC$. Dar cum $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i}$, deci paralel cu $Ox \Rightarrow M(1, \beta)$. Ana-

log $N(\alpha, 1)$. Până aici $MBNP$ este dreptunghi, iar impunând condiția ca toate laturile

să fie egale obținem că: $MP = PN \Leftrightarrow \alpha - 1 = \beta - 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Acum $P \in [CA]$.

Determinăm ecuația dreptei CA : $\frac{y-1}{x-1} = \frac{5-1}{1-3} \Leftrightarrow 2x+y-7=0 \Rightarrow 3\alpha-7=0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{3} = \beta \Rightarrow P\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) \in [AC]$, deoarece $1 < \frac{7}{3} < 3$. Deci lungimea laturii pătratului $MBNP$ este $\frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$.

495. Determinăm ecuația înălțimii din vârful C . $h_C : \frac{y-(-1)}{x-2} = m_C$, unde m_C este panta dreptei h_C . Dar $h_C \perp AB \Rightarrow m_C \cdot m_{AB} = -1 \Leftrightarrow m_C \cdot \frac{1-2}{-1-0} = -1 \Leftrightarrow m_C = -1 \Rightarrow h_C : x+y-1=0$. Analog se obține că $h_B : 2x-3y+5=0$. Pentru a găsi coordonatele lui $H(x, y)$ trebuie să găsim intersecția dreptelor h_C și h_B . Deci obținem sistemul:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-3y+5=0 \end{cases} \Rightarrow 5x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5}. \text{ Astfel } H\left(-\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

496. Analog ca și la problema precedentă se determină coordonatele ortocentrului

$H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Acum fie $O(x, y)$ și folosind relația lui Sylvester: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ obținem că: $\left(\frac{2}{3}-x\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}-y\right)\vec{j} = (-1-x)\vec{i} + (-3-y)\vec{j} + (-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (2-x)\vec{i} + (-y)\vec{j} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}-x\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}-y\right)\vec{j} = (1-3x)\vec{i} + (-2-3y)\vec{j} \Rightarrow 1-3x = \frac{2}{3} - x$ și $-2-3y = \frac{1}{3} - y \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ și $y = -\frac{7}{3}$, deci $O\left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}\right)$.

497. Fie $I(x, y)$ centrul cercului înscris triunghiului ABC și d_{AB} , d_{BC} , d_{CA} ecuațiile

dreptelor ce au ca suport laturile triunghiului. Avem că: $d(I, d_{AB}) = d(I, d_{BC}) = d(I, d_{CA})$. Dar $d_{AB} : \frac{y-1}{x-2} = \frac{-1-1}{-2-2} \Leftrightarrow d_{AB} : x-2y=0$, iar cum BC este paralelă cu axa Ox se obține că $d_{BC} : y+1=0$, iar în mod ananalog $d_{CA} : x-2=0$. Folosind formula distanței de la un punct la o dreaptă obținem că: $\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = |y+1| = |x-2|$.

Relația $|y+1| = |x-2|$ reprezintă ecuația celor două bisectoare (interioară și exterioară) a unghiului A . Noi ne dorim să eliminăm ecuația bisectoarei exterioare. În primul caz

avem că: $y+1 = x-2 \Leftrightarrow x-y-3=0$ și intersectând cu dreapta AB obținem punctul de coordonate $(6, 3)$, care este în afara triunghiului ABC , deci $y+1 = x-2$ este ecuația bisectoarei exterioare. Deci rămânem cu $y+1 = -x+2 \Leftrightarrow x+y-1=0$. Analog

pentru $\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = |y+1|$ se obține că $\frac{x-2y}{\sqrt{5}} = y+1 \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)y-x+\sqrt{5}=0$. Deci

obținem sistemul: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ (\sqrt{5}+2)y-x+\sqrt{5}=0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{5}$ și $y = 2 - \sqrt{5}$, de unde

$I(-1 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$.

498. Pentru a determina punctele A, B, C determinăm intersecția dreptelor AB, BC și

$$CA. A(x_A, y_A) \in AB \cap CA \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2y_A + 4 = 0 \\ x_A + 3y_A + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_A = 0 \text{ și } x_A = -4, \text{ deci } A(-4, 0).$$

$$B(x_B, y_B) \in AB \cap BC \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 2y_B + 4 = 0 \\ 2x_B + y_B - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_B = 0 \Rightarrow x_B = 0 \text{ și } y_B = 2, \text{ deci}$$

$$B(0, 2). C(x_C, y_C) \in BC \cap CA \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_C + y_C - 2 = 0 \\ x_C + 3y_C + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x_C = 10 \Rightarrow x_C = 2 \text{ și } y_C = -2,$$

deci $C(2, -2)$.

499. Punctul $M(x, y)$ este pe cerc $\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4$ (*). $\overrightarrow{AM} = (x - 4)\vec{i} + (y - 2)\vec{j}$

și $\overrightarrow{CM} = x\vec{i} + (y - 1)\vec{j}$. Dreapta AM este tangentă la cerc $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow (x - 4) \cdot x + (y - 2) \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 - 4x - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 5 - 4x. \text{ Substituind în (*) obținem că: } x^2 + (4 - 4x)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 17x^2 - 32x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 208 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{13}}{17} \Rightarrow y_1 = 5 - 4x_1 =$$

$$5 - 4 \cdot \frac{16 + 2\sqrt{13}}{17} = \frac{21 - 8\sqrt{13}}{17} \Rightarrow y_2 = 5 - 4x_2 = 5 - 4 \cdot \frac{16 - 2\sqrt{13}}{17} = \frac{21 + 8\sqrt{13}}{17}$$

$$\text{Deci } M\left(\frac{16 + 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 - 8\sqrt{13}}{17}\right) \text{ și } M\left(\frac{16 - 2\sqrt{13}}{17}, \frac{21 + 8\sqrt{13}}{17}\right).$$

500. Cercurile \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt tangente $\Leftrightarrow d(O(0, 0), M(x, y)) = 2R \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 4$, deci punctele M se află pe un cerc.

501. Triunghiul AMB este dreptunghic în $M \Leftrightarrow AM^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y -$

$$2)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 - 6y + 10 = 10 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 -$$

$$2y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}. \text{ Deci punctele } M \text{ se află}$$

pe un cerc.

502. Fie $G(x_G, y_G)$ centrul de greutate comun triunghiurilor $AB_\alpha C_\beta$. Atunci $1 + (-2) +$

$$0 = 3x_G \text{ și } -3 + \alpha + \beta = 3y_G \Rightarrow \alpha + \beta = 3y_G + 3 \text{ (*)}. \text{ Cum punctul } G \text{ este fix } \Rightarrow 3y_G + 3$$

este o constantă, deci (*) reprezintă ecuația unei drepte.

503. Determinăm ecuația lui AB : $\frac{y - 0}{x - (-1)} = \frac{0 - 2}{-1 - 1} \Leftrightarrow \frac{y}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Acum $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB)$. $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Distanța $d(C, AB) =$

$\frac{|x_C - y_C + 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \frac{|x_C - y_C + 1|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |x_C - y_C + 1| = 1 \Leftrightarrow x_C - y_C = 0$ sau $x_C - y_C + 2 = 0$. Deci avem o infinitate de puncte C cu proprietatea cerută.

504. Fie $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = k \Rightarrow AC = kCB, AB = kAC \Rightarrow AB = k^2CB. \frac{AC}{CB} = k \Rightarrow$

$x_C = \frac{x_A + kx_B}{1+k}, y_C = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$. Dar $AB = AC + CB \Rightarrow k^2CB = kCB + CB \Rightarrow$

$(CB > 0) k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (k > 0)k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. x_C = 1 =$

$\frac{x_A + kx_B}{1+k}, x_B = \frac{1+k-x_A}{k} = \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, y_B = \frac{2(1+k)-y_A}{k} = \frac{2\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow (x_B + x_A)^2 -$

$y_B = \frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}.$

505. $AB : y = \frac{3x+8}{7} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{7}; BC : y = \frac{x-6}{-2} \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{2}$. Fie

d_1, d_2, d_3 cele 3 înălțimi ale $\triangle ABC : d_1 \perp AB, d_2 \perp BC, d_3 \perp AC. m_{d_1} = -\frac{7}{3}, C \in$

$d_1 \Rightarrow d_1 : y = -\frac{7}{3}x - \frac{13}{3}; m_{d_2} = 2, A \in d_2 \Rightarrow d_2 : y = 2x + 9. P$ este ortocentru

$\Rightarrow P = d_1 \cap d_2 \Rightarrow P(-\frac{40}{13}, \frac{37}{13}). A_{\triangle PAB} = \frac{275}{26}$. Fie $M = d_2 \cap BC \Rightarrow M(-\frac{3}{2}, 6)$.

Fie P' simetricul lui P față de dreapta $BC \Rightarrow P'(\frac{1}{13}, \frac{119}{13})$.

506. $x_G = \frac{10}{3}, y_G = 2$ Folosind formula distanței obținem: $\left| \frac{m \cdot \frac{10}{3} - 2 + 2}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 2$ Cum

$m > 0$, obținem: $m \cdot 10 = 6 \cdot \sqrt{m^2 + 1}$ Deci: $m = \frac{6}{8} \Rightarrow 8 \cdot m = 6$

507. Fie G centrul de greutate $\Rightarrow x_G = -\frac{1}{3}, y_G = \frac{5}{3}$. Panta dreptei OD este:

$\text{panta}_{OD} = \frac{y_D}{x_D}$ Iar panta dreptei OG este -5 . Cum dreptele sunt perpendiculare,

obținem: $\frac{y_D}{x_D} = \frac{1}{5}$ Astfel, avem: $5 \cdot \frac{y_D}{x_D} + 2 = 3$

508. Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C) \Rightarrow G(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$.

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 18 \\ y_A + y_B + y_C = 21 \end{cases} \quad (1); \quad \{C\} = AC \cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x_C - y_C + 1 = 0 \\ 5x_C - 7y_C + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14x_C - 7y_C + 7 = 0 \\ 5x_C - 7y_C + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 9x_C - 9 = 0 \Rightarrow C(1, 3) \begin{cases} x_A + x_B = 17 \\ y_A + y_B = 18 \end{cases} \quad (2);$$

$$\begin{cases} 5x_A - 7y_A + 16 = 0 (A \in AC) \\ 2x_B - y_B + 1 = 0 (B \in BC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_A - 14y_A + 32 = 0 \\ 10x_B - 5y_B + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10(x_A + x_B) - 14y_A -$$

$$5y_B + 37 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14y_A + 5y_B = 207 \\ y_A + y_B = 18 \end{cases} \Rightarrow y_A = 13, y_B = 5. \quad 5x_A = 7 \cdot 13 + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$x_A = 15, x_B = 2 \Rightarrow A(15, 13), B(2, 5).$$

$$AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 15 & 13 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB : x \cdot \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 15 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB : 8x - 13y + 49 = 0$$

509. Fie α unghiul dintre dreptele d și d' , unde d are panta m , iar d' are panta m' .

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|; \quad d' : x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow d' : y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$\left| \frac{m + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{2m + 1}{2 - m} \right|. \quad \text{Cazul 1: } \frac{2m + 1}{2 - m} = 1 \Rightarrow 2m + 1 = 2 - m \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow$$

$$m = \frac{1}{3}. \quad d_1 : y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow d_1 : y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow d_1 : x - 3y - 2 = 0.$$

$$\text{Cazul 2: } \frac{2m + 1}{2 - m} = -1 \Rightarrow 2m + 1 = -2 + m \Rightarrow m = -3. \quad d_2 : y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow$$

$$d_2 : 3x + y + 4 = 0. \quad d' : x + 2y + 5 = 0, \text{ pentru } x = -1 \Rightarrow y = -2 \text{ și } x = -3, y = -1.$$

510. $AB \parallel CD \Rightarrow m_{CD} = m_{AB} = 2$ și $AD \parallel BC \Rightarrow m_{BC} = m_{AD} = 3$. $\{A\} = AB \cap AD \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_A = 2x_A \\ y_A = 3x_A - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x_A - 1 = 2x_A \Rightarrow x_A = 1, y_A = 2, A(1, 2). \text{ Deoarece } M - \text{ mijlocul}$$

$$[AC] \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 3; \quad 2y_M = y_A + y_C \Rightarrow y_C = 4. \quad CD : 2x - y - 2 = 0,$$

$$AD : y = 3x - 1. \quad \{D\} = AD \cap CD \Rightarrow \begin{cases} y_D = 2x_D - 2 \\ y_D = 3x_D - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_D - 2 = 3x_D - 1 \Rightarrow x_D =$$

$$-1, y_D = -4. \text{ Deoarece } M - \text{ mijlocul } [BD], M(2, 3) \Rightarrow 2x_M = x_B + x_D \Rightarrow x_B = 5; \quad 2y_M =$$

$$y_B + y_D \Rightarrow y_B = 10. \quad N - \text{ mijlocul lui } [BC] \Rightarrow N(4, 7), \quad P - \text{ mijlocul lui } [CD] \Rightarrow P(1, 0).$$

$$BD : \frac{y + 4}{7} = \frac{x + 1}{3} \Rightarrow BD : 7x - 3y - 5 = 0. \quad AC : x - y + 1 = 0.$$

511. Mai întâi, aflăm punctul comun al celor două drepte rezolvând sistemul format de

$$\text{ecuațiile lor: } \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Rezolvăm sistemul și obținem punctul } A(1, 1). \text{ Acum,}$$

ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și prin originea $O(0, 0)$ este: $x = y$

512. Fie $A(1, y) \in d_1$, $B(x, 1) \in d_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat cu $[AB]$ diagonală $\implies \vec{OA} \cdot \vec{OB} = x + y = 0$ și $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Așadar, $A(1, -x)$, $B(x, 1)$ și $C(1+x, 1-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. $C \in d : x + y = 2$. $|\vec{AB}| = \sqrt{1+x^2}\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. $\mathcal{A}_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$.

513. Ecuația dreptei determinată de punctele $A(a, 0)$ și $F(-b, b)$ este $bx + (a+b)y = ab$.

Ecuația dreptei determinată de punctele $B(0, b)$ și $E(a, -a)$ este $(a+b)x + ay = ab$.

Intersecția segmentelor AF și BE poate fi determinată ca soluția unică $M\left(\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$ a sistemului liniar

$$\begin{cases} bx + (a+b)y = ab, \\ (a+b)x + ay = ab. \end{cases} \quad \text{Înălțimea din vârful } C \text{ al tri-$$

unghiului ABC_{Δ} are ecuația $ax - by = 0$. Se poate observa, că coordonatele punctului M

satisfac ecuația dreptei $ax - by = 0$. Aria triunghiului AMC_{Δ} este $\mathcal{A} = \frac{a^3b}{2(a^2+ab+b^2)} \neq \frac{a^2b^2}{2(a^2+ab+b^2)}$, deoarece $a > 0$ și $a \neq b$.

514. Notăm $d_1 \cap Ox = \{D\} \implies y_D = 0, x_D = 4 \iff D(4, 0)$. $d_1 \cap Oy = \{D'\} \implies$

$x_{D'} = 0, y_{D'} = 4 \iff D'(0, 4)$. Avem, așadar, $d \perp DD'$; Fie M mijlocul segmentului

$DD' \implies M(2, 2)$. $m_{d_1} = -1 \implies m_d = 1 \iff d : y = x$. Cum $A \in d \implies x_A = y_A$.

Notăm cu d_3 dreapta de ecuație $y = 3x$. $B = pr_{d_3}(A) \implies y_B = 3x_B$. Avem

$AB \perp d_3$. $d_3 : y = 3x \implies m_{d_3} = 3 \implies m_{AB} = -\frac{1}{3}$. Fie $x_A = a \implies y_A = a$. Atunci, avem

ecuația dreptei $AB : y - a = -\frac{1}{3}(x - a) \iff y = -\frac{x}{3} + \frac{4a}{3}$. Cum $\{B\} = AB \cap d_3 \implies$

$3x_B = -\frac{1}{3} \cdot x_B + \frac{4a}{3} \iff 9x_B = -x_B + 4a \iff x_B = \frac{2a}{5} \implies y_B = \frac{6a}{5} \implies B\left(\frac{2a}{5}, \frac{6a}{5}\right)$.

Fie M_2 mijlocul segmentului $AB \iff x_{M_2} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7a}{10}, y_{M_2} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{11a}{10} \implies$

$M_2\left(\frac{7a}{10}, \frac{11a}{10}\right)$, deci M_2 aparține dreptelor de ecuație $x - \frac{11}{7}y = 0$ sau $y = \frac{11}{7}x$.

515. Fie $d_1 : -7x + 3y + 2 = 0$, $d_2 : x + 2y - 10 = 0$, $d_3 : -5x + 7y + 16 =$

0 . Dacă le intersectăm două câte două obținem: $d_1 \cap d_2 = \{A\}, A(2, 4)$, $d_1 \cap d_3 =$

$\{B\}, B(-1, -3)$, $d_2 \cap d_3 = \{C\}, C(6, 2)$. Reprezentând în planul xOy semiplanele speci-

fice fiecărei inecuații obținem că mulțimea soluțiilor sistemului este de fapt interiorul

triunghiului ABC , împreună cu frontiera acestuia. Aria acestei mulțimi este aria lui

$$ABC, \text{ adică } \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -34, \text{ deci aria}$$

este 17.

516. Fie $d_1 \cap O_x = A'(\frac{2}{5}, 0), d_1 \cap O_y = B(0, -2)$. M este mijlocul lui $AB \Rightarrow x_M = \frac{1}{5}, y_M = -1 \Rightarrow M(\frac{1}{5}, -1)$. $m_{d_1} = 5 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{5}$. Dreapta d este de ecuație

$$y + 1 = -\frac{1}{5}(x - \frac{1}{5}) \iff y = -\frac{1}{5}x - \frac{24}{25} \Rightarrow A = (\frac{76 \cdot 2}{5 \cdot 27}, -\frac{32}{27}) \begin{cases} x_{B'} = \frac{y_{B'} + 2}{5} \\ x_{B'} = \frac{2y_{B'} + 8}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{B'} = -6, x_{B'} = -\frac{4}{5}. \text{ Aria} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{2075}{189}$$

517. $d \cap O_x = D_1(-\frac{5\sqrt{2}}{4}, 0)$. $d \cap O_y = D_2(0, -\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. $OD_1 \approx 1,7; OD_2 \approx 4$. Fie

$OF \perp D_1D_2 \Rightarrow OF = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \approx 1,6$. Dacă un punct P este între D_1 și F nu există puncte **super**, dar dacă punctul P este între D_2 și $F \Rightarrow$ există 3 puncte **super**.

518. Determinăm ecuațiile dreptelor ce formează triunghiul ABC : $AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} =$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{1} \iff x - y + 2 = 0; \quad AC : \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \iff$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{-4} \iff 2x + y - 5 = 0; \quad BC : \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \iff \frac{x - 2}{1} =$$

$$\frac{y - 4}{-5} \iff 5x + y - 14 = 0. \text{ Cum pentru toate dreptele coeficientul lui } x \text{ este pozitiv,}$$

putem defini funcțiile f_{AB}, f_{AC}, f_{BC} . Coordonatele centrului de greutate sunt $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2$. Așadar, avem că: $f_{AB}(G) = f_{AC}(G) =$

$-f_{BC}(G) = 1$, deci $f_{AB}(G)f_{BC}(G)f_{CA}(G) = -1 < 0$. Cum $3 - (-1) + 2 = 6 > 0$ și

$5 \cdot 1 + 3 - 14 = -6 < 0$, avem că $f_{AB}(C) + f_{BC}(A) = 1 + (-1) = 0$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. $(1 - \alpha)x_a +$

$\alpha x_b - (1 - \alpha)y_a - \alpha y_b + 2 = 4\alpha - 4\alpha - 2 + 2 = 0$. Avem deci că $\forall \alpha \in \mathbb{R}, X((1 - \alpha)x_a +$

$\alpha x_b, (1 - \alpha)y_a + \alpha y_b) \in AB$, deci $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_{AB}(X((1 - \alpha)x_a + \alpha x_b, (1 - \alpha)y_a + \alpha y_b)) = 0$.

De fapt, mulțimea punctelor X de această formă reprezintă mulțimea punctelor ce se află

pe dreapta determinată de A și B . Condiția $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC$ este echivalentă cu

$$(x_M, y_M) \text{ să fie soluție a sistemului de inecuații: } \begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y - 5 > 0 \\ 5x + y - 14 < 0 \end{cases} \quad (\text{acest lucru se poate$$

observa grafic, hașurând semiplanele date de fiecare inecuație și observând că intersecția lor este tocmai interiorul triunghiului ABC). Așadar, dacă $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC$, avem că $f_{AB}(M) = f_{AC}(M) = 1, f_{BC}(M) = -1$, deci $f_{AB}(M)f_{AC}(M)f_{BC}(M) = -1 < 0$. Astfel, implicația de la stânga la dreapta este corectă. Implicația inversă este falsă și vom oferi un contra-exemplu: fie punctul $N(x_N, y_N)$ astfel încât $f_{AB}(N) = f_{AC}(N) = f_{BC}(N) = -1$. Atunci $f_{AB}(N)f_{AC}(N)f_{BC}(N) = -1 < 0$, dar cum $f_{AB}N = -1$, rezultă că $x_N - y_N + 2 < 0$, deci (x_N, y_N) nu este soluție a sistemului de inecuații ce descrie interiorul lui ABC . Așadar, nu are loc echivalența celor două afirmații.

519. Fie $M(x, y)$ un punct oarecare. Distanța de la M la O este $\sqrt{x^2 + y^2}$. Distanța de la M la dreapta $d : x = 1 \iff x - 1 = 0$ este $\frac{|x - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x - 1|$. Așadar, ecuația locului geometric cerut este: $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - 1| \iff x^2 + y^2 = (x - 1)^2 \iff y^2 = -2x + 1 \iff x = \frac{y^2 - 1}{-2}$.

520. $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0 \iff x^2 - xy + 5xy - 5y^2 = 0 \iff x(x - y) + 5y(x - y) = 0 \iff (x + 5y)(x - y) = 0$, care este reuniunea dreptelor $d_1 : x = -5y$ și $d_2 : x = y$, care sunt concurente în origine.

521. Fie $M(x, y)$. Avem că $MA^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$ și $MB^2 = (x + 1)^2 + (y - 7)^2 \Rightarrow MA^2 - MB^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 - (x + 1)^2 - (y - 7)^2 = -8x + 6y - 25 \Rightarrow MA^2 - MB^2 = 4 \iff -8x + 6y - 25 = 4 \iff -8x + 6y - 29 = 0$. Așadar, locul geometric al punctelor cu proprietatea din enunț este dreapta de ecuație $d : -8x + 6y - 29 = 0$. Cum $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{-4}$ și $m_d = \frac{4}{3}$, rezultă că dreapta d este perpendiculară pe AB .

522.

$d_1 : y = m_1x + n_1$, unde m_1 este panta dreptei d_1 ; $d_2 : y = m_2x + n_2$ unde m_2 este panta dreptei d_2 , $d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$. $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{5}{-5} = -1$ și $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 1 \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \boxed{A}$ este adevărată, iar \boxed{B} falsă. Mijlocul lui $[AB]$ este $M(x_M, y_M)$. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$,

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \Rightarrow M(3, 2). \quad N(x_N, y_N) \text{ este mijlocul lui } [OC]. \quad x_N = \frac{x_O + x_C}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_N = \frac{y_O + y_C}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right). \quad \begin{cases} AC : y = -x + 6 \\ Oy : x = 0 \end{cases} \Rightarrow CA \cap Oy = \{E\}, E(0, 6).$$

$$\begin{cases} BC : y - 4 = x \\ Ox : y = 0 \end{cases} \Rightarrow BC \cap Ox = \{F\}, F(-4, 0). \quad P - \text{mijlocul lui } [EF] \Rightarrow x_P = -2, y_P =$$

$$3. \quad MN : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow MN : x + 5y - 13 = 0. \quad M, N, P - \text{coliniare} \iff P \in MN \iff x_P + 5y_P - 13 = 0 - \text{adevărat.}$$

$$523. \quad d_1 : y = m_1x + n_1; \quad d_2 : y = m_2x + n_2, \quad d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2. \quad d : y = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow$$

$$m_d = \frac{4}{3} \text{ și } d \parallel d' \Rightarrow m_{d'} = m_d = \frac{4}{3}. \quad d' : 4x - 3y + 3n = 0. \quad \text{dist}(d', d) = \text{dist}(A, d')$$

$$\text{unde } A \in d. \quad \text{dist}(A, d') = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow A(0, 1). \quad \text{dist}(A, d') = \frac{4x_A - 3y_A + 3n}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$\frac{3|n - 1|}{5} = 3 \Rightarrow |n - 1| = 5 \Rightarrow n = \{-4, 6\}. \quad d'_1 : 4x - 3y + 18 = 0, \quad d'_2 : 4x - 3y - 12 = 0.$$

$$524. \quad x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \Rightarrow x_B = 2, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \Rightarrow y_B = 5, B(2, 5).$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6. \quad AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$$

$$2\sqrt{2}. \quad \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot \text{dist}(B, AC)}{2} = 6 \Rightarrow \text{dist}(B, AC) = 3\sqrt{2}. \quad BG - \text{mediană} \Rightarrow BG :$$

$$\frac{x - 2}{2 - 2} = \frac{y - 1}{5 - 1}. \quad \text{Prin convenție, dacă numitorul este nul, atunci și numărătorul este nul}$$

$$\Rightarrow BG : x = 2, \text{ deci } BG \text{ nu are pantă} \Rightarrow BG \parallel Oy.$$

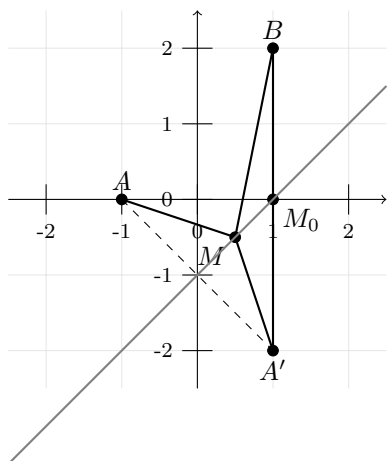
$$525. \quad \text{Distanța de la punctul } P(0, a) \text{ la dreapta } d_1 \text{ este dată de: } d(P, d_1) = \frac{|-3a + 1|}{\sqrt{10}},$$

$$\text{Distanța de la punctul } P(0, a) \text{ la dreapta } d_2 \text{ este dată de: } d(P, d_2) = \frac{|a + 2|}{\sqrt{10}}. \quad \text{Condiția ca}$$

$$\text{cele două distanțe să fie egale este îndeplinită pentru } a \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$526. \quad \text{Fie } A'(1, -2) \text{ simetricul lui } A \text{ față de } d \text{ și } \{M_0(1, 0)\} = BA' \cap d. \quad \text{Atunci } |AM_0| +$$

$$|M_0B| = |A'M_0| + |M_0B| = |A'B| \leq |A'M| + |MB| = |AM| + |MB| \text{ și } |AM_0| = |M_0B| = 2.$$



Deci, oricare ar fi $M \in d$, $s_M \in [4, \infty)$ și avem: **A** adevărată ($\forall M \in d : s_M \geq 4 > \sqrt{2}+2$); **B** falsă ($s_M \rightarrow \infty$, când $|MM_0| \rightarrow \infty$); **C** falsă ($s_{M_0} = 4 < \sqrt{2} + \sqrt{10}$, pentru că $\sqrt{2} + \sqrt{10} > 4 \Leftrightarrow 12 + 2\sqrt{20} > 16 \Leftrightarrow \sqrt{5} > 1$); **D** falsă ($\forall M \in d : s_M \geq 4 > \sqrt{2} + 2$).

527. Fie $A'(1, 0)$. Deoarece înălțimea din A pe BD este mai mare decât înălțimea din A' pe BD , S este mai mare decât aria lui $A'BCD$. Fie $C'(-1, 0)$. Deoarece înălțimea din C pe BD este mai mare decât înălțimea din C' pe BD , aria lui $A'BCD$ este mai mare decât aria lui $A'BC'D$. Deoarece suma înălțimilor din B și D pe $A'B'$ este 2, aria lui $A'BC'D$ este 2. Deci, $S \in (2, 4)$.

528. Într-adevăr pantele dreptelor AB și AC sunt $m_{AB} = \frac{4-1}{-7-(-4)} = -1$ respectiv

$m_{AC} = \frac{5-1}{0-(-4)} = 1$. Așadar $AB \perp AC$ deoarece $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$. De altfel dreptele AB și AC sunt paralele cu cele două bisectoare ale reperului cartezian considerat. **B**

Adevărat. Orice triunghi XYZ are același centru de greutate cu triunghiul său median întrucât dreapta suport a oricărei mediane a triunghiului XYZ este dreaptă suport pentru o mediană a triunghiului median al ΔXYZ . **C** Fals. Ortocentrul triunghiului dreptunghic ABC este vârful drept $A(-4, 1)$, iar ortocentrul triunghiului median MNP , care este dreptunghic, este vârful drept $M\left(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$. **D** Fals. Centrul cercului circumscris

triunghiului dreptunghic ABC este mijlocul $M \left(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2} \right)$ al ipotenuzei sale, iar centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic MNP este mijlocul $U \left(\frac{-2 + \left(\frac{-7}{2}\right)}{2}, \frac{3 + \frac{5}{2}}{2} \right) = U \left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{4} \right)$ al ipotenuzei sale. **Observație.** Pentru calculul coordonatelor centrului de greutate, al ortocentrului sau centrului cercului circumscris unui triunghi există formule binecunoscute. În cazul problemei noastre alternativa aplicării acestora ar însemna soluții mai lungi mai ales pentru punctele C și D . Totuși, pentru B alternativa mai sus menționată este rezonabilă: Coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC sunt $\left(\frac{-4 + (-7) + 0}{3}, \frac{1 + 4 + 5}{3} \right)$ adică $G_{\Delta ABC} \left(-\frac{11}{3}, \frac{10}{3} \right)$. Ținând seama de faptul că $M \left(\frac{-7 + 0}{2}, \frac{4 + 5}{2} \right)$, $N \left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right)$, $P \left(\frac{-4 + (-7)}{2}, \frac{1 + 4}{2} \right)$ adică $M \left(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right)$, $N(-2, 3)$, $P \left(-\frac{11}{2}, \frac{5}{2} \right)$, deducem că centrul de greutate al triunghiului MNP are coordonatele $\left(\frac{-\frac{7}{2} + (-2) + \left(-\frac{11}{2}\right)}{3}, \frac{\frac{9}{2} + 3 + \frac{5}{2}}{3} \right)$ adică $G_{\Delta MNP} \left(-\frac{11}{3}, \frac{10}{3} \right)$, fapt care arată că $G_{\Delta ABC} = G_{\Delta MNP}$.

529. Cum $|AB|^2 = 32$, $|BC|^2 = 13$, $|CA|^2 = 37$ și $|CA|^2 + |CB|^2 = 50 \neq 32 = |AB|^2$; $|AB|^2 + |AC|^2 = 69 \neq 13 = |BC|^2$; $|BA|^2 + |BC|^2 = 45 \neq 37 = |CA|^2$

B Fals. Într-adevăr, aria triunghiului DEF nu este jumătate din produsul lungimilor a două dintre laturile sale, deoarece ΔDEF nu este dreptunghic, așa cum rezultă din faptul că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ și din faptul că ΔABC nu este dreptunghic, conform lui **A**.

C Adevărat. Într-adevăr, fiecare dintre produsele $|EF| \cdot \text{dist}(A, BC)$, $|FD| \cdot \text{dist}(B, CA)$ și $|DE| \cdot \text{dist}(C, AB)$ este egal cu aria triunghiului ABC . De exemplu, ținând seama de faptul că DE este linie mijlocie în ΔABC , avem $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$, și deci $|DE| \cdot \text{dist}(C, AB) =$

$\frac{1}{2}|AB| \cdot \text{dist}(C, AB) = \mathcal{A}_{\Delta ABC}$. Pentru a arăta că valoarea comună a celor trei produse

este 10, observăm că $\text{dist}(A, BC) = \frac{|3(-2) + 2(-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{13}}$, deoarece $A(-2, -1)$ și

(BC) au ecuația $3x+2y-12=0$. De asemenea, $|EF| \cdot \text{dist}(A, BC) = \frac{1}{2}|BC| \cdot \text{dist}(A, BC) = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{20}{\sqrt{13}} = 10$.

D **Adevărat.** Cele 4 triunghiuri au arii egale deoarece ele sunt congruente. Deoarece suma ariilor lor este tocmai $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 10$, deducem că valoarea lor comună este, într-adevăr, $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Observație. Punctul **C** poate fi complet rezolvat și prin calcul numeric. Ecuațiile dreptelor suport ale laturilor triunghiului ABC : (AB) cu ecuația $x-y+1=0$, (BC) cu ecuația $3x+2y-12=0$, (CA) cu ecuația $x-6y-4=0$. Cum $A(-2, -1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 0)$.

$$\text{dist}(A, BC) = \frac{|3(-2) + 2(-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{13}}, \quad \text{dist}(B, CA) = \frac{|2 - 6 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-6)^2}} = \frac{20}{\sqrt{37}}$$

$$\text{dist}(C, AB) = \frac{|4 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}. \quad \text{Așadar, } |EF| \cdot \text{dist}(A, BC) = \frac{1}{2}|BC| \cdot \text{dist}(A, BC) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{20}{\sqrt{13}} = 10. \quad |FD| \cdot \text{dist}(B, CA) = \frac{1}{2}|AC| \cdot \text{dist}(B, CA) = \frac{1}{2}\sqrt{37} \cdot \frac{20}{\sqrt{37}} = 10.$$

$$|DE| \cdot \text{dist}(C, AB) = \frac{1}{2}|AB| \cdot \text{dist}(C, AB) = \frac{1}{2}\sqrt{32} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 10.$$

530. Fie C un cerc din \mathcal{C} cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcție convexă, iar minimum ei se obține pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din \mathcal{C} este $\sqrt{5}$. Prin urmare **A** este falsă iar **B** este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M , este la distanțe egale față de cele două axe, adică $M = M(r, r)$. Dar M este pe dreapta d , deci $r - 2r = 2$, o contradicție cu $r > 0$, deci **C** este falsă. Triunghiul ABD este isoscel și dreptunghic, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică $(6, 2) \in d$, deci **D** este adevărată.

531. Ecuația perpendicularei este $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} \iff y = 2x$, așadar, panta dreptei d este $m = -\frac{1}{2}$. Cum $P \in d$, putem scrie ecuația dreptei d astfel: $y - y_P = m(x - x_P) \iff y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \iff x + 2y - 15 = 0$.

532. $12x^2 - 12y^2 - 10xy - x + 34y - 20 = 0 \iff 12x^2 - 18xy + 15x + 8xy - 12y^2 +$

$10y - 16x + 24y - 20 = 0 \iff 3x(4x - 6y + 5) + 2y(4x - 6y + 5) - 4(4x - 6y + 5) = 0 \iff$
 $(3x + 2y - 4)(4x - 6y + 5) = 0$. Fie un punct $M(x_0, y_0)$ a cărui coordonate satisfac ecuația
din enunț. Atunci avem că $3x_0 + 2y_0 - 4 = 0$ sau $4x_0 - 6y_0 + 5 = 0$, deci punctul M
aparține dreptei $d_1 : 3x + 2y - 4 = 0$ sau dreptei $d_2 : 4x - 6y + 5 = 0$. Așadar, mulțimea
soluțiilor este reuniunea acestor două drepte. Se observă că $m_1 = -\frac{3}{2}$ și $m_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,
deci $m_1 m_2 = -1$, așadar dreptele sunt perpendiculare.

533. Condiția de concurență este echivalentă cu condiția ca sistemul format de cele trei

ecuații cu două necunoscute să fie compatibil, adică: $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$. Dacă adăugăm

coloanele 2 și 3 la prima coloană și dăm factor comun, ecuația de mai sus se poate scrie

$(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$ sau $(a + b + c)(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2) = 0$. Astfel, determi-

nantul se anulează dacă unul dintre factori se anulează, ceea ce înseamnă că primele două
afirmații sunt adevărate. Pe de altă parte, se poate verifica imediat, prin calculul direct, că
determinantul este egal cu $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$, deci și cea de-a treia implicație este
adevărată. Ultima condiție este în contradicție cu condiția $\boxed{\text{C}}$, deci este falsă.

534. Problema concurenței celor trei drepte este echivalentă cu existența și unicitatea

soluției sistemului liniar format din ecuațiile celor 3 drepte. Fie $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & -5 \\ 7 & -6 & -\alpha \end{pmatrix}$

matricea extinsă a sistemului. Din teorema lui Kronecker-Capelli, acest lucru este echiva-

lent cu $\text{rang}(\hat{A}) = 2$. Cum există un minor de ordinul 2 nenul a lui A , condiția este

echivalentă cu $\det \hat{A} = 0$. $\det \hat{A} = 2 \cdot (-4) \cdot (-\alpha) + 7 \cdot (-3) \cdot (-5) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-6) -$
 $(-1) \cdot (-4) \cdot 7 - 2 \cdot (-5) \cdot (-6) - (-\alpha) \cdot (-1) \cdot (-3) = 8\alpha + 105 - 6 - 28 - 60 + 3\alpha =$
 $11\alpha + 11 \Rightarrow \det \hat{A} = 0 \iff \alpha = -1$.

535. $S = s \cdot r = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4R}$, unde $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$ este semiperimetrul și $S =$

$\sqrt{s(s-3)(s-4)(s-5)} = 6$ este aria triunghiului. Deci $r = 1$ și $R = \frac{5}{2}$.

536. Fie ABC triunghiul cu lungimile laturilor $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ (numere pitagorice,

deci triunghiul e dreptunghic) și $MNPQ$ pătratul cu latura x . Aria triunghiului este $S = 6$. Dacă $M, N \in [BC]$, $P \in [AC]$ și $Q \in [AB]$, considerăm înălțimea h_x din A pe QP , înălțimea h_a din A pe BC și obținem ecuația $h_a = h_x + x$. Din asemănarea triunghiurilor AQP și ABC , avem $\frac{h_x}{h_a} = \frac{x}{a}$, deci $h_a = h_a \cdot \frac{x}{a} + x \mid \cdot a \implies 2S = 2S \cdot \frac{x}{a} + xa \implies x = \frac{2aS}{2S + a^2} = \frac{12a}{12 + a^2}$. $a = 3 \implies x = \frac{12 \cdot 3}{12 + 3^2} = \frac{12}{7}$. Similar, $b = 4 \implies x = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4^2} = \frac{12}{7}$ și $c = 5 \implies x = \frac{12 \cdot 5}{12 + 5^2} = \frac{60}{37}$.

537. Teorema sinusurilor $\implies \frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sin C} = 2 \implies \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, m(\hat{A}) =$

$60^\circ (m(\hat{A}) \neq 120^\circ, \triangle ABC$ fiind nedegenerat, $m(\hat{C}) = 60^\circ, b = c = \sqrt{3}$. Perimetrul este $p = 3\sqrt{3}$. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{p \cdot r}{2} \implies r = \frac{1}{2}$ (lungimea razei cercului înscris).

538. Din faptul că $CA^2 = AB^2 + BC^2$ deducem folosind reciproca teoremei lui Pitagora

că triunghiul ABC este dreptunghic în B , deci **A** este falsă. Triunghiul ABC fiind dreptunghic, lungimea înălțimii din A este: $h_A = \frac{AB \cdot BC}{CA} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} \neq 4$ deci

B este falsă. Avem $S_{BIC} = r \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$. Avem $S_{ABC} = (AB \cdot BC) \cdot \frac{1}{2} = 24$ și $p_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = 12$, deci $r = S \cdot \frac{1}{p} = 2$. Astfel avem că: $S_{BIC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC = 6$,

deci **C** este adevărată. Observăm că triunghiurile AIB și AIC au aceeași înălțime din

I , astfel că: $\frac{S_{AIB}}{S_{AIC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$. Așadar **D** este falsă.

539. Folosind egalitatea $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$, obținem că $\frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) = \frac{a}{c} \cdot 2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) =$

$$2a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \cdot \cos(\gamma) = 2a \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} \cdot \cos(\gamma) = 2 \sin(\alpha) \cos(\gamma), \quad \frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{c}{a} \cdot 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) =$$

$$2c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} \cdot \cos(\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \cdot \cos(\alpha) = 2 \sin(\gamma) \cos(\alpha), \text{ de unde rezultă că: } \frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) +$$

$$\frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha) = 2 \cdot (\sin(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cos(\alpha)) = 2 \cdot \sin(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \sin(\alpha + (\alpha + 2r)) =$$

$$2 \cdot \sin(2 \cdot (\alpha + r)) \stackrel{\alpha + (\alpha + r) + (\alpha + 2r) = \pi}{3(\alpha + r) = \pi} 2 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

540. $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

$$\text{Deci, } \sin N + \cos N = \sin P + \cos P \iff \sqrt{2} \cos\left(N - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(P - \frac{\pi}{4}\right) \iff$$

$$\cos\left(N - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(P - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff -2 \sin \frac{N - P}{2} \cdot \sin\left(\frac{N + P}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff$$

$$\sin \frac{N - P}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff N = P. \text{ Rezultă că } \hat{N} = \hat{P} \text{ și cum } \hat{M} = \frac{\pi}{3}, \text{ triunghiul}$$

este echilateral.

541. $x_P^2 + y_P^2 = 1 \implies P \in$ cercului trigonometric. Cum $m_d = 3$, avem $m_{PP'} = -\frac{1}{3}$, deci

$PP' : y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{15} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Fie $M = PP' \cap d$. Avem $x_M = \frac{-7 + 3\sqrt{6}}{25}$ și $y_M = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{10}$, de unde rezultă $x_{P'} = \frac{-7 + 3\sqrt{6}}{30} < 2$.

542. Punctul M fiind pe cercul trigonometric cu coordonatele $x = \frac{1}{2}$ și $y = \frac{\sqrt{3}}{1}$, rezultă că măsura unghiului dintre axa Ox și dreapta OM este 60° . Astfel, după rotire unghiul dintre axa Ox și dreapta OM' este -30° . Deci $x' = \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar $y' = \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$. Obținem că $x' \cdot y' = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

543. A, B, C sunt în progresie aritmetică, așadar $2m(\hat{B}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$ și știm că $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = \pi$, de unde rezultă că: $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$ și $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$. Folosind teorema sinusului obținem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4 \Rightarrow a = 4 \sin A$, $b = 4 \sin B = 2\sqrt{3}$, $c = 4 \sin C \Rightarrow a + c = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} = 4(\sin A + \sin C) \Rightarrow 8 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Dar $\sin \frac{A+C}{2} = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos(A-C) = 2 \cos^2 \frac{A-C}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) - m(\hat{C}) = \frac{\pi}{6}$. Din $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$ rezultă că: $m(\hat{C}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

544. În orice triunghi ABC are loc relația $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$. Așadar, $5 + \operatorname{tg} C = 6 \operatorname{tg} C \Rightarrow \operatorname{tg} C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

545. Vom rescrie produsul $\sin A \sin B$ sub forma $4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$ folosind formula pentru $\sin 2\alpha$. Acum vom aplica următoarele relații ce leagă funcțiile trigonometrice ale jumătăților unghiurilor de semiperimetrul $p = \frac{a+b+c}{2}$ al triunghiului: $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$. Formulele pentru B și C se obțin prin permutări circulare. Așadar, rescriind egalitatea folosind formulele date, obținem: $4 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \frac{p(p-c)}{ab} \Rightarrow \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc^2} = \frac{p(p-c)}{ab} \Rightarrow \frac{4(p-a)(p-b)}{c^2} = 1 \Rightarrow 4 \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} = c^2 \Rightarrow -a^2 + ab - ac + ba - b^2 + bc + ca - cb + c^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b$.

546. Fie $\triangle ABC$ un triunghi oarecare. Folosind formula $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ și permutările ei circulare obținem că: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2}{p \cdot abc}$, unde cu S am notat aria triunghiului.

lui ABC . Folosind acum expresiile pentru raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris triunghiului: $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{4S}{abc}$, obținem: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{4} \cdot r \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R}$. Relația de mai sus este adevărată pentru orice triunghi, deci: $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{A_n}{2} \sin \frac{B_n}{2} \sin \frac{C_n}{2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$.

547. Din teorema cosinusului: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow a^2 + b^2 = xc^2 = x(a^2 + b^2) - 2xab \cos C \Rightarrow (a^2 + b^2)(1 - x) = -2xab \cos C < 2xab < x(a^2 + b^2) \Rightarrow 1 - x < x \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

548. $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}$. Cum $A + B + C = \pi$, rezultă că

$\frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$ și deci $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$. Simplificând în egalitate obținem: $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \Rightarrow \cos \frac{A-C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A-C}{2} = \pm \frac{B}{2} \Rightarrow$

$A \mp B - C = 0$ Așadar, avem că $A = B + C = \frac{\pi}{2}$ sau că $C = A + B = \frac{\pi}{2}$.

549. Din teorema sinusurilor avem că: $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$.

Relația din enunț se poate rescrie astfel: $2R \sin A \cos B + 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos A = R \sin A + R \sin B + R \sin C$. Simplificăm cu R și ne folosim de identitatea evidentă

$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ pentru a obține: $\sin(A + B) + \sin(A - B) + \sin(B + C) + \sin(B - C) + \sin(C + A) + \sin(C - A) = \sin A + \sin B + \sin C$ Cum $A + B + C = \pi$, iar $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, observăm că $\sin(A + B) = \sin C$, $\sin(B + C) = \sin A$, $\sin(C + A) = \sin B$. Așadar egalitatea noastră devine: $\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0(1)$. Vom demonstra acum că această sumă este egală cu 0 doar în cazul

triunghiurilor isoscele. $\sin(A - B) + \sin(B - C) = 2 \sin \frac{A-C}{2} \cos \frac{A+C-2B}{2}$. Ne mai folosim de faptul că: $\sin(C - A) = 2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{C-A}{2}$. Folosind aceste relații, (1) devine: $2 \sin \frac{A-C}{2} \left(\cos \frac{A+C-2B}{2} - \cos \frac{C-A}{2} \right) = 0, -4 \cdot \sin \frac{A-C}{2} \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = 0, \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} = 0$. Deci, pentru ca identitatea din enunț să aibă loc

trebuie ca cel puțin unul din termenii produsului din membrul stâng să fie nul, lucru echivalent cu $A - B = 0$ sau $B - C = 0$ sau $C - A = 0$. Așadar, triunghiul ABC trebuie

să fie isoscel.

$$550. \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \implies \begin{cases} \sin A = \frac{a}{2R} \\ \sin B = \frac{b}{2R} \\ \sin C = \frac{c}{2R} \end{cases} \quad . \text{ Așadar, } \sin^2 A + \sin^2 B =$$

$$\sin^2 C \iff \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2} \iff a^2 + b^2 = c^2 \iff \text{triunghiul este dreptunghic.}$$

551. Din geometria vectorială sau folosind succesiv faptul că linia mijlocie este paralelă

cu a treia latură și are lungimea jumătate din lungimea acesteia, obținem că punctul Q este centrul de greutate și al triunghiului ABC . De aici, B, Q, M sunt coliniare, deci și $B,$

K, Q sunt coliniare, \boxed{A} e adevărată. $\mathcal{A}[APN] = \frac{\frac{h_A}{2} \cdot PN}{2} = \frac{\frac{h_A}{2} \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_A \cdot BC}{2} = \mathcal{A}[ABC] \cdot \frac{1}{4}$. Analog, $\mathcal{A}[BPM] = \mathcal{A}[ABC] \cdot \frac{1}{4} \implies \mathcal{A}[PNCM] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[BPM] - \mathcal{A}[APN] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC] \implies \boxed{B}$ adevărată. $\mathcal{A}[PMN] = \mathcal{A}[PMC] - \mathcal{A}[MNC] = \frac{1}{4}\mathcal{A}[ABC]$, \boxed{C} e falsă. Cum $KQ = \frac{1}{3}KN$ și K - mijlocul lui $BN \implies KQ = \frac{1}{6}BN$, \boxed{D} e falsă.

552. Fie E și F picioarele înălțimilor din B , respectiv C . Atunci: $CE \perp BH \implies$

$CE = h_C; BF \perp HC \implies BF = h_B; AD \perp BC \implies HA = h_D$. Cum $CE \cap BF \cap HD =$

$\{A\} \implies A$ = ortocentrul triunghiului BHC , \boxed{C} adevărată. În triunghiului BDA , dreptunghic în \hat{D} , ortocentrul este punctul D ; iar dacă $D = C$, atunci triunghiul ABC e dreptunghic în \hat{C} , deci $H = C$, astfel că A, B, H nu pot fi coliniare.

553. Se poate arăta că patrulaterul $A_9A_8A_{12}A_{11}$ este un trapez isoscel și calculăm

pe rând baza mare B , baza mică b și înălțimea h a acestuia. Pornim cu observația că arcul mic format de oricare două puncte vecine are măsura $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Pentru

$B(=A_8A_{12})$: în triunghiul $\triangle A_8OA_{12}$ - isoscel cu $OA_8 = OA_{12} = R$, avem $m(A_8A_{12}) =$

$4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Ducând perpendiculara din vârful O pe segmentul A_8A_{12} , obținem

triunghiuri dreptunghice de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \implies B = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Pentru

$b(=A_9A_{11})$: Cum $\angle A_9OA_{11} = 60^\circ$, rezultă $\triangle ABC$ este echilateral $\implies b = R$. Pentru

h : fie $D, E \in A_8A_{11}$ a.i. $A_{11}D \perp A_8A_{12}$ și $A_9E \perp A_8A_{12}$. Notăm $x = A_{11}D$

și avem ca $x + R + x = R\sqrt{3} \implies x = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}$. Cum $\angle A_{11}A_{12}A_8$, unghi pe cerc,

are măsură $\frac{m(A_8A_{11})}{2} = \frac{3 \cdot 30^\circ}{2} = 45^\circ$, avem că triunghiul $\triangle A_{11}DA_{12}$ este isoscel și

dreptunghic $\implies h = x = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$. Atunci $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(R+R\sqrt{3}) \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2} = \frac{R^2(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{R^2}{2}$. Cum A_1 și A_7 sunt diametral opuse, triunghiul $\Delta A_1A_6A_7$ este dreptunghic, deci distanța căutată este lungimea segmentului A_1A_6 . Avem că $A_1A_7 = 2R$ și $m(\angle A_7A_1A_6) = \frac{m(A_6A_7)}{2} = 15^\circ \implies A_1A_6 = A_1A_7 \cdot \cos 15^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = R \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

554. Fie S aria lui ABC . Avem că $S = \frac{bc \sin A}{2}$. Notăm $k = bc \implies S = \frac{k \sin A}{2} \leq \frac{k \cdot 1}{2} = \frac{k}{2}$. Așadar, $S_{max} = \frac{bc}{2}$ și se obține pentru $\sin A = 1 \iff m(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$, adică atunci când ABC este dreptunghic în A .

555. Fie S aria lui ABC . Avem $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \sin C \cdot BC \cos C}{2} = \frac{BC^2}{2} \sin C \cos C = \frac{BC^2}{2} \operatorname{tg} x \cos^2 x = \frac{BC^2}{2} \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{9 \cdot 4}{5} = \frac{36}{5}$.

556. Fie E și D picioarele înălțimilor duse din vârfurile B respectiv A pe laturile opuse.

Se observă, că patrulaterul $DHEC$ este inscriptibil, de unde se obține că unghiul $AHB = DHE$ este suplementar unghiului C , care este la rândul lui suplementar unghiului $A+B$.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul AHB . Avem că $\frac{AH}{\sin(\frac{\pi}{2} - A)} = \frac{AB}{\sin(A+B)}$.

Așadar, avem că $\frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{\sin(\pi - C)} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$, unde pentru ultima egalitate am folosit teorema sinusurilor în triunghiul $ABC \implies AH = 2R \cos A = \frac{BC}{\sin A} \cos A = BC \operatorname{ctg} A$. Cum $\cos A = \frac{4}{5} \implies \sin A = \frac{3}{5} \implies \operatorname{ctg} A = \frac{4}{3}$. Deci, avem că $AH = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$.

557. $m(\hat{C}) = \pi - (m(\hat{A}) + m(\hat{B})) = \frac{\pi}{3}$. Fie S aria triunghiului. Avem că $S = \frac{ab \sin C}{2}$.

Raza cercului în care este înscris triunghiul este egală cu raza cercului circumscris.

Aplicăm acum teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \implies a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$. Prin urmare, $s = \frac{1}{2} 4R^2 \sin A \sin B \sin C$. Mai rămâne așadar să calculăm $\sin A$:

$\sin A = \sin \frac{5\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Așadar, $S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$.

558. Folosind relația $\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2 t$ scriem ecuația în formă $1 - 2 \sin^2 t = \sin t \iff$

$2 \sin^2 t + \sin t - 1 = 0$. Cu substituția $x = \sin t$ găsim ecuația pătratică $2x^2 + x - 1 = 0$, care

are soluțiile $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = -1$, de aceea $2 \sin^2 t + \sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}$ sau $\sin t = -1$. În intervalul $[0, 2\pi]$ ecuația $\sin t = \frac{1}{2}$ are două soluții ($t_1 = \frac{\pi}{6}$ și $t_2 = \frac{5\pi}{6}$), iar ecuația $\sin t = -1$ o singură soluție ($t_3 = \frac{3\pi}{2}$). Deci în intervalul $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 2t = \sin t$ are trei soluții.

559. Înlocuim $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x \Rightarrow f(x) = 2 \cos^4 x - 11 \cos^2 x + 5$. Notăm $\cos^2 x = t, t \in [0, 1]$, și găsim valoarea minimă pentru funcția de gradul al II-lea $f(t) = 2t^2 - 11t + 5$.

Valoarea minimă este $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{81}{8}$.

560. Ecuația se rescrie ca $\frac{1}{2e} \left[\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x \right] = \frac{5}{4e}$. Cu notația $t = \log_{\sin x} \cos x \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, de unde obținem soluțiile $t \in \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \Rightarrow \sin^1 x = \cos^2 x$ și $\sin^2 x = \cos^1 x$.

561. Pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, avem $\sin x > 0$, și $\cos x < 0$, deci $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x < 0$ și $\sin x \geq \cos x$, deci **A**, **B** sunt false. $\sin 2x - 2 \sin x \leq 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x - 1) \leq 0$, ceea ce este adevărată, pentru că în intervalul dat $\sin x > 0$, iar $\cos x < 0 < 1$. Deci **C** este adevărată, iar **D** este falsă.

562. $\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = 1$, adică în intervalul dat avem soluțiile: $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ sau $x = 0$. Deci, în total avem trei soluții: $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

563. Dacă $\sin A + \sin^2 A = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} + 1 - \sin^2 A \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} + \cos^2 A$.

Ridicând la pătrat, avem egalitatea $\sin^2 A = \cos^4 A + \cos^2 A + \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \cos^2 A = \cos^4 A + \cos^2 A + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^4 A + 2 \cos^2 A - \frac{3}{4} = 0$. Ridicăm expresia la puterea a doua, de unde obținem $\cos^8 A + 4 \cos^6 A + \frac{5}{2} \cos^4 A - 3 \cos^2 A + \frac{9}{16} = 0$. Putem observa că numerele a, b, c, d, e pot fi următoarele: $a = 1, b = 4, c = \frac{5}{2}, d = -3, e = \frac{9}{16}$.

564. Expresia dată este echivalentă cu $6 \sin x \cos y - 6 \sin y \cos x = 0$, adică $\sin(x - y) = 0$.

Cum $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, rezultă că $x - y = 0$.

565. Grupând termenii, avem $\sin x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x$ și $\sin 3x + \sin 7x = 2 \sin 5x \cos 2x$,

deci ecuația devine $2 \cos 2x (\sin 3x + \sin 5x) = 0$, adică $4 \cos 2x \sin 4x \cos x = 0$. Cum

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, avem cele 3 soluții $0, \frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{4}$.

566. Grupând termenii din membrul drept obținem $-\sin 4x - \sin 2x = -2 \sin 3x \cos x$.

Atunci avem ecuația echivalentă $(\cos x + \sin 3x)^2 = 0$, adică $\sin 3x = -\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ cu soluțiile $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ și $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Astfel $-\frac{\pi}{4}$ este o soluție a ecuației, **A** este adevărată, iar soluția $\frac{3\pi}{8} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, deci **B** e falsă. Observăm că pentru a doua mulțime de soluții $\cos 8x = \cos(3\pi + 4k\pi) = \cos 3\pi = \cos \pi = -1$, așa că nu toate soluțiile verifică afirmația **C**. Soluțiile din intervalul $[0, 2\pi]$ sunt $\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}$ și $\frac{15\pi}{8}$, **D** e adevărată.

567. Cum $\sin x$ și $\cos x \in [-1, 1] \implies \cos^7 x \leq \cos^2 x$ și $\sin^{14} x \leq \sin^2 x$, iar prin însumarea celor două inegalități obținem că $\sin^7 x + \cos^{14} x \leq 1$. Cerința ne oferă egalitatea, deci au loc egalități în ambele inegalități de mai sus. Obținem astfel sistemul
$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin^7 x \\ \cos^2 x = \cos^{14} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \cdot (\sin^5 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x \cdot (\cos^{12} x - 1) = 0 \end{cases} .$$
 Dacă $\sin^2 x = 0$, atunci $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ și $\cos^2 x = 1 \implies \cos x \in \{\pm 1\}$. Dacă $\sin^5 x = 1 \implies \sin x = 1$ și $\cos x = 0$, deci ambele soluții verifică întregul sistem și $\sin x + \cos x \in \{-1, 1\}$.

568. Pentru început, identificăm în ce cadrane se află x și $5x$: $x \in (\frac{83\pi}{10}, \frac{42\pi}{5}) = (8\pi + \frac{3\pi}{10}, 8\pi + \frac{2\pi}{5})$. $5x \in (\frac{83\pi}{2}, \frac{42\pi}{5}) = (41\pi + \frac{\pi}{2}, 42\pi) = (40\pi + \frac{3\pi}{2}, 40\pi + 2\pi)$, dar din periodicitate, obținem ca x e în primul cadran, iar $5x$ în ultimul. De aici, $\sin x, \cos x > 0$, deci **C** e falsă. $\cos 5x = \sqrt{1 - \sin^2 5x} = \frac{8}{17} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, **A** e adevărată și **B** e falsă. $\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1 = 2 \cdot \frac{64}{289} - 1 = -\frac{161}{289}$, **D** adevărată.

569. Notăm cu $a = \sin x$ și $b = \cos x$. Cum $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies a, b > 0$. $m = \sin 2x = 2\sin x \cos x = 2ab. \implies m > 0$ și $b = \frac{m}{2a}$. Din formula fundamentală a trigonometriei avem că $a^2 + b^2 = 1 \implies a^2 + \frac{m^2}{4a^2} = 1 \cdot a^2 \implies a^4 - a^2 + \frac{m^2}{4} = 0$. Privită ca o ecuație de gradul doi în variabila a^2 , aceasta are discriminantul $\Delta = 1 - m^2$, și soluțiile $a_{1,2}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - m^2}}{2}$ sunt pozitive. Dacă $a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - m^2}}{2}}$, atunci $b = \frac{m}{2a} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - m^2}}}{2}$. Dar obținem astfel că $a > b$, ceea ce nu convine din ipoteză. Dacă $a = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{2}}$, atunci $b = \frac{m}{2a} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - m^2}}}{2}$. În acest caz, observăm $a < b$ și ajungem la: $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - m^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - m^2}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m}$.

570. Ecuația este echivalentă cu $\cos 2x \cdot (4\cos 2x - 7) = 0$. Dacă $4\cos 2x - 7 =$

$0 \implies \cos 2x = \frac{7}{4} > 1$, deci nu există soluții în acest caz. Dacă $\cos 2x = 0 \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, adică varianta **C** e corectă. Acum verificăm celelalte grile: $\frac{x}{\pi} = \frac{2k+1}{4} \notin \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$, deci **B** e falsă. Cum $0 = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \implies \sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2} \implies |\sin x| = |\cos x|$, **A** adevărată. Din $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$, **D** falsă.

571. Ecuația este echivalentă cu $(1 + \sqrt{3})\sin x + (1 - \sqrt{3})\cos x = 1 + \sqrt{3}$. Vom folosi

formulele pentru \sin și \cos în funcție de tangeta unghiului înjumătățit: $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

și $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Înlocuim acum formulele în ecuație și obținem: $(\sqrt{3}+1)\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} +$

$(\sqrt{3}-1)\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1 + \sqrt{3}$. Cu notația $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ avem: $2(\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3}-1)t^2 =$

$1 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})t^2$, de unde ajungem la $\sqrt{3}t^2 - (\sqrt{3}+1)t + 1 = 0$, pentru care $\Delta = (\sqrt{3}-1)^2$

și soluțiile sunt $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = 1$. Pentru $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, Pentru

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. $\implies \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \implies$

$\sin \alpha \in \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$.

572. Folosim formula pentru cosinusul unghiului dublu și obținem că: $\frac{1 + \cos 2x}{2} +$

$\frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2}$, adică $\cos 4x + \cos 6x = \cos 2x + \cos 8x$. Din formula

de transformare a sumei în produs, obținem că ecuația e echivalentă cu $2\cos x \cos 5x =$

$2\cos 3x \cos 5x \implies \cos 5x \cdot (\cos x - \cos 3x) = 0$. Dacă $\cos 5x = 0$, $x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$= \left\{ \frac{(4k \pm 1)\pi}{10} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Dacă $\cos x - \cos 3x = 0$, $2\sin x \sin 2x = 0$, $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sau

$x \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

573. Folosind formula pentru unghiul dublu avem că $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, și deci în

membrul drept rămâne $\sin^2 x \cdot \operatorname{ctgx} = \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cos x$. Atunci ecuația devine

$\sin x \cos x = 5\sin x - 2\frac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x \implies \sin x \cdot (\cos^2 x - 5\cos x + 2) = 0$. Dacă $\sin x =$

$0 \implies x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \implies (\cos x - 2)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$.

Cum $|\cos x| \leq 1 \implies$ ecuația $\cos x = 2$ nu are soluții. Pentru $\cos x = \frac{1}{2} \implies x \in$

$\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Soluțiile care ne interesează sunt $(\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in$

$\mathbb{Z}) \cap [0, 10\pi] = \{0, \pi, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 3\pi, 4\pi - \frac{\pi}{3}, 4\pi, \dots, 10\pi - \frac{\pi}{3}, 10\pi\}$ care au suma egală cu $\pi \cdot [(1+2+3+\dots+9+10) + 2 \cdot (2+4+6+8) + 10 - \frac{1}{3}] = \pi \cdot (55 + 2 \cdot 20 + 10 - \frac{1}{3}) = \frac{314}{3} \pi$.

574. Pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$ funcțiile \sin și \cos sunt pozitive și concave. Din inegalitatea

lui Jensen și inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică: $\sin \frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2} \geq \sqrt{\sin x \sin y} > 0$ și $\cos \frac{x+y}{2} \geq \frac{\cos x + \cos y}{2} \geq \sqrt{\cos x \cos y} > 0$. Înmulțind

cele două inegalități, obținem: $\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\sin x \cos x \cos y \sin y} \cdot 2 \implies$

$\sin(x+y) \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \sin 2y} = \sqrt{\sin 2x \sin 2y}$. Dar, din ipoteza $\sin(x+y) \leq \sqrt{\sin 2x \sin 2y}$. Rezultă că are loc egalitate în inegalitate, și deci, și în inegalitățile

folosite $\implies \sin x = \sin y, \cos x = \cos y$. Dar $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies x = y$, adică **A**

este corectă. Soluție alternativă. Pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$ funcțiile \sin și \cos sunt pozitive,

deci partea stângă a inegalității este pozitivă. Ridicând la pătrat se obține: $\sin^2(x+y) \leq$

$\sin 2x \sin 2y \Leftrightarrow \sin^2 x \cos^2 y + 2 \sin x \cos y \sin y \cos x + \sin^2 y \cos^2 x \leq 4 \sin x \cos x \sin y \cos y$

$\Leftrightarrow \sin^2(x-y) \leq 0 \Leftrightarrow \sin(x-y) = 0$. Dar $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, deci $x = y$, adică **A** este

corectă. Pentru varianta **D**, observăm, că dacă $x = y \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\sin x + \sin y =$

$2 \sin x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Deci inegalitatea nu este adevărată pentru

orice $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

575. Din formula de transformare a produsului în suma avem ca $\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 4x -$

$\cos 6x)$. Atunci ecuația devine $\frac{\cos 4x - \cos 6x}{2} + \cos 6x = \operatorname{ctg} x \Leftrightarrow \frac{\cos 4x + \cos 6x}{2} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Folosim încă o dată același set de formule și ajungem la $\cos x \cos 5x = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x \cdot$

$(\cos 5x - \frac{1}{\sin x}) = 0$. Dacă $\cos x = 0 \implies x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, de unde avem soluțiile

în intervalul $[-2\pi, 2\pi]$ sunt: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Dacă $\cos 5x = \frac{1}{\sin x} \implies \sin x \cos 5x =$

$1 \implies \frac{\sin 6x + \sin 4x}{2} = 1$, adică $\sin 6x + \sin 4x = 2$. Cum $\sin x \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R} \implies$

$$\begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(4n+1)\pi}{12}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(4m+1)\pi}{8}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies x \in \emptyset. \text{ Într-adevăr, dacă ar exista } m \text{ și}$$

n astfel încât $\frac{(4n+1)\pi}{12} = \frac{(4m+1)\pi}{8}$, am obține că $8n+2 = 12m+3$, imposibil deoarece

membrul stâng reprezintă un număr întreg par, iar cel stâng un număr impar. Atunci

soluțiile finale sunt doar cele obținute în primul caz, în număr de 4.

576. Pentru a și b , expresia este egală succesiv cu $E(a, b) = 4 \cdot \frac{\sin(a+b) \cdot \cos(a-b)}{\sin 2a \cdot \sin 2b} =$

$$4 \sin(a+b) \cdot \frac{\cos(a-b)}{2 \sin a \cos a \cdot 2 \sin b \cos b} = \sin(a+b) \cdot \frac{\sin a \sin b + \cos a \cos b}{\sin a \cos a \sin b \cos b} = \sin(a+b) \cdot \left(\frac{1}{\cos a \cos b} + \frac{1}{\sin a \sin b} \right) = \operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{ctgb} + \operatorname{ctga}.$$

577. Ecuația din cerință are discriminantul $\Delta = (2 + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$

și soluțiile $x_{1,2} = \frac{2 + \sqrt{3} \pm (2 - \sqrt{3})}{4}$, deci $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Cazul I:** $\sin a = 1$, $\cos 3b =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \implies a \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } b \in \left\{ \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2p\pi}{3} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ **Cazul II:}** } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 3b = 1 \implies a \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } b \in \left\{ \frac{2m\pi}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observăm că pentru $n = 0$ și $m = 1$, se obține $a = b = \frac{2\pi}{3}$.

578. Folosind $\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tgx}}$ și notând $t = \operatorname{tgx}$, obținem ecuația echivalentă $t^3 + t^2 -$

$10t + 8 = 0$. Se observă că $t = 1$ este rădăcină, deci să factorizăm cu $(t - 1)$, și anume:

$$t^3 - t^2 + 2t^2 - 2t - 8t + 8 = 0 \implies t^2(t - 1) + 2t(t - 1) - 8(t - 1) = 0 \implies (t - 1)(t^2 + 2t - 8) =$$

$$0 \implies (t - 1)(t - 2)(t + 4) = 0. \text{ Dacă } t=1: \implies \operatorname{tgx} = 1, \text{ deci } x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Dacă}$$

$$t=2: \implies \operatorname{tgx} = 2, \text{ deci } x \in \{ \operatorname{arctg}2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}. \text{ Dacă } t=-4: \implies \operatorname{tgx} = -4, \text{ deci}$$

$$x \in \{ -\operatorname{arctg}4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

579. Notăm $4x = t$, astfel transformând inecuația dată $\sin 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ în $\sin t <$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$. Inecuația $\sin(x) < a$ are soluția generală reuniunea intervalelor $(-\pi - \arcsin(a) +$

$2\pi k, \arcsin(a) + 2\pi k)$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Astfel:

$$2k\pi - \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < t < \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow 2k\pi - \pi - \frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$2k\pi - \pi - \frac{\pi}{3} < 4x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}.$$

Deoarece $1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $1 < \frac{\pi}{3}$ și funcția \sin este crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă

că $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Și $\boxed{\text{D}}$ este adevărată pentru că

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1 < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

580. Au loc următoarele relații: $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\cos\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}; \operatorname{arcsin}(\sin 7) = \operatorname{arcsin}(\sin(7 - 2\pi)) = 7 -$$

2π , deoarece $7 - 2\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arccos}(\sin 4) = \operatorname{arccos}\left(\cos\left(4 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 - \frac{\pi}{2}$, deoarece $4 -$

$$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi).$$

$$581. \quad \sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right) = 2 \sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \text{ unde } \sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$582. \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \implies \cos \frac{x}{2} > \sin \frac{x}{2}. \text{ Folosim următoarele rezultate}$$

$$\text{teoretice } \begin{cases} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x & \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = \left|\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right| - \\ \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \sin x & \left|\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right| = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$583. \quad x \in (0, \pi) \implies x \cdot \sin x > 0, \text{ astfel putem folosi inegalitatea mediilor: } M_a \geq M_g.$$

$$\text{Obținem } \frac{12}{x \sin x} + 48x \sin x \geq \sqrt{12 \cdot 48} \implies \text{valoarea minimă a expresiei este } 48. \text{ Această}$$

valoare se poate atinge atunci când derivata funcției $\frac{12 + 48x^2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$

$$584. \quad \text{Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem că: } (r \sin x + t \cos x)^2 \leq$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(r^2 + t^2) = (r^2 + t^2) \implies r \sin x + t \cos x \leq \sqrt{r^2 + t^2}. \text{ Soluție alterna-}$$

tivă: $r \sin x + t \cos x = \sqrt{r^2 + t^2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + t^2}} \sin x + \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} \cos x \right) = \sqrt{r^2 + t^2} \sin\left(x + \arcsin \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}}\right) \leq \sqrt{r^2 + t^2}.$

$$585. \quad \text{Egalitatea în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz se obține pentru: } \frac{\sin x}{r} =$$

$$\frac{\cos x}{t} \implies \frac{r}{t} = \operatorname{tg} x. \text{ Înlocuind } x = \frac{\pi}{3}, \text{ obținem: } \frac{r}{t} = \sqrt{3} \iff r = \sqrt{3}t. \text{ Soluție alter-}$$

nativă: $r \sin x + t \cos x = \sqrt{r^2 + t^2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + t^2}} \sin x + \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} \cos x \right) = \sqrt{r^2 + t^2} \sin\left(x + \arcsin \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}}\right) \implies \text{valoarea maximă se atinge când } \sin\left(x + \arcsin \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}}\right) = 1. \text{ Dacă}$

considerăm așadar $x + \arcsin \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, cum $x = \frac{\pi}{3}$, avem $\arcsin \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} = \frac{\pi}{6}$, deci $\frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} = \frac{1}{2} \iff 4t^2 = r^2 + t^2 \iff r = \pm\sqrt{3}$. Observăm astfel că varianta

A este corectă.

$$586. \quad \text{Se folosește următoarea observație: } 4 \cos x \cdot \cos(60^\circ - x) \cdot \cos(60^\circ + x) = \cos 3x,$$

$$\text{deoarece } 4 \cos x \cdot \cos(60^\circ - x) \cdot \cos(60^\circ + x) = 2 \cos x \cdot [\cos 120^\circ + \cos 2x] = 2 \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2} + 2 \cos^2 x - 1\right) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos 3x. \text{ Astfel, } 4 \cos 6^\circ \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos 66^\circ = 4 \cos 6^\circ \cdot \cos(60^\circ - 6^\circ) \cdot \cos(60^\circ + 6^\circ) = \cos(3 \cdot 6^\circ) = \cos 18^\circ (1). \text{ Analog se obține } 4 \cos 18^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ =$$

$4 \cos 18^\circ \cdot \cos(60 - 18)^\circ \cdot \cos(60 + 18)^\circ = \cos 54^\circ(2)$. Înmulțind identitățile (1) și (2), avem

$$16 \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = 1.$$

$$587. \quad \text{Fie } u = \sin x, v = \cos y \Rightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}, \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x =$$

$$(-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}, y = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$588. \quad \operatorname{tg}(89^\circ) = \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ) = \operatorname{ctg}(1^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(1^\circ)} \quad \operatorname{tg}(88^\circ) = \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg}(2^\circ) =$$

$\frac{1}{\operatorname{tg}(2^\circ)}$ și așa mai departe. În mijloc avem termenul $\operatorname{tg}(45^\circ)$ care este egal cu 1. Prin

înmulțire se obține că $S = 1$.

$$589. \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$590. \quad \frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow \sin(2) > 0; \quad \pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin(4) < 0; \quad \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow \sin(6) < 0.$$

$$591. \quad \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$592. \quad \frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{5\pi}{2} = 2\pi +$$

$$\frac{\pi}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

593. Folosim formulele $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$.

594. Avem $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, $\angle COA = \angle AOB + \angle BOC = \frac{2\pi}{3}$. Astfel tri-

unghiurile AOB și BOC sunt echilaterale (deoarece sunt isoscele cu un vârf de măsură

$\frac{\pi}{3}$), de unde triunghiul ABC este isoscel cu laturile $AB = BC = 1$ și cu unghiul ABC de măsură $\frac{2\pi}{3}$.

595. Deoarece $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$ și astfel $\sin x + \cos x > 0$. Atunci

$|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x| \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 0 = 0$. Deci toate valorile

ale lui $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sunt soluții. Prin urmare, soluția ecuației este \boxed{D} .

$$596. \quad \sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x) = \frac{3}{4}.$$

597. $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos(\theta)$. Așadar: $\cos(240^\circ) = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos(60^\circ)$. Deci:

$$\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}.$$

598. $\frac{11\pi}{7} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, adică este în al patrulea cadran, deci: $\sin \frac{11\pi}{7} < 0$. Unghiul $\frac{2\pi}{9}$

este în primul cadran (între 0 și $\frac{\pi}{2}$), deci: $\sin \frac{2\pi}{9} > 0$. Unghiul $\frac{5\pi}{8}$ este în al doilea cadran (între $\frac{\pi}{2}$ și π), deci: $\sin \frac{5\pi}{8} > 0$.

599. Observăm că 5 radiani este între $\frac{3\pi}{2}$ și 2π : $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ radiani, $2\pi \approx 6.28$ radiani.

Deci, 5 radiani se află în al patrulea cadran. Astfel: $\cos 5 > 0$. Analog, $\sqrt{8}$ radiani este în al doilea cadran, între $\frac{\pi}{2}$ și π , astfel: $\cos \sqrt{8} < 0$.

600. Folosim identitatea $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Mai întâi, determinăm $\cos x$ folosind iden-

titatea trigonometrică: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Substituind $\sin x = \frac{3}{5}$: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x =$

$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Prin urmare: $\cos x = \pm \frac{4}{5}$. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, rezultă că

$\cos x = -\frac{4}{5}$. Atunci $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$. Astfel, $\sin(2x) = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{-5}{4} = -\frac{3}{4}.$$

601. Știm că $\cos x = -\frac{1}{5}$ și folosim identitatea trigonometrică: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Sub-

stituim valoarea lui $\cos x$: $\sin^2 x + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$; $\sin^2 x + \frac{1}{25} = 1$; $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$;

$\sin x = \pm \frac{\sqrt{24}}{5}$. Cum $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin x$ este negativ, deci: $\sin x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$. Acum de-

terminăm $\sin 2x$ folosind formula de dublu unghi: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right) \cdot$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{24}}{25}.$$

602. $\operatorname{tg} \left(\frac{13\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{13\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos \left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

603. Unghiul 169° este în cadranul al doilea (între 90° și 180°). În acest cadran, funcția

cosinus este negativă. Unghiul 220° este în cadranul al treilea (între 180° și 270°). În

acest cadran, funcția cosinus este negativă. Unghiul 324° este în cadranul al patrulea

(între 270° și 360°). În acest cadran, funcția cosinus este pozitivă.

604. Înlocuim x cu $\pi - x$ în ecuația inițială: $2f(\pi - x) + 7f(x) = 8 \sin(\pi - x)$.

Știm că $\sin(\pi - x) = \sin x$, deci: $2f(\pi - x) + 7f(x) = 8 \sin x$. Avem acum două ecuații:

$2f(x) + 7f(\pi - x) = 8 \sin x$ și $2f(\pi - x) + 7f(x) = 8 \sin x$. Multiplicăm prima ecuație cu 2 și

a doua ecuație cu 7: $4f(x) + 14f(\pi - x) = 16 \sin x$ și $14f(\pi - x) + 49f(x) = 56 \sin x$. Scădem prima ecuație din a doua: $(14f(\pi - x) + 49f(x)) - (4f(x) + 14f(\pi - x)) = 56 \sin x - 16 \sin x$.
 $45f(x) = 40 \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{40}{45} \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{8}{9} \sin x$. Prin urmare, funcția care satisface ecuația dată este: $f(x) = \frac{8}{9} \sin x$.

605. Înlocuim x cu $2\pi - x$ în ecuația dată: $5f(2\pi - x) + f(x) = 8 \cos(2\pi - x)$

Deoarece $\cos(2\pi - x) = \cos x$, obținem: $5f(2\pi - x) + f(x) = 8 \cos x$ Astfel, avem două

ecuații:
$$\begin{cases} 5f(x) + f(2\pi - x) = 8 \cos x \\ 5f(2\pi - x) + f(x) = 8 \cos x \end{cases}$$
. Adunând cele două ecuații: $6f(x) + 6f(2\pi -$

$x) = 16 \cos x \Rightarrow f(x) + f(2\pi - x) = \frac{8}{3} \cos x$. Scăzând ecuația (2) din ecuația (1):

$4f(x) - 4f(2\pi - x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(2\pi - x)$ Substituind $f(x) = f(2\pi - x)$ în

$f(x) + f(2\pi - x) = \frac{8}{3} \cos x$: $2f(x) = \frac{8}{3} \cos x \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3} \cos x$.

606. Înlocuim x cu $-x$ în ecuație: $f(2\pi - x) + 4f(2\pi + x) = 5 \cos(-x)$. Având în vedere

că $\cos(-x) = \cos(x)$, obținem: $f(2\pi - x) + 4f(2\pi + x) = 5 \cos x$.

Astfel, avem două ecuații:
$$\begin{cases} f(2\pi + x) + 4f(2\pi - x) = 5 \cos x \\ f(2\pi - x) + 4f(2\pi + x) = 5 \cos x \end{cases}$$
 Notăm $f(2\pi + x)$ cu a

și $f(2\pi - x)$ cu b . Deci, ecuațiile devin:
$$\begin{cases} a + 4b = 5 \cos x \\ b + 4a = 5 \cos x \end{cases}$$
. Scădem prima ecuație

din a doua: $(b + 4a) - (a + 4b) = 0 \Leftrightarrow 3a - 3b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Înlocuind $a = b$

în prima ecuație, obținem $a = \cos x \Leftrightarrow f(2\pi + x) = \cos x$. Înlocuim x cu $x - 2\pi$:

$f(2\pi + (x - 2\pi)) = \cos(x - 2\pi) \Leftrightarrow f(x) = \cos x$.

607. Cel mai mic număr pozitiv T pentru care $\cos y = \cos(y + T)$ pentru orice număr

real y , adică perioada funcției \cos este 2π . Astfel $\cos y = \cos(y + 2\pi), \forall y \in \mathbb{R}$. Alegând

$y = 3x$, avem că \boxed{D} este adevărată.

608. În egalitatea $E(x) = E(x + T) \Leftrightarrow \cos x + \sin 2x = \cos(x + T) + \sin(2x + T)$

înlocuim pe rând valorile $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$. Se obține: $\cos 0 + \sin 0 = \cos T + \sin T \Leftrightarrow 1 =$

$\cos T + \sin T$; (1). $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + T\right) + \sin(\pi + T) \Leftrightarrow 0 = -\sin T - \sin T \Leftrightarrow$

$\sin T = 0$. (2). Din (1) și (2) avem $\sin T = 0$ și $\cos T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv T

pentru care au loc simultan aceste condiții este $T = 2\pi$.

609. Dezvoltarea sumelor rezultă în expresia $\sum_{k=0}^n \sin(a+k) \cos(b+k) - \sin(b+k) \cos(a+k)$ și, cum $\sin(a+k) \cos(b+k) - \sin(b+k) \cos(a+k) = \sin(a+k-b-k) = \sin(a-b)$, valoarea expresiei este, de fapt, $(n+1) \sin(a-b)$. Cum $a-b = \frac{\pi}{2}$, obținem varianta \boxed{D} ca fiind singura corectă.

610. Ridicăm ecuația la pătrat. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right\}$. Mai trebuie verificat dacă au apărut soluții noi cu ridicarea ecuației inițiale la pătrat. Prin calcule simple obținem că $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/6)}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. (ultima egalitate se poate verifica prin ridicarea egalității la pătrat.) $\sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Deci ambele soluții obținute sunt soluții ale ecuației inițiale. Astfel, $\frac{x_1}{x_2} = 5$.

611. $S_n = \sin(x) \cos((n-1)x) + \sin(2x) \cos((n-2)x) + \dots + \sin((n-1)x) \cos(x)$ Dar suma se mai poate scrie: $S_n = \sin((n-1)x) \cos(x) + \sin((n-2)x) \cos(2x) + \dots + \sin(x) \cos((n-1)x)$. Adunând cele două expresii avem $2S_n = [\sin(x) \cos((n-1)x) + \sin((n-1)x) \cos(x)] + [\sin(2x) \cos((n-2)x) + \sin((n-2)x) \cos(2x)] + \dots + [\sin((n-1)x) \cos(x) + \sin(x) \cos((n-1)x)]$; $2S_n = \sin(nx) + \sin(nx) + \dots + \sin(nx)$ (un total de $(n-1)$ termeni) Așadar $2S_n = (n-1) \sin(nx)$ și $S_n = \frac{(n-1)}{2} \sin(nx)$.

612. Produsul cerut este egal cu $\text{ctg}(41^\circ) \cdot \text{ctg}(42^\circ) \cdot \text{ctg}(43^\circ) \cdot \text{ctg}(44^\circ) \cdot \text{ctg}(45^\circ) \cdot \text{ctg}(46^\circ) \cdot \text{ctg}(47^\circ) \cdot \text{ctg}(48^\circ) \cdot \text{ctg}(49^\circ)$. Folosind $\text{ctg}(90^\circ - x) = \text{tg}(x)$, rescriem: $\text{ctg}(90^\circ - 41^\circ) = \text{tg}(41^\circ)$, $\text{ctg}(90^\circ - 42^\circ) = \text{tg}(42^\circ)$, $\text{ctg}(90^\circ - 43^\circ) = \text{tg}(43^\circ)$, $\text{ctg}(90^\circ - 44^\circ) = \text{tg}(44^\circ)$. Folosind cele de mai sus, produsul de calculat devine $\text{ctg}(41^\circ) \cdot \text{ctg}(42^\circ) \cdot \text{ctg}(43^\circ) \cdot \text{ctg}(44^\circ) \cdot \text{ctg}(45^\circ) \cdot \text{tg}(45^\circ) \cdot \text{tg}(44^\circ) \cdot \text{tg}(43^\circ) \cdot \text{tg}(42^\circ) \cdot \text{tg}(41^\circ)$. Cum $\text{ctg}(45^\circ) = 1$ și $\text{tg}(45^\circ) = 1$, calculul devine: $\text{ctg}(41^\circ) \cdot \text{ctg}(42^\circ) \cdot \text{ctg}(43^\circ) \cdot \text{ctg}(44^\circ) \cdot \text{tg}(44^\circ) \cdot \text{tg}(43^\circ) \cdot \text{tg}(42^\circ) \cdot \text{tg}(41^\circ) = 1$.

613. Înmulțim expresia cerută cu $\cos(10^\circ)$: $16 \sin(10^\circ) \cos(10^\circ) \sin(30^\circ) \sin(50^\circ) \sin(70^\circ)$. Folosind identitatea $\sin(2A) = 2 \sin(A) \cos(A)$, expresia devine $8 \sin(20^\circ) \sin(30^\circ) \sin(50^\circ) \sin(70^\circ)$. Observăm că $\sin(70^\circ) = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos(20^\circ)$, astfel expresia devine $8 \sin(20^\circ) \sin(30^\circ) \sin(50^\circ) \cos(20^\circ) = 4 \sin(40^\circ) \sin(30^\circ) \sin(50^\circ)$. Cum $\sin(50^\circ) = \cos(40^\circ)$,

folosind din nou formula pentru dublarea argumentului, avem $2 \sin(80^\circ) \cdot \sin(30^\circ)$. Produsul cerut este egal cu $\frac{2 \sin(80^\circ) \cdot \sin(30^\circ)}{\cos(10^\circ)} = 2 \sin(30^\circ) = 1$.

614. Observăm că produsul conține termenul $\sin(0^\circ)$, iar $\sin(0^\circ) = 0$. Prin urmare, produsul cerut are valoarea 0.

615. Deoarece $\operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\operatorname{tg}(x)$, pentru orice valoare x pentru care expresiile sunt definite. Observăm că pentru fiecare unghi x în intervalul $1^\circ \leq x \leq 89^\circ$, există un unghi $180^\circ - x$ în intervalul $91^\circ \leq x \leq 179^\circ$ astfel încât: $\operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\operatorname{tg}(x)$. Prin urmare, pentru fiecare termen $\operatorname{tg}(x)$ unde x este în intervalul 1° la 89° , există un termen corespunzător $\operatorname{tg}(180^\circ - x)$ unde $180^\circ - x$ este în intervalul 91° la 179° , astfel încât: $\operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\operatorname{tg}(x)$. Astfel, suma tuturor termenilor poate fi grupată în perechi de termeni care se anulează reciproc: $(\operatorname{tg}(1^\circ) + \operatorname{tg}(179^\circ)) + (\operatorname{tg}(2^\circ) + \operatorname{tg}(178^\circ)) + \dots + (\operatorname{tg}(89^\circ) + \operatorname{tg}(91^\circ))$. Fiecare pereche $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(180^\circ - x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(x) = 0$. Astfel, întreaga sumă este 0.

616. Vom folosi identitățile trigonometrice $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \operatorname{ctg}(x)$ și $\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{ctg}(x) = 1$. Grupăm termenii produsului în perechi, astfel $(\operatorname{tg}(1^\circ) \cdot \operatorname{tg}(89^\circ)) \cdot (\operatorname{tg}(2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(88^\circ)) \cdot \dots \cdot (\operatorname{tg}(44^\circ) \cdot \operatorname{tg}(46^\circ)) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ)$. Termenii din fiecare paranteză se înmulțesc la 1, așadar produsul final este egal cu 1.

617. Folosim identitatea: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Astfel, pentru $\sin^4 x$, avem $\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2$; $\sin^4 x = \frac{1 - 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$. Știind că $\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$

$$\text{avem } \sin^4 x = \frac{1 - 2 \cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2}}{4} \Rightarrow \sin^4 x = \frac{3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

$$\text{Calculăm fiecare termen: } \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{8}; \quad \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$\frac{3 - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{8}; \quad \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{3 - 4 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{8}; \quad \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) =$$

$$\frac{3 - 4 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{8}. \quad \text{Înlocuind valorile } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$0, \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0 \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Astfel, fiecare termen devine } \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}; \quad \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$\frac{3 - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0}{8} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}; \quad \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{3 - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0}{8} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8};$$

$$\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}. \quad \text{Suma este egală cu } \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8} + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8} = \frac{(3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

618. Înmulțind expresia cu $2 \sin \frac{x}{2}$, se ajunge la suma telescopică $2S \sin \frac{x}{2} =$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\cos \frac{(2k-1)x}{2} - \cos \frac{(2k+1)x}{2}}{2} \right) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{2}.$$

Alternativ, suma se poate calcula folosind formula lui De Moivre, după ce se observă că este egală cu partea imaginară expresiei $\sum_{i=1}^n \epsilon^i = \frac{\epsilon^{n+1} - 1}{\epsilon - 1} - 1$, unde $\epsilon = \cos x + i \cdot \sin x$.

619. Notăm cu $S = 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$. Înmulțim expresia S cu $\sin 20^\circ$ obținem: $S \cdot \sin 20^\circ = 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ \sin 20^\circ$. Folosind formula pentru dublarea argumentului, membrul drept se observă a fi egal cu $2 \sin(160^\circ) \cdot \cos(60^\circ)$. Cum $\sin(160^\circ) = \sin(20^\circ)$, aflăm că $S = 2 \cdot \cos(60^\circ) = 1$.

620. Deoarece $\sin(360^\circ - x) = -\sin(x)$, oricare ar fi x , grupați câte doi, termenii din sumă se vor anula reciproc, după cum urmează: $\sin 1^\circ + \sin 359^\circ = 0$, $\sin 2^\circ + \sin 358^\circ = 0$, $\sin 3^\circ + \sin 357^\circ = 0$, ... $\sin 179^\circ + \sin 181^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0$. Deci, suma tuturor termenilor este: $S = 0$.

621. Pornim de la expresia $S = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$. Înmulțim această expresie cu $\sin 10^\circ \cos 10^\circ$: $S \cdot \sin 10^\circ \cos 10^\circ = \left(\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} \right) \cdot \sin 10^\circ \cos 10^\circ$ și obținem $S \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ$. Acum, multiplicând această egalitate cu $\frac{1}{2}$, se ajunge la $\frac{1}{2} \cdot S \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{2} (\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ)$, de unde $\frac{1}{2} S \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ$. Simplificând, ajungem la $\frac{1}{4} \cdot S \cdot \sin 20^\circ = \sin(30^\circ - 10^\circ)$. Deci $S = 4$.

622. Avem $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$. Observăm că $\frac{1}{\sqrt{2}}$ este egal cu $\cos \frac{\pi}{4}$ și cu $\sin \frac{\pi}{4}$. Deci: $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) \implies \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

623. Folosind formula $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$, avem: $3^{k-1} \sin^3 \left(\frac{x}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left(3^k \sin \left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin \left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right)$. Se adună relațiile pentru $k = 1, 2, \dots, n$. Fiecare relație este de forma: $3^{k-1} \sin^3 \left(\frac{x}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left(3^k \sin \left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin \left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right)$. Adunând aceste relații de la $k = 1$ până la $k = n$ obținem $\sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \left(\frac{x}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(3^k \sin \left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin \left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right)$. Observăm că termenii din sumă se anulează parțial, după cum urmează $\sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \left(\frac{x}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right)$.

624. Pentru a simplifica expresia $\cos x - \sqrt{3} \sin x$, începem prin a o înmulți cu $\frac{1}{2}$. Se obține $\frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$. Aceasta poate fi scrisă ca $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}$. Prin urmare, folosind o formula trigonometrică cunoscută, putem scrie $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ și expresia originală devine $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

625. Pentru orice y cu proprietatea că $\sin y \neq 0$, are loc $\cos y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2y}{\sin y}$. Folosim

această identitate pentru $y = \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots, \frac{x}{2^N}$. Astfel, avem $\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{1}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}$;

$\cos \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{x}{4}\right)}$; ... $\cos \left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Înmulțind toate aceste relații,

obținem $\cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \dots \cdot \cos \left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Rezultatul final este

$$\frac{\cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \dots \cdot \cos \left(\frac{x}{2^n}\right)}{1} = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

626. Similar cu problema precedentă, pentru valorile y cu proprietatea că $\sin y \neq 0$,

avem $\cos y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2y}{\sin y}$. Astfel, dacă folosim pe rând $y = x, 2x, 4x, \dots, 2^{n-1}x$ avem:

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x}, \cos 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{\sin 2x} \cos 4x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 8x}{\sin 4x} \dots \cos (2^{n-1}x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2^n x)}{\sin (2^{n-1}x)}.$$

Înmulțind toate aceste relații, obținem $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos (2^{n-1}x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin (2^n x)}{\sin x}$.

627. Să observăm că $16 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = 1 \iff \sin 16x =$

$$1. \quad 16x \in \{(-1)^k \cdot \arcsin 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \implies 16x \in \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad x \in \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{16} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{32} + \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ \vdots \\ k = 30 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} + \frac{60\pi}{32} = \frac{61\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = 31 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{32} + \frac{62\pi}{32} = \frac{61\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = 32 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} + \frac{64\pi}{32} = \frac{65\pi}{32} \notin [-2\pi, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow 32 : 2 = 16 \text{ soluții}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{32} - \frac{2\pi}{32} = -\frac{3\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} - \frac{4\pi}{32} = -\frac{3\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ \vdots \\ k = -30 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} - \frac{60\pi}{32} = -\frac{59\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = -31 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{32} - \frac{62\pi}{32} = -\frac{63\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \\ k = -32 \Rightarrow x = \frac{\pi}{32} - \frac{64\pi}{32} = -\frac{63\pi}{32} \in [-2\pi, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow 32 : 2 = 16 \text{ soluții. În con-}$$

cluzie, există 32 de soluții.

$$\mathbf{628.} \quad \cos^2 x + \cos^2 2x = 1 \implies \cos^2 2x = \sin^2 x \implies \cos^2 2x - \sin^2 x = 0 \implies$$

$$\implies (\cos 2x - \sin x)(\cos 2x + \sin x) = 0 \implies \cos 2x - \sin x = 0 \text{ sau } \cos 2x + \sin x = 0.$$

$$\mathbf{Cazul 1:} \quad \cos 2x - \sin x = 0 \implies 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \text{ soluții când } k \in \{0, 1\}. \\ \sin x = -1 \text{ fals pentru } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$\mathbf{Cazul 2:} \quad \cos 2x + \sin x = 0 \implies 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sin x = 1 \implies x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \implies \frac{\pi}{2} \text{ este o soluție pentru } k \in \{0, 1\} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \text{ fals pentru } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

$$\text{În concluzie, suma soluțiilor distincte este } \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\mathbf{629.} \quad \text{Avem } f(\log_3 4) = 3^{\log_3 4 + 1} - 9^{\log_3 4} = 3^{\log_3 12} - 3^{\log_3 16}. \text{ Cum } a^{\log_a x} = x \forall x \in \mathbb{R}_+^* \implies$$

$$f(\log_2 3) = 12 - 16 = -4.$$

$$\mathbf{630.} \quad \text{Cum } ABCD \text{ este paralelogram, obținem direct } BC = AD = 1 \text{ și } CD = AB = 2.$$

$$\text{În } \triangle BCD, BC = 1, CD = 2 \text{ și } m(\widehat{C}) = 60^\circ, \text{ deci din Teorema cosinusului obținem} \\ BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \cdot \cos(\widehat{C}) = 5 - 2 = 3 \implies BD = \sqrt{3}. \text{ Analog, aplicând} \\ \text{Teorema cosinusului în } \triangle ADC, \text{ obținem } AC = \sqrt{7}.$$

631. Amplificând cu conjugata, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+2^n} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2^n} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2^n} + \sqrt{n}} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n+2^n} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n/2} \left(\sqrt{\frac{n}{2^n} + 1} + \sqrt{\frac{n}{2^n}} \right)}$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ și $\frac{2^n}{2^{n/2}} = 2^{n/2}$, limita devine $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot 2^{n/2} = +\infty$.

632. Numărul submulțimilor lui A cu 2 elemente este $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2} =$

$21 \iff n(n-1) = 42$ și cum $n \in \mathbb{N}$ obținem $n = 7$, de unde rezultă varianta $\boxed{\text{B}}$

633. Rescriem ecuația ca $2^{2x} - 2^x \cdot 3^x \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2x}$. Notăm $2^x = a > 0$ și $3^x = b > 0$ și rămânem cu $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0 \iff a^2 + ab - 4ab - 4b^2 = 0 \iff a(a+b) - 4b(a+b) = 0 \iff (a-4b)(a+b) = 0$. Avem, așadar:

Cazul I: $a - 4b = 0 \iff a = 4b$, deci $2^x = 4 \cdot 3^x \iff x = \log_2(4 \cdot 3^x) \iff x = \log_2 4 + x \cdot \log_2 3 \iff x = 2 + x \cdot \log_2 3 \iff x = \frac{2}{1 - \log_2 3}$ (1).

Cazul II: $a + b = 0 \iff 2^x = -3^x$, evident imposibil. (2)

Așadar, (1) și (2) implică afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

634. Fie $F' \in (AC)$ astfel încât F' - mijlocul lui AF' . Avem $x_F = \frac{x_A + x_{F'}}{2}$ și

$y_F = \frac{y_A + y_{F'}}{2}$, deci $4 = \frac{1 + x_{F'}}{2}$, $18 = \frac{3 + y_{F'}}{2} \iff F'(7, 33)$. De asemenea, ob-

servăm că F' este mijlocul lui CF , așadar avem $x_{F'} = \frac{x_C + x_F}{2}$ și $y_{F'} = \frac{y_C + y_F}{2}$,

deci $7 = \frac{x_C + 4}{2}$, $33 = \frac{y_C + 18}{2} \iff C(10, 48)$. Fie M mijlocul lui AB . Avem

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, deci $x_M = \frac{x_B + 1}{2}$, $y_M = \frac{y_B + 3}{2}$ (1). De aseme-

nea, E este mijlocul lui MA și avem $x_E = \frac{x_M + x_A}{2}$, $y_E = \frac{y_M + y_A}{2}$ adică $x_M + x_A =$

6 , $y_M + y_A = 12 \Rightarrow M(5, 9)$, de unde rezultă $B(9, 15)$. Cum G este centru de greutate

în $\triangle ABC$, $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \iff x_G = \frac{1 + 10 + 9}{3}$, $y_G = \frac{3 + 48 + 15}{3} \iff G\left(\frac{20}{3}, 22\right)$.

635. În $\triangle ABC$ avem (DE) , (DF) și (FE) linii mijlocii, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Avem $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 1 - 5 + 2 - 8 = -8$,

deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = 4 \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 16$.

636. Realizăm schimbarea de variabilă $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Capetele de integrare vor

fi $0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ și integrala devine $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{4t^2 + 1} = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \operatorname{arctg} 2x \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

637. Observăm că $f(0) = 1$, deci $A \in Gf$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$

$$\frac{7-1}{2-0} = 3. \text{ Cum } AB \text{ este tangentă la } Gf \text{ în } A, \text{ avem } f'(0) = m_{AB} = 3. f'(x) = \frac{(x^2 + ax + 1)'(\sqrt{x^2 + 1}) - (x^2 + ax + 1)(\sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x + a}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}, \text{ deci } f'(0) = a = 3.$$

638. Fie $M = AC \cap BD$. Cum $ABCD$ paralelogram, M este mijlocul lui AC , deci

$$\text{avem } x_M = \frac{x_A + x_C}{2}, y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \iff x_M = \frac{2+7}{2}, y_M = \frac{1+2}{2} \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Evident, cum M este și mijlocul lui BD , înlocuim $x_M = \frac{x_B + x_D}{2}, y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$, de

$$\text{unde obținem } D(5, 0), \text{ deci } BD : \frac{x - x_B}{x_B - x_D} = \frac{y - y_B}{y_B - y_D} \iff BD : 4 - x = \frac{y - 3}{3} \iff$$

$$BD : 12 - 3x = y - 3 \iff BD : 3x + y = 15.$$

639. Avem $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \iff 2 \sin \alpha = \cos \alpha \iff 4 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow 5 \sin^2 \alpha =$

$$1 \iff \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \text{ și cum } \sin \alpha < 0 \forall \alpha \in (\pi, 2\pi), \text{ avem } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ deci } \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

Cum $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, obținem $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Cum $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ și $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, obținem $\sin(2\alpha) = \frac{4}{5}, \cos(2\alpha) = \frac{3}{5}$.

640. Construim pătratul $AB'C'D$, unde B' este simetricul lui B față de A și D' este simet-

ricul lui C față de D . Atunci vom avea $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC'}| \cdot \cos(\widehat{BAD}) = 0$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB'}| \cdot \cos(\widehat{BAB'}) = -1$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC''} =$

$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC''}| \cdot \cos(\widehat{BAC''}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$. Fie C'' simetricul lui C față de B .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC''} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC''}| \cdot \cos(\widehat{BAC''}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Așadar, afirmația

A este singura afirmație adevărată.

641. Avem $S = b_1(2^{10} - 1) = 1023b_1$, deci $S \dot{=} 11$. Cum 1023 nu este pătrat perfect,

singura variantă în care S ar putea fi pătrat perfect este atunci când b_1 are forma

$1023k^2, k \in \mathbb{Z}$. Așadar, S ar avea forma $(1023k)^2$ și cum $1023 \dot{=} 31$, varianta **B** este

adevărată. Evident, cum 1023 este impar, produsul $1023b_1$ va fi: par, pentru b_1 par;

impar, pentru b_1 impar; deci varianta **D** este, de asemenea, adevărată.

642. Fie A matricea sistemului. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -4 + a + 3 - 2 + 6 - a =$

$3 \neq 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă și $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. De aici deducem că sistemul este compatibil determinat, deci are soluție unică. Afirmatia $\boxed{\text{C}}$ este, evident, falsă (se înlocuiește a în ultima ecuație din sistem). Soluțiile sistemului se pot determina folosind metoda

lui Cramer și avem:
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\det A} \\ y = \frac{\Delta y}{\det A} \\ z = \frac{\Delta z}{\det A} \end{cases}, \text{ unde } \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a & -2 & 1 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = -4 - a^2 - 6 + 4 -$$

$6a - a = -a^2 - 7a - 6$. $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 2 + 1 + a + 2 + 2 = 3a + 3$ și

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & a \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = 4 - a + 3a + 2 - 6 - a^2 = -a^2 + 2a$. Cum $\det A = 3$, avem

$x + y + 2z = \frac{-a^2 - 7a - 6 + 3a + 3 - 2a^2 + 4a}{3} = \frac{-3a^2 - 3}{3} = -a^2 - 1 < 0$, care verifică

afirmația $\boxed{\text{D}}$.

643. $x = \tau\sigma^{-1}$. Obținem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Așadar, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Avem $x^2 = x \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Deci, singura afirmație adevărată este $\boxed{\text{A}}$.

644. Funcția $f + g$ este rezultatul adunării a două funcții continue, deci este o funcție continuă. Putem exprima această funcție astfel: Pentru $x > 0$, $(f + g)(x) = 2x$ și pentru $x \leq 0$, $(f + g)(x) = 0$. Cum pentru $x \leq 0$ funcția este constantă, aceasta nu este

monotonă pe \mathbb{R} . Pentru f vom verifica derivabilitatea în $x = 0$. $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x - 0}{x} = -1$, iar $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1$, de unde deducem că f nu este

derivabilă în $x = 0$, deci nu este derivabilă pe \mathbb{R} . Funcția $f \cdot g$ se poate exprima astfel:

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{Așadar, } \lim_{x \nearrow 0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(0)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x^2 - 0}{x} = 0,$$

iar $\lim_{x \searrow 0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$, de unde deducem că $f \cdot g$ este derivabilă în $x = 0$.

645. Dacă $x = 2$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f , avem $f(2) = 0$, deci

$4a + 2b + 8 = 0 \iff 2a + b = -4$. De asemenea, dacă $x = -2$ este punct de extrem local, avem $f'(-2) = 0$. $f'(x) = \frac{ax^2 + bx + 8 - 2ax^2 - bx}{ax^2 + bx + 8} = \frac{-ax^2 + 8}{ax^2 + bx + 8}$.
 $f'(-2) = \frac{-4a + 8}{4a - 2b + 8} = 0 \Rightarrow a = 2$. Cum $2a + b = -4$ și $a = 2$, vom avea $a + b = -6$.

646. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + mx}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + m}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Așadar, $y = 0$ este

asimptotă orizontală pentru G_f la $+\infty$. Avem $f'(x) = (2x + m)e^{-x} - (x^2 + mx)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + (-m + 2)x + m)$. Deci, $f'(x) = 0 \iff -x^2 + (-m + 2)x + m = 0$. Discriminantul acestei ecuații este $\Delta = m^2 - 4m + 4 + 4m = m^2 + 4 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$, deci f va avea exact două puncte de extrem local $\forall m \in \mathbb{R}$.

647. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff 4(p + 5) + 2 \cdot 10 = 0 \iff 4p + 20 + 20 = 0 \iff p = -10$.

648. Avem $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Cunoaștem faptul că $m_{AB} = \text{tg } \alpha_{AB}$, unde

α_{AB} este unghiul format de AB cu axa Ox și cum $\text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$, deducem că unghiul format de AC cu axa Ox poate fi: **Cazul I:** $\alpha_{AC} = \alpha_{AB} + m(\widehat{A}) = 90^\circ$, deci $AC : x = 1$.

Cazul II: $\alpha_{AC} = \alpha_{AB} - m(\widehat{A}) = -30^\circ$. $\text{tg}(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $AC : y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \iff AC : 3y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \iff AC : y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$.

649. Avem $A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -24 & -21 & -8 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A^3) = 8$, deci $\text{Tr}(A^3) +$

$\det(A^3) = -8 + 8 = 0$.

650. Pentru f , avem Relațiile lui Viéte:
$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 10; \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -2. \end{cases} \quad \text{Notăm cu}$$

S_0 expresia cerută. Avem: $S_0 = \frac{-1 - (x_2 + x_3)}{x_2 + x_3} + \frac{-1 - (x_1 + x_3)}{x_1 + x_3} + \frac{-1 - (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = -\left(\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_1 + x_3} + \frac{1}{x_1 + x_2}\right) - 3 = -\left(\frac{1}{-1 - x_1} + \frac{1}{-1 - x_2} + \frac{1}{-1 - x_3}\right) - 3 = \frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \frac{1}{1 + x_3} - 3$. Aducem la numitor comun și obținem $S_0 = \frac{S_2 + 2S_1 + 3}{S_3 + S_2 + S_1 + 1} - 3 = \frac{11}{8} - 3 = -\frac{13}{8}$.

651. Aria căutată este $\mathcal{A} = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$. În

prima integrală, pe intervalul $[-1, 0]$, efectuăm schimbarea de variabilă $x = -x$, $dx = -dx$ și vom avea $\int_1^0 \frac{(-x)^2}{e^{-x} + 1} (-dx)$. Cum x^2 este funcție pară, $(-x)^2 = x^2$ și integrala va deveni

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^{-x} + 1} dx. \text{ Revenind în calculul ariei, rămânem cu } \mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x^2}{e^{-x} + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2(e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

652. Notăm $t = \frac{1}{x}$ și limita devine $L = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - \cos t)^{1/\ln t} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - \cos t)^{-1/\ln t}$. Folosim

identitatea $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ și obținem $L = \lim_{t \rightarrow 0} \left(2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1/\ln t}$. Calculând $\ln L$, avem $\ln L = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{\ln t} \cdot \ln\left(2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \ln \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{\ln t} \cdot \left(\ln 2 + 2 \ln \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$. Cum $t \rightarrow 0$, avem limita remarcabilă $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ care este valabilă și pentru $\frac{t}{2}$ și rămânem cu $\ln L = \ln \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{\ln t} \cdot \left(\ln 2 + 2 \ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{\ln t} \cdot (2 \ln t - \ln 2) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2 \ln t}{\ln t} + \frac{\ln 2}{\ln t} = -2$. Deci, $L = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

653. $f(\log_2 3) = 4^{\log_2 3} - 2^{\log_2 3 + 1} = 2^{2 \log_2 3} - 2^{\log_2 3 + \log_2 2} = 2^{\log_2 9} - 2^{\log_2 6}$. Cum

$a^{\log_a x} = x$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, avem $f(\log_2 3) = 9 - 6 = 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{654.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(x+3 - x-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

655. Avem $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, așadar $AB = CD = 1$ și $BC = AD = 2$, de unde

rezultă imediat că afirmația **[A]** este falsă, iar afirmația **[B]** adevărată. În $\triangle ABC$, avem $AB = 1$, $BC = 2$ și $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{3}$. Teorema cosinusului $\Rightarrow AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos B \iff AC^2 = 3$, deci $AC = \sqrt{3}$. Analog, pentru BD , aplicăm Teorema cosinusului

în $\triangle BCD$, unde $BC = 2$, $CD = 1$ și $m(\widehat{C}) = \frac{2\pi}{3}$ și obținem $BD = \sqrt{7}$.

656. Numărul submulțimilor lui A cu $(n-2)$ elemente este $C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, deci avem $\frac{n(n-1)}{2} = 10 \iff n^2 - n - 20 = 0$. Cum $n > 0 \Rightarrow n = 5$, așadar $n \in (2, 6]$.

657. Scriem ecuația ca $2^{2x} - 2^x \cdot 5^x \cdot 5 = 6 \cdot 5^{2x}$. Notăm $2^x = a > 0$ și $5^x = b > 0$ și rămânem cu $a^2 - 5ab - 6b^2 = 0 \iff a^2 + ab - 6ab - 6b^2 = 0 \iff a(a+b) - 6b(a+b) = 0 \iff (a-6b)(a+b) = 0$. Avem, așadar:

Cazul I: $a - 6b = 0 \iff a = 6b$, deci $2^x = 6 \cdot 5^x \iff x = \log_2(6 \cdot 5^x) \iff x = \log_2 6 + x \cdot \log_2 5 \iff x = 1 + \log_2 3 + x \cdot \log_2 5 \iff x = \frac{1 + \log_2 3}{1 - \log_2 5}$ (1).

Cazul II: $a + b = 0 \iff 2^x = -5^x$, evident imposibil. (2)

Așadar, (1) și (2) implică afirmațiile \boxed{B} și \boxed{D} .

658. Fie $E' \in (AB)$ astfel încât E - mijlocul lui AE' . Avem $x_E = \frac{x_A + x_{E'}}{2}$ și $y_E = \frac{y_A + y_{E'}}{2}$, deci $3 = \frac{1 + x_{E'}}{2}, 6 = \frac{3 + y_{E'}}{2} \iff E'(5, 9)$. De asemenea, observăm că E' este mijlocul lui BE , așadar avem $x_{E'} = \frac{x_B + x_E}{2}$ și $y_{E'} = \frac{y_B + y_E}{2}$, deci $5 = \frac{x_B + 3}{2}, 9 = \frac{y_B + 6}{2} \iff B(7, 12)$. Fie M mijlocul lui AC . Avem $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$, deci $x_M = \frac{x_C + 1}{2}, y_M = \frac{y_C + 3}{2}$ (1). De asemenea, F este mijlocul lui MC și avem $x_F = \frac{x_M + x_C}{2}, y_F = \frac{y_M + y_C}{2}$ adică $x_M + x_C = 8, y_M + y_C = 36$. Înlocuind cu rezultatele din (1), obținem $\frac{x_C + 1}{2} + x_C = 8, \frac{y_C + 3}{2} + y_C = 36$, deci $3x_C + 1 = 16, 3y_C + 3 = 72 \iff C(5, 23)$. Cum G este centrul de greutate în $\triangle ABC$, $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \iff x_G = \frac{1 + 7 + 5}{3}, y_G = \frac{3 + 12 + 23}{3} \iff G\left(\frac{13}{3}, \frac{38}{3}\right)$.

659. În $\triangle ABC$ avem $(DE), (DF)$ și (FE) linii mijlocii, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Avem $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 30 - 24 + 20 - 2 =$

20, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = 10 \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 40$.

660. Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$. Noile capete de integrare devin $t = 1$, respectiv $t = 0$ și avem $-\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

661. Observăm că $f(0) = 1$, deci $A \in Gf$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{-1-0} = -2$. Cum AB este tangentă la Gf în A , avem $f'(0) = m_{AB} = -2$. $f'(x) =$

$$1 + a(xe^{-x^2})' = 1 + a(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}), \text{ deci } f'(0) = 1 + a(e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0) = -2 \iff \\ 1 + a = -2 \Rightarrow a = -3.$$

662. Fie $M = AC \cap BD$. Cum $ABCD$ paralelogram, M este mijlocul lui AC , deci avem $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}, y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \iff x_M = \frac{-2 + 5}{2}, y_M = \frac{1 + 3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Evident, cum M este și mijlocul lui BD , înlocuim $x_M = \frac{x_B + x_D}{2}, y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$, de unde obținem $D(1, 1)$, deci $BD: \frac{x - x_B}{x_B - x_D} = \frac{y - y_B}{y_B - y_D} \iff BD: x - 2 = \frac{y - 3}{2} \iff BD: 2x - 4 - y + 3 = 0 \iff BD: 2x - y - 1 = 0$.

663. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \iff \sin^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \iff \sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$. Avem $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, deci $\sin \alpha < 0$, de unde deducem $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ este adevărată. Avem $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$, de unde $\boxed{\text{B}}$ este falsă. $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{8} \Rightarrow \boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{15}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

664. $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{2}{8} = \frac{p-1}{-3} \iff 8p - 8 = -6 \iff p = \frac{1}{4}$.

665. Avem $b_2 = 3b_1, b_3 = 9b_1, b_4 = 27b_1, b_5 = 81b_1$. Deci $S = b_1(1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 121b_1 \Rightarrow S : 11$. De asemenea, $S = (11\sqrt{b_1})^2$ și cum $b_1 \in \mathbb{Z}$, afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Fie $b_1 = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Atunci, $S = 121(2k + 1) = 242k + 121$ și cum $242k$ este număr par, iar 121 impar, urmează că afirmația $\boxed{\text{D}}$ este și ea adevărată.

666. Fie A matricea sistemului. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - a - 1 + 2 - 1 + a = 2 \neq 0$,

deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. De aici deducem că sistemul este compatibil determinat, deci are soluție unică. Afirmația $\boxed{\text{C}}$ este, evident, adevărată (se înlocuiește a în ultima ecuație din sistem). Soluțiile sistemului se pot determina folosind metoda lui Cramer și avem:

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\det A} \\ y = \frac{\Delta y}{\det A} \\ z = \frac{\Delta z}{\det A} \end{cases}, \text{ unde } \Delta x = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2. \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

și $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$. Cum $\det A = 2$, avem $x + y + z =$

$\frac{(a+1)^2 - 2a + (a-1)^2}{2}$, care verifică afirmația \boxed{D} dacă $a^2 - a + 1 = 0$, ecuație care nu are soluții reale (discriminantul este -3).

667. Într-un grup inversul unui element este unic. Avem $\sigma x = \tau \iff x = \sigma^{-1}\tau$. Ream-

intim că inversa unei permutări se determină citind permutarea de pe linia a doua înspre

prima linie și obținem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, deci avem $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Avem $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, de unde rezultă că afirmația \boxed{D} este adevărată.

668. f este continuă și derivabilă pe \mathbb{R}^* ca restricție de funcții elementare continue și

derivabile. f derivabilă în $x = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$, adică $f(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) =$

$\lim_{x \nearrow 0} f(x)$. Avem $f(0) = 1$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{bx} + 2 \sin x = 1 + 0 = 1$. $\lim_{x \nearrow 0} f(x) =$

$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} a = a$, de unde deducem $a = 1$. De asemenea, f este derivabilă

în $x = 0 \iff \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} 0$

$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \nearrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$. $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{bx} + 2 \sin x - 1}{x}$

$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{bx} \cdot b + 2 \cos x}{1} = b + 2$, de unde deducem $b + 2 = 0$, adică $b = -2$. Deci, $a + b = -1$.

669. Punctele de extrem local la distanța 1 față de axa Oy pot fi doar $x = 1$ sau $x = -1$.

Avem $f'(x) = \frac{x^3 + 2x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \forall x \in \mathbb{R}$. Deci, $f'(1) = 0 \iff a = -3$, $f'(-1) = 0 \iff$

$a = 3$, de unde rezultă varianta \boxed{A} .

670. Avem $f'(x) = x \sin x$, deci $f'(x) = 0 \iff x = -\pi, x = 0$ sau $x = \pi$. Cum $f'(x) > 0$

pe $(-\pi, 0)$, dar și pe $(0, \pi)$, $x = 0$ nu este punct de extrem local pentru f , iar f este strict

crescătoare pe $[-\pi, \pi]$. Avem $f''(x) = \sin x + x \cos x$, deci $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

$f''(x) < 0$ pe $[-\pi, 0]$ și $f''(x) > 0$ pe $[0, \pi]$, de unde deducem $x = 0$ punct de inflexiune.

671. Putem folosi faptul că toate triunghiurile create de vârfuri și centrul hexagonu-

lui (pe care îl vom nota cu O) sunt echilaterale. Avem astfel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\widehat{BAO}) = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Folosind doar laturile hexagonului avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OF} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OF}| \cdot \cos \pi = -1. \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = |\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

672. Ecuația dreptei AB este $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff AB : \frac{x - 1}{4} = \frac{y}{2} \iff$

$AB : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Avem $m_{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{CD} = \frac{1}{2}$, deci CD va avea ecuația de forma $y = \frac{1}{2}x + n \iff x - 2y + 2n = 0$. Cunoaștem $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \Rightarrow AD = \sqrt{20}$. De asemenea, AD este distanța de la A la latura CD și avem $AD = \frac{|1 + 2n|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|2n + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20} \Rightarrow |2n + 1| = \sqrt{100} = 10$, deci $2n + 1 = 10$ sau $2n + 1 = -10$, adică $n = \frac{9}{2}$ sau $n = -\frac{11}{2}$.

Așadar, ecuația dreptei CD poate fi $CD : x - 2y + 9 = 0$ sau $CD : x - 2y - 11 = 0$.

673. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, iar $\det(A^2) = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$ și $\text{Tr}(A^2) = 1 + 4 + 9 = 14$,

deci valoarea expresiei cerute este 22.

674. Notăm $S_0 = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$. Avem:

$$\begin{aligned}S_0 &= \frac{x_2x_3(x_2 + x_3) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1x_2x_3} \\ &= \frac{x_3(x_2^2 + x_1^2) + x_2(x_1^2 + x_3^2) + x_1(x_2^2 + x_3^2)}{x_1x_2x_3}. \text{ Scriind Relațiile lui Viete, avem: } S_1 = x_1 + \\ &x_2 + x_3 = -1, S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6, S_3 = x_1x_2x_3 = -2. \text{ Cum } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \\ &S_1^2 - 2S_2 = 1 - 12 = -11, \text{ avem } S_0 = \frac{x_3(-11 - x_3^2) + x_2(-11 - x_2^2) + x_1(-11 - x_1^2)}{-2} \\ &= \frac{-11(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}{-2}. \text{ Cum } x_1, x_2 \text{ și } x_3 \text{ sunt rădăcinile lui } f, \text{ avem} \\ &f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 0, \text{ adică } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6S_1 + 6 = 0, \text{ deci} \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 11. \text{ Revenind, rămânem cu } S_0 = \frac{-11S_1 - 11}{-2} = \frac{11 - 11}{-2} = 0.\end{aligned}$$

675. Aria căutată este $\mathcal{A} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x)| dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x}{e^x + 1} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx$.

În prima integrală, pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, efectuăm schimbarea de variabilă $x = -x$, $dx = -dx$ și vom avea $\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(-x)}{e^{-x} + 1} (-dx)$. Cum \cos este funcție pară, $\cos(-x) = \cos(x)$

și integrala va deveni $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{e^{-x} + 1} dx$. Revenind în calculul ariei, rămânem cu $\mathcal{A} =$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{e^{-x}+1} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x+1} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(e^x+1)}{e^x+1} dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

676. Reamintim criteriul radicalului pentru un șir (x_n) de numere pozitive, care e

o consecință a lemei Stolz-Cesaro: dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}. \text{ Calculăm așadar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \dots (2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1) \dots 2n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e}.$$

677. Avem $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$ și $g(3) = 6 + 1 = 7$.

678. Avem $\Delta = m^2 - 4m = m \cdot (m - 4)$, deci $\Delta < 0$ dacă și numai dacă $m \in (0, 4)$.

679. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1.$

680. Mijlocul segmentului AC este punctul $D(2, -2)$. Lungimea medianei BD este $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

681. Vectorii sunt coliniari, dacă $\frac{2}{b} = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a \cdot b = 6$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. $a = 1, b = 6$ satisfac această relație, deci și $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. $\boxed{\text{C}}$ este condiția perpendicularității, deci este falsă.

Din definiția produsului scalar $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{b^2 + 9} \cdot \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$. Dacă aceasta ar fi egală cu $\sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{b^2 + 9}$, atunci $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = 1 \Leftrightarrow m(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$, deci și $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

682. $a^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} =$
 $4 - 2\sqrt{4 - 3} = 2$. a fiind număr pozitiv, răspunsul corect este $\boxed{\text{B}}$.

683. Avem $f(-2) = |-2|^3 = 8$ și $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$. Pe de altă parte, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $\text{Im} f = [0, +\infty)$, deci funcția nu este nici injectivă, nici surjectivă.

684. Observăm că și punctul O se află pe dreapta d . Atunci dreapta d coincide cu dreapta ON . Deoarece triunghiul este dreptunghic în N , avem $ON \perp MN$. Rezultă că panta dreptei MN este $m_{MN} = -\frac{1}{m_d} = -2$, astfel ecuația dreptei MN este $y - 4 = -2(x - 3) \Leftrightarrow MN : 2x + y - 10 = 0$. Punctul N se află pe dreptele d și MN , astfel obținem $N(4, 2)$.

685. $f(\pi) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$.

686. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3 \cos x + (2 \cos^2 x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x - 1 = 0$. Folosind notația

$\cos x = t$, obținem ecuația: $2t^2 + 3t - 2 = 0$. Rezolvând ecuația avem $\Delta = 9 + 16 = 25$, iar $t_1 = -2$ și $t_2 = \frac{1}{2}$. Ecuația $\cos x = -2$ nu are soluții, iar ecuația $\cos x = \frac{1}{2}$ are două soluții în domeniul lui f , adică în intervalul $[0, 2\pi]$. Acestea sunt $\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$. Deci avem 2 soluții.

$$\begin{aligned} 687. \text{ Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{-4(\pi - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{8 \sin^2 x} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

688. Fie $w \in S$ și $|w| = |\bar{w}| = \sqrt{w \cdot \bar{w}} = r$. Din ecuația dată rezultă că $r^3 = |2+2i| = \sqrt{2^3}$, deci $r = \sqrt{2}$. Pe de altă parte, $\bar{w} w^2 = r^2 w = 2w$, de unde avem $2w = 2 + 2i$, deci singura soluție a ecuației date este $w = 1 + i$.

689. Determinantul sistemului este $(a - 1)^2$, deci sistemul este compatibil determinat pentru $a \neq 1$ cu soluția $x = y = z = 0$ și compatibil nedeterminat pentru $a = 1$. Dacă $a = 1$, adunând primele două ecuații constatăm că $2z = 0$, deci $z = 0$ indiferent de valoarea lui a .

690. Aplicăm teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{2}$. De aici avem $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul fiind ascuțitunghic obținem că $A = 45^\circ$; $B = 60^\circ$, deci $C = 75^\circ$.

691. Sunt două drepte care satisfac cerințele problemei: prima este paralelă cu dreapta AB și trece prin C , a doua trece prin mijlocul segmentului AB și prin C . Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{3-1}{2-6} = -\frac{1}{2}$. Deci ecuația primei drepte căutate este $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$. Mijlocul segmentului AB este $M(4, 2)$. Dreapta a doua este dreapta MC : $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+1}{2+1} \Leftrightarrow x-3 = \frac{y+1}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 10 = 0$.

692. Cum AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} , conform teoremei bisectoarei rezultă că $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{6}{5}DC \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{6}{5}\overrightarrow{DC}$. Atunci $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{6}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \frac{11}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Deci, $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$.

693. Cu schimbarea de variabilă $\cos x = t$, se obține $\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \ln(\cos x) dx = \int_{1/2}^1 \ln t dt =$

$$(t \ln t - t) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ deci răspunsul corect este } \boxed{A}.$$

694. Primul număr cu patru cifre este 1000 și ultimul 9999, deci în total sunt 9999 -

$1000+1 = 9000$ astfel de numere. Deoarece dintre trei numere consecutive exact unul este divizibil cu 3, rezultă că sunt exact $\frac{9000}{3}$ de numere din mulțimea S care sunt divizibile cu 3.

695. Operația este comutativă deoarece $x + y + |x - y| = y + x + |y - x|$. Pe de altă parte $(1 * 2) * 3 = 1 + 2 + |1 - 2| + 3 + |1 + 2 + |1 - 2| - 3| = 7 + 1 = 8$ și $1 * (2 * 3) = 1 + 2 + 3 + |2 - 3| + |1 - (2 + 3 + |2 - 3|)| = 7 + |1 - 6| = 12$. Pentru $x = y = \frac{1}{4}$ avem $x * y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 < 1$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Deoarece $x * y > x$ pentru orice $x, y \in G$, operația nu admite element neutru.

696. Deoarece $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, rezultă că afirmația $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Deoarece $f'(x) = -1 - \ln x$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă, iar afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Deoarece $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

697. Tabelul de mai jos rezumă variația funcției f .

x	0			$1/e$			∞
$f'(x)$		+	+	0	-	-	
$f(x)$	₀	↗	↗	$1/e$	↘	↘	$-\infty$.

Deoarece $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, rezultă că numărul soluțiilor ecuației $f(x) = \frac{1}{3}$ este 2.

698. Ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(a, -a \ln a)$, $a \in (0, \infty)$ este $y + a \ln a = (-1 - \ln a)(x - a)$. Punând condiția ca tangenta să treacă prin punctul $(0, 1)$, obținem $a = 1$. Prin urmare, dreapta d are ecuația $d: y = -x + 1$. Rezultă de aici că afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate, iar afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

699. Funcția f este concavă, iar dreapta $d: y = 1 - x$ este tangentă la graficul lui f în punctul $(1, 0)$. Ținând seama că graficul unei funcții concave se găsește sub tangenta la grafic în orice punct, rezultă că numărul real minim a pentru care $f(x) \leq a - x$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ este $a = 1$.

Alternativ, studiind variația funcției $g(x) := x - x \ln x - a$ pe $(0, \infty)$, se arată că inegalitatea $g(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ are loc dacă și numai dacă $a \geq 1$.

700. Notând $a := \int_{-1}^1 f(t) dt$, avem $2f(-x) - f(x) = 6 - 3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$. (1)

Punând $-x$ în locul lui x în relația (1), obținem $2f(x) - f(-x) = 6 - 3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$. (2) Scăzând membru cu membru relațiile (1) și (2), găsim $f(-x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$.

Această egalitate împreună cu (1) implică $f(x) = 6 - 3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$. Înlocuind în relația din enunț, deducem că $6 + 6 - 3ax^2 =$

$12 - 6ax^2 + 3x^2(12 - 2a)$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, de unde $9a = 36$, deci $a = 4$. Drept

urmare, avem $f(x) = 6 - 12x^2$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$. Rezultă de aici că afirmația **A**

este falsă, iar afirmațiile **B**, **C** și **D** sunt adevărate.

701. Avem $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2$ și $f(2) = 4 + 6 - 2 = 8$.

702. Avem $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = (m - 1)^2$, deci $\Delta = 0$ dacă și numai dacă $m = 1$.

703. Panta dreptei căutate este egală cu panta dreptei d , adică cu $m_d = \frac{1}{3}$.

704. Vectorii sunt perpendiculari, dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a \cdot b + 1 \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow a \cdot b - 3 = 0$,

deci **A**, **B** sunt adevărate. **C** este falsă pentru că dacă $b = -3a$, atunci $\vec{v} = -3\vec{u}$, deci

vectorii sunt paraleli. **D** este tot falsă, pentru că din nou obținem că $\vec{v} = -3\vec{u}$, adică vectorii sunt paraleli.

705. $a^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} =$

$4 + 2\sqrt{4 - 3} = 6$. Cum $a > 0$, răspunsul corect este **A**.

706. Limita este o nedeterminare de tipul 1^∞ , deci avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right]^{\frac{2n}{2n-1}} = e.$$

707. Avem $f(-1) = (-1)^3 = -1$ și $f(1) = -1^2 = -1$. Pe de altă parte, $f(x) \leq 0$ pentru

orice $x \in \mathbb{R}$ și $\text{Im} f = (-\infty, 0]$, deci funcția nu este nici injectivă, nici surjectivă.

708. Coordonatele punctului P sunt de forma $(x, 0)$ deoarece P este pe axa Ox . Astfel

$$\mathcal{A}(MNP) = \frac{1}{2}|\Delta| = 10, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-4x - 12| = 2|2x + 6|. \text{ Deci}$$

$|2x + 6| = 10$, de unde coordonatele punctului P pot fi $P_1(-8, 0)$, $P_2(2, 0)$.

$$709. f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.$$

710. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2}$. Ambele ecuații au câte două soluții în domeniul lui f , adică în intervalul $[0, \pi]$.

Acestea sunt $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. Deci avem 4 soluții.

711. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, limita este o nedeterminare de tipul $\infty \cdot 0$. Putem scrie

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{x}}$$
 și aplicând regula lui l'Hospital obținem

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

712. Ecuația are sens dacă și numai dacă $x > 0$ și $x \neq \frac{1}{4}$. În acest caz, prin logaritmare

putem transforma ecuația în una echivalentă: $\left(\frac{1}{1 + \log_4 x}\right) \log_4 x = \log_4 4 + 4 \log_4 x$.

Introducând notația $y = \log_4 x$, putem transcrie ecuația de mai sus în ecuația echivalentă $\frac{y}{1+y} = 1 + 4y$, de unde obținem ecuația de gradul doi $4y^2 + 4y + 1 = 0$, deci $y = -\frac{1}{2}$.

Prin urmare, singura soluție a ecuației date este $x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

713. Înmulțind ecuația a doua cu $\hat{2}$ și adunând rezultatul la prima ecuație, rezultă

că $\hat{5}X = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{5} \\ \hat{1} & \hat{6} \end{pmatrix}$. Observăm că $(\hat{5})^{-1} = \hat{3}$, prin urmare $X = \hat{3} \cdot \hat{5}X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$ și

$$\det X = \hat{1}. \text{ Pe de altă parte avem } Y = \hat{2}X - \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{6} & \hat{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{2} \end{pmatrix},$$

deci $\det Y = \hat{4}$. Prin urmare, $\det X \cdot \det Y = \hat{4}$.

714. Avem că $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + (m-1)\overrightarrow{AD}$

și $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Punctele D , N și M sunt coliniare dacă există $k \in \mathbb{R}^*$

astfel încât $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DM} \Leftrightarrow (m - \frac{3}{2}k)\overrightarrow{AB} = (1 - m - k)\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}k$ și $1 - m - k = 0$.

De aici obținem $k = \frac{2}{5}$, iar $m = \frac{3}{5}$.

715. Observăm că $r_t = MA = MB = \sqrt{(t-1)^2 + 1}$.

Pentru $t = 0$, avem că $r_t = \sqrt{2}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Pentru $t = 1$, $r_t = 1 \notin (\sqrt{2}, \sqrt{10})$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

Minimul razei r_t se realizează pentru $t = 1$, și această valoare este 1. Deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

Pentru $t = 2$, $r_t = MB = MA = \sqrt{2}$, iar $AB = 2$. Astfel din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

716. Aplicăm teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{2\sqrt{2}c}{3}}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. De aici obținem că $\sin B = \frac{2c}{3a}$, adică $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, și $\sin C = \frac{\sqrt{2}c}{2a}$. Pe de altă parte $\sin C = \sin(180^\circ - (45^\circ + B)) = \sin(45^\circ + B) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos B + \sin B)$. Înlocuim în relația precedentă valorile obținute din teorema sinusurilor pentru $\sin B$ și $\sin C$, obținem că $\frac{\sqrt{2}c}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos B + \frac{2c}{3a} \right)$, de unde $\cos B = \frac{c}{a} - \frac{2c}{3a} = \frac{c}{3a}$. Atfel, $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = 2$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Altă soluție pentru a calcula $\cos B$: aplicăm teorema cosinusului odată pentru unghiul A , adică $a^2 = c^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}c}{3} \right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{2\sqrt{2}c}{3} \cos 45^\circ \Leftrightarrow a^2 = c^2 \left(1 + \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}c}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{9}c^2$. Pe urmă aplicăm aceeași teoremă pentru unghiul B , și obținem că $\left(\frac{2\sqrt{2}c}{3} \right)^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow \frac{8}{9}c^2 = \frac{5}{9}c^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow -\frac{6}{9}c^2 = -2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{c}{3a}$.

717. Avem $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = -2\sqrt{5-x} \Big|_1^4 = \boxed{2}$.

718. Primul număr cu patru cifre este 1000 și ultimul 9999, deci în total sunt $9999 - 1000 + 1 = 9000$ astfel de numere. Prin urmare S este format din $\frac{9000}{2} = 4500$ de perechi disjuncte de forma $(2k, 2k + 1)$ și din fiecare astfel de pereche exact un element este par, deci numărul elementelor pare din S este 4500.

719. Operația este comutativă deoarece $|x - y| = |y - x|$ și $x + y = y + x$. Pe de altă parte

$$(1 * 2) * 3 = \frac{\left| \frac{|1-2|}{1+2} - 3 \right|}{\left| \frac{|1-2|}{1+2} + 3 \right|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ și } 1 * (2 * 3) = \frac{\left| 1 - \frac{|2-3|}{2+3} \right|}{\left| 1 + \frac{|2-3|}{2+3} \right|} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \text{ Pentru}$$

orice $x > y > 0$ avem $x - y < x + y$ și pentru orice $0 < x < y$ avem $y - x < x + y$, deci $|x - y| < x + y$ pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. De aici $\frac{|x-y|}{x+y} < 1$ pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

Din această inegalitate rezultă că operația nu poate să admită element neutru.

720. Deoarece $\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, rezultă că $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$,

deci afirmația $\boxed{\text{A}}$ este adevărată și afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

Deoarece $f'(x) = 2x \ln x(1 + \ln x)$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, deci afirmația **C** este falsă. De asemenea, avem $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (1, \infty)$, deci afirmația **D** este adevărată.

721. Tabelul de mai jos rezumă variația funcției f .

x	0			1/e			1			∞
$f'(x)$	0	+	+	0	-	-	0	+	+	
$f(x)$	0	\nearrow	\nearrow	1/e	\searrow	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	$+\infty$.

Din tabel rezultă că numărul punctelor de extrem local ale lui f este 3 (punctele 0, 1/e și 1 sunt puncte de extrem local).

722. Pentru orice $x \in (0, \infty)$ avem $f''(x) = 2(\ln^2 x + 3 \ln x + 1)$. Ecuația $t^2 + 3t + 1 = 0$ are două rădăcini reale distincte t_1 și t_2 . Drept urmare, ecuația $f''(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = e^{t_1}$ și $x_2 = e^{t_2}$, ambele în $(0, \infty)$. Cum f'' își schimbă semnul în x_1 și x_2 , rezultă că numărul punctelor de inflexiune ale graficului lui f este **2**.

723. Ecuația dreptei d este $d : y - e^2 = 4e(x - e) \Leftrightarrow y = 4ex - 3e^2$. Rezultă de aici că afirmațiile **A** și **B** sunt adevărate, iar afirmațiile **C** și **D** sunt false.

724. Avem
$$\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot x \Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ln \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

725. Avem
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 3n + 2}\right)^{n/3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-6n - 1}{n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{n^2 + 3n + 2}{-6n - 1}} \right]^{\frac{-6n - 1}{n^2 + 3n + 2} \cdot \frac{n}{3}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

726. Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \arctg x}{x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

727. Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ are ecuația $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Avem $f'(x) = 3e^{3x} + 2$, $f(0) = 2$ și $f'(0) = 5$. Prin înlocuire obținem

$y - 2 = 5x$, adică $5x - y + 2 = 0$.

728. Prin înlocuire directă în formulă obținem: $y + 1 = 3(x - 1)$. Un calcul simplu ne conduce la ecuația dreptei, anume: $3x - y - 4 = 0$.

729. Din ipoteză se deduce imediat că unghiul $A/2$ se află în cadranul 4, ceea ce înseamnă că sinusul este negativ și cosinusul este pozitiv. Prin urmare, avem $\sin \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = -\frac{4}{5}$, în timp ce $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \frac{3}{5}$, ceea ce înseamnă că afirmațiile A și B sunt adevărate, iar celelalte două sunt false.

730. Condiția de paralelism a celor doi vectori se rescrie astfel: $\frac{1}{a} = \frac{-(a+2)}{-3}$. După prelucrare vom obține: $a(a+2) = 3$ sau $a^2 + 2a - 3 = 0$. Această ecuație de gradul al II-lea, admite soluțiile $a = 1$, respectiv $a = -3$.

731. Pentru $k \in \{0, 1, \dots, 1011\}$, coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $(1+x)^{1011}$ este C_{1011}^k , deci suma coeficienților puterilor impare este $S = C_{1011}^1 + C_{1011}^3 + \dots + C_{1011}^{1011}$. Din relația $C_n^k = C_n^{n-k}$ avem $S = \frac{1}{2} (C_{1011}^1 + C_{1011}^{1010} + C_{1011}^3 + C_{1011}^{1008} + \dots + C_{1011}^{1011} + C_{1011}^0)$
 $= \frac{1}{2} (C_{1011}^0 + C_{1011}^1 + \dots + C_{1011}^{1011}) = \frac{1}{2} 2^{1011} = 2^{1010}$, unde am folosit $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

732. Termenii din sumă sunt în progresie aritmetică (a_n), cu primul termen $a_1 = 1$, rația $r = 4$ și $x = a_n = a_1 + (n-1)r$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este numărul de termeni din sumă. Fie S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice. Atunci $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = 2n^2 - n$. Valoarea lui n se determină din ecuația $2n^2 - 2n = 496$. Se obține $n = 16$, cealaltă rădăcină nefiind număr natural. Deci $x = a_{16} = 1 + (16-1) \cdot 4 = 61$.

733. Soluția 1.: Din $(1-i) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$ și $2022 = 8 \cdot 252 + 6$ avem

$$(1-i)^{2022} = \sqrt{2}^{2022} \left(\cos \frac{2022\pi}{4} - i \sin \frac{2022\pi}{4} \right) = 2^{1011} \left(\cos \frac{6\pi}{4} - i \sin \frac{6\pi}{4} \right) = 2^{1011} i,$$

Soluția 2.: Avem $(1-i)^{2022} = [(1-i)^2]^{1011} = (-2i)^{1011} = -2^{1011} i^{1011}$. Deoarece $1011 = 4 \cdot 252 + 3$ avem $i^{1011} = (i^4)^{252} \cdot i^3 = 1^{252} \cdot (-i) = -i$ și rezultă $(1-i)^{2022} = 2^{1011} i$.

734. Cu schimbarea de variabilă $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ și $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} dx =$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) \Big|_0^1 = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right).$$

735. Deoarece $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1$, rezultă că răspunsul corect este **B**.

736. Sumă Riemann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} e^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{n}{n} e^{\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 x e^x dx$. Integrala se calculează cu formula integrării prin părți: $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = (x - 1) e^x \Big|_0^1 = 1$.

737. Conform proprietăților vectorilor avem $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ și

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, deci $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{CE}$ sau echivalent, $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$, deoarece $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}$.

738. Avem $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A = \frac{a}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{4Rc} (2a^2 - 2b^2) = \frac{1}{2Rc} (a^2 - b^2)$ și $\sin(A + B) = \sin C = \frac{c}{2R}$. Rezultă $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$. Ținând cont de condiția $a > b > c$ rezultă că variantele **A**, **B** și **D** nu pot fi adevărate.

739. Din ipotezele problemei, deducem sistemul de ecuații
$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ, \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 2\widehat{B}. \end{cases}$$
 Din

acest sistem rezultă imediat că $\widehat{B} = 60^\circ$.

Pe de altă parte, din teorema sinusurilor obținem că $\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin A}$, de unde $\sqrt{3}a = 2b \sin A$. Ridicând la pătrat, obținem $3a^2 = 4b^2 \sin^2 A$. Dar, conform ipotezei, $3a^2 = 2b^2$, deci din relația de mai sus deducem că $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\widehat{A} = 45^\circ$, de unde rezultă că $\widehat{C} = 75^\circ$. Astfel, afirmațiile A și B sunt adevărate, în timp ce afirmațiile C și D sunt false.

Observație. Din condiția $3a^2 = 2b^2$ rezultă $a < b$. Astfel după ce am obținut $\widehat{B} = 60^\circ$, putem elimina C și D deoarece $\widehat{A} < 60^\circ < \widehat{C}$. Cum A și B sunt echivalente datorită egalității $\widehat{B} = 60^\circ$ și există cel puțin un răspuns corect, A și B sunt adevărate.

740. Notând $y = \sqrt[3]{x^2 + a}$, ecuația devine $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Aceasta are soluțiile $y_1 = 2$ și $y_2 = -\frac{1}{2}$. Pentru $y_1 = 2$, avem $\sqrt[3]{x^2 + a} = 2$, de unde $x^2 = 8 - a$, care are soluție dacă

și numai dacă $a \leq 8$. Pentru $y_2 = -\frac{1}{2}$, avem $\sqrt[3]{x^2 + a} = -\frac{1}{2}$, de unde $x^2 = -\frac{1}{8} - a$, care are soluție dacă și numai dacă $a \leq -\frac{1}{8}$.

741. Determinantul sistemului este $\Delta = -12 - 4a$. Sistemul este compatibil determinat dacă și numai dacă $\Delta \neq 0$, adică $a \neq -3$. Deci

742. Dintre 11 copii arbitrul poate fi ales în $C_{11}^1 = 11$ moduri. Din cei 10 copii rămași echipa X de 5 jucători poate fi formată în $C_{10}^5 = 252$ moduri. După formarea echipei X rămân 5 copii care formează echipa Y . Deci 11 copii pot forma echipele X, Y și arbitrul în $11 \cdot C_{10}^5 = 11 \cdot 252 = 2772$ moduri.

743. Din faptul că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, se obține că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ și strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. De asemenea, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, de unde rezultă, în particular, că afirmația **A** este falsă. Punctul 1 este singurul punct de minim global al funcției f , iar $f(1) = 1 + m$ este valoarea minimă a funcției f . Dacă $m + 1 < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții reale, deci afirmația **B** este adevărată. Funcția f nu este injectivă pentru nicio valoare a lui m , prin urmare afirmația **C** este falsă. Avem $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ dacă și numai dacă $m + 1 \geq 0$, adică dacă și numai dacă $m \geq -1$. Prin urmare, afirmația **D** este adevărată.

744. Din tabelul de variație al lui f rezultă că $f'(-1) = f'(1) = 0$. Cum $f'(x) = 3ax^2 + b$, avem $3a + b = 0$. Pe de altă parte, avem și $f(-1) = -a - b + c = 10$, $f(1) = a + b + c = 2$. Rezolvând sistemul $3a + b = 0$, $-a - b + c = 10$, $a + b + c = 2$, se obține $a = 2$, $b = -6$, $c = 6$, deci $|a| + |b| + |c| = 14$.

745. Din regula lui l'Hôpital: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 - \sqrt{t}) dt}{x^3} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x \ln(1 - x)}{3x^2} = -\frac{2}{3}$.

746. Fie O centrul hexagonului. $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE} = 2 \cdot \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$. Rezultă $a = 1$, $b = -1$, deci $b - 2a = -3$. Răspuns corect **A**

747. Se calculează coordonatele punctului D prin $x_D = \frac{x_B + 2x_C}{1 + 2} = \frac{-1 + 2 \cdot 2}{3} = 1$ și $y_D = \frac{y_B + 2y_C}{2 + 1} = \frac{-5 + 2 \cdot 1}{3} = -1$, deci obținem $D(1, -1)$. Înălțimea din vârful B este perpendiculară pe dreapta AC cu pantă $m_{AC} = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2$, de unde panta

înălțimii $m = -\frac{1}{m_{AC}} = \frac{1}{2}$. Înălțimea trece prin punctul $B(-1, -5)$, de aceea are ecuația $y + 5 = \frac{1}{2}(x + 1) \iff x - 2y - 9 = 0$. Distanța de la punctul $D(1, -1)$ la dreapta $x - 2y - 9 = 0$ este $d = \frac{|1 - 2 \cdot (-1) - 9|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

748. După calcularea determinantului ecuația se poate scrie în forma $x^3 - 14x + 20 = x^3 - 4x - 10x + 20 = (x - 2)(x + 2)x - 10(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x - 10) = 0$, ceea ce ne conduce la $x = 2$ sau $x^2 + 2x - 10 = 0$, adică $x = -1 + \sqrt{11}$ sau $x = -1 - \sqrt{11}$.

749. Se observă ușor că $x = 4k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine $\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+1}{4} \iff \left[\frac{4k+1}{3}\right] = k$. Ultima identitate este echivalentă cu $k \leq \frac{4k+1}{3} < k+1$, așadar $-1 \leq k < 2$. În acest caz $k \in \{-1, 0, 1\}$, deci $S = \{-5, -1, 3\}$.

750. Avem $1 * 2 = 1$ și $1 * 4 = 1$. Operația $*$ fiind comutativă, numărul $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru dacă și numai dacă pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x * e = xe - x - e + 2 = x$, adică $x(e - 2) = e - 2$. De aici rezultă că $e = 2$ este element neutru. Un număr întreg x este simetrizabil în $(\mathbb{Z}, *)$ dacă și numai dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $xx' - x - x' + 2 = 2$, adică $x'(x - 1) = x$. De aici rezultă că numai $x = 0$ și $x = 2$ sunt simetrizabile în \mathbb{Z} .

751. Avem $f(x + y) = a(x + y) + b$ și $f(x) \perp f(y) = ax + b + ay + b - 1$, de unde obținem $b = 1$. Mai departe, avem $f(xy) = axy + 1$ și $f(x) * f(y) = (ax + 1) + (ay + 1) - (ax + 1)(ay + 1) = 1 - a^2xy$, de unde obținem $a^2 + a = 0$. Deoarece f este bijectivă, avem $a \neq 0$, deci $a = -1$.

752. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x^n \geq x^{n+1} \forall x \in [0, 1]$, deci $I_n \geq I_{n+1}$. Așadar, șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $e^{-x} \leq 1 \forall x \in [0, 1] \implies 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. Integrând prin părți, $(n+1)I_n = x^{n+1}e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} dx = e^{-1} + I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Ținând cont de limita anterioară, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e^{-1}$. Relația anterioară poate fi rescrisă $\frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{e^{-1}}{(n+1)I_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Ținând cont de limita anterioară, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

753. În paralelogramul $ABCD$ fie $AB = a$, $AD = b$, ($a > b$), $BD = d_1$, $AC = d_2$,

$m(\widehat{BAD}) = \alpha$. Utilizând teorema cosinusului avem $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$, $\Rightarrow d_1^2 = 34 - 30 \cos \alpha$, $d_2^2 = 34 + 30 \cos \alpha$, de unde rezultă relația $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) = 68$. Pe de altă parte $d_1^2 \cdot d_2^2 = 34^2 - 30^2 \cdot \cos^2 \alpha$, deci $\cos^2 \alpha = \frac{34^2 - 32^2}{30^2} = \frac{2 \cdot 66}{4 \cdot 15^2} = \frac{33}{15^2}$. Cum α este unghi ascuțit deducem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{15}$.

754. Într-adevăr coordonatele (x, y) al punctului de intersecție al dreptei d cu axa

Ox reprezintă soluția sistemului liniar $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x = -\frac{c}{a} \\ y = 0, \end{cases}$ iar coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1 M_2]$ sunt $x_M = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} =$

$\frac{\frac{b-c}{a} - \frac{b+c}{a}}{2} = \frac{-\frac{2c}{a}}{2} = -\frac{c}{a}$ și $y_M = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$. Astfel **A** este adevărată.

Panta dreptei d este $-\frac{a}{b} \neq 0$, deci d nu poate fi paralelă cu axa Ox , adică afirmația **B** este falsă.

Coordonatele punctului de intersecție al dreptei d cu axa Oy reprezintă soluția sistemului

liniar $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{c}{b}, \end{cases}$ deci **C** este adevărată.

$\mathcal{A}_{\Delta M_1 M_2 N} = |\Delta|$, unde $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{b-c}{a} & 0 & 1 \\ \frac{b+c}{a} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{b} & 1 \end{vmatrix}$. Dar $|\Delta| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{c}{b} \right| \cdot \left| \left(\frac{b-c}{a} + \frac{b+c}{a} \right) \right| =$

$\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{2b}{a} \right| = \left| \frac{c}{a} \right|$, deci **D** este adevărată.

755. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2n-3}{2n^2+3n+1} \right)^{\frac{2n^2+3n+1}{-2n-3}} \right]^{\frac{-2n-3}{2n^2+3n+1} (n+2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

756. Aplicând regula lui L'Hôpital, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{3}{2}$.

757. Avem $f(0) = 1$ și $f'(x) = (x + 2)e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ecuația tangentei în P la graficul lui f este $y - f(0) = f'(0)x$ adică $y = 2x + 1$. Prin urmare $Q \in d$ și $S \notin d$.

758. Produsul scalar a doi vectori nenuli perpendiculari este 0. Deoarece trapezul este dreptunghic, avem $AB \perp AD$, $AD \perp DC$ și de asemenea $AC \perp BD$, din condiția dată.

759. Prin înlocuire directă în formulă obținem: $y - 1 = 2(x - 1)$. Un calcul simplu ne conduce la ecuația dreptei, anume: $2x - y - 1 = 0$.

760. Din ipoteză se deduce imediat că unghiul $A/2$ se află în cadranul 3, ceea ce înseamnă că atât sinusul cât și cosinusul este negativ. Prin urmare, avem $\sin \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = -\frac{4}{5}$, în timp ce $\cos \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = -\frac{3}{5}$, ceea ce înseamnă că afirmațiile **A** și **B** sunt adevărate, iar celelalte două sunt false.

761. Din $(1 + i) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ și $2022 = 8 \cdot 252 + 6$ avem $(1 + i)^{2022} = \sqrt{2}^{2022} \left(\cos \frac{2022\pi}{4} + i \sin \frac{2022\pi}{4} \right) = 2^{1011} \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) = -2^{1011}i$, deci partea imaginară este egală cu -2^{1011} .

Soluția 2.: Avem $(1+i)^{2022} = ((1+i)^2)^{1011} = (2i)^{1011} = 2^{1011}(i^3)^{337} = 2^{1011}(-i)(-i)^{336} = 2^{1011}(-i)$, deci partea imaginară este egală cu -2^{1011} .

762. Inecuația $\log_9(5x + 3) > \frac{1}{2} \log_3(x - 1)$ este definită pe domeniul maxim $D = (1, +\infty)$, pe care putem efectua transformările echivalente

$$\frac{1}{2} \log_3(5x + 3) > \frac{1}{2} \log_3(x - 1) \stackrel{3>1}{\iff} 5x + 3 > x - 1 \iff 4x > -4 \iff x > -1,$$

adică $x \in (-1, +\infty) \cap D = (1, +\infty)$, arătând că răspunsul corect este doar cel de la punctul **C**.

763.

Fie a_1 primul termen și r rația. Din cele două condiții obținem sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2a_1 + 7r = 16 \\ 19a_1 + 171r = 361. \end{cases}$$

Sistemul are soluția $a_1 = 1$, $r = 2$, deci răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$.

764. Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \cos^2 x$. Atunci $dt = -2 \cos x \sin x dx$ și

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

765. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 2x)}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = -1$.

766. Calculăm limita șirului folosind integrala Riemann. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2^2 e^{\frac{2}{n}} + \dots + n^2 e^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 e^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n} \right)^2 e^{\frac{2}{n}} + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 e^{\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 x^2 e^x dx$. Integrala

se calculează cu formula integrării prin părți: $\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = (x^2 e^x - 2x e^x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) \Big|_0^1 = (x^2 - 2x + 2)e^x \Big|_0^1 = e - 2$.

767. Condiția de paralelism a celor doi vectori se rescrie astfel: $\frac{a}{2} = \frac{1}{a+1}$. După prelucrare vom obține: $a(a+1) = 2$ sau Această ecuație de gradul al II-lea, admite soluțiile $a = 1$, respectiv $a = -2$.

768. $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = \frac{1}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} = \frac{4}{\sin^2 30^\circ} = 16$. Deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă iar $\boxed{\text{C}}$

este adevărată.

$\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$. Deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată iar $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

769. Din teorema sinusurilor avem $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Înlocuind, obținem $\sin A =$

$2 \sin B \sin \frac{A}{2}$. Aplicăm formula lui sin pentru argument dublu și scoatem factorul comun. Astfel obținem $2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{A}{2} - \sin B \right) = 0$. Cum \hat{A} este unghi într-un triunghi,

$\sin \frac{A}{2} \neq 0$, de unde $\cos \frac{A}{2} = \sin B$. Ținând cont de $\cos \frac{A}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)$ și de faptul

că triunghiul este ascuțitunghic obținem $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = B$, adică $A + 2B = \pi$. Dar cum

$A + B + C = \pi$, obținem $\hat{B} = \hat{C}$, deci $AB = AC$.

770. Notând $x^2 + x - 1 = y$, din condițiile de existență pentru radicali avem $y \geq 0$, și putem scrie ecuația dată în forma $\sqrt{y+4} + \sqrt{y} = 2$. De aici rezultă că $\sqrt{y+4} = 2 - \sqrt{y}$,

de unde prin ridicare la pătrat obținem ecuația $y + 4 = 4 - 4\sqrt{y} + y$, adică $y = 0$. Prin urmare, $x^2 + x - 1 = 0$, de unde rezultă că ambele soluții sunt reale și suma soluțiilor ecuației din enunț este -1 .

Soluția 2.: Putem scrie următoarele implicații: $\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2 \implies$
 $\frac{4}{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 1}} = 2 \implies \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2 \\ \sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 1} = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 3} = 2 \\ \sqrt{x^2 + x - 1} = 0 \end{cases}$
 $\implies x^2 + x = 1 \implies$ suma soluțiilor este -1 .

771. Determinantul sistemului este $\Delta = 4 - a$. Sistemul este compatibil determinat dacă și numai dacă $\Delta \neq 0$, adică $a \neq 4$. Deci **A** este adevărată. Sistemul Cramer are soluția

$$\begin{cases} x = \Delta_1/\Delta = \frac{20-5a}{4-a} = 5 \\ y = \Delta_2/\Delta = \frac{6a-24}{4-a} = -6 \\ z = \Delta_3/\Delta = \frac{0}{4-a} = 0, \end{cases}$$

deci **B** este falsă. Adunând cele 3 ecuații ale sistemului avem $(a - 4)z = 0$. Dacă $a \neq 4$, atunci sistemul este compatibil determinat. Dacă $a = 4$, atunci doar 2 ecuații sunt independente și se obține imediat soluția $x = 5 + z$, $y = -6 + z$, $z \in \mathbb{R}$. Deci **C** este adevărată, iar **D** este falsă.

Alternativ, pentru a obține răspunsurile **C** și **D**, se aplică Teorema Kronecker-Capelli pentru a arăta că sistemul este compatibil pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

772. La volan poate fi așezat a numai o persoană care deține permis de conducere, deci una dintre cele 3 persoane. Pe cele 6 locuri rămase trebuie așezate celelalte 4 persoane. Ele se pot aranja în $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ moduri. În total persoanele pot fi așezate în $3 \cdot A_6^4 = 3 \cdot 360 = 1080$ moduri.

773. Funcția f este derivabilă în 0 deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$. Se observă ușor că f este strict crescătoare, deci este și injectivă. Cum f este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, rezultă că f este surjectivă.

774. Din tabelul de variație al lui f rezultă că $f'(0) = f'(2) = 0$. Cum $f'(x) = a -$

$\frac{c}{(x-1)^2}$, avem $a-c=0$. Pe de altă parte, avem și $f(0)=b-c=-5$, $f(2)=2a+b+c=7$.
Rezolvând sistemul

$$a-c=0 \qquad b-c=-5 \qquad 2a+b+c=7,$$

se obține $a=c=3$, $b=-2$, deci $|a|+|b|+|c|=8$.

775. Se aplică regula lui l'Hôpital și teorema fundamentală a calcului integral:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

776. Din teorema bisectoarei avem $k = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Deoarece $AC = \sqrt{25+144} = 13$,

$$AB = \sqrt{9+16} = 5, \text{ obținem } x_D = \frac{13}{1 + \frac{13}{5}} = \frac{43}{9} \text{ și } y_D = \frac{13}{1 + \frac{13}{5}} = -\frac{20}{9}.$$

$x_D + y_D = \frac{23}{9}$, deci răspunsul corect este **C**.

777. Cu notațiile din enunț, utilizând teorema cosinusului avem $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$, de unde rezultă relația $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Astfel sunt adevărate relațiile de la punctul **A** și **D**.

778. **A** Observăm că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) < 1$ și $x_n > 0$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Așadar $x_{n+1} < x_n$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. **B** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C** Calculăm $x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right))} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Sau putem observa că $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} > 1 > x_2$. **D** Fie

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Scriem succesiv

$$2^n x_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \dots \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \dots \cdot \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)},$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \dots \cdot \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)},$$

...

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right)},$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Obținem $2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

779. După calcularea determinantului putem scrie ecuația $f(x) = 0$ în forma $x^3 - 8x - 8 = x^3 - 4x - 4x - 8 = (x-2)(x+2)x - 4(x+2) = (x+2)(x^2 - 2x - 4) = 0$, ceea ce ne conduce la $x = -2$ sau $x^2 - 2x - 4 = 0$, adică $x = 1 + \sqrt{5}$ sau $x = 1 - \sqrt{5}$. Astfel, răspunsurile corecte sunt A și B.

780. Se observă ușor că $x = 3k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x+1}{3} \iff \left[\frac{3k}{2}\right] = k$. Ultima identitate este echivalentă cu $k \leq \frac{3k}{2} < k+1$, așadar $0 \leq k < 2$. În acest caz $k \in \{0, 1\}$, deci $S = \{-1, 2\}$ și varianta B este adevărată.

781. Avem $2 * 3 = 2$ și $1 * 2 = 2$, deci A este adevărată. Operația $*$ este comutativă, asociativă, $e = 3$ este element neutru, dar $2 * x = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci 2 nu este simetrizabil. Prin urmare C este adevărată, iar D falsă. Submulțimea $[0, +\infty)$ nu este parte stabilă, deoarece, de exemplu, $1 * 5 = -1 \notin [0, +\infty)$, deci B este falsă.

782. Fie $0 \neq a + bi\sqrt{2} \in R$, deci $a, b \in \mathbb{Z}$. Elementul $a + bi\sqrt{2} \in R$ este inversabil dacă și numai dacă există $x + yi\sqrt{2} \in R$ astfel ca $(a + bi\sqrt{2})(x + yi\sqrt{2}) = 1$. Egalitatea

este echivalentă cu $(ax - 2by) + (ay + bx)i\sqrt{2} = 1$ și apoi cu sistemul
$$\begin{cases} ax - 2by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului cu necunoscutele $x, y \in \mathbb{Z}$ este $a^2 + 2b^2 > 0$, deci este un sistem Cramer. Acesta are soluții întregi dacă și numai dacă $a^2 + 2b^2 = 1$, adică $a = \pm 1$ și $b = 0$. Deci singurele elemente inversabile ale lui $(R, +, \cdot)$ sunt 1 și -1 , de unde rezultă valorile de adevăr de la răspuns.

Soluția 2.: Elementul $z = a + bi\sqrt{2} \in R \setminus \{0\}$ este inversabil în corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, avînd inversul $z^{-1} = \frac{1}{a + bi\sqrt{2}} = \frac{a - bi\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2} = \frac{a}{a^2 + 2b^2} - i \cdot \frac{b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$. Prin urmare, z este inversabil în R dacă și numai dacă pentru $a, b \in \mathbb{Z}$, numerele $\frac{a}{a^2 + 2b^2}$ și $\frac{b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$ sunt și ele întregi, deci dacă și numai dacă $b = 0$ și $a = \pm 1$.

783. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că $0 \leq x^n e^x \leq x^n \cdot e$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, rezultă

$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \cdot e \, dx = \frac{e}{n+1}$. Așadar $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. Afirmatia **A** este deci falsă și **B** adevărată.

Folosind formula de integrare prin părți, se obține, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, egalitatea $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, deci $nI_n = e - I_n - I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Ținînd cont de faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, prin trecere la limită cu $n \rightarrow \infty$ în egalitatea de mai sus, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n > 2$. Afirmatia **C** este deci falsă și **D** adevărată.

784. **A Fals.** $a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c = c - a > 0$ și $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c > 0$, deoarece a este catetă iar c este ipotenuza unui triunghi dreptunghic.

B Adevărat. Avem: $\text{dist}(M, d) = \frac{\left| a \cdot \frac{b-c}{a} + b \cdot 0 + c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b-c+c|}{\sqrt{c^2}} = \frac{b}{c}$.

C Fals. $a \cdot \frac{b-c}{a} + b \cdot 0 + c = b - c + c = b > 0$.

D Adevărat. Avem: $\text{dist}(E, d) \cdot \text{dist}(F, d) = \frac{|a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $= \frac{|c-a| \cdot |c+a|}{\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^2}} = \frac{|c^2 - a^2|}{c^2} = \frac{b^2}{c^2}$.

785. $x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geometrică $\iff x_2 = \sqrt{x_1^2 \cdot 1}$. Cum x_1 este pozitiv $\implies x_1 = x_2 \implies \Delta = 0 \implies a^2 = 12$. Cum x_1 și x_2 sunt pozitive suma lor va fi una pozitivă deci $a < 0 \implies a = -2\sqrt{3}$.

786. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \implies x_n$ este strict descrescător. Cum șirul este strict de-

screscător și $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n$ este mărginit. x_n este monoton și mărginit, deci convergent.

$$787. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^{\frac{x + \sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}} \right]^{\frac{-2x}{x + \sqrt{x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{x + \sqrt{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x + \sqrt{x}}} = e^{-2}.$$

$$788. \text{ Cum } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} \right) x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - e^{-x}}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x + e^{-x}}} = 1$$

789. Pentru ca doi vectori să fie coliniari, $\vec{u} = \alpha \vec{v}$. Cum $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$, $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow$ coliniari. $\boxed{\text{B}}$ este fals deoarece pentru $a = -2$ și $b = 3$ cei doi vectori au aceeași lungime. $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{2^2 + b^2} = |\vec{v}| \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 5}$, $b^2 > 5$. Astfel, pentru orice $b^2 > 5$ există un a astfel încât lungimea celor doi vectori este egală. Folosind condiția de perpendicularitate a doi vectori: $a \cdot 2 + 3 \cdot b = 0 \Rightarrow 2a = -3b$.

$$790. \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{ED}) = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u}) = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

791. Prima condiție este ca logaritmii să fie corect definiți și $\lg(5x + 11) \neq 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{11}{5}, \infty\right) - \{-2\}$. Atunci, $\frac{2\lg(x + 3)}{\lg(5x + 11)} = 1 \iff 2\lg(x + 3) = \lg(5x + 11) \iff (x + 3)^2 = 5x + 11 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$.

$$792. \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1 = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 3)^2} =$$

$$|\sqrt{x - 1} - 2| + |\sqrt{x - 1} - 3| \text{ Dacă } \sqrt{x - 1} \geq 3 \implies (\sqrt{x - 1} - 2) + (\sqrt{x - 1} - 3) =$$

$$1 \implies 2\sqrt{x - 1} - 5 = 1 \implies \sqrt{x - 1} = 3 \implies x = 10. \text{ Dacă } 2 < \sqrt{x - 1} < 3 \implies$$

$$(\sqrt{x - 1} - 2) + (3 - \sqrt{x - 1}) = 1 \text{ (adevărat)} \implies x \in (5, 10). \text{ Dacă } \sqrt{x - 1} < 2 \implies$$

$$(2 - \sqrt{x - 1}) + (3 - \sqrt{x - 1}) = 1 \implies 5 - 2\sqrt{x - 1} = 1 \implies \sqrt{x - 1} = 2 \implies x = 5.$$

Prin urmare, soluția finală este $[5, 10]$.

793. Pentru a afla numărul de moduri în care putem alege două puncte distincte din \mathcal{M} , folosim $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

794. Determinantul sistemului este egal cu: $d = 2(a - 2)^2 \Rightarrow$ pentru $a = 2$, determinantul este egal cu 0. Pentru $a = 2$, sistemul este compatibil nedeterminat, de unde rezultă faptul că admite mai multe soluții.

795. Cum x este în cadranul IV $\implies \sin x < 0$ și $\cos x > 0$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \cos^2 x = 1 - a^2 \implies \cos x = \sqrt{1 - a^2}$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2a\sqrt{1 - a^2}$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - a^2) - a^2 = 1 - 2a^2$

796. $AB = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$. Deci, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

797. Drepte sunt paralele $\iff m_{d_1} = m_{d_2}$; $m_{d_1} = \frac{1 - m}{3m - 7}$; $m_{d_2} = \frac{2 - m}{2m - 5}$.

798. $m_{AH} = \frac{2 - 1}{3 - 0} = \frac{1}{3} \implies m_{BC} = -3$.

799. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((x + 2)e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + 2 \cdot e^{\frac{1}{x}})$. Luăm separat limita: $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{1}{x} = \ln(e) = 1$ Deci limita finală este $1 + 2 = 3$. $\implies y = x + 3$ este asimptotă.

800. Derivata lui $f(x)$ este: $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + (x + a) \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}$ Ecuația tangentei în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este: $y - f(0) = f'(0)[x - 0] \implies y - f(0) = f'(0)x$ Dacă $f(0) = a$ și $f'(0) = 1$, atunci ecuația tangentei devine: $y - a = x \implies y = x + a$ Cum punctul $(-2, 5)$ aparține dreptei, avem: $5 = -2 + a \implies a = 7$ Deci, ecuația tangentei este: $y = x + 7$.

801. Notăm $3 - \cos 2x = t \implies 2 \sin 2x dx = dt \implies \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 - \cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln 2$.

802. $I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ Notăm $\sqrt{x} = t$, de unde $\frac{1}{2} \sqrt{x} dx = dt$. Atunci, integrala devine: $I = \int_1^e \ln(t^2) \cdot 2 dt = 4 \int_1^e \ln t dt$ Folosim integrarea prin părți: $\int \ln t dt = t \ln t - t$. Așadar: $I = 4[t \ln t - t]_1^e$ Calculăm la limite: $I = 4[e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1)] = 4[e - e + 1] = 4$ Prin urmare, valoarea integralei este $I = 4$.

803. Observăm că dacă înmulțim prima ecuație cu $\hat{2}$ rezultă cea de-a doua ecuație cu un rezultat diferit ($\hat{2}x + \hat{4}y = \hat{6} = \hat{1} \neq \hat{2}$). Sistemul nu are soluții.

804. Cum $x - [x]$ reprezintă partea fracționară a lui x , care aparține intervalului $[0, 1) \implies f(x)$ aparține intervalului $[-0.5, 0.5)$. Funcția este periodică, cu perioada 1, deoarece adăugând 1 la x , $x - [x]$ rămâne neschimbat. Totodată, funcția intersectează

axa Ox atunci când $x - [x] = 0.5 \Rightarrow$ singurul răspuns corect este \boxed{C} .

805. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$. Rezolvând sistemul în

\mathbb{Z} , obținem două soluții: $a = b = c = d = 1$ și $a = b = c = d = -1$.

806. $\frac{x_A + x_B + x_D}{3} = 2 \Rightarrow x_D = 4$; $\frac{y_A + y_B + y_D}{3} = 0 \Rightarrow y_D = -3$; Așadar,

$D(4, -3)$. Ecuația dreptei AB este: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$ Distanța de la punctul $D(4, -3)$ la dreapta AB este: $d = \frac{|4 + 2(-3) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|4 - 6 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Aria

triunghiului ABD este: Aria = $\frac{d \cdot AB}{2} = 3$; Aria paralelogramului este $3 \cdot 2 = 6$.

807. Prin calcul obținem $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 + 2 \cos(a - b)$.

Cum $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{a-b}{2} = 1 + \cos(a-b)$. Egalând cele două relații obținem: $2 + 2 \cos(a-b) = 1 + \cos(a-b) \Leftrightarrow \cos(a-b) = 1 \Leftrightarrow a-b = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(multiplii impari de π)

808. Aplicând Teorema sinusurilor în $\triangle ABC$, avem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, deci

$\frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{7\sqrt{2}}{10}$. Există 2 valori posibile pentru unghiul C : $\arcsin \frac{7\sqrt{2}}{10}$

și $180^\circ - \arcsin \frac{7\sqrt{2}}{10}$. Fie $\theta = \arcsin \frac{7\sqrt{2}}{10}$. Pentru primul triunghi, avem $B = 45^\circ, C =$

$\theta, A = 135^\circ - \theta$, iar pentru cel de-al doilea triunghi, $B = 45^\circ, C = 180^\circ - \theta, A = -45^\circ + \theta$.

Evident, având $\sin \theta = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \theta > 45^\circ$ și $\theta < 135^\circ$, de unde deducem că afirmația \boxed{A} este

falsă, iar afirmația \boxed{B} este adevărată. Având $\sin \theta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, deducem imediat $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Pentru primul triunghi, $\sin A = \sin(135^\circ - \theta) = \sin 135^\circ \cos \theta - \sin \theta \cos 135^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

$\frac{\sqrt{2}}{10}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} = \frac{4}{5}$. Pentru cel de-al doilea triunghi, $\sin A =$

$\sin(\theta - 45^\circ) = \sin \theta \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos \theta = \left(\frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.

Așadar, $\sin A \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. Revenind în Teorema sinusurilor, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ și

vom calcula latura a pentru fiecare dintre cele două triunghiuri. Mai întâi, $\sin A = \frac{4}{5}$,

deci $a = \frac{\frac{4}{5} \cdot 5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Apoi, $\sin A = \frac{3}{5}$, deci $a = \frac{\frac{3}{5} \cdot 5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, de unde

rezultă că afirmația \boxed{D} este și ea adevărată.

$$809. \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - m \quad f \text{ este crescătoare} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x; \text{Notăm: } g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Știm că: $-1 \leq g'(x) \leq 1$ Astfel: $-1 - m \leq f'(x) \leq 1 - m$. Pentru ca $f'(x) \geq 0$, trebuie ca: $-1 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq -1$.

$$810. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ Demonstrarea prin inducție că } A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{tr}(A^n) = 1 + 2^n \text{ și } \det(A^n) = 2^n; \text{ Așadar, limita } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1$$

811. $x * y = (x+a)(y+a) + 1 - a^2$, deci este comutativă. Dacă $*$ admite element neutru, atunci: $x * e = xe + ax + ae + 1 = x \Rightarrow e + a = 1, ae + 1 = 0 \Rightarrow a(1-a) + 1 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0; \Delta > 0 \Rightarrow a$ poate lua doua valori; $e = -\frac{1}{a}$;

812. Calculând derivatele de ordin unu, doi și trei: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x, f''(x) = e^x + e^{-x} - 2, f'''(x) = e^x - e^{-x}$. Astfel, $f'(0) = f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ adevărată.

Pentru a verifica dacă $x = 0$ este punct de extrem analizăm derivata a doua $f''(0) = 0$. Fiind zero, analizăm derivatele superioare: $f'''(x) = e^x - e^{-x}, f'''(0) = 0, f''''(x) = e^x + e^{-x}, f''''(0) = 2 > 0$ ceea ce indică un minim local la $x = 0 \Rightarrow \boxed{\text{B}}$ falsă.

Pentru a studia monotonia funcției f' , observăm că $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2$. Cum $e^x + e^{-x} \geq 2 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ strict crescătoare $\Rightarrow \boxed{\text{C}}$ adevărată.

Cum $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq \forall x$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{D}}$ adevărată.

$$813. \quad I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = \left[x (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1)I_n = e. \text{ Pentru } x \in [1, e], \text{ avem: } \ln(x) \in [0, 1] \Rightarrow (\ln(x))^{n+1} < (\ln(x))^n \Rightarrow I_{n+1} < I_n; \text{ Din relația } I_{n+1} + (n+1)I_n = e \text{ obținem } I_n > \frac{e}{n+2} \text{ și } I_{n+1} < \frac{e}{n+2} \Rightarrow I_n < \frac{e}{n+1} \Rightarrow \frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \text{ înmulțim cu } n \text{ și obținem } \frac{ne}{n+2} < nI_n < \frac{ne}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e;$$

814. Diagonalele pătratului se află pe axele de coordonate \Rightarrow pătratul este rotit cu 45° față de axele x și y . Astfel, coordonatele varfurilor pătratului se afla la $\left(\pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, 0\right)$ și $\left(0, \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$. Punctele cu coordonate întregi care se află în interiorul pătratului satisfac astfel: $|x| + |y| < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Pentru fiecare $k \in [1, \infty)$, există $4k$ puncte care satisfac $|x| + |y| = k$, datorită simetriei pătratului. Astfel numărul de puncte interioare pătratului este:

$\sum_{k=1}^n 4k = 2n(n+1)$, unde $n = \left\lceil \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rceil \Rightarrow N_\alpha = 2n(n+1)+1$ (datorită punctului din origine).

Pentru $\alpha = 3 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rceil = 2 \Rightarrow N_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$. Pentru a verifica existența unui α pentru care $N_\alpha = 41$ sau $N_\alpha = 67$, rezolvăm $1 + 2n(n+1) = 41 \Rightarrow n(n+1) = 20, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \alpha \in \{4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$, respectiv $1 + 2n(n+1) = 67 \Rightarrow n(n+1) = 33, n \in \mathbb{Z}$ deci nu avem soluții întregi.

815. Centrul de greutate G are coordonatele $(1, 2)$, iar ecuația dreptei OG este $y = 2x$, deci \boxed{C} este adevărată.

816. Avem $\vec{v}(2, 4) \perp \vec{a}(-1, \frac{1}{2})$, dacă produsul scalar al celor doi vectori este zero:
 $\vec{v} \cdot \vec{a} = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$, deci \boxed{A} este adevărată.

Vectorul \vec{v} este paralel cu $\vec{b}(17, 19)$ sau $\vec{c}(-1, -1)$ dacă componentele lor sunt proporționale:
 $\frac{t}{17} = \frac{t^2}{19} \Leftrightarrow t = \frac{19}{17}$ și $\frac{t}{-1} = \frac{t^2}{-1} \Leftrightarrow t = 1$. Astfel \boxed{B}, \boxed{C} sunt adevărate.

Vectorul \vec{v} nu poate fi un multiplu de $\vec{d}(0, 1)$ deoarece $\lambda(t, t^2) = (0, 1)$ implică $t = 0$, deci \boxed{D} este falsă.

817. Fie $C(x, y)$ cel de-al treilea vârf. Din formula pentru aria triunghiului obținem

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 4 \text{ sau } x + 5y + 4 = \pm 8. \text{ Dacă alegem semnul } + \text{ obținem că cel de-al}$$

treilea vârf este pe dreapta $x + 5y - 4 = 0$, în timp ce, dacă alegem semnul $-$, el se află pe dreapta $x + 5y + 12 = 0$. Astfel, afirmațiile \boxed{C} și \boxed{D} sunt adevărate, în timp ce afirmațiile \boxed{A} și \boxed{B} sunt false.

818. Dreapta se intersectează cu axa Ox în $\left(\frac{2b}{a}, 0\right)$ și cu axa Oy în punctul $\left(0, \frac{2b}{c}\right)$.

Triunghiul fiind dreptunghic, aria sa este egală cu semiprodusul catetelor, adică avem:
 $2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{a} \cdot \frac{2b}{c} = \frac{2b^2}{ac}$, de unde obținem $b^2 = ac$, adică numerele a, b, c sunt în progresie geometrică. La fel sunt și numerele $a, -b, c$ (desigur, nu cu aceeași rație!). Astfel, afirmațiile \boxed{A} și \boxed{B} sunt adevărate, în timp ce afirmațiile \boxed{C} și \boxed{D} sunt false.

819. Cum $\frac{1}{2}x - 3 < 0$ pentru orice $x \leq -2$, legea de corespondență a funcției f se rescrie

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Faptul că singura afirmație adevărată este $\boxed{\text{B}}$ rezultă imediat din analiza graficului funcției f .

Chiar și în lipsa graficului, folosind proprietățile funcției de gradul I se deduce cu ușurință că $f((-\infty, -2]) = [4, \infty)$, $f((-2, 1)) = (1, 4)$, $f([1, \infty)) = (-\infty, 1]$. Funcția f este bijectivă deoarece pentru orice element b al codomeniului \mathbb{R} există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = b$. Pentru $b \in (-\infty, 1]$, acest unic x este $x = \frac{3-b}{2} \in [1, \infty)$, pentru $b \in (1, 4)$, $x = b - 3 \in (-2, 1)$, iar pentru $b \in [4, \infty)$, $x = 6 - 2b \in (-\infty, -2]$.

820. Vârful parabolei asociate unei funcții $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) este punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Fie $m \in \mathbb{R}^*$. Pentru funcția f_m avem $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1$. Abscisa vârfului parabolei asociate este $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2m+1}{2m}$, iar ordonata este $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4m}$. Condiția necesară și suficientă pentru ca vârful parabolei asociate funcției f_m să se găsească pe dreapta de ecuație $2x + 3y + 6 = 0$ este: $2 \cdot x_V + 3 \cdot y_V + 6 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2m+1}{2m} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{32}$. Așadar, răspunsul corect este $\boxed{\text{B}}$.

821. Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$, deci sistemul este compatibil

determinat dacă și numai dacă $a \neq 1$. Pentru $a = 1$, scăzând prima ecuație din a doua, ajungem la concluzia $0 = 1$, deci sistemul este incompatibil în acest caz.

Alternativ, pentru $a = 1$, avem doi determinanți caracteristici: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

3, deci sistemul este incompatibil. În concluzie, $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate, iar celelalte afirmații sunt false.

822. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 2a \\ 2a & a^2 + 1 \end{pmatrix}$. Din $A^2 = O_2$ obținem sistemul $a^2 + 1 = 0$ și

$2a = 0$, care nu are soluții în \mathbb{R} . Pentru $a = 0$ avem $A^2 = A = I_2$, iar pentru $a = 1$ avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ deci afirmațiile adevărate sunt } \boxed{\text{B}}, \boxed{\text{C}} \text{ și } \boxed{\text{D}}.$$

823. $\boxed{\text{A}}$ Această afirmație este adevărată, deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}}{\frac{(n+2)!}{3^n}} = \frac{3}{n+2} \leq$

1 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea $x_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică

$x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.

$\boxed{\text{B}}$ Această afirmație este falsă, deoarece $x_1 = \frac{3}{2} > 1$ (de asemenea $x_2 = \frac{9}{6} > 1$, $x_3 = \frac{27}{24} > 1$).

$\boxed{\text{C}}$ Această afirmație este adevărată, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+2} = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Această afirmație este adevărată, deoarece pentru $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $0 < x_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$, pentru că $\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$, pentru orice $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Folosind $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

824. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{\frac{2a}{x-a} \cdot x} = e^{2a}$.

825. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, limita este o nedeterminare de tipul $\infty \cdot 0$. Putem scrie

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{x}}$$
 și aplicând regula lui l'Hospital obținem

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

826. Funcția f este continuă în 1 dacă și numai dacă $a+2 = b$. În ipoteza că $a+2 = b$,

funcția f este derivabilă în 1 dacă și numai dacă $4+a = 1$. Prin urmare, f este derivabilă

în 1 (deci pe \mathbb{R}) dacă și numai dacă $a = -3$ și $b = -1$.

827. Triunghiul este dreptunghic, astfel aria este semiprodusul catetelor, adică $\mathcal{A} = 6$.

(Dacă nu se observă că triunghiul este dreptunghic, atunci aria se poate calcula după

formula lui Heron.) Semiperimetrul fiind $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$, obținem $r = \frac{\mathcal{A}}{p} = 1$. Raza

R este jumătatea ipotenuzei sau se calculează din relația $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{2}$. Astfel

raportul este $\frac{2}{5}$, adică $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{B}}, \boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

828. Punctul M fiind mijlocul laturii AB avem $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Din relația $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$

rezultă că $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC}$. Astfel obținem: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MP} =$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$. Relația $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ ne dă $3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$. Deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată, iar celelalte sunt false.

829. Funcțiile logaritmice sunt definite pe mulțimea numerelor pozitive, de aceea este necesar să fie $3 + x > 0$ și $3 - x > 0$, adică $x \in (-3, 3)$. Rezolvăm ecuația folosind proprietățile logaritmilor: $\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3(3+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{\log_3(3-x)}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3(3+x) + \frac{\log_3(3-x)}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3(3+x) + \log_3(3-x) = 1 \Leftrightarrow \log_3[(3+x)(3-x)] = 1 \Leftrightarrow (3+x)(3-x) = 3^1 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$, fiindcă $\pm\sqrt{6} \in (-3, 3)$.

830. Condiția de existență a radicalului este $x^2 + x + 7 \geq 0$, sau echivalent $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \geq 0$, deci $x \in \mathbb{R}$. Înlocuind $y = x^2 + x + 4$ în ecuația originală, obținem $y = 2\sqrt{y+3}$. Prin urmare, $y^2 = 4y + 12$, de unde $y \in \{6, -2\}$. Pe de altă parte, $y = x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}$, deci numai soluția $y_1 = 6$ convine. Pentru această valoare obținem ecuația $x^2 + x - 2 = 0$, care admite soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -2$. Din explicațiile de mai sus rezultă că ecuația originală admite exact aceste două soluții, deci produsul soluțiilor este -2 .

Alternativ, după stabilirea faptului că soluțiile ecuației date sunt soluțiile ecuației de gradul doi $x^2 + x + 4 = y_1$, putem ajunge la concluzia finală fără rezolvarea acestei ecuații, cu ajutorul formulelor lui Viète: $x_1 x_2 = -2$.

831. Pentru orice $x < 0$ avem $|x^3 - x^2| = x^2|x - 1| = -x^3 + x^2$ și $\max\{x^3, x^4\} = x^4$, deci $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$. Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $|x^3 - x^2| = x^2|x - 1| = -x^3 + x^2$ și $\max\{x^3, x^4\} = x^3$, deci $f(x) = x^2 + x$. Funcția este continuă în $x_0 = 0$ deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 0$. De asemenea, funcția este derivabilă în $x_0 = 0$ deoarece $f'_s(0) = f'_d(0) = 1$. Ecuația tangentei în $O(0, 0)$ este $y = x$ (prima bisectoare).

832. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 10x^2 + 2021$. Atunci $g'(x) = 4x(x^2 - 5)$. Rezultă că funcția g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt{5}]$, strict crescătoare pe $[-\sqrt{5}, 0]$, strict descrescătoare pe $[0, \sqrt{5}]$ și strict crescătoare pe $[\sqrt{5}, \infty)$. Rezultă că $A = [\sqrt{5}, \infty)$.

833. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2(1 - \ln x) = x^2 - x^2 \ln x$. Evident, f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $f'(x) = x(1 - 2 \ln x)$. Tabelul care sintetizează

variația lui f este prezentat mai jos.

x	0		\sqrt{e}		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	-	-	-
$f(x)$	₀	↗	↗	$e/2$	↘	↘	↘
					0		$-\infty$

Din tabel rezultă că ecuația $f(x) = a$ are două soluții distincte $x_1 \in (0, \sqrt{e})$ și respectiv $x_2 \in (\sqrt{e}, e)$, dacă și numai dacă $a \in (0, e/2)$.

834. Avem, înainte de toate, $|\cos \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \frac{3}{5}$. Întrucât $x \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, deducem că $\frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$, adică $\frac{x}{2}$ este în cadranul trei, unde funcția cos ia valori negative. Așadar, afirmația **C** este adevărată, celelalte trei sunt false.

835. Din teorema cosinusului avem $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 170 - 26 \cdot \cos C$, unde

$$\cos C = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{13}, \text{ deci } c^2 = 170 - 26 \cdot \frac{5}{13} = 160 \Rightarrow c = 4\sqrt{10}, \text{ deci}$$

A este adevărată și **B** este falsă. $\sin C = \frac{2\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} = \frac{12}{13}$, astfel **C** este adevărată.

$$\text{Aria}(ABC) = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 1 \cdot \frac{12}{13} = 6, \text{ deci } \text{D} \text{ este adevărată.}$$

836. Ecuația este echivalentă cu ecuația $1 - 2 \sin^2 x + a \sin x - 2a + 7 = 0$ sau

$$2 \sin^2 x - a \sin x + 2a - 8 = 0. \text{ Fie } t = \sin x. \text{ Suntem conduși la ecuația de gradul al}$$

$$\text{doilea în } t: 2t^2 - at + 2a - 8 = 0. \text{ Discriminantul ecuației este } \Delta = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2a - 8) =$$

$$a^2 - 16a + 64 = (a - 8)^2. \text{ Soluțiile ecuației sunt, după cum ne putem convinge imediat,}$$

$$t_1 = 2 \text{ și } t_2 = \frac{a - 4}{2}. \text{ Cum sinusul este mai mic sau egal cu 1, în modul, prima soluție nu}$$

convine, prin urmare, pentru a ecuația originală să aibă soluții, este necesar și suficient

să avem $|t_2| \leq 1$, adică $|a - 4| \leq 2$ sau $2 \leq a \leq 6$, ceea ce înseamnă că afirmația **A**

este falsă, în timp ce **B** este adevărată. Dacă $a = 5$, atunci obținem $\sin x = \frac{1}{2}$, iar

soluția generală a acestei ecuații este $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, așadar afirmația **C**

este adevărată, iar **D** este falsă.

837. Ecuația se scrie $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ (rădăcină cubică a

unității). $\alpha^3 = 1 \Rightarrow |\alpha|^3 = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$; $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = 0 \in \mathbb{R}$, deci **A** este

adevărată și **B** este falsă. Pe de altă parte $\alpha^{2021} = (\alpha^3)^{673} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = -\alpha - 1$, deci **C**

este adevărată. $(-\alpha)$ este rădăcină pentru ecuația $z^3 = -1$, deci $(z+1)(z^2 - z + 1) = 0$ și astfel $(-\alpha)^2 - (-\alpha) + 1 = 0$. În consecință $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

838. Ecuația dată este echivalentă cu $(x+1)(x+3) = \widehat{0}$. Observăm că \widehat{a} este o soluție a acestei ecuații dacă și numai dacă a este număr impar și $(a+1)$ sau $(a+3)$ este divizibil cu 3. În concluzie, soluțiile distincte ale ecuației date sunt $\widehat{3}, \widehat{5}, \widehat{9}$ și $\widehat{11}$.

Alternativ, se poate ajunge la concluzia de mai sus și prin înlocuirea celor 12 elemente ale inelului în ecuație.

839. Pentru $x = y = 2$ numitorul se anulează, deci $\boxed{\text{A}}$ este fals. Fie $x, y > 2$; avem $x + y - 4 > 0$; în plus, se calculează că $x * y > 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) + 2 > 0$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Avem $3 * (3 * 3) = 3 * \frac{7}{2} = \frac{17}{5}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este fals. Avem $4 * x = x \Leftrightarrow 4x - 2 = x^2$, ceea ce evident nu are loc pentru orice $x > 3$, deci $\boxed{\text{D}}$ este fals.

840. Cum funcția de integrat este pară obținem $I = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x} \sin x \, dx$,

deci $I = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1 - \cos x) \frac{3}{2} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}$.

841. Se studiază semnul derivatei $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ cu ajutorul funcției $h: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $h(x) = x + \ln(1+x)$. Din $h'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0, \forall x \in (-1, \infty)$, rezultă că funcția h este strict crescătoare. De asemenea, $h(0) = 0$. Prin urmare, $h(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$, și $h(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$, sau, echivalent, $x < \ln \frac{1}{1+x}, \forall x \in (-1, 0)$, și $x > \ln \frac{1}{1+x}, \forall x \in (0, \infty)$. Ținând cont de faptul că funcția exponențială este strict crescătoare, rezultă $e^x < \frac{1}{1+x}, \forall x \in (-1, 0)$, și $e^x > \frac{1}{1+x}, \forall x \in (0, \infty)$. Prin urmare, $f'(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$, $f'(0) = 0$ și $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$. Concluzionăm că funcția f este strict descrescătoare pe $(-1, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$, de unde rezultă că funcția f nu este injectivă, nu are puncte de maxim global și că punctul 0 este singurul ei punct de minim global. Cum $f(0) = 0$, se obține că $1 + \ln(1+x) < e^x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, ceea ce arată că afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

842. Distanța $AM + MB$ este minimă, dacă și numai dacă M se află pe segmentul AB .

Dar M fiind și pe axa Ox rezultă $\{M\} = Ox \cap AB$. Ecuația dreptei AB este $x + 2y + 2 = 0$, de unde $\alpha = -2$. Analog, din $\{N\} = Oy \cap AB$ se obține $\beta = -1$, iar $MN = \sqrt{5}$, adică

doar \boxed{D} este adevărată.

843. Știm că $1 + \dots + 100 = 5050$, deci ca să obținem 5044 trebuie să scădem o sumă egală cu 6. Dar suma 6 poate fi obținută în 4 feluri: $6, 1 + 5, 2 + 4, 1 + 2 + 3$.

844. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n} + x^{2n+2}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 < I_n < \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_{n+1} < I_n$, deci $2I_n > I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow I_n > \frac{1}{4n+2}$

și $2I_{n+1} < I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow I_{n+1} < \frac{1}{4n+2} \Rightarrow I_n < \frac{1}{4n-2}$. Drept urmare,

avem $\frac{1}{4n+2} < I_n < \frac{1}{4n-2} \Rightarrow \frac{n}{4n+2} < nI_n < \frac{n}{4n-2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

845. Avem $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} =$

$|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$. $\vec{BA} \cdot \vec{AD} = \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

$\vec{BA} \cdot \vec{CD} = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BA}| \cdot \cos 0^\circ = 1$.

846. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{3}$. Cum $ABCD$ dreptunghi, $AD \perp AB \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AD} = -1 \Rightarrow$

$m_{AD} = -\frac{3}{4}$. Așadar, $AD : y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \Leftrightarrow AD : y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow$

$AD : 3x + 4y - 11 = 0$.

847. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 2(b+4) + 2b = 0 \Leftrightarrow 4b = -8 \Leftrightarrow b = -2$.

848. Ecuația se poate rezolva clasic, calculând inversa primei matrici. Însă, în acest caz,

fie $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, cu $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Avem $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 & 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, deci obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, deci suma elementelor lui X este 2.

849. Notăm cu A matricea sistemului. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4a + 20$, deci pentru

$a = -5$, sistemul poate fi compatibil nedeterminat sau incompatibil. Pentru $a = -5$, găsim

minorul principal $m_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Atunci, $m_{\text{caracteristic}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4a =$

$-20 \neq 0$, deci sistemul este incompatibil. Dacă $\det A = 16$, atunci avem $a = -1$. Sistemul

este compatibil determinat și se poate rezolva folosind Metoda lui Cramer:
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\det A} \\ y = \frac{\Delta y}{\det A} \\ z = \frac{\Delta z}{\det A} \end{cases} .$$

Avem $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & -2 & a \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$ și $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$. Așadar,

soluția sistemului este $\left(x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}\right)$.

$$850. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{x^2 e^x}} \right]^{x^2 e^x \cdot \frac{1}{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2 e^x \cdot \frac{1}{1 - \cos x}} = e^2.$$

Observație:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{1 - \cos x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x + x^2 e^x}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x + x e^x) + 2x e^x + x^2 e^x}{\cos x} = 2.$$

851. f este continuă pe $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ca restricție de funcții elementare continue. f este

continuă în $x = 0 \iff \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$. Avem $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 1, f(0) = 1$ și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} a e^{-x} + b e^x + c x (e^x - e^{-x}) = a + b$, de unde deducem că $a + b = 1$.

Analog, f este continuă în $x = 1 \iff \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$. Avem $f(1) = e$, $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} a e^{-x} + b e^x + c x (e^x - e^{-x}) = a e^{-1} + b e + c(e - e^{-1}) = \frac{a}{e} + b e + \frac{c e^2 - c}{e} = \frac{a + b e^2 + c e^2 - c}{e}$ și $\lim_{x \searrow 1} f(x) = e$, de unde deducem că $a + b e^2 + c e^2 - c = e^2$, deci $b + c = 1$.

Așadar, suma $a + 2b + c = 1 + 1 = 2$.

852. $\sin x = \frac{1}{3}$, deci $\cos^2 x = \frac{8}{9}$. Cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos x < 0$ și obținem $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}. \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

853. Fie M mijlocul lui AE și N mijlocul lui BD . Avem $x_M = \frac{x_A + x_E}{2}, y_M =$

$$\frac{y_A + y_E}{2} \iff M(-2, 4). \text{ De asemenea, } E \text{ este mijlocul lui } MC, \text{ deci } x_E = \frac{x_M + x_C}{2}, y_E =$$

$$\frac{y_M + y_C}{2} \iff C(-6, 0). \text{ } D \text{ este mijlocul lui } AN, \text{ deci } x_D = \frac{x_A + x_N}{2}, y_D = \frac{y_A + y_N}{2},$$

$$N(8, 2). \text{ Totodată, } N \text{ este mijlocul lui } BD, \text{ deci } x_N = \frac{x_B + x_D}{2}, y_N = \frac{y_B + y_D}{2}, B(12, 0).$$

Coordonatele centrului de greutate G sunt $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right), G(2, 2)$.

854. Suma primilor n termeni ai progresiei este $\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=1}^{100} (a_1 + (n-1)d) = 100a_1 +$

4950d. Totodată, suma termenilor pari este $\sum_{n=1}^{50} a_{2n} = \sum_{n=1}^{50} (a_1 + (n-1)d) = 50a_1 + 2500d$.

$$\text{Așadar, avem sistemul: } \begin{cases} 100a_1 + 4950d = 200 \\ 50a_1 + 2500d = 200 \end{cases} \Rightarrow 100a_1 + 4950d - 2(50a_1 + 2500d) =$$

$-200 \iff -50d = -200 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = -196$, de unde rezultă că afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

855. Al treilea termen al dezvoltării este $T_3 = (-1)^2 \cdot C_5^2 \cdot (x^{-1})^3 \cdot (x^{\frac{1+\lg x}{2}})^2 = 10 \cdot x^{-3}$.

$x^{1+\lg x} = 10 \cdot x^{-3+1+\lg x} = 10000 \Rightarrow x^{-2+\lg x} = 1000 \iff (-2 + \lg x) \cdot \lg x = 3$. Notăm $t = \lg x$ și avem $t^2 - 2t - 3 = 0 \iff t = 3$ sau $t = -1$, deci $x \in \left\{ \frac{1}{10}, 1000 \right\}$.

856. Efectuăm substituția $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$ și ecuația devine $\sqrt{t^2 - 1 - 6t + 10} + \sqrt{t^2 - 1 + 6t + 10} = 6 \iff \sqrt{(t-3)^2} + \sqrt{(t+3)^2} = 6 \iff |t-3| + |t+3| = 6$. Observăm că $|t-3| + |-t-3| = |t-3| + |t+3| = 6 = |t-3-t-3| = 6$, deci avem egalitate în inegalitatea triunghiului. Deducem că $t-3$ și $-t-3$ au același semn sau unul dintre ele e zero, deci $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

857. $f'(x) = 3 + 4 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\sqrt{1-x^2} - 4x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff 3\sqrt{1-x^2} = 4x \iff x^2 = \frac{25}{9}$,

deci $x = \pm \frac{3}{5}$. Cum f continuă, f crescătoare pe $[-1, \frac{3}{5}]$, f descrescătoare pe $[\frac{3}{5}, 1]$, $f(-1) = -3$, $f(\frac{3}{5}) = \frac{7}{5}$, $f(\frac{3}{5}) = 5$ și $f(1) = 0$, obținem că valoarea maximă a lui f este 5, iar cea minimă -3 , de unde $b - a = 8$.

858. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$. Folosim descompunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, A, B, C \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) =$$

$$1 \iff x^2(A+B) + x(B+C) + A+C = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}, \text{ de unde obținem } A=C=$$

$$\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, \text{ deci integrala devine } \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x+1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

859. D este mijlocul lui $BC \Rightarrow x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, y_D = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow C(-2, 3)$. Atunci

avem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 8 + 2 - 8 - 9 = -14 \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC} = 7$.

860. $f(1) = 0, f(0) = 0$, deci $1 \in S$. $f(-1) = 2, f(2) = 2$, deci $-1 \notin S$. $f(x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x$, polinom ce are rădăcinile $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, deci exact 2 numere iraționale există în S .

861. Notăm $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i \iff 2ab = 1$ și $a^2 - b^2 = 0$.

Dacă $a = b$, atunci $a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dacă $a = -b$, $a^2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$. Așadar, avem două numere care respectă condiția dată: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 $(z_1^3 + \bar{z}_1) = \frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. $(z_2^3 + \bar{z}_2) = -\frac{i\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

862. Limita de rescrie $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 2nk + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 \left(1 + 2\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 2\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) =$

$\frac{1}{x^2 + 2x + 1}, f$ continuă și integrabilă pe \mathbb{R} . Pentru fiecare n se consideră diviziunea

$\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0, 1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de

puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n . Pentru fiecare n , termenul x_n este suma

Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare ξ_n ,

adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 (x+1)^{-2} dx = \left. \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

863. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f , axa Ox și dreptele de ecuații

$x = -1$ și $x = 1$ este $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left(\frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) \Big|_{-1}^1 - \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \Big|_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$.

864. Din regula triunghiului, $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$, deci afirmația \boxed{A} este adevărată. Cum

$ABCD$ este romb, obținem $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{DC} = \vec{AB}$ și cum, din ipoteză, $BE = 2 \cdot EC, FD =$

$3 \cdot FC$, rezultă imediat că afirmația \boxed{B} este adevărată, iar \boxed{C} este falsă. Din regula triunghiului, mai rezultă și $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

865. Vom calcula lungimile laturilor triunghiului folosind formula

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ și obținem $AB = 15$, $AC = 13$ și $BC = 14$. Cum AD este bisectoare în $\triangle ABC$, aplicăm Teorema Bisectoarei și avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{13}$. Notăm $BD = x \Rightarrow DC = 14 - x$. Avem: $\frac{x}{14 - x} = \frac{15}{13} \Leftrightarrow 13x = 15(14 - x) \Leftrightarrow 13x = 210 - 15x \Leftrightarrow x = \frac{210}{28} = \frac{15}{2}$.

866. Cum $f: (\mathbb{Z}_8, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$, trebuie să avem $f(\hat{8}) \equiv 0 \pmod{12} \Leftrightarrow 8f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{12} \Leftrightarrow 2f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{3}$, deci obținem $f(\hat{1}) \in \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\}$. Cum $f(\hat{5}) = \hat{9} \Rightarrow 5f(\hat{1}) = \hat{9}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{0}$, $5f(\hat{1}) = 0 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{3}$, $5f(\hat{1}) = 15 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{6}$, $5f(\hat{1}) = 30 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{9}$, $5f(\hat{1}) = 45 \equiv 9 \pmod{12}$, deci varianta \boxed{B} este adevărată.

867. Aplicăm \ln expresiei și obținem $\ln x - \ln 2024^x = \ln y - \ln 2024^y \Leftrightarrow \ln x - x \ln 2024 = \ln y - y \ln 2024$. Notăm $a = \ln 2024$, iar expresia este $\ln x - ax = \ln y - ay$. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - ax$. Ecuația noastră implică, deci, $f(x) = f(y)$, cu $x < y$. Avem $f'(x) = \frac{1}{x} - a$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - ax}{x} = 0 \Leftrightarrow ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$. Cum f este continuă și $f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$, obținem că f este crescătoare pe $(0, \frac{1}{a}]$ și descrescătoare pe $[\frac{1}{a}, +\infty)$. Așadar, o ecuație $f(x) = c$ va avea mereu cel puțin două soluții, una în intervalul $(0, \frac{1}{a}]$ și cealaltă în $[\frac{1}{a}, +\infty)$. Cum $x, y \in \mathbb{R}$, iar c poate lua o infinitate de valori, că ecuația $f(x) = f(y)$ are o infinitate de soluții, deci afirmația \boxed{C} este adevărată. Dacă $y = 1$, atunci vom avea $\ln x = a(x - 1)$, ecuație care o soluție în intervalul $(0, 1]$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ și $f(1) = 0$, iar f este crescătoare pe acest interval.

868. Observăm că pentru $a > 0$, șirul este crescător și nemărginit superior, deci este divergent. De asemenea, pentru $a < -1$, $x_1 = x_0(1 + x_0)$, ambele numere negative, deci $x_1 > 0$, iar astfel șirul va deveni crescător și nemărginit superior, deci divergent. Pentru $a = 0$, $(x_n) = 0$, deci limita sa este 0. Pentru $a = -1$, $x_1 = 0 \Rightarrow (x_n) = 0$, deci limita sa este 0. În final, pentru $a \in (0, 1)$, observăm că șirul este crescător, dar mărginit superior de 0, deci va fi convergent (conform Criteriului lui Weierstrass). În final, soluția este

$$\{-1\} \cup \{0\} \cup (0, 1) = [0, 1].$$

869. Pentru coordonatele centrului de greutate avem $-2 = x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 - 3 + x_C}{3}$, respectiv $5 = y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 + 7 + y_C}{3}$. De aici se obține $C(-5, 6)$.

870. Panta dreptei AG este $m_{AG} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{5 - 2}{-2 - 2} = -\frac{3}{4}$. Panta dreptei perpendiculare pe AG este $m = \frac{-1}{m_{AG}} = \frac{4}{3}$.

871. Aplicând regula lui L'Hôpital, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1$.

872. Aria triunghiului ABC este: $6 = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$, deci $m(\widehat{BAC}) \in \{30^\circ, 150^\circ\}$.

873. Aria mulțimii din enunț este egală cu $\int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{1 + 2e^3}{9}$.

874. Observăm ușor că $x = 1$ nu este soluție. Deoarece $\log_{2^k} x^k = k \cdot \log_2 x = k \cdot \frac{1}{\log_x 2^k} = \frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$ pentru orice $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, ecuația dată este echivalentă cu ecuația $4 \log_2 x = 2$, care admite soluția unică $x = \sqrt{2} \in (1, 2]$.

875. Avem $m \in S$ dacă și numai dacă $4(m^2 + 1)^2 - 4(m + 1)^4 \leq 0$. Inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea $m^3 + m^2 + m \geq 0$, ori $m(m^2 + m + 1) \geq 0$. Ultima inegalitate este îndeplinită dacă și numai dacă $m \geq 0$.

876. Schițând graficul funcției, putem observa că 1) f este crescătoare; 2) $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, deci f nu este injectivă; 3) nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{1}{2}$, deci f nu este surjectivă.

877. Laturile BA și BC ale dreptunghiului fiind perpendiculare, avem $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul ABD obținem că $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = \sqrt{64} = 8$. Astfel $\cos(\widehat{ABD}) = \frac{AB}{BD} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos(\widehat{ABD}) = 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48$.

878. Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, dacă coeficienții lui x și y în ecuațiile dreptelor d_1 și

d_2 sunt proporționali, adică $\frac{1}{m+1} = \frac{-3}{-(2m-3)} \Leftrightarrow 2m-3 = 3m+3 \Leftrightarrow m = -6$. (Altfel, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, dacă pantele lor sunt egale, adică $\frac{1}{3} = \frac{m+1}{2m-3} \Leftrightarrow m = -6$). Dreptele d_2 și d_3 sunt paralele, dacă coeficienții lui x și y în ecuațiile dreptelor d_2 și d_3 sunt proporționali, adică $\frac{m+1}{m} = \frac{-(2m-3)}{1} \Leftrightarrow m+1 = -2m^2+3m \Leftrightarrow 2m^2-2m+1=0$. Discriminantul acestei ecuații fiind $\Delta = 4-8 = -4 < 0$, ecuația nu are soluții reale, deci nu există m pentru care dreptele d_2 și d_3 să fie paralele.

Toate cele trei drepte sunt concurente dacă sistemul de ecuații format din ecuațiile dreptelor admite o singură soluție. Pentru aceasta, mai întâi determinantul caracter-

istic al sistemului trebuie să fie 0:
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ m+1 & -2m+3 & 4 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 9m + 4 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuații este $\Delta = 1 > 0$, deci obținem două valori reale pentru m , respectiv $m \in \{1, 4/5\}$. Conform $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ pentru aceste valori ale lui m dreptele nu pot să coincidă, deci dreptele sunt concurente pentru două valori ale lui m .

879. T fiind mijlocul segmentului SR este imediată relația din $\boxed{\text{B}}$, iar $\boxed{\text{A}}$ este falsă.

Afirmația $\boxed{\text{C}}$ nu este adevărată deoarece vectorii nenuli \overrightarrow{PS} și \overrightarrow{QP} au sens opus.

Pentru vectorul \overrightarrow{RT} avem $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{RP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ})] = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{RP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{RQ})$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

880. Egalitatea dată este echivalentă cu $\frac{1}{(x-1)!} = \frac{30}{(x+1)!}$, deci $x(x+1) = 30$, de unde rezultă că $x = 5$, deci $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate și $\boxed{\text{D}}$ falsă. Numerele C_{6+y}^{y+1} și C_{6+y}^6 sunt corect definite pentru orice y și este adevărată egalitatea $(y+1)C_{6+y}^{y+1} = 6C_{6+y}^6$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

881. $\cos(3\pi x) = 0 \Leftrightarrow 3\pi x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{6} + \frac{k}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$. Dar ne interesează doar numărul soluțiilor din intervalul $(0, 2023)$, astfel căutăm numărul soluțiilor întregi al inecuației $0 < \frac{1}{6} + \frac{k}{3} < 2023 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 6069 - \frac{1}{2}$. Numărul acelor $k \in \mathbb{Z}$, care satisfac inecuațiile precedente este 6069, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

882. Determinantul sistemului este $6a$, deci dacă $a \neq 0$, atunci sistemul admite o singură soluție. În acest caz, scăzând prima ecuație din ultima obținem $ay = a$, deci $y = 1$.

Dacă $a = 0$, atunci prima și ultima ecuație coincid și sistemul este compatibil nedeterminat.

883. Folosind inducție matematică, putem arăta ușor că $A^n = \begin{pmatrix} i^n & 2ni^{n-1} \\ 0 & i^n \end{pmatrix}$. Afirmatia

D nu este adevărată pentru că două puteri consecutive ale lui i nu pot fi reale.

884. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n)}{n} = 1$, deoarece, în baza

regulii lui L'Hôpital, avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$.

885. Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{x+1} = t$, $I(a) = \int_1^{\sqrt{a+1}} \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{a+1}} =$

$2 \operatorname{arctg} \sqrt{a+1} - \frac{\pi}{2}$. Rezultă că $I(2) = 2 \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ și că $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

886. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} - x \right)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - x + a \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = a$, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$.

887. Prin calcul se obține imediat $f'(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$. Drept urmare, panta dreptei

d este $m_d = f'(0) = a$. Rezultă de aici că afirmațiile **A**, **C** și **D** sunt adevărate, iar afirmația **B** este falsă.

888. Considerăm funcția definită prin $g(x) = x^3 - 3x + a$. Atunci f are trei puncte de extrem local dacă și numai dacă ecuația $g(x) = 0$ are trei rădăcini reale. Tabelul de mai jos rezumă variația funcției g .

x	$-\infty$			-1			1		∞	
$g'(x)$		+	+	0	-	-	0	+	+	
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	$a+2$	\searrow	\searrow	$a-2$	\nearrow	\nearrow	∞

Din tabel reiese că ecuația $g(x) = 0$ are trei rădăcini reale dacă și numai dacă $a + 2 > 0$ și $a - 2 < 0$, adică dacă și numai dacă $a \in (-2, 2)$.

889. Condiția $(x*y)*z = x*(y*z)$ este echivalentă cu egalitatea $(a-2023)(z-2023)+a = (a-2023)(x-2023)+a$, care este îndeplinită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a = 2023$. Astfel **A** este adevărată și **D** falsă. Pentru $a = 2023$ observăm ușor că 2024 este element neutru, deci **B** este adevărată. Pe de altă parte, $(\mathbb{R}, *)$ nu poate fi grup

deoarece 2023 nu este inversabil, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

890. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, rezultă că graficele $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ nu sunt ale funcției f . Pe de altă parte, ecuația $f(x) = 0$ are doar soluția $x = -1$, deci graficul lui f nu poate fi decât $\boxed{\text{D}}$.

891. Folosind notațiile obișnuite pentru un triunghi ABC putem presupune că $a > b > c$.

Atunci $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{C})$ și $b = c + 1$, $a = c + 2$, $c \in \mathbb{N}^*$. Din teorema sinusului avem:

$$\frac{c+2}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{c+2}{\sin 2C} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{c+2}{2 \sin C \cos C} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \cos C = \frac{c+2}{2c}. \quad (1)$$

Pe de altă parte din teorema cosinusului obținem

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(c+2)^2 + (c+1)^2 - c^2}{2(c+2)(c+1)} = \frac{c^2 + 6c + 5}{2(c^2 + 3c + 2)} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă ecuația:

$$\frac{c+2}{c} = \frac{c^2 + 6c + 5}{c^2 + 3c + 2} \Leftrightarrow c^3 + 5c^2 + 8c + 4 = c^3 + 6c^2 + 5c \Leftrightarrow c^2 - 3c - 4 = 0.$$

De aici avem $\Delta = 9 + 16 = 25$ și $c_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$. Deci $c_1 = 4$ și $c_2 = -1 < 0$. Astfel laturile triunghiului sunt $c = 4$, $b = 5$ și $a = 6$. Perimetrul triunghiului este 15.

892. Folosind condițiile date, putem scrie $a = b - r$, $c = b + r$ și $a - 1 = \frac{b}{r}$, respectiv

$$c + 4 = b \cdot r. \text{ Astfel ajungem la sistemul de ecuații } \begin{cases} br - r^2 - r = b \\ b + r + 4 = br. \end{cases} \text{ Adunând ecuațiile}$$

de mai sus, obținem ecuația $r^2 - 4 = 0$, de unde $r \in \{-2, 2\}$. Pentru $r = -2$ obținem $b = -\frac{2}{3}$ iar pentru $r = 2$ obținem $b = 6$. Progresiile date a, b, c sunt 4, 6, 8, respectiv $\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}$.

893. $\frac{12133}{6} = 2022 + \frac{1}{6}$ deci $\frac{12133}{6} \pi = 2022\pi + \frac{\pi}{6}$. $\sin\left(2022\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

894. Coordonatele centrului de greutate sunt: $G\left(\frac{2 + (-1) + (-3)}{3}, \frac{3 + 1 + 4}{3}\right) = G\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Mijlocul segmentului AG are coordonatele: $F\left(\frac{2 + (-2/3)}{2}, \frac{3 + 8/3}{2}\right) =$

$$F\left(\frac{2}{3}, \frac{17}{6}\right).$$

895. Mulțimea soluțiilor este: $\{\arcsin \frac{2}{3}, \pi - \arcsin \frac{2}{3}\}$, mulțime cu două elemente.

896. Din condiția de existență a radicalului avem $x^2 - 3 \geq 0$ și $x^2 - 5 \geq 0$, deci $x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat obținem $x^2 - 3 = (x^2 - 5)^2 \iff x^2 - 3 = x^4 - 10x^2 + 25 \iff x^4 - 11x^2 + 28 = 0$. Prin introducerea notației $y = x^2$ ecuația anterioară se poate scrie în formă $y^2 - 11y + 28 = 0$. Această ecuație are soluții $y_1 = 4$ și $y_2 = 7$. De aceea soluțiile ecuației $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$ sunt $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\sqrt{7}$ și $x_4 = \sqrt{7}$. Dintre aceste soluții numai x_3 și x_4 satisfac condiția $x^2 - 5 \geq 0$, deci ecuația $\sqrt{x^2 - 3} = x^2 - 5$ are două soluții și **A**, **C** sunt false, iar **B** adevărată. O soluție este negativă, deci **D** este falsă.

897. $T_{k+1} = C_{300}^k 2^{150 - \frac{k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$, $0 \leq k \leq 300$.

Pentru ca termenii să fie raționali este necesar k să fie divizibil atât cu 2 cât și cu 3, deci k divizibil cu 6. Așadar $k \in \{0, 6, 12, \dots, 300\}$. Sunt 51 de termeni raționali.

898. Observăm că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, unde $(F_n)_{n \geq 0}$ este șirul lui Fibonacci definit

prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Suma elementelor în A^n este $S_n = (F_{n+1} + F_n) + (F_n + F_{n-1}) = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$. Prin urmare $S_5 = F_8 = 21$.

Rezultatul poate fi obținut și prin calcularea matricelor A^2 , A^4 și $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

899. Avem $x_1 > 2x_2 > 3x_3 > \dots > nx_n \Rightarrow 0 < x_n < \frac{x_1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

900. Funcția f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$, deci trebuie studiată continuitatea în punctul $x = 0$. Avem $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^3 + x + \alpha) = \alpha = f(0)$. Folosind definiția continuității cu ajutorul limitelor laterale, deducem că $\alpha = 0$.

901. Ținând cont de faptul că $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, obținem ecuația tangentei $y - f(9) = f'(9)(x - 9) \iff y - 2 = \frac{1}{12}(x - 9) \iff 12y - x - 15 = 0$.

902. $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1 \iff 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \iff 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \iff \sin 4x = 1 \iff 4x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \iff x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Deci afirmația \boxed{B} este adevărată iar \boxed{A} , \boxed{C} și \boxed{D} sunt false.

903. Punctul C este simetricul lui A față de O , deci avem $x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{0 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 6$ și $y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{-4 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 12$. Panta dreptei CD este egală cu panta dreptei AB , adică este 3. Deci ecuația dreptei CD este $y - 12 = 3(x - 6) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$.

904. Funcția f are perioada $\frac{1}{2}$, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 2x + 1 - [2x + 1] = 2x - [2x] = f(x)$. Aceasta arată și că f nu este injectivă și nici surjectivă, deoarece imaginea funcției f coincide cu imaginea restricției lui f pe intervalul $[0, \frac{1}{2}]$, deci $2 \notin \text{Im } f$. Cum $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ și $f(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$, funcția f nu este pară.

905. Se știe că $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Considerăm sumele intermediare:

$$s_1 = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i,$$

$$s_2 = 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i,$$

...

$$s_{505} = 2017i^{2017} + 2018i^{2018} + 2019i^{2019} + 2020i^{2020} = 2 - 2i.$$

Avem $S_{2020} = s_1 + s_2 + \dots + s_{505} = 505(2 - 2i) = 1010(1 - i)$, deci S_{2020} nu este un număr real, iar $|S_{2020}| = 1010\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, adică $|S_{2020}|$ este un număr irațional.

Scriem $S_{2022} = S_{2020} + 2021i^{2021} + 2022i^{2022} = 1010(1 - i) + 2021i - 2022 = -1012 + 1011i$, deci partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011, iar $|S_{2022}| = \sqrt{(-1012)^2 + 1011^2} \neq 1011$.

906. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o soluție pentru acest sistem. Dacă notăm cu $A = \log_{225} x$ și $B = \log_{64} y$, atunci din prima ecuație deducem $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Folosind a doua ecuație deducem $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = 1$, deci $A = 2$ și $B = -2$. Așadar, $\log_{225} x = 2$, deci $x = 225^2 = 15^4$. Similar, $\log_{64} y = -2$, deci $y = 64^{-2} = 2^{-12}$.

Obținem atunci că expresia cerută $\log_{30}(x^3) - \log_{30} y = \log_{30}(15^{12} \cdot 2^{12}) = 12$, deci răspunsul corect este \boxed{B} .

907. Putem transcrie ecuația în $6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$. Notând $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, obținem

ecuația de gradul doi $t^2 - 6t + 1 = 0$, cu soluțiile $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Dacă $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$ și $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$, atunci $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = t_1 \cdot t_2 = 9 - 8 = 1$, deci $x_1 + x_2 = 0$.

908. Distanța de la A la dreapta dată este $d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$. Diagonala a doua a pătratului trece prin punctul A și este perpendiculară pe diagonala dată. Prin urmare $d_2 : y - 1 = (-1)(x - 3)$, deci $d_2 : x + y - 4 = 0$. Aria pătratului este egală cu jumătate din pătratul lungimii diagonalei, deci $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$. Punctul $C(1, 3)$ este simetricul lui A în raport cu diagonala dată.

909. Din teorema medianei deducem că $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Folosind ipoteza $AM = c$ deducem $a^2 + 2c^2 = 2b^2$. Deci răspunsul **A** este fals și răspunsul **B** este adevărat. Utilizând în relația anterioară, teorema cosinului pentru latura AB obținem $3a = 4b \cos C$. Deci afirmația **D** este adevărată și afirmația **C** falsă.

910. Prin calcul: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{\sin x} =$
 $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x} =$
 $-\frac{1}{3}$.

911. Din faptul că $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția f este constantă pe \mathbb{R} . Prin urmare, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă imediat că doar afirmațiile **B** și **D** sunt adevărate.

912. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = (x+1)e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Tabelul următor rezumă variația lui f .

x	$-\infty$		-1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow	\nearrow

Cum $-\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} < 0$, din tabel reiese că ecuația $xe^x = -\frac{1}{3}$ are exact două soluții.

913. $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha \in [0, 1]$. Din formula ariei cu sinus, ariile triunghiurilor $AB'C'$, $A'BC'$ și $A'B'C$ sunt egale cu $\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$. Rezultă $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} - 3\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$, deci $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 3\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

914. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(t) = e^{t^2}$, este continuă, deci admite primitive. Fie F o primitivă a lui f . Avem $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} e^{t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{F(\operatorname{tg} x) - F(1)}{F(\operatorname{ctg} x) - F(1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{f(\operatorname{ctg} x)(-1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = -1$.

915. Rescriem relația dată astfel: $\sin(B) - \sin(C) = \cos(C) - \cos(B)$. Transformăm diferențele în produse și obținem: $2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}$ sau $\sin \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2} \right) = 0$. Din $\sin \frac{B-C}{2} = 0$ se obține $B - C = 0$, deci triunghiul este isoscel. Relația $\cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2} = 0$ poate fi rescrisă $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right)$ de unde $B + C = \frac{\pi}{2}$, deci în acest caz triunghiul este dreptunghic.

916. Se observă că $a_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0, 1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n . Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ termenul a_n este suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare ξ_n , adică $a_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Întrucât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, integrabilitatea funcției f implică

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Rezultă că doar afirmația **C** este adevărată.

917. Se observă că dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare având pantele $m_1 = \frac{2}{3}$ și $m_2 = -\frac{3}{2}$ și nu trec prin punctul A . Astfel celelalte laturi ale dreptunghiului trec prin A și sunt paralele cu d_1 , respectiv d_2 . Dreapta paralelă dusă prin A la d_1 are ecuația: $2x - 3y - 13 = 0$ sau $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$. Dreapta paralelă dusă prin A la d_2 are ecuația: $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$ sau $3x + 2y = 0$.

918. Matricea sistemului și matricea extinsă a sistemului sunt $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$,

respectiv $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = 6\alpha - 18 = 0$ dacă și numai dacă $\alpha = 3$,

deci sistemul este compatibil dacă $\alpha \neq 3$. În cazul când $\alpha = 3$ avem $\text{rang}(A) = 2$ și $\text{rang}(\bar{A}) = 3$, deci din teorema Kronecker-Capelli urmează că sistemul este incompatibil pentru $\alpha = 3$.

919. Pentru $x = \frac{1}{4}$ și $y = \frac{3}{2}$ expresia din numitor este 0, deci **[A]** este fals. Dacă $0 < x, y < 1$, atunci $xy > 0$ și $(1-x)(1-y) > 0$; adunând, obținem $2xy - x - y + 1 > 0$; de aici rezultă ușor că $0 < x * y < 1$, deci **[B]** este adevărat. Din condiția $x * e = x$ pentru orice $x \in (0, 1)$ obținem că elementul neutru este $e = \frac{1}{2}$, deci **[C]** este adevărat. Din $x * x' = \frac{1}{2}$ obținem $x' = 1 - x$, deci **[D]** este adevărat.

920. Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$. Atunci $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ și $\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2} dx =$

$$\int_{2022}^{\frac{1}{2022}} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^2+1} dt = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{-\ln t}{t^2+1} dt = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln t}{t^2+1} dt = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

În consecință, avem $\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$.

921. Fie q rația progresiei geometrice. Rezulă că $qxy = yz$ și $qyz = zx$, adică $q^2xy = zx$. Prin urmare, $z = q^2y$, deci **[A]** și **[B]** sunt adevărate. Pentru $y = 1$, $x = 2$ și $z = 4$ condițiile cerute sunt satisfăcute, y și z sunt pătrate perfecte iar x nu este, deci răspunsurile **[C]** și **[D]** sunt false.

922. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x_n = \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{(2+x)^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1}$

$\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' dx = -\frac{1}{8n} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n} \Big|_0^2 = \frac{1}{8n}$. Întrucât $184 = 8 \cdot 23$, rezultă că doar afirmațiile

[A] și **[C]** sunt adevărate.

923. Din proprietățile de bază ale progresiilor geometrice avem $E = 4r^2 + 4r + 1 = (2r+1)^2$. Rezultă că $r = -\frac{1}{2}$, ceea ce invalidează afirmația **[A]**. Avem mai departe:

$\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| = |r^3| = \frac{1}{8}$, deci **[B]** este adevărată. $a_5 a_2 + 2a_1 a_5 + a_0 a_5 = a_5(a_2 + 2a_1 + a_0) =$

$a_0 r^5 (a_0 r^2 + 2a_0 r + a_0) = a_0^2 r^5 (r^2 + 2r + 1) = a_0^2 \cdot \frac{-1}{32} \cdot \frac{1}{4} < 0$, ceea ce contrazice $\square C$.

$a_n a_{n+1} = a_n^2 \cdot r = -\frac{1}{2} a_n^2 < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $\square D$ este adevărată.

924. Distanța de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(P, d_1) = \frac{|-3a + 1|}{\sqrt{10}}$,

Distanța de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_2 este dată de: $d(P, d_2) = \frac{|a + 2|}{\sqrt{10}}$. Condiția ca cele două distanțe să fie egale este îndeplinită pentru $a \in \{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$.

925. Înlocuind și simplificând obținem ecuația de gradul doi $x^2 - 10x + 9 = 0$, cu rădăcinile 1 și 9. Convine doar soluția $x = 9$, din cauza condițiilor asupra aranjamentelor și combinărilor, $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$.

926. $T_{k+1} = C_{2021}^k (\sqrt{x})^{2021-k} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{2021}^k x^{\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5}}$.

Din ecuația $\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5} = 6$ rezultă $7k = 5 \cdot 2009$, deci $k = 1435$. Astfel coeficientul binomial este C_{2021}^{1435} care este egal cu C_{2021}^{586} .

927. Pentru a verifica egalitățile vectoriale de mai sus, încercăm să transformăm membrul stâng al egalității astfel încât în el să apară vectorii din membrul drept.

Astfel, pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\square A$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ scriem $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC}$.

Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\square B$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ scriem $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$. Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de

la punctul $\square C$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ scriem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\square D$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$ scriem $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

928. Avem $a_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$, deci $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$.

$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)}$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{4} < 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

929. Folosind proprietățile logaritmilor, avem: $\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3}$.

Din relația $a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{3 - a}$.

Prin urmare, obținem $\log_6 16 = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

930. Se verifică ușor că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem

$(x * y) * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x * (y * z)$, deci \boxed{C} este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, deci \boxed{B} este falsă. Din $x * e = x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ obținem că elementul neutru este 0, deci \boxed{A} este falsă. Pentru $x \in (-1, 1)$, din egalitatea $x * x' = 0$ obținem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci \boxed{D} este falsă.

931. Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$, iar $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx^3 = 0 = f(0)$.

Deci, f este continuă pe \mathbb{R} . Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită

prin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$ Evident f este strict descrescătoare

pe $(-\infty, 0]$, respectiv pe $(0, \infty)$. Fie $x_1 \in (-\infty, 0]$ și $x_2 \in (0, \infty)$, deci $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) = x_1^4 + 1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. Prin urmare, f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .

Dacă $a = 1$ și $b = -1$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 + 1 = f(0) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^3 = 0$. Deci, f este discontinuă în 0.

Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ și oricare ar fi $b \in (-\infty, 0)$, avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. Așadar, pentru $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty, 0)$ avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

932. Știind că x și y aparțin cadranelor III, diferența lor este în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

astfel \boxed{D} este falsă. Avem $\sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\sin y = -\sqrt{1 - \frac{169}{196}} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Astfel $\cos(x - y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y \in \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$. Dar $\sin(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $x - y = \frac{\pi}{3}$. Astfel \boxed{A} , \boxed{B} și \boxed{D} sunt false iar \boxed{C} este adevărată.

933. Afirmatia \boxed{A} este falsă, pentru că $f_n(1) = 1$, sau pentru că $f_n(2) = 0$. Afirmatia

\boxed{B} este falsă, pentru că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$. Afirmatia \boxed{C} este adevărată, pentru că subșirul

$(f_{2k}(4))_{k \geq 1}$ este crescător, deoarece $f_{2k}(4) = (-2)^{2k} = 4^k$, iar $(4^k)_{k \geq 1}$ este șir crescător.

Afirmatia \boxed{D} este falsă, pentru că subșirul $(f_{2k}(4))_{k \geq 1}$ are limita $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k}(4) = \infty$, iar

subșirul $(f_{2k+1}(4))_{k \geq 1}$ are limita $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k+1}(4) = -\infty$.

934. Teorema sinusurilor implică $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sin C} = 2$, deci $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul

fiind nedegenerat $m(\widehat{A}) \neq 120^\circ$, deci $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. Astfel $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $b = c = \sqrt{3}$, deci triunghiul este echilateral. Perimetrul este $3\sqrt{3}$. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{p \cdot r}{2} \implies r = \frac{1}{2}$ (lungimea razei cercului înscris).

935. Fie $A(1, y) \in d_1$, $B(x, 1) \in d_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat cu diagonala $[AB]$, atunci $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x + y = 0$ și $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Așadar, $A(1, -x)$, $B(x, 1)$ și $C(1+x, 1-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. $C \in d : x + y = 2$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+x^2}\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. $\mathcal{A}_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$.

936. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; ea nu este derivabilă în punctele -2 și 0 , pentru că valoarea derivatei în aceste puncte nu este finită. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ avem că $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}} = -\frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^4})} \implies f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty, -1) \setminus \{-2\}$, și $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$. Prin urmare funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$. Se obține că punctul -1 este singurul punct de extrem local al funcției f (este un punct de maxim global) și că funcția f nu are puncte de minim global.

Funcția f fiind strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, rezultă că $f(5) < f(3)$, de unde se obține $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

937. Fie C un cerc din \mathcal{C} cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcție convexă, iar minimum ei se obține pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din \mathcal{C} este $\sqrt{5}$. Prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este falsă iar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M , este la distanțe egale față de cele două axe. Cum punctele A și B sunt în primul cadran și cercul trebuie să fie în primul cadran, adică centrul cercului are coordonatele $M = M(r, r)$ cu $r > 0$. Dar M este pe dreapta d , deci $r - 2r = 2$ și obținem o contradicție cu $r > 0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Triunghiul ABD este isoscel și dreptunghic, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică este punctul $O_1(6, 2)$. Dar $O_1 \in d$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

938. Matricea X care verifică (1), dacă există, este matrice coloană de forma $X =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Rezultă imediat că varianta de răspuns $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pentru ca X din

(2) să fie o soluție a ecuației (1) este necesar și suficient ca $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ să fie o soluție a sistemului de 3 ecuații liniare cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + 3ax_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt matricea sistemului (3), respectiv matricea extinsă a sistemului (3), iar Teorema Kronecker-Capelli ne spune că sistemul (3) este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Cum minorul

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, „decupat” din prima și ultima coloană a lui A , este nenul, $\text{rang } A \geq 2$. Putem borda acest minor în două moduri pentru a obține un minor de

ordinul 3 al lui A . Avem $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1+2c_3 \\ c_2+c_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -7(5-a-2) = 7(a-3)$.

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci $\text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A}$ și astfel afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

Dacă $a = 3$, pentru a stabili rangul lui A mai trebuie calculat minorul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1-2l_3 \\ l_2-l_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1=7l_2 \\ \end{matrix} 0.$$

Rezultă $\text{rang } A = 2$ și pentru a afla rangul matricei \bar{A} trebuie calculat minorul său de ordinul 3 (care este, în acest caz, singurul minor caracteristic corespunzător minorului

principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ al sistemului (3)) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 - c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Acest

minor fiind nenul, $\text{rang } \bar{A} = 3 \neq 2 = \text{rang } A$. Așadar, sistemul (3) și, implicit, ecuația (1) au soluții dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ iar \boxed{C} este falsă.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{\substack{l_1 - 2l_3 \\ l_2 - l_3}}{\iff} \begin{vmatrix} 0 & 3a - 2 & -7 \\ 0 & 1 & a - 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 3a^2 - 14a + 15 = 0 \iff a \in \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}.$$

Cum pentru $a = \frac{5}{3}$ ecuația (1) are soluție, sistemul (3) fiind compatibil, afirmația \boxed{D} este falsă.

939. Avem $\ell = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + (\sin x + \cos x - 1))^{\frac{1}{\sin x + \cos x - 1}} \right]^{(\sin x + \cos x - 1) \text{tg } x} = e^L$, unde

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} (\sin x + \cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x} = 1, \text{ cu ajutorul regulii lui L'Hôpital. Drept urmare, avem } \ell = e.$$

940. Din ecuația dată obținem $x = 2y + 1$. Expresia dată se poate scrie ca $6y^2 + 4y + 1$, $y \in \mathbb{R}$, care își atinge valoarea minimă pentru $y = -\frac{1}{3}$. Obținem $v = \frac{1}{3}$.

941. Condiția existenței unui punct comun este echivalentă cu condiția ca sistemul format

$$\text{de cele trei ecuații cu două necunoscute să fie compatibil, adică: } \Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0. \text{ Dacă}$$

adăugăm coloanele 2 și 3 la prima coloană și scoatem factorul comun $(a+b+c)$, ecuația de

$$\text{mai sus se poate scrie } (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) = 0.$$

Astfel, determinantul se anulează dacă unul dintre factori se anulează, ceea ce înseamnă că primele două afirmații sunt adevărate. Menționăm că a doua afirmație se poate realiza doar dacă $a = b = c$.

Pe de altă parte, se poate verifica imediat, prin calcul direct, că determinantul este egal cu $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$, deci și cea de-a treia implicație este adevărată. Dacă \boxed{A}

sau **B** au loc, atunci relația din **D** se poate realiza numai pentru $a = b = c = 0$, dar numerele fiind nenule putem afirma că **D** este falsă.

942. Deoarece F este o primitivă a lui f , deducem că F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict descrescătoare pe \mathbb{R} . Atunci avem $F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4) \Rightarrow 4m^2 - 12m + 5 \leq 3m^2 - 6m - 4 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 \leq 0 \Rightarrow (m - 3)^2 \leq 0$. Însă, pentru $m \in \mathbb{R}$ avem $(m - 3)^2 \geq 0$. În consecință $(m - 3)^2 = 0$, de unde $m = 3$.

943. Funcția f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) dacă și numai dacă $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem: $f(x + y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = f(x) \cdot f(y)$. Astfel **A** este adevărată.

Funcția f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, avem $f(0) = f(2\pi)$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|f(x)| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Deci orice element din \mathbb{C}^* cu modulul diferit de 1, de exemplu 2, nu aparține imaginii lui f . Deci funcția f nu este surjectivă.

Morfismul de grupuri f este un izomorfism dacă și numai dacă f este bijectiv. Pe baza **B** sau **C**, afirmația **D** este falsă.

944. Cu notația $\cos x = t \in [-1, 1]$ inecuația $2 \cos^2 x \geq \cos x + 1$ devine $2t^2 - t - 1 \geq 0$, cu soluția $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$, de unde $\cos x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup \{1\}$, adică $S = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right] \right) \cup \{2l\pi | l \in \mathbb{Z}\}$. Verificăm fiecare variantă de răspuns în parte: **A** $2020\pi = 1010 \cdot 2\pi \in S$;

B $2021\pi = 1010 \cdot 2\pi + \pi \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2020\pi, \frac{4\pi}{3} + 2020\pi \right] \subset S$;

C $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3} \right] = \left[\frac{2\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi \right] \subset S$;

D $20 \in (6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3})$. Într-adevăr $20 < 6\pi + \frac{2\pi}{3}$ este echivalentă cu $3 < \pi$ și $6\pi < 20$ este echivalentă cu $\pi < 3,33\dots$. Ambele fiind adevărate, numărul 20 este în intervalul $(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3})$. Dar $(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}) \cap S = \emptyset$, deci **D** este falsă.

945. Aplicând regula lui L'Hospital $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin(x^2)) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + \sin(t^2)}{\frac{3}{2}\sqrt{t}} =$

$\frac{2}{3}$.

946. După înmulțirea primei ecuații cu z obținem $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0$. Din această scădem a doua ecuație pentru a obține $az^4 - a = 0$. Deoarece $a \neq 0$, trebuie să avem $z^4 = 1$. Rădăcinile unității de ordinul patru sunt următoarele: $1, i, -1, -i$. Putem obține toate acestea cu excepția 1 dacă alegem $a = b = c = d = 1$. În acest caz ambele ecuații devin $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Pentru $z = 1$ trebuie să avem $a + b + c + d = 0$, și găsim foarte ușor astfel de a, b, c și $d = -a - b - c$. Deci toate cele patru valori pe care le-am găsit sunt valori posibile ale lui z .

947. Toate cele patru răspunsuri rezultă imediat dintr-o schiță a graficului lui f .

Alternativ, dacă $x_0 \in (2k - 1, 2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - 2k| = |x_0 - 2k| = f(x_0)$, deci funcția este continuă pe $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (2k - 1, 2k + 1)$. Pentru $x_0 = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} |x - 2(k - 1)| = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} |x - 2k| = 1 = f(x_0)$, deci funcția este continuă pe \mathbb{R} . Astfel, **A** și **D** sunt false.

În $x_0 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ avem $f'_s(x_0) = -1$, $f'_d(x_0) = 1$, deci funcția nu este derivabilă pe mulțimea $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$. În $x_0 = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $f'_s(x_0) = 1$, $f'_d(x_0) = -1$, deci funcția nu este derivabilă pe mulțimea $\{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$. Deci, funcția nu este derivabilă

pe \mathbb{Z} și pentru orice $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ avem $f'(x_0) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x_0 \in (2k - 1, 2k), \\ 1, & \text{dacă } x_0 \in (2k, 2k + 1), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ În

concluzie, **B** este adevărată și **C** este falsă.

948. Din $\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2 + 1) \Big|_0^t$ rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx = \frac{\pi}{8}.$$

949. Calculăm derivata funcției $f: f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)}}$, care este

definită pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Facem tabelul de variație al funcției f .

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$2x - 1$	- - - -	-	- - - -	0	+ + + +	+	+ + + +
$\sqrt[3]{x^2 - 1}$	+ + + +	0	- - - -	-	- - - -	0	+ + + +
$f'(x)$	- - - -		+ + + +	0	- - - -		+ + + +
$f(x)$	$\searrow \searrow \searrow$		$\nearrow \nearrow \nearrow$		$\searrow \searrow \searrow$		$\nearrow \nearrow \nearrow$

Din tabel reiese că punctele de extrem local ale funcției f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ și $x_3 = 1$.

Deci funcția f are 3 puncte de extrem local.

950. Din teorema sinusurilor avem $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Folosind teorema medianei, obținem: $m_a = a \Leftrightarrow m_a^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = a^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow 5 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C = 0 \Leftrightarrow 5 \sin^2 A + (\cos 2B - 1) + (\cos 2C - 1) = 0 \Leftrightarrow 5 \sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$, deci **[B]** este adevărată. Dacă și **[A]** ar fi adevărată, atunci adunând primele două relații obținem: $10 \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin A = 0$, imposibil în triunghi. Deci **[A]** este falsă. Din teorema medianei și din teorema cosinusului avem: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow a^2 = \frac{5a^2}{2} - 2bc \cos A \Leftrightarrow 4bc \cos A = 3a^2 \Leftrightarrow 16R^2 \sin B \sin C \cos A = 12R^2 \sin^2 A \Leftrightarrow 3 \sin^2 A - 4 \sin B \sin C \cos A = 0$, deci **[C]** este adevărată. Dacă presupunem că și **[D]** este adevărată atunci avem din **[C]** și **[D]** că: $\frac{4}{3} \sin B \sin C \cos A = \frac{3}{4} \sin B \sin C \cos A (= \sin^2 A)$. Deci $\sin B \sin C \cos A = 0$, de unde putem avea cazurile: $\sin B = 0 \Rightarrow B = 0$, imposibil în triunghi; $\sin C = 0 \Rightarrow C = 0$, imposibil în triunghi; $\cos A = 0 \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ$, nu este posibil pentru că în triunghiul dreptunghic în A , mediana din A este jumătate din ipotenuza BC , adică $m_a = \frac{a}{2}$, contradicție cu ipoteza $m_a = a$.

951. Fie P intersecția laturilor neperalele AD și BC , $AB = a$, $CD = b$. Din asemănarea triunghiurilor PAB , PMN și PDC rezultă pentru arii relațiile $A_a = A_{PAB} = \lambda a^2$, $A_l = A_{PMN} = \lambda l^2$, $A_b = A_{PDC} = \lambda b^2$, cu $\lambda > 0$. Din ipoteza problemei rezultă că cele trei arii formează o progresie aritmetică, adică $2\lambda l^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2$, adică $l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Altă soluție. Pe lângă notațiile pentru baza mare $AB = a$, pentru baza mică $CD = b$, fie înălțimile trapezelor $ABMN$, $MNCD$: x respectiv y .

$$\mathcal{A}(ABMN) = \mathcal{A}(MNCD) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+l)x}{2} = \frac{(b+l)y}{2} = \frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Din prima ecuație avem: $x = \frac{(b+l)y}{a+l}$. Înlocuind aceasta în a doua ecuație și efectuând calculele, obținem că $l^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

[A] conform calculelor de mai sus este adevărată.

[B] $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Leftrightarrow a = b$, dar $a > b$, deci $l \neq \sqrt{ab}$;

[C] $l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$ este adevărat pentru $a > b$;

D $l = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, pentru $a > b$, deci $l \neq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Din inegalitățile mediilor $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ valabile pentru $a, b > 0, a \neq b$ rezultă că afirmațiile de la punctele **B** și **D** sunt false, iar cea de la punctul **C** este adevărată.

952. Pentru un $n \in A$, notăm y numărul cifrelor sale. Dacă $x = (n - 6)/10$, atunci obținem egalitatea $4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, adică $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Numărul $10^{y-1} - 4$ are forma $99 \dots 96$, deci e divizibil cu 3. Din $(3, 13) = 1$ rezultă $3 \mid x$, deci și $3 \mid n$. Observăm că x trebuie să fie par. Deci n se termină în 06, 26, 46, 66 sau 86 și rezultă că $4 \nmid n$. Presupunem că $y = 8$, deci $13 \mid 10^7 - 4$, ceea ce este fals. Se constată că ecuația în x și y are soluția (particulară) $y = 5$ și $x = 15384$. De aici rezultă că $n = 153846 \in A$.

953. Scriind Relațiile lui Viete, avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$ și $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8$, adică $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 16$. Avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$, adică $a^2 - 16 < 0$, deci $a \in (-4, 4)$.

954. Pentru că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcini ale polinomului f , este valabil următorul sistem:

$$\begin{cases} x_1^3 + ax_1^2 + 8x_1 + 3 = 0 \\ x_2^3 + ax_2^2 + 8x_2 + 3 = 0 \\ x_3^3 + ax_3^2 + 8x_3 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{Din relațiile lui Viete, cunoaștem faptul că } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$

$S_1^2 - 2S_2$. Prin adunarea egalităților din sistem, deducem că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a^3 + 24a - 9$.

Cum 0 nu este rădăcină a polinomului, putem înmulți adecvat cu fiecare dintre rădăcini

$$\text{egalitățile din sistem și obținem: } \begin{cases} x_1^4 + ax_1^3 + 8x_1^2 + 3x_1 = 0 \\ x_2^4 + ax_2^3 + 8x_2^2 + 3x_2 = 0 \\ x_3^4 + ax_3^3 + 8x_3^2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Analog, prin adunarea}$$

egalităților din sistem, obținem faptul că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a^4 - 32a^2 + 12a + 128$. Deci, avem $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = a^4 + a^3 - 32a^2 - 12a + 137$. Se poate observa prin calcul că 2 este rădăcină a polinomului $X^4 + X^3 - 32X^2 - 12X + 128$, deci egalitatea $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 9$ are loc pentru $a = 2$.

955. Aplicând regula triunghiului, avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}$. Din

relațiile date în ipoteză, rezultă imediat următoarele egalități:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN} = -\frac{5}{k+5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MB} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Înlocuind în relația $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$, avem $2\left(-\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{k+5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$, de unde rezultă $k = 3$.

956. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$, $g'(x) = f'(x) = e^x(x^2 - 2x - 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \iff e^x(x^2 - 2x - 3) = 0$. Cum $e^x \neq 0$, avem : $x^2 - 2x - 3 =$

0 . Deci, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Avem: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x(x^2 - 4x + 1) - a) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-x}}(x^2 + 4x + 1)\right) - a = -a$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x(x^2 - 4x + 1) - a) = \infty$.

Totodată, $g(-1) = \frac{1}{e}(1 + 4 + 1) - a = \frac{6}{e} - a$ și $g(3) = e^3(3^2 - 4 \cdot 3 + 1) - a = e^3 - 2e^3 - a$.

	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Pentru g , avem:	$g'(x)$	+	0	0	+	
	$g(x)$	$-a$	$\frac{6}{e} - a$	$-2e^3 - a$	∞	Așadar, din șirul semnelor lui
	Rolle	-	+	-	+	

$$\text{Rolle: } \begin{cases} -a < 0 \\ \frac{6}{e} - a \geq 0 \\ -2e^3 - a < 0 \end{cases} \quad \text{Deci, } a \in \left(0, \frac{6}{e}\right).$$

957. Scriem raportul $\frac{1}{x^4 - 16}$ descompus în fracții simple: $\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} =$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}. \text{ Obținem } \int_0^1 \frac{1}{x^4-16} dx = \frac{1}{32} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{32} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx -$$

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{x^2+4} dx = -\frac{\ln 3}{32} - \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{16}.$$

958. Funcția f este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} , deci $M = \{a \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 4(3x^2 + a) \geq$

$0, \forall x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$.

959. (Adaptare după o problemă din Folclorul Matematic) Din $z^2 + z + 1 = 0$, împărțind cu z , avem $z + \frac{1}{z} = -1$. Tot din $z^2 + z + 1 = 0$, înmulțind cu z și înlocuind $z^2 + z = -1$, avem $z^3 = 1$. Deci, în relația $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}}$, înlocuim $z^{2023} = (z^3)^{674} \cdot z$ și rămânem cu $z + \frac{1}{z} = -1$.

960. Matricea sistemului și matricea extinsă a sistemului sunt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 \\ 4 & -1 & \alpha + 2 & 5 \\ 2 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha + 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minorul matricei A de ordin 2

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2$$

este nenul și poate fi bordat în două moduri la un minor de ordinul 3 al matricei A . Să considerăm minorul

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & \alpha + 2 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \alpha + 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\alpha - 2 + 5) = 2(3 - \alpha).$$

Dacă $\alpha \neq 3$ atunci $d' \neq 0$, prin urmare $\text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A}$ și, conform Teoremei Kronecker-Capelli, sistemul dat este compatibil. Dacă $\alpha = 3$ atunci, pentru a decide care este rangul matricei A (și, implicit, compatibilitatea sistemului dat) trebuie să calculăm celălalt minor de ordinul 3 ce se obține din bordarea lui d :

$$d'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{l_1 - l_3 \\ l_2 - 2l_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & -21 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-21 + 21) = 0.$$

Aceasta arată că d este minor principal și, echivalent, $\text{rang } A = 2$. Cum minorul caracteristic corespunzător lui d este

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 - 2c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(2-1) = -2 \neq 0.$$

Fie folosind teorema lui Rouché și constatând că acest minor caracteristic este nenul, fie aplicând teorema Kronecker-Capelli și constatând că $\text{rang } \bar{A} = 3 \neq 2 = \text{rang } A$, deducem că sistemul dat este incompatibil. Deci sistemul dat este compatibil dacă și numai dacă $\alpha \neq 3$. În particular, dacă $\alpha = -5 \neq 3$ atunci sistemul este compatibil. Așadar, afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate, iar $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

961. Funcția este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} și derivata a doua $f''(x) = 2(1-a) \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$

are rădăcinile $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Condiția cerută se scrie $f''(0) \geq 0$, de unde rezultă $a \leq 1$.

962. $\left| \frac{1}{t^2} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin x) dx \right| \leq \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t \sqrt{x} dx + \int_0^t |\sin x| dx \right) \leq \frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} + t \right) \rightarrow 0$,

când $t \rightarrow \infty$.

963. Facem schimbarea de variabilă $t = 1 - \frac{x}{n}$, $dt = -\frac{1}{n} dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{n-1}{n}}^1 t^n dt =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{n+1} = 0.$$

964. Rescriem ecuația ca $4 \log_x 2 + \frac{1}{4 \log_x 2} = 9 \log_x 2 + \frac{1}{9 \log_x 2}$. Notăm acum $\log_x 2 =$

$a, a \in \mathbb{R}$. Avem că $4a + \frac{1}{4a} = 9a + \frac{1}{9a} \iff 180a^2 - 5 = 0 \iff \frac{1}{a} = \pm \sqrt{\frac{180}{5}} = \pm 6$. Cum $\frac{1}{a} = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{\pm 6}$. Suma soluțiilor este $\frac{4097}{64}$, care sunt prime între ele, lucru care se

poate verifica cu algoritmul lui Euclid. Așadar, suma cerută este $4097 + 64 = 4161$.

965. $\boxed{\text{A}}$ Funcția f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{C}^*, \cdot) dacă și

numai dacă $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem: $f(x+y) =$

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = (\cos x +$$

$$i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = f(x) \cdot f(y). \boxed{\text{B}}$$

Funcția f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, avem $f(0) = f(2\pi) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|f(x)| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$.

Deci orice element din \mathbb{C}^* cu modulul diferit de 1, de exemplu 2, nu aparține imaginii lui

f . Deci funcția f nu este surjectivă. $\boxed{\text{D}}$ Morfismul de grupuri f este un izomorfism dacă și numai dacă f este bijectiv. Pe baza $\boxed{\text{B}}$ sau $\boxed{\text{C}}$, afirmația $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

966. Fie $A = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem $(\det(X))^2 = \det(X^2) = \det(A) = 0$,

de unde $\det(X) = 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Din $ad = bc$ obținem că $\text{tr}(X^2) = a^2 + d^2 + 2bc = (a + d)^2 = (\text{tr } X)^2$. Din relația anterioară rezultă că $(\text{tr } X)^2 = \text{tr } A = 2$, de unde $\text{tr } X = \pm\sqrt{2}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Ecuația matricelă se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} a^2 + bc = -3 \\ b(a + d) = 15 \\ c(a + d) = -1 \\ d^2 + bc = 5. \end{cases}$$

Utilizând relația $ad = bc$ ecuația se transformă în $X \cdot \text{tr } X = A$. Din $\text{tr } X = \pm\sqrt{2}$ obținem că soluțiile ecuației sunt $X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A$, deci $\boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt false. Observație: Problema poate fi rezolvată și cu teorema lui Cayley–Hamilton.

967. Folosim substituția $t = -x^2 \rightarrow dt = -2x dx$. Integrala devine $-\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t dt \Rightarrow -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t du = -\frac{1}{2} [e^t]_0^{-1} = -\frac{1}{2} (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

968. $x \in (-\infty, 3]$. $\sqrt{3-x} - x = -10 \iff \sqrt{3-x} = x - 10$. Condițiile de compatibilitate: $x \geq 10$. Cum $(-\infty, 3] \cup [10, \infty) = \emptyset$. Deducem că ecuația nu are nicio soluție, astfel răspunsul corect este $\boxed{\text{A}}$.

969. Inlocuind și simplificând obținem ecuația de gradul doi $x^2 - 10x + 9 = 0$, cu rădăcinile 1 și 9. Convine doar soluția $x = 9$, din cauza condițiilor asupra aranjamentelor și combinărilor, i.e., $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$.

970. Pentru a calcula coordonatele centrului cercului circumscris, este suficient să cunoaștem ecuațiile a 2 dintre mediatoare. Putem calcula cu ușurință mijlocul segmentului AB și obținem punctul $M(8, 3)$. Fie d mediatoarea lui AB . $d \perp AB$, deci $m_d \cdot m_{AB} = -1$, de unde obținem $m_d = \frac{1}{2}$. Cum $M \in d$, avem ecuația dreptei $d : x - 2y - 2 = 0$. Analog,

obținem ecuația mediatoarei segmentului AC , $d_1 : x + 2y - 12 = 0$. Centrul cercului circumscris se află la intersecția celor două drepte, de unde obținem $O(7, \frac{5}{2})$.

971. Fie C un cerc din \mathcal{C} cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcție convexă, iar minimum ei se obține pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din \mathcal{C} este $\sqrt{5}$. Prin urmare \boxed{A} este falsă, iar \boxed{B} este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M , este la distanțe egale față de cele două axe, adică $M = M(r, r)$. Dar M este pe dreapta d , deci $r - 2r = 2$, o contradicție cu $r > 0$, deci \boxed{C} este falsă. Triunghiul ABD este dreptunghic în A și isoscel, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică $(6, 2) \in d$, deci \boxed{D} este adevărată.

972. $\sqrt{k-1} + \sqrt{k} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \iff \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} > \frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$. Înmulțind după k și folosind criteriul cleștelui, rezultă că: $\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}} < \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$.

973. Pentru \boxed{A} este ușor de văzut că $\widehat{5^3} - \widehat{5} + \widehat{1} = \widehat{121} = \widehat{9} \neq \widehat{11}$, deci \boxed{A} este falsă. Pentru că $\varphi(14) = 14 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6$ și $(5, 14) = 1$, avem din teorema lui Euler că $\widehat{5^6} = \widehat{1}$. La acest rezultat se poate ajunge și prin încercări: $\widehat{5^2} = \widehat{25} = \widehat{11}$, $\widehat{5^3} = \widehat{125} = \widehat{13}$, $\widehat{5^4} = \widehat{625} = \widehat{9}$, $\widehat{5^5} = \widehat{3125} = \widehat{3}$, $\widehat{5^6} = \widehat{15625} = \widehat{1}$. Avem deci: $\widehat{5^{13}} = \widehat{5^{6 \cdot 2 + 1}} = (\widehat{5^6})^2 \cdot \widehat{5} = \widehat{1}^2 \cdot \widehat{5} = \widehat{5} \neq \widehat{1}$, deci \boxed{B} este falsă. Pe de altă parte: $\widehat{5^{2021}} = \widehat{5^{6 \cdot 336 + 5}} = (\widehat{5^6})^{336} \cdot \widehat{5^5} = \widehat{1^{336}} \cdot \widehat{5^5} = \widehat{5^5}$. Dacă am avea $\widehat{5^5} = \widehat{5}$, atunci ar însemna că $\widehat{25} = \widehat{5^5} \cdot \widehat{5} = \widehat{5^6} = \widehat{1}$, deci $\widehat{25} = \widehat{1}$, ceea nu este adevărat. Deci $\widehat{5^5} \neq \widehat{5}$, prin urmare \boxed{C} este falsă. În ceea ce privește \boxed{D} , avem: $\widehat{5^{123}} + \widehat{5^{210}} = \widehat{5^{6 \cdot 20 + 3}} + \widehat{5^{6 \cdot 35}} = (\widehat{5^6})^{20} \cdot \widehat{5^3} + (\widehat{5^6})^{35} = \widehat{1^{20}} \cdot \widehat{5^3} + \widehat{1^{35}} = \widehat{126} = \widehat{0}$, deci \boxed{D} este adevărată.

974. Observăm că $x = -1$ este rădăcina a împărțitorului, de unde rezultă din teorema lui Bézout că restul este egal cu 0.

975. Știm că $\sin^2(90^\circ - n) = \cos^2 n$. Grupând $\sin^2(90^\circ - n) + \sin^2 n = 1$, rezultă 44 de perechi la care se adaugă $\sin^2 90^\circ = 1$ și $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$, rezultatul fiind egal cu $\frac{91}{2}$.

976. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} \stackrel{\text{Stolz-Cèsaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

977. Realizăm schimbarea de variabilă $u = 1 - t$, $du = -dt$ și integrala devine $\int_0^1 u^{99}(1-u)du = \int_0^1 u^{99} - u^{100}du = \frac{1}{10100}$.

978. Observăm că termenul general a_n se poate rescrie astfel: $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Așadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, diviziunii $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$.

Cum f este integrabilă, rezultă că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și avem că $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

979. $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \lambda \cdot \frac{AC}{CB} = \lambda \implies AC = \lambda \cdot CB \cdot \frac{AB}{AC} = \lambda \implies AB =$

$$\lambda \cdot AC \cdot AC = \lambda \cdot CB \implies AC = \frac{AA + \lambda \cdot AB}{1 + \lambda} \cdot yC = \frac{yA + \lambda \cdot yB}{1 + \lambda} \cdot \frac{AC}{CB} = \lambda \implies AC =$$

$$\lambda \cdot CB \cdot \frac{AB}{AC} = \lambda \implies AB = \lambda \cdot AC. \implies AB = \lambda^2 \cdot CB. \text{ Însă, } AB = AC + CB \implies$$

$$\lambda^2 \cdot CB = \lambda \cdot CB + CB. \text{ Cum } CB \text{ reprezintă lungimea unui segment } \implies CB > 0 \implies$$

$$\lambda^2 \cdot CB = \lambda \cdot CB + CB \quad | : CB \cdot \lambda^2 = \lambda + 1 \cdot \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ dar } \lambda >$$

$$0 \implies \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \implies \text{Revenim la relațiile inițiale: } AC = \frac{AA + \lambda \cdot AB}{1 + \lambda} \text{ și } AB = 2 \cdot$$

$$\frac{1 + \lambda - AA}{1 + \sqrt{5}} \cdot \left(1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{1 + \sqrt{5}} \implies yB = \frac{2(1 + \lambda) - yA}{\lambda} =$$

$$\frac{2 + 1 + \sqrt{5} - \frac{y}{2} \cdot 2}{1 + \sqrt{5}} = \left(2 + \sqrt{5} - \frac{y}{2}\right) \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{6 + 2\sqrt{5} - y}{1 + \sqrt{5}}. \implies (AB + yA)^2 - yB =$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} + \frac{y(\sqrt{5} - 1)}{1 + \sqrt{5}} + \frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5} - 6}{1 + \sqrt{5}}.$$

980. Știind că $h(x) - x$ este tot o funcție polinomială de gradul 3, din enunț ob-

servăm că 1,2 și 3 sunt rădăcini ale acesteia. Ea se poate scrie sub forma: $h(x) - x =$

$a \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un coeficient. Cum $h(4) = a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 = 6 \implies$

$$a = \frac{1}{3} \implies h(6) = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 = 26; h(16) = 926.$$

981. Separăm egalitățile astfel: $x \cdot \log_a(b) = \frac{e}{\sqrt{5}}$ și $eb \cdot \log_b(a) = \frac{e}{\sqrt{5}}$ după care le

înmulțim: $e \cdot ab \cdot (\log_a(b) \cdot \log_b(a)) = \frac{e^2}{5}$. Cum $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1 \implies ab = \frac{e}{5}$.

982. $\det(A) = y \cdot (1 - 2x) \implies$ pentru $x = \frac{1}{2}$ sau $y = 0$ avem $\det(A) = 0$. Cum

pentru orice $y \neq 0$, avem un minor de ordinul 2 nenul format din primele 2 linii și

coloane, rezultă că $\text{rang}(A) = 3 \iff x \neq \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^*$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & y^2 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$,

$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \det(A^2) = y^2[(1+2x)^2 - 8x]$.

983. Presupunem că avem deja n numere. Pentru numărul $n+1$, există trei posibilități

(2023, 2024, 2025) $\Rightarrow 3A_n$. Dacă numărul anterior a fost 2024, trebuie să excludem posibilitatea de a avea 2025 pe poziția $n+1$. Numărul de cazuri de exclus este egal cu A_{n-1} , deoarece reprezintă situațiile în care avem un șir valid de $n-1$ numere, urmat de 2024. Astfel, relația de recurență finală este $A_{n+1} = 3A_n - A_{n-1}, n > 1$.

984. Ridicând ambii membri la pătrat, obținem $\sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cum

doar $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 0) \Rightarrow \sin \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Astfel, $f(\gamma) = -1$.

985. Știind că numărul de cifre a unui număr x este egal cu $[\lg x + 1] \Rightarrow$ aplicând

Stolz-Cesàro, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1) \lg 4 + 1]}{2n+1}$. Cum $(n+1) \lg 4 < [(n+1) \lg 4 + 1] \leq (n+1) \lg 4 + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \lg 4}{2n+1} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1) \lg 4 + 1]}{2n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \lg 4 + 1}{2n+1}$.

Deoarece atât limita din partea stângă a inegalității, cât și cea din partea dreaptă a inegalității sunt egale cu $\frac{1}{2} \lg 4 \Rightarrow L = \lg \sqrt{4}$.

986. Fie α unghiul dintre dreptele d și d' , unde d are panta m , iar d' are panta m' . Atunci

$\text{tg} \alpha = \left| \frac{m-m'}{1+mm'} \right|$. Pentru $d' : 2x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow d' : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow m' = -\frac{2}{3}$. $\text{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}m} \right| = \left| \frac{3m+2}{3-2m} \right|, m \neq \frac{3}{2}$, relație care are loc, fiindcă altfel dreptele ar fi perpendiculare.

Cazul 1: $3m+2 = 3-2m \iff m = \frac{1}{5} \Rightarrow d : y+3 = \frac{1}{5}(x-2) \iff d : x-5y-17 = 0$.

Cazul 2: $3m+2 = 2m-3 \iff m = -5 \Rightarrow d : y+3 = -5(x-2) \iff d : 5x+y-7 = 0$

987. Ecuația tangentei în $x = 1$ este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. Deoarece tangenta tre-

buie să fie perpendiculară pe dreapta $y = -x + 5$, produsul pantelor lor trebuie să fie -1 . Panta dreptei date este -1 , deci $f'(1) = 1$. Cum $f'(x) = 4x^3 + 2(k-2)x + 3 \Rightarrow 4 + 2(k-2) + 3 = 1 \iff 2k + 3 = 1 \iff k = -1$.

988. Se verifică ușor că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem

$(x \diamond y) \diamond z = \frac{x+y+(1+xy)z}{1+xy+(x+y)z} = x \diamond (y \diamond z)$, deci $\square C$ este adevărată. Pe baza acestei for-

mule calculăm $\frac{1}{2} \diamond (\frac{1}{2} \diamond \frac{1}{2}) = \frac{13}{14}$, deci **B** este falsă. Din $x \diamond e = x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ obținem că elementul neutru este 0, deci **A** este adevărată. Pentru $x \in (-1, 1)$, din egalitatea $x \diamond x' = 0$ obținem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci **D** este adevărată.

$$989. \quad P, Q, R \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\beta^2 + \beta - 5 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

990. Deoarece $i^4 = 1$, $T_4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$. Orice n , multiplu de 4 va fi egal cu 0.

$$T_{98} = T_{96} + i^{97} + i^{98} = 0 + i + (-1) = i - 1 \neq -1 - i. \quad T_{2025} = T_{2024} + i^{2025} = 0 + i = T_{101}.$$

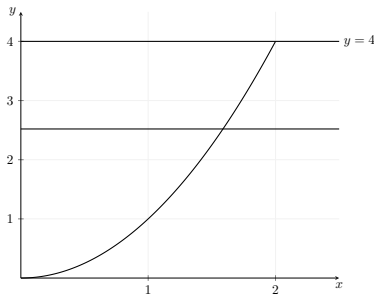
$$T_{37} = T_{36} + i^{37} = 0 + i \neq -i.$$

991. Folosim substituția $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2tdt$. Integrala devine $(2t \cdot e^t - 2e^t) \Big|_0^{\sqrt{\alpha}}$.

992. Rescriem prima ecuație $y = -\frac{x}{2a} + \frac{1}{3}$ și a doua $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. Pentru infinitate de soluții, pantele trebuie să fie egale: $-\frac{1}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$.

993. Conform enunțului, putem crea graficul regiunii, unde linia verde reprezintă ecuația

$y = \beta$, care împarte regiunea delimitată în două regiuni cu suprafețe egale.



$$\text{Astfel, } \int_0^\beta \sqrt{y} dy = \int_\beta^4 \sqrt{y} dy \Rightarrow 4\sqrt{\beta^3} = 16 \Rightarrow \beta = \sqrt[3]{16}$$

$$994. \quad \frac{x^2}{x-2} = 3x \Rightarrow x^2 = 3x(x-2) \Rightarrow -2x^2 = -6x \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x = 3.$$

Deci $S = 3$ și $P = 0$.

$$995. \quad \begin{cases} a_6 = 4 \cdot a_3 \\ a_{10} = a_4 + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 4 \cdot (a_1 + 2r) \\ a_1 + 9r = a_1 + 3r + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 4a_1 + 8r \\ 6r = 30 \Rightarrow r = 5 \end{cases}$$

$$a_1 + 25 = 4a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = -5.$$

996. Pentru ca f să admită primitive, este suficient ca numitorul să nu se anuleze

niciodată, adică ecuația $m \cos x + n = 0$ să nu aibă soluții reale. Știm că $-1 \leq \cos x \leq 1$

pentru orice x real. Deci, trebuie să avem: $m \cos x + n > 0$ pentru orice x . Cea mai restrictivă condiție apare când $\cos x = -1$: $-m + n > 0 \implies n > m$. Așadar, pentru ca funcția să admită primitive, este necesar ca $n > m$. În caz contrar se poate observa că f nu are proprietatea lui Darboux pe R , deci nu poate avea primitive pe R .

997. Distanța de la punctul $Q(b, 0)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(Q, d_1) = \frac{|2b - 3|}{\sqrt{5}}$.

Distanța de la punctul $Q(b, 0)$ la dreapta d_2 este dată de: $d(Q, d_2) = \frac{|b + 1|}{\sqrt{5}}$. Condiția ca cele două distanțe să fie egale este: $|2b - 3| = |b + 1| \implies b = \frac{2}{3}$ și $b = 4$.

998. În orice triunghi DEF are loc relația $\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} E + \operatorname{tg} F = \operatorname{tg} D \cdot \operatorname{tg} E \cdot \operatorname{tg} F$.

Așadar, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \operatorname{tg} F = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \operatorname{tg} F \implies \operatorname{tg} F = -2$. Folosind relația $\cos^2 F + \sin^2 F = 1$ și $\tan F = \frac{\sin F}{\cos F}$, obținem $\cos^2 F = \frac{1}{5} \implies \cos F = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

999. f este definită pe $(-\infty, \sqrt[3]{2}] \implies$ nu există limită spre ∞ . f este descrescătoare pe tot domeniul de definiție, deoarece $f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}} \leq 0$. $x = \sqrt[3]{2}$ este singurul punct de extrem.

1000. Folosim substituția $s = t^3 \implies t = s^{1/3}$, $dt = \frac{1}{3}s^{-2/3}ds$ și avem că $t^5 =$

$(s^{1/3})^5 = s^{5/3}$ și $\sqrt{2-t^3} = \sqrt{2-s} = (2-s)^{1/2} \implies \int t^5 \sqrt{2-t^3} dt = \int s^{5/3} (2-s)^{1/2} \left(\frac{1}{3}s^{-2/3} ds\right) = \frac{1}{3} \int s^1 (2-s)^{1/2} ds$. Simplificând, integrala devine $I = \frac{1}{3} \int_{n^3}^2 s(2-s)^{1/2} ds$. Facem acum substituția: $w = 2-s \implies s = 2-w$, $ds = -dw$. Astfel, integrala devine: $I = \frac{1}{3} \int_0^{2-n^3} (2-w)w^{1/2} dw = \frac{1}{3} \int_0^{2-n^3} (2-w)w^{1/2} dw$. Cum

$(2-w)w^{1/2} = 2w^{1/2} - w^{3/2}$ rezultă că integrala devine $I = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}w^{3/2} - \frac{2}{5}w^{5/2} \right) \Big|_0^{2-n^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}(2-n^3)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-n^3)^{5/2} \right)$. Așadar, $L = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}(2-n^3)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-n^3)^{5/2} \right)$.

Notăm $x = 2-n^3 \implies L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right) = \frac{1}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} 20\sqrt{x^2} - 6\sqrt{x^5} = -\infty$.

1001. $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{12} \iff z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{12} + 1 = 0$. Ecuația de gradul 2 are rădăcinile

$z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ și $\bar{z} = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$. Cum $|z| = 1$, avem $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$, deci $z^4 + \frac{1}{z^4} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$.

1002. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x (\sin x - x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}, \text{ deoarece } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x) = 0. \text{ Așadar, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x (\sin x - x)}{x^2} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 0.$$

$$1003. \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - y = 0 \iff (2x + y)(2x + y) - (2x + y) = 0 \iff$$

$(2x + y - 1)(2x + y) = 0$. Acest produs este zero, când una dintre paranteze este zero (parantezele nu pot fi simultan zero, deoarece sunt numere reale distincte). Dacă $2x + y - 1 = 0$, avem că M aparține dreptei d_1 de ecuație $d_1 : 2x + y - 1 = 0$. Dacă $2x + y = 0$, avem că M aparține dreptei d_2 de ecuație $d_2 : 2x + y = 0$. Se observă că pantele celor două drepte sunt egale, deci ele sunt paralele. Prin calcul se poate verifica că $(0, 1) \in d_1$ și că $(0, 0) \in d_2$.

$$1004. \text{ Cu substituția: } u = x - 2024 \text{ integrala devine: } I = \int_0^1 \frac{e^u}{e^u + e^{1-u}} du = \int_0^1 \frac{e^u}{\frac{e^{2u} + e}{e^u}} du =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2u}}{e^{2u} + e} du. \text{ Cu schimbarea de variabilă } v = 1 - u \text{ avem } I = \int_0^1 \frac{e^{2(1-v)}}{e^{2(1-v)} + e} dv = \int_0^1 \frac{e^2}{e^2 + e^{2v+1}} dv = \int_0^1 \frac{e^2}{e^2 + e^{2v+1}} dv = \int_0^1 \frac{e}{e^{2v} + e} dv = 1 - I, \text{ deci } I = \frac{1}{2}.$$

Soluție alternativă: Făcând schimbarea de variabilă $x - 2024 = 2025 - t \Rightarrow dx = -dt$,

$$\text{obținem: } I = \int_{2025}^{2024} \frac{e^{2025-t}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} (-dt) = \int_{2024}^{2025} \frac{e^{2025-t} + e^{t-2024} - e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} dt = \int_{2024}^{2025} \frac{e^{2025-t} + e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} dt - \int_{2024}^{2025} \frac{e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} dt = \int_{2024}^{2025} dt - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}.$$

$$1005. \text{ Fie } x, y, z \in (-1, 1). (x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} =$$

$$\frac{x+y+z+xyz}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1+x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = x * (y * z), \forall x, y, z \in (-1, 1). x * 0 = \frac{x+0}{1+x \cdot 0} = \frac{x}{1} = x =$$

$$\frac{x}{1} = \frac{0+x}{1+0 \cdot x} = 0 * x, \forall x \in (-1, 1), \text{ deci } 0 \text{ este element neutru. } x * (-x) = \frac{x+(-x)}{1+x(-x)} =$$

$$0 = \frac{-x+x}{1+(-x)x} = (-x) * x, \forall x \in (-1, 1). \text{ Așadar, } ((-1, 1), *) \text{ este un grup. Presupunem}$$

că "*" admite un element absorbant, pe care îl notăm cu a . Atunci: $\forall x \in (-1, 1)$,

$$x * a = a * x = a \Rightarrow \frac{a+x}{1+ax} = a \Rightarrow a^2 x = x \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\}, \text{ care nu aparțin}$$

mulțimii $(-1, 1)$, deci "*" nu poate avea element absorbant. $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7}$.

$$1006. \text{ Folosim substituția } x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\arctg \frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{2}{t} + 1} \cdot \frac{1}{t^2} dt =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\arctg \frac{1}{t}}{1+2t+t^2} dt. \text{ Adunăm expresiile pentru } I \text{ și folosim faptul că } \arctg u + \arctg \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2},$$

$$\forall u > 0. \Rightarrow 2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1 + 2x + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx =$$

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{12} > \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

1007. Folosim substituția $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1+9t^2} dt =$

$$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

1008. $f(3) - f(1) = 2(40m + n)$ care este par. $f(x) - f(y) = m(x^4 - y^4) + n(x - y)$ care este divizibil cu $(x - y)$.

1008. Funcțiile $\sin x, \cos x \in [-1, 1] \Rightarrow 5 \sin x + 3 \cos x$ este o valoare finită, în timp ce $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3x + 5 = \infty$. În concluzie, $L = 0$.

1009. Panta dreptei m este dată de tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu axa Ox . Știind că unghiul este de 45° , avem: $m = \operatorname{tg}(45^\circ) = 1$. Înlocuind în ecuația generală: $y - 3 = 1(x - 2)$.

1010. Se observă că $f(x) = f(-x) \Rightarrow a_{2k+1} = 0$, iar $a_0 + a_1 + \dots + a_{100} = f(1)$.

1011. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$, deoarece $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1012. Folosind teorema bisectoarei, avem: $\frac{BD}{DC} = \frac{7}{9}$. Atunci, lungimea AD este dată

de: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{7}{9}} \overrightarrow{AB} + \frac{\frac{7}{9}}{1+\frac{7}{9}} \overrightarrow{AC}$. Simplificând termenul: $\frac{1}{1+\frac{7}{9}} = \frac{9}{16}$ și $\frac{\frac{7}{9}}{1+\frac{7}{9}} = \frac{7}{16}$.

Astfel, avem: $\overrightarrow{AD} = \frac{9}{16} \overrightarrow{AB} + \frac{7}{16} \overrightarrow{AC}$.

1013. $L = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x(x+5) \cdot \left(\frac{6x+1}{x+5} - \frac{7x-4}{2x}\right)}{2x(x+5) \cdot (x^2 - 6x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x(6x+1) - (x+5)(7x-4)}{2x(x+5)(x-5)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 5}$

$\frac{5x^2 - 29x + 20}{2x(x+5)(x-5)(x-1)}$. Observăm că 5 este o soluție a numărătorului. Împărțind

numărătorul la $(x-5) \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(5x-4)}{2x(x+5)(x-5)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-4}{2x(x+5)(x-1)} =$

$$\frac{21}{400}.$$

1014. Scriem $25^{\log_5 x} = x^2, 8^{\log_2 x} = x^3, \log_{0.25} \frac{1}{64} = 3 \Rightarrow 4x - 5x^2 = x^2 + x^3 - 24 \Leftrightarrow$

$x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$ ecuația are o singură soluție reală pozitivă.

1015. Rezolvăm prima ecuație $\frac{y!}{(y-x)!} = 9 \frac{y!}{(y-x+1)!} \Leftrightarrow (y-x+1)! = 9(y-x)! \Leftrightarrow y-x+1 = 9 \Leftrightarrow y = x+8$. Înlocuim în a doua ecuație $\frac{(x+8)!}{x! \cdot 8!} = 15 \frac{(x+8)!}{(x+1)! \cdot 7!} \Rightarrow x = 119, y = 127$.

1016. $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^3 = -A \Rightarrow A^4 = I_2 \Rightarrow A^5 = A$ de unde rezultă, prin inducție, că $A^{4k} = I_2, A^{4k+1} = A, A^{4k+2} = -I_2, A^{4k+3} = -A \Rightarrow$ nu există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^k = 2A$ și $A^{705} = A, A^{343} = -A$. $X(2024, -1) = A + I_2 \Rightarrow \det(X(2024, -1)) = 2 = \det(B^3)$. $\det(X(150, 30)) = \det(-I_2 - 30A) = 899 = \det\left(\frac{6293}{14}B^3\right)$.

1017. În limită se observă suma Riemann asociată funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{tg}^2 \frac{\pi x}{4}$, diviziunii $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n})$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Funcția este continuă și deci integrabilă, așa că limita din enunț este egală cu integrala lui f pe $[0, 1]$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{tg}^2 \frac{k\pi}{4n} = \int_0^1 \text{tg}^2 \frac{\pi x}{4} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} - 1 \right) dx = \left(\frac{4}{\pi} \text{tg} \frac{\pi x}{4} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{\pi} - 1$.

1018. Notăm numărul complex z cu $a+bi \Rightarrow \text{Re}(6z^2 - 3i + 2) = \text{Re}(6(a+bi)^2 - 3i + 2) = 6a^2 - 6b^2 + 2, \text{Im}(7i * \bar{z} - 2z * \bar{z}) = \text{Im}(7i * (a-bi) - 2(a+bi)(a-bi)) = \text{Im}(7ai + 7b - 2a^2 - 2b^2) = 7a, 6 \text{Im}(\bar{z})^2 = 6b^2 \Rightarrow \text{Re}(6z^2 - 3i + 2) - \text{Im}(7i * \bar{z} - 2z * \bar{z}) + 6 \text{Im}(\bar{z})^2 = 6a^2 - 7a + 2$ Egalăm cu 7 $\Rightarrow 6a^2 - 7a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{21}{12}$ sau $a = -\frac{7}{12}$.

1019. Înmulțim relația cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin B + \cos B) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin C + \cos C)$. Folosind identitățile trigonometrice: $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin B + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B = \sin B \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos B \cdot \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin C + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos C = \sin C \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos C \cdot \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin B \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos B \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sin C \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos C \cdot \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right)$. Cum funcția \cos este pară, avem: $B - \frac{\pi}{4} = C - \frac{\pi}{4}$ sau $B - \frac{\pi}{4} = -\left(C - \frac{\pi}{4}\right)$. Primul caz: $B - \frac{\pi}{4} = C - \frac{\pi}{4} \Rightarrow B = C$. În acest caz, triunghiul este isoscel. Al doilea caz: $B - \frac{\pi}{4} = -\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow B - \frac{\pi}{4} = -C + \frac{\pi}{4} \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$. În acest caz, triunghiul este dreptunghic.

1020. Cum $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2, \dots$ deducem formula generală pentru

termenul $a_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$. Demonstrând prin inducție: Pentru $n = 1$,

avem: $a_1 = 1$, echivalent cu $a_1 = \lfloor \frac{1+1}{2} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$. Presupunem că formula este adevărată pentru $n = k$. 1. Cazul $k+1$ impar: Dacă $k+1$ este impar, atunci k este par $\rightarrow a_k = -\frac{k}{2}$.

Atunci, pentru $n = k+1$, avem: $a_{k+1} = a_k + (k+1) = -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + (k+1)$.

Conform formulei: $a_{k+1} = \lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k+1+1}{2} \rfloor$, ceea ce este corect.

2. Cazul $k+1$ par: Dacă $k+1$ este par, atunci k este impar $\Rightarrow a_k = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Atunci, pentru $n = k+1$, avem: $a_{k+1} = a_k - (k+1) = \frac{k+1}{2}$.

Conform formulei: $a_{k+1} = -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, deci cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 399.

1021. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$. Folosim schimbarea de variabilă

$t = \cos x + \sin x \Rightarrow dt = -\sin x + \cos x dx \Rightarrow$ integrala devine $\int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.

1022. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$. Conform formulei lui De Moivre, expresia cerută

este chiar $\operatorname{Re}(z + z^3 + z^5)$. $z^7 = -1 \iff z^7 + 1 = 0 \iff (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \iff z^6 + z^4 + z^2 + 1 = z^5 + z^3 + z \iff z(z^5 + z^3 + z) + 1 = z^5 + z^3 + z \iff z^5 + z^3 + z = \frac{1}{1-z}$. $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{7}} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$.

1023. Folosim substituția $x = \frac{1}{t} \implies dx = -\frac{1}{t^2} dt \Rightarrow L = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \cdot \frac{1}{t^2} dt = -\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t}{\frac{t^2+1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = -\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t}{t^2+1} dt = -L \implies L = 0$.

1024. $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

1025. $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 8^{\cos^2 x} \leq 8, 1 \leq 4^{\sin^2 x} \leq 4 \Rightarrow 8^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x = 0$ imposibil. Ecuația nu are soluție.

1026. $\log_c((c^{-x})^x) - \log_a\left(\frac{1}{c^3}\right) \log_a(b^2) + \log_a\left(\frac{c^{2x}}{b^{3x}}\right) + \log_a\left(\frac{c^2}{a^x}\right) = -x^2 - x + 6 \log_a b \log_a c + 2x \log_a c - 3x \log_a cb + 2 \log_a c = (2 \log_a c - x)(3 \log_a b + x + 1)$. Ca ecuația să prezinte o rădăcină dublă $\Rightarrow 2 \log_a c - x = 3 \log_a b + x + 1 = 0 \Rightarrow \log_a c^2 = \log_a\left(\frac{1}{a}\right) + \log_a\left(\frac{1}{b^3}\right) \Rightarrow c^2 = \frac{1}{ab^3} \Rightarrow a = \frac{1}{c^2 b^3}$.

1027. Alegem $x = \frac{\pi}{4}$. Atunci avem: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$. Aceasta devine:

$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$. Deci: $2^{-\frac{n}{2}} = 2^{-1}$. Prin urmare, $n = 2$ este singura soluție.

1028. $\det(A) = 0 \xrightarrow{\text{Cayley-Hamilton}} A^2 = -9A \Rightarrow A^n = (-9)^{n-1}A$. Dacă $B^{2024} = A \Rightarrow$

$\det(B) = 0 \Rightarrow B^n = (\text{Tr}(B))^{n-1}B$. Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{C} \Rightarrow (\text{Tr}(B))^{2023}B = A \Leftrightarrow (x+t)^{2024} = \text{Tr}(A) = -9 \Rightarrow$ ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ și 2 în $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

1029. $\frac{1}{|n+1-x|+2024} < \frac{1}{|n-x|+2024} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{|n+1-x|+2024} dx < \int_0^1 \frac{1}{|n-x|+2024} dx \Rightarrow I_{n+1} < I_n$. Folosind Teorema de medie, obținem $\frac{1}{|n-x|+2024}$ continuă pe $[0, 1] \Rightarrow \exists k \in [0, 1]$ astfel încât $\int_0^1 \frac{1}{|n-x|+2024} dx = \frac{1}{|n-k|+2024}$. În concluzie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|n-k|+2024} = 0$.

1030. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Avem că $f'(x) = \frac{x}{x+1} > 0, \forall x > 0$,

deci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. De asemenea, se observă că $f(0) = 0$, deci din monotonia lui f rezultă că $f(x) > 0, \forall x > 0$. Știm că $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ și cum $x_0 > 0$, prin inducție se poate demonstra că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = -\ln(1+x_n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este și mărginit inferior de 0, rezultă că șirul este convergent. Pentru a-i afla limita, pe care o vom nota cu l , putem trece la limită în relația de recurență și obținem: $l = l - \ln(1+l) \Leftrightarrow l = 0$.

1031. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \stackrel{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

1032. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x_1 x_2 \dots x_n)}{n} \stackrel{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x_1 \dots x_{n+1}}{x_1 \dots x_n} \right) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_{n+1}) = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = 0$.

1033. Din teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{a + b + c} =$

$\frac{1}{2R} \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$, unde cu R am notat raza cercului circumscris și cu p semiperimetrul triunghiului ABC . Înlocuind, obținem $p = 6$. Ne putem folosi de

formula $R = \frac{abc}{4s}$, unde s este aria lui ABC , pentru a afla raza R . Aria o aflăm din

formula lui Heron: $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$. Așadar, avem că

$R = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{2}$ și deci $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{12}{5}$.

$$1034. \quad AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 3}{2} \iff 2x - 3y + 7 = 0 \iff$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, \quad CD : \frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C} \iff \frac{x - 1}{9} = \frac{y - 0}{6} \iff 6x - 9y - 6 =$$

$$0 \iff y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}. \quad \text{Cum } m_{AB} = m_{CD} = \frac{2}{3}, \text{ avem că } AB \parallel CD. \text{ Analog se}$$

poate arăta $m_{AC} \neq m_{BD}$, deci $ABCD$ este trapez. $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2}$, unde

$$h = d(A, CD) = \frac{|6 \cdot 1 - 9 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{6^2 + 9^2}} = \frac{27}{\sqrt{113}} = \frac{9}{\sqrt{13}}. \quad AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$$

$$\sqrt{13}; \quad CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{9 \cdot 4\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = 18.$$

1035. Folosim metoda integrării prin părți $u = \cos(3x) \Rightarrow du = -3 \sin(3x), v' =$

$$e^{-3x} \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x} \Rightarrow I = \cos(3x) \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot e^{-3x}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sin(3x) \cdot e^{-3x} dx =$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{e^\pi}{3} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sin(3x) \cdot e^{-3x} dx. \text{ Folosim, din nou, în mod similar, metoda integrării}$$

prin părți $u = \sin(3x) \Rightarrow du = 3 \cos(3x), v' = e^{-3x} \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x}$. În concluzie,

$$I = -\frac{1}{3} - \frac{e^\pi}{3} + \sin(3x) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-3x} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 + \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\cos(3x) \cdot e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} - \frac{e^\pi}{3} - I \Rightarrow I =$$

$$-\frac{e^\pi + 1}{6}.$$

1036. Notăm $a = \sin \frac{\pi}{10}$ și $b = \cos \frac{\pi}{5}$. Deoarece $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ avem că

$$a^2 = \frac{1 - b}{2} \Rightarrow 2a^2 + b = 1. \text{ De asemenea } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \text{ deci } b^2 = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{2} =$$

$$\frac{1 + \sin \frac{\pi}{10}}{2} = \frac{1 + a}{2} \Rightarrow 2b^2 - a = 1. \text{ Așadar, } 2a^2 + b = 1 = 2b^2 - a \iff 2a^2 - 2b^2 + a + b =$$

$$0 \iff 2(a + b)(2a - 2b + 1) = 0. \text{ Cum } a + b \neq 0, \text{ rezultă că } 2a - 2b + 1 = 0 \iff 2a =$$

$$2b - 1 \iff 2a = 2 - 4a^2 - 1 = 1 - 2a^2 \iff 4a^2 - 2a + 1 = 0. \text{ Cum } \frac{\pi}{10} \text{ se află în primul}$$

cadran, valoarea lui $\sin \frac{\pi}{10}$ va fi rădăcina pozitivă a ecuației de mai sus, deci $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

1037. Vom calcula derivatele lui f și punctele în care se anulează acestea:

$$f'(x) = \frac{4(4x^2 + 1) - 4x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = 4 \frac{-4x^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff -4x^2 + 1 =$$

$$0 \iff x \in \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}.$$

$$f''(x) = 4 \frac{-8x(4x^2 + 1)^2 - (-4x^2 + 1) \cdot 2(4x^2 + 1) \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^4} = 4 \frac{-32x^3 - 8x + 64x^3 - 16x}{(4x^2 + 1)^3} =$$

$$4 \frac{32x^3 - 24x}{(4x^2 + 1)^3} = 32x \frac{(4x^2 - 3)}{(4x^2 + 1)^3}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) = 0 \iff x = 0 \text{ sau } 4x^2 - 3 = 0 \iff$$

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Tabelul de variație a lui f este:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	∞
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$0 \searrow$	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	$\searrow 0$

Așadar, f are două puncte de extrem global: $x = -1$ și $x = 1$ și 3 puncte de inflexiune.

$$\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{2} \ln 1 = \ln 3.$$

1038. Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = (\alpha + 3)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) \Rightarrow$

sistemul este compatibil determinat pentru $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ -3, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

1039. Cum $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$, $\sin(x - \arcsin x) \cdot \sin(x + \arcsin x) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\cos(x - \arcsin x - (x + \arcsin x)) - \cos(x - \arcsin x + x + \arcsin x)) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos(-2 \arcsin x) - \cos(2x)) = \frac{1}{2} (\cos(2 \arcsin x) - \cos(2x)) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2(\arcsin x) - 1 + \sin^2 x) = \frac{1}{2} (-2x^2 + 2 \sin^2 x) = \sin^2 x - x^2, x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

1040. Dezvoltăm termenii egalității $\frac{n!}{(n-k-1)!} = a \frac{n!}{(n-k+1)!} \Leftrightarrow a = (n-k)(n-k+1)$ (produs de 2 numere consecutive) $\Rightarrow a \in \{2, 6, 12, \dots\}$.

1041. Pentru $x = 0, y = 10 \Rightarrow$ graficul \boxed{B} nu este corect. De asemenea, pentru

$x = -2, y = 0 \Rightarrow$ graficul corect este cel reprezentat de varianta \boxed{A} .

1042. Folosim relația $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ și avem: $2(a-1) = \sqrt{2(a^2+1)}$. De aici

rezultă că $a = 2 + \sqrt{3}$. Analog se obține $b_1 = -1$ și $b_2 = \frac{3}{2}$.

1043. Pentru $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2) = (a+1)(a+3)$ observăm că: $(1-x_i^2) =$

$$(1-x_i)(1+x_i) \Rightarrow \prod_{i=1}^4 (1-x_i^2) = \prod_{i=1}^4 (1-x_i) \cdot \prod_{i=1}^4 (1+x_i) = f(1) \cdot f(-1) \Rightarrow \prod_{i=1}^4 (1-x_i^2) =$$

$$(a+1)(a+3). \text{ Pentru } (1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2) = (a+1)^2, \text{ conform calculului de mai sus: } (a+1)(a+3) \neq (a+1)^2 \text{ pentru orice } a \neq 2. \text{ Pentru } x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 9-2a, \text{ folosim}$$

$$\text{formula } x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) =$$

$$(-3)^2 - 2a = 9 - 2a. \text{ Pentru } x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 9-4a, \text{ conform calculului de mai sus:}$$

$9 - 2a \neq 9 - 4a$ pentru orice $a \neq 0$.

1044. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})$. Grupăm vectorii \overrightarrow{OB} cu \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OC} cu \overrightarrow{OD} : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}))$. Rezultă că: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$. Rezultă că: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

1045. Funcția este continuă pe intervalul de integrare, așa că aplicăm Teorema de

Medie: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \cdot (n+1-n+1) \cdot \frac{k^4+9}{k^9+16} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{k^9+9k^5}{k^9+16} = 2, k \in (n-1, n+1)$.

1046. Legea de compoziție devine: $x * y = 2(x+5)(y+5) - 5$, care este comu-

tativă. Pentru a găsi elementul neutru e , avem: $x * e = 2(x+5)(e+5) - 5 = x$
 $2(x+5)(e+5) = x+5$, oricare ar fi x , deci $2(e+5) = 1 \iff e+5 = \frac{1}{2} \Rightarrow e = -\frac{9}{5}$.

Căutăm un element a astfel încât: $x * a = a$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Conform legii de compoziție date: $2(x+5)(a+5) = a$. Deoarece ecuația trebuie să fie adevărată pentru

orice x , putem simplifica: $a+5 = 0 \implies a = -5$. Atunci: $(-10)*(-9)*\dots*9*10 = -5..$

1047. $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1) \cdot \dots \cdot (2n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$.

Aplicând logaritmul natural, obținem $\ln a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. Așadar, a_n reprezintă

suma Riemann asociată funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$, diviziunii $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Cum f este in-

tegrabilă, rezultă că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x+1) dx = \ln \frac{4}{e} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{e}$.

1048. Scriem $14!$ ca produs de numere prime, $14! = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Le

grupăm corespunzător $\Rightarrow \log_{13}(14!) = 1 + 3 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 8 + 2 \log_{13} 70 + \log_{13} 11 +$

$2 \log_{13} 3, \log_{13}(14!) = 1 + 4 \log_{13} 6 + 2 \log_{13} 14 + 3 \log_{13} 2 + \log_{13} 10 + \log_{13} 22 + \log_{13} 15$.

1049. Funcția este impară, iar intervalul de integrare este simetric \Rightarrow rezultatul este 0.

1050. $\det(A) = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. Așadar $\det(A^n)$ poate fi scris astfel: $\det(A^n) =$

$a_n^2 + b_n^2 = (\det(A))^n = 16^n$. De aici rezultă că $a_{14}^2 - 2^{24} \cdot a_8^2 = (16^{14} - b_{14}^2) - 2^{24}(16^8 - b_8^2) =$

$16^{14} - b_{14}^2 - 16^6 \cdot 16^8 + 16^6 b_8^2 = 16^6 \cdot b_8^2 - b_{14}^2 \iff a_{14}^2 + b_{14}^2 = 2^{24}(a_8^2 + b_8^2) \iff 2^5 6 = 2^5 6$.

$\frac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{30}^2 + b_{30}^2} = \frac{16^{20}}{16^{30}} = 16^{-10}$.

1051. Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha + 3)\alpha(\alpha - 2) \Rightarrow$ sistemul

este compatibil determinat pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}$.

1052. Notăm cu I integrala din enunț. Facem schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ și

$$\text{obținem: } I = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{\cos^2(\pi - t) - 3} (-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{\cos^2 t - 3} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 3} dt - I,$$

$$\text{deci } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 3} dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\cos t - \sqrt{3}}{\cos t + \sqrt{3}} \right| \Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{-1 - \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} \right| - \ln \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right| \right) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} \right|^2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

1053. $\sin \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Putem rescrie așadar ecuația astfel: $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} +$

$$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4 \cos x} = 2 \iff \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin x} + \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\cos x} = 2 \iff \sin \frac{\pi}{10} \sin x + \cos \frac{\pi}{10} \cos x = 2 \sin x \cos x,$$

adică $\sin\left(\frac{\pi}{10} + x\right) = \sin 2x$. Soluția generală a acestei ecuații este: $\frac{\pi}{10} + x = n\pi + (-1)^n 2x$, $n \in \mathbb{Z}$. Soluțiile din $(0, \pi)$ se obțin pentru $n \in \{0, 1, 3\}$ și sunt $x \in \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{29\pi}{30} \right\}$.

1054. Aflăm formula generală a unui termen a dezvoltării: $T_{k+1} = (-1)^k \cdot 3^{\frac{7n-7k}{5}} \cdot C_n^k \cdot$

$x^{\frac{13k+2n}{5}}$. Știm din enunț că $(-1)^5 \cdot 3^{\frac{7n-7 \cdot 5}{5}} \cdot C_n^5 = -3^{14} \cdot 3003 \Rightarrow n = 15$. Aflăm termenul

care îl conține pe x^{32} : $\frac{13k + 30}{5} = 32 \Rightarrow k = 10 \Rightarrow T_{11} \Rightarrow$ coeficientul lui T_{11} este $3^7 C_{15}^{10}$.

1055. $L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+12} + x)(\sqrt{x+12} - x)}{(\sqrt{x+12} + x)(x^2 - 16)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-3 - x)(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x + 12} + x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3 - x}{(x + 4)(\sqrt{x + 12} + x)} = -\frac{7}{64}.$$

1056. $x_1 = x_0 + e^{-x_0} > 0$, deoarece $x_0 > 0$ și analog se poate demonstra prin inducție

că $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ și $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0$, deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ crescător. Putem presupune

că șirul ar fi mărginit superior, caz în care ar fi convergent la $l \in \mathbb{R}$ și am putea trece

la limită în relația de recurență: $l = l + e^{-l} \iff e^{-l} = 0$, fapt care contrazice $l \in \mathbb{R}$.

Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + e^{-x_n}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e^{-x_n}}{x_n}\right) = 1 + \frac{0}{\infty} = 1$,

deci conform consecinței lemei lui Cezaro-Stolz avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

1057. Fie $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $H_3(M)$. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & a+a' & b+ac'+b' \\ 0 & 1 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M), \forall M \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, deci “ \cdot ” este o operație pe

$H_3(M), M \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Asociativitatea acestei operații se moștenește din asociativitatea înmulțirii matricilor de ordinul 3 cu intrări complexe, reale, respectiv întregi.

De asemenea, elementul neutru $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M)$, pentru $M = \mathbb{Z}$ sau $M = \mathbb{R}$.

Se poate verifica prin calcul că $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M)$, pentru

$M = \mathbb{Z}$ sau $M = \mathbb{R}$, deci orice matrice din mulțime va avea inversa tot în această mulțime. În concluzie, $(H_3(\mathbb{R}), \cdot)$ și $(H_3(\mathbb{Z}), \cdot)$ sunt grupuri. $\forall A \in H_3(\mathbb{R}), \det(A) = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1058.} \quad & \cos\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos \frac{3}{5}\right) = \cos\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}\right) \cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right) - \\ & \sin\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}\right) \sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right). \text{ Folosim acum } \arcsin x = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right) \text{ și } \arccos x = \\ & \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right), \text{ pentru } x \in (0, 1). \text{ Cum } \frac{7}{\sqrt{50}}, \frac{3}{5} \in (0, 1), \text{ avem } \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{50}}, \\ & \arccos \frac{3}{5} = \arcsin \frac{4}{5}. \text{ Așadar, } \cos\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos \frac{3}{5}\right) = \cos\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{50}}\right) \\ & \cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right) - \sin\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}\right) \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \frac{3}{5} - \frac{7}{\sqrt{50}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3-28}{5\sqrt{50}} = \\ & -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos \frac{3}{5}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

1059. Pentru a determina punctele de acumulare, vom calcula $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{7n}$, în funcție de paritatea lui $n \Rightarrow L = \frac{1}{7}$, dacă n este par și $L = -\frac{1}{7}$ dacă n este impar. Ambele valori sunt puncte de acumulare.

$$\begin{aligned} \mathbf{1060.} \quad & \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \text{ecuația devine } 2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x - 1 = 0 \iff \\ & (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0. \text{ Singura soluție validă este } \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2n\pi = \\ & \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1061. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{x+\pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}) \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}}{1 + \frac{3x}{x+\pi}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\pi\sqrt{3}}{4x+\pi} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4},
 \end{aligned}$$

deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x+\pi} = 0$ și $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$.

$$1062. \quad \text{Vom afla ecuațiile dreptelor } AB : \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \iff \frac{x+\frac{1}{15}}{-\frac{3}{5}+\frac{1}{15}} =$$

$$\frac{y-\frac{8}{15}}{0-\frac{8}{15}} \iff 5x-5y+3=0 \text{ și } AC : \frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A} \iff 7x-y+1=0. \text{ Reuni-}$$

unea bisectoarelor unghiului A , care se obține ca intersecție a dreptelor AB și AC , este

locul geometric al punctelor egal depărtate de aceste două drepte. Ecuația acestui loc ge-

$$\text{ometric este așadar: } \frac{|5x-5y+3|}{\sqrt{5^2+5^2}} = \pm \frac{|7x-y+1|}{\sqrt{7^2+1^2}} \iff |5x-5y+3| = |7x-y+1| \iff$$

$$5x-5y+3 = \pm(7x-y+1), \text{ de unde se obțin cele două bisectoare de ecuații } x+2y-1=0$$

și $6x-3y+2=0$. Observăm că ecuația \boxed{D} este echivalentă cu $6x-3y+2=0$.

1063. Scriem $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z-a| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$ și scriem inegalitatea ca $2 < \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} < 3 \Rightarrow 4 < (x-4)^2 + (y-4)^2 < 36$.

$$\begin{aligned}
 1064. \quad & \text{Folosim substituția } x = 4 - t \implies dx = -dt. \quad I = \int_0^4 \frac{1}{4+2^{4-t}} dt = \\
 & \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{2^t}{4+2^t} dt = \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{4}{4+2^t} dt = 1 - I \implies I = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

1065. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, deci $y = 1$ asimptotă orizontală pentru G_f . $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) =$

$$\frac{2}{0_-} = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{2}{0_+} = \infty, \text{ deci } x = 1 \text{ asimptotă verticală pentru } G_f. \text{ Așadar,}$$

G_f admite două asimptote. Ecuația tangentei în $x = 2$ este: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2 \text{ și } f(2) = \frac{3}{1} = 3, \text{ deci ecuația tangentei este: } y - 3 =$$

$$-2(x-2) \iff y = -2x + 7. \text{ Observăm că } f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{ deci } f \text{ este}$$

strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$. Folosindu-ne de informațiile cu privire la

asimptotele lui f , avem că: $f(x) < 1, \forall x \in (-\infty, 1)$ și $f(x) > 1, \forall x \in (1, \infty)$, deci pentru

$a = 1$, ecuația $a = f(x)$ nu are soluție.

$$1066. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2 \sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4 + 1)^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2 \sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4 + 1)^3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2 \sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4 + 1)^3}}. \text{ Avem deci o sumă Riemann atașată funcției}$$

$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt[4]{(x^4+1)^3}}$, diviziunii $\Delta_n = (1, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n})$ și sistemului de

puncte intermediare $\xi_n = (1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n})$. Cum funcția f este continuă pe $[1, 2]$, ea va fi integrabilă pe acest interval și limita sumei Riemann va fi așadar egală cu integrala lui f pe $[1, 2]$. Vom calcula acum valoarea acestei integrale: $\int_1^2 f(x) dx =$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt[4]{[x^4(1 + x^{-4})]^3}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 \cdot x^3 \sqrt[4]{(1 + x^{-4})^3}} dx =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^5 \sqrt[4]{(1 + x^{-4})^3}} dx = \int_1^2 \frac{x^{-5}}{(1 + x^{-4})^{\frac{3}{4}}} dx = -\frac{1}{4} \cdot 4(1 + x^{-4})^{\frac{1}{4}} \Big|_1^2 = -(1 + x^{-4})^{\frac{1}{4}} \Big|_1^2 =$$

$$\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{\frac{17}{16}}.$$

1067. Cum $\vec{0} = \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} \Rightarrow \vec{0} = 3\vec{HG}$. Deci: $\vec{HG} = \vec{0}$, așadar, $H = G$.

Ceea ce înseamnă că ortocentrul coincide cu centrul de greutate, deci triunghiul este echilateral.

1068. Rescriem $f(x) = (x+1)(x^2 + (a-1) \cdot x + 1)$ și știm că una dintre rădăcini este -1 , iar celelalte două rădăcini sunt soluții ale ecuației de gradul al doilea. Pentru ca ecuația de gradul al doilea să aibă soluții reale, discriminantul său trebuie să fie mai mare sau egal cu zero. Astfel, a trebuie să aparțină intervalului $a \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

1069. Folosind faptul că $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$, rescriem I în felul următor: $I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx. \text{ Folosim, apoi, schimbarea de variabilă } t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt =$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx \text{ și avem: } I = \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = (t - \ln|t+1|) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

1070. Circumferința este $16 \Leftrightarrow 2\pi R = 16 \Leftrightarrow R = \frac{8}{\pi}$, unde R este raza cercului, de

unde rezultă că distanța de la centrul cercului până la vârfuri este egală cu R . R mai este egal cu $\frac{2}{3}h$, unde h este înălțimea triunghiului echilateral. Notăm cu l lungimea laturii

$$\text{triunghiului} \Rightarrow R = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow l = \sqrt{3}R \Leftrightarrow l = \frac{8\sqrt{3}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{48\sqrt{3}}{\pi^2}, P = \frac{24\sqrt{3}}{\pi}, r = \frac{4}{3\pi}.$$

$$\frac{a}{P^2} = \frac{16\sqrt{3}}{24^2} \notin \mathbb{Q}, a < P^2, r < P, \frac{P}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

1071. Pentru a obține o lege comutativă, tabla legii trebuie să fie simetrică față de diagonală principală; se completează fără restricții elementele de pe diagonală și deasupra ei (restul vor fi simetrice), deci avem $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ poziții; cum fiecare poziție poate fi ocupată de n valori, rezultă că avem $n^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$ legi diferite.

1072. Scriem $\log_7(9x^2 - 12x + 5)$ ca $\log_7((3x-2)^2 + 1) \Rightarrow$ pentru $x = \frac{2}{3}, y = 0$.

1073. Folosim substituția $t = x + \frac{\pi}{4} \implies dt = dx$. $I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin(t - \frac{\pi}{4})}{\sin t} dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin t \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos t}{\sin t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin t - \cos t}{\sin t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

1074. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^{2^{n+1}} x + \sin^{2^{n+1}} x$. Atunci, $f(x) = (\cos^2 x)^{2^n} + (\sin^2 x)^{2^n} = (\cos^2 x)^{2^n} + (1 - \cos^2 x)^{2^n}$. Facem acum schimbarea de variabilă $t = \cos^2 x$ și privim funcția f ca fiind funcția $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t^{2^n} + (1 - t)^{2^n}$. $g'(t) = 2^n t^{2^n-1} - 2^n (1 - t)^{2^n-1} \implies g'(t) = 0 \iff t = \frac{1}{2}$. Minimul lui g se atinge în acest punct și este egal cu $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{2^n} + (\frac{1}{2})^{2^n} = \frac{1}{2^{2^n-1}}$.

1075. Folosim teorema sinusurilor și proprietatea din enunț și obținem: $\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$. Înmulțind cu $4R^2$ obținem: $a^2 + b^2 = c^2$ Prin urmare, triunghiul ABC este dreptunghic.

1076. Din Teorema Cayley-Hamilton, cum $\det(A) = 0 \implies A^2 = 10A$, deci înmulțind succesiv cu A la dreapta obținem $A^n = 10^{n-1}A$ (se poate demonstra și prin inducție). $\det \left(\sum_{k=1}^{2024} A^k \right) = \det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2024}) = \det A * \det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2023}) = 0$.

1077. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln 2 \cdot x^n$, cu $n \in \mathbb{N}$. Observăm că L este definiția derivatei funcției f , așadar, $L = \ln 2 \cdot n \cdot x^{n-1}$.

1078. Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2(a + 2) \implies$ pentru

$a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ sistemul este compatibil determinat cu $x = y = z = \frac{1}{a + 2}$. Pentru

$a = -2 \implies d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, d_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies$ sistemul este incompatibil.

Pentru $a = 1 \implies d_1 = 1 \neq 0 \implies d_{c1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, d_{c2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$ sistemul este

compatibil nedeterminat.

1079. Folosim substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, și $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}$. $I =$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{1 - t^2} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2+2 \cdot (1-t^2))} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{t^4 - 4t^2 + 3} dt. \text{ Cu substituția } u = t^2, du = 2t dt, I = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{u^2 - 4u + 3} du =$$

$$= 2 \cdot \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(u-3) - (u-1)}{(u-3) \cdot (u-1)} du = \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{u-1} du - \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{u-3} du = \ln \left| \frac{u-1}{u-3} \right| \Big|_{\frac{1}{3}}^0 = \ln \frac{1}{3} -$$

$$\ln \frac{1}{4} = \ln \frac{4}{3}.$$

1080. Maximul este atins la "mijloc", datorita proprietății de simetrie a coeficienților binomiali, deci termenul cel mai mare va fi $C_{5n}^{\frac{5n}{2}}$.

1081. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \implies \cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} =$

$$= \frac{\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}. F(x) = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} \right) dx =$$

$$\frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{32} + C. F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi + 9}{32} \implies C = \frac{1}{32}.$$

1082. $36 \cos^2 x + 36 \sin x - 34 = 36 - 36 \sin^2 x + 36 \sin x - 34 = 2 - 36 \sin^2 x + 36 \sin x =$

$$11 - (36 \sin^2 x - 36 \sin x + 9) = 11 - (3 - 6 \sin x)^2 \implies \text{cea mai mare valoare este atinsă}$$

dacă $3 - 6 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \implies$ valoarea maximă e 121.

1083. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Observăm că

în limită este suma Riemann atașată funcției integrabile $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0, 1]$. $\int_0^1 f(x) dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

1084. Notăm cele 8 puncte coliniare cu C_1, C_2, \dots, C_8 și cu N_1, N_2, \dots, N_{25} pe cele care nu sunt coliniare. Avem o dreaptă ce unește cele 8 puncte coliniare, $C_8^1 * C_{25}^1$ drepte de tipul $C_i N_j$, $1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 25$ și C_{25}^2 drepte de tipul $N_i N_j$, $1 \leq i \leq 25, 1 \leq j \leq 25 \implies$ sunt necesare 501 drepte.

1085. $z = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \Leftrightarrow z = \sqrt{12} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow z_0 = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$

$$z_1 = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right), z_2 = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right), z_3 = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{19\pi}{12} +$$

$$+ i \sin \frac{19\pi}{12} \right). z_0^2 = \sqrt[4]{12} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_1^2 = \sqrt[4]{12} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right), z_2 z_3 = \sqrt[4]{12}$$

$$\left(\cos \frac{13\pi}{12} \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}\right) \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \cos \frac{19\pi}{12} - \sin \frac{13\pi}{12} \sin \frac{19\pi}{12} = \sqrt[4]{12} \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}\right).$$

$$z_0^2 + z_1^2 = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right).$$

$$z_0^2 + z_1^2 + \frac{1}{2} z_2 z_3 = -\frac{\sqrt[4]{12}}{4} \cos \frac{4\pi}{3}.$$

1086. Folosind l'Hôpital, obținem $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 3x - 4}{x^3 - 2x - 1} \cdot \frac{3x^2 - 2}{7x^6 + 3} = \frac{3}{7}$.

1087. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$. Știind că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$, avem: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$. Prin urmare, modulul va fi: $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |3\overrightarrow{BC}| = 3|\overrightarrow{BC}| = 3 \cdot 5 = 15$.

1088. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(2^{2n})} + \dots + \frac{1}{\ln(n^{n^2})}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \ln 2} + \dots + \frac{1}{n^2 \ln n}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2 \ln 2} + \dots + \frac{1}{n \ln n}\right) \stackrel{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = 0.$$

1089. Pentru a ajunge la funcția $r(x) = 4x$, putem aplica u de 2 ori sau $v(v(u(v(u(x)))))$,

deci am aplicat funcția v de un număr impar de ori. Nicio variantă nu este corectă \Rightarrow

D.

1090. Folosim substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ și $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$. Avem: $I = \int_0^1 \frac{1}{2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4} \cdot \frac{2}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{2}{2 - 2t^2 + 6t + 4t^2 + 4} dt =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3t + 3} dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt.$$

Folosim substituția $u = t + \frac{3}{2} \Rightarrow du = dt$. $I = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$. Folosind $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$, obținem $I = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

1091. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x^2 \ln x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x} = e^0 = 1$, unde am folosit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} 0$.

$\frac{1}{x^3} = 0$. $f'(x) = x^{x^2} (x^2 \ln x)' = x^{x^2} (2x \ln x + x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$, $\forall x > 0$. $f'(x) = 0 \iff 2 \ln x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Avem că: $f'(x) < 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ și $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$, deci f descrește pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ și crește pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$. Așadar, punctul $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ este de minim global pentru f.

1092. Folosim substituția $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^\pi t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^\pi t}{\operatorname{tg}^\pi t + 1} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg}^\pi t + 1} dt = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

1093. Lungimea medianei din $A(0,0)$ spre latura opusă BC pentru triunghiul cu vârfurile $A(0,0), B(4,0), C(2,3)$ este dată de formula distanței între punctele $A(0,0)$ și mijlocul segmentului BC , care are coordonatele $M\left(3, \frac{3}{2}\right)$. Formula lungimii medianei

$$\text{este: } AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-0\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$G\left(\frac{0+4+2}{3}, \frac{0+0+3}{3}\right) = G\left(\frac{6}{3}, \frac{3}{3}\right) = G(2,1)$. Așadar, coordonatele centrului de greutate sunt: $G(2,1)$.

1094. Folosim următoarea identitate $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

$$I = \int_3^7 \frac{\ln(3+7-x-3)}{\ln[(3+7-x-3)(7-3-7+x)]} dx = \int_3^7 \frac{\ln(7-x)}{\ln[(7-x)(x-3)]} dx. \text{ Adunând cele}$$

două ecuații pentru I , obținem $2I = \int_3^7 \frac{\ln[(7-x)(x-3)]}{\ln[(7-x)(x-3)]} dx = \int_3^7 dx = x \Big|_3^7 = 4 \implies I = 2$.

1095. Dezvoltăm legea de compoziție astfel: $x*y = e^{\ln(x-2) \cdot \ln(y-2)} + 2$, de unde observăm că $*$ este comutativă. Fie c elementul neutru al acestei legi, adică: $x*c = x$. Conform legii de compoziție date: $x*c = e^{\ln(x-2) \cdot \ln(c-2)} + 2$. Pentru ca $x*c = x$ să fie adevărat $\forall x \in (2, \infty)$, trebuie să avem: $e^{\ln(x-2) \cdot \ln(c-2)} + 2 = x \iff e^{\ln(x-2) \cdot \ln(c-2)} = x - 2$, deci $e^{\ln(x-2) \cdot \ln(c-2)} = e^{\ln(x-2)}$. Prin urmare $\ln(x-2) \cdot \ln(c-2) = \ln(x-2)$, deci $\ln(c-2) = 1$ $c = e + 2$.

1096. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

1097. Știind că $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$, înmulțim expresia cu $\sin \frac{x}{2}$:

$$E(x) \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \right).$$

$$E(x) \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \right), \text{ deci } E(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

1098. Avem $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{10}{3}$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \implies G\left(\frac{10}{3}, 2\right)$. Deci

$$d(G, l) = \frac{\left| \frac{10}{3} - 2 + 2 \right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{3\sqrt{2}}.$$

1099. $T_{n-5} = C_n^{n-6} \cdot 5 \cdot 4^{-\frac{1}{3}(n-6)}$. $T_6 = C_n^6 \cdot 5^{n-5} \cdot 4^{-\frac{5}{3}}$, deci $\frac{T_6}{T_{n-5}} = \frac{5^{n-5} \cdot 4^{-\frac{n-6}{3}}}{5 \cdot 4^{\frac{5}{3}}} =$

$5^{n-6} \cdot 4^{\frac{n-11}{3}} = 20$, de unde rezultă $n \notin \mathbb{N}$.

1100. $\log_7(1, 80) = \log_7 \frac{18}{10} = \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 9 - \log_7 5 = 2 \log_7 3 - \log_7(125)^{\frac{1}{3}} = 2b - \frac{a}{3} =$

$$\frac{6b - a}{3}.$$

1101. Facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}$ și ne folosim de formulele $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. După simplificări, integrala devine

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{8t^2 + 4t + 2} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{4t^2 + 2t + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{(2t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

Substituim $u = 2t + \frac{1}{2}$, deci $du = 2dt$, iar integralul devine: $\frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du$ Folosind formula standard, obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \text{ Evaluăm acum la limitele de integrare: } \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

1102. Notăm $AB = c, BC = a, AC = b$. Avem $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1$ deci $\frac{c(b+c) + a(a+b)}{(a+b)(b+c)} = 1$, adică $c^2 + a^2 + ab + bc = ab + ac + b^2 + bc$. Aplicând Teorema cosinusului, obținem $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$.

1103. Aplicarea regulii de înmulțire a numerelor complexe scrise în formă trigonometrică și stabilirea faptului că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. f nu este injectivă: $f(x+k) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}^*$. f nu este surjectivă deoarece nici un număr complex nenul de modul diferit de 1 nu aparține mulțimii $f(\mathbb{R})$. $[f(x)]^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) \in \{ \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \} \Leftrightarrow x \in \{ \frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Presupunând că ar exista un izomorfism $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, ar exista $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(a) = -1$, prin urmare $g(0) = 1 = (-1)^2 = [g(a)]^2 = g(2a)$, ceea ce implică $2a = 0$, adică $a = 0$. Dar atunci $1 = g(0) = g(a) = -1$, contradicție.

1104. Aplicând legea de compoziție, egalitatea se restrânge la $(x-2)(9(x-2)^2 - 1) = 0$, deci soluțiile sunt $\left\{ 2, \frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right\}$.

1105. Integrând, aflăm $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$. Avem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{64}$ și cum $x > 0$, avem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. Cum $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, iar f este o funcție continuă, avem $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{3}{8}, +\infty \right)$.

1106. Scriind Relațiile lui Viète și rezolvând sistemul de ecuații, aflăm $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$, deci raportul se restrânge la $\frac{25}{25} = 1$.

1107. $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^1 f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^1 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^x \cdot x \Big|_{-t}^1 - \int_{-t}^1 e^x dx \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^x (x - 1) \Big|_{-t}^1 \right) = 0$.

$$1108. A = \int_1^2 |g(x)| dx = \int_1^2 e^x(x-1) dx = e^x(x-1) \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^x(x-2) \Big|_1^2 = e.$$

$$1109. \text{ Dând factor comun, putem rescrie expresia ca } (A^{2008} - I_2)(A^4 - 6A^3 - A^2) = O_2.$$

Din Teorema Cayley-Hamilton, $A^2 - 6A - I_2 = O_2$ și cum A este inversabilă, avem $A^4 - 6A^3 - A^2 = O_2$, deci expresia este egală cu O_2 .

$$1110. \text{ Limita se poate rescrie ca } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}. \text{ Fie}$$

funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, f continuă și integrabilă pe \mathbb{R} . Pentru fiecare n se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0, 1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$

sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n . Pentru fiecare n , termenul x_n este suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare

ξ_n , adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

$$1111. \text{ Fie } A \text{ matricea sistemului. } \det(A) = 0. \text{ Alegem un minor principal } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq$$

$$0, d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ sistemul este compatibil nedeterminat. Notăm } z = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{7}{5}\alpha, y = \frac{\alpha}{5}, \text{ deci expresia este egală cu } \frac{73}{75}.$$

$$1112. \text{ Avem } z^2 + 2z + 1 = z \iff z^2 + z + 1 = 0, \text{ împărțind cu } z, \text{ avem } z + \frac{1}{z} = -1.$$

Tot din $z^2 + z + 1 = 0$, înmulțind cu z și înlocuind $z^2 + z = -1$, avem $z^3 = 1$. Deci, în relația $\frac{z^{4044} + 1}{z^{2022}}$, înlocuim $z^{2022} = (z^3)^{674}$ și $z^{4044} = (z^3)^{1348}$ rămânem cu $\frac{z^{4044} + 1}{z^{2022}} = 2$.

$$1113. \text{ Efectuând calculele, } P \text{ este o progresie geometrică cu rația } z, \text{ deci } P = z \cdot \frac{z^{2024} - 1}{z - 1} = \frac{z^{2025} - z}{z - 1} = -1(z^3 = 1). \text{ Prelucrând expresia } Q, Q = z^{\frac{2024 \cdot 2025}{2}} = z^{1012 \cdot 2025} = (z^3)^{675 \cdot 1012} = 1.$$

$$1114. \text{ Aplicând Regula Triunghiului succesiv pentru fiecare pereche din sumă, vom rămâne la final cu } \overrightarrow{A_0 \cdot A_n} + \overrightarrow{A_n \cdot A_0} = \vec{0}.$$

$$1115. \text{ Adunând coloanele, avem}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 - 1 \\ 1 & x_2 - 1 & x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \cdot (-1)$. Din prima Relație a lui Viete, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, deci determinantul este egal cu 0.

1116. Avem $a_n = 1^{2023} + 2^{2023} + \dots + n^{2023}$, $b_n = n^2 024$. Cum b_n este divergent, aplicând criteriul Stolz-Cesàro avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2023} + 2^{2023} + \dots + n^{2023}}{n^{2024}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2023}}{(n+1)^{2024} - n^{2024}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023} + \dots}{2024n^{2023} + \dots} = \frac{1}{2024}$.

1117. Din relațiile lui Viete, suma rădăcinilor va fi -3 , iar produsul acestora va fi 4 (gradul polinomului este un număr par, deci vom avea un număr par de relații). De aici, rezultă varianta A.

1118. Avem $f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 2) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x) = e^x \cdot x(x + 4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 0\}$. Cum $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$, $f'(x) \leq 0 \forall x \in [-4, 0]$ și f continuă, obținem că f este crescătoare pe $(-\infty, -4]$, descrescătoare pe $(-4, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$. Avem $f(-4) = 6e^{-4}$, $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, deci $x = 6e^{-4}$ este punct de maxim pe $(-\infty, 0]$, de unde rezultă că afirmația B este adevărată.

1119. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} dx$. Fie $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2(x)} dx$;
 $t^2 = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \Rightarrow t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} dx =$
 $\int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{4}{3}$.

1120. Calculăm puterile matricei F în \mathbb{Z}_5 :

$$F^2 = F \cdot F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^3 = F^2 \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F^4 = F^3 \cdot F = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1121. $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow 3 = 9k \Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow p + 2 = -2 \Rightarrow p = -4$

1122. Limita se rescrie ca $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x + \cos x) \stackrel{L'H}{=} e^1 = e.$

1123. Rescriem ecuația astfel: $(3^2)^{x+1} - (3 \cdot 2)^x = 2^{2x} \Rightarrow 3^{2x+2} - 3^x \cdot 2^x = 2^{4x}$. Împărțim

toți termenii la 3^{2x} și notăm $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow 9 - t = t^2 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+36}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Observăm că produsul soluțiilor este: $t_1 \cdot t_2 = \frac{(-1 + \sqrt{77})(-1 - \sqrt{77})}{4} = \frac{1 - 37}{4} =$

$\frac{-36}{4} = -9 \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1+x_2} = -9 \Rightarrow x_1 + x_2 = -9.$

1124. $H = \left(\frac{x_P+x_Q+x_R}{3}, \frac{y_P+y_Q+y_R}{3}\right) = (2, 1) \Rightarrow 4 + x_R = 6 \Rightarrow x_R = 2; \Rightarrow 5 +$

$y_R = 3 \Rightarrow y_R = -2 \Rightarrow R(2, -2) \quad A_{PQR} = \frac{1}{2} |x_P(y_Q - y_R) + x_Q(y_R - y_P) + x_R(y_P - y_Q)| =$
 $\frac{1}{2} |4 - 15 + 2| = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5 \Rightarrow A_{PQRS} = 2 \times A_{PQR} = 2 \times 4.5 = 9$

1125. Efectuăm substituția $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx$. Integrala devine

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{-1/2} dt \Rightarrow \frac{1}{2} [2\sqrt{t}]_1^2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}) = \sqrt{2} - 1.$$

1126. $f(\hat{2}) = f(\hat{1} + \hat{1}) = f(\hat{1}) + f(\hat{1}) = 2 \cdot f(\hat{1}) = \hat{4}$ în $\mathbb{Z}_{12} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{12} \Rightarrow$

$x \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow x = 2, 8$ în \mathbb{Z}_{12} .

1127. $D = \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 1 \cdot (k \cdot (-k) - 1 \cdot 1) - (-k) \cdot (-1 \cdot (-k) - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (-1 \cdot 1 - k \cdot 1) =$

$-k^2 - 1 + k^2 - k - 1 - k = -2k - 2.$

$-2k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1$

1128. Dintre 9 copii, arbitrul poate fi ales în $C_9^1 = 9$ moduri. Din cei 8 copii rămași,

echipa A de 4 jucători poate fi formată în $C_8^4 = 70$ moduri. După formarea echipei A ,

rămân 4 copii care formează echipa B . Deci, totalul modurilor este $9 \cdot 70 = 630$.

1129. Cum $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 3x)} dx$

Folosim $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} dx =$
 $4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \cos 2x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \cos 2x) dx = 2 \left[\left(\sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 0) \right] =$
 $2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$

1130. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$

1131. $\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$
 $\frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \sin x = 1$ și $\sin x = -\frac{1}{2}$, dar $\sin x = -\frac{1}{2}$ nu are soluții în intervalul $[0, \pi]$.

1132. Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

1133. $x * e = xe + 2ax + 2ae + 4 = x. \Rightarrow -4a^2 + 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a =$
 $\frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$

1134. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a \cdot f(0) = b \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$

$f'_{st}(0) = 0, f'(x) = b + 6x \Rightarrow f'_{dr}(0) = b \Rightarrow b = 0.$

1135. $\cos C = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} \Rightarrow c^2 = 104 - 40 \cdot \frac{3}{5} = 104 - 24 = 80 \Rightarrow c = \sqrt{80} =$

$4\sqrt{5}.$ (din teorema cosinusului), $\sin C = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} = \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$ $Ar\text{ia}(ABC) = \frac{ab \sin C}{2} =$

$\frac{10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

1136. Avem $g(3x) = 4g(x)$, deci $g(x) = \frac{g(3x)}{4}$. Calculăm integrala dată: $\int_0^1 g(x) dx =$

$\int_0^1 \frac{g(3x)}{4} dx = \frac{1}{12} \int_0^3 g(u) du = 3.$ Astfel, $\int_0^3 g(u) du = 36.$ Pentru a găsi $\int_1^3 g(u) du$, scădem $\int_0^1 g(u) du = 3 \Rightarrow \int_1^3 g(u) du = 36 - 3 = 33.$

1137. Primul număr cu cinci cifre este 10000 și ultimul este 99999, deci în total sunt $99999 - 10000 + 1 = 90000$ astfel de numere. Dintre acestea, jumătate sunt impare, deci numărul elementelor din M este $\frac{90000}{2} = 45000$. Sau: prima poziție poate fi ocupată de 9 cifre (1-9), următoarele 3 poziții de 10 cifre, iar ultima de 5 cifre (1,3,5,7,9), deci în total $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ numere

1138. $(1+i)^{2024} = (\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^{2024} = 2^{1012} (\cos(2024 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(2024 \cdot \frac{\pi}{4})).$

$$2024 \cdot \frac{\pi}{4} = 506\pi \equiv 2\pi \pmod{2\pi} \Rightarrow (1+i)^{2024} = 2^{1012} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^{1012} (1 + i \cdot 0) = 2^{2012}.$$

1139. Observăm că $\log_{4^k} x^k = k \cdot \log_{4^k} x = k \cdot \frac{1}{\log_x 4^k} = \frac{1}{\log_x 4} = \log_4 x$. Astfel, ecuația devine $n \cdot \log_4 x = n$, de unde $\log_4 x = 1$, ceea ce implică $x = 4$. Prin urmare, mulțimea S conține exact un singur element, iar acesta se încadrează în intervalul $[1, 4]$.

1140. Fie q rația progresiei geometrice b_1, b_2, \dots, b_m . Avem $b_k = b_1 q^{k-1}$. Astfel, $\frac{1}{b_i b_{i-1}} = \frac{1}{b_1^2 q^{2i-3}}$. $Q(1) = \sum_{i=2}^m \frac{1}{b_i b_{i-1}} + \frac{m}{b_1 b_m} = \sum_{i=2}^m \frac{1}{b_1^2 q^{2i-3}} + \frac{m}{b_1 b_m}$. Observăm că suma geometrică $\sum_{i=2}^m \frac{1}{b_i b_{i-1}}$ converge la $\frac{1}{b_1^2 q} \left(\frac{1 - q^{-2(m-1)}}{1 - q^{-2}} \right) = \frac{1}{b_1^2 q} \cdot \frac{1 - q^{-2(m-1)}}{1 - q^{-2}} \Rightarrow Q(1) = m - 1 + \frac{m}{b_1 b_m}$.

1141. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{3n} + x^{3n+3}}{1+x^3} dx = \int_0^1 x^{3n} dx = \frac{1}{3n+1}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 < J_n < \int_0^1 x^{3n} dx = \frac{1}{3n+1}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $J_{n+1} < J_n$, deci $2J_n > J_n + J_{n+1} = \frac{1}{3n+1} \Rightarrow J_n > \frac{1}{6n+2}$ și $2J_{n+1} < J_n + J_{n+1} = \frac{1}{3n+1} \Rightarrow J_{n+1} < \frac{1}{6n+2} \Rightarrow J_n < \frac{1}{6n-2}$. Drept urmare, avem $\frac{1}{6n+2} < J_n < \frac{1}{6n-2} \Rightarrow \frac{n}{6n+2} < nJ_n < \frac{n}{6n-2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nJ_n = \frac{1}{6}$.

1142. $\frac{b_{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{b_n}{n \cdot 3^n} + 1$. Fie $c_n = \frac{b_n}{n \cdot 3^n}$, atunci: $c_{n+1} = c_n + 1 \Rightarrow c_n = n \Rightarrow$

$$b_n = n^2 \cdot 3^n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

1143. $p \cdot (-2) + q \cdot 0 + r = -2p + r \neq 0$ și $p \cdot 2 + q \cdot 0 + r = 2p + r \neq 0$,

$$\text{dist}(N, d) = \frac{\left| p \cdot \frac{q-r}{p} + q \cdot 0 + r \right|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|q-r+r|}{\sqrt{r^2}} = \frac{q}{r}.$$

$$p \cdot \frac{q-r}{p} + q \cdot 0 + r = q - r + r = q \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(G, d) \cdot \text{dist}(H, d) &= \frac{|p \cdot (-2) + q \cdot 0 + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \frac{|p \cdot 2 + q \cdot 0 + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|r-2p| \cdot |r+2p|}{r^2} = \\ &= \frac{|r^2 - (2p)^2|}{r^2} = \frac{|q^2 - 3 \cdot p^2|}{r^2}. \end{aligned}$$

1144. Determinantul este de tip Vandermonde și se descompune în $(\sin \theta - \cos \theta)(\cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \theta \right) = 0$ și cum $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, vom obține de 3 ori soluția $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1145. Avem $a_n = 1! + 2! + \dots + n!$, $b_n = (n+1)!$. Cum b_n este divergent, putem

aplica criteriul Stolz-Cesàro și avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$$1146. \sum_{k=1}^n \log_2 \left(\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \log_2 \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right) = \log_2 \left(\prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{\prod_{k=1}^n k \cdot \prod_{k=1}^n (k+2)}{\prod_{k=1}^n (k+1)^2} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) \text{ și cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1, \text{ obținem } S = -1.$$

1147. Avem $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$, așadar $C(-2, 4)$. Pentru a

afila panta dreptei d_1 , avem $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4}{-4} = -1$ și cum $d_1 \perp AC \iff$

$m_{d_1} \cdot m_{AC} = -1 \iff m_{d_1} = 1$. Analog procedăm și pentru d_2 și d_3 și vom obține

$m_{d_2} = -\frac{5}{3}$, $m_{d_3} = -\frac{1}{7}$. În acest caz, date fiind variantele de răspuns, este suficient să

afilăm tangentele unghiurilor α, θ, γ și vom avea: $\tan \alpha = \left| \frac{m_{d_2} - m_{d_1}}{1 + m_{d_2} \cdot m_{d_1}} \right| = 4$. (deoarece

unghiul este ascuțit). Similar pentru θ și γ , vom obține $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\tan \gamma = \frac{16}{13}$ și efectuând

calculul, obținem variantele \boxed{A} , \boxed{B} și \boxed{D} ca fiind adevărate.

1148. Divizorii lui 42 pe \mathbb{N} sunt $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Evident, pentru că ne dorim

ca atât suma cifrelor, cât și produsul să fie 42, vom alege cifrele 6, 7 și restul cifrelor 1.

Așadar, cel mai mic T este $T = \underbrace{111 \dots 1}_{\text{de 29 de ori}} 67$, care are exact 31 de cifre.

$$1149. I = \int_0^1 \frac{4^{\frac{3}{2}}}{(4x^2 + 4x + 4)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^1 \frac{8}{((2x+1)^2 + 3)^{\frac{3}{2}}} dx. \text{ Folosim substituția } t =$$

$$2x+1 \implies dt = 2dx. I = \int_1^3 \frac{4}{(t^2 + 3)(3/2)} dt. \text{ Apoi, folosim substituția } t = \sqrt{3} \operatorname{tg} u \implies$$

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u} du. I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{3^{\frac{3}{2}} (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt = \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt = \frac{4}{3} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}.$$

1150. Cum 11 este prim și $(3, 11) = 1$, avem din Mica Teoremă a lui Fermat $\widehat{3}^{10} = \widehat{1}$.

Afirmația \boxed{A} rezultă imediat prin calcul. De asemenea, în afirmația \boxed{B} , $\widehat{3}^{22} - \widehat{3}^{14} - \widehat{3}^{13} =$

$\widehat{3}^2 - \widehat{3}^4 - \widehat{3}^3 = \widehat{9} - \widehat{4} - \widehat{5} = \widehat{0}$. Cum $\widehat{3}^{2024} = \widehat{3}^4 = \widehat{4}$, afirmația \boxed{D} este, de asemenea,

adevărată.

$$1151. \sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \implies \sin^2 2x = \cos^2 x \implies \sin^2 2x - \cos^2 x = 0 \implies$$

$$\implies (\sin 2x - \cos x)(\sin 2x + \cos x) = 0 \implies \sin 2x - \cos x = 0 \text{ sau } \sin 2x + \cos x = 0.$$

$$\text{Cazul 1: } \sin 2x - \cos x = 0 \implies 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \implies \cos x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\implies \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \implies x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \implies \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \text{ soluții pt. } k \in \{0, 1\}. \\ \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Cazul 2: } \sin 2x + \cos x = 0 \implies 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \implies \cos x(2 \sin x + 1) = 0$$

$$\implies \begin{cases} \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \text{ fals pentru } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

În concluzie, sunt 3 soluții distincte: $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$

$$1152. \text{ Desfăcând parantezele și împărțind cele două polinoame, avem } I = \int_6^{21} 2x dx =$$

$$441 - 36 = 405.$$

$$1153. \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{m+2}{m-2} = \frac{6}{-3} \iff m+2 = -2m+4 \iff m = \frac{2}{3}.$$

$$1154. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{arctg} \sqrt{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Ne folosim acum de formulele } \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\forall x \in (0, \infty). \text{ Așadar, } \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}} \iff \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} =$$

$$\arcsin \frac{2}{3} = \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$1155. \text{ Scriem Relațiile lui Viete și obținem: } \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -m \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 20 \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -n. \end{cases}$$

Suma din cerință se restrânge la $2S_1^2 - 6S_2 = 2m^2 - 120 = 2(m^2 - 60)$. Dacă $m = \sqrt{60}$, expresia este egală cu 0.

$$1156. \text{ Soluția I: } \hat{\text{Înlocuind în prima Relație a lui Viete, obținem } x_3 = -m + \frac{m}{4} + \frac{m}{4} = -\frac{m}{2}. \hat{\text{Înlocuim în a treia relație a lui Viete și obținem } n = 16.}$$

$$\text{Soluția II: Dacă } x = -\frac{m}{4} \text{ este rădăcina dublă a polinomului } f(x), \hat{\text{înseamnă că: } f' \left(-\frac{m}{4} \right) =$$

0 unde derivata este: $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 20$. Calculăm derivata în punctul $x = -\frac{m}{4}$:
 $f'(-\frac{m}{4}) = 0 \implies m^2 = 64$. Cum $m > 0$, rezultă: $m = 8$. De asemenea, $x = -2$ este rădăcină, deci: $f(-2) = 0$. de unde rezultă că: $n = 16$.

1157. Folosim substituția $x = \pi - t \implies dx = -dt$. $I = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \sin^2(\pi - t)} dt =$
 $\pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt - I \implies 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt \implies I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{2 - \cos^2 t} dt$. Folosim
 în continuare substituția $u = \cos t \implies du = -\sin t dt$ și avem: $I = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{u^2 - 2} dt =$
 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} \right| \Big|_1^{-1} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{-2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 3} \right|$.

1158. Calculând determinantul sistemului obținem $\Delta = 9 \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și se poate rezolva folosind Formulele lui Cramer. Obținem, astfel,
 $x = -\frac{1}{9}, y = -\frac{4}{9}, z = \frac{29}{9}$. Deci avem $a = 24, b = 9 \implies a - b = 15$.

1159. $L \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \frac{1}{x^2+1}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(x^2+1)^2}{2x} = -\frac{1}{2}$.

1160. Avem $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1} < 0 \forall x \in (1, +\infty)$, deci f este descrescătoare. De asemenea, $f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2} > 0 \forall x \in (1, +\infty)$, deci f este convexă pe intervalul dat.

1161. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n f'(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) =$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{3}{2}$.

1162. Folosim substituția $t = e - x \implies x = e - t \implies dx = -dt$. Avem:
 $I = \int_0^e \frac{e^{-t}}{e^{-t} + e^t} dt = \int_0^e dt - \int_0^e \frac{e^t}{e^{-t} + e^t} dt = e - I \implies 2I = e \implies I = \frac{e}{2}$.

1163. Distanța de la punctul $P(2, a)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(P, d_1) = \frac{|2a+1|}{\sqrt{13}}$, iar
 distanța de la punctul P la dreapta d_2 este dată de: $d(P, d_2) = \frac{|3a+5|}{\sqrt{13}}$. Așadar, trebuie
 să avem $|2a+1| = |3a+5| \implies x \in \left\{ -4, -\frac{6}{5} \right\}$.

1164. Avem $C_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)! \cdot 1}$ și $C_{x-1}^{x-3} = \frac{(x-1)!}{(x-3)! \cdot 2}$. Simplificând fracțiile, inegalitatea se reduce la $x^2 - x - 16 \leq 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$, deci
 inecuația este satisfăcută dacă $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{65}}{2}, \frac{1 + \sqrt{65}}{2} \right]$. Cum $x \in \mathbb{Z}$ și $x \geq 3$ (condiție de existență), dintre variantele de răspuns obținem $x \in \{3, 4\}$.

$$1165. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2n}{2k+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2k+3n}{2k+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2\frac{k}{n}+3}{2\frac{k}{n}+1}$$

Observăm că în limită este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0, 1]$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right) dx = (x + \ln(2x+1)) \Big|_0^1 = 1 + \ln 3.$$

1166. Cunoaștem $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Așadar, $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, deci vom avea $z_{2025} = i, z_{2026} = -1 + i, z_{2027} = -1$.

1167. Avem $z_{4k} = 0, z_{4k+1} = i, z_{4k+2} = -1 + i, z_{4k+3} = -1$. Deci, $S = \sum_{k=1}^{2024} z_k =$

$$506(-2 + 2 \cdot i) = -1012 + 1012i. \quad \bar{S} = -1012 - 1012i, \text{ deci } |S + \bar{S}| = 2024.$$

1168. Folosim substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = t \implies dx = \frac{4}{t^2+1} dt$ și $\cos \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \implies$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{4}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2} dt = \int_0^1 \frac{4}{2} dt = 2t \Big|_0^1 = 2.$$

1169. $5 \cos(x+y) \sin y = \sin x \iff 5(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \sin y = \sin x$. Știm că

$\cos x \neq 0$, deci putem împărți egalitatea cu $\cos x : 5 \sin y \cos y - 5 \sin^2 y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x \iff$
 $\operatorname{tg} x = \frac{5 \sin y \cos y}{1 + 5 \sin^2 y} = \frac{5 \sin y \cos y}{\cos^2 x + 6 \sin^2 y} \leq \frac{5 \sin y \cos y}{2\sqrt{\cos^2 y \cdot 6 \sin^2 y}} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$, unde pentru a obține această inegalitate am aplicat inegalitatea mediilor.

1170. Știm că $\arcsin : [1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ și că $\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cum $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{6\pi}{5}) = \sin(-\frac{\pi}{5})$ și $-\frac{\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, avem $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$.

1171. Panta dreptei $2y - x = 1$ este egală cu $\frac{1}{2} \implies$ panta celeilalte diagonale este $-2 \implies d_2 : y = -2x + n$. Cum $B(7, 2) \notin d_1 \implies c = 16, d_2 : y = -2x + 16$. Astfel, se observă că $D\left(\frac{27}{5}, \frac{26}{5}\right)$ este simetricul lui B față de dreapta $2y - x = 1$. De asemenea, se observă că $C\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$ este simetricul lui A față de dreapta $y = -2x + 16$.

1172. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2n-k)(2n+k)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{4n^2 - k^2}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$. Observăm că în limită este suma Riemann atașată funcției

integrabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$ și sistemului

de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0, 1]$. $\int_0^1 f(x) dx = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

1173. Folosim substituția $x = \sqrt{2} - t \implies dx = -dt$. $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{2}-t}}{\sqrt{\sqrt{2}-t}-\sqrt{t}} dt = \int_0^{\sqrt{2}} dt + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sqrt{2}-t}-\sqrt{t}} dt = \sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\sqrt{\sqrt{2}-t}} dt = \sqrt{2} - I \implies 2I = \sqrt{2} \implies I = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1174. $f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^3 - x & \text{dacă } x < 0 \\ x^2(1-x)^3 + x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x - 1 & \text{dacă } x < 0 \\ -5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Avem că $f'_s(0) = -1$ și $f'_d(0) = 1$,

deci $x = 0$ este punct unghiular pentru f . Folosind informațiile din ipoteză știm că $f'(x) = 0$ va avea o singură rădăcină și anume $a = 1.38342$. Cum f' este un polinom de gradul 4 și avem că $f'_d(0) = 1 > 0$ rezultă că f' va fi pozitivă pe $(0, a)$ și negativă pe $(\infty, 0) \cup (a, \infty)$. Calculăm limitele lui f : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	a	∞
$f'(x)$	$-$	$- +$	0	$-$
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\nearrow f(a)$	$\searrow -\infty$

Așadar, $x = 0$ este punct de minim local și $x = a$ punct de maxim local.

1175. $I = \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x dx$. Folosim substituția $t = \cos x \implies dt = -\sin x dx \implies I = \int_1^{-1} (1 - t^2)(-dt) = t \Big|_{-1}^1 - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

1176. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 \implies \sin 2x = \frac{2}{3} \implies \begin{cases} \sin^2 2x = \frac{4}{9} \\ \cos^2 2x = \frac{5}{9} \end{cases}$. Așadar, $\cos 4x = \frac{1}{9} \implies$

$\frac{3}{7} \cdot (\sin 2x + \cos 4x) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1}{3}$.

1177. $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{ax+b-2x+1}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{ax+b-2x+1}} \right]^{\frac{ax+b-2x+1}{2x-1} \cdot x}$. Știind că $L = e^2$,

obținem $a = 2$, iar limita devine $L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(a-2)+x(b+1)}{2x-1}} = e^2 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(b+1)}{2x-1} = 2 \implies \frac{b+1}{2} = 2 \implies b = 3$.

1178. $T_k = \binom{2020}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x^3}\right)^{2020-k} = \binom{2020}{k} x^{2k} x^{-3(2020-k)} = \binom{2020}{k} x^{2k-6060+3k} = \binom{2020}{k} x^{5k-6060}$. $\implies 5k - 6060 = 5 \implies 5k = 6065 \implies k = \frac{6065}{5} = 1213$ Astfel coeficientul binomial este C_{2020}^{1213} care este egal cu C_{2020}^{807} .

1179. g este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot) \Leftrightarrow g(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = g(x) \cdot g(y)$. Funcția g este injectivă deoarece pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dacă $g(x_1) = g(x_2)$, atunci $e^{x_1} = e^{x_2}$ implică $x_1 = x_2$. Funcția g nu este surjectivă deoarece imaginea sa este $(0, +\infty) \Rightarrow g$ nu este nici bijectivă, deci g nu este un izomorfism de grupuri.

1180. Notăm cu $A = \log_{100} a$ și $B = \log_{81} b$. Din prima ecuație obținem $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Folosind a doua ecuație, avem $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = 1 \Rightarrow A = 2$ și $B = -2 \Rightarrow \log_{30}(a^2) - \log_{30} b = \log_{30}(10^8 \cdot 3^8) = \log_{30}((10 \cdot 3)^8) = \log_{30}(30^8) = 8$.

1181. Ecuația perpendicularei este $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} \iff 2x - 4y + 6 = 0 \iff x - 2y + 3 = 0$. Perpendiculara are panta egală cu $\frac{1}{2}$, deci dreapta d va avea panta $m = -2$. Ecuația dreptei d este: $d: y - y_A = m(x - x_A) \iff y - 4 = -2(x - 5) \iff 2x + y - 14 = 0$.

1182. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{0} + \vec{d} - \vec{0}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{3}{14}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$;
 $\overrightarrow{BM} = \vec{M} - \vec{B} = \vec{M} = \frac{3}{14}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$; $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{DC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{DB}\right) = \frac{3}{14}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$.

1183. Înlocuind cu 2, respectiv 14 observăm că nu sunt soluții. Folosind notația $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{y^2-5y+9} + \sqrt{y^2+5y+9} = 7$. Notăm $A = \sqrt{y^2-5y+9}$, $B = \sqrt{y^2+5y+9} \Rightarrow A+B=7$ și $A^2+B^2=2y^2+18 \Rightarrow AB = \frac{31-2y^2}{2}$. Din $B^2-A^2=10y \Rightarrow B-A = \frac{10y}{7}$. Din toate $\Rightarrow 96y^2=637 \Rightarrow y^2 = \frac{637}{96} \Rightarrow x = \frac{445}{96}$.

1184. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} - n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1$.

1185. Fie a, b, c lungimile laturilor acestui triunghi. Din ipoteză rezultă faptul că $a+b+$

$c = 2p = 8$. Fie s aria triunghiului. Din formula lui Heron: $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow s^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow 16s^2 = 8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \Rightarrow 2s^2 = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Inegalitatea triunghiului ne asigura că fiecare paranteză este un număr real pozitiv și putem aplica inegalitatea mediilor: $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{512}{27} \Rightarrow s^2 \leq \frac{512}{54} = \frac{256}{27} \Rightarrow s \leq \sqrt{\frac{256}{27}}$. Aria maximă este așadar $\sqrt{\frac{256}{27}}$ și se obține în cazul egalității $a = b = c$, adică în cazul în care triunghiul este echilateral.

1186. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x) \frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}} = 1$, deoarece

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$. Așadar, limita cerută este egală cu 1.

1187. $I = \int_0^{\pi^2/16} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi^2/16} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} dx$. Folosim substituția $t = \cos \sqrt{x} \Rightarrow dt = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$, avem $I = -2 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = -2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2$.

1188. Notăm cu $z = \frac{2+iw}{2-iw}$. Astfel, ecuația devine: $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\frac{2+iw}{2-iw} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4 + 2iw = -2 \pm 2i\sqrt{3} + iw \mp i^2 w \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 6 - w\sqrt{3} = 0 \\ w \pm 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{Doar}$$

$w = 2\sqrt{3}$ satisface ambele condiții.

1189. $\log_2(2x+3) - \log_2 \frac{x^2}{2^7} < 7 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+3}{\frac{1}{2^7} \cdot x^2} < \log_2 2^7 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{\frac{1}{2^7} \cdot x^2} < 2^7 \Leftrightarrow 2x+3 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$ In concluzie, ținând cont de condițiile de existență impuse de logaritmi, $x \in (3, \infty)$.

1190. $\operatorname{ord}(x) = 2 \Rightarrow x^2 = e$. Avem $xy = y^2 \Rightarrow x^2 y = xy^2 \Rightarrow y = xy^2 = y^3 \Rightarrow y^2 = e$.

Cum $y^{6561} = y^{2 \cdot 3280 + 1} = y$.

1191. Pentru ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C , vectorii \vec{CA} și \vec{CB} trebuie să fie perpendiculari. Astfel, produsul scalar dintre acești vectori trebuie să fie zero: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow (2-x)(-x) + (3-4x)(-4x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = \frac{14}{17} \Rightarrow C \left(\frac{14}{17}, \frac{56}{17} \right)$. Dacă x ar fi 0, atunci și y ar fi 0 deci $B = C$ și triunghiul ar fi degenerat.

Propunători

1. Simion Breaz
2. Dorel Duca
3. Dorel Duca
4. Patricia Manci
5. Patricia Manci
6. Patricia Manci
7. Patricia Manci
8. Patricia Manci
9. Patricia Manci
10. Patricia Manci
11. Patricia Manci
12. Patricia Manci
13. Patricia Manci
14. Cosmin Pelea
15. István Szöllősi
16. Cosmin Pelea
17. Hannelore Lisei
18. Dorel Duca
19. Patricia Manci
20. Patricia Manci
21. Patricia Manci
22. Patricia Manci
23. Patricia Manci
24. Gabriela Petrușel
25. Cristian Crețu
26. Adriana Buică
27. Natalia Roșca
28. Dorel Duca
29. Patricia Manci
30. Patricia Manci
31. Patricia Manci
32. Patricia Manci
33. Patricia Manci
34. Patricia Manci
35. Cristian Crețu
36. Adriana Buică
37. Adriana Buică
38. Patricia Manci
39. Cristian Crețu
40. Patricia Manci
41. Cristian Crețu
42. Cristian Crețu
44. Adriana Buică
45. Adriana Buică
46. Adriana Buică
47. Adriana Buică
48. Cristian Crețu
49. Cristian Crețu
50. Adriana Buică
51. Adriana Buică
52. Adriana Buică
53. Adriana Buică
54. Natalia Roșca
55. Rareș Cotoi
56. Rareș Cotoi
57. Dorel Duca
58. Dorel Duca
59. Dorel Duca
60. Dorel Duca
61. Rareș Cotoi
62. Dorel Duca
63. Dorel Duca
64. Rareș Cotoi
65. Gabriela Petrușel
66. Gabriela Petrușel
67. Gabriela Petrușel
68. Cosmin Pelea
69. Septimiu Crivei
70. Tamás László
71. Dorel Duca
72. Ariana Ilieș
73. Ariana Ilieș
74. Rareș Cotoi
75. Cristian Crețu
76. Mara Ielciu
77. Mara Ielciu
78. Mara Ielciu
79. Mara Ielciu
80. Mara Ielciu
81. Mara Ielciu
82. Mara Ielciu
83. Mara Ielciu
84. Mara Ielciu
85. Mara Ielciu
86. Mara Ielciu
87. Mara Ielciu
88. Mara Ielciu
89. Mara Ielciu
90. Mara Ielciu
91. Mara Ielciu
92. Mara Ielciu
93. Mara Ielciu
94. Mara Ielciu
95. Mara Ielciu
96. Mara Ielciu
97. Mara Ielciu
98. Mara Ielciu
99. Mara Ielciu
100. Mara Ielciu
101. Mara Ielciu
102. Mara Ielciu
103. Cosmin Pelea
104. Cosmin Pelea
105. Cosmin Pelea
106. Adrian Petrușel
107. Simion Breaz
108. Paul Blaga
109. István Szöllősi
110. Mara Ielciu
111. Mara Ielciu
112. Mara Ielciu
113. Mara Ielciu
114. Mara Ielciu
115. Mara Ielciu
116. Mara Ielciu
117. Gabriela Petrușel
118. Gabriela Petrușel
119. Mara Ielciu
120. Andrei Mărcuș
121. Andrei Mărcuș
122. Andrei Mărcuș
123. Andrei Mărcuș
124. Andrei Mărcuș
125. Andrei Mărcuș
126. Andrei Mărcuș
127. Cosmin Pelea
128. Cosmin Pelea
129. Dorel Duca
130. Mara Ielciu
131. Mara Ielciu
132. Mara Ielciu
133. Mara Ielciu

- | | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 134. Andrei Mărcuș | 188. Ioana Gavrilă | 243. Ariana Ilieș | 297. Rareș Răhăian |
| 135. Mara Ielciu | 190. Hannelore Lisei | 244. Cristian Crețu | 298. Rareș Răhăian |
| 136. Mara Ielciu | 191. Dorel Duca | 245. Cristian Crețu | 299. Rareș Cotoi |
| 137. Mara Ielciu | 192. Dorel Duca | 246. Mihai Iancu | 300. Cristian Crețu |
| 138. Mara Ielciu | 193. Dorel Duca | 247. Mihai Iancu | 301. Cristian Crețu |
| 139. Rareș Cotoi | 194. Dorel Duca | 248. Brigitte Breckner | 302. Cristian Crețu |
| 140. Rareș Cotoi | 195. Dorel Duca | 249. Brigitte Breckner | 303. Cristian Crețu |
| 141. Cosmin Pelea | 196. Dorel Duca | 250. Florin Albișoru | 304. Luca Crețu |
| 142. Mara Ielciu | 197. Cristian Crețu | 251. Ariana Ilieș | 305. Luca Crețu |
| 143. Andrei Mărcuș | 198. Dorel Duca | 252. Ariana Ilieș | 306. Luca Crețu |
| 144. Andrei Mărcuș | 199. Dorel Duca | 253. Ariana Ilieș | 307. Luca Crețu |
| 145. Rareș Cotoi | 200. Cristian Crețu | 254. Ștefan Berinde | 308. Luca Crețu |
| 146. Rareș Cotoi | 201. Ariana Ilieș | 255. Ștefan Berinde | 309. Luca Crețu |
| 147. Rareș Cotoi | 202. Ariana Ilieș | 256. Brigitte Breckner | 310. Luca Crețu |
| 148. Rareș Cotoi | 203. Ariana Ilieș | 257. Brigitte Breckner | 311. Luca Crețu |
| 149. Rareș Cotoi | 204. Ariana Ilieș | 258. Dorel Duca | 312. Luca Crețu |
| 150. Tudor Micu | 205. Ariana Ilieș | 259. Dorel Duca | 313. Luca Crețu |
| 151. Tudor Micu | 206. Ariana Ilieș | 260. Mihai Nechita | 314. Luca Crețu |
| 152. Tudor Micu | 207. Ariana Ilieș | 261. Mihai Nechita | 315. Luca Crețu |
| 153. Adrian Petrușel | 208. Ariana Ilieș | 262. Mihai Nechita | 316. Luca Crețu |
| 154. Adrian Petrușel | 209. Patricia Manciu | 263. Mihai Nechita | 317. Luca Crețu |
| 155. Kajántó Sándor | 210. Ariana Ilieș | 264. Ariana Ilieș | 318. Luca Crețu |
| 156. Tudor Micu | 211. Ariana Ilieș | 265. Luca Crețu | 319. Luca Crețu |
| 157. Rareș Cotoi | 212. Ariana Ilieș | 266. Cristian Crețu | 320. Luca Crețu |
| 158. Rareș Cotoi | 213. Ariana Ilieș | 267. Ariana Ilieș | 321. Luca Crețu |
| 159. Rareș Cotoi | 214. Ariana Ilieș | 268. Mihai Iancu | 322. Luca Crețu |
| 160. Rareș Cotoi | 215. Ariana Ilieș | 269. Ariana Ilieș | 323. Luca Crețu |
| 161. Rareș Cotoi | 216. Ariana Ilieș | 270. Hannelore Lisei | 324. Teodora Cătinaș |
| 162. Rareș Cotoi | 217. Mihai Iancu | 271. Brigitte Breckner | 325. Zoltan Finta |
| 163. Rareș Cotoi | 218. Mihai Iancu | 272. Brigitte Breckner | 326. Brigitte Breckner |
| 164. Rareș Cotoi | 219. Hannelore Lisei | 273. Brigitte Breckner | 327. Brigitte Breckner |
| 165. Tudor Micu | 220. Ștefan Berinde | 274. Sanda Micula | 328. Brigitte Breckner |
| 166. Cosmin Pelea | 221. Ștefan Berinde | 275. Dorel Duca | 329. Brigitte Breckner |
| 167. Rareș Cotoi | 222. Ștefan Berinde | 276. Ștefan Berinde | 330. Cristian Crețu |
| 168. Cosmin Pelea | 223. Brigitte Breckner | 277. Teodora Cătinaș | 331. Cristian Crețu |
| 169. Cosmin Pelea | 224. Brigitte Breckner | 278. Nicolae Popovici | 332. Rareș Cotoi |
| 170. Adrian Petrușel | 225. Sanda Micula | 279. Dorel Duca | 333. Cristian Crețu |
| 171. Adrian Petrușel | 226. Dorel Duca | 280. Dorel Duca | 334. Cristian Crețu |
| 172. Cristian Crețu | 227. Dorel Duca | 281. Cosmin Pelea | 335. Cristian Crețu |
| 173. Cristian Crețu | 228. Dorel Duca | 282. Gabriela Petrușel | 336. Cristian Crețu |
| 174. Rareș Cotoi | 229. Dorel Duca | 283. Gabriela Petrușel | 337. Cristian Crețu |
| 175. Rareș Cotoi | 230. Mihai Nechita | 284. Gabriela Petrușel | 338. Cristian Crețu |
| 176. Rareș Cotoi | 231. Rareș Răhăian | 285. Cosmin Pelea | 339. Cristian Crețu |
| 177. Rareș Cotoi | 232. Rareș Răhăian | 286. Mihai Iancu | 340. Cristian Crețu |
| 178. Rareș Cotoi | 233. Rareș Răhăian | 287. Anca Grad | 341. Cristian Crețu |
| 179. Rareș Cotoi | 234. Rareș Răhăian | 288. Anca Grad | 342. Cristian Crețu |
| 180. Ioana Gavrilă | 235. Rareș Răhăian | 289. Ștefan Berinde | 343. Cristian Crețu |
| 181. Ioana Gavrilă | 236. Rareș Răhăian | 290. Brigitte Breckner | 344. Cristian Crețu |
| 182. Ioana Gavrilă | 237. Rareș Răhăian | 291. Cristian Crețu | 345. Ștefan Berinde |
| 183. Ioana Gavrilă | 238. Rareș Cotoi | 292. Cristian Crețu | 346. Ștefan Berinde |
| 184. Ioana Gavrilă | 239. Rareș Cotoi | 293. Rareș Răhăian | 347. Ștefan Berinde |
| 185. Ioana Gavrilă | 240. Ariana Ilieș | 294. Rareș Răhăian | 348. Cristian Crețu |
| 186. Cristian Crețu | 241. Ariana Ilieș | 295. Rareș Răhăian | 349. Cristian Crețu |
| 187. Ioana Gavrilă | 242. Ariana Ilieș | 296. Rareș Răhăian | 350. Cristian Crețu |

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| 351. Cristian Crețu | 405. Rareș Răhăian | 459. Florin Grigore | 513. Róth Ágoston |
| 352. Cristian Crețu | 406. Rareș Răhăian | 460. Florin Grigore | 514. Ioana Gavrilă |
| 353. Cristian Crețu | 407. Rareș Răhăian | 461. Florin Grigore | 515. Rareș Răhăian |
| 354. Cristian Crețu | 408. Cristian Crețu | 462. Florin Grigore | 516. Ioana Gavrilă |
| 355. Cristian Crețu | 409. Rareș Răhăian | 463. Florin Grigore | 517. Ioana Gavrilă |
| 356. Cristian Crețu | 410. Rareș Răhăian | 464. Florin Grigore | 518. Rareș Răhăian |
| 357. Cristian Crețu | 411. Rareș Cotoi | 465. Florin Grigore | 519. Rareș Răhăian |
| 358. Cristian Crețu | 412. Brigitte Breckner | 466. Florin Grigore | 520. Rareș Răhăian |
| 359. Brigitte Breckner | 413. Mara Ielciu | 467. Claudiu Pop | 521. Rareș Răhăian |
| 360. Brigitte Breckner | 414. Mara Ielciu | 468. Claudiu Pop | 522. Veronica Nechita |
| 361. Cristian Crețu | 415. Mara Ielciu | 469. Claudiu Pop | 523. Veronica Nechita |
| 362. Rareș Cotoi | 416. Iulian Simion | 470. Claudiu Pop | 524. Veronica Nechita |
| 363. Rareș Cotoi | 417. Róth Ágoston | 471. Claudiu Pop | 525. Cristina Blaga |
| 364. Mihai Iancu | 418. Róth Ágoston | 472. Claudiu Pop | 526. Mihai Iancu |
| 365. Mihai Iancu | 419. Róth Ágoston | 473. Claudiu Pop | 527. Mihai Iancu |
| 366. Mihai Iancu | 420. Róth Ágoston | 474. Claudiu Pop | 528. Cornel Pinte |
| 367. Florin Albișoru | 421. Rareș Răhăian | 475. Claudiu Pop | 529. Cornel Pinte |
| 368. Cristian Crețu | 422. Rareș Răhăian | 476. Cristian Crețu | 530. Iulian Simion |
| 369. Zoltan Finta | 423. Rareș Răhăian | 477. Mihai Iancu | 531. Rareș Răhăian |
| 370. Brigitte Breckner | 424. Rareș Răhăian | 478. Mihai Iancu | 532. Rareș Răhăian |
| 371. Brigitte Breckner | 425. Claudiu Pop | 479. Claudiu Pop | 533. Paul Blaga |
| 372. Brigitte Breckner | 426. Claudiu Pop | 480. Claudiu Pop | 534. Rareș Răhăian |
| 373. Brigitte Breckner | 427. Ioana Gavrilă | 481. Claudiu Pop | 535. Mihai Iancu |
| 374. Sanda Micula | 428. Ioana Gavrilă | 482. Claudiu Pop | 536. Mihai Iancu |
| 375. Brigitte Breckner | 429. Ioana Gavrilă | 483. Claudiu Pop | 537. Mihai Iancu |
| 376. Brigitte Breckner | 430. Ioana Gavrilă | 484. Claudiu Pop | 538. Tudor Micu |
| 377. Brigitte Breckner | 431. Ioana Gavrilă | 485. Claudiu Pop | 539. Róth Ágoston |
| 378. Brigitte Breckner | 432. Ioana Gavrilă | 486. Veronica Nechita | 540. Rareș Cotoi |
| 379. Brigitte Breckner | 433. Ioana Gavrilă | 487. Veronica Nechita | 541. Ioana Gavrilă |
| 380. Brigitte Breckner | 434. Ioana Gavrilă | 488. Mihai Iancu | 542. Ioana Gavrilă |
| 381. Brigitte Breckner | 435. Ioana Gavrilă | 489. Cornel Pinte | 543. Rareș Răhăian |
| 382. Luca Crețu | 436. Ioana Gavrilă | 490. Rareș Cotoi | 544. Rareș Răhăian |
| 383. Luca Crețu | 437. Ariana Ilieș | 491. Dorel Duca | 545. Rareș Răhăian |
| 384. Luca Crețu | 438. Cristina Blaga | 492. Ioana Gavrilă | 546. Rareș Răhăian |
| 385. Luca Crețu | 439. Florin Grigore | 493. Claudiu Pop | 547. Rareș Răhăian |
| 386. Luca Crețu | 440. Florin Grigore | 494. Claudiu Pop | 548. Rareș Răhăian |
| 387. Luca Crețu | 441. Florin Grigore | 495. Claudiu Pop | 549. Rareș Răhăian |
| 388. Luca Crețu | 442. Florin Grigore | 496. Claudiu Pop | 550. Gabriela Petrușel |
| 389. Luca Crețu | 443. Florin Grigore | 497. Claudiu Pop | 551. George Lung |
| 390. Luca Crețu | 444. Florin Grigore | 498. Claudiu Pop | 552. George Lung |
| 391. Luca Crețu | 445. Florin Grigore | 499. Claudiu Pop | 553. George Lung |
| 392. Luca Crețu | 446. Florin Grigore | 500. Claudiu Pop | 554. Rareș Răhăian |
| 393. Luca Crețu | 447. Florin Grigore | 501. Claudiu Pop | 555. Rareș Răhăian |
| 394. Gabriela Petrușel | 448. Florin Grigore | 502. Claudiu Pop | 556. Rareș Răhăian |
| 395. Gabriela Petrușel | 449. Florin Grigore | 503. Claudiu Pop | 557. Rareș Răhăian |
| 396. Gabriela Petrușel | 450. Florin Grigore | 504. Ioana Gavrilă | 558. Zsolt Szilágyi |
| 397. Gabriela Petrușel | 451. Florin Grigore | 505. Ioana Gavrilă | 559. Mara Ielciu |
| 398. Mirela Kohr | 452. Florin Grigore | 506. Ioana Gavrilă | 560. Cristian Crețu |
| 399. Rareș Cotoi | 453. Florin Grigore | 507. Ioana Gavrilă | 561. Rareș Cotoi |
| 400. Rareș Răhăian | 454. Florin Grigore | 508. Veronica Nechita | 562. Cristian Crețu |
| 401. Rareș Răhăian | 455. Florin Grigore | 509. Veronica Nechita | 563. Mara Ielciu |
| 402. Rareș Răhăian | 456. Florin Grigore | 510. Veronica Nechita | 564. Rareș Cotoi |
| 403. Rareș Răhăian | 457. Ariana Ilieș | 511. Veronica Nechita | 565. Rareș Cotoi |
| 404. Rareș Răhăian | 458. Florin Grigore | 512. Mihai Iancu | 566. George Lung |

567. George Lung
 568. George Lung
 569. George Lung
 570. George Lung
 571. George Lung
 572. George Lung
 573. George Lung
 574. George Lung
 575. George Lung
 576. George Lung
 577. George Lung
 578. George Lung
 579. Ariana Ilieș
 580. Hannelore Lisei
 581. Ariana Ilieș
 582. Gabriela Petrușel
 583. Cristian Crețu
 584. Rareș Răhăian
 585. Rareș Răhăian
 586. Ioana Gavrilă
 587. Ioana Gavrilă
 588. Ariana Ilieș
 589. Ariana Ilieș
 590. Ariana Ilieș
 591. Ariana Ilieș
 592. Ariana Ilieș
 593. Ariana Ilieș
 594. Ariana Ilieș
 595. Ariana Ilieș
 596. Ariana Ilieș
 597. Ariana Ilieș
 598. Ariana Ilieș
 599. Ariana Ilieș
 600. Ariana Ilieș
 601. Ariana Ilieș
 602. Ariana Ilieș
 603. Ariana Ilieș
 604. Ariana Ilieș
 605. Ariana Ilieș
 607. Ildikó Mezei
 608. Ildikó Mezei
 609. Rareș Cotoi
 610. Cristian Crețu
 611. Ariana Ilieș
 612. Ariana Ilieș
 613. Ariana Ilieș
 614. Ariana Ilieș
 615. Ariana Ilieș
 616. Ariana Ilieș
 617. Ariana Ilieș
 618. Ariana Ilieș
 619. Ariana Ilieș
 620. Ariana Ilieș
 621. Ariana Ilieș
 622. Ariana Ilieș
 623. Ariana Ilieș
 624. Ariana Ilieș
 625. Ariana Ilieș
 626. Ariana Ilieș
 627. Gabriela Petrușel
 628. Gabriela Petrușel
 629-952. Comisie
 953. Rareș Cotoi
 954. Rareș Cotoi
 955. Rareș Cotoi
 956. Rareș Cotoi
 957. Rareș Cotoi
 958. Nicolae Popovici
 959. Rareș Cotoi
 960. Cosmin Pelea
 961. Ștefan Berinde
 962. Teodora Căținaș
 963. Rareș Cotoi
 964. Cristian Crețu
 965. Septimiu Crivei
 966. Kajántó Sándor
 967. Cristian Crețu
 968. Adriana Buică
 969. Adrian Petrușel
 970. Rareș Cotoi
 971. Iulian Simion
 972. Cristian Crețu
 973. Tudor Micu
 974. Rareș Cotoi
 975. Mara Ielciu
 976. Rareș Răhăian
 977. Rareș Cotoi
 978. Mirela Kohr
 979. Ioana Gavrilă
 980. Cristian Crețu
 981. Cristian Crețu
 982. Cristian Crețu
 983. Cristian Crețu
 984. Cristian Crețu
 985. Cristian Crețu
 986. Cristian Crețu
 987. Cristian Crețu
 988. Cristian Crețu
 989. Cristian Crețu
 990. Cristian Crețu
 991. Cristian Crețu
 992. Cristian Crețu
 993. Cristian Crețu
 994. Cristian Crețu
 995. Cristian Crețu
 996. Cristian Crețu
 997. Cristian Crețu
 998. Cristian Crețu
 999. Cristian Crețu
 1000. Cristian Crețu
 1001. Rareș Răhăian
 1002. Rareș Răhăian
 1003. Rareș Răhăian
 1004. Rareș Răhăian
 1005. Rareș Răhăian
 1006. Luca Crețu
 1007. Cristian Crețu
 1008. Ariana Ilieș
 1008. Luca Crețu
 1009. Ariana Ilieș
 1010. Ariana Ilieș
 1011. Rareș Răhăian
 1012. Ariana Ilieș
 1013. Luca Crețu
 1014. Mara Ielciu
 1015. Mara Ielciu
 1016. Mara Ielciu
 1017. Rareș Răhăian
 1018. Mara Ielciu
 1019. Ariana Ilieș
 1020. Mara Ielciu
 1021. Luca Crețu
 1022. Rareș Răhăian
 1023. Luca Crețu
 1024. Luca Crețu
 1025. Mara Ielciu
 1026. Mara Ielciu
 1027. Ariana Ilieș
 1028. Mara Ielciu
 1029. Luca Crețu
 1030. Rareș Răhăian
 1031. Rareș Răhăian
 1032. Rareș Răhăian
 1033. Rareș Răhăian
 1034. Rareș Răhăian
 1035. Luca Crețu
 1036. Rareș Răhăian
 1037. Rareș Răhăian
 1038. Mara Ielciu
 1039. Rareș Răhăian
 1040. Mara Ielciu
 1041. Mara Ielciu
 1042. Ariana Ilieș
 1043. Ariana Ilieș
 1044. Ariana Ilieș
 1045. Luca Crețu
 1046. Ariana Ilieș
 1047. Luca Crețu
 1048. Mara Ielciu
 1049. Luca Crețu
 1050. Mara Ielciu
 1051. Mara Ielciu
 1052. Rareș Răhăian
 1053. Rareș Răhăian
 1054. Mara Ielciu
 1055. Luca Crețu
 1056. Rareș Răhăian
 1057. Rareș Răhăian
 1058. Rareș Răhăian
 1059. Luca Crețu
 1060. Rareș Răhăian
 1061. Rareș Răhăian
 1062. Rareș Răhăian
 1063. Mara Ielciu
 1064. Luca Crețu
 1065. Rareș Răhăian
 1066. Rareș Răhăian
 1067. Ariana Ilieș
 1068. Ariana Ilieș
 1069. Luca Crețu
 1070. Mara Ielciu
 1071. Ariana Ilieș
 1072. Mara Ielciu
 1073. Luca Crețu
 1074. Rareș Răhăian
 1075. Ariana Ilieș
 1076. Mara Ielciu
 1077. Luca Crețu
 1078. Mara Ielciu
 1079. Luca Crețu
 1080. Mara Ielciu
 1081. Luca Crețu
 1082. Mara Ielciu
 1083. Rareș Răhăian
 1084. Mara Ielciu
 1085. Mara Ielciu
 1086. Luca Crețu
 1087. Ariana Ilieș
 1088. Rareș Răhăian
 1089. Mara Ielciu
 1090. Luca Crețu
 1091. Rareș Răhăian
 1092. Luca Crețu
 1093. Ariana Ilieș
 1094. Luca Crețu
 1095. Ariana Ilieș
 1096. Rareș Cotoi
 1097. Ioana Gavrilă
 1098. Ioana Gavrilă
 1099. Ioana Gavrilă
 1100. Rareș Cotoi
 1101. Rareș Cotoi
 1103. Cosmin Pelea
 1104. Rareș Cotoi
 1105. Rareș Cotoi

1106. Rareș Cotoi	1128. Cristian Crețu	1150. Rareș Cotoi	1172. Rareș Răhăian
1107. Rareș Cotoi	1129. Cristian Crețu	1151. Rareș Cotoi	1173. Luca Crețu
1108. Rareș Cotoi	1130. Cristian Crețu	1152. Rareș Cotoi	1174. Rareș Răhăian
1109. Rareș Cotoi	1131. Cristian Crețu	1153. Rareș Cotoi	1175. Luca Crețu
1110. Rareș Cotoi	1132. Cristian Crețu	1154. Rareș Răhăian	1176. Cristian Crețu
1111. Rareș Cotoi	1133. Cristian Crețu	1155. Rareș Cotoi	1177. Luca Crețu
1112. Rareș Cotoi	1134. Cristian Crețu	1156. Rareș Cotoi	1178. Cristian Crețu
1113. Rareș Cotoi	1135. Cristian Crețu	1157. Luca Crețu	1179. Cristian Crețu
1114. Rareș Cotoi	1136. Cristian Crețu	1158. Rareș Cotoi	1180. Cristian Crețu
1115. Rareș Cotoi	1137. Cristian Crețu	1159. Luca Crețu	1181. Rareș Răhăian
1116. Rareș Cotoi	1138. Cristian Crețu	1160. Rareș Cotoi	1182. Cristian Crețu
1117. Rareș Cotoi	1139. Cristian Crețu	1161. Rareș Cotoi	1183. Cristian Crețu
1118. Rareș Cotoi	1140. Ioana Gavrilă	1162. Luca Crețu	1184. Luca Crețu
1119. Rareș Cotoi	1141. Cristian Crețu	1163. Rareș Cotoi	1185. Rareș Răhăian
1120. Cristian Crețu	1142. Cristian Crețu	1164. Rareș Cotoi	1186. Rareș Răhăian
1121. Cristian Crețu	1143. Cristian Crețu	1165. Rareș Răhăian	1187. Luca Crețu
1122. Cristian Crețu	1144. Rareș Cotoi	1166. Rareș Cotoi	1188. Cristian Crețu
1123. Cristian Crețu	1145. Rareș Cotoi	1167. Rareș Cotoi	1189. Rareș Cotoi
1124. Cristian Crețu	1146. Rareș Cotoi	1168. Luca Crețu	1190. Rareș Cotoi
1125. Cristian Crețu	1147. Rareș Cotoi	1169. Rareș Răhăian	1191. Cristian Crețu
1126. Cristian Crețu	1148. Rareș Cotoi	1170. Rareș Răhăian	
1127. Cristian Crețu	1149. Luca Crețu	1171. Cristian Crețu	