GÁBOR KASSAY – IN MEMORIAM

Petra Renáta Rigó and Ferenc Szenkovits

February 23, 2022

1 Life and scientific activity of Gábor Kassay (1956–2021)

Gábor Kassay was born on December 24, 1956 in Odorheiu Secuiesc (Székelyudvarhely). He studied elementary and high school in his hometown and mathematics at Babeş-Bolyai University in Cluj-Napoca (1976–1980). In 1994 he obtained his scientific degree in mathematics at the same university, with a thesis summarizing his researches on minimax problems, under the supervision of Professor József Kolumbán.

He started his teaching career in secondary schools in Cluj-Napoca (1980–1987) and continued at Babeş-Bolyai University as teaching assistant (1987–1990), assistant professor (1990–1995), associate professor (1995–2002, 2004-2005), professor (2005–2021). In the period 2002–2004 he was a visiting professor at Eastern Mediterranean University in Famagusta, Northern Cyprus.

His university lectures covered the following topics: mathematical analysis, optimization theory, functional analysis, operations research, convex analysis, game theory.

The list of publications of Gábor Kassai totals 87 scientific articles published in prestigious international journals such as: Mathematical Methods of Operations Research, SIAM Journal on Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, Nonlinear Analysis, Journal of Global Optimization; four books, five book chapters and a conference proccedings volume edited by him. His recognition is also indicated by the fact that he worked together with more than thirty-five coauthors from lot off different countries. His works total over 2000 citations, including several articles with over 100 independent citations. The complete list of his publications can be found at [28].

He was leader of successful group research programs, co-organizer of scientific conferences, leader of scientific seminars on analysis and optimization. He presented his results at several international conferences around the world.

In this article we try to present this special scientific personality through the testimonies of some of his collaborators.

2 Memories from coauthors

Gábor Kassay was a great master of scientific collaboration. He successfully established and maintained contacts with specialists involved in his fields of interest, publishing joint results with over thirty-five co-authors. The confessions presented below give us a real picture about his ability to establish scientific relationships, about his work style, as well as about the special man and friend who Gabi Kassay was for many.

József Kolumbán, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania:

I noticed Gábor Kassay from the first year of his studies as one of the most diligent and passionate about mathematics. In particular, his work capacity, intuitive mindset and task-solving skills were extraordinary. Already at that time excelled in finding examples and counterexamples. Although Gábor Kassay graduated from the university with excellent results and could be very useful and necessary in our faculty, he could not be appointed to the university in the circumstances of that time.

His interest in mathematical research kept him in Cluj even after graduating. He chose a high school in this university center, in order to be able to continue actively participating in the activities within the Tiberiu Popoviciu Scientific Seminar. This seminar was very helpful in Gabi's scientific activity throughout his career, he even published some of his first papers in the volumes of this seminar [1, 2]. It was at this time that we wrote our first collaborations [3].

Gábor Kassay's 1994 doctoral (PhD) dissertation was titled "New results in minimax theory applied to variational inequalities and optimization tasks". Throughout his career, the theory of equilibrium, which includes these types of tasks, has been the focus of his attention. It includes, among other topics, optimization, minimax problems, Nash-equilibrium, complementarity, fixed point tasks, variational inequalities, and many other problems in applied mathematics. Gábor Kassay has been publishing articles on this topic since the early 1990s [4, 5, 6], when the synthesizing name "equilibre theory" had not yet been born. Since then, this theory has evolved enormously. His practitioners have appeared all over the world, who publish hundreds of papers on this topic every year. Gabi has exploited this professional environment very cleverly. He had a working relationship with the best of the profession, from whom he learned a lot, and returned home and shared his experiences with his colleagues. His curiosity, polite action, reliability and dear manners helped him greatly in this regard.

By leaving, Gabi left a great void in my soul. He gave me one of the most beautiful gifts of my life by being a close colleague and friend for over 4O years.

Two years before his death, he presented me with a copy of the monograph on the latest results of the theory of equilibrium, including some of his own, written with Vicențiu Rădulescu [23], with the following dedication: "To my mentor, József Kolumbán, without whom this book (among many others) would not have been written. With friendly love, Gabi, Cluj, 2O19 March 7." In the Acknowledgements section of the book, the following sentence is included: "Gábor Kassay is indebted to Joseph Kolumbán, his former teacher and supervisor: their joint pepers and interesting discussions on equilibrium problems opened the author's interest toward this topic." These words are also evidence of Gabi's spiritual richness.

Zsolt Páles, University of Debrecen, Hungary:

"After the political changes in Hungary, in 1989, my first visit to Cluj-Napoca became possible in 1992 with a small group of mathematicians from Debrecen. In Cluj, we received a very warm welcome and immediately made friendship with many Hungarian and Romanian mathematicians. Being one of our hosts, Gábor Kassay spent a lot of time with us and we both realized that we had many fields of common interest. In particular, the theory of convexity, nonsmooth analysis and variational inequalities were in the focus of research for both of us. After this visit to Cluj, starting from the year 1995, I became a regular participant of the conferences organized by the Babeş-Bolyai University, I visited Cluj almost every year and Gábor also visited Debrecen several times to deliver seminar and conference lectures. I still have a vivid memory of our participation at the first Joint Conference of Mathematics and Computer Science in Illyefalva in 1995, where also József Kolumbán joined our discussions and the snooker games in the local pub of the village. Due to this active cooperation, we published our first paper with Gábor in 1999 [10], and then two further papers jointly also with József Kolumbán [11, 13]. These works still receive many citations, they are the most important papers for all of us.

Our friendship extended also to the friendship of our families. In the late '90s we had several joint vacations together. Our families were matching each other perfectly. Our daughters, Réka and Zsófi, our sons, Sankó and Csabi are exactly of the same age and were enjoying each other's company. Once we were in the mountains and found lots of blueberry in the field. Suddenly, our sons were running out of the bush crying that they were attacked by a bear. From a distance, we only could see that their faces were covered by blood. We were terrified, but once they got closer, it turned out that they painted their faces with smashed blueberry only. It was a lucky end, however we all know that meeting a bear in the Hargita mountains is not absolutely impossible.

The events that we shared keeps Gábor's memory in us. We still cannot understand and accept how and why all this happened to him. Nothing can compensate his loss. "

Rita Pini, University of Milano-Bicocca, and Monica Bianchi, Catholic University of the Sacred Heart, Milan:

"Gábor has been not only a great coworker, but especially a very dear friend during the last eighteen years.

We met him the first time in 2003, at the 18th International Symposium on Mathematical Programming in Copenhagen. After attending our lecture, he came to us and gave us a card with his e-mail address, since he was interested in the topic and, why not?, to begin a collaboration.

We wrote the first paper about the existence of equilibria via Ekeland's principle working at distance, via e-mail essentially [14].

But since then almost every year we succedeed in getting together for one week or more, in Milan, in general, and also by attending the same conferences. We also visited a few times Cluj, where he was always a thoughtful host, pleased to show us what he liked most in the nearby. We remember especially the trip to the Gorge, and we attach some pictures of that day. We skipped only the year of the birth of his children.

Our studies about well-posedness, stability of equilibria and generalized equations, regularization of variational inequalities and equilibrium problem, that have been finalized in twelve publications, usually took the start when we could discuss face-to-face, and went on by exchanging several e-mails. Only during the pandemia we got used to meet via web, and our last work was done completely in this way [26].

Many years passed by, but we keep vivid memories of several moments with him.

We will never forget his rigor, his eye for details, his intellectual honesty, but also his consideration for others, his good manners and his extreme courtesy. We will miss him a lot."

Figure 1: Gábor Kassay with Rita Pini and Monica Bianchi

Hans Frenk, Sabanci University, Istanbul, Turkey:

"My scientific collaboration with Gábor Kassay lasted from 1998 until 2008. During that period I visited Gabor almost every year in Kolozsvár and later for one time in Cyprus while Gábor visited me several times in Rotterdam at the Erasmus University. Our collaboration started due to our mutual acquaintance Tibor Illés from Eötvös University in Budapest. We shared a common interest in generalisations of convexity and related minmax theorems [9]. Gabor had a lot of experience in this field due to his work on generalisations of so-called K-convex functions and I was interested in extending the classical theory of minmax theorems and convexity. Also around that time I completed my work with my former Ph.D students J.Gromicho and A.I de Barros on the ellipsiod method and fractional programming involving quasiconvex functions. Since immediately we liked each other personally and felt together that our knowledge was complementary we started our collaboration. This collaboration would last for almost 10 years starting with our first paper appearing in Journal of Optimization Theory and Applications in 1999 [9] and ending with the last paper in the same journal in 2007 [17]. In total we wrote 7 joint published papers (also sometimes with other coauthors) and two book chapters of which the last one appeared in 2008 [16, 18]. During that time we also visited several conferences on generalisations of convexity presenting our work. After the publication of the last chapter in 2008 our scientific cooperation ended since we both felt that our work was finished and we continued separately with other research topics. Gábor with his work on variational inequalities and me on applications of stochastic processes and optimization in Operations Research. This was also partly caused by my transition to Sabanci University in Istanbul. Although we irregularly stayed in contact and even planned a kind of reunion to visit each other in either Istanbul or Kolozsvár this never happened due to our busy schedules. I regret now we never did this. I will remember Gábor not only as a dedicated and talented researcher but also on a personal basis as somebody who was very enthusiastic and curious about everything in life and his love for mountain climbing. A nice friendly and curious person and a scientific friend."

Qamrul Hasan Ansari, Aligarh Muslim University, India:

"Gábor Kassay visited Aligarh Muslim University, India in November 2017 and several times at King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia. We have several papers with our colleagues in KFUPM jointly with Gábor e.g. [24, 25]. He was also a consultant in a project at KFUPM with prof. Suliman Al-Homidan as PI [27]."

Radu Ioan Bot, University of Vienna, Austria:

"Gábor Kassay was a good friend and a great companion from the very early days of my academic career [15]. I have great memories with him from his visits

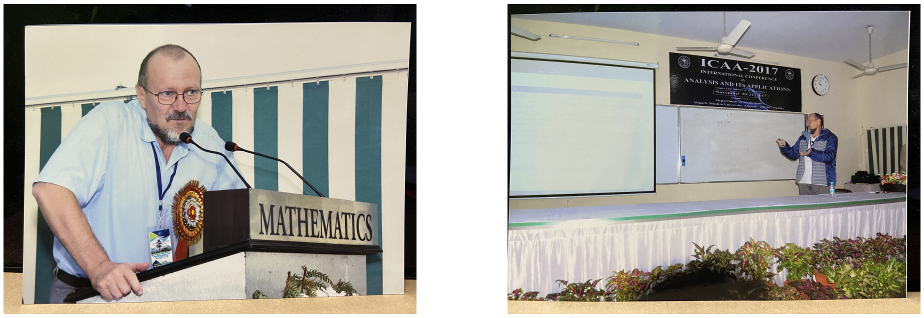


Figure 2: Gábor Kassay as Guest of Honour at the Opening Ceremony of the International Conference on Analysis and its Applications, 2017

in Chemnitz, and also from the various optimization conferences we jointly attended."

Figure 3: Gábor Kassay with Radu Ioan Bot

Cornel Pintea, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania:

"I first met Gabi Kassay in 1985 as a freshman student at Faculty of Mathematics, Babeş-Bolyai University, as he taught me and my group of colleagues a tutorial of Mathematical Analysis. Gabi Kassay was a teacher and researcher of high order. I certainly appreciated, during my first academic year, the rigorous and meticulous way in which he prepared and delivered his topics such as the Cantor sets, the Cantor intersection theorem, the structure of the open subsets of the real line, a Whitney type decomposition theorem, integrals and so on. At that time I also noticed his ability to enter the world of the students he taught as he considered himself and used to be considered by most of his students as part of their own world. His teaching activity has obvioulsy reached higher and higher levels, due to its own dynamic along the last decades, and its outcome consists in several realized and well establised former students. Such an accommodation with the students he taught was only possible through extraordinary communication skills. Therefore, I am also sure that he was widely appreciated by his students along the almost four decades of his teaching activity and most of them still remember his lectures.

The research component of his professional activity is also very reach and highly appreciated within the Mathematical Analysis community, with emphasis on Optimization, Variational Analysis and Equilibrium Problems, as his published scientific papers have great impact in this community. Indeed, Gabi has extensively published in national and especially in international journals with good standards and was the author of several books and book chapters among which we just mention here the monographs *The Equilibrium Problem and Related Topics* [12] and *Equilibrium Problems and Applications* [23]. The outcome of his research activity was significantly influenced, in my opinion, by his communication skills as he used to have direct contacts with his collaborators on a regular basis. In this respect he traveled a lot and used these opportunities, not only for mathematical production, but also to understand the local culture and the history of the communities he visited. I had several opportunities to observe this face of his cultural interests when we both traveled for common scientific events such as those in Isfahan (Iran) for a conference on Nonlinear Analysis and Optimization in 2009, in Pisa (Italy) for a workshop on Variational Analysis, Equilibria and Optimization organized, in May 2017, in the honor of his 60th birthday or in Granada (Spain) for a conference on Minimax Inequalities and Equilibrium Problems in May 2019. In fact Gabi was one of the greatest fruitful travelers, in professional purposes, in our department. Indeed the outcome of his research activity does not only reduces to his publications but is also visible through the PhD students he supervised who are currently occupying important positions both in Romania and abroad. Gabi has had an extensive coordination activity. Indeed, he coordinated 3 exploratory and research projects (IDEAS) obtained by competition at the national level, all with significant scientific output e.g. [19, 20, 21, 22]. Gabi was also the coordinator of the Analysis and Optimization Research Group within our Faculty of Mathematics and Computer Science, a group with important scientific production. Last, but not least, Gabi had an extensive editorial activity, being a member of the editorial board of 6 international journals."

Szilárd Csaba László, Technical University of Cluj-Napoca, Romania:

"Professor Gábor Kassay was my PhD supervisor, mentor and, last but not least, my good friend. He was full of zest and enthusiasm for living, he was driven by curiosity about new things. In his mathematical proofs he was characterized by strict logic and consistency, but at the same time he was able to pass on even the newly acquired knowledge to his students or colleagues.

During my doctoral studies, I had the opportunity to observe his attitude towards science and mathematics. I always listened to his scientific lectures

Figure 4: Gábor Kassay and Cornel Pintea in Iran

and refined explanations with great interest. He taught that not all mathematical results are worth publishing and that we should distinguish between really valuable and negligible mathematical results. He also showed me the importance of examples and counterexamples in a mathematical study. He shared the open questions and obstacles that arose during his research with his colleagues and friends. He was happy when someone could give a counterexample or an explanation. In such cases, he gladly involved the given person in his current research, he made no difference whether he was a student or a professor.

Personally, I can thank Gábor a lot. He introduced me into the world of research and taught me how to write a scientific article [21, 22]. Later, he was also my mentor in a postdoctoral project. He kept track of my scientific work, and I often held presentations at the research seminar he led. The loss of Gábor left a huge space behind, but his memory continues to live for us, those who knew him and respected his consciousness, helpfulness and optimism."

3 Concluding remarks

Gábor Kassay was driven by a desire to learn and discover new things. He also reached several places on each continent of the world and he shared many stories and experiences with his friends and colleagues. The presented memories show that Gábor Kassay was an excellent researcher, instructor, a good colleague and a great friend, whose loss leaves a hole in our hearts.

We would like to express our thanks to all who contributed to the realization

Figure 5: "Each time we embrace a memory we meet again with those we love" - unknown author

of this article through memories and useful recommendations.

References

[1] Kassay, G., *A fixed point theorem for generalized contractive mappings*, Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, **7**(1985), 93–100.

[2] Kassay, G., *On solvability of nonlinear Hammerstein equations*, Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, **7**(1985), 93–100.

[3] Kassay, G., Kolumbán, I., *Implicit functions and variational inequalities for monotone mappings*, Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis **7**(1989), 79–92.

[4] Kassay, G., *On Brézis-Nirenberg-Stampacchia's minimax principle*, Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis **7**(1991), 101–106.

[5] Kassay, G., *A simple proof for König's minimax theorem*, Acta Mathematica Hungarica **63**(1994), No. 4, 371–374.

[6] Illés, T., Kassay, G., *Farkas type theorems for generalized convexities*, Pure Mathematics and Applications **5**(1994), No. 2, 225–239.

[7] Joó, I. , Kassay, G., *Convexity, minimax theorems and their applications*, Annales Univ. Sci. Budapest. **38**(1995), 71–93.

[8] Illés, T., Kassay, G., *Perfect duality for K-convexlike programming problems*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **41**(1996), 69–78.

[9] Frenk, J. B. G., Kassay, G., *On classes of generalized convex functions, Gordan-Farkas type theorems and Lagrangian duality*, Journal of Optimization Theory and Applications **102**(1999), No. 2, 315–343.

[10] Kassay, G., Páles, Zs., *A localized version of Ky Fan's minimax inequality*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **35** (1999), No. 4, 505–515.

[11] Kassay, G., Kolumbán, J., Páles, Zs., *On Nash stationary points*, Publicationes Mathematicae Debrecen **54**(1999), No. 3-4, 267–279.

[12] Kassay, G., *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj, Romania, 2000, 113 pg. ISBN 973-656-023-6.

[13] Kassay, G., Kolumbán, J., Páles, Zs., *Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems*, European Journal of Operational Research **143**(2002), No. 2, 377–389.

[14] Bianchi, M., Kassay, G., Pini, R., *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **305**(2005), No. 2, 502–512.

[15] Boţ, R. I., Kassay, G., Wanka G., *Strong duality for generalized convex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **127**(2005), No. 1, 45–70.

[16] Frenk, J. B. G., Kassay, G., *Introduction to convex and quasiconvex analysis*, in: Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity, Series: Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. 76, Eds. N. Hadjisavvas, S. Komlósi, S. Schaible, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005, pp. 3–87. ISBN 0-387-23255-9

[17] Frenk, J. B. G., Kassay, G., *Lagrangian duality and cone convexlike functions*, Journal of Optimization Theory and Applications **134**(2007), No. 2, 207–222.

[18] Frenk, J. B. G., Kassay, G., *On noncooperative games, minimax theorems and equilibrium problems*, in: Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, Series: Springer Optimization and Its Applications, Athanasios Migdalas (Crete), Panos Pardalos (Florida), Leonidas Pitsoulis (London) and Altannar Chinchuluun (Florida) (Eds.), Vol. 17, 2008. XXII, pp. 53–94, ISBN: 978-0-387-77246-2.

[19] Kassay, G., Pintea, C., Szenkovits, F., *On convexity of preimages of monotone operators*, Taiwanese Journal of Mathematics **13**(2009), No. 2B, 675–686.

[20] Kassay, G., Pintea, C., *On preimages of a class of generalized monotone operators*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **73**(2010), No. 11, 3537–3545.

[21] Kassay, G., Pintea, C., László, Sz., *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization **60**(2011), No. 8-9, 1059–1069.

[22] Kassay, G., Pintea, C., László, Sz., *Monotone operators and first category sets*, Positivity **16**(2012), No. 3, 565–577.

[23] Kassay, G., Rădulescu, V.D., *Equilibrium Problems and Applications*, Series: Mathematics in Science and Engineering, Academic Press – an imprint of Elsevier, London-San Diego-Cambridge MA-Oxford, 2019.

[24] Al-Homidan, S., Ansari, Q.H., Kassay, G., *On sensitivity of vector equilibria by means of the diagonal subdifferential operator*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **20**(2019), No. 3, 527-537.

[25] Al-Homidan, S., Ansari, Q.H., Kassay, G., *Vectorial form of Ekeland variational principle with applications to vector equilibrium problems.* Optimization, **69**(2020), No. 3, 415–436.

[26] Bianchi, M., Kassay, G., Pini, R., *Regularization of Brézis pseudomonotone variational inequalities.* Set-Valued Variational Analysis **29**(2021), No. 1, 175–190.

[27] Al-Homidan, S., Ansari, Q.H., Kassay, G., *Bregman type regularization of variational inequalities with Mosco approximation of the constraint set.* Positivity **26**(2022), No. 3.

[28] Kása, Z., Rigó, R. P., Szenkovits, F., *Gábor Kassai (1956–2021) – In Memoriam and List of Publication*, Preprint, 2022.

KASSAY GÁBOR TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL

KOLUMBÁN JÓZSEF

February 23, 2022

Kassay Gábor tudományos tevékenysége a nemlineáris analízis következő fejezeteivel kapcsolatos: egyensúly-feladatok, numerikus módszerek monoton halmazértékű függvényekkel adott inkluziók közelítő megoldására, normálstruktúrával rendelkező Banach-terek és konvexitási struktúrák. Célom Kassay Gábor eredményeinek vázlatos ismertetése, inkább a tárgyalt kérdések kapcsolatait tartva szem előtt, mint a dolgozatok elemzését. Dolgozatainak idézésekor az ebben a kötetben szereplő, Kása Zoltán által készített publikációs jegyzéket használom az ottani csillagos számozás szerint.

1 A Tiberiu Popoviciu-szeminárium

A múlt század 70-es éveitől kezdve Romániában a gazdasági élet egyre súlyosabbá vált. Ennek következtében évről-évre kevesebb pénz jutott az oktatásra is. Az egyetemen, például, minden fejlesztést leállítottak, bér- és létszámstopot rendeltek el, a szakkönytárakban a nyugati folyóiratok megrendelését a minimum alá csökkentették, stb. A tudomány emberét különösen az utóbbi rendelkezések érintették fájdalmasan. A kitűnő szovjet matematikai iskola termékeihez olcsón hozzá lehetett jutni ugyan, de a világ más tájain megjelenő tekintélyes szakfolyóiratokat nem lehetett beszerezni. Ezért karunk matematikusai külföldi matematikai könyvtárakhoz folyamodtak segítségért. Legjobb dolgozataikat közlés végett nem küldték el külföldi lapkiadókhoz, hanem belőlük köteteket szerkesztettek, és azokat elküldték a külföldi könytáraknak, azzal a kötelezettségvállalással, hogy a dolgozatokat máshol nem publikálják. Mi "csak" annyit kértünk, hogy ők helyettünk fizessenek elő az általunk megjelölt folyóiratokra. Az ötlet bevált, és így több éven át hozzájuthattunk sok – számunkra fontos – külföldi folyóirathoz.

Ilyen körülmények között, amikor Kassay Gábor befejezte egyetemi tanulmányait, bár szükség lett volna rá, egyelőre nem lehetett kinevezni az egyetemre. Ő viszont nem akart lemondani álmairól, hogy ne csak oktassa, hanem kutassa is a matematikát. Tanulmányi eredményei alapján sok jó középiskolai állás közül választhatott volna más városban, e helyett választott egy szerényebb kolozsvári iskolát, ami lehetővé tette az analízis tanszéken működő Tiberiu Popoviciu-szeminárium látogatását. Ezen a szemináriumon heti rendszerességgel találkoznak olyan kolozsvári matematikusok, akik függvényapproximáció és alkalmazott matematikai kutatások iránt érdeklődnek. A résztvevők beszámolókat tartanak saját eredményeikről vagy más szerzők fontos közleményeiről. Gabi számára ezeken az összejöveteleken elhangzott előadások jelentették a "posztgraduális képzést".

Így vagy úgy, a Popoviciu-szemináriumon való résztvétel indukálta első másfél tucatnyi dolgozatát, amelyek nagy része a fent említett csereakció keretében összeállított kötetekben szerepel, de köztük van az első belföldi [∗2] és az első külföldi folyóiratban megjelent [∗6] dolgozata is. A [∗2] dolgozatra alább még visszatérünk. A [∗6] dolgozatban Gabi választ adott egy külföldi szerző eredményeinek bemutatása után kialakult eszmecserén megfogalmazott kérdésre.

Az említett kötetekben közölt dolgozatok közül itt csak a [∗17] dolgozatra térek ki, mert a benne tárgyalt kérdés kulcsszerepet játszik az egyensúlyelméletben. Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz 1929-ben, a róluk elnevezett KKM-lemma felhasználásával új bizonyítást adtak Brouwer fixponttételére. Ez a lemma a következőt állítja. Legyenek $u_1, \dots, u_n$ valamely véges dimenziós valós normált E tér rögzített elemei, és a zárt $C_i \subseteq E$ $(i = 1, \dots, m)$ részhalmazok rendelkezzenek azzal a tulajdonsággal, hogy minden $k \le n$ pozitív természetes szám és minden $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ esetén az $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ konvex burkolója benne van a $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_k}$ halmazban. Ekkor $C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$.

1961-ben Ky Fan a KKM-lemmát a következőképpen általánosította végtelen dimenziós terekre. Legyen E valós Hausdorff topologikus vektortér és X nemüres részhalmaza E-nek. Azt mondjuk, hogy a $F : X \to 2^E$ halmazértékű függvény végesen zárt, ha $F(x) \cap L$ az euklidészi topológia szerint zárt, minden $x \in X$ és E minden véges dimenziós L altere esetén. A F függvény KKM-tulajdonságú, ha X minden $\{x_1, \dots, x_n\}$ véges részhalmazának konvex burkolója részhalmaza az $F(x_1) \cup \dots \cup F(x_n)$ halmaznak. Ky Fan [10] szerint, ha F értékei zárt halmazok, és létezik olyan $\overline{x} \in X$, hogy $F(\overline{x})$ kompakt, akkor a KKM-tulajdonságból következik, hogy az $F(x)$ halmazok keresztmetszete nem üres. Következésképpen, ebben az esetben, a KKM-tulajdonságból következik a végesmetszet-tulajdonság, vagyis az $F(x_1), \dots, F(x_n)$ halmazoknak van közös pontja, minden $x_1, \dots, x_n \in X$ esetén. Nem nehéz igazolni, hogy ennek az állításnak a fordítottja nem igaz, ha $E = \mathbb{R}$ (lásd [∗90], Example 3.1). Felmerül tehát a kérdés: hogyan lehetne jellemezni a végesmetszet-tulajdonságot? A [∗17] dolgozat a KKM-tulajdonság megfelelő általánosításával választ ad erre a kérdésre.

Legyen X tetszőleges nemüres halmaz és E valós Hausdorff topologikus vektortér. Értelmezés szerint, az $F : X \to 2^E$ függvény általánosított KKM-tulajdonságú, ha X minden nemüres $\{x_1, \dots, x_n\}$ véges részhalmazához hozzá lehet rendelni az E olyan nemüres $\{y_1, \dots, y_n\}$ részhalmazát, amelyre minden $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ részhalmaz konvex burkolója részhalmaza a $F(x_{i_1}), \dots, F(x_{i_k})$ halmazok egyesítésének. A [∗17] dolgozat szerint ez a tulajdonság egyenértékű a végesmetszet-tulajdonsággal, ha F értékei végesen zártak. Érdekes, hogy ez az állítás szerepel az egy évvel később megjelent [7] dolgozatban is, viszont [∗17] említése nélkül. Később, egyensúly-feladatok tárgyalásánál több szerző használta az általánosított KKM-tulajdonság fogalmát és a vele kapcsolatos végesmetszet-tételt, hivatkozva a [∗17] dolgozatra is (lásd például [36]).

2 A minimax tételektől az egyensúlyfeladatokig

Kassay Gábor 1994-ben megvédett doktori (PhD) disszertációjának címe: *Új eredmények a minimax elméletben, alkalmazva variációs egyenlőtlenségekre és optimalizálási feladatokra.* Pályafutása során az ilyen típusú feladatokat magába foglaló *egyensúlyelmélet* volt figyelmének középpontjában. Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálás, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementaritás, a fixpont és a variációs egyenlőtlenségekre vonatkozó feladatokat. Mivel az egyensúlyfeladat fogalma és elmélete a játékelméletből sarjadzott ki, célszerű néhány szóban erre kitérni.

Az első játékelméleti cikket a modern halmazelmélet egyik megalapozója, Zermelo írta 1913-ban a sakkjáték matematikájáról. Emile Borel, 1921 és 1927 között, három rövid jegyzetben foglalkozott először a kétszemélyes, nulla összegű játékok matematikai modellezésével, ahol az egyik játékos nyeresége a másik vesztesége: $f_1(s_1, s_2) = -f_2(s_1, s_2)$, minden (s_1, s_2) stratégiapárra, ahol f_1 és f_2 a játékosok stratégiafüggvényei. Ez a feltétel teljesül a sakkban és a társasjátékok többségében (például a kártyajátékokban). A legegyszerűbb játék a "fej vagy írás": mindkét játékos egyidejűleg letesz az asztalra egy 100 Ft-os érmét. Ha a letett érmék felső oldala ugyanolyan, akkor az 1. játékos elnyeri a 2. játékos érméjét; ha különbözők, akkor a 2. játékos nyeri el az 1. játékos érméjét. Fent említett jegyzeteiben Borel megfogalmazta az ilyen típusú játékok egyensúlyi megoldásának fogalmát. Ez a következőt jelenti: az 1. játékos bármilyen s_1 stratégiát választ, a $\min\limits_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ mennyiségnél többet nem kaphat, ha a 2. játékos vele szemben a legjobban játszik. Az 1. játékos ezt a mennyiséget akarja maximalizálni, azaz $\max\limits_{s_1 \in S_1} \min\limits_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ értéket akarja elérni, ahol S_1 és S_2 a játékosok stratégiahalmazai. Hasonlóan gondolkodik a 2. játékos is: az 1. játékos $\max\limits_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ maximális nyereményét akarja a minimumon tartani, azaz $\min\limits_{s_2 \in S_2} \max\limits_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ értéket akar elérni. Ha teljesül a

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} f(s_1, s_2)$$

egyenlőség, ahol $f = f_1$, akkor azt mondjuk, hogy a minimax játékfeladatnak van megoldása.

A fej vagy írás játékban azonban nincs minimax megoldás, legalábbis az eredeti stratégiatérben. Ezen segít az ún. randomizálás, vagyis a kevert stratégiák alkalmazása. Például, az 1. játékos p valószínűséggel választ fejet és $1 - p$ valószínűséggel írást, ellenben a 2. játékos, az 1. játékos választásától függetlenül, q valószínséggel választ fejet és $1 - q$ valószínséggel írást. (Tudjuk, hogy a kevert stratégia hasznosságát már a XVIII. század elején ismerték.) Borel az előbbi egyszerű megfigyelést általánosítva, megfogalmazta a kevert stratégiájú minimax tételt (ahol a stratégiafüggvény bilineáris és a stratégiahalmazok szimplexek), de bizonyítást rá nem adott. Ezt a feladatot a berlini műegyetemen alkalmazott, 25 éves Neumann János (akkori nevén Johann von Neumann) oldotta meg abban az általánosabb esetben, amikor az f stratégiafüggvény s_1 szerinti felső és s_2 szerinti alsó nivóhalmazai konvex halmazok (mai szóhasználattal, s_1 szerint kvázikonkáv és s_2 szerint kvázikonvex). Rendkívül leleményes bizonyítása, amelyet német nyelven közölt a [31] dolgozatban, a teljes indukció módszerén alapul. Ugyanakkor közölt erről egy rövid, francia nyelvű [32] cikket is, de ebben csak a Borel-féle modellről van szó, ahol a stratégiafüggvény bilineáris, és bizonyítás nélkül kijelenti a minimax tételt. A [31] dolgozat csak 1959 után vált közismertté, amikor megjelent az angol nyelvű fordítása [35]. A matematikusok többsége számára ezután vált nyilvánvalóvá, hogy a kvázikonkáv és a kvázikonvex függvényeket elsőként Neumann János használta, anélkül, hogy nevet adott volna ezeknek a fogalmaknak.

Később, a náci Németországból menekülő Neumann János a princetoni Institute for Advanced Studiesban kapott állást. A harmincas évek második felében többször látogatott Bécsbe, ahol Oskar Morgenstern közgazdasági szimpóziumokat szervezett. Ezeken tevékenyen részt vett, többek között, a modern matematikai statisztika egyik megalapítója, a kolozsvári származású Wald Ábrahám is. Az egyik ilyen szimpóziumon Neumann János bemutatta a közgazdaságtan első növekedési modelljét [34], amely a Brouwer-féle fixponttételre alapult (1941-ben S. Kakutani, Neumann bizonyítását elemezve, fedezte fel a nevét viselő fixponttételt). Ebből az együttműködésből született a nagy hatású [33] könyv is. Ez a könyv hozzájárult ahhoz, hogy a második világháborút követő években az operációkutatás hatalmas fejlődésnek indult, nemcsak a közgaszdászok, hanem a matematikusok körében is. Új numerikus módszerek jelentek meg (szimplex módszer, belső pontok módszere, stb.), és az elméleti kutatások is jelentősen megszaporodtak.

A matematikus, ha egy új tételt meg akar érteni, nem elégszik meg a bizonyítás megértésével. Ilyenkor rendszerint három utat követ. Először a tétel értelmét sajátos esetekben vizsgálja, ezután más bizonyításokat keres, majd próbálja a tételt általánosítani, abból az elvből kiindulva, hogy minden javítható (és ha kell, javítandó), amit ember teremtett. A minimax tétel általánosításainak hosszú és érdekes története van, amiről, például [43]-ben olvashatunk. A minimax tételek elméleti fontossága abból is látszik, hogy a konvex analízis nagy része ilyen tételeken alapul (lásd [42]).

Amint említettem, a [31] dolgozatban szereplő minimax tételben a stratégiafüggvény szimplexek szorzatán értelmezett kvázikonvex-kvázikonkáv, folytonos függvény. Az általánosítások ezeken a feltételeken lazítanak. Az egyik fontos általánosítás a [8] dolgozatban szerepel, amelyben a stratégiafüggvény lokálisan konvex terek konvex részhalmazainak szorzatán értelmezett folytonos kvázikonkáv-kvázikonkáv függvény. Egy évvel később, Ky Fan a [9] dolgozatban a kvázikonkáv-kvázikonvex tulajdonságot egy általánosabb konvexitási feltétellel helyettesítette. Ezt H. König [19] tovább általánosította a „König-konvex függvény" fogalomának felhasználásával. Ezeket a fogalmakat a következőképpen értelmezzük: Legyen A tetszőleges, nemüres halmaz. Az $f : A \to R$ függvény Ky Fan-konvex, ha minden $a_1, a_2 \in A$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $a_3 \in A$, hogy $f(a_3) \leq (1-\lambda)f(a_1) + \lambda f(a_2)$. Ha ez a feltétel csak $\lambda = 1/2$ esetén kell teljesüljön, akkor f König-konvex. Az előbbi fogalomból nyilván következik az utóbbi, de fordítva nem igaz. Viszont, ha A szekvenciálisan kompakt topologikus tér és f alulról félig folytonos, akkor a két fogalom megegyezik (lásd [∗23]). Ky Fan [10] bizonyított először minimax tételeket több stratégia-függvény esetén.

Ugyanakkor, az egyensúlyelméletben megjelentek olyan tételek is, amelyekben a „konvex halmaz" szerepét a topológiából ismert „összefüggő halmaz" fogalma veszi át. Wu [52] rámutatott, hogy olyan minimax tétel is bizonyítható, amelyben a szakaszok szerepét bizonyos Jordan-görbék játsszák. Néhány évvel később Joó István [16] a nívóhalmazok módszerével ilyen típusú, egyszerű és elegáns bizonyítást adott Neumann János tételére. Ennek hatására Stachó László [26] és Komornik Vilmos [25] olyan minimax tételeket bizonyított, amelyekben a stratégiafüggvény ún. intervallum tereken értelmezett. Ezek topologikus terek, amelyeken az algebrai műveleteket az „összefüggés" tulajdonsága helyettesíti (lásd [21], [22], [27], [48], [49]). Kassay Gábor [∗48] dolgozatában minimax feladatok esetén a [∗26]-ban tárgyalt egyensúlyelvet kiterjeszti intervallumterekre. Ezt felhasználva és Joó István [15]-ban közölt minimax tételét általánosítva, rámutat arra, hogy a konvex analízisben ismert dualítási tételek topológiai természetűek. Ugyancsak a [∗26] dolgozat eredményeit általánositják mértéktereken értelmezett minimax feladatok esetén az [∗50] dolgozatban.

A Neumann János tételének előbbi általánosításai mellett fontosnak tartom megemlíteni a következő eredményeket:

– H. Weyl bilineáris stratégiafüggvény esetén a minimax-tételt a Farkas Gyula alternatíva tételével ekvivalens, végesen generált kúpokra vonatkozó saját tételével bizonyította [51];

– C. Berge a nemlineáris alternatívatételt véges számú, zárt konvex halmaz metszetére vonatkozó saját tételével bizonyította [1];

– M. Sion nemlineáris minimax tétel bizonyításában először alkalmazta a KKM lemmát olyan kétváltozós stratégiafüggvények esetén, amelyekre az első változó szerinti felső, illetve a második változó szerinti alsó nívóhalmazok zárt konvex halmazok [39];

– J. Kindler a minimax tételek és a halmazértékű függvényekre vonatkozó metszettételek közötti kapcsolatra mutatott rá ([19]- [23]);

– S. Simons bizonyította, hogy végtelen dimenziós terek esetén a minimax-tételek és a gyenge kompaktság között szoros kapcsolat van [40]-[45].

3 Egyensúlyfeladatok megoldásainak létezése és közelítő kiszámítása

Ky Fan [11] lokálisan konvex tereken értelmezett stratégiafüggvényekre bizonyított *minimax egyenlőtlenségek* megoldhatóságára vonatkozó tételeket. Ezek ekvivalensek Tikhonov fixponttételével, és alkalmazhatók a Nash-féle egyensúly-feladatokra is, ezért az ilyen típusú minimax feladatokat ma egyensúlyfeladatoknak nevezzük. Az utóbbi dolgozatban bizonyított tétel volt az egyensúlyfeladatokra vonatkozó első általános érvényű létezési tétel. Az "egyensúlyfeladat" elnevezés először W. Oettli és munkatársai által közölt [2, 29, 30] dolgozatokban fordul elő.

A minimax egyenlőtlenség tétele [11] szerint a következő: Legyen X Hausdorff topologikus vektortér, K legyen X-nek nemüres kompakt, konvex részhalmaza, és a $f : K \times K \to \mathbb{R}$ függvény teljesítse a következő feltételeket:

(a) $f(x, x) \geq 0$,

(b) minden rögzített $x \in K$ esetén $f(x, .)$ kvázikonvex,

(c) minden rögzített $y \in K$ esetén $f(., y)$ felülről félig folytonos.

Ekkor létezik olyan $x^* \in K$, amelyre $f(x^*, y) \geq 0$, bármely $y \in K$ esetén.

Mivel differenciál operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek esetén a (c) feltétel nem teljesül, H. Brézis, L. Nirenberg és G. Stampacchia [5] az előbbi tételt úgy általánosítta, hogy az legyen alkalmazható azokra is.

Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálási, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementarítási, a fixpont feladatokat, a variációs egyenlőtlenségeket. Ezeknek a feladatoknak egységes matematikai modellje a következőképpen fogalmaható meg. Legyen A és B két nemüres halmaz és $f : A \times B \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az $\bar{x} \in A$ elemet egyensúlypontnak nevezzük, ha

$$\text{(EF)} \qquad f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \ \forall y \in B.$$

Az (EF) Minty típusú duálisa a következő: létezik-e $\bar{y} \in B$, amelyre

$$\text{(DF)} \qquad f(x, \bar{y}) \leq 0, \ \ \forall x \in A?$$

Amint Komlósi Sándor [24] igazolta, előfordulhat, hogy ugyanolyan feltételek mellett (EF)-nek van megoldása, de (DF)-nek nincs. Ha viszont $A = B$ és az f monoton, azaz

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \ \forall x, y \in A,$$

továbbá f minden szakaszon felülről félig folytonos a második változóra nézve, akkor a két probléma egyenértékű.

Az egyensúlyelmélet tárgya az egyensúlypontok létezésének és tulajdonságainak vizsgálata, valamint azok (közelítő) kiszámítása. Az elméleti kérdések tisztázása mellett, a gadasági, a mechanikai, az elektrodinamikai és a mérnöki tudományok területén talált fontos alkalmazások szintén serkentik az egyensúlypontok tanulmányozását. Nem csoda tehát, hogy az utóbbi években az egyensúlyelmélet iránti érdeklődés megsokszorozódott. A matematika különböző fejezeteiben megjelenő egyensúly-feladatok közül példaként megemlítek néhányat.

1) *Minimalizálás*

Legyen X nemüres halmaz és $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adott függvény. A kérdés az, hogy milyen feltételek mellett igaz a következő állítás:

$$\exists \bar{x} \in X,\ h(\bar{x}) \leq h(y), \forall y \in X.$$

Ha $K := \{x \in X : h(x) < +\infty\}$ és $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := h(y) - h(x)$ minden x, $y \in K$ esetén, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a mimimalizálási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

2) *A fixpont feladat*

Legyen X valós Hilbert tér a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalár szorzattal, és K legyen a X kompakt részhalmaza. A $T : X \to 2^X$ halmazértékű függvényre vonatkozó fixpont feladat a következő állításra vonatkozik:

$$\text{(FPF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ \bar{x} \in T(\bar{x}).$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \max_{u \in T(x)} \langle x - u, y - x \rangle$; x, $y \in K$ függvényt, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása az (FPF) fixpont feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

3) *A komplementarítási feladat*

Az X valós vektortér valamely K részhalmaza *kúp* , ha $tx \in K$ valahányszor $t \geq 0$ és $x \in K$. Legyen X topológikus vektortér, $K \subseteq X$ egy zárt konvex kúp, és legyen $K^* := \{x \in X^* : \langle x, y \rangle \geq 0$, ha $y \in K\}$ annak duális kúpja, ahol X^* a X duális tere és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualítási függvény. Adott $T : K \to X^*$ operátor esetén a komplementárítási feladat a következő:

$$\text{(KF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ T(\bar{x}) \in K^*, \quad \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0.$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \langle T(x), y - x \rangle$, ha x, $y \in K$ függvényt, az $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a (KF) komplementási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

4) *Variációs egyenlőtlenségek*
Az előbbi jelöléseket használva, a variációszámítási feladat a következő:

$$\exists \bar{x} \in K, \langle T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0,\ \forall y \in K$$

Könnyen belátható, hogy ez a feladat a komplementaritási feladat általánosítása.

5) *A nyeregpont (minimax) feladat*

Legyen X, Y két nemüres halmaz és $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ adott függvény. A $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ elempár *nyeregpontja* h-nak az $X \times Y$ halmazon, ha

$$h(x, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, y), \ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Legyen $A = B = X \times Y$ és $f : A \times B \to \mathbb{R}$,

$$f(a, b) := h(x, v) - h(u, y), \quad a = (x, y), \, b = (u, v).$$

6) *Nash-féle egyensúlyfeladat nemkooperatív játékok esetén*

A nemüres X_i, $i = 1, 2, ..., n$, halmazokkal értelmezzük az $X := X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ halmazt és a $h_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, függvényeket. Az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in X$ vektort a $h_1, h_2, ..., h_n$ függvények által meghatározott *Nash-egyensúlypontnak* nevezzük, ha minden $i = 1, 2, ..., n$ esetén fennáll a

$$h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n) \geq h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n), \quad \forall x_i \in X_i$$

egyenlőtlenség.

Az $f : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény értékét az $x = (x_1, ..., x_n)$ és $y = (y_1, ..., y_n)$ által meghatározott pontban az

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^{n} [h_i(x_1, ...x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - h_i(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)]$$

egyenlőséggel értelmezzük. Könnyen belátható, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ akkor és csak akkor egyensúlypontja f-nek, ha a $h_1, ..., h_n$ függvények által meghatározott Nash-egyensúlypont.

A konvex függvény fogalmának Ky Fan és König-féle általánosításai bizonyos algebrai relációk segítségével történnek. Kassay Gábor művei közül néhány ilyen típusú feltételeket tartalmaz. Például, a [$*$26] dolgozatban az előbbieknél általánosabb algebrai feltétel szerepel. Ennek a dolgozatnak tulajdonképpeni tárgya az egyensúlyfeladattal kapcsolatos „supinf-feladat". Ez a feladat a következő: adott $f : A \times B \to \mathbb{R}$ függvény esetén milyen feltételek mellett teljesül a

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \geq 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenség? Ha ez az egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f teljesíti az supinf-feltételt. Minimax feladatok esetén a supinf-feltétel a

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) = \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y)$$

következő egyenlőséget jelenti.

A fenti kérdésre adott válasz a konkáv függvény fogalmának következő általánosításán alapul: Az $f : A \times B \to \mathbb{R}$ függvény konkáv-szerű az A halmazon, ha létezik a $[0, 1]$ intervallumnak olyan T sűrű részhalmaza, amelyre

$$\sup_{x \in A} \min_{1 \leq j \leq m} f(x, y_j) \geq \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i, y_j), \tag{2}$$

minden $s_1, \dots, s_n \in T$, $\sum_{i=1}^n s_i = 1$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $y_1, \dots, y_m \in B$ esetén. Az f függvény konvex-szerű a B halmazon, ha $-f$ konkáv-szerű a második változóra nézve. (Az eredeti értelmezésben $T = [0,1]$.)

Hasonló fogalmak – bizonyos sajátos esetekben – szerepeltek korábban is a [3], [46] illetve [47] dolgozatokban.

A Hahn-Banach tétel véges dimenziós változatával igazolható, hogy ha $B = \{y_1, \dots, y_m\}$ és az f konkáv-szerű, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy

$$\sup_{x \in A} \sum_{j=1}^m t_j f(x, y_j) \geq 0,\ \forall\, t_1, \dots, t_m \in T,\ \sum_{j=1}^m t_j = 1. \tag{3}$$

A következő tételben szerepelnek az alábbi tulajdonságok. Az f teljesíti a gyenge zártsági feltételt, ha a $\sup_{x \in A} \inf_{y \in F} f(x,y) \geq 0$, minden $F \subseteq B$ véges részhalmaz esetén, maga után vonja az (1) egyenlőtlenséget. Az f teljesíti az erős zártsági feltételt, ha minden $F \subseteq B$ véges részhalmaz esetén a $\sup_{x \in A} \inf_{y \in F} f(x,y) \geq 0$ maga után vonja azt, hogy létezik $x \in A$, amelyre $f(x,y) \geq 0$ minden $y \in B$ esetén.

A [$*$26] dolgozat főtétele szerint ha f az A halmazon konkáv-szerű és teljesül a gyenge zártsági feltétel, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy (3) igaz minden $\{y_1, \dots, y_m\} \subset B$ esetén. Továbbá, ha az erős zártsági feltétel is teljesül, akkor az egyensúly feladat megoldhatósága az jelenti, hogy (3) teljesül minden $\{y_1, \dots, y_m\} \subset B$ esetén.

Könnyen belátható, hogy ha $B \subset A$ konvex halmaz, f konvex a B-n, és $f(y,y) \geq 0$ minden $y \in B$ esetén, akkor (3) teljesül minden $\{y_1, \dots, y_m\} \subset B$ esetén.

Továbbá, abban az esetben amikor az A kompakt topologikus tér és f felülről félig folytonos az A-n, akkor teljesül az erős zártsági feltétel. A fenti tétel második része úgy tekinthető mint a Weierstrass tétel általánosítása. Valójában az említett tétel egy skalarizációs elvet fejezi ki.

A [$*$26] dolgozat, többek között, a következő okok miatt is figyelemre méltó:

1) A benne értelmezett konvexítási fogalom általánosabb, mint a König-konvexitás, és a topológiai feltételek is kevésbé megszorítóak, mint például a [9], [26] és más – algebrai egyensúly feltételeket tartalmazó – dolgozatokban. Fontos, hogy [$*$26]-ban a stratégiafüggvény értelmezési tartománya nem rendelkezik sem topológiai sem algebrai struktúrával.

2) A [$*$26]-ban vizsgált supinf-egyenlőtlenség az egyensúlypont létezésének olyan szükséges feltételét fejezi ki, amely elégséges is, ha a minimum létezésére vonatkozó Weierstrass-tétel alkalmazható, például, ha A kompakt és f az első változóra nézve felülről féligfolytonos. (A természet mindig egyensúlyra törekszik, de nem mindig éri azt el.)

3) A [$*$26] tételeiből könnyen levezethetők az operációkutatás alaptételei (Gordan-tétel, Farkas-tétel, Neumann János minimax tétele, Fritz John tétele, Karush–Kuhn–Tucker-tétel, stb.) (lásd [$*$40]).

4) Ezek a tételek alkalmazhatók végtelen programozási és vektoregyensúly feladatokra is (lásd [12],[13],[28],[$*$90]).

5) A használt matematikai apparátus egyszerű, mindössze a Hahn–Banach-tétel véges dimenziós változatára van szükség.

6) Ha $B \subseteq A$ és f mint kétváltozós függvény monoton, akkor [∗26] tételeiből rögtön következik az egyensúlyelméletben ismert dualitási tétel.

7) A lineáris és/vagy topológiai struktúrával nem rendelkező absztrakt konvexitási tereken értelmezett egyensúlyfeladatok tárgyalásának ez az egyik legegyszerűbb modellje (lásd [14]-[23], [∗20], [∗22]-[∗25], [∗29], [∗31], [∗32], [∗41], [∗42], [∗48], [∗55], [∗58], [∗61], [∗62], [∗66], [∗70]).

8) A [∗26] dolgozat alapötlete nagyon egyszerű. Ha a minimax feladatot diszkretizáljuk, akkor egy Borel-típusú mátrixjátékhoz jutunk. Ennek randomizált alakja szimplexek szorzatán értelmezett bilineáris stratégiafüggvénnyel van megadva, ezért Neumann János tétele szerint létezik legalább egy megoldása. Ha a diszkretizálást tetszőlegesen változtatjuk, akkor az így megszerkesztett megoldások halmazának segítségével a stratégiafüggvényre vonatkozóan megfogalmazható egy egyszerű feltétel (a supinf-konkavitás), amely egy zártsági feltétellel együtt garantálja a supinf-feladat megoldhatóságát.

9) A [∗26] dolgozat pedagógiai szempontból is érdekes, mert a használt matematikai apparátus viszonylag egyszerű és az eredmények hatósugara nagy. Ezek könnyen kiterjeszthetők, például, vektor- vagy halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúlyfeladatokra is (lásd [∗90] és [∗91]).

Az egyensúly-elmélet fontos része az egyensúlypontok közelítő kiszámítására vonatkozik. A gyakorlatban egy ilyen feladat általában nem egyszerű. Ennek okai közül csak hármat említek: Lehet, hogy a felhasznált módszerek jobb analítikai feltételeket követelnek, mint amivel az egyensúly-feladat adatai rendelkeznek. Még összetettebb a feladat, ha az adatai csak közelítőleg ismertek. Az is előfordul, hogy a feladat rosszul fogalmazott (ill-posed). Ilyenkor a mentőöv az lehet, ha a feldatot „regularizáljuk”, vagyis olyan feladat-sorozattal helyettesítjük, amelynél az említett nehézségek eltűnnek, és a megfelelő megoldások konvergálnak az eredeti feladat megoldásához, ha az létezik. Több ilyen regularizációs módszert ismerünk. Ezek közül legismertebbek a Tikhonov-féle, a Bregman-féle és a projekciós módszerek. Ezeknél a regularizáló függvények

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{k}\theta(x, y)$$

alakúak, ahol θ megfelelő tulajdonságokkal rendelkező függvény (lásd például [∗90], 11.5 Tétel). Kassay Gábor közelítő módszerekkel kapcsolatos eredményei közül fontosak valós- vagy halmazértékű függvényekre vonatkozó alábbi eredményei.

A [∗71] dolgozatban a Bregman-féle iteratív regularizációs módszerrel létezési és egyértelműségi tételeket bizonyítanak egyensúlyfeladatokra, reflexív Banach-terek zárt konvex részhalmazain értelmezett függvények esetén. Bizonyítják, hogy a megszerkesztett iteratív sorozat tagjaiból képzett halmaz minden gyenge torlódási pontja megoldása az adott egyensúly-feladatnak.

A [∗84] dolgozatban valós Hilbert-tereken értelmezett Brézis- pszeudomonoton kétváltozós függvényekkel megfogalmazott egyensúly feladatok megoldására egy új Popov-típusú iteratív módszer gyenge és erős konvergenciáját tanulmányozzák.

4 Halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúly-feladatok

Az 1980-ban megvédett *Rockafellar algoritmusa* című államvizsga-dolgozatában Kassay Gábor a következő feladatot tárgyalta.

Legyen H valós Hilbert tér. R. T. Rockafellar algoritmusa olyan eljárás, amellyel közelítőleg meghatározhatjuk valamely *maximálisan monoton* $T : H \to 2^H$ halmazértékű operátor zérushelyeit, vagyis azokat a $\bar{x} \in H$ pontokat, amelyekre $0 \in T(\bar{x})$.

Az algoritmus egy olyan $\{x_k\} \subset H$ sorozat megszerkesztéséből áll, ahol valamely $x_0 \in H$ pontból kiindulva az x_{k+1} pontot úgy értelmezzük mint a T_k operátor egyetlen zérushelye, ahol

$$T_k(x) = T(x) + \gamma_k(x - x_k)$$

itt $\{\gamma_k\}$ egy pozitív tagú korlátos valós számsorozat, amelynek tagjait regularizációs együtthatóknak nevezzük.

Rockafellar [37] bizonyította, hogy ha T maximálisan monoton és léteznek zérushelyei, akkor az $\{x_k\}$ sorozat gyengén konvergál a T valamelyik zérushelyéhez. Ha nincsenek zérushelyek, akkor a megszerkesztett sorozat nem korlátos.

1985-ben jelent meg Kassay Gábor első tudományos dolgozata [$*$2], amelyben Rockafellar módszerét kiterjesztette reflexív Banach-terekre. Ebben a kérdéskörben később még néhány érdekes dolgozatot publikált társszerzőkkel.

A [$*$46] dolgozatban reflexív Banach-tereken értelmezett, maximálisan monoton halmazértékű függvények Browder-típusú regularizálásával szerkesztett közelítő módszer stabilítását vizsgálták, ha az eredeti adatok szintén csak közelítőleg ismertek. Eredményeik magukba foglalják Rockafellar módszerének általánosítását arra az esetre, amikor az eredeti függvény Mosco-approximációval adott.

Az [$*$53] dolgozatban a [$*$2] eredményeit általánosítják reflexív Banach-téren értelmezett nem maximálisan monoton halmazértékű függvényekre. Rockafellar módszeréhez hasonló eljárással, a Bregman [4] távolságfüggvény felhasználásával olyan iteratív sorozatot szerkesztenek, amely gyengén konvergál egy megoldáshoz. Eredményeiket alkalmazzák rosszul fogalmazott (ill-posed) variációs egyenlőtlenségekre, továbbá olyan monoton (de nem maximálisan monoton) halmazértékű függvényekre, amelyek grafikonjai szekvenciálisan gyengén zártak, és olyan konvex optimalizálási feladatokra, amelyben az adatok csak közelítően vannak meghatározva.

A [$*$64] dolgozatban az [$*$53]-ben alkalmazott módszerrel erősen monoton, pszeudomonoton, illetve hemifolytonos többértékű függvényekkel értelmezett variációs egyenlőtlenség-rendszerek közelítő megoldására erősen konvergáló sorozatot szerkesztettek.

A [∗86] dolgozatban reflexív Banach-tereken többértékű Brézis pszeudomonoton operátorral értelmezett variációs egyenlőtlenség megoldhatóságára adnak feltételeket, általánosítva Tikhonov [50] és Browder [6] regularizációs módszerekkel kapott eredményeit.

Lgyen A és B két nemüres halmaz, Z topológikus valós vektortér, $C \subseteq Z$ egy konvex kúp, amelynek int$C$-vel jelölt belseje nem üres, és $f : A \times B \to Z$ adott függvény. Ebben az esetben az egyensúly-feladat kétféleképpen is megfogalmazható: Igazoljuk, hogy

(EVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin C \setminus 0$, $\forall b \in B$, vagy
(GVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin \mathrm{int}C \setminus 0$, $\forall b \in B$.

Az első esetben erős egyensúly-feladatról, a másodikban gyenge egyensúly-feladatról beszélünk. Ezek a feladatok általánosításai a gyakorlatban gyakran előforduló vektorfüggvények optimizálási és a vektor variációs egyenlőtlenségek megoldására vonatkozó feladatoknak.

Ehhez a témakörhöz tartoznak Kassay Gábor következő dolgozatai: [∗49], [∗56], [∗62], [∗64], [∗71], [∗75], [∗80], [∗84].

A halmazértékű operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek sajátos esetei az előbbi feladatnak.

Legyen X az E valós Hausdoff lokálisan konvex tér nemüres részhalmaza és Y nemüres részhalmaza az E^* duális térnek. Továbbá, legyen C az Y nemüres részhalmaza, és legyen $F : C \to 2^X$ halmazértékű leképezés, nemüres értékekkel. A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$M(F;C): \inf_{x \in F(v)} \langle x, v-u \rangle \geq 0, \ \forall v \in C.$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$S(F;C): \sup_{x \in F(u)} \langle x, v-u \rangle \geq 0, \ \forall v \in C.$$

Legyenek $X_1, \ldots X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ valós Hausdorff topologikus vektorterek, és $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ az $X_i \times Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ halmazokon értelmezett folytonos bilineáris fügvények amelyek függhetnek i-től).

A Minty- és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenségek rendszerére vonatkozó problémájának megfogalmazása érdekében tételezzük fel, hogy $C_1 \subset Y_1$, ..., $C_n \subset Y_n$ nemüres halmazok és

$$F_i : C_1 \times \cdots C_n \to 2^{X_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

halmazértékű függvények nemüres értékekkel. A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája az $F_1, \ldots, F_n$ halmazértékű függvények rendszerére a következő:

$$M(F_1, \ldots, F_n; C_1, \ldots, C_n): \\ \begin{cases} \exists\ (u_1, \ldots, u_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n : \ \forall i = 1, \ldots, n, \\ \forall v \in C_i \ \forall x \in F_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1} \ldots, u_n), \ \langle x, u_i - v \rangle_i \geq 0. \end{cases}$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája ugyanazon feltételek mellett a következő:

$$S(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n):$$
$$\begin{cases} \exists\ (u_1,\dots,u_n)\in C_1\times\cdots\times C_n:\ \forall i=1,\dots,n, \\ \forall v\in C_i\ \exists x\in F_i(u_1,\dots,u_i\dots,u_n),\ \langle x,v-u_i\rangle_i\geq 0. \end{cases}$$

Fontos gyakorlati helyzetek motiválják a variációs egyenlőtlenségi rendszerek tanulmányozását. Például az folyadékok áramlása repedezett porózus közegen keresztül és a plaszticitás modelljei variációs problémákhoz vezetnek (lásd [38]).

Az ilyen rendszerek fontosságát a Nash-egyensúlyelmélet is igazolja. [*30]-ban a szerzők kimutatták, hogy abban az esetben, ha a F_i halmazértékű függvények Clarke szubdifferenciál típusúak, akkor az $M(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ problémának van megoldása megfelelő feltételek mellett. Az idézett eredményből az következik, hogy ha az i-edik potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, akkor az $S(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ feladat minden megoldása Nash-féle egyensúlyi pont a potenciálrendszer számára.

A [*28] dolgozatban a szerzők az optimalizálás elméletében ismert Fermat-elvet – a Clarke-derivált felhasználásával – kiterjesztették egyensúlyfeladatokra. Normált tereken értelmezett lokálisan Lipschitz-függvények esetén [*30]-ban értelmezték a Clarke-féle iránymenti derivált erős és gyenge változatát, valamint az erős és gyenge stacionárius pont fogalmát. Minden erős staciunárius pont gyenge stacionárius pont is. Ezeket alkalmazva a Nash-féle egyensúlypontokra, konvexitási és kompaktsági feltételek nélkül igazolták, hogy minden egyensúlypont erős stacionárius pont. Ha a feladat megfogalmazásában szereplő X_i halmazok kompakt konvex halmazok, akkor a Nash feladat tág osztályára léteznek gyenge stacionárius pontok. Ilymódon a Nash-egyensúlyontra egy használható szükséges feltételt kapunk. Ez a feltétel egy halmazértékű operátorokkal adott $S(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ típusú variációs egyenlőtlenség-rendszerrel értelmezett. Ha ebben a feladatban az F_i potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, minden i esetén, akkor ennek a feladatnak minden megoldása Nash-egyensúlypont a potenciálokkal értelmezett függvényrendszerre nézve.

A [$*$39] dolgozatban elégséges feltételeket adnak a Minty és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség-rendszerek megoldására. Bebizonyították, hogy ha az egyenlőtlenségek külön-külön megoldhatók, és az $F_1,\dots,.F_n$ függvények alulról féligfolytonosak, akkor a rendszernek is van megoldása, vagyis a faktorizációs elv érvényes.

Kassay Gábor tudományos tevékenységét a [$*$90] monográfiával koronázta meg. Ez a könyv az egyensúlyelmélet legújabb eredményeit - köztük a sajátjainak egy részét - foglalja össze egységes vezérfonal szerint.

Kassay Gábor pályafutása alatt tevékenységét rendkivül tudatosan szervezte meg. Például, mindenkivel kereste a kapcsolatot, akik az őt érdeklő problémák kutatásában fontos eredményeket értek el. Ebben segítették egyéni tulajdonságai is: nyított természetű volt, mindig kereste a tanulás lehetőségét a kapcsolataiban, a fellépése kellemes benyomást keltett, hamar megértette mások mondanivalóit, tisztán tudta kifejezni magát és szeretett másokkal együtt dolgozni. Ezzel magyarázható, hogy kutatási területén a legjobb szakemberekkel dolgozott együtt és dolgozatainak többsége társszerzőkkel készült. Példák és ellenpéldák szerkesztésében, valamint a dolgozat végleges formájának kidolgozásában sikerrel pályázhatott volna a nemzetközi nagymesteri címre. Amikor tanulmányi útjairól hazatért, a tanszéki Popoviciu-szemináriumon (amelynek az utóbbi években ő volt a vezetője) mindig beszámolt tapasztalatairól.

Barátai és kollegái lelkében nagy űrt hagyott maga után.

References

[1] C. Berge, *Sur une propriété combinatoire des ensembles convexes.* C.R. Acad. Sci. Paris Vol. **248** pp. 301–319 (1959).

[2] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems,* Math. Student Vol. **63** 123–145 (1994).

[3] A. Bogmér A., M. Horváth. I. Joó: *Minimax tételek és konvexitás.* Matematikai Lapok, Budapest **34** pp. 149–170 (1987).

[4] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming,* USSR Comput. Math. Phys. Vol. **7** (3) 200–217 (1967).

[5] H. Brézis, L. Nirenberg and G. Stampacchia, *A Remark on Ky Fan's Minimax Principle,* Bullettino U.M.I. Vol. **4,** 6 pp. 293–300 (1972).

[6] F. E. Browder, *Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. Vol. **56** pp. 1080–1086 (1966).

[7] S. S. Chang and Y. Zhang: *Generalized KKM theorem and variational inequalitie.* J. Math, Anal. Appl. **159** pp. 208–223 (1991).

[8] K. Fan, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Vol. **38** pp. 121–126 (1952).

[9] K. Fan, *Minimax theorems,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Vol. **39** pp. 42–37 (1953).

[10] K. Fan, *Sur une théoreme minimax,* C.R. Acad. Sci. Paris Vol. **259** pp. 3925–3928 (1964).

[11] K. Fan, *A minimax inequality and its applications,* in O. Shisha (ed.) , Inequalities III, Academic Press, pp. 103–113 (1972).

[12] M. R. Galán: *An intrinsic notion of convexity for minimax.* J. Convex Anal. **21** pp. 1105–1139 (2014).

[13] M. R. Galán: *The Gordan theorem and its implication for minimax theory.* J. Nonlinear Convex Anal. **17** pp. 2385–2405 (2016).

[14] I. Joó: *Note on my paper : A simple proof of von Neumann's minimax theorem.* Acta Math. Hung. **44**, (3-4), pp. 363–365 (1984).

[15] I. Joó: *On some convexities.* Acta Math. Hung. **54**, 1-2, pp. 163–172 (1989).

[16] I. Joó: *A simple proof of von Neumann's minimax theorems.* Acta Sci. Math. **42** pp. 91–94 (1980).

[17] I. Joó and L. L. Stachó: *A note on Ky Fan's minimax theorem.* Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **39** pp. 401–407 (1982).

[18] I. Joó: *Minimax theorems not involving convexities of the function.* Publ. Math. Debrecen **45** pp. 395–396 (1994).

[19] J. Kindler: *On a minimax theorem of Terkelsen.* Arch. Math. **55** pp. 573-583 (1990).

[20] J. Kindler, *Intersection theorems and minimax theorems based on connectedness,* J. Math. Anal. Appl. Vol. **178** pp. 529–546 (1993).

[21] J. Kindler and R. Trost: *Minimax theorems for interval spaces.* Acta. Math. Hung. **54** pp. 39–49 (1989).

[22] J. Kindler: *Intersection theorems, minimax theorems, and abstract connectedness.* in: Minimax Theory and App;ications (Ed.: B. Riccieri and S. Simons), Kluwer, 1998.

[23] J. Kindler: *Intersecting sets in midset spaces.* Arch. Math. **62** pp. 49–57, pp. 168–176. (1994)

[24] S. Komlósi: *On the Stampacchia and Minty variational inequalities.* In: G. Giorgi and F. A. Rossi (Eds.) Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna, 1999.

[25] V. Komornik: *Minimax theorems for upper semicontinuous functions.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar **40** pp. 159–163 (1982).

[26] H. König: *Über das von Neumannsche Minimax-Theorem.* Arch. Math. **19** pp. 482–487 (1968).

[27] H. König: *A general minimax theorem based on connectedness.* Arch. Math. **59** pp. 55–64 (1992).

[28] P. M. Lopez and M. R. Galán: *Infinite programming and theorems of the alternative.* Math. Meth. Appl. Sci. pp. 1–10 (2019).

[29] L. D. Muu and W. Oettli, *Convergence of an adoptive penalty scheme for finding constrained equilibria,* Nonlinear Anal. Vol. **18** pp. 1159–1166 (1992).

[30] M. A. Noor and W. Oettli, *On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria,* Le Matematiche (Catania) Vol. **49** pp. 313–331 (1994).

[31] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftspiele,* Math. Annalen Vol. **100**, pp. 295–320 (1928)

[32] J. von Neumann, *Sur la théorie des jeux.* C.R. Acad. Sci. Paris Vol. **186** (25), pp. 1689–1691 (1928).

[33] J. von Neumann, and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[34] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes,* Ergebn. Math. Kolloq. Wien **8** pp. 73–83 (1937).

[35] J. von Neumann: *On the theory of games of strategy*, in A: W: Tucker, R. D. Luce (eds.) Contribution to the theory of games **4**, Princeton Univ. Press. pp. 13–42 (1959).

[36] *S. Park* and H. Kim: *Generalized KKM mapson generalized convex spaces.* Nonlinear Analysis Forum **5** pp. 15–35 (2000).

[37] R.T. Rockafellar: Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM J. Control Optim. 14, 877–898 (1976).

[38] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations,* Mathematical Surveys and Monographs, vol. **49**, American Mathematical Society, 1996.

[39] M. Sion, *On General Minimax Theorems,* Pacific J. Math. Vol. **8** pp. 171–176 (1958).

[40] S. Simons, *Criteres de faible compacité en termkes du theoreme de minimax,* Seminaire Choquet Vol. **23** pp. 8 (1970/1971).

[41] S. Simons, *Maximinimax, minimax, and antiminimax theorems and a result of R.C. James,* Pac. J. Math. Vol. **40** pp. 529–546 (1972).

[42] S. Simons: *Minimax and monotonicity.* Lecture notes in mathematics **1693** Springer-Verlag (1998).

[43] S. Simons : *Minimax theorems and their proofs.* Ding-Zhu Du and Panos M. Pardalos (ed.): Minimax and applications, Kluwer Acad. Publ. pp. 1–23. (1995)

[44] S. Simons: *A flexible minimax theorem.* Acta Math. Hungar. **63** pp. 119-132 (1994).

[45] S. Simons: *Addendum to "A flexible minimax theorem".* Acta Mathematica Hungarica **69** pp. 359–360 (1995).

[46] Z. Sebestyén, *An elementary minimax theorem,* Acta Sci.Math. Szeged Vol. **47** pp. 457-459 (1984).

[47] Z. Sebestyén: *An Elementary Minimax Theorem.* Acta Sci. Szeged, Hungary **47** pp. 457–459 (1984).

[48] L. L. Stachó : *Minimax theorems beyond topological vector spaces.* Acta Sci.Math. (Szeged) **42** pp. 157–164 (1980).

[49] L. L. Stachó: *A note on König's minimax theorem.* Acta Math. Hung. **64** (2), pp. 183–190 (1994).

[50] A. N. Tikhonov, *Regularization of incorretly posed problems,* Soviet. Math. Dokl. Vol. **4** pp. 1035-1038 (1963).

[51] H. Weyl, *Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to von Neumann.* in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds), *Contributions to the Theory of Games 1*, Annals of Mathematical Studies, Vol. **20,** Princeton University Press (1950) 19–25.

[52] Wu Wen–Tsun: *A remark on the fundamental theorem in the theory of games*, Sci. Rec., New. Ser. 3 (1959) 229–233.

Kolumbán József 1935-ben született, 1957-ben a kolozsvári Bolyai Tudományegyetem matematika-fizika szakán tanári oklevelet, majd 1958-ban a kolozsvári Victor Babeş Tudományegyetemen kutató matematikusi oklevelet szerzett. Egyetemi pályáját a Bolyai Tudományegyetemen kezdte 1959-ben, majd folytatta az egyesített Babeş–Bolyain, ahol jelenleg emeritus professzor. 1968-as doktori disszertációjában a többszempontú szélsőérték-feladatok dualitáselméletével foglalkozott.

Pályafutásának elején approximációelmélettel, majd pedig egyensúlyelmélettel foglalkozott. 1971-ben elnyerte a Humboldt Alapítvány kutatói ösztöndíját. A romániai rendszerváltás után újraalakult Erdélyi Múzeum-Egyesület választmányának tagja lett. Ő kezdeményezte a Matematika és Informatika osztály megalakítását, amelynek 9 éven át elnöke volt. 15 évig volt az általános és középiskolai matematikai oktatást segítő kolozsvári Matlap főszerkesztője. 2011 és 2014 között a Kolozsvári Akadémiai Bizottság egyik alelnöke volt. 2001-től a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Közel 100 dolgozatot, két könyvet és hat egyetemi jegyzetet publikált. Balázs Mártonnal közösen 1978-ban megjelentette *Matematikai analízis* című könyvét a kolozsvári Dacia Könyvkiadónál. Ez a könyv az erdélyi magyar matematikai oktatás több generációját szolgálta.

KOLUMBÁN JÓZSEF

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar, Kolozasvár, Kogălniceanu utca 1.
jokolumban@yahoo.com

THE SCIENTIFIC ACTIVITY OF PROF. GÁBOR KASSAY

József Kolumbán

The paper summarizes the scientific work of Gábor Kassay (1956–2001), professor of mathematics and university professor.

Gábor Kassay -- List of Publications

Kassay Gábor (1956--2021) publikációs jegyzéke

Kása Zoltán

Cikkek

1. G. Kassay: Existenţa funcţiilor implicite în spaţii Banach-reflexive, *Seminarul "Theodor Angheluţă"*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1983, pp. 123–128,

2. G. Kassay: The proximal points algorithm for reflexive Banach spaces, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica* **30** (1985) 9–17.

3. G. Kassay: On solvability of nonlinear Hammerstein equations, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* **7** (1985) 93–100.

4. G. Kassay: A fixed point theorem for generalized contractive mappings, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* **7** (1985) 89–92.

5. G. Kassay: Normal convexity structure and fixed points in metric spaces, *Proceedings of the Conference on Differential Equations, Cluj,* (1985) 233–238.

6. G. Kassay: A characterization of reflexive Banach spaces with normal structure, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **5,** 2 (1986) 273–276.

7. G. Kassay: On Takahashi's convexity and fixed points in metric spaces, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* **4** (1986) 91–98.

8. G. Kassay: The asymptotic center and fixed points in metric spaces, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* **7** (1987) 69–74.

9. G. Kassay: Stabilitatea soluţiilor pentru ecuaţii cu aplicaţii monotone, *Seminarul "Didactica Matematicii"*, Cluj, Vol. 4 1987-1988, pp. 115–118.

10. G. Kassay, I. Kolumbán: Implicit function theorems for monotone mappings, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* **7** (1988) 7– 24.

11. G. Kassay: On a fixed point theorem of W. A. Kirk, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Fixed Point Theory* **3** (1988) 23–28.

12. G. Kassay, I. Kolumbán: Remarks on local stability of fixed points, *Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj,* (1988) 191–196,.

13. G. Kassay, I Kolumbán: On a theorem of Brezis-Nirenberg-Stampacchia, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Optimization Theory* **8** (1989) 57–66.

14. G. Kassay, I. Kolumbán: Implicit functions and variational inequalities for monotone mappings, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* 7 (1989) 79–92.

15. G. Kassay, J. Kolumbán: On the constrained optimization, *Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj,* (1989) 181–190.

16. G. Kassay: Funcţii vectoriale monotone, *Seminarul "Didactica Matematicii",* Cluj, Vol. 5, 1989, 149–151.

17. G. Kassay, I. Kolumbán: On the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz and Ky Fan's theorems, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* 7 (1990) 87–100.

18. Z. Balogh, G. Kassay: On convexity of the implicit function, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* 7 (1990) 77–82.

19. G. Kassay: On Brézis-Nirenberg-Stampacchia's minimax principle, *Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis* 7 (1991) 101–106.

20. **G.** Kassay: A simple proof for König's minimax theorem, *Acta Mathematica Hungarica* **63,** 4 (1994) 371–374.

21. G. Kassay**,** I. Kolumbán: On the generalized Minty's inequality**,** *Studia Univ.Babeş-Bolyai, Mathematica* **39** (1994) 37–45.

22. I. Joó, G. Kassay**:** On saddle points of set-valued mappings, *Annales Univ. Sci. Budapest.* **37** (1994) 209–214.

23. T. Illés, G. Kassay: Farkas type theorems for generalized convexities**,** *Pure Mathematics and Applications* **5,** 2 (1994) 225–239.

24. I. Joó, G. Kassay: Convexity, minimax theorems and their applications, *Annales Univ. Sci. Budapest.* **38** (1995) 71–93.

25. T. Illés, G. Kassay: Perfect duality for K-convexlike programming problems, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica* **41** (1996) 69–78.

26. G. Kassay**,** J. Kolumbán: On a generalized sup-inf problem, *Journal of Optimization Theory and Applications* **91,** 3 (1996) 651–670.

27. W. W. Breckner, G. Kassay: A systematization of convexity concepts for sets and functions, *Journal of Convex Analysis* **4,** 1 (1997) 109–127.

28. G. Kassay**,** Zs. Páles: A localized version of Ky Fan's minimax inequality, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **35,** 4 (1999) 505–515.

29. T. Illés, G. Kassay: Theorems of the alternative and optimality conditions for convexlike and general convexlike programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* **101,** 2 (1999) 243–257.

30. G. Kassay, J. Kolumbán, Zs. Páles: On Nash stationary points**,** *Publicationes Mathematicae Debrecen* **54,** 3-4 (1999) 267–279.

31. J. B. G. Frenk, G. Kassay: On classes of generalized convex functions, Gordan-Farkas type theorems and Lagrangian duality**,** *Journal of Optimization Theory and Applications* **102,** 2 (1999) 315–343.

32. T. Illés, G. Kassay: Generalized Farkas theorems and their consequences in: *New Trends in Operations Research (in memoriam Gyula Farkas)*, Eds: S. Komlósi, T. Szántai, *Proceedings of the 23-rd Hungarian Operations Research Conference*, Pécs, 1999, 43–57.

33. G. Kassay, J. Kolumbán: System of multi-valued variational inequalities, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **56,** 1-2 (2000) 185–195.

34. G. Kassay, J. Kolumbán: Multivalued parametric variational inequalities with α-pseudomonotone maps, *Journal of Optimization Theory and Applications* **107,** 1 (2000) 35–50.

35. G. Kassay, J. Kolumbán: Variational inequalities given by semi-pseudomonotone maps, *Nonlinear Analysis Forum (Korea)* **5** (2000) 35–50.

36. G. Kassay, K. Nikodem: Lagrangian multiplier rule for set-valued optimization, *Nonlinear Analysis Forum (Korea)* **6,** 2 (2001) 363–369.

37. J. B. G. Frenk, G. Kassay: Minimax results and finite dimensional separation, *Journal of Optimization Theory and Applications* **113,** 2 (2002) 409-421.

38. L. J. Lin, Z. T. Yu, G. Kassay: Existence of equilibria for multivalued mappings and its applications to vectorial equilibria, *Journal of Optimization Theory and Applications* **114,** 1 (2002) 189–208.

39. G. Kassay**,** J. Kolumbán, Zs. Páles: Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems, *European Journal of Operational Research* **143,** 2 (2002) 377–389.

40. J. B. G. Frenk, G. Kassay, J. Kolumbán: On Equivalent Results in Minimax Theory, *European Journal of Operational Research* **157,** 1 (2004) 46–58.

41. P. Kas, G. Kassay, Z. Borataş-Sensoy: On generalized equilibrium points, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **296,** 2 (2004) 619–633.

42. J. B. G. Frenk**,** G. Kassay, V. Protassov: On Borel probability measures and noncooperative game theory, *Optimization* **54,** 1 (2005) 81–101.

43. L.J. Lin, M. F. Yang, H.Q. Ansari, G. Kassay: Existence results for Stampacchia and Minty type implicit variational inequalities with multivalued maps, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **61,** 1-2 (2005) 1–19.

44. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Existence of equilibria via Ekeland's principle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **305,** 2 (2005) 502–512.

45. R. I. Boţ, G. Kassay, G. Wanka: Strong duality for generalized convex optimization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **127,** 1 (2005) 45–70.

46. Y. Alber, D. Butnariu, G. Kassay: Convergence and stability of a regularization method for maximal monotone inclusions and its applications to convex optimization, in: *Variational Analysis and Appls.***,** F. Giannessi and A. Maugeri (Eds.), pp. 89–132, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2005, ISBN 0-387-24209-0.

47. J. B. G. Frenk**,** G. Kassay: On noncooperative games and minimax theory, in: *Proceedings of the 4th Twente workshop on Cooperative Game Theory joint with 3rd Dutch–Russian symposium,* edited by T.S.H. Driessen, J.B. Timmer , A.B. Khmelnitskaya, Enschede, June 28–30, 2005; pp. 61–69.

48. J. B. G. Frenk, G. Kassay: The level set method of Joó and its use in minimax theory, *Mathematical Programming* **105,** 1A (2006) 145–155.

49. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Ekeland's principle for vector equilibrium problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **66,** 7 (2007) 1454–1464.

50. J. B. G. Frenk, P. Kas, G. Kassay: On linear programming duality and necessary and sufficient conditions in minimax theory, *Journal of Optimization Theory and Applications* **132,** 3 (2007) 423–439.

51. J. B. G. Frenk, G. Kassay: Lagrangian duality and cone convexlike functions, *Journal of Optimization Theory and Applications* **134,** 2 (2007) 207–222.

52. G. Bigi, M. Castellani, G. Kassay: A dual view of equilibrium problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **342,** 1 (2008) 17–26.

53. D. Butnariu, G. Kassay: A proximal-projection method for finding zeros of set-valued operators, *SIAM Journal of Control and Optimization* **47**, 4 (2008) 2096–2136.

54. R. I. Boţ, G. Kassay, G. Wanka: Duality for almost convex optimization problems via the perturbation approach, *Journal of Global Optimization* **42,** 3 (2008) 285–399.

55. A. N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa: On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems, *Mathematical Programming* **116,** 1-2B (2009) 259–273.

56. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Well-posedness for vector equilibrium problems, *Mathematical Methods in Operations Research* **70,** 1 (2009) 171–182.

57. G. Kassay, C. Pintea, F. Szenkovits: On convexity of preimages of monotone operators, *Taiwanese Journal of Mathematics* **13,** 2B (2009) 675–686.

58. A. N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa: An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences, *Journal of Convex Analysis* **16,** 3 (2009) 807–826.

59. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Well-posed equilibrium problems**,** *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **72,** 1 (2010) 460–468.

60. G. Kassay, C. Pintea: On preimages of a class of generalized monotone operators**,** *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **73,** 11 (2010) 3537–3545.

61. A. Capătă, G. Kassay, B. Mosoni: On weak multifunction equilibrium problems, in: *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control,* In Honor of Boris S. Mordukhovich, Series: Springer Optimization and Its Applications**,** Vol. **47** (2010) 133–148.

62. A. Capătă, G. Kassay: On vector equilibrium problems and applications, *Taiwanese Journal of Mathematics* **15,** 1 (2011) 365–380.

63. G. Kassay, C. Pintea, Sz. László: Monotone operators and closed countable sets, ***Optimization*** **60,** 8-9 (2011) 1059–1069.

64. G. Kassay, S. Reich, S. Sabach: Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces, *SIAM Journal on Optimization* **21,** 4 (2011) 1319–1344.

65. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Conditioning for optimization problems under general perturbations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **75,** 1 (2012) 37–45.

66. G. Bigi, A. Capătă, G. Kassay: Existence results for strong vector equilibrium problems and their applications, *Optimization* **61,** 5 (2012) 567–583.

67. R. Burachik, G. Kassay: On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **75,** 18 (2012) 6456–6464.

68. G. Kassay, C. Pintea, Sz. László: Monotone operators and first category sets, *Positivity* **16**, 3 (2012) 565–577.

69. M. Bianchi, G. Kassay**,** R. Pini: An inverse map result and some applications to sensitivity of generalized equations, *J. Math. Anal. Appl.* **399,** 1 (2013) 279–290.

70. G. Kassay, M. Miholca: Existence results for variational inequalities with surjectivity consequences related to generalized monotone operators, *J. Optim. Theory Appl.* **159,** 3 (2013) 721–740.

71. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Stability results of variational systems under openness with respect to fixed sets, *J. Optim. Theory Appl.* **164,** 1 (2015) 92–108.

72. G. Kassay, M. Miholca: Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions, *J. Glob. Optim.* **63,** 1 (2015) 195–211.

73. A. Capătă, G. Kassay: Characterizations of vector equilibria subject to explicit constraints, *Minimax Theory and its Applications* **1,** 1 (2016) 145–161.

74. M. Bianchi, G. Kassay**,** R. Pini: Linear openness of the composition of set-valued maps and applications to variational systems, *Set-Valued Var. Anal.*, **24,** 4 (2016) 581–595.

75. G. Kassay, M. Miholca, N. The Vinh: Vector quasi-equilibrium problems for the sum of two multivalued mappings, *J. Optim. Theory Appl.,* **169,** 2 (2016) 424–442.

76. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Stability of equilibria via regularity of the diagonal subdifferential operator, *Set-Valued Var. Anal.* **25,** 4 (2017) 789–805.

77. C. Gutiérrez, G. Kassay, V. Novo, J.L. Ródenas-Pedregosa: Ekeland variational principles in vector equilibrium problem, *SIAM Journal on Optimization* **27,** 4 (2017) 2405–2425.

78. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: On a sufficient condition for weak sharp efficiency in multiobjective optimization, *J. Optim. Theory Appl.,* **178,** 1 (2018) 78–93.

79. G. Kassay, T. N. Hai, N. The Vinh: Coupling Popov's algorithm with subgradient extragradient method for solving equilibrium problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis,* **19,** 6 (2018) 959–986.

80. A. Capătă, G. Kassay, S. Al-Homidan: Existence results for strong vector equilibrium problems with applications, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* **19,** 7 (2018) 1163–1179

81. S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, G. Kassay: On sensitivity of vector equilibria by means of the diagonal subdifferential operator, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **20,** 3 (2019), pp. 527–537**.**

82. S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, G. Kassay: Takahashi's minimization theorem and some related results in quasi-metric spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21, Article number: 38 (2019)

83. Kassay G., Szenkovits F.: Önálló intézet, megfiatalodott munkaközösség. Kutatás és oktatás a BBTE Magyar Matematika és Informatika Intézetében, *Korunk,* 2019. május, 19–26. o.

84. S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, G. Kassay: Vectorial form of Ekeland variational principle with applications to vector equilibrium problems. *Optimization* **69**, 3 (2020) 415–436.

85. O. Chadli, G. Kassay, A. Saidi: On the existence of antiperiodic solutions for hemivariational inequalities: an equilibrium approach, *Optimization Letters,* **15,** 1 (2021) 879–900.

86. M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Regularization of Brézis pseudomonotone variational inequalities. *Set-Valued Var. Anal.* **29**, 1 (2021) 175–190.

87. O. Chadli, G. Kassay, A. Saidi: On the existence of antiperiodic solutions for hemivariational inequalities: an equilibrium approach, \textit{Optimization Letters,} \textbf{ 15,} 1 (2021) 879--900.

Könyvek

1. Illés Tibor, Kassay Gábor: *Szemelvények a matematikai programozás dualitáselméletéből,* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995, 85 pg.

2. G. Kassay: *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj, Romania, 2000, 113 pg. ISBN 973-656-023-6.

3. Kassay Gábor, Kolumbán József, Marchiş Julianna: *Valós számok és metrikus terek*, Presa Universitară Clujeană/Kolozsvári Egyetemi Kiadó, 2005, 227 pg., ISBN 973-610-357-9.

4. Gábor Kassay**,** Vicențiu D. Rădulescu, *Equilibrium Problems and Applications*, Series: Mathematics in Science and Engineering**,** Academic Press – an imprint of Elsevier, London-San Diego-Cambridge MA-Oxford, 2019.

Könyvfejezetek

1, G. Kassay, J. Kolumbán, Equilibrum problems, in: J. Kolumbán. A. Soós (eds.): *Lectures on Nonlinear Analysis and Its Applications*, Sapientia Books 22, Scientia Publishing House, Cluj-Napoca, 2003, pp. 17–172. ISBN 973-7953-02-9.

2. J. B. G. Frenk, G. Kassay: Introduction to convex and quasiconvex analysis, in: *Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity*, Series: Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. 76, Eds. N. Hadjisavvas, S. Komlósi, S. Schaible, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005, pp. 3–87. ISBN 0-387-23255-9

3. J. B. G. Frenk, G. Kassay: On noncooperative games, minimax theorems and equilibrium problems, in: *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*, Series: Springer Optimization and Its Applications, Athanasios Migdalas (Crete), Panos Pardalos (Florida), Leonidas Pitsoulis (London) and Altannar Chinchuluun (Florida) (Eds.), Vol. 17, 2008. XXII, pp. 53–94, ISBN: 978-0-387-77246-2.

4. Gábor Kassay: On equilibrium problems, in: *Optimization and Optimal Control Theory and Applications*, Series: Springer Optimization and Its Applications, Eds.: Altannar Chinchuluun, Panos M. Pardalos, Rentsen Enkhbat, Ider Tseveendorj, Vol. **39,** 2010, pp. 55–83.

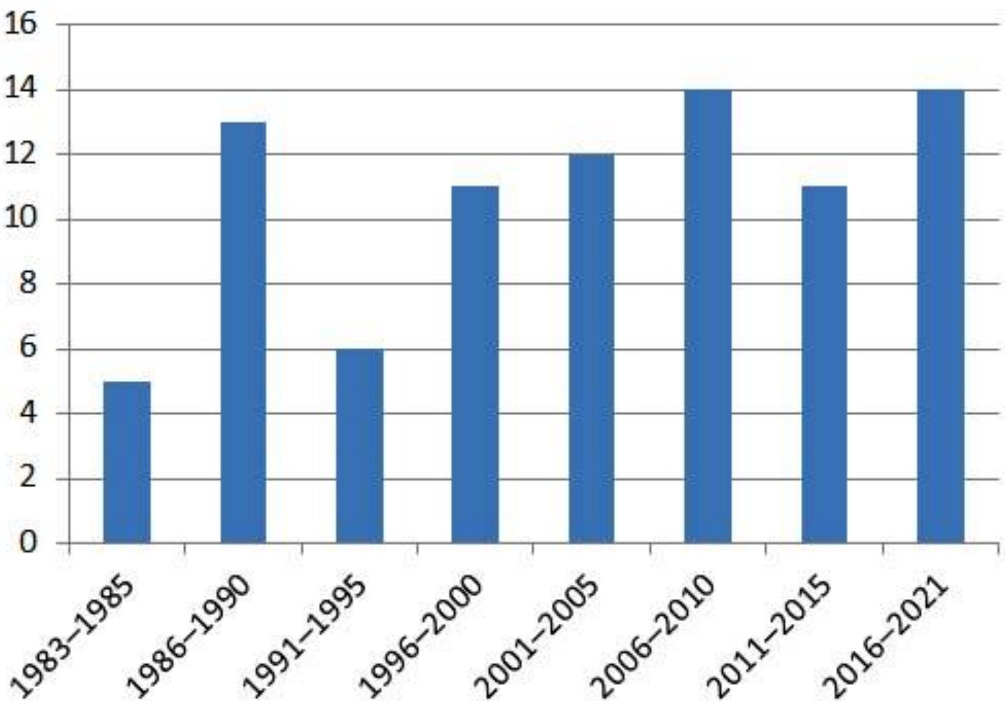
5. G. Kassay: The equilibrium problem and its applications to optimization, Minimax problems and Nash equilibria, in: *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization,* Ed. Qamrul Hasan Ansari, World Education, Delhi, 2012, pp. 203–226. ISBN 978-81-909873-3-2

Szerkesztett könyv

Z. Kása, G. Kassay, J. Kolumbán (Eds.), *Proceedings of the International Conference In Memoriam Gyula Farkas*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2006

h-index: 18 (Web of Science), 19 (Scopus), 25 (Google Scholar)

Cikkek száma ötévenkénti bontásban



Legidézettebb tíz cikk

A. N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa: On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems, *Mathematical Programming* **116,** 1-2B (2009) 259–273.	**149**
G. Kassay, S. Reich, S. Sabach: Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces, *SIAM Journal on Optimization* **21,** 4 (2011) 1319–1344.	**130**
M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Existence of equilibria via Ekeland's principle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **305,** 2 (2005) 502–512.	**124**
G. Kassay, J. Kolumbán: System of multi-valued variational inequalities, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **56,** 1-2 (2000) 185–195.	**113**
W. W. Breckner, G. Kassay: A systematization of convexity concepts for sets and functions, *Journal of Convex Analysis* **4,** 1 (1997) 109–127.	**95**
M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: Ekeland's principle for vector equilibrium problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **66,** 7 (2007) 1454–1464.	**92**
G. Kassay**,** J. Kolumbán, Zs. Páles: Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems, *European Journal of Operational Research* **143,** 2 (2002) 377–389.	**75**
L. J. Lin, Z. T. Yu, G. Kassay: Existence of equilibria for multivalued mappings and its applications to vectorial equilibria, *Journal of Optimization Theory and*	**75**

Applications **114,** 1 (2002) 189–208.	
R. I. Boţ, G. Kassay, G. Wanka: Strong duality for generalized convex optimization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **127,** 1 (2005) 45–70.	**69**
D. Butnariu, G. Kassay: A proximal-projection method for finding zeros of set-valued operators, *SIAM Journal of Control and Optimization* **47**, 4 (2008) 2096–2136.	**66**

Legnagyobb impaktfaktorú tíz cikk

	IF 2015
J. B. G. Frenk, G. Kassay, J. Kolumbán: On Equivalent Results in Minimax Theory, *European Journal of Operational Research* **157,** 1 (2004) 46–58.	2.679
G. Kassay**,** J. Kolumbán, Zs. Páles: Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems, *European Journal of Operational Research* **143,** 2 (2002) 377–389.	2.679
C. Gutiérrez, G. Kassay, V. Novo, J.L. Ródenas-Pedregosa: Ekeland variational principles in vector equilibrium problem, *SIAM Journal on Optimization* **27,** 4 (2017) 2405–2425.	2.659
G. Kassay, S. Reich, S. Sabach: Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces, *SIAM Journal on Optimization* **21,** 4 (2011) 1319–1344.	2.659
A. N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa: On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems, *Mathematical Programming* **116,** 1-2B (2009) 259–273.	2.062
J. B. G. Frenk, G. Kassay: The level set method of Joó and its use in minimax theory, *Mathematical Programming* **105,** 1A (2006) 145–155.	2.062
D. Butnariu, G. Kassay: A proximal-projection method for finding zeros of set-valued operators, *SIAM Journal of Control and Optimization* **47**, 4 (2008) 2096–2136.	1.491
G. Kassay, M. Miholca: Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions, *J. Glob. Optim.* **63,** 1 (2015) 195–211.	1.219
M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: On a sufficient condition for weak sharp efficiency in multiobjective optimization, *J. Optim. Theory Appl.*, **178,** 1 (2018) 78–93.	1.160
R. Burachik, G. Kassay: On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **75,** 18 (2012) 6456–6464.	1.125