STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

MATHEMATICA

3

1981

CLUJ-NAPOCA

13 III

ANUL XXVI 1981

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

3

Redacţia: 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

To Professor D. V. Ionescu
on his 80th birthday

THE UNIQUENESS OF THE CLASSICAL SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES SYSTEM FOR AN INCOMPRESSIBLE NONSTATIONARY FLOW

TITUS PETRILA

In the present note, by using a simple technique which has been already applied in the study of the Euler system of equations [1], one establishes the uniqueness of the classical solution for the Navier-Stokes system. More precisely, one considers the case of a plane[1] incompressible nonstationary flow in the presence of given external mass forces $\vec{f}(f_1, f_2)$, the viscid fluid being in contact with a fixed obstacle (C) and with an unlimited wall (Σ). Supposing that the fluid behaviour at great distances (where an uniform translation takes place), as well as the flow spectrum at the initial moment $t = 0$, is known, the flow equations are

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} f_1(x, y, t) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\rho}\Delta u; \\ &\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} f_2(x, y, t) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{\rho}\Delta v; \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad /\rho = \text{const}/, \\ &\text{for } (P,t) \in S \times [0, +\infty[\end{aligned} \tag{1}$$

with the initial boundary conditions

$$\begin{aligned} &\vec{u}(x,y,0) = \vec{u}_0 \, (= \overrightarrow{\text{const}}),\ P \in S, \\ &\vec{u}|_{\Sigma} = 0; \quad \vec{u}|_C = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

and the condition at infinity

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \vec{u} = \vec{u}_0 \, (= \overrightarrow{\text{const}})$$

We also admit, under the assumption of the unboundness of the domain S that $|\text{grad}\, u|$, $|\text{grad}\, v| < M < +\infty$, for $(P, t) \in S \times [0, +\infty[$[2].

---

[1] The argument can be extended unchanged to the tridimensional case.

[2] Obviously these assumptions would not be necessary for a bounded flow domain S. On the other side, from the mechanical point of viw, it is quite normal to consider the fluid in an uniform translation outside a circonference whose radius R is large enough. Hence, in the neighborhood of infinity, the gradients of the unknown functions vanish or, more completely, all the unknown functions and their gradiends are bounded.

Concerning the unknown functions u,v and p, they are supposed to belong to $C^{2,1}$ and $C^{1,0}$ respectively, while the given functions $f_i(x,y,t)$ are continous and bounded over $\bar{S}$; ν — the viscosity coeficient is also a positive constant.

Let (u,v,p) and $(u+u^*, v+v^*, p+p^*)$ be now two different solutions of the problem (1) + (2), solutions supposed to exist. The „perturbation" (u^*, v^*, p^*) will satisfy a system of the same form as in the case of Euler equations [1], precisely

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} &= -\vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} \vec{u} - (\vec{u}^* + \vec{u}) \cdot \operatorname{grad} u^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\nu}{\rho}\Delta u^* \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} &= -\vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} v - (\vec{u}^* + \vec{u}) \cdot \operatorname{grad} v^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\nu}{\rho}\Delta v^* \\ & \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

with homogenous initial-boundary conditions as wel as at infinity[3].

Following then the same technique we have already used in [1] with regard to Euler's equations, after multiplying the first two equations of (1) by u^* and v^* respectively and then adding the results, we get, by integrating over S

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathfrak{F} + \mathfrak{D},$$

where

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int_S (u^{*2} + v^{*2})\, ds,$$

$$\mathfrak{F} = \int_S \Big(- v^* \vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} v - v^* \vec{u} \cdot \operatorname{grad} v^* - v^* \vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} v^* - u\, \vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} u$$
$$- u^* \vec{u} \cdot \operatorname{grad} u^* - u^* \vec{u}^* \cdot \operatorname{grad} u^* - \frac{\vec{u}^*}{\rho} \operatorname{grad} p^* \Big)\, ds \ [4]$$

and

$$\mathfrak{D} = \int_S \frac{\nu}{\rho} \vec{u}^* \cdot \Delta \vec{u}^* .$$

As

$$\mathfrak{D} = \int_S \frac{\nu}{\rho}\left[u^*\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right) + v^*\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2}\right)\right] ds =$$
$$= \int_S \frac{\nu}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial y} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)\right] ds -$$
$$- \int_S \frac{\nu}{\rho}\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)^2\right] ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{C \cup \Sigma} \frac{\nu}{\rho}\left[\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial x}\right) n_1 + \left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial y} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y}\right) n_2\right] d\sigma = 0$$

---

[3] Evidently the boundness conditions of $|\operatorname{grad} u^*|$, $|\operatorname{grad} v^*|$ and $|\operatorname{grad} p^*|$ are also fulfiled.

[4] Both the boundary conditions and the flux — divergence formula are used.

where both the flux — divergence formula and the vanishing of u^* and v^* on $C \cup \Sigma$ have been taken into account, $\vec{n}(n_1, n_2)$ beeing the unit vector of the outward normal.

With regard to $\mathcal{F}$, under the assumptions of boundness of the functions gradients which intervene, it is bounded by the integral over S from a bilinear form in u^* and v^*, precisely[5]

$$\mathcal{F} \leqslant \int (A\,u^{*2} + B\,v^{*2} + 2\,C\,u^*\,v^*)\,ds, \qquad (A, B, C \text{ constants})$$

i.e., in fact, $\frac{d\varepsilon}{dt} \leqslant \alpha\,\varepsilon$ where α is a positive constant. Hence we get $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0\, e^{\alpha t}$ and, since $\varepsilon_0 = \varepsilon(x, y, 0) = 0$ owing to the homogenous initial conditions, this implies $\varepsilon(t) \equiv 0$, $\forall t$, which proves the uniqueness of the (classical) solution[6].

REFERENCES

1. Titus Petrilă, *Modele matematice în hidrodinamica plană*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1981.
2. D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. didactică şi pedagogică, ed. a II-a, Bucureşti, 1972.
3. S. Rionero, M. Maiellaro, *Sull'unicità e stabilità universale in media nella dinamica dei fluidi*, Rend. Circ. Matem. di Palermo, S. II, 27, 11 (1978), 305.

UNICITATEA SOLUŢIEI CLASICE A SISTEMULUI NAVIER-STOKES PENTRU O MIŞCARE FLUIDĂ INCOMPRESIBILĂ NESTAŢIONARĂ

(Rezumat)

Utilizînd o tehnică simplă, care a fost deja aplicată de autor şi pentru stabilirea unicităţii soluţiei sistemului Euler [1], se stabileşte unicitatea soluţiei clasice a sistemului Navier-Stokes în condiţiile unei mişcări fluide incompresibile nestaţionare. Pentru fixarea ideilor se consideră problema (mai generală) a atacării, de către un curent de fluid viscos, a unui profil oarecare fix în prezenţa unui perete arbitrar nelimitat.

---

[5] With regard to the term $\int_S \left(-\frac{\vec{u}^*}{\rho} \cdot \text{grad } p^* \right) ds$, it will not play any part as it becomes

$$-\frac{1}{\rho}\int_S \left[u^* \frac{\partial p^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) ds = -\frac{1}{\rho}\int_S \frac{\partial}{\partial x}\left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^* \frac{\partial p^*}{\partial y}\right) \bigg] ds + \frac{1}{\rho}\int_S \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y}\frac{\partial p^*}{\partial y} \right) ds.$$

The first integral is obviosly zero according to the adherence conditions on $C \cup \Sigma$ and to the possibility of using the flux-divergence formula ; the same result holds for the second integral too as

$$\left| \frac{1}{\rho}\int_S \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial y}\frac{\partial p^*}{\partial y} \right) ds \right| < \frac{M}{\rho} \left| \int_S \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) ds \right| = \frac{M}{\rho} \int_{C \cup \Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0; \quad \text{q. e. d.}$$

[6] Concerning p^*, once proved that the system (3) has only the trivial solution $u^* = v^* = 0$, it results that grad $p^* = 0$, so $p^* = $ constant, constant which could be fixed in zero.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

Profesorului D. V. Ionescu la a 80-a aniversare

FORMULE COMBINATE DE CUADRATURĂ — OPTIMALE

DUMITRU ACU

1. **Introducere.** În această lucrare se obţin formule de cuadratură optimale pentru formulele combinate de cuadratură. În § 2 se prezintă pe scurt utilizarea „metodei funcţiei φ" la construirea formulelor de cuadratură elementară, cu gradul algebric de exactitate $n-1$; în paragraful 3 se definesc formulele combinate de cuadratură; în § 4 se dă evaluarea exactă a restului formulelor combinate de cuadratură pe clasa de funcţii $W^n(M; a, b)$ (Teorema 1); în paragraful 5 se obţin formulele combinate de cuadratură optimale pe clasa $W^n(M; a, b)$ (Teorema 2); ultimul paragraf este consacrat construirii unui exemplu de formulă combinată optimală, pornind de la formula lui Simpson şi formula lui Newton.

2. **Metoda funcţiei** φ. Fie $C^r[a, b]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ clasa funcţiilor definite pe intervalul $[a, b]$, de r ori derivabile pe acest interval şi cu $f^{(r)}$ continuă pe $[a, b]$.

Mai considerăm date punctele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (noduri situate în intervalul $[a, b]$) astfel încît

$$x_0 = a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b = x_{m+1}. \tag{1}$$

şi integrala

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

unde $f \in C^{n-1}[a, b]$.

Numim *formulă de cuadratură elementară*, cu gradul algebric de exactitate $n-1$, pentru integrala (2), relativă la nodurile (1), orice formulă de tipul

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{h,i} f^{(h)}(x_i) + R(f), \tag{3}$$

unde coeficienţii $A_{h,i}$ sînt independenţi de f iar funcţionala $R(f)$ satisface condiţiile

$$R(x^k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Pentru obţinerea formulelor de cuadratură elementară, cu gradul algebric de exactitate $n-1$, prof. D. V. Ionescu [5] a utilizat sistematic „metoda funcţiei φ". Ea are la bază formula generalizată de integrare prin părţi şi a fost dată de J. Radon în [7]. Aceeaşi metodă este utilizată şi de Aldo Ghizzetti şi A. Ossicini [4], dar în cazul unui operator diferenţial liniar oarecare.

Descriem pe scurt „metoda funcţiei φ" pentru obţinerea formulei de cuadratură (3—4). Se consideră ecuaţia diferenţială liniară şi neomogenă

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n, \tag{5}$$

se fixează $m-1$ soluţii arbitrare

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \ldots,\ \varphi_{m-1}(x),\ (\text{din clasa } C^{n-1}[a, b]) \tag{6}$$

a ecuaţiei (5) şi se mai iau încă două soluţii $\varphi_0(x)$, $\varphi_m(x)$ ale aceleiaşi ecuaţii (5), care sînt însă determinate astfel ca să satisfacă condiţiile iniţiale $\varphi_0^{(h)}(a) = 0$, $\varphi_m^{(h)}(b) = 0$, $h = \overline{0, n-1}$. Utilizînd formula generalizată de integrare prin părţi, se arată că (v. [5], [1])

$$A_{h,i} = (-1)^{n-h-1}[\varphi_i^{(n-h-1)}(x_i) - \varphi_{i-1}^{(n-h-1)}(x_i)], \tag{7}$$

$h = \overline{0, n-1}$, $\quad i = \overline{1, m}$

iar

$$R(f) = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) f^{(n)}(x)\, dx. \tag{8}$$

Reciproc. se poate demonstra că orice formulă de cuadratură (3—4) poate fi obţinută prin „metoda funcţiei φ", avînd coeficienţii şi restul daţi de (7) şi respectiv (8).

Dacă notăm cu Φ funcţia

$$(9)\quad \Phi : [a, b] \to R,\ \Phi(x) = \varphi_i(x) \text{ pe } [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, m}, \tag{9}$$

numită şi *funcţie de influenţă*, atunci restul dat de (8) se mai scrie:

$$R(f) = \int_a^b \Phi(x) f^{(n)}(x) dx. \tag{10}$$

3. Formule combinate de cuadratură. Să împărţim intervalul $[a, b]$ în r intervale parţiale $[u_{j-1}, u_j]$, $j = \overline{1, r}$, definite prin punctele

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_{r-1} < u_r = b \tag{11}$$

şi să considerăm familia de r formule de cuadratură elementară, cu gradul algebric de exactitate $n-1$, de tipul $(3-4)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m_j} A_{h,i}^{[j]} f^{(h)}(x_{i,j}) + R_j(f), \tag{12}$$

$$a = x_{0,j} \leqq x_{1,j} \leqq x_{2,j} < \ldots < x_{m_j,j} \leqq x_{m_j+1,j} = b,\ j = \overline{1, r}.$$

Ținînd seama de identitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{r} \int_{u_{j-1}}^{u_j} f(x)dx$$

și calculînd $\int_{u_{j-1}}^{u_j} f(x)dx$ utilizînd formula j din familia (12) de formule de cuadratură, $j = \overline{1, r}$, obținem formula de cuadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m_j} \left(\frac{d_j}{b-a}\right)^{h+1} A_{h,i}^{[j]} f^{(h)}_{(u_{j-1}} + d_j\left(\frac{x_{i,j}-a}{b-a}\right) + \rho(f) \tag{13}$$

cu

$$\rho(f) = \sum_{j=1}^{r} \frac{d_j}{b-a} R_j\left(f\left(u_{j-1} + d_j\frac{x-a}{b-a}\right)\right) \tag{14}$$

unde $d_j = u_j - u_{j-1}$, $j = \overline{1, r}$.

Formula (13) cu restul dat de (14) o numim *formula combinată de cuadratură corespunzătoare familiei de formule* (12) sau, simplu, *formulă combinată de cuadratură.*

Observația 1. Fiecărei permutări a formulelor de cuadratură din familia (12) îi corespunde o formulă combinată de cuadratură.

2. Evident, cînd toate cele r formule din familia (12) sînt reprezentate fiecare prin aceeași formulă de cuardatură elementară, atunci formulele combinate de cuadratură se reduc la *formulele generalizate de cuadratură* studiate în [4].

3. Formula combinată de cuadratură (13) are gradul algebric de exactitate $n - 1$.

4. Studiul restului formulei combinate. Dacă $\Phi_j(x)$ este funcția de influență (9), corespunzătoare formulei de cuadratură j, $j = \overline{1, r}$ din familia de formule (12), atunci restul formulei combinate (13) se scrie sub forma

$$\rho(f) = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{d_j}{b-a}\right)^{r} \int_a^b \Phi_j(x) f^{(n)}\left(u_{j-1} + d_j\frac{x-a}{b-a}\right) dx. \tag{15}$$

Fie $W^r(M; a, b)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, clasa funcțiilor de definite pe $[a, b]$ cu $f^{(r-1)}(x) \in C[a, b)]$ și $f^{(r)}(x)$ continuă pe porțiuni și satisfăcînd condiția $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

TEOREMA 1. *Dacă $f \in W^n(M; a, b)$, atunci pentru restul formulei de cuadratură* (13) *are loc evaluarea exactă:*

$$\rho(W^n(M; a, b), d_1, d_2, \ldots, d_r) = \sup_{f\in W^n(M;\, a,b)} |\rho(f)| = M \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{d_j}{b-a}\right)^{n+1} \int_a^b |\Phi_j(x)| d x. \tag{16}$$

Demonstrație. Pentru $f \in W^n(M; a, b)$, din (15) avem:

$$|\rho(f)| \leqslant M \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{d_j}{b-a}\right)^{n+1} \int_a^b |\Phi_j(x)|\, dx.$$

Vom arăta că există o funcție $f_* \in W^n(M, a, b)$ pentru care inegalitatea devine egalitate.

Fie f_j o funcție definită pe intervalul $[u_{j-1}, u_j]$ astfel încît derivata de ordinul n să fie continuă pe porțiuni și să satisfacă condiția

$$f_j^{(n)}\left(u_{j-1} + d_j \frac{x-a}{b-a}\right) = M \operatorname{sign} \Phi_j(x),\ j = \overline{1, r}. \tag{18}$$

Definim $f_*(x) = f_1(x)$ pe intervalul $[u_0, u_1]$. Dacă f_* a fost definită pe $[u_0, u_{j-1}]$ și ea are în extremitatea u_{j-1} derivate egale cu

$$f_*(u_{j-1}) = C_{j-1,0},\ f_*'(u_{j-1}) = C_{j-1,1}, \ldots, f_*^{(n-1)}(u_{j-1}) = C_{j-1,n}$$

atunci definim

$$f_*(x) = f_j(x) + P_{n-1,j}(x) \tag{19}$$

pe intervalul $[u_{j-1}, u_j]$, unde $P_{n-1,j}(x)$ este un polinom de gradul $n-1$, ales astfel ca membrul al doilea din (19) să aibă în punctul u_{j-1} derivatele pînă la ordinul $n-1$ inclusiv, respectiv egale cu numerele $C_{j-1,0}, C_{j-1,1}, \ldots, C_{j-1,n}$, $j = 2, 3, \ldots, r$.

Astfel folosind inducția, funcția f_* este bine definită pe intervalul $[a, b]$. Ușor se verifică faptul că $f_* \in W^n(M; a, b)$ și că pentru f_* în (17) are loc egalitatea.

Observația 4. Teorema 1 generalizează rezultatele lui S. M. Nikolski [6], date în cazul formulelor compuse de cuadratură.

§5. Formule combinate de cuadratură optimale. Am văzut la teorema 1 că pentru $f \in W^n(M; a, b)$ restul formulei combinate (13) are evaluarea exactă dată de (16). Acum, ne punem problema determinării mărimilor $d_1, d_2, \ldots, d_r$ (prin urmare, implicit, să determinăm diviziunea intervalului $[a, b]$), astfel încît evaluarea exactă (16) a restului să fie minimă.

Rezolvarea acestei probleme revine la determinarea punctelor de minim condiționat ale funcției

$$K(d_1, d_2, \ldots, d_r) = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{d_j}{b-a}\right)^{n+1} \int_a^b |\Phi_j(x)|\, dx$$

cu condiția

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{d_j}{b-a} = 1.$$

Utilizînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange, se găsește

$$d_i = (b-a)\left[\sqrt[n]{\int_a^b |\Phi_i(x)|\,dx}\;\sum_{j=1}^{r} 1/\sqrt[n]{\int_a^b |\Phi_j(x)|\,dx}\right]^{-1}, \quad i=\overline{1,r} \tag{20}$$

iar

$$\min_{d_1,d_2,\ldots,d_r} K(d_1,d_2,\ldots,d_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} 1/\sqrt[n]{\int_a^b |\Phi_j(x)|\,dx}\right)^{-n} \tag{21}$$

Așadar are loc:

TEOREMA 2. *Dintre toate formulele combinate de cuadratură* (13), *cea optimală în sensul minimizării evaluării exacte a restului, pe clasa de funcții* $W^n(M; a, b)$, *se obține pentru* d_j, $i=\overline{1,r}$, *date de* (20). *Estimația optimală a restului este dată de mărimea*

$$\rho(W^n(M; a, b)) = M\left(\sum_{j=1}^{r} 1/\sqrt[n]{\int_a^b |\Phi_j(x)|\,dx}\right)^{-n}. \tag{22}$$

6. **Exemplu de formulă combinată de cuadratură optimală.** Dacă considerăm că fiecare din primele k, $0 \leqslant k \leqslant r$, formule ale familiei de formule de cuadratură (12) coincide cu formula lui Simpson (v. [5], Cap. II, §1) și că fiecare formulă din celelalte $r-k$ formule ale familiei (12) coincide cu formula lui Newton (v. [5], Cap. II §2), atunci formula combinată (13) conduce la formula de cuadratură (v. [2])

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{d_1}{6}f(a) + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{d_j+d_{j+1}}{6}f(a+d_1+d_2+\ldots+d_j) + \\ &+\sum_{j=1}^{k}\frac{2d_j}{3}f\left(a+d_1+\ldots+d_{j-1}+\frac{d_j}{2}\right)+\left(\frac{d_k}{6}+\frac{d_{k+1}}{6}\right)f(a+d_1+\ldots+d_k)+\\ &+\sum_{j=k+1}^{r-1}\frac{d_j+d_{j+1}}{8}f(a+d_1+\ldots+d_j)+\frac{d_r}{8}f(b)+\\ &+\sum_{j=k+1}^{r}\frac{3d_j}{8}f\left(a+d_1+\ldots+d_{j-1}+\frac{d_j}{3}\right)+\\ &+\sum_{j=k+1}^{r}\frac{3d_j}{8}f\left(a+d_1+\ldots+d_{j-1}+\frac{2d_j}{3}\right)+\rho_{S_k,N_{r-k}}(f),\end{aligned} \tag{23}$$

unde $\rho_{S_k,N_{r-k}}(f)$ este restul formulei; S_k și N_{r-k} ne indică faptul că formula lui Simpson s-a aplicat de k ori și formula lui Newton de $(r-k)$ ori, $k=\overline{0,r}$.

Formula (23) are gradul algebric de exactitate egal cu trei.

Pentru restul formulei (23), din (16) se găsește evaluarea exactă:

$$\rho_{S_k, N_{r-k}}(W^4(M\,;a,b)\,;d_1,d_2,\ldots,d_r) = \frac{M}{6!}\left(\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k} d_j^5 + \frac{1}{9}\sum_{j=k+1}^{r} d_j^5\right), \quad k=\overline{0,r} \tag{24}$$

Pentru $k = r$ din (23) rezultă formula generalizată a lui Simpson, studiată de Gh. C o m a n [3], iar pentru $k = 0$ se obține formula generalizată a lui Newton dată în [1].

Utilizînd teorema 2 găsim : dintre toate formulele combinate de cuadratură (23), formula definită de mărimile

$$d_i = \frac{\sqrt{2}\,(b-a)}{k\sqrt{2} + (r-k)\sqrt{3}}, \quad i = \overline{1,k}$$

$$d_i = \frac{\sqrt{3}\,(b-a)}{k\sqrt{2} + (r-k)\sqrt{3}}, \quad i = \overline{k+1,r}, \quad k = \overline{0,r}$$

este formula optimală în sensul minimizării evaluării exacte a restului, pe clasa $W^4(M\,;a,b)$. Estimația optimală a restului este

$$\rho(W^4(M\,;a,b)) = \frac{M(b-a)^5}{720\,[k\sqrt{2} + (r-k)\sqrt{3}]^4}, \quad k = \overline{0,r}. \tag{26}$$

BIBLIOGRAFIE

1. D. A c u, *O generalizare a formulei de cvadratură a lui Newton*, St. Cerc. Mat., **23**, 7 (1971), 1003–1008.
2. D. A c u, *O formulă combinată de cvadratură*, St. Cerc. Mat., **24**, 3 (1972), 317–324.
3. G h. C o m a n, *O generalizare a formulei de cuadratură a trapezelor și a formulei lui Simpson*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Phys., **14**, 2 (1969), 53–58.
4. A. G h i z z e t t i, A. O s s i c i n i, *Quadrature formulae*, Akad. Verlag, Berlin, 1970.
5. D. V. I o n e s c u, *Cuadraturi numerice*, Ed. tehnică, București, 1957.
6. S. M. N i k o l s k i, Kvadraturnie formulî, Nauka, Moskva, 1958 (ediția I), 1974 (ediția II).
7. J. R a d o n, *Restausdrüche bei interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*, Monatshefte fur Math. und Physik, 42 (1935), 389–396.

FORMULES COMBINÉES DE QUADRATURE — OPTIMALES

(R é s u m é)

Dans le présent travail on obtient des formules optimales de quadrature pour les formules combinées de quadrature. On partage l'intervalle $[a, b]$ en r intervalles partiaux $[u_{j-1}, u_j]$, $j = \overline{1,r}$, définis par les points (11) et on considère une famille (12) de o formules de quadrature élémentaire

au degré algébrique d'exactitude $n-1$. On calcule $\int_{u_{j-1}}^{u_j} f(x)dx$ employant la formule j de la famille (12), $j = \overline{1,r}$ et on obtient la formule de quadrature (13) au reste donné par (14). La formule (13) avec le reste donné par (14) s'appelle *la formule combinée de quadrature correspondant à la famille de formules* (12) ou, tout simplement, *la formule combinée de quadrature*. On donne l'évaluation exacte de reste de la formule combinée (13) pour la classe de fonctions $W^n(M; a, b)$. On démontre :

1. Si $f \in W^n(M; a, b)$, pour le reste de la formule combinée de quadrature (13) la formule optimale dans le sens de la minimisation de (16).

2. De toutes les formules combinées de quadrature (13) la formule optimale dans le sens de la minimisation de l'évaluation exacte du reste, pour la classe de fonctions $W^n(M; a, b)$ est obtenue pour d_i, $i = \overline{1,r}$, données par (20). L'estimation optimale du reste est donnée par (22).

Au professeur D. V. Ionescu
pour son 80e anniversaire

SUR UN THÉOREME DE D. JACKSON

MARGARETA FRENKEL

Le théorème de D. Jackson [1] sur le problème du minimum d'une intégrale a été utilisé par l'Acad. P. Turán. Le Prof. D. V. Ionescu a remarqué dans son cours, que la démonstration de Jackson peut être simplifiée pour les besoins de l'analyse numérique, et nous a proposé de faire cette démonstration.

Dans le présent travail, nous reprenons le théorème de Jackson et nous présentons la démonstration suivante.

Dans le théorème de Jackson que nous considérons dans ce travail il s'agit de minimiser l'intégrale définie

$$\delta_{2s}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s} dx \tag{1}$$

oú p est une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et positive sur l'intervalle (a, b), s est un nombre naturel et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des coefficients réels.

On démontre qu'on peut déterminer les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une manière unique, pour que l'intégrale considérée soit minimum, et que ces paramètres sont donnés par la solution du système d'équations

$$\int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s-1} x^h dx = 0 \qquad h = \overline{0, n-1} \tag{2}$$

Pour cela nous considérons la fonction

$$w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_a^b p(x)(\lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots \lambda_n)^{2s} dx \tag{3}$$

et nous constatons qu'elle a les propriétés suivantes

1° *On a*

$$w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \delta_{2s}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

2° $w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *est un polynôme homogène de degré* $2s$, ce qui veut dire, qu'on peut écrire

$$w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Sigma w_{i_0 i_1 \ldots i_n} \lambda_0^{i_0} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n} \text{ avec } i_0 + i_1 + \ldots + i_n = 2s$$

3° *On a* $w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \geqslant 0$ *et*

$w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ *si, et seulement si*

$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$. Ces propriétés sont évidentes.

4° *On peut déterminer deux nombres positifs* α *et* β, *de manière que*

$$\alpha\,|\lambda|^{2s} \leqslant w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \beta\,|\lambda|^{2s} \tag{4}$$

où

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}$$

En effet, considérons l'ensemble des systèmes de nombres $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ pour lesquels $|\mu| = 1$. La fonction $w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ considérée sur cet ensemble étant continue, il existe les nombres

$$\alpha = \inf w\,(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,; \quad |\lambda| = 1$$

$$\beta = \sup w\,(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad |\lambda_1| = 1$$

où $\alpha > 0$ la fonction $w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ étant positive pour $|\lambda| = 1$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un système quelconque de nombres réels, on peut déterminer un système de nombres $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ où $|\mu|$ et un nombre positif l de manière que

$$\lambda_i = l\mu_i \quad i = \overline{0, n} \quad |\lambda| = l$$

La fonction w $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ étant un polynôme homogène de degré $2s$, nous avons

$$w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = l^{2s} w(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

et par suite

$$\alpha\,|\lambda|^{2s} \leqslant w(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \beta\,|\lambda|^{2s}$$

Cela étant, remplaçons dans l'intégrale (3) $\lambda_0 = 1$. Cette intégrale devient alors une fontion $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

$$w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s} dx$$

qui est fondamentale pour cette démonstration et sera étudiée par la suite.

Les inégalités (4) deviennent

$$\alpha(1 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)^s \leqslant w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \beta\,(1 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)^s$$

Nous allons associer à la fonction $w\,(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *le nombre* ν, *défini par l'équation*

$$\alpha(1 + \nu^2)^s = \beta, \text{ où } \nu^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2$$

On aura

$$\nu^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{s}} - 1$$

La fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a plusieurs propriétés:

Première propriété. On a $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) > \beta$, pour $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 < \nu^2$.

En effet on a $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \geqslant \alpha(1 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)^s$ et pour $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > \nu^2$ on aura

$$w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) > (1 + \nu^2)^s = \alpha \frac{\beta}{\alpha} = \beta$$

Seconde propriété. La fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ considérée pour $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \leqslant \nu^2$ est une fonction continue définie sur un ensemble borné et fermé. Elle atteint alors son infimum en un point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ et nous pouvons écrire

$$I = \inf_{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \leqslant \nu^2} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = w(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$$

Troisième propriété. On a $I = \inf_{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \leqslant \nu^2} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \beta$

Remarquons d'abord que le point $(0, 0, \ldots, 0)$ appartient à l'ensemble $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour lequel $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \leqslant \nu^2$ et $w(1, 0, \ldots, 0) \leqslant \beta$.

Quatrième propriété. La fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ considérée pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ a un infimum atteint au moins dans un point de $\mathbf{R}^n$.

Nous remarquons que, si nous considérons la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \geqslant \nu^2$, nous avons d'après la première propriété $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) > \beta$. Mais $I = \inf_{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \leqslant \nu^2} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \beta$. Donc I est l'infimum de la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et il est atteint au point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) \in \mathbf{R}^n$.

Cinquième propriété. Si $I = \inf_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = w(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ *alors on a les formules*

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda_1}(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial w}{\partial \lambda_n}(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) = 0$$

En effet, le point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ où la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ atteint son infimum est un point intérieur, donc un *point de minimum*.

Sixième propriété. Le point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ *où la fonction* $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *atteint son infimum pour* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ *est unique.*

Cette propriété était démontrée par le prof. D. V. Ionescu. On suppose qu'il existe deux points différents $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$, $(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$ où l'infimum est atteint.

On a alors

$$I = \inf_{(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbf{R}^n} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = w(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) = w(1, \lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$

Considérons les polynômes

$$u(x) = x^n + \lambda_1^0 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n^0, \quad v(x) = x^n + \lambda_1' x^{n-1} + \ldots + \lambda_n'.$$

Ils peuvent coïncider en un certain nombre de points $c_1, c_2, \ldots, c_q$ de l'intervalle $[a, b]$ où $q \leqslant n$.

Tenant compte de l'inégalité

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^{2s} < \left(\frac{u^{2s} + v^{2s}}{2}\right)$$

valable pour $s = 1, 2, \ldots$ et $u \neq v$ nous pouvons écrire

$$\left(x^n + \frac{(\lambda_1^0 + \lambda_1')x^{n-1} + \ldots + (\lambda_n^0 + \lambda_n')}{2}\right)^{2s} < \frac{1}{2}(x^n + \lambda_1^0 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n^0)^{2s} +$$
$$+ \frac{1}{2}(x^n + \lambda_1' x^{n-1} + \ldots + \lambda_n')^{2s}$$

valable pour chaque intervalle (c_i, c_{i+1}), $i = \overline{0, q}$, où $c_0 = a$, $c_{q+1} = b$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par $p(x)$, où $x \in (c_i, c_{i+1})$, en intégrant et en ajoutant toutes ces inégalités, membre à membre, on trouve:

$$w\left(1, \frac{\lambda_1^0 + \lambda_1'}{2}, \ldots, \frac{\lambda_n^0 + \lambda_n'}{2}\right) < \frac{1}{2} w(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) +$$
$$+ \frac{1}{2} w(1, \lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$

Mais nous avons supposé que

$$w(1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) = w(1, \lambda_1', \ldots, \lambda_n') = \inf_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n} w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Il résulte que

$$w\left(1, \frac{\lambda_1^0 + \lambda_1'}{2}, \ldots, \frac{\lambda_n^0 + \lambda_n'}{2}\right) = \inf_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n} w(1, \lambda_1, \ldots \lambda_n)$$

ce qui est en contradiction avec la définition de l'infimum. De cette contradiction résulte l'unicité du point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ où la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ atteint son infimum.

Septième propriété. La fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ne peut avoir aucun minimum relatif, à part le minimum correspondant au point $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ où elle atteint son infimum.

Supposons qu'il existe un point $(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$ différent de $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ où la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ait un minimum relatif. Cela veut dire qu'il existe un nombre $\gamma > 0$, tel que pour tout point $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de γ-voisinage du point $(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$ on ait

$$w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) < w(1, \lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$

Considérons les polynômes

$$\varphi_{\lambda 0}(x) = x^n + \lambda_1^0 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n^0, \varphi_{\lambda'}(x) = x^n + \lambda_1' x^{n-1} + \ldots + \lambda_n'$$

et

$$\varphi(x) = A\varphi_{\lambda 0}(x) + B\varphi_{\lambda'}(x)$$

où A et B sont deux nombres positifs, $A + B = 1$.

Tenant compte de l'inégalité

$$(Au + Bv)^{2s} < Au^{2s} + Bv^{2s}$$

valable pour $s = 1, 2, \ldots$ et $u \neq v$, A, B étant deux nombres réels positifs $A + B = 1$, nous pouvrons écrire :

$$(\varphi(x))^{2s} < A(\varphi_{\lambda 0}(x))^{2s} + B(\varphi_{\lambda'}(x))^{2s}$$

valable pour les valeurs x pour lesquelles $\varphi_{\lambda 0}(x) \neq \varphi_{\lambda'}(x)$. Par des raisonnements analogues on obtient que pour $A < 1$,

$$A|\lambda_i' - \lambda_i^0| < \varepsilon, \ i = \overline{1,n}, \ \varepsilon > \gamma \text{ on a}$$

$$w(1, A\lambda_1^0 + B\lambda_1', \ldots, A\lambda_n^0 + B\lambda_n') < w(1, \lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$

qui est contraire à l'hypothèse que la fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ait un minimum en $(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$.

Huitième propriété. La fonction $w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n'a pas de maximum. On démontre cette propriété par des raisonnements analogues aux précédents.

Par les propriétés de la fonction

$$w(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s}\, dx$$

on a démontré qu'elle a un minimum unique égal à son infimum atteint au point $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ et que ces nombres sont donnés par le système (2).

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Jackson, *On functions of closest approximation*, Trans. of the Am. Math. Soc. 22(1921), 117–128.

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI JACKSON

(Rezumat)

În prezenta lucrare se face o demonstrație a teoremei lui Jackson asupra minimului integralei

$$\delta_{2S}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s}\, dx$$

Se demonstrează că coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ai polinomului minimizant, al integralei considerate sînt determinați de ecuațiile

$$\int_a^b p(x)(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)^{2s-1} x^h\, dx = 0 \qquad h = \overline{0, n-1}$$

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

To Professor D. V. Ionescu on his 80th birthday

ON SOME NUMERICAL METHODS IN THE STUDY OF RELATIVISTIC POLYTROPIC MODELS

VASILE URECHE, NICOLAE LUNGU, TIBERIU OPROIU

1. **Introduction.** The great spreading known in the last decades by the mathematical modelling in the theory of the internal structure of stars is fact of common knowledge. The extension of this theory to the relativistic case points out new aspects of the spacetime geometry in the neighbourhood of bodies with strong gravitational fields.

This paper deals with some aspects of the theory of polytropic models by using numerical investigations. The polytropic models are more and more used in the study of stellar structure, both in the newtonian approximation of the gravitation, and in the relativistic case, because Cauchy problems appearing here can easily be solved numerically.

In this manner, numerical values for the critical radii:

$$R_{\text{crit}} = R_g[f(\eta_s)]_{p_c=1/3}, \quad R_{\text{crit}} = R_g[f(\eta_s)]_{p_c=1},$$

and critical masses:

$$M_{\text{crit}} = \beta' M_{\odot} \text{ for } p_c = 1/3 \text{ and } p_c = 1, \text{ respectively,}$$

are deduced. Also, the behaviour of the space-time metric in the neighbourhood of such bodies is pointed out.

The relativistic polytropes are used to the study of internal stellar structure both in the static case, and in the dynamic one [1], [2], [3].

The differential equations are written in the non-dimensional variables introduced by V. Ureche [2]. The models which we described depend on the parameters n and p_c.

2. **Basic Equations.** In order to study the structure and stability of the relativistic polytropes we use the non-dimensional variables introduced by the transformation [2]:

$$r = a\eta, \quad \rho = \rho_c\psi, \quad P = \rho_c c^2 p, \quad M(r) = M^* m, \tag{1}$$

where the notations are the usual ones. If:

$$a^2 = c^2/(4\pi G\rho_c), \quad M^* = 4\pi\, a^3 \rho_c, \tag{2}$$

then equilibrium equations become:

$$dm/d\eta = \eta^2\psi,$$
$$dp/d\eta = -(\psi + p)(m + \eta^3 p)/[\eta^2(1 - 2m/\eta)]. \tag{3}$$

The polytropic equation $P = K\rho^{1+1/n}$, with the change to Emden's variable θ, $\rho = \rho_c\theta^n$, and the notation $p_c = K\rho_c^{1/n}/c^2$, becomes:

$$p = p_c\theta^{n+1}. \tag{4}$$

Then the hydrostatic equilibrum equation can be written in the form:

$$\eta^2(d\theta/d\eta)\eta p_c(n + 1)(1 - 2m/\eta)/(1 + p_c\theta) + \eta m + \eta^4\theta^{n+1}p_c = 0. \tag{5}$$

With these transformations, the system (3) becomes:

$$\eta^2(d\theta/d\eta)(1 - 2m/\eta)/(1 + p_c\theta) + m/p_c(n + 1) + (dm/d\eta)\eta\theta/(n + 1) = 0, \quad dm/d\eta = \eta^2\theta^n. \tag{6}$$

The system (6) replaces the system (2.25) — (2.26) from [1]. Its integration can be performed with the boundary conditions: $\theta(0) = 1$, $m(0) = 0$.

3. **Critical Radii.** By using the transformation $\eta = C_1\xi_1$, $m = C_2v$, where $C_1 = \sqrt{p_c(n + 1)}$, $C_2 = \sqrt{p_c^3(n + 1)^3}$, a relation between the systems (6) and (2.25) — (2.26) can be established. So, it results $\eta_s = \sqrt{p_c(n + 1)}\,\xi_1$. This method allows to simplify both the calculations and the expressions of parameters. For instance:

$$a^2 = c^2/(4\pi G\rho_c) = c^2(n + 1)^{3/2}p_c^{3/2}v(\xi_1)/(4\pi G\eta_s^3/3), \tag{7}$$

Form the expression of A^2, [1], we obtain:

$$A^2a^2 = 1/(n + 1)\,p_c. \tag{8}$$

As $\eta_s = R/a$ and $\xi_1 = \eta_s/\sqrt{(n + 1)p_c}$, we can write:

$$a = (2GM/c^2)/[2v(\xi_1)(n + 1)^{3/2}p_c^{3/2}], \tag{9}$$

which leads to:

$$R = R_g\xi_1/[2v(\xi_1)(n + 1)p_c], \quad M^* = M(R_g/R)^3\xi_1^3/[8v^4(\xi_1)(n + 1)^{9/2}p_c^{9/2}]. \tag{10}$$

We introduce the notation $f(\xi_1) = \xi_1/[2v(\xi_1)(n + 1)p_c]$. From physical considerations we have two possibilities [2]: $p_c \in [0,1/3]$ and $p_c \in [0,1]$. In the first case $f(\xi_1)$ reaches a minimum value for $p_c = 1/3$, while in the second case — for $p_c = 1$. So, we find the critical values of the radius R, equal to:

$$R_{\text{crit}} = R_g[f(\xi_1)]_{p_c=1/3} \quad \text{or} \quad R_{\text{crit}} = R_g[f(\xi_1)]_{p_c=1}. \tag{11}$$

With the new variables, $f(\xi_1)$ becomes:

$$f(\eta_s) = \eta_s/2m_s, \quad m_s = m(\eta_s) \tag{12}$$

and the critical radii can be computed with the formulae:

$$R_{\text{crit}} = R_g[f(\eta_s)]_{p_c=1/3}, \quad R_{\text{crit}} = R_g[f(\eta_s)]_{p_c=1}. \tag{13}$$

The configuration is stable for $R > R_{crit}$ and unstable in the opposite case. The central density to mean density ratio can be computed by using the formula:

$$\rho_c/\bar{\rho} = \eta_s^3/3m_s. \tag{14}$$

4. **Critical Masses.** If we denote $\alpha = f(\eta_s) = \eta_s/2m_s$, $m_s = m(\eta_s)$, then the critical masses, expressed in solar masses, result from [4]:

$$M \leqslant M_{crit} = 13.58\alpha^{-3/2}(10^{17}/\bar{\rho}^{1/2})M_\odot. \tag{15}$$

As $\bar{\rho} = \rho_c/\beta$, $\beta = \eta_s^3/3m_s$, and the values of β can be known by integrating the system (6), then, by considering $\rho_c = 10^{18}\ kg/m^3$, we can calculate $\bar{\rho}$ and then M_{crit}. The values of β depend on n and p_c.

5. **Characteristics of the Space-Time Metric in the Neighbourhood of Relativistic Polytropic Models.** The hydrostatic equilibrium equations for the relativistic case were deduced in the case of spherical symmetry. Tolman's metric has the form:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\Phi^2),$$

where ν and λ are functions of r. In the case of central symmetry, the metric ds is the same for all the points for which $r = \text{const}$.

As the hydrostatic equilibrium equation, the functions $\lambda\ (r)$, $\nu(r)$ and e^λ, e^ν, respectively, can be obtained from Einstein's equations. With the non-dimensional variables, they have the form:

$$e^{-\lambda} = \begin{cases} 1 - 2m/\eta, & \text{for } \eta < \eta_s \\ 1 - 2m_s/\eta, & \text{for } \eta \geqslant \eta_s, \end{cases} \tag{16}$$

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - 2m_s/\eta, \quad \text{for } \eta \geqslant \eta_s, \tag{17}$$

$$(\psi + p)\ (d\nu/d\eta)/2 + dp/d\eta = 0, \text{ for } \eta < \eta_s, \tag{18}$$

with the boundary condition;

$$\lim_{\eta \nearrow \eta_s} \nu(\eta) = \nu\ (\eta_s) \equiv \nu_s, \tag{19}$$

where (17) gives the value $\nu_s \equiv \nu(\eta_s)$.

Making $\psi = \theta^n$, $p = p_c\theta^{n+1}$ in (18), we obtain:

$$(\theta^n + p_c\theta^{n+1})\ (d\nu/d\eta)/2 + d(p_c\theta^{n+1})\ /d\eta = 0,$$

or, after elementary calculations:

$$d\nu/d\eta + [2p_c(n+1)/(1+p_c\theta)]\, d\theta/d\eta = 0,\ \eta < \eta_s \tag{20}$$
$$\lim_{\eta \nearrow \eta_s} \nu(\eta) = \nu(\eta_s) = \nu_s.$$

The function $\nu = \nu(\eta)$ can be easily computed with the formula (17) for $\eta \geq \eta_s$, or, by integrating the equation (20) for $\eta < \eta_s$. As equation (20) contains the functions θ and $d\theta/d\eta$, we determine them from the system (6). After all, we have the system of differential equations:

$$\eta^2[(1-2m/\eta)/(1+p_c\theta)]\, d\theta/d\eta + m/p_c(n+1) + [\eta/(n+1)]\,\theta\, dm/d\eta = 0,$$
$$dm/d\eta = \eta^2\theta^n, \tag{21}$$
$$d\nu/d\eta + [2p_c(n+1)/(1+p_c\theta)]\, d\theta / d\eta = 0,$$

with the voundary conditions:

$$\theta(0) = 1,\ m(0) = 0,\ \nu_s \equiv \nu(\eta_s) = \ln(1 - 2m_s/\eta_s). \tag{22}$$

6. **Applications.** The system (21), with the boundary conditions (22), was integrated by Runge-Kutta method (Gill's variant), by using a computer FELIX C-256 and a program written in FØRTRAN IV. The functions θ and m are determined and listed for different values n and p_c (Table 1).

Table 1

$n = 2$ $p_c = 1$			$n = 2.5$ $p = 1/3$		
η	θ	m	η	θ	m
0.0000	1.00000	0.00000	0.0000	1.00000	0.00000
0.1780	0.98607	0.00185	0.2180	0.98206	0.00336
0.3780	0.93948	0.01671	0.3180	0.96222	0.01012
0.6980	0.81466	0.08882	0.4980	0.90995	0.03580
1.2580	0.54878	0.32894	1.0180	0.67949	0.20239
2.7580	0.15765	0.83255	2.1580	0.25534	0.53191
3.5580	0.09015	0.94590	3.1580	0.11125	0.61843
5.1180	0.31776	1.03669	4.4580	0.03301	0.64116
7.1780	0.00096	1.05463	5.5380	0.00028	0.64232
7.2780	0.00001	1.05463	5.5510	0.00001	0.64232

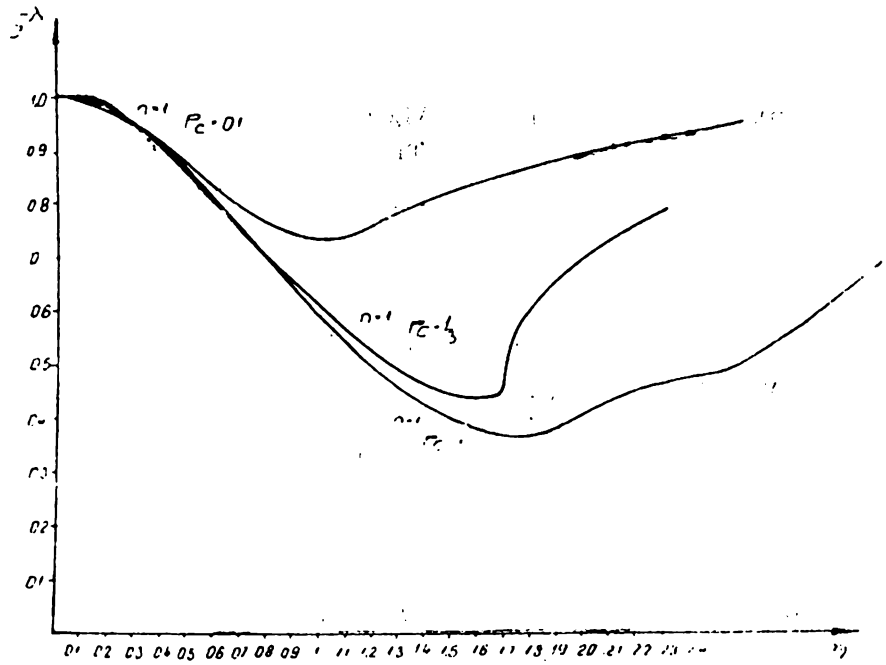

Fig. 1

The critical radii are determined by $f(\eta_s)$, $f(\eta_s) \in [1.6, 35.5]$ for $n = 1$ $p_c = 1$ and $n = 3$, $p_c = 1$, respectively, while the critical masses are deter. mined by $M_{crit} \in [2.8, 7.4]$ for $n = 1$, $p_c = 1/3$ and $n = 2$, $p_c = 1$, respectively-
The behaviour of the quantity $e^{-\lambda}$ as function of η is represented in Figure 1.

REFERENCES

1. Tooper, R. F., *General relativistic polytropic fluid spheres*, Astrophys. J., **140**, 2 (1964), 434–459.
2. Ureche, V., *Structure of relativistic stellar configurations. Linear stellar model in GRT*, Rev. Roum. Phys., 25, 3 (1980), 301–310.
3. Ureche, V., Lungu, N., Oproiu, T., *Critical radii of relativistic polytropic stars*, Preprint (Central Institute of Physics), A–5 (1980), 1–9.
4. Ureche, V., Lungu, N., Oproiu, T., *Critical masses of relativistic polytropic stars*, Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups, GR 9, Jena, July 14–19, 1980, 297–298.

ASUPRA UNOR METODE NUMERICE ÎN STUDIUL MODELELOR POLITROPICE RELATIVISTE

(Rezumat)

În lucrarea de față se abordează unele aspecte ale teoriei modelelor prin investigații numerice. Sînt deduse razele critice $R_{crit} = R_g[f(\eta_s)]_{p_c=1|3,\ 1}$, masele critice şi se studiază comportarea metricei spaţiu-timp în vecinătatea unor corpuri politropice relativiste.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERATORIALE NELINIARE ÎN SPAŢII FRÉCHET PRINTR-O METODĂ ANALOGĂ CU A PARABOLELOR TANGENTE

SEVER GROZE

Fie ecuaţia operatorială

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde $P: X \to X$ aplică continuu spaţiul Fréchet X în el însuşi, θ fiind elementul nul al spaţiului.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) utilizăm algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n) - \Lambda_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Lambda_{n-1} P(x_{n-1}) \bar{\Lambda}_n P(x), \tag{1'}$$
$$n = 0, 1, \ldots$$

unde $\Lambda_n = [P_{x_n, x_{n-1}})^{-1}$, $\bar{\Lambda}_n = [P_{x_n, x_{n-2}}]^{-1}$, $P_{x', x''}$ reprezentînd diferenţe divizate generalizate [1] a operatorului P, metodă cunoscută sub denumirea de „analoga parabolelor tangente" [2].

Ecuaţia (1) presupunem că este majorată [3] de către ecuaţia reală

$$Q(z) = 0 \tag{2}$$

unde $Q: I \to \mathbf{R}$ este o funcţie monotonă definită în $I \subset \mathbf{R}$ şi care ia valori de semne contrarii la capetele lui. Acestei ecuaţii îi asociem algoritmul

$$z_{n+1} = z_n - \frac{Q(z_n)}{Q_{z_n, z_{n-1}}}\left(1 + \frac{Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} \cdot Q(z_{n-1})}{Q_{z_n, z_{n-2}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}}}\right). \tag{2'}$$

Privitor la existenţa şi unicitatea ecuaţiei (1) demonstrăm

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţiile iniţiale* x_0, x_{-1}, x_{-2}, *respectiv* z_0, z_{-1}, z_{-2} *sînt satisfăcute condiţiile*:

(i) *Există operatorul* $\Lambda = -[P_{x^{(1)}, x^{(2)}}]^{-1}$ *astfel ca*

$$\rho_{X;X}(\Lambda) \leqslant -\frac{1}{Q_{z^{(1)}, z^{(2)}}} < B, \quad \forall\, x^{(1)}, \ x^{(2)} \in S$$

definită *de*

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0 \subset I, \ \ iar \ \ \rho_X(x_s - x_0) \leqslant z_0 - z_s$$
$$s = -1, -2$$

(ii) $$\rho_X(P(x_i)) \leqslant Q(z_i) \quad i = 0,\ -1,\ -2$$

(iii) $$\rho_{X^2,X}(P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}}) \leqslant Q_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)}}$$

$$x^{(i)} \in S, \quad z^{(i)} \in I, \quad i = \overline{1,3}\,;$$

(iv) $$\rho_{X^3,X}(P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}}) \leqslant Q_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)}}$$

$$x^{(i)} \in S, \quad z^{(i)} \in I, \quad i = \overline{1,4}$$

atunci ecuaţia (1) *are o soluţie* x^*, *soluţie care este limita şirului obţinut cu ajutorul lui* (1'), *avînd loc evaluarea*

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n$$

z^* *fiind soluţia unică a ecuaţiei* (2), *limita şirului* (z_n) *generat de* (2').

Demonstraţie. Se arată pentru început că şirul (z_n) generat de algoritmul (2') converge către z^*, soluţia ecuaţiei (2).

Din presupunerea că $z_{-2} \leqslant z_{-1} \leqslant z_0$ şi ţinînd seama de algoritmul (2'), în baza condiţiilor teoremei, deducem $z_1 \geqslant z_0$. Utilizînd inducţia, se deduce că şirul (z_n) este monoton crescător. El va avea o limită dacă este mărginit superior.

Considerăm funcţia auxiliară

$$F(z) = z - \lambda Q(z) - \mu Q^2(z) \tag{3}$$

unde λ şi μ urmează să fie determinaţi în mod convenabil, se observă că dacă z^* este o soluţie a ecuaţiei majorante (2), vom avea $F(z^*) = 0$.

Punînd condiţiile $F_{z_n, z_{n-1}} = 0$ şi $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} = 0$, se obţine

$$\mu = -\frac{Q_{z_{n-1}, z_n, z_{n-2}}}{Q_{z_n, z_{n-1}} \cdot Q_{z_n, z_{n-2}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}}} \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{Q_{z_n, z_{n-1}}} + \frac{Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}}(Q(z_n) + Q(z_{n-1}))}{Q_{z_n, z_{n-1}} \cdot Q_{z_n, z_{n-2}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}}}.$$

În condiţiile teoremei $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3}} \geqslant 0$.

Într-adevăr acest lucru se observă analizînd semnul expresiei

$$F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3}} = -\frac{Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3}}}{Q_{z_n, z_{n-1}}} +$$

$$+ \frac{Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}}}{Q_{z_n, z_{n-1}} \cdot Q_{z_n, z_{n-2}} \cdot Q_{z_{n-1} z_{n-2}}} (Q_{z_n, z_{n-2}, z_{n-3}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}} +$$

$$+ Q_{z_n, z_{n-3}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3}}). \tag{5}$$

Ţinînd seama de expresiile lui λ şi μ, se arată uşor că

$$F(z_n) = z_{n+1}.$$

Considerînd atunci relaţia

$$F(z) = F(z_n) + F_{z_n, z_{n-1}}(z - z_n) + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}}(z - z_n)(z - z_{n-1}) + \\ + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z}(z - z_n)(z - z_{n-1})(z - z_{n-2}), \tag{6}$$

ţinînd seama de (5) şi de faptul că $F(z^*) = z^*$, vom avea

$$z^* = z_{n+1} + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z^*}(z^* - z_n)(z^* - z_{n-1})(z^* - z_{n-2}). \tag{6'}$$

Deoarece avem $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z^*} \geqslant 0$, se deduce

$$z^* - z_{n+1} \geqslant 0$$

deci şirul (z_n) dat de (2') este mărginit de către z^*.

Arătăm că limita lui este chiar z^*. Pentru aceasta, trecînd la limită în (2'), vom avea $\bar{z} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ şi deci $Q(\bar{z}) = 0$. Deoarece ecuaţia (2) are ca rădăcină pe z^*, rezultă $\bar{z} = z^*$.

Algoritmul (2') este deci convergent şi are ca limită pe z^*, soluţia ecuaţiei (2).

Demonstrăm în continuare că elementul x_1, calculat cu ajutorul algoritmului (1') aparţine sferei S.

Avem

$$x_1 = x_0 - \Lambda_0 P(x_0) - \Lambda_0 P_{x_0, x_{-1}, x_{-2}} \Lambda_{-1} P(x) \lambda \bar{\Lambda} P(x_0)$$

iar în baza ipotezelor

$$\rho_X(x_1 - x_0) \leqslant \frac{Q(z_0)}{Q_{z_0, z_{-1}}} + \frac{Q_{z_0, z_{-1}, z_{-2}} \cdot Q(z_{-1}) Q(z_0)}{Q_{z_0, z_{-1}} \cdot Q_{z_{-1}, z_{-1}} \cdot Q_{z_0, z_{-2}}} =$$

$$= \frac{Q(z_0)}{Q_{z_0, z_{-1}}} \left(1 + \frac{Q_{z_0, z_{-1}, z_{-2}} \cdot Q(z)_{-z}}{Q_{z_{-1}, z_{-2}} \cdot Q_{z_0, z_{-1}}}\right) = z_1 - z_0 \leqslant z' - z_0$$

ceea ce dovedeşte afirmaţia.

Considerăm în continuare formula

$$P(x_1) = P(x_0) + P_{x_0, x_{-1}}(x_1 - x_0) + P_{x_0, x_{-1}, x_{-2}}(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1}) + \\ + P_{x_0, x_{-1}, x_{-2}, x_1}(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_{-2}). \tag{7}$$

Deoarece avem prin ipoteză $\rho_X(x_i - x_0) \leqslant z_0 - z_i$, $i = -2, -1$, rezultă

$$\rho_X(x_1 - x_{-1}) \leqslant \rho_X(x_1 - x_0) + \rho_X(x_0 - x_{-1}) \leqslant z_1 - z_{-1}$$

$$\rho_X(x_1 - x_{-1}) \leqslant \rho_X(x_1 - x_0) + \rho_X(x_0 - x_{-1}) \leqslant z_1 - z_{-2}$$

și atunci din (7) deducem

$$\rho_X(P(x_1)) \leqslant Q(z_0) + Q_{z_0, z_{-1}}(z_1 - z_0) + Q_{z_0, z_{-1}, z_{-2}}(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1}) +$$

$$+ Q_{z_0, z_{-1}, z_{-2}, z_1}(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1})(z_1 - z_{-2}) = Q(z_1)$$

fapt ce dovedește că este îndeplinită și condiția 2° din teoremă.

Condițiile 1°, 3° și 4° rezultă din faptul că $x_1 \in S$.

Folosind inducția, se deduce

$$\rho_X(P(x_n)) \leqslant Q(z_n) \tag{8}$$

$x_n \in S$, iar

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant z_n - z_0 \leqslant z' - z_0.$$

Ținînd seama că

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \rho_X(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + \dots + \rho_X(x_{n+1} - x_n) \leqslant z_{n+p} - z_n \tag{9}$$

în baza presupunerilor făcute asupra șirului (z_n), deducem că (x_n) este un șir fundamental și admite o limită x^*, care verifică relația

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n$$

obținută prin operația de trecere la limită în (9).

Rămîne să arătăm că x^* este o soluție a ecuației operatoriale considerate. Pentru aceasta, din (8), în baza continuității lui $P(x)$ și $Q(z)$, se deduce

$$\rho_X(P(x^*)) \leqslant Q(z^*) = 0$$

și deci $P(x^*) = 0$.

În cadrul teoremei următoare evităm condiția de mărginire a operatorului invers Λ, presupunînd doar existența lui.

TEOREMA 2. Pentru elementele inițiale x_0, x_{-1}, x_{-2} respectiv z_0, z_{-1}, z_{-2}, avînd verificate condițiile

1° Există $\Lambda = -[P_{x^{(1)}, x^{(2)}}]^{-1}$, $\forall\, x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ definită de relația

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0 \subset I, \text{ iar}$$

$$\rho_X(x_i - x_0) \leqslant z_0 - z_i \quad i = -1, -2$$

2° $\rho_X(\Lambda P(x_i)) \leqslant BQ(z_i)$, $i = 0, -1, -2$, unde

$$B > -\frac{1}{Q_{z^{(1)}, z^{(2)}}}$$

3° $$\rho_{X^*,X}(\Lambda P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}}) \leqslant BQ_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)}}$$
$$x^{(i)} \in S,\ z^{(i)} \in I,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

4° $$\rho_{X^*,X}(\Lambda P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}}) \leqslant BQ_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)}}$$
$$x^{(i)} \in S,\ z^{(i)} \in I,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

rezultă afirmația teoremei 1

Demonstrație. Considerăm ecuația operatorială
$$\widetilde{P}(x) \equiv \Lambda\, P(x) = \theta$$
echivalentă cu (1), iar ca majorantă echivalenta ecuației $Q(z) = 0$,
$$\widetilde{Q}(z) \equiv BQ(z) = 0.$$

Se verifică ușor relațiile

1° $$\widetilde{\Lambda} = -[\widetilde{P}_{x^{(1)},x^{(2)}}]^{-1} = -[\Lambda P_{x^{(1)},x^{(2)}}]^{-1} = -I$$
$$\rho_{X,X}(\widetilde{\Lambda}) = 1 \equiv B_0$$

2° $$\rho_X(\widetilde{P}(x_i)) = \rho_X(\Lambda P(x_i)) \leqslant BQ(z_i) = \widetilde{Q}(z_i)$$
$$i = 0,\ -1,\ -2$$

3° $$\rho_{X^*,X}(\widetilde{P}_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}}) = \rho_{X^*,X}(\Lambda P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}}) \leqslant BQ_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)}}$$
$$= \widetilde{Q}_{z^{)1)},z^{(2)},z^{(3)}}$$
$$x^{(i)} \in S,\ z^{(i)} \in I,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

4° $$\rho_{X^*,X}(P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}}) \leqslant \rho_{X^*,X}(\Lambda P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(2)}}) \leqslant$$
$$\leqslant BQ_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)}} = \widetilde{Q}_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)}}$$
$$x^{(i)} \in S,\ z^{(i)} \in I,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

și atunci, în baza teoremei 1, rezultă existența soluției ecuației $P(x) = \theta$ și deci și pentru $P(x) = \theta$.

BIBLIOGRAFIE

1. G r o z e, S., *Asupra diferențelor divizate generalizate*, Anal. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, Secț. I, XVII, 2 (1971), 375–379.
2. B a l á z s, M., *Contribuții la studiul rezolvării ecuațiilor în spații Banach*, Teză de doctorat, Cluj, 1968.
3. K a n t o r o v i c i, L., V., *Prințip majorant i metoda N'iutona*, D.A.N., 74, 1 (1951), 17–20.

SOLVING OPERATORIAL NONLINEAR EQUATIONS DEFINED IN FRÉCHET SPACES BY USING AN ANALOGOUS TO THE TANGENTIAL PARABOLAE METHOD

(S u m m a r y)

The majorant principle [3] is applied for the proving of the convergence of an iterative method for the solving of the operator equation $P(x) = 0$. In this paper an analogical method with the method of tangent parabolas [2] is considered in Fréchet spaces.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

THÉORÈMES DE POINT FIX EN ESPACES PROBABILISTES DE PROXIMITÉ

CONSTANTIN DUMITRESCU

Dans les espaces de proximité classiques, on ne saurait introduire l notion de point fix, puisque, par les caractéristiques mêmes de l'espace il manque la possibilité d'avoir plusieurs degrés de proximité entre le points (si deux points sont „éloignés", on ne peut pas avoir une mesure d degré d'éloignement et s'ils sont „proches", ils coïncident). Il en est autrement pour les espaces probabilistes de proximité, où l'application P (voir la défini tion 1.1) décrit le degré de proximité entre deux ensembles, de même don entre deux points. Dans un tel espace, si deux points p et q, sont sûrement „proches" (c'est-à-dire $P(p, q) = 1$), ils coïncident, mais si le degré de proxi mité est plus petit que 1, les points sont différents.

Alors, étant donné une séquence de points $(p_n)_{n \in N}$, on peut demander qu'ils soient de plus en plus proches (à mesure que n croît).

Cette observation permet d'introduire la notion de contraction dans le espaces probabilistes de proximité, aussi bien que d'énoncer un théorème d point fix correspondante.

1. **Espaces probabilistes de proximité.** Pour l'espace probabiliste de pro ximité (e.p.p.), nous considérons la définition donnée en [1].

1.1. DÉFINITION. La paire (X, P) este un e.p.p. si X este un ensemb quelconque et P est une application de $\mathfrak{L}(X) \times \mathfrak{L}(X)$ à valeurs en [0, 1 qui satisfait :

(p_1) $P(A, B) = P(B, A)$ pour chaque A, $B \in \mathfrak{L}(X)$,

(p_2) $P(p, q) = 1$ exactement quand $p = q$, pour tout p, $q \in X$,

(p_3) $P(A, B \cup C) = \max(P(A, B), P(A, C))$,

(p_4) Si $P(A, B) < \lambda$, il existe $C \in \mathfrak{L}(X)$ de façon que $P(A, C) < \lambda$ $P(B, \bar{C}) < \lambda$, où $\bar{C}$ représente la complémentaire de C,

(p_5) $P(A, \emptyset) = 0$, pour tout $A \in \mathfrak{L}(X)$.

On peut démontrer que l'axiome (p_3) est équivalente à l'axiome :

(p_3') Si $P(A, B \cup C) \geqslant \lambda$, alors $P(A, B \geqslant \lambda$, $P(A, C) \geqslant \lambda$ et réciproquement.

1.2. DÉFINITION Dans l'e.p.p. (X, P), une séquence $(p_n)_{n \in N}$ converge $p \in X$ (nous écrivons $p \to p$) si pour n'importe quel μ de (0,1), il existe $n \in N$ de façon que si $m \geqslant n$, on a $P(p_m, p) \geqslant \mu$.

A lieu la propriété suivante :

1.3. PROPOSITION *Si $p_n \to p$, alors $P(p_n, q)$ converge à $P(p, q)$.* De *proposition* 1.3. *on déduit que si $p_n \to$ et $q_n \to q$ alors*

$$\lim_{m,n} P(p_n, q_m) = P(p, q).$$

1.4. DÉFINITION. Dans l'e.p.p. (X, P), la séquence $(p_n)_{n \in N}$ est Cauchy, si pour n'importe quel μ de $(0,1)$ il existe n_0 de façon que $P(p_n, p_m) \geqslant \mu$, si $n, m \geqslant n_0$.

L'espace (X, P) est complet si toute séquence Cauchy este convergente.

2. **Contractions dans les espaces probabilistes de proximité.** Nous donnons d'abord la notion de contraction.

2.1. DÉFINITION. Une application $T : (X, P) \to (X, P)$, est une φ-contraction si

$$P(T_p, T\ ) . \geqslant \varphi(P(p, q)) \ , \tag{1}$$

où $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ est inférieurement semicontinue et $\varphi(t) > t$, pour n'importe quel $t \neq 1$, (Nous avons noté $T(p) = T_p$).

Pour un point p_0 arbitraire de X, soit $(p_i)_{i \in N}$ la séquence des itérées de p_0, défini par :

$$p_1 = T_{p_0}, \ \dots \ p_{n+1} = T_{p_n}, \ \dots \tag{2}$$

Le théorème suivant en a lieu :

2.2. THÉORÈME. *Si (X, P) est complet et T est une φ-contraction, alors il existe un point fix unique s et, pour n'importe quel p_0 de X, la séquence définie à (2) converge à s.*

Démonstration. Soit p_0 un point arbitraire de X. Si on note

$$a_n = P(p_n, p_{n-1}) = P(T^n_{p_0}, T^{n-1}_{p_0}),$$

puisque T este une φ-contraction, on a

$$a_n = P(T^n_{p_0}, T^{n-1}_{p_0}) \geqslant \varphi(P(T^{n-1}_{p_0}, T^{n-2}_{p_0})) > P(T^{n-1}_{p_0}, T^{n-2}_{p_0}) = a_{n-1}$$

donc la séquence $(a_n)_{n \in N}$ est croissante. Soit $a = \lim a_n$. Montrons que $a = 1$. Si $a < 1$, dans la relation $a_n \geqslant \varphi(a_{n-1})$ en passant à la limite inférieure on déduit

$$a \geqslant \lim_{t \nearrow a} \inf \varphi(t) \geqslant \varphi(a) > a.$$

ce qui constitue une contradiction.

La séquence $(p_n)_{n \in N}$ est Cauchy, parce que si, par absurde, il y a μ dans $(0, 1)$ de façon que pour n'importe quel nombre $k \in N$ il existe $m_k, n_k \geqslant k$ ainsi que

$$b_k = P(p_{m_k}, p_{n_k}) < \mu \tag{3}$$

en notant par m_k le plus petit nombre qui est plus grand que n_k et pour lequel a lieu la relation (3), on obtenait

$$P(p_{m_k - 1}, p_{n_k}) \geqslant \mu. \tag{4}$$

De (3) on déduit qu'il existe un ensemble C dans X, ainsi que

$$P(p_{m_k}, C) < \mu \text{ et } P(p_{n_k}, \bar{C}) < \mu$$

et de (4) il résulte que $p_{m_k-1} \in C$. En effet, si $p_{m_k-1} \in \bar{C}$, nous avons

$$P(p_{n_k}, \bar{C}) = P(p_{n_k}, p_{m_k-1} \cup \{\bar{C} - p_{m_k-1}\}) =$$

$$= \max \{p(p_{n_k}, p_{m_k-1}), P(p_{n_k}, \bar{C} - p_{m_k-1})\} \geqslant \mu.$$

Il en résulte une contradiction. Mais alors, $a_{m_k} = P(p_{m_k}, p_{m_k-1}) < \mu$, ce qui est aussi une contradiction ($\lim a_n = 1$). Donc la séquence $(p_n)_{n \in N}$ est une séquence Cauchy. Alors il existe un point s ainsi que

$$\lim_n T^n_{p_0} = s.$$

c'est-à-dire, pour n'importe quel ε de $(0, 1)$ il existe n_ε de façon que si $n \geqslant n_\varepsilon$ nous ayons

$$P(T^n_{p_0}, s) > \varepsilon. \tag{5}$$

Démontrons que $T_s = s \cdot S'$ il n'en était pas ainsi, nous aurions $P(T_s, s) < u < 1$ donc il existe $D \subset X$ avec

$$P(T_s, D) < u \text{ et } P(s, \bar{D}) < u.$$

En prenant en (5) $\varepsilon = u$, nous avons $P(T^n_{p_0}, s) > u$, pour $n \geqslant n_u$. Il résulte que $T^n_{p_0} \in D$, donc $P(T^n_{p_0}, T_s) < u$. Alors

$$u > P(T^n_{p_0}, T_s) \geqslant \varphi(P(T^{n-1}_{p_0}, s)) > P(T^{n-1}_{p_0}, s),$$

pour n'importe quel $n \geqslant n_u$, ce qui est une contradiction. Démontrons l'unicité du point s. S'il existait encore un point t, avec $T_t = t$, alors

$$P(s, t) = P(T_s, T_t) \geqslant \varphi(P(s, t)) < P(s, t),$$

donc le point fix s este unique.

2.3. *Observation*. Soit la séquence $A = (p_n)_{n \in N}$. Dire que sa limite est p, veut dire $p \in A^\varepsilon$ pour n'importe quel $\varepsilon \in (0, 1)$, où $A^\varepsilon = \{x / P(x, A) \geqslant \varepsilon\}$ et alors il résulte que $p \in A^1$, parce que si $\lambda \leqslant \mu$ il résulte $A^\mu \subset A^\lambda$).

Nous appelerons un ensemble A *fermé* si $A^1 = A$. On obtient alors le résultat suivant:

2.4. Corollaire. *Si A est une partie fermée de l'e.p.p. (X, P), supposé complet, alors tout φ-contraction $T: A \to A$, a un point fix.*

La réciproque est également vraie, c'est-à-dire:

2.5. Proposition. *Si n'importe quel φ-contraction (φ supposée croissante) définie sur un sous-ensemble fermé de (X, P), a un point fix, alors (X, P) est complet.*

Démonstration. Supposons "par l'absurde" qu'il existe une séquence $(p_n)_{n\in N}$, qui est Cauchy et ne contient pas de sous-séquences convergeantes. Alors, en notant $u(p) = \sup_n P(p, p_n)$, pour un p arbitraire de X, il résulte $u(p) < 1$ et toute sous-séquence $(p_{n_k})_{k\in N}$ est un ensemble fermé. Soit alors les nombres k_n définis par récurrence: $k_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, k_n est l'entier qui dépasse k_{n-1} et pour lequel

$$P(p_i, p_j) \geqslant \varphi(u(p_{k_{n-1}}), \text{ pour } i, j \geqslant k_n.$$

En définissant $T: \{p_{s_n}\} \to p_{k_n}\}$, par $T(p_{k_n}) = p_{k_{n+1}}$, nous avons (en supposant $k_n > k_m$):

$$P(T_{p_{k_n}}, T_{p_{k_m}}) = P(p_{k_{n+1}}, p_{k_{m+1}}) \geqslant \varphi(u(p_{k_n})) \geqslant \varphi(P(p_{k_n}, p_{k_m}))$$

(la dernière inégalité est due à la supposition que φ est croissante), donc T est une contraction définie sur un ensemble fermé et n'a pas de point fix.

(Manuscrit reçu le 10 février 1979)

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Dumitrescu, *Spaţii probabiliste de proximitate*, St. Cerc. Mat., **26**, 5 (1974), 737–743.
2. V. I. Istrăţescu, *Introducere în teoria punctelor fixe*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1973.
3. I. A. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

TEOREME DE PUNCT FIX ÎN SPAŢII PROBABILISTE DE PROXIMITATE

(Rezumat)

Se introduce noţiunea de φ-contracţie pentru spaţii probabiliste de proximitate şi se dă o teoremă corespunzătoare de punct fix.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

O CLASĂ DE ECUAŢII DIOFANTIENE

KIS ERNŐ

În cele ce urmează ne vom ocupa de diferite cazuri ale clasei de ecuaţii diofantiene a lui A. Hurwitz,

$$y^2 = x^2 - 4ax(x - 1)^2$$

care admite soluţiile triviale (0, 0), (1, 1) şi (1, −1).

Pentru diferite valori de a sîntem conduşi la cîteva ecuaţii cunoscute. De exemplu pentru $a = \frac{1}{12}$, $a = -\frac{1}{8}$, $a = -\frac{1}{4}$ găsim respectiv:

$$3y^2 = x(x^2 + x + 1) \tag{1}$$

$$2y^2 = x(x^2 + 1) \tag{2}$$

$$y^2 = x(x^2 - x + 1) \tag{3}$$

care ecuaţii au fost tratate respectiv de B. Segre, B. Levi şi A. Hurwitz, şi s-a arătat cu diferite metode că, afară de soluţiile triviale de mai sus, nici una din ele nu au soluţii raţionale.

1. *Forme discordante.* Vom numi după L. Euler formele

$$\begin{cases} a^2 + mb^2 \\ a^2 + nb^2 \end{cases} \tag{4}$$

(m şi n întregi diferiţi de zero) *discordante* dacă pentru nici o pereche de valori întregi, diferite de zero, ale lui a şi b nu pot fi ambele forme patrate perfecte. În caz contrar vom spune ca formele sînt *concordante.*

L. Euler demonstrează că următoarele perechi de forme sînt discordante:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \\ a^2 + 3b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 \\ a^2 - b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 \\ a^2 + 2b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 \\ a^2 + 3b^2 \end{cases} \tag{5}$$

şi arată că perechea

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \\ a^2 + 7b^2 \end{cases}$$

sînt forme concordante.

C. F. Degen demonstrează că formele (4) sînt concordante, dacă $(m + 1)(n + 1) = P^2$, sau dacă $m + n = 2P^2$.

M. Collins arată că pentru $m = 1$ şi $1 < n < 20$ formele (4) sînt concordante pentru $n = 7, 11, 17$, iar pentru $m = -1$ şi $-13 < n < -1$ formele sînt concordante pentru $n = -7, -11$.

C. H. Brooks şi S. Watson dau 41 valori numere naturale pentru $m = 1$, $1 \leqslant n \leqslant 100$ pentru care formele (4) sînt concordante.

2. *Legătura dintre ecuaţia lui A. Hurwitz şi formele discordante.* Vom arăta că ecuaţia

$$y^2 = x^2 - 4ax(x-1)^2, \tag{6}$$

în cazul $a = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}$, nu are soluţii raţionale, căci găsirea acestor soluţii conduce la rezolvarea unor ecuaţii de gradul II, care au discriminantul egal cu produsul a două forme discordante relativ prime, şi astfel discriminantul nu poate fi patrat perfect.

Intersectăm curba (6) cu dreapta

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x; \qquad \alpha,\ \beta \text{ întregi } (\alpha, \beta) = 1$$

care, trecînd printr-un punct ordinar raţional al curbei, ne va da toate perechile de soluţii raţionale a ecuaţiei diofantiene (6).

Avem

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}x = x - 4a(x-1)^2$$

adică

$$4ax^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 8a - 1\right)x + 4a = 0$$

care ecuaţie va avea soluţii raţionale dacă

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 8a - 1\right)^2 - 64a^2$$

adică

$$(\alpha^2 - 8a\beta^2 - \beta^2)^2 - 64a^2\beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - 16a\beta^2 - \beta^2)$$

este patrat perfect.

a) În cazul $a = -\frac{1}{4}$ (A. Hurwitz) trebuie să avem

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^4 = (\alpha^2 + 3\beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = k^2.$$

Se observă că putem avea numai cazul

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = m^2$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = n^2$$

ceea ce este imposibil căci formele sînt discordante (I. Euler).

b) În cazul $a = -\frac{1}{8}$ (B. Levi) trebuie să avem

$$\alpha^4 - \beta^4 = k^2$$

ceea ce este imposibil căci avem cazurile

$$\alpha^2 + \beta^2 = m^2 \qquad\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 2m^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = n^2 \qquad \text{sau} \qquad \alpha^2 - \beta^2 = 2n^2$$

şi fiind $(m, n) = 1$ şi în cazul al doilea sîntem conduşi la formele discordante

$$m^2 + n^2 = \alpha^2$$

$$m^2 - n^2 = \beta^2$$

cu $(\alpha, \beta) = 1$.

c) Dacă punem $a = -\frac{1}{16}$ din ecuaţia generală al lui Hurwitz obţine ecuaţia

$$4y^2 = x(x^2 + 2x + 1)$$

Formele corespunzătoare devin

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 \end{cases}$$

care sînt evident concordante şi găsim pentru ecuaţia (7) o infinitate de soluţii:

$$x = 4m^2\,;\ y = m(4m^2 + 1)$$

d) Dacă punem $a = \frac{1}{16}$ găsim ecuaţia

$$4y^2 = -x(x^2 - 6x + 1)$$

şi avem formele relativ prime

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 - 2\beta^2 \end{cases}$$

despre care M. Collins a arătat că sînt discordante şi astfel ecuaţia (8) are soluţii raţionale numai soluţiile triviale.

e) Dacă punem $a = \frac{1}{8}$ găsim ecuaţia

$$2y^2 = -x(x^2 - 4x + 1)$$

iar formele vor fi

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 - 3\beta^2 \end{cases} (\alpha, \beta) = 1\,;\ (\alpha, 3\alpha) = 1.$$

Putem avea cazurile

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = k^2 \\ \alpha^2 - 3\beta^2 = l^2 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 2k^2 \\ \alpha^2 - 3\beta^2 = 2l^2 \end{cases}$$

primele sînt discordante (M. Collins), iar ultimele ne conduc la sistemul

$$\begin{cases} k^2 - l^2 = \beta^2 \\ 3k^2 - l^2 = \alpha^2 \end{cases}$$

unde ultima ecuație este imposibilă, deci și ecuația (9) are numai soluții raționale triviale.

3. Dacă inversăm problema și plecăm de la forme discordante și studiem posibilitatea factorilor comuni putem ajunge la ecuații diofantiene care nu au soluții raționale.

Formele

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha^2 + 2\beta^2 \end{cases}$$

sînt discordante și dacă $(\alpha, \beta) = 1$ nu avem factori comuni. Fie discriminantul

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 2\beta^2) = \left(\alpha^2 + \frac{3}{2}\beta^2\right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2$$

iar ecuația corespunzătoare va fi

$$x^2 - 2\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0$$

adică

$$\frac{2\alpha^2}{\beta^2}x = x^2 - 3x + \frac{1}{4}.$$

Punem în partea stîngă

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x$$

și obținem ecuația

$$2y^2 = x\left(x^2 - 3x + \frac{1}{4}\right) \quad \text{adică} \quad 8y^2 = x(4x^2 - 12x + 1)$$

și punînd $x = \frac{x}{2}$: $y = \frac{v}{4}$ găsim ecuația

$$y^2 = x(x^2 - 6x + 1)$$

care nu are soluții raționale, afară de cele triviale.

De la formele discordante

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha^2 + 3\beta^2 \end{cases}$$

obținem ecuația

$$2y^2 = x(x^2 - 4x + 1).$$

De la formele discordante

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha^2 + 4\beta^2 \end{cases}$$

obținem ecuația $y^2 = x(x^2 - 10x + 9)$ cu soluțiile raționale (0, 0) : (1, 0) (9, 0
De la formele discordante

$$\begin{cases} \alpha^2 + 3\beta^2 \\ \alpha^2 - 3\beta^2 \end{cases}$$

găsim ecuația $y^2 = 6x(x^2 + 1)$.
În general, plecînd de la formele discordante

$$\begin{cases} \alpha^2 + m\beta^2 \\ \alpha^2 + n\beta^2 \end{cases}$$

și examinînd cazul divizorilor comuni punînd

$$\Delta = (\alpha^2 + m\beta^2)(\alpha^2 + n\beta^2) = \left(\alpha^2 + \frac{m+n}{2}\beta^2\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\beta^2\right)^2$$

ajungem la ecuația

$$x^2 - 2\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{m+n}{2}\right)x + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = 0$$

și punînd $y = \frac{\alpha}{\beta}x$, obținem ecuația de gr. III

$$2y^2 = x\left(x - \frac{m-n}{2}\right)^2 - 2nx^2$$

care în cazul

$$(\alpha^2 + m\beta^2, \ \alpha^2 + n\beta^2) = 1 \text{ nu are soluții raționale.}$$

Dacă plecăm din forme concordante atunci ajungem la ecuații diofantice care au un număr infinit de soluții raționale, care se pot găsi cu ajutorul valorilor α și β pentru care formele au dat patrate perfecte.
Știm că pentru $m = 7$, $n = 1$ formele găsite, adică

$$\begin{cases} \alpha^2 + 7\beta^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

sînt concordante (Euler) și ne dau patrate, de exemplu pentru $\alpha = 3$, $\beta =$
Cu metoda de mai sus obținem ecuația

$$2y^2 = x(x^2 - 8x + 9)$$

Intersectăm cu dreapta

$$y = \frac{3}{4}x$$

și observînd că dacă (x_1, y_1) e soluție atunci e soluție și $(x_1, -y_1)$, prin ecuația

$$\frac{9}{8}x = x^2 - 8x + 9$$

găsim soluțiile:

$$x_1 = 8;\qquad y_1 = 6;\qquad x_2 = 8;\qquad y_2 = -6$$

$$x_3 = \frac{9}{8};\qquad y_3 = \frac{27}{32};\qquad x_4 = \frac{9}{8};\qquad y_4 = -\frac{27}{32}$$

Intersectînd curba cu drepte care trec prin două puncte raționale găsim încă un punct rațional.

Exemplu: luăm dreapta

$$y - 6 = \frac{-\frac{27}{32} - 6}{\frac{9}{8} - 8}(x - 8) \text{ adică } y - 6 = \frac{219}{220}(x - 8)$$

obținem ecuația

$$24\,200x^3 - 241\,561x^2 + 407\,016x - 186\,624 = 0$$

și găsim soluția

$$x = \frac{2\,592}{3\,025};\quad y = -\frac{184\,788}{166\,375}.$$

Observație. Afară de aceste soluții, mai pot exista și soluții care provin din

$$\Delta = (\alpha^2 + 7\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) = k^2$$

unde formele nu sînt relativ prime.

Fie

$$\alpha = 1,\ \beta = 1 \text{ avem } \Delta = 16 = 4^2.$$

Intersectînd curba cu dreapta

$$y - 6 = x - 8$$

găsim ecuația

$$x^3 - 10x^2 + 17x - 8 = 0$$

care ne dă rădăcina dublă

$$x_1 = 1,\qquad y_1 = 1$$

Intersectînd acum cu dreapta

$$y - 1 = x - 1$$

găsim soluţia

$$x_2 = 9, \quad y_2 = 9.$$

Dacă plecăm de la o soluţie de exemplu:

$$x = \frac{2\,592}{3\,025}, \quad y = \frac{184\,788}{166\,375}$$

adică

$$x = \frac{142\,560}{166\,375}, \quad y = \frac{184\,788}{166\,375}$$

putem găsi valori de α şi β pentru care cele două forme sînt patrate perfecte

În cazul considerat dreapta este

$$y = \frac{184\,788}{142\,560}x \quad \text{adică} \quad y = \frac{1\,711}{1\,320}x$$

şi pentru α şi β astfel găsit cele două forme sînt patrate perfecte.

Într-adevăr

$$1\,711^2 + 7 \cdot 1\,320^2 = 3\,889^2$$

$$1\,711^2 + 1\,320^2 = 2\,161^2$$

Cele de mai sus tratate se mai pot inversa şi în felul cum urmează

Precum am amintit, B. Segre demonstrează că ecuaţia

$$3y^2 = x(x^2 + x + 1)$$

n-are soluţii numere raţionale în afară de cele triviale: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. Este evident că o transformare raţională asupra ecuaţiei nu schimbă această proprietate a ecuaţiei.

Fie x înlocuit cu $3x$. Este clar că ecuaţia

$$y^2 = x(9x^2 + 3x + 1)$$

afară de soluţiile triviale $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ n-are alte soluţii raţionale.

Dacă intersectăm curba cu dreapta $y = \frac{a}{b}x$ care trece prin punctul $(0, 0)$ cu $(a, b) = 1$, a şi b numere întregi punctele de intersecţie nu pot fi puncte raţionale urmează că ecuaţia

$$\frac{a^2}{b^2}x = 9x^2 + 3x + 1$$

adică ecuaţia

$$96^2x^2 - (a^2 - 3b^2)x + 6^2 = 0$$

nu poate avea rădăcini raţionale.

Discriminantul ne conduce la o ecuație în numere întregi

$$(a^2 - 3b^2)^2 - 36b^4 = (a^2 + 3b^2)(a^2 - 9b^2) = k^2$$

care nu poate fi satisfăcută, adică sistemul

$$\begin{cases} a^2 + 3b^2 = m\alpha^2 \\ a^2 - 9b^2 = m\beta^2 \end{cases}$$

nu poate fi satisfăcut în numere întregi pentru nici un m întreg, prin urmare formele

$$\begin{cases} a^2 + 3b^2 \\ a^2 - 9b^2 \end{cases}$$

sînt discordante.

Ar mai fi de studiat caracterul de invarianță a formelor legate de o ecuație dată în cazul unor transformări raționale, precum și adîncirea posibilității de a arăta discordanța, respectiv concordanța, unor forme, plecînd de la ecuații diofantiene date, la care cunoaștem rezolvabilitatea în numere raționale.

(Intrat în redacție la 22 decembrie 1979)

BIBLIOGRAFIE

1. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II, Diphantine analysis, New York, 1952.

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

(Résumé)

L'article analyse plusieurs cas d'équations diophantiennes

$$y^2 = x^3 - 4ax(x - 1)^2$$

dues à A. Hurwitz, et démontre que les formes concordantes d'Euler

$$a^2 + mb^2$$

$$a^2 + nb^2$$

sont liées à ces équations.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

ASUPRA UNOR NOI CLASE DE FUNCŢII ANALITICE

TEODOR BULBOACĂ

1. Introducere. Fie K_n clasa funcţiilor olomorfe în discul unitate U, normate cu condiţiile f(0) = f(0) — 1 = 0, ce satisfac condiţia

$$\mathrm{Re}\,\frac{D^{n+1}(fz)}{D^n f(z)} > \frac{1}{2},\ \forall\, z \in U,\ n \in N_0 = N \cup \{0\}$$

unde

$$D^n f(z) = \frac{1}{n!}\, z(z^{n-1} f(z))^{(n)}.$$

Clasele K_n au fost introduse de S. Ruscheweyh în [4]. În [1], H. S. Al-Amiri introduce o nouă clasă de funcţii $C(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, iar P. N. Chichra defineşte în [2] clasa de funcţii C_α, $\alpha \geqslant 0$. Demonstrînd teoremele referitoare la aceste noi clase de funcţii folosind metoda dată în [3] se observă că în anumite cazuri rezultatele pot fi îmbunătăţite, ceea ce este prezentat în § 2 al acestei lucrări.

Tot în [3], autorii au obţinut o teoremă referitoare la derivata lui Schwarz şi la stelaritatea unei funcţii olomorfe şi normate uzual în discul unitate. O legătură similară între funcţiile din $C_n(\alpha)$ şi C_α şi anumite expresii diferenţiale este făcută în § 3.

Ca şi în [3] vom nota cu $\Psi[1]$, clasa funcţiilor $\psi : C^2 \to C$ cu proprietăţile:

(A) ψ este continuă pe domeniul $D \subset C^2$

(B) $(1, 0) \in D$, $\mathrm{Re}\,\psi(1, 0) > 0$

(C) $\mathrm{Re}\,\psi(ir_2, s_1) \leqslant 0$ cînd $s_1 \leqslant -\frac{1}{2}(1 + r_2^2)$ unde $s_1, r_2 \in R$ şi $(ir_2, s_1) \in D$.

Pentru demonstrarea teoremelor vom folosi următoarea teoremă dată în [3].

TEOREMA A. *Fie $\Psi \in \Psi[1]$ cu domeniul corespunzător D. Dacă $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ este o funcţie olomorfă în discul unitate U, $p(z) \not\equiv 1$ şi*

(i) $(p(z), zp'(z)) \in D$, $\forall z \in U$

(ii) $\mathrm{Re}\,\psi(p(z), zp'(z)) > 0$, $\forall z \in U$

atunci $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, $\forall z \in U$

2. TEOREMA 1. *Dacă* $\alpha \geq 0$ *și* f *este o funcție olomorfă în discul unitate* U, *normată cu condițiile* $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, *pentru care există o funcție* $g \in K_{n+2}$, $n \in N_0$ *astfel încît*

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} + \alpha\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}g(z)}\right\} > \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha}{4(n+2)M}\right], \quad \forall z \in U$$

unde

$$M = \sup_{z \in U}\left|\frac{D^{n+2}g(z)}{D^{n+1}g(z)}\right|^2$$

atunci

$$\mathrm{Re}\,\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} > \frac{1}{2}, \quad \forall z \in U.$$

În cazul în care $M = \infty$, obținem teorema 1 din [1].

Demonstrație. Fie $p(z)$ o funcție astfel încît

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} = \frac{1}{2}(p(z) + 1), \quad z \in U.$$

Folosind identitatea

$$z(D^n f(z))' = (n+1)D^{n+1}f(z) - nD^n f(z)$$

obținem că relația din enunț este echivalentă cu relația

$$\mathrm{Re}\left\{p(z) + \frac{\alpha}{n+2}\,\frac{D^{n+1}g(z)}{D^{n+2}g(z)}\cdot zp'(z) + \frac{\alpha}{4(n+2)M}\right\} > 0, \ \forall z \in U.$$

Fie deci

$$\psi(r, s) = r + \frac{\alpha}{n+2}\,\frac{D^{n+1}g(z)}{D^{n+2}g(z)}\,s + \frac{\alpha}{4(n+2)M}$$

cu domeniul $D = C^2$. Se verifică că $\psi \in \Psi$ [1] și folosind teorema A din [3] obținem rezultatul dorit.

Deoarece funcția identică $g(z) = z \in K_n$ pentru orice $n \in N_0$ iar $M = 1$ pentru cazul $n = 0$ obținem următoarea consecință:

CONSECINȚA 1. *Dacă* $\alpha \geq 0$ *și* f *este o funcție olomorfă în discul unitate* U, *normată cu condițiile* $f(0) = f(0) - 1 = 0$ *atunci*

$$\mathrm{Re}[f'(z) + \alpha z f''(z)] > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right), \ z \in U \ \textit{implică}\ \mathrm{Re}\, f'(z) > \frac{1}{2}, \ z \in U$$

adică funcția f *este univalentă.*

TEOREMA 2. *Dacă $\alpha \geq 0$ și f este o funcție olomorfă în discul unitate U, normată cu condițiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ și dacă $\Phi(z) = z + \ldots$ aparține clasei S^*_β, $0 \leq \beta < 1$ (clasa funcțiilor stelate de ordinul β), cu*

$$m^2 \doteq \sup_{z \in U} \left| \frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right|^2,$$

atunci

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{\Phi(z)} + \alpha\frac{[zf'(z)]'}{\Phi'(z)}\right\} > -\frac{\alpha\beta}{2m^2}, \quad \forall z \in U$$

implică

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{\Phi(z)} > 0, \quad \forall z \in U.$$

În cazul în care $m = \infty$ și $\beta = 0$ obținem teorema 1 din [2].

Demonstrație. Alegînd funcția $p(z)$ astfel încît $p(z) = \frac{zf'(z)}{\Phi(z)}$, $z \in U$ obținem că relația din enunț este echivalentă cu relația

$$\operatorname{Re}\left\{p(z) + \alpha\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}p'(z) + \frac{\alpha\beta}{2m^2}\right\} > 0, \quad \forall z > U.$$

Fie deci $\psi(r, s) = r + \alpha\frac{\Phi(z)}{z\Phi'(z)}s + \frac{\alpha\beta}{2m^2}$ cu domeniul $D = C^2$. Se verifică că $\psi \in \Psi[1]$ și folosind teorema A din [3] obținem rezultatul dorit.

Teorema rămîne adevărată și în cazul în care $\Phi(z) = z$ sau $\Phi(z) = \frac{z}{1+\lambda z}$, $|\lambda| \leq 1$ obținem astfel următoarele criterii de univalență:

TEOREMA 3. *Dacă $\alpha \geq 0$ și f este o funcție olomorfă în discul unitate U, normată cu condițiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ atunci*

$$\operatorname{Re}[f'(z) + \alpha zf''(z)] > -\frac{\alpha}{2}, \quad \forall z \in U \Rightarrow \operatorname{Re}f'(z) > 0, \quad \forall z \in U$$

adică funcția f este univalentă.

TEOREMA 4. *Dacă $\alpha \geq 0$ și f este o funcție olomorfă în discul unitate U, normată cu condițiile $f(0) = f(0) - 1 = 0$ și dacă pentru un număr $\beta \in R$ cu*

$$\beta \leq \frac{1}{1+|\lambda|} \quad \text{unde } \lambda \in C,\ |\lambda| \leq 1$$

avem relația

$$\operatorname{Re}(1+\lambda z)[(1+\alpha\lambda z)f'(z) + \alpha z(1+\lambda z)f''(z)] > -\frac{\alpha\beta}{2}(1-|\lambda|)^2, \quad \forall z \in U$$

atunci

$$\operatorname{Re}(1+\lambda z)f'(z) > 0, \quad \forall z \in U,$$

adică funcția f este aproape convexă (deci univalentă).

TEOREMA 5. *Dacă $\alpha \geq 0$ şi f este o funcţie olomorfă în discul unitate U, normată cu condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şi funcţia $g \in K_{n+2}$, $n \in N_0$, atunci*

$$\operatorname{Re}\left\{[(1-\alpha)\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} + \alpha\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+2}g(z)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{n+2}\frac{D^{n+1}g(z)}{D^{n+2}g(z)}\left[z\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)}\right)' - 2\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)}\right)^2 + 2\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)}\right]\right\} > \frac{1}{2}, \quad \forall z \in U$$

implică

$$\operatorname{Re}\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} > \frac{1}{2}, \quad \forall z \in U.$$

Demonstraţie. Notînd $p(z) \equiv 2\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n+1}g(z)} - \frac{1}{2}\right)$, $z \in U$ obţinem că relaţia din enunţ este echivalentă cu relaţia

$$\operatorname{Re}\left[p(z) + \frac{\alpha}{n+2}\frac{D^{n+1}g(z)}{D^{n+2}g(z)}(2zp'(z) - p^2(z) + 1)\right] > 0, \quad \forall z \in U.$$

Fie deci

$$\psi(r, s) = r + \frac{\alpha}{n+1}\frac{D^{n+1}g(z)}{D^{n+2}g(z)}(2s - r^2 + 1)$$

cu domeniul $D = C^2$. Se verifică că $\psi \in \Psi[1]$ şi folosind teorema A din [3] obţinem ceea ce trebuia de demonstrat.

În cazul cînd $g(z) = z$ şi $n = 0$ obţinem următoarea consecinţă:

CONSECINŢA 2. *Dacă $\alpha \geq 0$ şi f este o funcţie olomorfă în discul unitate U, normată cu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, atunci*

$$\operatorname{Re}\{f'(z) + \alpha z f''(z) + \alpha f'(z)[1 - f'(z)]\} > \frac{1}{2}, \ \forall z \in U \Rightarrow \operatorname{Re} f'(z) > 0, \ \forall z \in U$$

TEOREMA 6. *Dacă $\alpha \geq 0$ şi f este o funcţie olomorfă în discul unitate U, normată cu condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şi dacă $\Phi \in S^*$ (clasa funcţiilor stelate), atunci*

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{\Phi(z)} + \alpha\frac{[zf'(z)]'}{\Phi'(z)} + \alpha\frac{\Phi(z)}{z\Phi'(z)}\left[z\left(\frac{zf'(z)}{\Phi(z)}\right)' - \left(\frac{zf'(z)}{\Phi(z)}\right)^2 + 1\right]\right\} > 0, \ \forall z \in U$$

implică

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{\Phi(z)} > 0, \ \forall z \in U.$$

Demonstrație. Fie $p(z) = \frac{zf'(z)}{\Phi(z)}$, $z \in U$; relația din enunț este echivalentă cu relația

$$\operatorname{Re}\left\{p(z) + \alpha \frac{\Phi(z)}{z\Phi'(z)} [-p^2(z) + 2zp'(z) + 1]\right\} > 0, \quad \forall z \in U$$

Fie deci $\psi(r, s) = r + \alpha(z)(-r^2 + 2s + 1)$ cu domeniul $D = C^2$, unde $\alpha(z) \equiv \alpha \frac{\Phi(z)}{z\Phi'(z)}$. Se verifică că $\psi \in \Psi[1]$ și din teorema A din [3] obținem ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul în care $\Phi(z) = z$, teorema 6 ne furnizează următorul criteriu de univalență:

TEOREMA 7. *Dacă $\alpha \geqslant 0$ și f este o funcție olomorfă în discul unitate U, normată cu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, atunci $\operatorname{Re}\{f'(z) - \alpha[f'(z)]^2 + 2\alpha z f''(z)\} > -\alpha$, $\forall z \in U$ implică $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $\forall z \in U$, adică funcția f este univalentă.*

(Intrat în redacție la 28 februarie 1980)

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Al-Amiri, *Cartain analogy of the α — convex functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. XXIII, 10 (1978), 1449–1454.
2. P. N. Chichra, *New subclasses of the class of clase-to-convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 62, 1 (1977), 37–43.
3. S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Second order differential inequalitiers in the complex plane*, J. of. Math. Anal. and Appl, 65, 2 (1978), 289–305.
4. S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc, 49 (1975), 109–115.

ON CERTAIN NEW CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

(Summary)

In this paper we improve some results in [1] and [2] concerning new classes of analytic functions by using the method given in [3].

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

ON THE EVEN ELEMENTARY CIRCUITS OF A FINITE DIGRAPH

DĂNUŢ MARCU

Let $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ be an *oriented finite graph (digraph* [1]) with $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ the set of *nodes* and $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ the set of *arcs*. Denoting by $\mathcal{C}[D]$ the set of *elementary circuits* [1] of D and by $C[D]$ the set of *elementary cycles* [1], we attach, arbitrary, to every arc a_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$, a number $\varepsilon_\alpha = 1$ or -1.

For an *elementary cycle* (σ), *circuit* (ω), *path* (γ) or *chain* (L), we denote by $\mathcal{A}(\sigma)$, $\mathcal{A}(\omega)$, $\mathcal{A}(\gamma)$, $\mathcal{A}(L)$ their set of *arcs*.

For an arbitrary set $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ we denote $\operatorname{sgn}(\mathcal{B}) = \prod_{a_\alpha \in \mathcal{B}} \varepsilon_\alpha$.

LEMMA 1. *If ω is a circuit with sgn $[\mathcal{A}(\omega)] < 0$, then, it exists an elementary circuit $\tilde{\omega}$, $(\mathcal{A}(\tilde{\omega}) \subseteq \mathcal{A}(\omega))$, so that, sgn $(\mathcal{A}(\tilde{\omega})] < 0$.*

Proof. Evidently, ω contains an elementary circuit ω^*. If sgn $[\mathcal{A}(\omega^*)] < < 0$, lemma is proved, else, we consider the circuit ω^{**} for which we have $\mathcal{A}(\omega^{**}) = \mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\omega^*)$ and sgn $[\mathcal{A}(\omega^{**})] < 0$.

Repeating this process (putting $\omega := \omega^{**}$) we obtain finally an elementary circuit $\tilde{\omega}$ with sgn $[\mathcal{A}(\tilde{\omega})] < 0$. (Q. E. D.)

LEMMA 2. (F. Harary [2]). *Let $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ be a diagraph so that, sgn $[\mathcal{A}, (\sigma)] > 0$ for all $\sigma \in C[D]$. If n and m are two distinct nodes of $\mathcal{N}$, then, for every two distinct elementary chains L_1, L_2, between n and m, we have sgn$[\mathcal{A}(L_1)] \cdot$sgn $[\mathcal{A}(L_2)] > 0$.*

Let $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_M$ be the strong connected components of D. [4], [5], [6].

LEMMA 3. *Sgn $[\mathcal{A}A(\omega)] > 0$ for all $\omega \in \mathcal{C}[D]$, if and only if, sgn $[\mathcal{A}(\sigma)] > 0$ for all $\sigma \in C[\mathbf{C}\ ]$, $i = 1, 2, \ldots, M$.*

Proof. Suppose that exist $i_0 \in \{1, 2, \ldots, M\}$ and $\sigma_0 \in \mathbf{C}\ [\mathbf{C}_{i_0}]$ so that, sgn $[\mathcal{A}(\sigma_0)] < 0$, and consider σ_0 as the form $\sigma_0 = [a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_N}]$.

Choosing an arbitrary sense for the orientation of the arcs of σ_0, we attach to every arc a_{t_k}, $k = 1, 2, \ldots, N$, the label m_{t_k}, so that:

$$m_{t_k} = \begin{cases} +, \text{ if the arc } a_{t_k} \text{ is oriented in the choosen sense,} \\ -, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Let $a_{t_{k_0}}$ be an arbitrary arc of $\mathcal{A}(\sigma_0)$. Because $\mathbf{C}_{i_0}$ is a strong connected component of D, there exists an elementary path $\gamma_{k_0}[\Delta^-(a_{t_{k_0}}), \Delta^+(a_{t_{k_0}})]$. (if an arc a has the form $a = \langle n, m \rangle$; we denote $\Delta^+(a) = n$ and $\Delta^-(a) = m$).

Evidently, $(\gamma_{k_0} \cup a_{t_{k_0}}) \in \mathcal{C}[D]$, and from the hypothesis, we have

$$\operatorname{sgn}[\mathcal{A}(\gamma_{k_0})] \cdot \varepsilon_{t_{k_0}} > 0. \tag{1}$$

We construct the circuit ω_0, replacing in σ_0 every arc a_{t_k} for which $m_{t_k} = -$, by the path γ_k. From (1) we obtain

$$\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\omega'_0)] < 0.$$

But, having in view lemma 1, ω_0 contains an elementary circuit $\tilde{\omega}_0$, ($\mathcal{A}$ $(\omega_0) \subseteq \mathcal{A}(\tilde{\omega}_0)$), for which $\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\tilde{\omega}_0)] < 0$; contradiction with the hypothesis. Hence, $\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\sigma)] > 0$, for all $\sigma \in C[\mathbf{C}_i]$ and $i = 1, 2, \ldots, M$. (*Q.E.D.*)

Reciprocally, because every elementary circuit is contained in a strong connected component, we have $\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\omega)] > 0$, for all $\omega \in \mathcal{E}[D]$. (*Q.E.D.*)

THEOREM 1. *Every elementary circuit of a digraph $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ contains an even number of arcs, if and only if, every elementary cycle in every strong connected component of D contains an even number of arcs.*

Proof. The proof is evidently putting $\varepsilon_x = -1$, $x = 1, 2, \ldots, q$ and having in wiew lemma 3.

COROLLARY 1. *Let $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ be a strong connected digraph. We have $\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\omega)] > 0$ for all $\omega \in \mathcal{E}[D]$, if and only if, $\operatorname{sgn} [\mathcal{A}(\sigma)] > 0$, for all $\sigma \in C[D]$.*

Proof. If D is strong connected we have $M = 1$, and having in wiew lemma 3, the corollary is proved.

THEOREM 2. *In a strong connected digraph every elementary circuit contains an even number of arcs, if and only if, every elementary cycle contains an even number of arcs.*

Proof. The theorem is proved putting $\varepsilon_x = -1$, $x = 1, 2, \ldots, q$, and having in view corollary 1.

THEOREM 3. (D. König [3]). *Every elementary cycle of a digraph contains an even number of arcs, if and only if there exists a partition $P = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$ of $\mathcal{N}$, so that every arc of $\mathcal{A}$ links a node of $\mathcal{N}_1$ with a node of $\mathcal{N}_2$ or a node of $\mathcal{N}_2$ with a node of $\mathcal{N}_1$.*

THEOREM 4. *If $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ is a strong connected digraph, then, every elementary cycle contains an even number of arcs, if and only if there exists a unique partition $P = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$ of $\mathcal{N}$, so that every arc of $\mathcal{A}$ links a node of $\mathcal{N}_1$ with a node of $\mathcal{N}_2$ or a node of $\mathcal{N}_2$ with a node of $\mathcal{N}_1$.*

Proof. Let $\varepsilon_x = -1$ be for all $x = 1, 2, \ldots, q$. Suppose that the partitio P is not unique. In this case there exists another partition $P' = \{\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2\}$, $P \neq P'$, so that every arc of $\mathcal{A}$ links a node of $\mathcal{N}'_1$ with a node of $\mathcal{N}'_2$ or a nod of $\mathcal{N}'_2$ with a node of $\mathcal{N}'_1$. If $\mathcal{N}'_1 \cap \mathcal{N}_1 = \Phi$, evidently P is unique, hence $\mathcal{N}'_1$ $\cap \mathcal{N}_1 \neq \Phi$. Let $n_0^{(1)}$ be an arbitrary node of $\mathcal{N}_1$ so that, $n_0^{(1)} \notin \mathcal{N}'_1$ (in this cas $n_0^{(1)} \in \mathcal{N}'_2$) and $m_0^{(1,2)} \in \mathcal{N}'_1 \cap \mathcal{N}_1$.

Related to the partition P every elementary chain L_1 (there exists becau D is strong connected) between $n_0^{(1)}$ and $m_0^{(1,2)}$ contains an even number of arcs, and related to the partition P', every elementary chain L_2 between n and $m_0^{(1,2)}$ contains an odd number of arcs. Hence, we have $\operatorname{sgn} [A(L_1)] \cdot \operatorname{sg}$

$[A(L_2)] < 0$; contradiction with lemma 2, and the theorem is proved having in view thorem 3.

THEOREM 5. *If $D = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ is a strong connected diagraph, then, every elementary circuit of D contains an even number of arcs, if and only if, it exists an unique partition $P = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$ of $\mathcal{N}$, so that, every arc of $\mathcal{A}$ links a node of $\mathcal{N}_1$ with a node of $\mathcal{N}_2$ or a node of $\mathcal{N}_2$ with a node of $\mathcal{N}_1$.*

Proof. The proof is evidently having in view theorem 2 and theorem 4.

(Received April 28, 1980)

REFERENCES

1. Berztiss, A. T., *Data structures*, New York, 1971.
2. Harary, F., *On the Notion of Balance of a Signed Graph*, Mich. Math. J., 2 (1954), 143–146.
3. König, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936.
4. Marcu, D., *An algorithm for finding the strongly connected components of an oriented finite graph*, Studii și Cercetări Matematice, 28 (1976), 57–60.
5. Marcu, D., *A method for finding the strongly connected components of a digraph*, Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza", Iași, 2 (1979), 417–418.
6. Marcu, D., *A method for finding the strong components of a digraph*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., 24, 2 (1979), 22–24.

DESPRE CIRCUITELE ELEMENTARE PARE ALE UNUI GRAF FINIT

(Rezumat)

În lucrare se dă o condiție necesară și suficientă ca fiecare circuit elementar al unui graf finit să conțină un număr par de arce. Se dau de asemenea două condiții necesare și suficiente ca fiecare circuit elementar al unui graf strict să conțină un număr par de arce.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

PUNCTE FIXE PENTRU APLICAŢII DEFINITE PE SPAŢII 2-METRICE

GAVRILĂ DEZSŐ şi VIORICA MUREŞAN

Conceptul de spaţiu 2-metric şi de spaţiu 2-normat a fost introdus de S. Gahler [2, 3]. Spaţiul 2-metric este o generalizare a spaţiului metric obişnuit, în sensul că în locul distanţei dintre două puncte se consideră aşa zisa ,,distanţă'' a trei puncte.

În prezenta lucrare ne propunem să dăm unele exemple de 2-metrici şi să generalizăm unele rezultate referitoare la aplicaţii contractive.

Spaţii 2-metrice şi spaţii 2-normate. DEFINIŢIA 1. Se numeşte spaţiu 2-metric un cuplu (X, ρ), unde X este o mulţime, iar ρ o aplicaţie, $\rho: X \times X \times X \to \mathbf{R}$, care satisface următoarele axiome:

1a) oricare ar fi $a, b \in X$ există $c \in X$ astfel incît $\rho(a, b, c) > 0$

1b) $\rho(a, b, c) = 0$, dacă cel puţin două din punctele a, b, c coincid

2) $\rho(a, b, c) = \rho(a, c, b) = \rho(b, c, a)$

3) $\rho(a, b, c) \leqslant \rho(a, b, d) + \rho(a, d, c) + \rho(d, b, c)$

Aplicaţia ρ se numeşte 2-metrică.

Observaţia 1. Spaţiul metric obişnuit îl vom numi spaţiu 1-metric.

DEFINIŢIA 2. Un şir $\{x_n\}$, $x_n \in X$, se numeşte convergent în sensul 2-metricii, dacă există $x \in X$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n, a) = 0$, oricare ar fi $a \in X$.

DEFINIŢIA 3. Un şir $\{x_n\}$, $x_n \in X$, se numeşte şir Cauchy în sensul 2-metricii, dacă $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m, a) = 0$ oricare ar fi $a \in X$.

DEFINIŢIA 4. Un spaţiu 2-metric se numeşte complet, dacă orice şir Chauchy este convergent.

DEFINIŢIA 5. O mulţime $Y \subset X$ se numeşte mărginită, dacă există un număr M finit, astfel încît $\rho(x, y, z) \leqslant M$, oricare ar fi $x, y, z \in Y$; inf M se numeşte diametrul mulţimii Y.

DEFINIŢIA 6. Se numeşte spaţiu 2-normat un spaţiu liniar L, în care s-a definit o 2-normă, $||\cdot\,,\,\cdot|| : L \times L \to R$, care are următoarele proprietăţi:

1) $||a, b|| = 0$ dacă şi numai dacă a şi b sînt liniar dependenţi

2) $||a, b|| = ||b, a||$

3) oricare ar fi $\beta \in R$, avem că $||a, \beta b|| = |\beta| \cdot ||a, b||$

4) $||a, b + c|| \leqslant ||a, b|| + ||a, c||$ oricare ar fi $a, b, c \in L$.

Observaţia 2. În loc de proprietatea 4) se poate lua şi 4') $||a + c, b + c|| \leqslant ||a, b|| + ||a, c|| + ||b, c||$

Într-un spaţiu 2-normat se poate defini o 2-metrică astfel:

$$\rho(a, b, c) = ||b - a, c - a||$$

Observaţia 3. Un şir $\{x_n\}$ este convergent în spaţiul liniar 2-normat L, dacă există $x \in L$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty}||x_n - x, a|| = 0$, oricare ar fi $a \in L$.

Observaţia 4. Un şir $\{x_n\}$ este şir Cauchy în spaţiul liniar 2-normat L, dacă există $a, b \in L$ şi a, b liniar independenţi, astfel încît $\lim\limits_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m, a|| = 0$ şi $\lim\limits_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m, b|| = 0$.

DEFINIŢIA 7. Un spaţiu liniar 2-normat în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte spaţiu 2-Banach.

Fie (X, ρ) un spaţiu 2-metric.

DEFINIŢIA 8. Aplicaţia $f: X \to X$ se numeşte 2-metric contractivă (sau prescurtat 2-MC), dacă există $\alpha \in]0, 1[$ astfel încît:

$$\rho(fx, fy, fz) \leqslant \alpha\rho(x, y, z), \text{ orice ar fi } x, y, z \in X.$$

În continuare vom da cîteva exemple de 2-metrici, iar în final un exemplu de aplicaţie 2-MC.

Exemplul 1. Fie $X = R^2$ şi

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

oricare ar fi $x, y, z \in Z$. Această 2-metrică este de fapt aria triunghiului cu vîrfurile în x, y, z.

Exemplul 2. Fie $x = R^n$ şi

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i<j}\begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $y = (y_1, \ldots, y_n)$ $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sînt elemente din R^n.

Exemplul 3. Fie $X = R^2$ iar

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x, y, z \text{ sînt coliniare} \\ \pi r^2 & \text{în rest.} \end{cases}$$

unde r este raza cercului circumscris celor trei puncte.

Exemplul 4. Fie $X = R^3$ iar

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x, y, z \text{ sînt coliniare} \\ \dfrac{4\pi r^3}{3} & \text{în rest} \end{cases}$$

unde r este de asemenea raza cercului circumscris celor trei puncte.

Observaţia 5. La exemplele 3 şi 4 coliniaritatea include şi cazul cînd două puncte coincid, iar în loc de πr^2, respectiv $\frac{4\pi r^3}{3}$, se poate lua o funcţie pozitivă $f(r)$, care să verifice inegalitatea 3) din definiţia 2-metricei.

Exemplul 5. Fie (X, d) un spaţiu 1-metric. Considerînd

$$\rho(x, y, z) = \min\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\},$$

atunci (X, ρ) va fi un spaţiu 2-metric.

Exemplul 6. Fie $f: R^2 \to R^2$ astfel:

$$(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, \ a_2x + b_2y + c_2)$$

unde $a_i, b_i, c_i \in R$, $i = 1, 2$.

Această aplicaţie va fi 2-*MC* relativ la 2-metrica din exemplul 1, dacă:

$$|a_1b_2 - a_2b_1| < 1$$

Aplicaţii 2-metric contractive în plan. În această secţiune vom generaliza teoremele date de T. Zamfirescu în lucrarea [7], cînd în locul ariei triunghiului considerăm o 2-metrică oarecare în R^2.

Fie $X \subset R^2$ şi $f: X \to X$ o aplicaţie 2-*MC*.

DEFINIŢIA 9. Şirul aproximaţiilor succesive $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se numeşte orbita elementului $x \in X$, iar mulţimea punctelor sale limită o notăm cu $L(x)$, adică $\{f_n(x)\}' = L(x)$. Notăm $\mathfrak{L} = \bigcup_{x \in X} L(x)$.

DEFINIŢIA 10. O mulţime $M \subset R^2$ se numeşte liniară, dacă ea este inclusă într-o linie dreaptă.

TEOREMA 1. *Dacă $X \subset R^2$ este o mulţime mărginită, iar $f: X \to X$ este o aplicaţie 2-MC, atunci $\mathfrak{L} = \bigcup_{x \in X} L(x)$ este o mulţime liniară.*

Demonstraţie: Presupunem, că $\mathfrak{L}$ nu este liniară. În acest caz există cel puţin o submulţime $\{x, y, z\} \subset \mathfrak{L}$ care nu e liniară. Fie V_1, V_2, V_3 vecinătăţi ale lui x, y, z astfel ca $I > 0$, unde $I = \inf_{\substack{a \in V_1 \\ b \in V_2 \\ c \in V_3}} \rho(a, b, c)$. Notăm $J = \sup_{a,b,c \in X} \rho(a, b, c)$ şi considerăm $N = \left[\log_\alpha \frac{I}{J}\right] + 1$.

Presupunem că $x \in L(u)$, $y \in L(v)$, $z \in L(w)$ unde $u, v, w \in X$. Atunci există trei numere naturale $p, q, r \geqslant N$, astfel încît $f^p u \in V_1$, $f^q v \in V_2$, $f^r w \in V_3$. Urmează că:

$$\rho(f^p u, f^q v, f^r w) \leqslant \alpha^N \rho(f^{p-N}u, f^{q-N}v, f^{r-N}w) \leqslant \alpha^N \cdot \sup_{a,b,c \in K} \rho(a, b, c) < I,$$

din alegerea făcută pentru N. Această inegalitate contrazice faptul că $I = \inf\limits_{\substack{a \in V_1 \\ b \in V_2 \\ c \in V_3}} \rho(a, b, c)$ și prin urmare teorema este demonstrată.

TEOREMA 2. *Dacă f este 2-MC și dacă două puncte $u, v \in X$ au orbite mărginite și $L(u) \cap L(v) = \emptyset$, atunci $\mathfrak{L}$ este liniară.*

Demonstrație: Din teorema 1, deoarece $\{u, v\}$ este mărginită, rezultă că $L(u) \cup L(v)$ este o mulțime liniară. Fie δ linia ce conține pe $L(u) \cup L(v)$. Presupunem că există $w \in \mathfrak{L}$ și $w \notin \delta$. Atunci $\rho(w, x, y) > 0$, oricare ar fi $x \in L(u)$ și $y \in L(v)$. Produsul $\{w\} \times L(u) \times L(v)$ fiind compact, infimumul $\nu = \inf\limits_{\substack{x \in L(u) \\ y \in L(v)}} \rho(w, x, y)$ este atins și $\nu > 0$. Considerăm mulțimile deschise W, V_1, V_2 incluzînd respectiv w, $L(u)$, $L(v)$ astfel ca $\rho(a, b, c) > \frac{\nu}{2}$, oricare ar fi $a \in W$, $b \in V_1$, $c \in V_2$. Pentru ceva numere naturale N_1, N_2 avem că $f^n u \in V_1$ și $f^n v \in V_2$ dacă $n \geqslant N_1$ respectiv dacă $n \geqslant N_2$. Prin urmare $\rho(a, f^n u, f^n v) > \frac{\nu}{2}$, oricare ar fi $a \in W$.

Fie acum $w \in L(z)$. Se poate determina un număr natural N_3, astfel ca pentru $n \geqslant N_3$ să avem $f^n w \in W$. Deci $\rho(f^n w, f^n u, f^n v) > \frac{\nu}{2}$ pentru $n \geqslant max\{N_1, N_2, N_3\}$. Dar aplicația f fiind 2-MC se poate determina un număr natural N_4, astfel ca pentru $n \geqslant N_4$ să avem:

$$\rho(f^n u, f^n v, f^n w) \leqslant \frac{\nu}{2}.$$

Considerînd $n \geqslant max\ \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, cele două inegalități precedente relative la ρ se contrazic, deci $\mathfrak{L}$ este liniară.

TEOREMA 3. *Dacă f este 2-MC, iar $\mathfrak{L}$ este o mulțime liniară, x, y fiind puncte distincte din $\mathfrak{L}$, iar $u, v \in X$ sînt astfel că $x \in L(u)$, $y \in L(v)$ și orbitele lui u și v sînt mărginite (u și v pot coincide), atunci linia ce include pe $\mathfrak{L}$ este o linie fixă a aplicației f.*

Demonstrație: Fie linia $\delta \supset \mathfrak{L}$. Presupunem că δ nu e linie fixă, adică $f(X \subset \delta) \not\subset \delta$. Deci există cel puțin un punct z astfel ca $fz \notin \delta$. Fie V_1 și V_2 vecinătăți pentru x și y respectiv și numărul $\nu > 0$, astfel ca $\rho(a, b, fz) > \nu$, oricare ar fi $a \in V_1$ și $b < V_2$. Fie Δ o mulțime deschisă ce include $L(u) \cup L(v) \cup \{z\}$, astfel ca $\rho(a, b, c) \leqslant \nu$ oricare ar fi $a, b, c \in \Delta$.

Există un număr natural N astfel ca pentru $n \geqslant N$ avem $f^n u, f^n v \in X \cap \Delta$.

Fie două numere naturale p, $q \geqslant N + 1$ astfel ca $f^p u \in V_1$, $f^q v \in V_2$. Avem inegalitatea:

$$\rho(f^p u, f^q v, fz) > \nu.$$

Dar, deoarece f este $2=MC$, iar $p - 1 \geqslant N$ și $q - 1 \geqslant N$ avem:

$$\rho(f^p u, f^q v, fz) < \alpha\rho(f^{p-1} u, f^{q-1} v, z) \leqslant \alpha\nu < \nu$$

Cele două inegalități relative la ρ se contrazic, deci teorema este demonstrată.

Corolar. *Dacă* $\mathfrak{L} \neq \{a\}$ *şi* X *este mărginită, atunci* $\delta \supset \mathfrak{L}$ *este o linie fixă pentru aplicaţia* f.

Aplicaţii 2-MC în spaţii 2-normate. Fie X un spaţiu liniar 2-normat. Considerînd 2-metrica ρ definită cu ajutorul acestei 2-norme astfel: $\rho(x, y, z) = ||y - x, z - x||$, oricare ar fi $x, y, z \in X$, se pot da unele rezultate referitor la punctele fixe şi liniile fixe ale unei aplicaţii 2-*MC*.

Definiţia 11. Se numeşte linie dusă prin două elemente $y, z \in X$, mulţimea $L(y, z) = \{x/x = \alpha y + \beta y$, unde $\alpha, \beta \in R$ şi $\alpha + \beta = 1\}$.

Observaţia 6. Dacă $y = z$ atunci $L(y, z) = \{y\}$. Dacă $x_1, x_2 \in L(y, z)$ şi $x_1 \neq x_2$, atunci $L(x_1, x_2) = L(y, z)$. Două linii distincte se intersectează în cel mult un punct.

Fie aplicaţia $f: X \to X$

Definiţia 12. Un punct $p \in X$ este punct fix pentru f, dacă $fp = p$.

Definiţia 13. O linie L este o linie fixă pentru f, dacă $fL \subset L$.

Lema 1. *Dacă* f *este* 2-*MC şi* p, q, r *sînt puncte fixe distincte ale lui* f, *atunci ele sînt coliniare.*

Demonstraţie: Deoarece $\rho(p, q, r) = \rho(fp, fq, fr) \leqslant \alpha\rho(p, q, r)$ şi cum $0 < \alpha < 1$, relaţia precedentă are loc numai dacă $\rho(p, q, r) = 0$, adică $||q - p, r - p|| = 0$. Prin urmare $q - p$ şi $r - p$ sînt liniar dependente, adică $c_1(q - p) + c_2(r - p) = 0$ cu $c_1 \neq 0$ sau $c_2 \neq 0$. Rezultă că avem $p = \frac{c_1}{c_1 + c_2} q + \frac{c_2}{c_1 + c_2} r$, adică $p \in L(q, r)$ şi deci p, q, r sînt coliniare.

Lema 2. *Dacă* f *este* 2-*MC şi dacă două puncte* x, y *au imagini diferite, atunci din* $\rho(x, y, z) = 0$ *rezultă că* $fL(x, y) \subset L(fx, fy)$.

Demonstraţie: Deoarece $\rho(x, y, z) = 0$ şi $x \neq y$, rezultă că $z \in L(x, y)$. De asemenea f fiind 2-*MC* se obţine că $\rho(fx, fy, fz) = 0$ şi cum $fx \neq fy$ rezultă că $fz \in L(fx, fy)$ oricare ar fi $z \in L(x, y)$ şi deci $fL(x, y) \subset L(fx, fy)$.

Lema 3. *Dacă* f *este* 2-*MC şi dacă* L *este o linie cu* $x, y \in L$ *astfel ca* $fx, fy \in L$, $fx \neq fy$, *atunci* L *este o linie fixă a aplicaţiei* f.

Demonstraţie: Lema 3 este corolar al Lemei 2.

Lema 4. *Dacă* f *este* 2-*MC şi* p, q *sînt puncte fixe distincte, atunci* $L = L(p, q)$ *este o linie fixă pentru* f.

Demonstraţie: Lema 4 este corolar al Lemei 3.

Lema 5. *Dacă* f *este* 2-*MC şi* p, q *sînt puncte distincte ale lui* X *cu* $fp = q$ *şi* $fq = p$, *atunci* $L = L(p, q)$ *este o linie fixă pentru* f.

Demonstraţie: Presupunem, că L nu ar fi o linie fixă. Atunci există $w \in L(p, q)$, dar $fw \notin L(p, q)$. Cum $p \neq q$ rezultă că $\rho(p, q, fw) > 0$. Dar f este 2-*MC* şi deci $\rho(fp, fq, fw) \leqslant \alpha\rho(p, q, w)$. Cum $\rho(p, q, w) = 0$ rezultă $\rho(fp, fq, fw) = 0$, deci $\rho(q, p, fw) = 0$. Prin urmare $fw \in L(p, q)$ oricare ar fi $w \in L(p, q)$, adică $L(p, q)$ este o linie fixă pentru f.

TEOREMA 4. *Fie f o aplicație 2-MC.* (i) *Dacă două linii fixe diferite ale lui f trec printr-un punct p atunci p este un punct fix.* (ii) *Dacă f are două sau mai multe puncte fixe atunci acestea se găsesc toate pe o linie fixă L.*

Demonstrație: (i) Fie L și M două linii fixe și $p = L \cap M$. Cum $fp \subset L$ și $fp \subset M$ rezultă că $fp \subset L \cap M$ și deci $fp = p$. (ii) Din Lema 1 rezultă că toate punctele fixe sînt coliniare, iar din lema 4 rezultă că linia determinată de aceste puncte este o linie fixă.

(Intrat în redacție la 15 mai 1980)

BIBLIOGRAFIE

1. D. E. Daykin, J. K. Dugdale, *Triangle contractive self maps of a Hilbert space*, Fund. Math., 53 (1974), 187–195.
2. S. Gahler, *Lineare 2-normierte Räume*, Math. Nachr., 28 (1965), 1–43.
3. S. Gahler, *2-metrische Räume und ihre topologische Struktur*, Math. Nachr., 26 (1963/64), 115–148.
4. K. Iséki, *Mathematics o 2-normed spaces*, Math. Sem. Notes, 4 (1976), 161–174.
5. I. A. Rus, *Metrical fixed point theorems*, University of Cluj-Napoca, 1979.
6. I. A. Rus, *Principii și aplicații ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
7. T. Zamfirescu, *Area contractions in the plan*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46 (1971) 49–52.

FIXED POINTS FOR APPLICATIONS DEFINED ON 2-METRIC SPACES

(Summary)

In this paper are generalized certain results referring to the fixed points and the fixed lines of applications defined on 2-metric spaces.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

SOME REMARKS CONCERNING BOOLEAN FUNCTIONS

N. BOTH

a. Let $P, Q : V^n \to V = \{0, 1\}$ be two bivalent boolean functions of n variables ($P, Q \in \mathcal{B}_n$). One knows that each (nonzero) bivalent function of n variables may be expressed by the perfect disjunctive normal form:

$$P(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{j=1}^{r_P} p^{\alpha^j}$$

where $r_P = |A_P| (A_P = \{\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) \in V^n : P(\alpha^j) = 1\} = P^{-1}(1))$ is the *rank* of P and $p^{\alpha^j} = p_1^{\alpha_1^j} \ldots p_n^{\alpha_n^j}$ are the *minterms* of P. Here

$$p^\alpha = \begin{cases} p & \text{if } \alpha = 1 \\ \bar{p} & \text{if } \alpha = 0 \end{cases}$$

Observe that each minterm of P is determined by the $\alpha^j \in V^n$, so that P is determined by the (0, 1)-matrice $M(P) = (a_{ji})$ $j = \overline{1, r_P}$ $i = \overline{1, n}$, where $a_{ji} = \alpha_i^j$.

In [1] there is defined the distance between p^{α^j} and p^{α^k} as $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \oplus \alpha_i^k$ ($\oplus$ is the binary addition). Here it is also defined the distance between P and Q as the minimum of distances between the minterms of P and Q. More suggestive seems to be the föllowing definitino of the *moment* $\mu(P, Q)$ of the pair (P, Q):

$$(\mu) \cdot \mu(P, Q) = \sum_{h=1}^{r_Q} \sum_{j=1}^{r_P} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^j \oplus \beta_i^h), \ \alpha^j \in A_P, \ \beta^h \in A_Q.$$

In the case $n = 3$, $\mu(P, Q)$ is the number of the edges of the unitcube, which join the points representing the minterms of P, with the same for Q.

Example. $P = p_1 p_2 \bar{p}_3 \vee p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \vee \bar{p}_1 p_2 p_3 \vee \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3$,

$Q = p_1 p_2 \bar{p}_3 \vee p_1 \bar{p}_2 p_3 \vee \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3$

$A_P = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0,), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$;

$A_Q = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

$\mu(P, Q) = (0 + 1 + 2 + 3) + (2 + 1 + 2 + 1) + (1 + 2 + 1 + 2) = 18.$

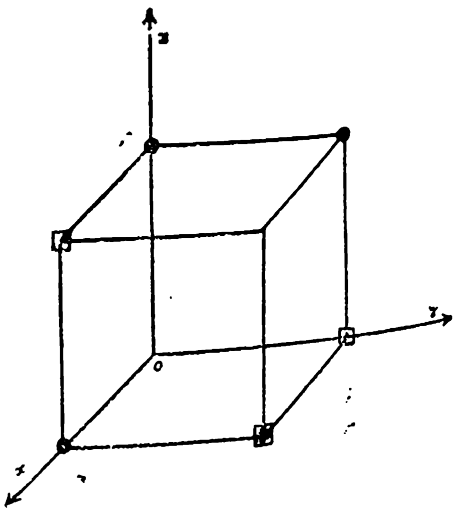

Fig. 1

The elements of A_P and A_Q are points of the unit-cube in $\mathbf{R}^3$ (designated by ● and □ respectively). These points can also given by a number $< 2^3$ (written in the base 2). So, it can be used a simplified notation:

$A = \{6, 4, 3, 1\}$, $A_Q = \{6, 5, 2\}$ and $P = p^1 \vee p^3 \vee p^4 \vee p^6$; $Q = p^2 \vee p^5 \vee p^6$.

b. Concerning the function P we define the *sum-vector*:

$$(v).\ v(P) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ where } \alpha_i = \sum_{j=1}^{r_P} \alpha_i^j$$

Observation. In fact, $v(P)$ is the „column sum-vector" of $M(P)$ ([2]).

THEOREM 1. *If* $v(P) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *and* $v(Q) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, *then*

$$\mu(P, Q) = r_P \sum_{i=1}^{n} \beta_i + r_Q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

Proof. Aplying (μ) we obtain:

$$\mu(P, Q) = \sum_{h=1}^{r_Q} \sum_{j=1}^{r_P} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^j \oplus \beta_i^h) = \sum_{h=1}^{r_Q} \sum_{j=1}^{r_P} (\alpha_1^j \oplus \beta_1^h + \ldots + \alpha_n^j \oplus \beta_n^h),$$

where α_i from α_i^j and β_i from β_i^h are 1 and $(r_P - \alpha_i)$, $(r_Q - \beta_i)$ respectively are 0. According to the definition of $\oplus$, the following cases must be considered only: $\alpha_i^j = 1$, $\beta_i^h = 0$ (with $\alpha_i(r_Q - \beta_i)$ entries) and $\alpha_i^j = 0$, $\beta_i^h = 1$ (with $(r_P - \alpha_i)\beta_i$ entries). So,

$$\mu(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i(r_Q - \beta_i) + \beta_i(r_P - \alpha_i)] = r_P \sum_{i=1}^{n} \beta_i + r_Q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \ \blacktriangle$$

COROLLARY. $(\ker v) \times (\ker v) \subseteq \ker \mu$, *that is*

$$v(P) = v(P') \text{ and } v(Q) = v(Q') \Rightarrow \mu(P, Q) = \mu(P', Q').$$

Example. For the functions from the preceding example we have: $v(P) = (2, 2, 2)$, $v(Q) = (2, 2, 1)$, $r_P = 4$ and $r_Q = 3$. With Theorem 1 we obtain $\mu(P, Q) = 4.5 + 3 \cdot 6 - 2(4 + 4 + 2) = 18$.

c. In the general case $P = P(p)$, $Q = Q(q)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots q_n)$ we define (as in [3]) the *p-spectrum* of Q:

$$\mathrm{Sp}(Q) = \{Q(s(p)) : s \in S_n\} \text{ where } s(p) = (p_{s(1)}, \ldots, p_{s(n)}).$$

Let $Q^s = Q(s(p))$. We define the *generalized moment* of (P, Q):

$$\mu(P, Q) = \min_{s \in S_n} \{\mu(P, Q^s)\}$$

We call $s_0 \in S_n$ an *ideal permutation* if

$$\mu(P, Q^{s_0}) \leqslant \mu(P, Q^s) \text{ for each } s \in S_n.$$

Therefore, for finding $\mu(P, Q)$ one has to determine an ideal permutation. For this, we will give a criterion (Theorem 2).

In $\mathbf{N}^n$ we define the relation ε ("equiordering") by:

(ε). $x\varepsilon y \Leftrightarrow \forall l \forall k: (x_l - x_k)(y_l - y_k) \geqslant 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{N}^n$.

It is obvious that $\forall s \in S_n: s(x)\varepsilon s(y) \Leftrightarrow x\varepsilon y$.

Lemma. *Let $x, y \in \mathbf{N}^n$. If there exist k, l so that $k < l$ and $y_l \leqslant y_k$ then* $x_1y_1 + \ldots + x_ky_l + \ldots + x_ly_k + \ldots x_ny_n \geqslant x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Proof. We may suppose that $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ and $y_l < y_k$, that is $y_k = y_l + d$, $d > 0$, The lemma will follow from: $x_ky_l + x_ly_k \geqslant x_ky_k + x_ly_l$. This is equivalent to:

$$x_ky_l + x_l(y_l + d) \geqslant x_k(y_l + d) + x_ly_l \Leftrightarrow x_ld \geqslant x_kd \Leftrightarrow x_k \leqslant x_l,$$

which is obvious (according to assumption).

Theorem 2. *The permutation $s \in S_n$ is ideal iff $v(P)\varepsilon v(Q^s)$.*

Proof. With Theorem 1 we have:

$\mu(P, Q^s) = r_P \sum_{i=1}^{n} \beta_i + r_Q \sum_{i=s}^{n} \alpha_i - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$. Because r_P, $r_Q(=r_{Q^s})$, $\Sigma\alpha_i$ and $\Sigma\beta_i$ are independent from s, it results that $\mu(P, Q^s)$ is minimal iff $\Sigma\alpha_i\beta_i$ is maximal. On the other hand, $v(P)$ and $v(Q^s)$ may be "equiordered" step by step. With each step of equiordering, the sum $\Sigma\alpha_i\beta_i$ can not decrease (see Lemma), so that if $v(P)\varepsilon v(Q^s)$ this sum is maximal and therefore $\mu(P, Q^s)$ is minimal.

d. It remains to find $s \in S_n$ so that $v(P)\varepsilon v(Q^s)$. At first we get the following

Proposition. $A_{s(P)} = s^{-1}(A_P)$.

Proof.

$$P = \bigvee_{j=1}^{r_p} p_1^{\alpha_1^j} \ldots p_n^{\alpha_n^j} \Rightarrow s(P) = \bigvee_{j=1}^{r_p} p_{s(1)}^{\alpha_1^j} \ldots p_{s(n)}^{\alpha_n^j} =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{r_p} p_1^{\alpha_{s^{-1}(1)}^j} \ldots p_n^{\alpha_{s^{-1}(n)}^j} \Rightarrow A_{s(P)} =$$

$$= \{(\alpha_{s^{-1}(1)}^1, \ldots, \alpha_{s^{-1}(n)}^1), \ldots, (\alpha_{s^{-1}(1)}^{r_P}, \ldots, \alpha_{s^{-1}(p)}^{r_P})\} =$$

$$= \{s^{-1}(\alpha^1), \ldots, s^{-1}(\alpha^{r_P})\} = s^{-1}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_P}\} = s^{-1}(A_P)$$

For each $x, y \in \mathbf{N}^n$ it will be determined $s \in S_n$ so that $x\varepsilon s(y)$. In this purpose we define $S: \mathbf{N}^n \to S_n$ by $x \to S(x)$ such that $x \in S(x)$. In the case $x_i = x_k$ the order of i, k is decisive. It is obvious that $x\varepsilon s(y) \Leftrightarrow S(x)\varepsilon s(S(y)) \Leftrightarrow S(x) = s(S(y)) \Leftrightarrow s = S(x)[S(y)]^{-1}$.

Example. Let $P = p^7 \vee p^6 \vee p^4$; $A_P = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ $Q = q^3 \vee q^1 \vee q^0$; $A_Q = \{(0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$. $v(P) = (3, 2, 1)$, $v(Q) = (0, 1, 2)$; $S(v(P)) = (321) = s_1$, $S(v(Q)) = (123) = s_2$. We determine $s = s_1 s_2^{-1} = (321) \cdot (123)^{-1} = (321) \cdot (123) = (321)$. Because $s^{-1} = s$, the minimal moment will be realized by $Q^s = \bar{p}_3 p_2 p_1 \vee \bar{p}_3 \bar{p}_2 p_1 \vee \bar{p}_3 \bar{p}_2 \bar{p}_1 = p^6 \vee p^4 \vee p^0$ and $A_{Q^s} = s(A_Q) = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0)\}$; $v(Q^s) = (2, 1, 0)$, so that $\mu(P, Q^s) = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 2(6 + 2) = 11$. In fact, the other moments $\mu(P, Q^s)$, $s \in S_3$ are:

$$\mu(P, Q^{(123)}) = 19; \ \mu(P, Q^{(132)}) = 17 = \mu(P, Q^{(213)}); \ \mu(P, Q^{(231)}) = 13 = \mu(P, Q^{(312)}).$$

e. In [3] we have defined the distance $\underline{d}$ between $P(p)$ and $Q(q)$: $\underline{d}(P, Q) = \min_{s \in S_n} \{d(P, Q^s)\}$ where $d(P, Q^s) = \frac{1}{2^n} |A_P \cap F_{Q^s} \cup F_P \cap A_{Q^s}|$, $F_P = V^n - A_P$.

So arises the question whether there exists or not a connection between $\underline{d}(P, Q)$ and $\underline{\mu}(P, Q)$. If we calculate $d(P, Q^s)$ for P, Q in the preceding example, we obtain : $d(P, Q^{(123)}) = \frac{6}{8} = d(P, Q^{(132)}) = d(P, Q^{(213)})$, $d(P, Q^{(231)}) = \frac{4}{8} = d(P, Q^{(312)})$ and $d(P, Q^{(321)}) = \frac{2}{8}$. Observe that min $d(P, Q^s)$is realized for the same $s = (321)$ as min $\mu(P, Q^s)$. But this is not a rule. So, for $P = p^7 \vee p^6 \vee p^4 \vee p^5 \vee p^3$, $Q = p^6 \vee p^3 \vee p^2 \vee q^1 \vee q^0$, $\mu(P, Q^{(312)}) = 38 = \mu(P, Q^{(213)})$ are both minimals while $d(P, Q^{(312)}) = \frac{2}{8}$ is minimal and $d(P, Q^{(213)}) = \frac{4}{8}$ is not. Therefore it is not true that each permutation $s \in S_n$ which realitzes the minimum for μ, also realizes it for d. In this context it remains open the following.

Problem. Characterize the class $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ of the functions for which the same $s \in S_n$ realizes the minimum both for d and μ.

(Received June 4, 1980)

REFERENCES

1. G. N. P o v a r o v, *O gruppovoi invariantnosti bulevih funkții*, Akad. Nauk. SSSR, Primenenie logiki v nauke i tehnike, 1960, p. 263–340.
2. H. J. R y s e r, *Combinatorial mathematics*, The math. Assoc. of America, 1963.
3. N. B o t h, *Noțiuni metrice în logica propozițiilor*, Studii și cerc. Math., 3 (1974), 325–332.

CÎTEVA OBSERVAŢII PRIVIND FUNCŢIILE BOOLEENE

(R e z u m a t)

Fiind date două funcţii booleene P şi Q de n variabile $(p_1, \ldots, p_n)$, se defineşte noţiunea de „moment" al perechii (P, Q). Această noţiune este un analog „mai sugestiv" al noţiunii de distanţă din [1]. Theorema 1 dă o formulă practică de calcul. În cazul variabilelor diferite $(p_1, \ldots, p_n)$, $(q_1, \ldots, q_n)$ se defineşte „momentul generalizat" ca fiind minimul momentelor perechilor (P, Q^s), $s \in S_n$, unde Q^s se obţine din Q înlocuind q_i cu $p_{s(i)}$.

Cu ajutorul relaţiei de „echiordine", Teorema 2 caracterizează permutările s pentru care momentul perechii (P, Q^s) este minim. Legat de distanţa în logica propoziţiilor, definită în [3], se formulează o problemă deschisă.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

ON AN ALGORITHM FOR FINDING THE SET OF EQUILIBRIUM POINTS FOR BIMATRIX GAMES

RADU MUNTEANU

The purpose of this paper is to analyse the algorithm for finding the set of equilibrium points for bimatrix games, given in the papers [1], [2].

As we shall see, the given algorithm does not generate the entire set of equilibrium points, but only a subset of them, one of this algorithm's steps being not correct.

In this note we prove a theorem wich permits to eliminate this mistake.

1. Let $\Gamma = (A, B)$ be a bimatrix game given by the payoff matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, where $A, B \in M^{m\times n}(R)$ (the set of matrices of type $m \times n$ with real elements), and let

$$X = \left\{x \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x \geqslant 0\right\}$$
$$Y = \left\{y \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y \geqslant 0\right\} \tag{1}$$

be the mixed strategies for the two players.

DEFINITION 1. A pair of strategies (x^0, y^0) is an equilibrium point of Γ iff

$$xAy^0 \leqslant x^0Ay^0, \text{ for all } x \in X$$
$$x^0By \leqslant x^0By^0, \text{ for all } y \in Y \tag{2}$$

We denote the set of all equilibrium points of the game Γ by $EP(\Gamma)$.

DEFINITION 2. If $\Gamma = (A, B)$ is a bimatrix game and $k \in \{1, \ldots, m\}$ $h \in \{1, \ldots, n\}$, we define the game $\Gamma_{kh} = (A_k, B_h)$ as a bimatrix game for wich A_k is obtained from A by subtracting its k — the row from each row of A and B_h is obtained from B subtracting its h — th column from each column of B, i.e. the entries of $A_k = (a^k_{ij})$, $B_h = (b^h_{ij})$ are obtained from the entries of $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ by

$$a^k_{ij} = a_{ij} - a_{kj}, \text{ for all } i,j$$
$$b^h_{ij} = b_{ij} - b_{ih}, \text{ for all } i,j \tag{3}$$

respectively.

Let us consider the sets X_h, Y_k, $h = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, defined by

$$X_h = \{x \in X \mid xB_h \leqslant 0\}$$

$$Y_k = \{y \in Y \mid Ay_k \leqslant 0\} \tag{4}$$

THEOREM 1. ([1]), *pg* 84) ([2], *pg* 374)
For any $k \in \{1, \ldots, m\}$ *and* $h \in \{1, \ldots, n\}$ *we have*

$$EP(A_k, B_h) = EP(A, B).$$

THEOREM 2. ([1]), *pg.* 107)
For a bimatrix game $\Gamma = (A, B)$ *we have*

$$X = \bigcup_{h=1}^{n} X_h$$

$$Y = \bigcup_{k=1}^{m} Y_k$$

THEOREM 2. ([1]), *pg* 108)
If $(x^0, y^0) \in EP(\Gamma)$ *and* $x^0 \in X_h$, $y^0 \in Y_k$ *then*

a) $x^0 = \sum_{j=1}^{t} \lambda_i x^{hj}$, $\lambda_j > 0$ $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$ $x^{hj} \in \ddot{X}_h$, $j = 1, 2, \ldots, t$

b) $y^0 = \sum_{i=1}^{u} \mu_i y^{ki}$, $\mu_i > 0$ $\sum_{i=1}^{u} \mu_i = 1$, $y^{ki} \in \ddot{Y}_k$, $i = 1, 2, \ldots, u$

c) $(x^{hj}, y^0) \in EP(\Gamma)$, $j = 1, 2, \ldots, t$

$(x^0, y^{ki} \in EP(\Gamma)$, $i = 1, 2, \ldots, u$

where $\ddot{A}$ *is the set of extreme points of the convex set* A.

DEFINITION 3. Let

$$\ddot{X}_h = \{x^{h1}, \ldots, X^{hp_h}\}$$

$$\ddot{Y}_k = \{y^{k1}, \ldots, y^{ks_k}\}$$

be the sets of extreme points of the sets X_h, Y_k respectively.

If $h \in \{1, \ldots, n\}$ and $j \in \{1, \ldots, p_h\}$ we define the set

$Y^*_{hj} = \{y^{kp} \mid x^{hj}(B_h + A_k)\, y^{kp} = 0 \;\; k = 1, 2, \ldots, m, \; p = 1, 2, \ldots, s_k\}$.

LEMMA 1. $(x^{hj}, y^{kp}) \in EP(\Gamma) \Leftrightarrow x^{hj}(B_h + A_k)y^{kp} = 0$

DEFINITION 4. On the set $\bigcup_{h=1}^{n} \ddot{X}_h$ we define the equivalence relation ρ, as follows:

$$x^{hj} \rho x^{li} \Leftrightarrow Y^*_{hj} = Y^*_{li}$$

and we denote by X^*_{hj} the equivalence class of x^{hj}

Let $p = \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \ddot{X}_k\right)$. Then, after a rearangement of the indexes, if necessary, we can write

$$\bigcup_{k=i}^{n} \ddot{X}_k = \{x^1, \ldots, x^p\}$$

Now we define the sets Y_i^* by

$$Y_i^* = \{y^{kp} \mid (x^i, y^{kp}) \in EP(\Gamma)\}$$

wich, from lemma 1, are equals to the sets define in definition 3.

THEOREM 4.

$$EP(\Gamma) = \bigcup \{Conv\,(X_{i_1}^* \cup X_{i_2}^* \cup \ldots \cup X_{i_k}^*) \times Conv\,(Y_{i_1}^* \cap Y_{i_2}^* \cap \ldots Y_{i_k}^*) \mid$$
$$i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, p\},\ k \in \{1, \ldots, p\}\}.$$

Proof. Let $(x^0, y^0) \in EP(\Gamma)$. From theorems 2 and 3 it folows

$$x^0 = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j\, x^{hj},\ y^0 = \sum_{i=1}^{u} \mu_i y^{ki} \text{ and}$$
$$(x^{hj}, y^0) \in EP(\Gamma)\ j = 1, 2, \ldots, t,$$
$$(x^0, y^{ki}) \in EP(\Gamma)\quad i = 1, 2, \ldots, u.$$

Let $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, u\}$. We consider the game

$$\Gamma_{kh} = (A_h, B_h)$$

for wich we hawe

$$EP(\Gamma) = EP(\Gamma_{kh})$$

Hence $(x^{hj}, y^0) \in EP(\Gamma_{kh})$, and therefore,

$$x^{hj}B_h \leqslant x^{hj}B_h y^0 = 0 = \sum_{s=1}^{u} \mu_s X^{hj}B_h y^{ks}.$$

Taking into account that $\mu_s > 0$ and $x^{hj}B_h y^{ks} \leqslant 0$ we have;

$$x^{hj}B_h y^{ki} = 0$$

Similarly we deduce

$$x^{hj}A_h y^{ki} = 0$$

and so we have

$$(\forall)\ j \in \{1, \ldots, t\}\ (\forall)\ i \in \{1, \ldots, u\}(x^{hj}, y^{ki}) \in EP(\Gamma)$$

or, equivalently

$$Y_{hj}^* \supseteq \{y^{k1}, \ldots, y^{ku}\} \qquad (\forall) j,\ j \in \{1, \ldots, t\}$$

and finally we conclude that:

$$Y_{h1}^* \cap Y_{h2}^* \cap \ldots \cap Y_{ht}^* \supseteq \{y^{k1}, \ldots, y^{ku}\}.$$

Taking into account that

$$x^{hj} \in X^*_{hj},$$

it follows

$$\{x^{h1}, \ldots, x^{ht}\} \subseteq X^*_{h1} \cup \ldots \cup X^*_{ht}$$

and we deduce that (x^0, y^0) is an element of the set occuring in the right hand side of the equality in theorem 4. Conversly, consider $y \in Y^*_{i_1} \cap \ldots \cap Y^*_{i_k}$. for an arbitrary selection $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Then for any $x \in X^*_{i_1} \cup \ldots \cup X^*_{i_k}$ we have $(x, y) \in EP(\Gamma)$ and consequentely:

$$\text{Conv } (X^*_{i_1} \cup \ldots \cup X^*_{i_k}) \times \{y\} \subseteq EP(\Gamma)$$

But the element y being arbitrary from $Y^*_{i_1} \cap \ldots \cap Y^*_{i_k}$, we have: Conv $(X^*_{i_1} \cup \ldots \cup X^*_{i_k}) \times \text{Conv}(Y^*_{i_1} \cap \ldots \cap Y^*_{i_k}) \subseteq EP(\Gamma)$ for any set of indexes $\{i_1, \ldots i_k\}$ and therefore, the theorem is proved.

2. Synthetizing the teoretical results deduced above it follows that the algorithm for finding all equilibrium points for a bimatrix game can be described as follows:

Step 1. Consider the matrices A_k, B_k $(k = \overline{1, m}, h = \overline{1, n})$ and determine the sets $\ddot{X}_h$, $\ddot{Y}_k$. Assume that we have

$$\ddot{X}_h = \{x^{h1}, \ldots, x^{hp_h}\}$$

$$\ddot{Y}_k = \{y^{k1}, \ldots, y^{ks_k}\}$$

Step 2. For x^{hj}_i, $\overline{h = 1}, n$, $j = \overline{1, p_h}$, construct the set

$$Y^*_{hj} = \{y_{kp} \mid x^{hj}(B_k + A_k)y^{kp} = 0, \ k = \overline{1, m} \ p = \overline{1, s_k}\}$$

Step 3. Find the sets X^*_{hj} $h = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, p_n}$.

Step 4. Construct the set $EP(\Gamma)$ from the equality given in theorem 4.

Remark. Theorem 4 is not given in the papers mentioned above, where is given, proof, at STEP 4 of the algorithm, the equality

$$EP(\Gamma) = \bigcup_{h=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{p_h} \text{conv } (X^*_{hj}) \times \text{Conv } (Y^*_{hj}), \tag{5}$$

wich is not true. As we can see, using theorem 4, the set from the right hand side of the above equality, is generally a subset of $EP(\Gamma)$, as it follows from the bimatrix game given by the payoff matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

We solve this game with the algorithm given above; we have:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and denoting:

$$x^{11} = x^{21} = (1,\ 0) = y^{11} = y^{21}$$
$$x^{12} = x^{22} = (0,\ 1) = y^{22}$$

it follows

$$\ddot{Y}_1 = \{y^{11}\}, \qquad \ddot{Y}_2 = \{y^{21},\ y^{22}\}$$
$$\ddot{X}_1 = \{x^{11},\ x^{12}\}, \qquad \ddot{X}_2 = \{x^{21},\ x^{22}\}$$

We easily check the equalities

$$Y^*_{11} = \{y^{11},\ y^{21}\} = \{(1,\ 0)\}$$
$$Y^*_{12} = \{y^{11},\ y^{21},\ y^{22}\{ = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$$
$$Y^*_{21} = \{y^{11},\ y^{21}\} = \{(1,\ 0)\}$$
$$Y^*_{22} = \{y^{11},\ y^{21},\ y^{22}\{ = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1\}$$

and from the equality (5) we have $EP(\Gamma)$ equal to:

$$\{((1,\ 0),\ (1,\ 0))\} \cup (\{(0,\ 1)\} \times \mathrm{Conv}\ \{(0,\ 1),\ (1,\ 0)\}) \tag{6}$$

Considerind the points $x^0 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \in X,\ y^0 = (1,\ 0) \in Y$ we have obviously

$$(\forall x \in X \quad xAy^0 \leqslant x^0Ay^0 = 1$$
$$(\forall)y \in Y \quad x^\circ By \leqslant x^\circ By^\circ = 1$$

hence $(x^0,\ y^0) \in EP(\Gamma)$, but the pair of strategies $(x^0,\ y^0)$ is not occuring in the set (6).

Using theorem 4, proved above, we have $EP(\Gamma) = (\{(0,\ 1)\{ \times \mathrm{conv}\ \{(1,\ 0),\ (01,\ )\}\} \cup (\mathrm{Conv}\ \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\} \times \{(1,\ 0)\})$ and obvioulsly the inclusion is strict.

(Received July 11, 1980)

REFERENCES

1. S m a d i c i, C., *Contribuţii la studiul jocurilor bimatriciale*, Teză de doctorat, Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, 1977.
2. S m a d i c i, C., *On the Equilibrium Points for Bimatrix Games*, Math. Operationsforsch. Statistic, Ser. Optimization, **10** (1979), No 3, 373–378.

UN ALGORITM PENTRU GĂSIREA MULŢIMII PUNCTELOR DE ECHILIBRU PENTRU JOCURI BIMATRICIALE

(R e z u m a t)

În lucrare se construieşte un algoritm care permite determinarea întregii mulţimi a punctelor pe echilibru pentru jocurile bimatriciale.

ASUPRA T-RECURENŢEI UNOR SPAŢII A_3 ŞI A_4 CU CONEXIUNE AFINĂ

P. ENGHIŞ

Fie A_n un spaţiu cu conexiune afină nesimetrică, definit într-un sistem de coordonate $x^1 \dots x^n$ de n^3 funcţii Γ^i_{jk} componentele conexiunii afine. Notăm $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ componentele tensorului de torsiune a conexiunii Γ^i_{jk} în sistemul de coordonate considerat şi cu $F^i(x) = T^i_{jk}dx^j\delta x^k$, cele n forme alternate asociate lui T^i_{jk}. Din tensorul de torsiune prin contracţie în i şi j se obţine vectorul de torsiune $T_k = T^i_{ik}$ cu forma Pfaff asociată $\sigma = T_k dx^k$. Prin produs tensorial contractat, din tensorul de torsiune se obţine tensorul pătratic de torsiune $T_{jk} = T^i_{js}T^s_{ik}$ cu forma pătratică asociată $\pi_0 = T_{jk}dx^j dx^k$.

Spaţiul A_n spunem că este T-recurent dacă există un vector covariant Ψ_r astfel ca

$$T^i_{jk,r} = \Psi_r T^i_{jk} \tag{1}$$

unde prin virgulă s-a notat derivarea covariantă în raport cu conexiunea Γ.

1. În *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I. p. 191, acad. G. Vrînceanu studiază torsiunea spaţiilor A_3 în care formele σ şi π sînt identic nule. În aceste condiţii, rangul matricei

$$\begin{pmatrix} T^1_{12} & T^1_{13} & T^1_{23} \\ T^2_{12} & T^2_{13} & T^2_{23} \\ T^3_{12} & T^3_{13} & T^3_{23} \end{pmatrix} \tag{2}$$

asociată formelor de torsiune F^i are rangul egal cu unu şi există în acest caz un sistem de coordonate astfel ca reducînd formele de torsiune la forma canonică, singura componentă ne nulă a tensorului de torsiune să fie $T^1_{23} = 1$.

Să studiem acum problema T-recurenţei acestor spaţii.

Avem :

$$T^i_{jk,r} = \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^r} - \Gamma^i_{rs}T^s_{jk} + \Gamma^s_{rj}T^i_{sk} + \Gamma^s_{rk}T^i_{js} \tag{3}$$

care în cazul de faţă ne dă

$$T^1_{12,r} = \Gamma^3_{r1}T^1_{32},\ T^1_{13,r} = \Gamma^2_{r1}T^1_{23},\ T^1_{23,r} = (-\Gamma^1_{r1} + \Gamma^2_{r2} + \Gamma^3_{r3})\,T^1_{23},\ T^2_{12,r} = 0, \tag{4}$$
$$T^2_{13,r} = 0,\ T^2_{23,r} = -\Gamma^2_{r1}T^1_{23},\ T^3_{12,r} = 0,\ T^3_{13,r} = 0,\ T^3_{23,r} = -\Gamma^3_{r1}T^1_{23}$$

Punînd în (4) condițiile (1) rezultă asupra conexiunii spațiului următoarele condiții :

$$\Gamma^2_{r1} = \Gamma^2_{1r} = \Gamma^3_{r1} = \Gamma^3_{1r} = 0, \ \Gamma^1_{1i} = \Gamma^1_{i1}, \ \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32}, \ \Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

restul componentelor conexiunii fiind funcții arbitrare de x^1, x^2, x^3. Pentru vectorul de torsiune Ψ avem

$$\Psi_1 = -\Gamma^1_{11}, \ \Psi_2 = \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{12}, \ \Psi_3 = \Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{13} \tag{6}$$

Deci

PROPOZIȚIA 1. *Spațiile A_3 cu vector de torsiune și tensor patratic de torsiune nuli sînt T-recurente, dacă într-un sistem de coordonate componentele conexiunii satisfac condițiile (5). Vectorul de T-recurență Ψ are componentele date de (6).*

2. Într-o lucrare anterioară [3] am considerat spații A_4 pentru care $\Gamma^i_{j4} = \Gamma^i_{4j}$ spații notate cu A_4^*.

Dacă într-un spațiu A_4^* formele σ și π sînt identic nule, atunci rangul matricei

$$\begin{pmatrix} T^1_{12} & T^1_{13} & T^1_{14} & T^1_{23} & T^1_{24} & T^1_{34} \\ T^2_{12} & T^2_{13} & T^2_{14} & T^2_{23} & T^2_{24} & T^2_{34} \\ T^3_{12} & T^3_{13} & T^3_{14} & T^3_{23} & T^3_{24} & T^3_{34} \\ T^4_{12} & T^4_{13} & T^4_{14} & T^4_{23} & T^4_{24} & T^4_{34} \end{pmatrix} \tag{7}$$

asociată formelor de torsiune F^i are rangul cel mult doi, deci există un sistem de coordonate astfel ca singurele componente nenule ale tensorului de torsiune să fie $T^1_{23} = 1$, T^4_{12}.

Dacă în sistemul de coordonate considerat T^4_{12} este arbitrar din (3) pentru acest caz rezultă

$$\begin{aligned}
&T^1_{12,r} = -\Gamma^1_{r4}T^4_{12} + \Gamma^3_{r1}T^1_{32}, \ T^1_{13,r} = \Gamma^2_{r1}T^1_{23} \\
&T^1_{14,r} = 0, \ T^1_{23,r} = (-\Gamma^1_{r1} + \Gamma^2_{r2} + \Gamma^3_{r3}) \ T^1_{23} \\
&T^1_{24,r} = \Gamma^3_{r4}T^1_{23}, \ T^1_{34} = \Gamma^2_{r4}T^1_{32}, \ T^2_{12,r} = -\Gamma^2_{r4}T^4_{12} \\
&T^2_{13,r} = 0, \ T^2_{14,r} = 0, \ T^2_{23,r} = -\Gamma^2_{r1}T^1_{23}, \ T^2_{24,r} = 0 \\
&T^2_{34,r} = 0, \ T^3_{12,r} = -\Gamma^3_{r4}T^4_{12}, \ T^3_{13,r} = 0, \ T^3_{14,r} = 0 \\
&T^3_{23,r} = -\Gamma^3_{r1}T^1_{23}, \ T^3_{24,r} = 0, \ T^3_{34,r} = 0 \\
&T^4_{12,r} = \frac{\partial T^4_{12}}{\partial x^r} - (\Gamma^4_{r4} - \Gamma^1_{r1} - \Gamma^2_{r2})T^4_{12} \\
&T^4_{13,r} = \Gamma^2_{r3}T^4_{12}, \ T^4_{14,r} = \Gamma^2_{r4}T^4_{12}, \ T^4_{34,r} = 0 \\
&T^4_{23,r} = -\Gamma^4_{r1}T^1_{23} + \Gamma^1_{r3}T^4_{21}, \ T^4_{24,r} = \Gamma^1_{r4}T^4_{21}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dacă impunem acum spaţiului A_4^* cu formele σ şi π nule condiţia de T-recurenţă (1), din (8) rezultă pentru conexiunea în sistemul de coordonate considerat, următoarele condiţii:

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{\hat{r}4} = \Gamma^1_{4\hat{r}} = \Gamma^1_{\hat{r}3} = \Gamma^1_{3\hat{r}} = \Gamma^2_{\hat{r}1} = \Gamma^2_{1\hat{r}} = \Gamma^2_{\hat{r}3} = \Gamma^2_{3\hat{r}} = \Gamma^2_{\hat{r}4} = \\ &= \Gamma^2_{4\hat{r}} = \Gamma^3_{\hat{r}1} = \Gamma^3_{1\hat{r}} = \Gamma^3_{4\hat{r}} = \Gamma^3_{\hat{r}4} = \Gamma^4_{\hat{r}1} = \Gamma^4_{1\hat{r}} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Gamma^1_{32} = -1,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32},\ \Gamma^4_{23} = \Gamma^4_{32},\ \Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42},\ \Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} \tag{9'}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^4_{12}}{\partial x^1} + 2\Gamma^1_{11}\Gamma^4_{12} = 0,\quad \frac{\partial \Gamma^4_{12}}{\partial x^2} - (\Gamma^4_{24} - 2\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{23})\Gamma^4_{12} = 0 \\ &\frac{\partial \Gamma^4_{12}}{\partial x^3} - (\Gamma^4_{34} + \Gamma^3_{33})\Gamma^4_{12} = 0,\quad \frac{\partial \Gamma^4_{12}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{12} = 0 \end{aligned} \tag{9''}$$

unde $\hat{r} = 1, 3, 4$ iar $\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}, \Gamma^3_{22}, \Gamma^4_{22}$ funcţii arbitrare de x^1, x^2, x^3, x^4. Pentru vectorul de T-recurenţă avem:

$$\Psi_1 = -\Gamma^1_{11},\ \Psi_2 = -\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23},\ \Psi_3 = \Gamma^3_{33},\ \Psi_4 = 0 \tag{10}$$

Deci

PROPOZIŢIA 2. *Spaţiile A_4^* cu formele σ şi π identic nule sînt T-recurente, dacă într-un sistem de coordonate componentele conexiunii satisfac condiţiile* (9), (9′), (9″) *vectorul de T-recurenţă fiind dat de* (10).

Dacă în sistemul de coordonate considerat avem însă $T^4_{12} = \text{constant} \neq 0$, putem considera $T^4_{12} = 1$ şi condiţiile (9) şi (9′) rămîn neschimbate, iar (9″) devin

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^4_{44} = 0,\ 2\Gamma^1_{21} = \Gamma^4_{24} + \Gamma^3_{23},\ \Gamma^4_{34} = -\Gamma^3_{33} \tag{11}$$

Pentru vectorul de T-recurenţă avem în acest caz

$$\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = -\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23},\ \Psi_3 = +\Gamma^3_{33},\ \Psi_4 = 0 \tag{12}$$

Deci:

POPOZIŢIA 3. *Dacă componentele conexiunii spaţiilor A_4^* cu formele σ şi π identic nule, în sistemul de coordonate considerat satisfac relaţiile* (9), (9′), (11) *atunci spaţiile A_4^* sînt T-recurente cu vectorul de T-recurenţă dat de* (12).

Dacă în sistemul de cooreonate considerat avem $T^4_{12} = 0$, atunci rangul matricei (7) este unu şi condiţiile (9), (9′), (9″) devin:

$$\Gamma^2_{\hat{r}1} = \Gamma^2_{1\hat{r}} = \Gamma^2_{\hat{r}4} = \Gamma^2_{4\hat{r}} = \Gamma^3_{\hat{r}1} = \Gamma^3_{1\hat{r}} = \Gamma^3_{\hat{r}4} = \Gamma^3_{4\hat{r}} = \Gamma^4_{\hat{r}1} = \Gamma^4_{1\hat{r}} = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21},\ \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31},\ \Gamma^1_{14} = \Gamma^1_{41},\ \Gamma^1_{24} = \Gamma^1_{42} \\ &\Gamma^1_{34} = \Gamma^1_{43},\ \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32},\ \Gamma^4_{23} = \Gamma^4_{32},\ \Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42},\ \Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} \end{aligned} \tag{13'}$$

În acest caz vectorul de T-recurență este

$$\Psi_1 = -\Gamma^1_{11},\ \Psi_2 = -\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23},\ \Psi_3 = -\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}$$
$$\Psi_4 = -\Gamma^1_{41} \tag{14}$$

Deci:

PROPOZIȚIA 4. *Dacă într-un sistem de coordonate componentele conexiunii unui spațiu A_4^* cu formele σ și π identic nule satisfac relațiile* (13) *și* (13′) *atunci spațiul A_4^* este T-recurent cu vectorul de T-recurență dat de* (14).

3. Printre spațiile A_4, am considerat [4] spațiile pentru care într-un sistem de coordonate avem

$$T^a_{i\alpha} = 0 \tag{15}$$

unde $a = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2$; $\alpha = 3, 4$ spații notate cu A_4^{**}. Pentru aceste spații matricea (7) devine

$$\begin{pmatrix} T^1_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & T^1_{34} \\ T^2_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & T^2_{34} \\ T^3_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & T^3_{34} \\ T^4_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & T^4_{34} \end{pmatrix} \tag{16}$$

și are rangul cel mult doi. Vectorul de torsiune are componentele:

$$T_1 = T^2_{21},\ T_2 = T^1_{12},\ T_3 = T^4_{43},\ T_4 = T^3_{34}$$

iar tensorul patratic de torsiune:

$$\begin{aligned} &T_{11} = -(T^2_{12})^2,\ T_{12} = T^1_{12} \cdot T^2_{12},\ T_{13} = T^4_{12} \cdot T^2_{43},\ T_{14} = T^3_{12} \cdot T^2_{34} \\ &T_{22} = -(T^1_{12})^2,\ T_{23} = T^4_{21} \cdot T^1_{43},\ T_{24} = T^3_{21} \cdot T^1_{34} \\ &T_{33} = -(T^4_{34})^2,\ T_{34} = T^3_{34} \cdot T^4_{34},\ T_{44} = -(T^3_{34})^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Dacă vectorul și tensorul patratic de torsiune nu sînt nuli și rangul matricei (16) este efectiv doi putem alege sistemul de coordonate astfel ca $T^2_{12} = 1$ și T^3_{34} arbitrar restul componentelor tensorului de torsiune fiind nule. Din (3) avem:

$$\begin{aligned} &T^1_{12,r} = -\Gamma^1_{r2} T^2_{12},\ T^1_{13,r} = 0,\ T^1_{14,r} = 0,\ T^1_{23,r} = 0 \\ &T^1_{24,r} = 0,\ T^1_{34,r} = -\Gamma^1_{r3} T^3_{34} \\ &T^2_{12,r} = \Gamma^1_{r1} T^2_{12},\ T^2_{13,r} = \Gamma^2_{r3} T^2_{12},\ T^2_{14,r} = \Gamma^2_{r4} T^2_{12} \\ &T^2_{23,r} = \Gamma^1_{r3} T^2_{21},\ T^2_{24,r} = \Gamma^1_{24} T^2_{21},\ T^2_{34,r} = -\Gamma^2_{r3} T^3_{34} \end{aligned} \tag{18}$$

$$T^3_{12,r} = -\Gamma^3_{r2} T^2_{12}, \quad T^3_{13,r} = \Gamma^4_{r1} T^3_{43}, \quad T^3_{14,r} = \Gamma^3_{r1} T^3_{34}$$

$$T^3_{23,r} = \Gamma^4_{r2} T^3_{43}, \quad T^3_{24,r} = \Gamma^3_{r2} T^3_{34}, \quad T^3_{34,r} = \frac{\partial T^3_{34}}{\partial x^r} + \Gamma^4_{r4} T^3_{34}$$

$$T^4_{12,r} = -\Gamma^4_{r2} T^2_{12}, \quad T^4_{13,r} = 0, \quad T^4_{14,r} = 0$$

$$T^4_{23,r} = 0, \quad T^4_{24,r} = 0, \quad T^4_{34,r} = -\Gamma^4_{r3} T^3_{34}$$

Dacă impunem spaţiului A_4^{**} condiţia (1) de T-recurenţă, rezultă că singurele componente ale conexiunii care pot fi diferite de zero în sistemul de coordonate considerat sînt

$$\Gamma^1_{11}, \ \Gamma^2_{11}, \ \Gamma^2_{12}, \ \Gamma^2_{21}, \ \Gamma^2_{22}, \ \Gamma^3_{33}, \ \Gamma^3_{34}, \ \Gamma^3_{43}, \ \Gamma^3_{44}, \ \Gamma^4_{44} \tag{19}$$

şi trebuie să verifice condiţiile:

$$\Gamma^2_{12} = -\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^1} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{34} = \frac{\partial \Gamma^3_{43}}{\partial x^1} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{43}$$

$$\frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^4} + \Gamma^4_{44}\Gamma^3_{34} = \frac{\partial \Gamma^3_{43}}{\partial x^4} + \Gamma^4_{44}\Gamma^3_{34}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma^3_{43}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^3} = \frac{\partial \Gamma^3_{43}}{\partial x^3}.$$

În acest caz vectorul de T-recurenţă are componentele

$$\Psi_1 = \Gamma^1_{11}, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = 0 \tag{21}$$

Avem deci

PROPOZIŢIA 5. *Spaţiile A_4^{**} cu vector de torsiune şi tensor patratic de torsiune nenuli, sînt T-recurente dacă într-un sistem de coordonate componentele nenule ale conexiunii sînt date de* (19) *şi verifică relaţiile* (20). *Vectorul de T-recurenţă are componentele date de* (21).

Dacă în sistemul de coordonate considerat avem T^3_{34} = constant $\neq 0$, spaţiul A_4^{**} cu vector de torsiune şi tensor patratic de torsiune nenuli nu poate fi T-recurent căci din (18) şi (19) rezultă $\Gamma^1_{11} = \Gamma^4_{44} = 0$ şi deci

$$T^i_{jk,r} = 0 \tag{22}$$

şi spaţiul este cu torsiune convariant constantă.

Avem deci:

PROPOZIŢIA 6. *Spaţiile A_4^{**} cu vector de torsiune şi tensor patratic de torsiune nenuli, nu pot fi T-recurente, dacă T^3_{34} = const $\neq 0$ în sistemul de coordonate considerat. Dacă avem însă $\Gamma^1_{11} = \Gamma^4_{44} = 0$ spaţiul A_4^{**} verifică relaţiile* (22), *deci este cu torsiune covariant constantă.*

Dacă în sistemul de coordonate considerat avem $T^2_{12} = 1$ și $T^3_{34} = 0$ adică

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}, \quad \Gamma^3_{34} = \Gamma^3_{43} \tag{23}$$

atunci rangul matricei (16) este egal cu unu, relațiile (20) devin identități și spațiul este T-recurent cu vector de T-recurență dat tot de (21). Deci:

PROPOZIȚIA 7. *Dacă pentru un spațiu A_4^{**} cu vector de torsiune și tensor patratic de torsiune nenuli rangul matricei (16) este unu, spațiul este T-recurente cu vector de T-recurență dat de (21). Componentele nenule ale conexiunii sînt date de (19) și verifică relațiile (23).*

Pentru spațiile A_4^{**} să considerăm acum forma σ identic nulă, deci $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$. Matricea asociată formelor de torsiune devine

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & T^1_{34} \\ 0 & 0 & 0 & T^2_{34} \\ T^3_{12} & 0 & 0 & 0 \\ T^4_{12} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{24}$$

Dacă matricea (24) are rangul doi, deci tensorul patratic de torsiune nenul punînd condiția de T-recurență rezultă

$$\Gamma^1_{r3} = \Gamma^1_{r4} = \Gamma^2_{r3} = \Gamma^2_{r4} = \Gamma^3_{r1} = \Gamma^3_{r2} = \Gamma^4_{r1} = \Gamma^4_{r2} \tag{25}$$

și spațiul este fără torsiune. Analog dacă forma σ este identic nulă și de asemenea forma π identic nulă, deci rangul matricei (24) egal cu unu, condiții analoge cu (25) ne arată că spațiul A_4^* este fără torsiune. Dacă forma π este identic nulă ea atrage și forma σ identic nulă, deci alt caz nu mai există. Avem deci:

PROPOZIȚIA 8. *Spațiile A_4^{**} cu forma σ identic nulă sau cu forma π identic nulă nu pot fi T-recurente.*

(Intrat in redacție la 30 septembrie 1980)

BIBLIOGRAFIE

1. Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine*, Ann. de l'Ec. N. sup., **40** (1923), 325–412.
2. Eisenhart, L. P., *Non Riemannian Geometry*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., **VIII** (1927).
3. Enghiş, P., *Sur les espaces a connexion affine A_4 avec torsion*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, ser. Math.–Mec., **15**, 1 (1970), 15–21.
4. Enghiş, P., *Asupra unor spații cu conexiune afină A_4*. Lucrări științifice, Oradea, 1971, 51–54.
5. Enghiş, P., *Sur les espaces à connexion affine avec torsion récurrente*, Studia Univ. Babe–Bolyai, Math.–Mec., **18**, 1 (1973), 13–16.
6. Vrânceanu, G., *Lecții de geometrie diferențială*, I, Ed. Acad. R.P.R., 1952.

SUR LA T-RÉCURRENCE DE CERTAINS ESPACES A_3 ET A_4 AVEC CONNEXION AFFINE

(R é s u m é)

Dans le présent travail, on étudie le problème de la T-récurrence des espaces A_3 et A_4^* avec le vecteur et le tenseur quadratique de torsion nuls, et de l'espace A_4^{**}. Pour les espaces A_3 on donne les conditions de T-récurrence (5) et le vecteur de T-récurrence (6). Pour les espaces A_4^* on donne les conditions (9), (9′), (9″) respectivement (9), (9′), (11) de T-récurrence, si le rang de la matrice (7) est deux et (13), (13′) si le rang est égal à un. Le vecteur de T-récurrence est donnée par (10) respectivement (12), respectivement (14). Pour les espaces A_4^{**} avec le vecteur et le tenseur qudratique de torsion non nuls on donne les conditions (19), (20) et le vecteur (21) si $T^3_{34} \neq$ const. et si $T^3_{34} =$ const. $\neq 0$ l'espace ne peut pas être T-récurrent. Si $T^3_{34} = 0$ les conditions sont (19), (23) avec le même vecteur de T-réccurrence. Si le vecteur de torsion ou le tenseur quadratique de torsion est nul dans un espace A_4^{**} l'espace ne peut pas être T-récurrent.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, XXVI, 3, 1981

LINEAR OPTIMALITY CRITERIA IN NONLINEAR PROGRAMMING IN COMPLEX SPACE

DOREL I. DUCA

1. **Introduction.** Consider the problem.

$$\text{Minimize } \operatorname{Re} f(z,\bar{z}) \text{ subject to } z \in X, g(z,\bar{z}) \in S, \tag{P}$$

where X is a nonempty set in C^n, S is a nonempty set in C^m, $f: X \times \overline{X} \to C$ and $g: X \times \overline{X} \to C^m$.

In this paper we give some linearization properties of Problem (P). Theorem 2 may be considered as a linear test of optimality for problem with linear constraints, Theorems 4 and 5 — a linear optimality test for a problem with linear objective function, while Theorems 6 and 7 — a linear test of optimality for a nonlinear problem. The paper is concluded with an application to quadratic programming, reobtaining results given in [3], [6] and [7].

2. **Notations and Preliminaries.** Denote by $C^n(R^n)$ n-dimensional complex (real) space, and by $C^{m\times n}$ the set of $m \times n$ complex matrices. If A is a matrix or vector, then A^T, $\bar{A}$, A^H denote its transpose, complex conjugate, and conjugate transpose respectively. R_+ denotes the half line $[0, +\infty[$. For $z, w \in C^n$; $\langle z,w\rangle = w^H z$ denotes the inner product of z and w.

The nonempty set S in C^m is a polyhedral cone if it is an intersection of closed half-spaces in C^m, each containing 0 in its boundary, i.e.

$$S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}, \text{ where } H_{u_k} = \{v \in C^m / \operatorname{Re}\langle v, u_k\rangle \geq 0\}, \quad k = \overline{1,p}.$$

If $v \in S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}$, then $S(v)$ is defined to be the intersection of those closed half-spaces H_{u_k} which include v in their boundaries, i.e.

$$S(v) = \bigcap_{k\in E} H_{u_k}$$

where $E = \{k \in \{1, \ldots, p\} / \operatorname{Re}\langle v, u_k\rangle = 0\}$.

If $X \subseteq C^n$, then $\overline{X} = \{z \in C^n / \bar{z} \in X\}$.

Let X be a nonempty and open set in C^n and let $z^0 \in X$. Then.

a) the function $g: X \times \overline{X} \to C^m$ differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ is quasiconcave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to the closed convex cone S in C^m if, for any $z \in X$

$$g(z, \bar{z}) - g(z^0, \bar{z}^0) \in S \Rightarrow [\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T(z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]^T(\bar{z} - \bar{z}^0) \in S.$$

b) the function $f: X \times \overline{X} \to C^m$ differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ has quasiconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to the closed convex cone T in R^m if f is quasiconcave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to the closed convex cone $-CT = \{w \in C^m / \operatorname{Re} w \in -T\}$.

For other notations and definitions see [5].

3. Results. LEMMA. *Let X be a nonempty open set in C^n, let $S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}$ be a polyhedral cone in C^m, and let $z^0 \in X$.*

If $g : X \times \overline{X} \to C^m$ is differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ and quasiconcave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to $S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, then

$$Y = \{z \in X / g(z, \bar{z}) \in S\} \subseteq Y_1 =$$

$$= \{z \in X / [\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T (z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]^T (\bar{z} - \bar{z}^0) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)]\}.$$

Proof. Let $z \in Y$. Then

$$g(z, \bar{z}) - g(z^0, \bar{z}^0) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)] = \bigcap_{k \in E} H_{u_k}, \tag{1}$$

where $E = \{k \in \{1, \ldots, p\} / \mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k \rangle = 0\}$, because: if $E = \Phi$, then $S[g(z^0, \bar{z}^0)] = C^m$, and if $E \neq \Phi$, then for all $k \in E$

$$\mathrm{Re}\langle g(z, \bar{z}) - g(z^0, \bar{z}^0), u_k \rangle = \mathrm{Re}\langle g(z, \bar{z}), u_k \rangle - \mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k \rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\langle g(z, \bar{z}), u_k \rangle \geq 0.$$

The function g being quasiconcave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to $S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, from (1) it follows that

$$[\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T (z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]^T (\bar{z} - \bar{z}^0) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)],$$

hence $z \in Y_1$.

THEOREM 1. *Let X be a nonempty convex set in C^n, let $S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}$ be a polyhedral cone in C^m, and let $z^0 \in X$. Let $f : X \times \overline{X} \to C$ be a function with convex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+, and let $g : X \times \overline{X} \to C^m$ be a function concave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to S.*

If z^0 is a solution of Problem (P), *then z^0 is a solution of the problem.*

Minimize $\mathrm{Re}\, f(z, \bar{z})$ subject to $z \in X$, $g(z, \bar{z}) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)]$ (P1)

Proof. Assume z^0 fails to be a solution of Problem (P1). Then there exists $z^1 \in X$ such that

$$g(z^1, \bar{z}^1) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)] = \bigcap_{k \in E} H_{u_k} \tag{2}$$

and

$$\mathrm{Re}\, f(z^1, \bar{z}^1) < \mathrm{Re}\, f(z^0, \bar{z}^0), \tag{3}$$

where $E = \{k \in \{1, \ldots, p\} / \mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k \rangle = 0\}$.

The set X being convex it follows that

$$z(\lambda) = \lambda z^1 + (1 - \lambda) z^0 \in X, \text{ for all } \lambda \in [0, 1]. \tag{4}$$

On the other hand, the function g being concave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to S, we have

$$g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}] - \lambda g(z^1, \bar{z}^1) - (1 - \lambda) g(z^0, \bar{z}^0) \in S, \text{ for all } \lambda \in [0, 1], \tag{5}$$

hence

$$\mathrm{Re}\langle g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}] - \lambda g(z^1, \bar{z}^1) - (1-\lambda) g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle \geqq 0, \tag{6}$$

for all $\lambda \in [0, 1]$ and $k \in \{1, \ldots, p\}$.

Since $g(z^1, \bar{z}^1) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, $g(z^0, \bar{z}^0) \in S \subseteq S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, and since $S[g(z^0, \bar{z}^0)]$ is a convex cone, from (5) it follows that

$$g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}] \in S[g(z^0, \bar{z}^0)], \text{ for all } \lambda \in [0, 1],$$

hence

$$\mathrm{Re}\langle g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}], u_k\rangle \geqq 0, \text{ for all } \lambda \in [0, 1] \text{ and } k \in E. \tag{7}$$

Let $\tilde{E} = \{k \in \{1, \ldots, p\} \setminus E / \mathrm{Re}\langle g(z^1, \bar{z}^1) - g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle < 0\}$, let

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle}{\mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0) - g(z^1, \bar{z}^1), u_k\rangle} \Big/ k \in \tilde{E}\right\}, & \text{if } \tilde{E} \neq \Phi \\ 1, \text{ if } \tilde{E} = \Phi, \end{cases}$$

and let $\lambda_0 = \min\{1, \tilde{\lambda}\}$.

Evidently $\lambda_0 \in [0, 1]$. Then, by (6) and by the definition of λ_0 we have

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}], u_k\rangle \geqq \\ &\geqq \lambda\, \mathrm{Re}\langle g(z^1, \bar{z}^1) - g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle + \mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle \geqq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$ and $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus E$.

From (7) and (8) it follows that

$$g[z(\lambda), \overline{z(\lambda)}] \in S, \text{ for all } \lambda \in [0, \lambda_0],$$

which, together with (4) shows that $z(\lambda)$, for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$, is a feasible solution of Problem (P).

Now, by (3) and the fact that the function f has convex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+, it follows that

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re} f(z(\lambda), \overline{z(\lambda)}) \leqq \\ &\leqq \lambda\, \mathrm{Re}[f(z^1, \bar{z}^1) - f(z^0, \bar{z}^0)] + \mathrm{Re} f(z^0, \bar{z}^0) < \mathrm{Re} f(z^0, \bar{z}^0), \text{ for all } \lambda \in]0, \lambda_0], \end{aligned}$$

which contradicts the optimality of z^0 for Problem (P).

Remark. If z^0 is a solution of Problem (P1) and $g(z^0, \bar{z}^0) \in S$, then z^0 is a solution of Problem (P).

THEOREM 2. *Let X be a nonempty open set in C^n, let S be a nonempty set in C^m, let $z^0 \in X$, let $f: X \times \bar{X} \to C$ be a function differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$, and let $g: X \times \bar{X} \to C^m$.*

a) *Let f be with quasiconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+. If z^0 is a solution of Problem (P), then z^0 is a solution of the problem*

Minimize

$$\mathrm{re}\,\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z\rangle \tag{P2}$$

subject to

$$z \in X \text{ and } g(z, \bar{z}) \in S$$

b) *Let f be with pseudoconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+. If z^0 is a solution of Problem* (P2), *then z^0 is a solution of Problem* (P).

Proof. Let $Y = \{z \in X / g(z, \bar{z}) \in S\}$ the feasible set.

a) If $z^0 \in Y$ is a solution of Problem (P), then

$$\mathrm{Re}[f(z^0, \bar{z}^0) - f(z, \bar{z})] \leqq 0, \text{ for all } z \in Y. \tag{9}$$

From (9) and the fact that the function f has quasiconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+, it follows that

$$\mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z\rangle \geqq$$
$$\leqq \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z^0\rangle, \text{ for all } z \in Y,$$

i.e. z^0 is a solution of Problem (P2).

b) If $z^0 \in Y$ is a solution of Problem (P2), then

$$\mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z^0\rangle \leqq$$
$$\leqq \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z\rangle, \text{ for all } z \in Y. \tag{10}$$

The function f having pseudoconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+, from (10) we have that

$$\mathrm{Re}\, f(z, \bar{z}) \geqq \mathrm{Re}\, f(z^0, \bar{z}^0), \text{ for all } z \in Y,$$

i.e., z^0 is a solution of Problem (P).

In what follows we shall need the following result, given in [5].

THEOREM 3. *Let X be a nonempty open set in C^n, let $S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}$ be a polyhedral cone in C^m with nonepty interior, let $f: X \times \bar{X} \to C$ and $g: X \times \bar{X} \to C^m$, let $z^0 \in Y = \{z \in X / g(z,\bar{z}) \in S\}$, and let f and g be differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ and let $E = \{k \in \{1, \ldots, p\} / \mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), u_k\rangle = 0\}$.*

Suppose in addition that one of following conditions holds:

(i) *g satisfies the Arrow-Hurwicz-Uzawa complex constraint qualification* (CCQ) *at $(z^0, \bar{z}^0)$;*

(ii) *g satisfies the Kuhn-Tucker* CCQ *at $(z^0, \bar{z}^0)$;*

(iii) *g satisfies the revers concave* CCQ *at $(z^0, \bar{z}^0)$;*

(iv) *g satisfies the weak* CCQ *at $(z^0, \bar{z}^0)$;*

(v) *g satisfies Slater's* CCQ *with respect to Y and g is concave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to S;*

(vi) g *satisfies the strict* CCQ *with respect to* Y *and* g *is concave at* $(z^0, \bar{z}^0)$ *with respect to* S;

(vii) g *satisfies Karlin's* CCQ *with respect to* Y, X *is convex and* g *is concave on* $X \times \bar{X}$ *with respect to* S.

If z^0 *is a local minimum point of Problem* (P), *then there exists*

$$v \in (\bigcap_{k \in E} H_{u_k})^* = (S[g(z^0, \bar{z}^0)])^* \subseteq S^*$$

such that

$$\overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0) - \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v - \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v} = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{Re}\langle g(z^0, \bar{z}^0), v\rangle = 0. \tag{12}$$

THEOREM 4. *Let* X, S, z^0, f *and* g *be as in Theorem* 3. *Suppose in addition, that* f *has pseudoconvex real part at* $(z^0, \bar{z}^0)$ *with respect to* R_+. *If* z^0 *is a solution of Problem* (P), *then* z^0 *is a solution of the problem.*

Minimize

$$\mathrm{Re} f(z, \bar{z})$$

subject to (P3)

$$z \in X,$$

$$[\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T(z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]^T(\bar{z} - \bar{z}^0) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)].$$

Proof. In view of Theorem 3, there exists $v \in (S[g(z^0, \bar{z}^0)])^*$ such that (11) and (12) hold.

Since $0 \in S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, z^0 is a feasible solution of Problem (P3). Let z be a feasible solution of Problem (P3). Since $v \in (S[g(z^0, \bar{z}^0)])^* \subseteq S^*$ it follows that

$$0 \leqq \mathrm{Re}\langle [\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T(z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]^T(\bar{z} - \bar{z}^0), v\rangle =$$
$$= \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}, z - z^0\rangle,$$

hence

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}, z^0\rangle \leqq \\ &\leqq \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}, z\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

From (11), (13) and from the properties of the inner product we deduce

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{[\nabla_z f(z^0, z^0)]^T z^0 + [\nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0)]^T \bar{z}^0\} = \\ &= \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z^0\rangle = \\ &= \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}, z^0\rangle \leqq \\ &\leqq \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}, z\rangle = \\ &= \mathrm{Re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z\rangle = \\ &= \mathrm{Re}\{[\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)]^T z + [\nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0)]^T \bar{z}\}. \end{aligned}$$

therefore

$$\operatorname{Re}\{[\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)]^T(z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0)]\,(\bar{z} - \bar{z}^0)\} \geqq 0.$$

Since the function f has pseudoconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+, it follows that $\operatorname{Re} f(z, \bar{z}) \geqq \operatorname{Re} f(z^0, \bar{z}^0)$, i.e. z^0 is solution of Problem (P3).

THEOREM 5. *Let X be a nonempty open set in C^n, let $S = \bigcap_{k=1}^{p} H_{u_k}$ be a polyhedral cone in C^m and let $z^0 \in X$. Let $g: X \times \bar{X} \to C^m$ be a function differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ and quasiconcave at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to $S[g(z^0, \bar{z}^0)]$, let $g(z^0, \bar{z}^0) \in S$ and let $f: X \times \bar{X} \to C$.*

If z^0 is a solution of Problem (P3), *then z^0 is a solution of Problem* (P).

Proof. In view of Lemma $Y \subseteq Y_1$, hence

$$\inf\{\operatorname{Re} f(z, \bar{z}) / z \in Y\} \geqq \inf\{\operatorname{Re} f(z, \bar{z}) / z \in Y_1\} = \operatorname{Re} f(z^0, \bar{z}^0).$$

Since $z^0 \in Y$, it follows that z^0 is a solution of Problem (P).

THEOREM 6. *Let X, S, z^0, f, and g be as in Theorem 3. Suppose in addition that f has pseudoconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+. If z^0 is a solution of Problem* (P), *then z^0 is a solution of the problem*

Minimize

$$\operatorname{re}\langle \overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0), z\rangle$$

subject to

$$z \in X, \tag{P4}$$

$$[\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)]^T(z - z^0) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)]\,(\bar{z} - \bar{z}^0) \in S[g(z^0, \bar{z}^0)].$$

Proof. In view of Theorem 4, z^0 is a solution of Problem (P3). By applying Theorem 2, a) to Problem (P3), it follows that z^0 is a solution of Problem (P4).

THEOREM 7. *Let X, S, z^0, f, and g be as in theorem 5. Suppose, in addition that f is differentiable at $(z^0, \bar{z}^0)$ and has pseudoconvex real part at $(z^0, \bar{z}^0)$ with respect to R_+. If z^0 is a solution of Problem* (P4), *then z^0 is a solution of Problem* (P).

Proof. In view of Theorem 5, applied to Problem (P4), it follows that z^0 is a solution of Problem (P2). Now, with the aid of Theorem 2, b), we deduce that z^0 is a solution of Problem (P).

4. *Example.* Let $D \in C^{n\times n}$ be positive semi-definite Hermitian, let $A \in C^{m\times n}$, $p \in C^n$, $b \in C^m$, and let $S \subseteq C^m$, $S \neq \Phi$.

Let us consider the problem

$$\text{Minimize } \operatorname{Re}(z^H D z + p^H z) \textit{ subject to } Az - b \in S. \tag{QP}$$

The matrix D being positive semi-definite Hermitian, the objective function of Problem (QP) has convex (hence pseudoconvex and quasiconvex) real part at any $(z, \bar{z}) \in C^{2n}$ with respect to R_+. The objective function of Problem (QP) is differentiable at any $(z, \bar{z}) \in C^{2n}$. Then, in view of Theorem 2, z^0 is a solution of Problem (QP) if and only if z^0 is a solution of the linear problem

$$\text{Minimize Re } [2(z^0)^H Dz + p^H z] \text{ subject to } Az - b \in S.$$

Appropriate choices of the matrices A and D, of the vectors b and p and of the set S, lead to the problems studied in [3], [6], and [7].

(Received, October 2, 1980)

REFERENCES

1. Abrams, Robert A. and Ben-Israel, A., *Nonlinear programming in complex space: necessary conditions*, SIAM J. Control, 9 (1971), 606–620.
2. Ben-Israel, A., *Linear equations and inequalities on finite dimensional, real or complex, vector spaces: a unified theory*, J. Math. Anal. Appl., 27 (1969), 367–389.
3. Das, C., *Some aspects of quadratic programming in complex space*, ZAMM, 55 (1975), 583–587.
4. Duca, Dorel I., *Constraint qualifications in nonlinear programming in complex space*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, Mathematica, 23, 1 (1978), 61–65.
5. Duca, Dorel I., *Necessary optimality criteria in nonlinear programming in complex space with differentiability*, Mathematica-Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation.
6. Hanson, Morgan A. and Mond, Bertram, *Quadratic programming in complex space*, J. Math. Anal. Appl., 20 (1967), 507–514.
7. Mond, Bertram and Hanson, Morgan A., *Symmetric duality for quadratic programming in complex space*, J. Math. Anal. Appl., 23 (1968), 284–293.

UN CRITERIU DE LINIAR OPTIMALITATE ÎN PROGRAMAREA NELINIARĂ ÎN SPAŢIUL COMPLEX

(Rezumat)

În lucrare se dă o liniarizare a proprietăţilor problemei (P). Teorema 2 poate fi considerată ca un test liniar de optimalitate pentru problema cu restricţii liniare. Teoremele 4 şi 5 reprezintă teste de liniar optimalitate pentru o problemă cu funcţia de scop liniară, în timp ce teoremele 6 şi 7 sînt teste liniare a optimalităţii pentru o problemă neliniară.

RECENZII

Advances in fuzzy set theory and applications, M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager, editori, North-Holland Publishing Company, Amsterdam—New York, 1979, XV + 753 p.

Cartea reprezintă o culegere de 35 de lucrări din cele mai reprezentative domenii ale teoriei mulţimilor nuanţate (fuzzy) şi aplicaţiilor acesteia, scrise de autori care sînt specialişti consacraţi în domeniile respective.

În carte se dau conceptele de bază ale teoriei şi se prezintă principalele direcţii de cercetare. Cartea, concepută ca o colecţie de lucrări reprezentative, oferă o imagine coerentă a raportului actual dintre teorie şi aplicaţii.

Cartea conţine trei părţi şi o vastă bibliografie cuprinzînd 1 799 referinţe. Partea I conţine articole introductive şi de sinteză. Articolele de sinteză sînt consacrate unor subiecte ca: sisteme nuanţate, reprezentarea conceptelor nuanţate, logică nuanţată. Lucrările din Partea a II-a sînt consacrate aspectelor de bază ale teor Principalele domenii abordate sînt: numere variabile nuanţate, statistică fuzzy, variabile posibilitate, mecanisme de comutare, limb nuanţate informaţie şi decizie, măsuri de entropie pentru mulţimi nuanţate, jocuri nu ţate, concepte şi relaţii nuanţate. Partea a II este dedicată modelelor nuanţate şi aplicaţi acestora in domenii ca: diagnosticul medi procese de decizie, sisteme om-maşină, procese control, clasificare automată, analiza scene ştiinţe sociale.

Cartea poate servi pentru familiarizarea c torului cu noţiunile şi tehnicile de bază ale teo mulţimilor nuanţate şi aplicaţiile acestei te De asemenea, cartea reprezintă un material referinţă pentru cercetători interesaţi de asp teoretice sau de sisteme socio-economice, ştii conducerii, cercetări operaţionale, medicină, gvistică, inteligenţă artificială.

D. DUMITRES

I. P. Cluj, Municipiul Cluj-Napoca cda. nr. 3063

În cel de al XXVI-lea an (1981) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* apare în specialităţile:

matematică (4 fascicule)

fizică (2 fascicule)

chimie (2 fascicule)

geologie-geografie (2 fascicule)

biologie (2 fascicule)

filozofie (2 fascicule)

ştiinţe economice (2 fascicule)

ştiinţe juridice (2 fascicule)

istorie (2 fascicule)

filologie (2 fascicule)

На XXVI году издания (1981) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai*, выходит по следующим специальностям:

математика (4 выпуска)

физика (2 выпуска)

химия (2 выпуска)

геология-география (2 выпуска)

биология (2 выпуска)

философия (2 выпуска)

экономические науки (2 выпуска)

юридические науки (2 выпуски)

история (2 выпуска)

филология (2 выпуска)

Dans sa XXVI-e année (1981) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* paraît dans les spécialités:

mathématiques (4 fascicules)

physique (2 fascicules)

chimie (2 fascicules)

géologie-géographie (2 fascicules)

biologie (2 fascicules)

philosophie (2 fascicules)

sciences économiques (2 fascicules)

sciences juridiques (2 fascicules)

histoire (2 fascicules)

philologie (2 fascicules)

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM, Departamentul export-import presă, P. O. Box 136–137, telex 11226, Bucureşti, str. 13 Decembrie nr. 3.

Lei 20