A függvények approximációelméletének néhány kérdése

Finta Zoltán

Weierstrass (1880): bármely $f \in C[a,b]$ esetén létezik (P_n) polinomfüggvény sorozat úgy, hogy $P_n(x) - f(x) \to 0$, $n \to \infty$, $x-$ben egyenletesen.

Bernstein (1912): $(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $f \in C[0,1]$

• **G. G. Lorentz:** *Bernstein Polynomials,* Chelsea Publishing Company, New York, 1986.

Korovkin (1953): legyen $(L_n)_{n \geq 1}$, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$, pozitív lineáris operátor sorozat. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy bármely $f \in C[a,b]$ esetén $(L_n(f))(x) - f(x) \to 0$, $n \to \infty$, $x-$ben egyenletesen az, hogy $(L_n(e_i))(x) - e_i(x) \to 0$, $n \to \infty$, $x-$ben egyenletesen, ahol $e_i(x) = x^i$, $i \in \{0,1,2\}$.

• **F. Altomare, M. Campiti:** *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications,* Walter de Gruyter, Berlin New York, 1994.

$(L_n)_{n \geq 1}$ pozitív lineáris operátor sorozat, ahol $L_n : C(I_{a,b}) \to C(I_{a,b})$ és $I_{a,b} = [a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$.

(1) *az approximáció problémája:* mely f függvényekre lesz $(L_n(f))(x) - f(x) \to 0$, $n \to \infty$, $x-$ben egyenletesen?

(2) *a szaturáció problémája:* mi az elérhető legjobb approximációs rend és ez mely függvényekre valósul meg? Az $(L_n)_{n \geq 1}$ operátor sorozat szaturációs rendje α_n az $I_{a,b}$ intervallumon, ha az $\alpha_n^{-1}\{(L_n(f))(x) - f(x)\} \to 0$, $n \to \infty$, $x-$ben egyenletesen feltételből következik, hogy f állandó függvény az $I_{a,b}$ intervallumon, de létezik olyan $f \in C(I_{a,b})$ nem állandó függvény, melyre $\alpha_n^{-1}\{(L_n(f))(x) - f(x)\}$ egyenletesen korlátos az x szerint, $n \to \infty$.

(3) *a nem optimális approximáció problémája:* jellemezzük azon függvényeket, amelyek adott (általában $(n^{-\alpha})$−nak választott) rendben közelíthetők az L_n operátorokkal.

Példa:
Szász-Mirakjan-féle operátorok: $(S_n(f))(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $f \in C_b[0,\infty)$

(1) $(S_n(f))(x) - f(x) \to 0$, $n \to \infty$, x−ben egyenletesen $\Leftrightarrow$ $f(x^2)$ függvény egyenletesen folytonos a $[0,\infty)$ intervallumon.

(2) Ha $f \in C_b[0,\infty)$ függvényre létezik olyan $(n_k)_{k\geq 1}$ sorozat, hogy $n_k\{(S_{n_k}(f))(x) - f(x)\} \to 0$, $k \to \infty$, egyenletesen x szerint, akkor f állandó függvény. Továbbá $n\{(S_n(f))(x) - f(x)\}$, $n \to \infty$, egyenletesen korlátos x szerint $\Leftrightarrow$ f differenciálható, f' abszolút folytonos és $xf''(x)$ korlátos a $[0,\infty)$ intervallumon.

(3) $f \in C_b[0,\infty)$ és $0 < \alpha < 1$ esetén $n^{\alpha}\{(S_n(f))(x) - f(x)\}$, $n \to \infty$, egyenletesen korlátos az x szerint $\Leftrightarrow$ $h^{-2\alpha}x\{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)\}$, $h \to 0+0$, egyenletesen korlátos x szerint

• **Z. Ditzian, V. Totik:** *Moduli of Smoothness,* Springer, New York, 1987.

Popoviciu (1937):

$$|(B_n(f))(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\,\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), f \in C[0,1], x \in [0,1], n = 1,2,\ldots$$

Sikkema (1961):

$$\sup_{f\in C[0,1]\setminus\Pi_0} \sup_{n\geq 1} \frac{\|B_n(f) - f\|}{\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1.08988...$$

• **R. Păltănea:** *Approximation Theory Using Positive Linear Operators,* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2004.

Freud (1968): létezik $C > 0$ úgy, hogy

$$|(B_n(f))(x) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),$$

minden $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, $n = 1,2,\ldots$ esetén

Megjegyzés: ha $0 < \alpha \leq 2$, $f \in C[0,1]$ úgy, hogy $\omega_2(f,t) \leq Mt^\alpha$, $t \geq 0$ valamely $M > 0$ esetén, akkor

$$|(B_n(f))(x) - f(x)| \leq CM \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}, \; x \in [0,1], n = 1, 2, \ldots$$

Berens, Lorentz (1972): legyen $0 < \alpha < 2$. Ekkor létezik $C = C(\alpha) > 0$ úgy, hogy ha $f \in C[0,1]$ és $|(B_n(f))(x) - f(x)| \leq M \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots,$ akkor $\omega_2(f,h) \leq CMh^\alpha$, $h > 0$.

- direkt approximációs tételek, fordított approximációs tételek

- a globális direkt approximációs tételek, illetve a globális fordított approximációs tételek megállapítása a Ditzian-Totik simasági modulussal történik

- szigorúan globális fordított approximációs egyenlőtlenségek bevezetése

- **Z. Ditzian, K. G. Ivanov:** *Strong converse inequalities,* J. d'Analyse Math., 61(1993), 61 - 111.