STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

1

1980

CLUJ-NAPOCA

ANUL XXV

1980

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

1

Redacţia: 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE

GH. TOADER, Some metrics for function spaces ● Cîteva metrici pentru spaţii de funcţii . . . 3
P. PAVEL, Asupra unei extinderi a formulei de cuadratură a lui Newton ● Sur une extension de la formule de quadrature de Newton . . . 8
C. NIŢESCU, Riemannian spaces with A-recurrent vector field ● Spaţii riemanniene A-recurente . . . 12
M. ŢARINĂ, Conexiuni echivalente pe G-structuri de ordinul doi ● Equivalent connections on G-structures of order two . . . 20
V. GROZE, A. VASIU, Affine structures over an arbitrary ring ● Structuri afine peste un inel arbitrar . . . 28
L. LUPŞA, Asupra unor probleme de programare liniară parametrică în variabile întregi ● Sur quelques problèmes de programmation paramétrique en nombres entiers . . . 32
D. RĂDULESCU, Quelques remarques sur les équations intégrales de type Volterra d'argument modifié ● Unele observaţii asupra ecuaţiilor integrale de tip Volterra cu argument modificat . . . 45
D. TRIF, Sur l'existence des solutions des équations nonlinéaires ● Asupra existenţei soluţiilor ecuaţiilor neliniare . . . 49
M. BALÁZS, On a method of third order ● O metodă de ordinul trei . . . 54
E. OANCEA, Vecteur informational associé à une caractéristique statistique bidimensionelle ● Vector informaţional asociat unei caracteristici statistice bidimensionale . . . 60
S. GROZE, On Steffensen's method for solving nonlinear operator equations defined in Fréchet spaces ● Metoda lui Steffensen pentru rezolvarea ecuaţiilor operatoriale definite în spaţii Fréchet . . . 64
P. ENGHIŞ, Relations entre des espaces riemanniens à tenseurs récurrents ● Relaţii între spaţii riemanniene cu tensori recurenţi . . . 67
D. I. DUCA, Proper efficiency in the complex vectorial programming ● Propriu eficienţă în programarea vectorială complexă . . . 73

AKUT

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

SOME METRICS FOR FUNCTION SPACES

GH. TOADER

1. **Introduction.** In this paper we notice that the metric S, which we defined in [6], is equivalent with the metric of Pompeiu-Hausdorff used in [5]. Also, we define a family of metrics which make a connection between Pompeiu-Hausdorff's metric and the uniform metric.

Since Pompeiu Hausdorff's distance between the ranges of the functions do not generate a metric for the space of continuous functions, in [6] we have defined such a metric in another way. However, as J. D. Newburg in [4] showed, one can obtain a metric on a function space taking the distance between the graphs of the functions. In fact, J. D. Newburg is concerned with families of operators between Banach spaces. As proved by E. Berkson in [1] the metric of Newburg for the subspaces of a Banach space is equivalent with that defined by I. Gohberg and A. S. Markus in [2], i.e. the distance of Pompeiu-Hausdorff between the unit spheres of the spaces. For real functions the metric derived from the distance of Pompeiu-Hausdorff between the graphs of the functions seems to appear for the first time in [5].

For the space of continuous functions defined on a compact metric space, W. C. Waterhouse proved [7], that this metric is equivalent with the uniform metric. But if the space of definition is not compact, as we showed in [6], these two metrics are not equivalent even if the range is compact.

2. **Basic notations and definitions.** Let d_1 and d_2 be two metrics for the set X. We say that d_1 is finer than d_2 and we write $d_2 \leqslant d_1$, if the identity:

$$i : (X, d) \to (X, d_2)$$

is continuous. This holds, for example, if for some $M > 0$ and $p > 0$

$$d_2(x, y) \leqslant M[d_1(x, y)]$$

for every x and y in X. The two metrics are equivalent if either is finer than the other.

Let the function $L : [0, \infty] \to [0, 1]$ be defined by:

$$L(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1+t} & \text{for } 0 \leqslant t < \infty \\ 1 & \text{for } t = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Its inverse $L^{-1} : [0, 1] \to [0, \infty]$ is given by:

$$L^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1-t} & \text{for } 0 \leqslant t < 1 \\ \infty & \text{for } t = 1. \end{cases} \tag{1'}$$

Convention. For any function $F_0 : X \times X \to R^+ \cup \{\infty\}$ we define a symmetrical function $F : X \times X \to [0, 1]$ by:

$$F(x, y) = L\ (\sup\ \{F_0(x, y), F_0(y, x)\}). \tag{2}$$

(X, d) and (Y, e) being two metric spaces, we denote $C(X, Y)$ the set of continuous functions from X to Y. Let us fecall some metrics used for $C(X, Y)$:

a) The uniform metric T which may be defined by:

$$T(f, g) = L\ (\sup\ \{e(f(x), g(x)) : x \in X\}) \tag{3}$$

or, as usual, with the identity instead of L, if X is compact.

b) The metric K which generates the compact-open topology on $C(X, Y)$, (if X is a locally compact, separable metric space), is defined as follows:

$$K(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot L\ (\max\ \{e(f(x), g(x)) : x \in K_n\}) \tag{4}$$

where K_n are compact subsets of X with the property that $K_n \subset K_{n+1}$ for every n and $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

c) The metric S (which we defined in [6]) generated by (2) from:

$$S_0(f, g) = \inf\ \{r > 0 : \ \forall x \in X, \inf\ \{e(f(x), g(y)) : d(x, y) < r\} < r\} \tag{5}$$

(with the convention: $\inf \emptyset = \infty$).

d) On the set of non-void, closed subsets of X one defines the metric P of Pompeiu-Hausdorff by (2) applied to:

$$P_0(F, E) = \sup\ \{\inf\ \{d(x, y), y \in E\}, x \in F\}. \tag{6}$$

Denoting with G_f the graph of the function f, i.e. the set:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x),\ x \in X\} \tag{7}$$

one obtains, as in [5] a metric H for $C(X, Y)$ putting:

$$H(f, g) = P(G_f, G_g). \tag{8}$$

Remark 1. We proved in [6] that $S \leqslant T$ and if X is locally compect, separable metric space $K \leqslant S$. The opposite relations do not hold in general. In [7] it was proved that if X is compact H is equivalent with T. If we put S_0 as:

$$S_0(f, g) = \text{su}\ \{\inf\ \{\max\ \{d(x, y), e(f(x), g(y))\}, y \in X, x \in X\} \tag{5'}$$

one sees that S is equivalent with H.

3. The family of metrics S^r. In what follows we shall define a family of metrics which make a connection between the metric T and S (hence H).

For any $r < 0$ let us define the function $S_0^r : C(X, Y) \times C(X, Y) \to R^+ \cup \{\infty\}$ by:

$$S_r^0(f, g) = \inf \{a > 0 : \forall x \in X, \exists y \in X : d(x, y) < ra \,\&\, e(f(x), g(x)) < a\} \quad (9)$$

with the convention $\inf \emptyset = \infty$.

THEOREM *For any $r > 0$ the function S^r (defined by the convention (2) for S_0^r) is a metric for $C(X, Y)$.*

The proof follows easily from the subadditivity of L and the continuity of all the functions which are used.

Remark 2. It is easy to see that $S^1 = S$ and also that it is justificab... to denote $T = S^0$.

LEMMA If $0 < p < r < \infty$, *then for any $f, g \in C(X, Y)$ we have:*

$$S^r(f, g) \leqslant S^p(f, g) \leqslant S^0(f, g) \quad (10)$$

and

$$S^p(f, g) \leqslant \frac{r}{p} \cdot S^r(f, g). \quad (11)$$

Proof. The inequalities (10). follow directly from the definition and to prove (11) it is enough to observe that:

$$S_0^p(f, g) \leqslant \frac{r}{p} \cdot S_0^r(f, g) \quad (11')$$

and, for $a \geqslant 1$, holds

$$L(ax) \leqslant a \cdot L(x).$$

CONSEQUENCE *For any $0 < p, r < \infty$ the metrics S^p and S^r are equivalent (and equivalent with H).*

Remark 3. From the above consequence and from the remark 1 it follows that if X is a compact metric space, all these metrics are equivalent with $S_0 = T$, but, if X is not compact, this statement is, in general, not true.

Remark 4. Of course, instead of the linear function $r \cdot a$, in (9) we should consider other functions with adequate properties but the resulting metrics are equivalent with these

Remark 5. If we write (4) as:

$$K(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} L(T(f \mid K_n, g \mid K_n)) \quad (4')$$

this suggests that we can also consider the metrics:

$$K^r(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} L(S^r(f \mid K_n, g \mid K_n)) \quad (4'')$$

but these metrics are equivalent with K, as results from the remark 3.

4. **Metrics for $C^n(X, Y)$.** Let X be a real interval, Y a linear metric space and $C^n(X, Y)$ the set of all functions $f: X \to Y$ with continuous n-th derivative. Denoting:

$$G_f^n = \{(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)),\ x \in X\} \tag{12}$$

we obtain a metric H^n for $C^n(X, Y)$ taking:

$$H^n(f, g) = P(G_f^n, G_g^n) \tag{13}$$

where P is Pompeiu-Hausdorff's metric for $X \times Y^{n+1}$.

Remark. 6. We may also define H^n applying (2) for:

$$H_0^{n'}(f, g) = \inf\{r > 0 : \forall\ x \in X,\ \exists y \in X,\ |x - y| < r\ \& \tag{14}$$

$$e(f^{(i)}(x), g^{(i)}(y)) < r \text{ for } i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

In this case, besides the variants similar to (9), we can also define the metric D^n by (2) applied to:

$$D_0^{n'}(f, g) = \inf\{r > 0:\ \forall x \in X,\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \exists y_i \in X, \tag{15}$$

$$|x - y_i| < r,\ e(f^{(i)}(x), g^{(i)}(y_i)) < r\}.$$

Of course, for any f and g in $C^n(X, Y)$ we have:

$$D^n(f, g) \leqslant H^n(f, g) \tag{16}$$

the inequality being generally strict as shows the following

Example. Let $f, g: [-1, 1] \to R$ be defined by:

$$f(x) = x^4 \text{ and } g(x) = 3 - x^4.$$

Then $D^1(f, g) = L(2) < H^1(f, g)$.

Remark 7. As is was proved by A. Naess in [3], if the functions $f_m \in C^n([a, b], R)$ are such that the sequence $f_m^{(n)}(x)$ is convergent for every x in $[a, b]$ and the sequence $f_m(x)$ is convergent in n distinct points from $[a, b]$, then there is a function $f \in C^n([a, b], R)$ such that $f_m^{(i)} \to f^{(i)}$ on $[a, b]$ for $i = 0, 1, \ldots, n$. Taking in account the result from [7], it follows that, if X is compact, the metrics D^n and H^n are equvalent on $C^n(X, R^m)$ and they are equivalent also with the uniform metric on this space. But it X is not compact or if Y is an infinite dimensional Banach space, the two metrics might not be equivalent.

(Received September 18, 1978)

REFERENCES

1. Berkson, E., *Some metrics on the subspaces of a Banach space*, Pacific J. Math., **13**, 1963, 7–22.
2. Gohberg, I. T., Markus, A. S., *Two theorems on the distance of the subspaces of a Banach space* (Russian), Uspehi Mat. Nauk, **XIV**, 5(89), 1959, 135–140.
3. Naess, A., *On the convergence of a sequence of m times differentiable functions*. Amer. Math. Monthly, **83**, 1976, 627–628.
4. Newburgh, J. D., *A topology for closed operators*, Annals of Math., **53**, 1951, 24–255.
5. Sendov, Bl., Penkov, B., *ε-entropy and ε-capacity on the space of continuous functions* (Bulgarian), Izv. na Matem. Inst. Bulg. Akad. Nauk, **11**, 1961, 27–50.
6. Toader, Gh., *A metric of Pompeiu-Hausdorff type for the set of continuous functions*, L'analyse numérique et la théorie de l'approximation, tome **5**, 1976, 213–217.
7. Waterhouse, W. C., *Uniform convergence and graph convergence*, Amer. Math. Monthly, **83**, 1976, 641–643.

CÎTEVA METRICI PENTRU SPAŢII DE FUNCŢII

(Rezumat)

În lucrare remarcăm că metrica S pe care am definit-o în [6] pentru spaţiul funciiţlor continue este echivalentă cu metrica Pompeiu-Hausdorf definită în [5]. De asemenea, definim o familie de metric ce evidenţiază o legătură intre metrica S şi metr ca un formă. Această famil e de metrici se transpune şi la spaţii de funcţii derivabile.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

ASUPRA UNEI EXTINDERI A FORMULEI DE CUADRATURĂ A LUI NEWTON

PARASCHIVA PAVEL

În lucrarea [3] s-a construit după metoda folosită în [1] o formulă de cuadratură de tip Newton, în care nodurile interioare sînt multiple,

În cele ce urmează vom construi, urmînd aceeaşi metodă, o formulă de cuadratură pentru calculul integralelor de forma

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \tag{1}$$

în ipoteza că $p \in C[a, b)]$, $p(x) > 0$, $x \in [a, b]$ iar $f \in C^5[a, b)]$ (2)

Pentru uşurinţa expunerii vom trata numai cazul nodurilor interioare triple, metoda putînd fi aplicată şi în cazul nodurilor interioare multiple de un ordin $2k + 1$

Considerăm pentru început formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = Af(a) + Cf(x_1) + C'f'(x_1) + C''f''(x_1) + Bf(b) + R[f] \tag{3}$$

în care $x_1 \in [a, b]$, $R[f] = \int_a^b \varphi(x)f^5(x)\,dx$, iar A, C, C', C'', B se calculează astfel ca $R[x^k] = 0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Reţinem doar expresiile lui A şi B, care sînt necesare pentru cele ce urmează

$$A = \frac{1}{(b-a)(x_1-a)^3}\int_a^b p(x)(x-b)(x-x_1)^3\,dx$$

$$B = \frac{1}{(b-a)(b-x_1)^3}\int_b^a p(x)(x-a)(x-x_1)^3\,dx \tag{4}$$

Se poate găsi nodul x_1 astfel încît în formula (3) coeficientul $A = 0$. Obţinem ecuaţia

$$(b-x_1)^3\int_a^b p(x)(x-b)dx + 3(b-x_1)^2\int_a^b p(x)(x-b)^2dx +$$

$$+ 3(b-x_1)\int_a^b p(x)(x-b)^3\,dx + \int_a^b p(x)(x-b)^4\,dx = 0 \tag{5}$$

Punînd

$$b - x_1 = (b-a)v \quad \text{şi} \quad b - x = (b-a)s \tag{6}$$

avem

$$v^3\int_0^1 p[b-(b-a)s]s\,ds - 3v^2\int_0^1 p[b-(b-a)s]s^2 ds +$$

$$+ 3v\int_0^1 p[b-(b-a)s]s^3\,dx - \int_0^1 p[b-(b-a)s^4\,ds = 0 \tag{7}$$

La fel se poate determina nodul x_1 astfel ca în formula (3) coeficientul $B = 0$. Avem ecuaţia

$$(a-x_1)^3\int_a^b p(x)(x-a)dx + 3(a-x_1)^2\int_a^b p(x)(x-a)^2 dx +$$

$$+ 3(a-x_1)\int_a^b p(x)(x-a)^3 dx + \int_a^b p(x)(x-a)^4\,dx = 0 \tag{8}$$

şi punînd

$$x_1 - a = (b-a)u, \quad x - a = (b-a)t$$

obţinem

$$u^3\int_0^1 p[a+(b-a)t]t\,dt - 3u^2\int_0^1 p[a+(b-a)t]t^2\,dt +$$

$$+ 3u\int_0^1 p[a+(b-a)t]t^3\,dt - \int_0^1 p[a+(b-a)t]t^4\,dt = 0 \tag{9}$$

Se observă că dacă

$$p[b-(b-a)x] = p\,[a+(b-a)x]\,;\ x \in [0, 1] \tag{10}$$

adică în ipoteza că funcţia de pondere este simetrică faţă de mijlocul intervalului, ecuaţiile (7) şi (9) coincid şi au o singură soluţie reală.

Notînd cu $\bar{x}_1$ soluţia ecuaţiei (5) şi cu $\bar{\bar{x}}_1$ soluţia ecuaţiei (8) nodurile $\bar{x}_1$ şi $\bar{\bar{x}}_1$ sînt simetrice şi ele faţă de mijlocul intervalului adică

$$\bar{x}_1 + \bar{\bar{x}}_1 = a + b \tag{11}$$

Punînd acum în formula (3) $x_1 = \bar{x}_1$ şi notînd din nou acest nod tot cu x_1 obţinem

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = C_1 f(x_1) + C_1' f'(x_1) + C_1'' f''(x_1) - \int_a^b \bar{\varphi}(x) f^{(5)}(x) dx \tag{12}$$

funcţia $\bar{\varphi}$ păstrează semn constant pe intervalul (a, b), fiind negativă.

Înlocuind în formula (3) $x_1 = \bar{\bar{x}}_1$ şi notînd acest nod cu x_2, avem

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = Af(a) + C_2 f(x_2) + C_2' f'(x_2) + C_2'' f''(x_2) - \int_a^b \bar{\bar{\varphi}}(x) f^{(5)}(x) dx \tag{13}$$

funcţia $\bar{\bar{\varphi}}$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$, fiind pozitivă.

Adunînd formulele (12) şi (13) primim formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \frac{1}{2} [Af(a) + Bf(b) + C_1 f(x_1) + C_1' f'(x_1) + C_1'' f''(x_1) +$$

$$C_2 f(x_2) + C_2' f'(x_2) + C_2'' f'' x_2)] - \int_a^b p(x) \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2} f^{(5)}(x) dx$$

Înlocuind formula (12)

$$f(x) = \frac{1}{5!} (x - x_1)^4 (x - b)$$

avem

$$\int_a^b \bar{\varphi}(x) dx = - \int_a^b p(x) \frac{(x - x_1)^4 (x - b)}{5!} dx$$

iar în formula (13)

$$f(x) = \frac{1}{5!} (x - x_2)^4 (x - a)$$

obţinem

$$\int_a^b \bar{\bar{\varphi}}(x) dx = - \int_a^b p(x) \frac{(x - x_2)^4 (x - a)}{5!} .$$

Dacă se ţine seama de relaţia (11) în ipoteza că funcţia $p(x)$ este simetrică faţă de mijlocul intervalului, se deduce printr-un calcul simplu că

$$\int_a^b \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2} dx = 0$$

ceea ce arată că formula de cuadratură (14) considerată are gradul de exactitate cel puţin 4.

Se poate demonstra că formula (14) are gradul de exactitate chiar 5. Într-adevăr, înlocuind

$$f(x) = (x - x_1)^3 (x - x_2)^3$$

obținem

$$\frac{1}{6!}\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b p(x)\left\{(x - x_1)^3(x - x_2)^3 - \frac{(b - x)(x_1 - a)^3}{2(b - a)(x_1 - a)^3} - \frac{(x - a)(x - x_1)^3}{2(b - x_2)^3(b - a)}\right\} dx$$

Membrul doi al acestei relații, în ipotezele impuse mai sus asupra lui x_1, x_2 și $p(x)$, este diferit de zero.

(Intrat în redacție la 24 octombrie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *La formule de quadrature généralisée de Newton*, Anal. Șt. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, **XX**, 1974, 151–159.
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. tehnică, București, 1957.
3. D. V. Ionescu, P. Pavel, *Extension de la formule de quadrature de Newton*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., 1976, 61–65.

SUR UNE EXTENSION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE NEWTON

(Résumé)

Dans ce travail on construit, en suivant la méthode de [3], une formule de quadrature de type Newton, où les noeuds intérieurs sont multiples.

Dans les cas des noeuds intérieurs triples, nous avons la formule de quadrature (14) avec le degré d'exactitude 5.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

RIEMANNIAN SPACES WITH A-RECURRENT VECTOR FIELD

C. NIŢESCU*

1. A non-flat Riemannian space V_n is called recurrent [1] if its curvature tensor satisfies

$$R_{ijkl,\,m} = \varphi_m R_{ijkl} \tag{1.1}$$

for some non-zero vector φ_m. Note that the covariant derivative is indicated by a subscript preceded by a comma. Let us set up the convention that, if V_n admits a tensor field $T \dots$ such that $T \dots, l = \varphi_l T \dots$ where φ_l is a non-zero vector field of V_n, then V_n is called a T-recurrent space and it is denoted by T_n.

The concircular curvature tensor Z^k_{jih} [2], the conharmonic curvature tensor C'^k_{jih} [3] and the tensor W^h_{ijk} introduced by K. Yano and Sawaki [4] are given by

$$Z^k_{jih} = R^k_{jih} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^k_h g_{ji} - \delta^k_i g_{hj}) \tag{1.2}$$

$$C^{ik}_{jih} = R^k_{jih} - \frac{1}{n-2}(\delta^k_h R_{ji} - \delta^k_i R_{jh} + g_{ji}R^k_h - g_{jh}R^k_i) \tag{1.3}$$

$$W^h_{ijk} = aZ^h_{ijk} + \frac{b}{n-2}(\delta^h_k G_{ij} - \delta^h_j G_{ik} + g_{ij}G^h_k - g_{ik}G^h_j) \tag{1.4}$$

where a and b are constants and

$$G_{ij} = Z^k_{ijk} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} \tag{1.5}$$

The transvection of (1.5) with g^{ij} gives

$$g^{ij}G_{ij} = 0 \tag{1.6}$$

At the same time, the transvection of (1.3) and (1.4) with g^{ij} yields the symmetric tensors G'_{kh} and G''_{kh} given by

$$G'_{kh} = R\frac{g_{hk}}{2-n} \quad \text{and} \quad G''_{hk} = (a+b)G_{hk} \tag{1.7}$$

---

* Polytechnic Institute, Jassy, Department of Mathematics.

The conformal curvature tensor defined by

$$G_{kjih} = R_{kjih} - \frac{1}{n-2}(g_{kh}R_{ji} - g_{jh}R_{ki} + R_{kh}g_{ji} - R_{jh}g_{ki}) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{kh}g_{ji} - g_{jh}g_{ki}) \tag{1.8}$$

can be expressed under the form

$$G_{kijh} = Z_{kjih} - \frac{1}{n-2}(g_{kh}G_{ji} - g_{ki}G_{jh} + g_{ji}G_{kh} - g_{jh}G_{ki}) \tag{1.9}$$

The tensors C_{hijk} and C'_{hijk} are related, according to [5], by

$$C_{hijk} = C'_{hijk} - \frac{1}{n-1}(g_{hk}G'_{ij} - g_{hj}G'_{ik}) \tag{1.10}$$

We also have [5].

$$W_{hijk} = aC_{hijk} + \frac{a+b}{n-2} g_{hk}G_{ij} - g_{hj}G_{ik} + g_{ij}G_{hk} - g_{ik}G_{hj}) \tag{1.11}$$

If the parentheses are eliminated between (1.4) and (1.11) we obtain

$$W_{hijk} = (a+b)Z_{hijk} - bC_{hijk}. \tag{1.12}$$

It follows either from (1.11) or from (1.12) that, if $a + b = 0$ then the tensor $W_{hijk} = aC_{hijk}$ and therefore it is proportional to Weyl's tensor.

In this paper we shall consider the case that $a + b \neq 0$.

2. We first express the tensor W_{hij} in terms of Riemann's tensor:

$$W^k_{jih} = aR^k_{jih} - \frac{aR}{n(n-1)}(\delta^k_h g_{ji} - \delta^k_i g_{hj}) + \frac{b}{n-2}(\delta^k_h G_{ji} - \delta^k G_{jh} + g_{ji}G^k_h - g_{jh}G^k_i) =$$

$$= aR^k_{jih} + \delta^k_h\left[\frac{b}{n-2}G_{ji} - \frac{aR}{2n(n-1)}g_{ji}\right] - \delta^k_i\left[\frac{b}{n-2}G_{jh} - \frac{aRg_{hj}}{2n(n-1)}\right] +$$

$$+ \left[\frac{b}{n-2}G^k_h - \frac{aR}{2n(n-1)}\delta^k_h\right]g_{ji} - \left[\frac{b}{n-2}G^k_i - \frac{aR}{2n(n-1)}\delta_i\right]g_{jh}$$

If we denote, like in [6],

$$A_{ij} = \frac{b}{n-2}G_{ij} - \frac{aR}{2n(n-1)}g_{ij} \tag{2.1}$$

or, in view of (1,5),

$$A_{ij} = \frac{b}{n-2}R_{ij} - \left[\frac{b}{n-2} + \frac{a}{2(n-1)}\right]R\frac{g_{ij}}{n} \tag{2.1'}$$

then we get

$$W^k_{jih} = aR^k_{jih} + \delta^k_h A_{ji} - \delta^k_i A_{jh} + g_{ji} A^k_h - g_{jh} A^k_i \tag{2.2}$$

or

$$W^k_{jih} = aR^k_{jih} + A^k_{jih} \tag{2.3}$$

where, as in [6], A^k_{jih} is given by

$$A^k_{jih} = \delta^k_h A_{ji} - \delta^k_i A_{jh} + g_{ji} A^k_h - g_{jh} A^k_i \tag{2.4}$$

From (2.4) we find that the tensor $A_{kjih} = g_{kl} A^l_{jhi}$ satisfies the following identities:

$$A_{kjih} = -A_{kjhi} = -A_{jkih} = A_{ihkj} \tag{2.5}$$

$$A_{kjih} + A_{kihj} + A_{khji} = 0$$

If we contract (2.1) with respect to i and j we obtain the invariant

$$A = g^{ij} A_{ij} = -\frac{aR}{2(n-1)} \tag{2.6}$$

Another contraction of (2.4) with respect to k and h gives

$$L_{ij} = A^k_{jik} = (n-2) A_{ji} - \frac{a}{2(n-1)} R g_{ji} \tag{2.7}$$

In view of (2.1) and (1.5), the equation (2.7) can be written

$$L_{ji} = bG_{ji} - a \frac{R}{n} g_{ij} \tag{2.8}$$

$$L_{ji} = bR_{ji} - (a+b) \frac{R}{n} g_{ji} \tag{2.9}$$

One can see that for $a = 0$ it follows from (2.8) or (2.9) that L_{ji} is proportional to G_{ji} (we have assumed that $a + b \neq 0$), hence we shall consider $a \neq 0$.

3. A non-flat n-dimensional Riemannian space $(n > 2)$ is said to be G_n — recurrent [5] if the tensor G_{ij} meets the condition

$$G_{ij,r} = \varphi_r G_{ij} \quad \text{or} \quad G^k_{i,r} = \varphi_r G^k_i \tag{3.1}$$

for some non-zero vector φ_r.

If the above equality (3.1) is contracted with respect to k and r, by use of (1.5), it follows that $R^k_{i,k} - \frac{R_{ik}}{n}\delta^k_i = \varphi_k G^k_i$ or

$$R, i = \frac{2n}{n-2}\varphi_k G^k_i \tag{3.2}$$

therefore we obtain.

THEOREM 3.1. *The equation* (3.2) *holds for G_n-recurrent spaces.*

DEFINITION 3.1. A Riemannian space $V_n(n > 2)$ is said to be *A-recurrent* if the tensor A_{ij} satisfies the condition

$$A_{ij,l} = \varphi_l A_{ij} \text{ for some non-zero vector } \varphi_l. \tag{3.3}$$

DEFINITION 3.2. A Riemannian space $V_n(n > 2)$ is said to be *L-recurrent* if the tensor L_{ij} satisfies the condition

$$L_{ij,l} = \varphi_l L_{ij} \text{ for some non-zero vector } \varphi_l. \tag{3.4}$$

From (2.1′) and (3.3) we have

$$\frac{b}{n-2}R_{ij,l} - \left[\frac{b}{n-2} + \frac{a}{2(n-1)}\right]R_{,l}\frac{g_{ij}}{n} = \varphi_l\left\{\frac{b}{n-2}R_{ij} - \left[\frac{b}{n-2} + \frac{a}{2(n-1)}\right]R\frac{g_{ij}}{n}\right\}$$

or

$$\frac{a}{2(n-1)}(R_{,l} - \varphi_l R) = 0$$

Form $a \neq 0$ it follows that

LEMMA 3.1. *An A-recurrent space is with recurrent scalar curvature and with the same recurrence vector field.*

THEOREM 3.2. *Every Ricci recurrent space is A-recurrent with the same recurrence vector field, and conversely.*

Proof. It readily follows from (2.1′) that a Ricci recurrent space V_n is A-recurrent, too. Since V_n is A-recurrent, from (2.1′) and from Lemma 3.1 we immediately obtain the theorem.

THEOREM 3.3. *Every A-recurrent space is G_n-recurrent. A G_n-recurrent space is A-recurrent if its scalar curvature R satisfies*

$$R_{,l} = \varphi_l R$$

Proof.
In view of Theorem 2.1. of [5] and our Theorem 3.2 the result of the statement clearly holds.

THEOREM 3.4. *A necessary and sufficient condition for a Riemannian space V_n to be A-recurrent is that the equation*

$$W_{hijk,l} - \varphi_l W_{hijk} = a(R_{hijk,l} - \varphi_l R_{ij}) \tag{3.5}$$

holds for some non-zero field φ_l of V_n.

Proof. If V_n is A-recurrent, it easily follows from (2.2) and (3.3) that (3.5) holds. Conversely, if (3.5) holds, transvecting it by g^{hk} we obtain:

$$(a + b)(G_{ij,l} - \varphi_l G_{ij}) = a(R_{ij,l} - \varphi_l R_{ij}) \tag{3.6}$$

and transvecting this equation by g^{ij} we finally get

$$R_{,l} - \varphi_l R = 0 \tag{3.7}$$

In view of (1.5), (3.6) gives

$$bR_{ij,l} - (a + b)R_{,l}\frac{g_{ij}}{n} = \left[bR_{ij} - (a + b)R\frac{g_{ij}}{n}\right]\varphi_l \tag{3.8}$$

If we divide the equation (3.8) by $n - 2$ and if we add the result to equation (3.7) multiplied by: $a\left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2(n-1)}\right]$ we obtain $A_{ij,l} = \varphi_l A_{ij}$ which completes the proof.

LEMMA 3.2. *Every L-recurrent space is with recurrent scalar curvature.*

Proof. By (2.9) we have $b(R_{ij,l} - \varphi_l R_{ij}) = (a + b)\frac{g_{ij}}{n}(R_{,l} - \varphi_l R)$. Contracting this equation by g^{ij} we obtain $a(R_{,l} - \varphi_l R) = 0$. Therefore $R_{,l} - \varphi_l R = 0$ since $a \neq 0$.

THEOREM 3.5. *Every L-recurrent space is A-recurrent with the same recurrence vector field and conversely.*

Proof. By use of Lemma 3.2 and (2.7) we readily conclude that an L-recurrent space is A-recurrent, too. The converse result follows from Theorem 3.2 and equation (2.7).

4. DEFINITION 4.1. A non-flat n-dimensional Riemannian space is said to be *A_n-recurrent* if the tensor A_{hijk} satisfies the condition:

$$A_{hijk,l} = \varphi_l A_{hijk} \text{ for some non-zero vector } \varphi_l \tag{4.1}$$

THEOREM 4.1. *Every A-recurrent space is A_n-recurrent. An A_n-recurrent space is A-recurrent if it is with recurrent scalar curvature.*

Ptoof. Let V_n be A-recurrent with the recurrence vector. Then (4.1) readily follows from (2.4). Conversely, if (4.1) holds, transvecting it by g^{hk} we get $(n - 2)A_{ij,l} + g_{ij}A_{,l} = [(n - 2)A_{ij} + g_{ij}A]\varphi_l$ or $(n - 2)(A_{ij,l} - \varphi_l A_{ij}) = g_{ij}(A\varphi_l - A_{,l})$. In view of (2.6) we obtain from the last equation $(n - 2)(A_{ij,l} - \varphi_l A_{ij}) = - g_{ij}\frac{a}{2(n-1)}(R\varphi_l - R_{,l})$ which proves our theorem.

THEOREM 4.2. *The recurrence vector field of an A-recurrent space is a gradient vector field.*

Proof. First note that the following equation holds:

$$
\begin{aligned}
A_{kjih,[lm]} + A_{ihlm,[kj]} + A_{lmkj,[ih]} &= g_{kh}A_{ji}[\mathrm{lm}] - g_{ik}A_{jh,[lm]} + \\
+ g_{ji}A_{kh,[lm]} - g_{jh}A_{ik,[lm]} &+ g_{im}A_{hl,[kj]} - g_{il}A_{hm,[kj]} + g_{hl}A_{im,[kj]} - \\
- g_{hm}A_{il,[kj]} + g_{lj}A_{mk,[ih]} &- g_{lk}A_{mj,[ih]} + g_{mk}A_{lj,[ih]} - g_{mj}A_{lk,[ih]}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

If V is an A-space we have:

$$2A_{kjih,[lm]} = (\varphi_l A_{kjih})_{,m} - (\varphi_m A_{kjih})_{,l} = \varphi_{lm}A_{kjih} \tag{4.3}$$

where we have denoted

$$\varphi_{lm} = \varphi_{l,m} - \varphi_{m,l} \tag{4.4}$$

Transvecting (4.3) by g^{kh} we get

$$2L_{ji,[lm]} = (\varphi_{l,m} - \varphi_{m,l})L_{ji} = \varphi_{lm}L_{ji} \tag{4.5}$$

Using (2.9), we easily get from (4.5)

$$b(R_{ij,lm} - R_{ij,ml}) = \varphi_{lm}L_{ji} \tag{4.6}$$

We have, at the same time,

$$2A_{ji,[lm]} = \frac{2b}{n-2}R_{ji,[lm]} = \frac{1}{n-2}\varphi_{lm}L_{ji} \tag{4.7}$$

If (4.7) and (4.3) are substituted into (4.2) it follows that

$$
\begin{aligned}
\varphi_{lm}A_{kjih} + \varphi_{kj}A_{ihlm} + \varphi_{ih}A_{lmkj} &= \frac{1}{n-2}(g_{kh}\varphi_{lm}L_{ji} - g_{ik}\varphi_{lm}L_{jh} + g_{ji}\varphi_{lm}L_{kh} - \\
- g_{jh}\varphi_{lm}A_{ik} + g_{im}\varphi_{kj}L_{hl} &- g_{il}\varphi_{kj}L_{hm} + g_{hl}\varphi_{kj}L_{im} - g_{hm}\varphi_{kj}L_{il} + g_{lj}\varphi_{ih}L_{mk} - \\
&- g_{lk}\varphi_{ih}L_{mj} + g_{mk}\varphi_{ih}L_{lj} - g_{mj}\varphi_{ih}L_{lk})
\end{aligned}
$$

If the terms are suitably brought together in this equation one gets

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{lm}\left[A_{kjih} - \frac{1}{n-2}(g_{kh}L_{ji} - g_{ik}L_{jh} + g_{ji}L_{kh} - g_{jh}L_{ik})\right] + \\
&+ \varphi_{kj}\left[A_{ihlm} - \frac{1}{n-2}(g_{im}L_{hl} - g_{il}L_{hm} + g_{hl}L_{im} - g_{hm}L_{il})\right] + \\
&+ \varphi_{ih}\left[A_{lmkj} - \frac{1}{n-2}(g_{lj}L_{mk} - g_{lk}L_{mj} + g_{mk}L_{lj} - g_{mj}L_{lk})\right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

The tensor M_{kjih} is now introduced by

$$M_{kjih} = A_{kjih} - \frac{1}{n-2}(g_{kh}L_{ji} - g_{ik}L_{jh} + g_{ji}L_{kh} - g_{jh}L_{ik}) \tag{4.9}$$

Equations (4.8) give us

$$\varphi_{lm}M_{kjih} + \varphi_{kj}M_{ihlm} + \varphi_{ih}M_{lmkj} = 0 \tag{4.10}$$

It follows from (4.9) that the tensor M_{kjih} satisfies the following identities:

$$M_{kjih} = - M_{kjhi} = - M_{kjih} = M_{ihkj}$$
$$M_{kjih} + M_{kihj} + M_{khji} = 0. \tag{4.11}$$

A short calculus leads to

$$M_{kjih} = \frac{aR}{(n-1)(n-2)} (g_{kh}g_{ji} - g_{ik}g_{jh}) = a(C_{kjih} - C'_{kjih}) \tag{4.12}$$

By the use of Lemma 1 of [7] we get from (4.9), since the space is not of zero scalar curvature, that $\varphi_{lm} = 0$. This implies $\varphi_{l,m} = \varphi_{m,l}$ which is the condition for φ_l to be a gradient vector.

According to this latest theorem, equation (4.3) turns to $A_{kjih,lm} - A_{kjih,ml} = 0$ which implies $L_{ji,lm} - L_{ji,ml} = 0$. If Ricci's identity is applied to the last equation, one gets $L_{qi}R^q_{jlm} + L_{jq}R^q_{ilm} = 0$, or, by use of (2.3), we have

$$L_{qi}(W^q_{jlm} - A^q_{jlm}) + L_{jq}(W^q_{ilm} - A^q_{ilm}) = 0 \tag{4.13}$$

Therefore the following result holds in A_n:

THEOREM 4.3. *Equation* (4.13) *holds in A_n-recurrent spaces.*

THEOREM 4.4. *If A_n admits a parallel vector field v^h, then either v^h is orthogonal to the recurrence vector field of A_n, or A_n is an Einstein space*, or the scalar curvature vanishes.

Proof. If the space V_n admits a parallel vector field v^h the following conditions must be satisfied:

$$v^h_{,l} = 0\,; \quad v^h R_{ijkh} = 0\,; \quad v^h R_{jh} = 0$$
$$v^h R_{ijkl,h} = 0\,; \quad v^h R_{jk,h} = 0\,; \quad v^h R_{,h} = 0 \tag{4.14}$$

From (2.3) we obtain $A_{hijk} = W_{hijk} - aR_{hijk}$ or

$$v^l A_{hijk,l} = v^l W_{hijk,l} - av^l R_{hijk,l} \tag{4.15}$$

From (1.4), (1.2), (1.5) and (4.14) it follows that $v^l W_{hijk,l} = 0$ and therefore from (4.15) we get $v^l A_{hijk,l} = 0$. On the other hand for an A_n-space $A_{hijk,l} = \varphi_l A_{hijk}$. Hence

$$v^l \varphi_l A_{hijk} = 0 \tag{4.16}$$

One can verify that either of the two cases hold:

Case (A) $v^l\varphi_l = 0$ $\qquad$ Case (B) $A_{hijk} = 0$.

From (A) the first part of the theorem statement holds true. Let us next consider Case (B), i.e., $A_{hijk} = 0$. From (2.3) we get

$$W_{hijk} = aR_{hijk}$$

Here we should again distinguish between two cases:

(B₁) $$a = 0$$

In this subcase, from (4.17) and [8] it follows that A_n is conformally flat. But we have assumed that $a + b \neq 0$ and since $a = 0$ it comes to $b \neq 0$; according to Corollary 1.2 of [8] it follows that in this case A_n is an Einstein space (and not necessarily of constant sectional curvature). We also know [8] that in a quasiconformally flat space $V_n(n > 3)$ the covariant derivative of the tensor field A_{ij} is symmetric, i.e., $A_{ij,k} = A_{ik,j}$.

(B₂) $$a \neq 0$$

Now, contracting (4.17) by $g^{hk}g^{ij}$ we have $aR = 0$. Since $a \neq 0$ it follows that R vanishes. In this case we shall have

$$Z_{hijk} = R_{hijk} \text{ and } G_{ij} = R_{ij},\ C'_{hijk} = C_{hijk} \text{ where } C_{hijk}$$

is the conformal curvature tenser, and $G'_{ij} = 0$.

In view of Theorems 4.4. and 4.1 we may state.

THEOREM 4.5. *If a A-recurrent space admits a parallel vector field v^k, then either v^k is orthogonal to the recurrence vector field of A_n, or A_n is an Einstein space, or the scalar curvature vanishes.*

(Received September 19, 1978)

REFERENCES

1. H. S. Ruse, *Three-dimensional spaces of recurrent curvature*, Proc. London Math. Soc., **50**, 1949, 438–446.
2. K. Yano, *Concircular geometry* I, Proc. Imp. Acad. Sci. of Japan, **16**, 1940, 195–200.
3. Y. Ishii, *On coharmonic transformations*, Tensor N. S., **7**, 1957, 73–80.
4. K. Yano and S. Sawaki, *Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group*, J. Diff. Geom., **2**, 1968, 161–184.
5. P. Desai and K. Amur, *On W-recurrent spaces*, Tensor N. S., **29**, 1975, 98–102.
6. P. Desai and K. Amur, *On symmetric spaces*, Tensor N. S., **29**, 1975, 119–124.
7. A. G. Walker, *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Proc. London Math. Soc., 2, **52**, 1950, 36–64.
8. K. Amur and Y. B. Maralabhavi, *On quasi-conformally flat spaces*, Tensor N. S., **31**, 1977, 194–198.

SPAŢII RIEMANNIENE A-RECURENTE

(Rezumat)

Folosind tensorul A_{hijk}, definit cu ajutorul tensorului de curbură riemanniană şi cu ajutorul tensorului lui K. Yano–S. Sawaki, se definesc spaţiile A- şi A_n- recurente. Se stabilesc proprietăţi ale acestor spaţii şi ale vectorului lor de recurenţă.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

CONEXIUNI ECHIVALENTE PE G-STRUCTURI DE ORDINUL DOI

MARIAN ŢARINĂ

În cele ce urmează vom studia proprietăţi legate de o relaţie de echivalenţă a conexiunilor definite pe G-structuri de ordinul doi, în raport cu o anumită clasă de spaţii omogene. Această relaţie, definită de N. Tanaka [6], a fost considerată de S. Kobayashi şi T. Ochiai [3] în legătură cu studiul unor operatori de transgresie. Echivalenţa proiectivă şi echivalenţa conformă a conexiunilor liniare fără torsiune, respectiv a conexiunilor riemanniene, apar ca şi cazuri particulare remarcabile ale relaţiei menţionate.

În prima parte a articolului formulăm unele proprietăţi generale ale conexiunilor echivalente. În cea de a doua parte introducem morfismele admise ale G-structurilor de ordinul doi şi demonstrăm unele proprietăţi ale acestora

1. Spaţii omogene plate de ordinul doi. Vom reaminti la început unele definiţii ([3], [4], [5]).

DEFINIŢIA 1.1. Se numeşte algebră Lie graduată de ordinul n o algebră Lie $\mathfrak{l}$ pentru care avem

$$\mathfrak{l} = \sum_{p=-1}^{n-1} \mathfrak{g}_p \text{ (sumă directă)}, \quad \mathfrak{g}_{n-1} \neq (0), \quad \dim \mathfrak{g}_p < \infty \tag{1.1}$$

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q} \tag{1.2}$$

Din (1.2) rezultă că $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = (0)$, deci $\mathfrak{g}_{-1}$ este o subalgebră abeliană a lui $\mathfrak{l}$. De asemenea $\mathfrak{g}_0$ este o subalgebră a lui $\mathfrak{l}$, iar ad $\mathfrak{g}_0$ invariază orice spaţiu $\mathfrak{g}_p$.

O algebră Lie graduată se numeşte tranzitivă dacă avem

$$[x, \mathfrak{g}_{-1}] \neq (0) \quad \forall x \in \mathfrak{g}_p, \quad x \neq 0, \quad p \geqslant 0 \tag{1.3}$$

Pentru algebrele Lie graduate de ordinul doi avem deci

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \tag{1.4}$$

Aceste algebre au fost clasificate în [2].

Pentru algebrele Lie graduate se pot introduce noţiunile de omomorfism, izomorfism, subalgebre, ideale etc., prin definiţiile obişnuite, dar impunînd condiţia de păstrare a graduării.

DEFINIŢIA 1.2. Se numeşte spaţiu omogen plat de ordinul 2, un spaţiu omogen $X = L/L_0$, unde L este un grup Lie ce acţionează pe X efectiv şi tranzitiv, avînd pe L_0 ca subgrup de izotropie, iar algebra Lie a lui L este o algebră graduată de ordinul al doilea, dată de (1.4), unde $\mathfrak{g}_1$ este algebra

Lie a grupului $L_1 = \mathrm{Ker}\ \rho$, ρ fiind reprezentarea liniară de izotropie $\rho: L_0 \to GL(T_0(X))$, iar algebra Lie $\mathfrak{l}_0$ a lui L_0 este

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \tag{1.5}$$

De mai sus, în virtutea teoremei de izomorfism rezultă că $\mathfrak{g}_0$ este algebra Lie a subgrupului liniar de izotropie $L_0/L_1 = \rho(L_0)$.

Exemplele care ilustrează această teorie sînt:

Exemplul 1.1. Spaţiul proiectiv $P^n = L/L_0$ unde

$$L = SL(n+1, R) \text{ (modulo centrul său)}$$

$$L_0 = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ u & a \end{pmatrix} \in SL(n+1, R);\ A \in GL(n, R),\ a \in R\right\}$$

unde u este un vector linie.

Exemplul 1.2. Spaţiul conform n-dimensional $C^n = L/L_0$ unde

$$L = O(n+1,1) = \{X \in GL(n+2, R), {}^tXSX = S\} \quad \text{unde } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_n & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \left\{\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & a \end{pmatrix} \in O(n+1,1);\ A \in O(n),\ a \in R\right.$$

Pentru detalii recomandăm lucrările [3], [4], [5].

Într-adevăr, în exemplul 1.1 algebra Lie a lui L este $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(n+1), R)$ iar spaţiile de descompunere sînt

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 0, & v \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\right\},\ \mathfrak{g}_0 = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ \mathrm{Tr}\, A + a = 0\right\},\ \mathfrak{g}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{1.6}$$

unde $A \in GL(n, R)$, $a \in R$, v este un vector coloană, iar ξ este un vector linie.

În exemplul 1.2, avem $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(n+1,1) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+2, R), {}^tXS + SX = 0\}$ iar spaţiile de descompunere sînt

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & {}^tv & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},\ \mathfrak{g}_0 = \left\{\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ A \in \mathfrak{o}(n)\right\},\ \mathfrak{g}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^t\xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{1.7}$$

Observaţie. Grupul $O(n+1,1)$ considerat în [4] invariază prin definiţie forma patratică $F \equiv x^1 + \ldots + x^n - 2x^0x^{n+1}$ care prin transformarea

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^0 - y^{n+1}),\ x^i = y^i,\ x^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^0 + y^{n+1}),\ i = \overline{1,n} \tag{1.8}$$

se reduce la forma canonică $-(y^0)^2 + (y^1)^2 + \ldots + (y^{n+1})^2$. Cuadrica de ecuaţie $F = 0$ este difeomorfă cu sfera $S^n \subset R^{n+1}$ prin transformarea obţinută din (1.8) făcînd $y^0 = 1$. Aceasta precizează factorul de proporționalitate din formulele date de S. Kobayashi [4] p. 133.

De fapt avem două reprezentări diferite ale grupului $0(n + 1.1)$. În cazul clasic, al celei de a doua reprezentări, grupul este definit prin,

$$0_\Lambda(n+1,1) = \{Y \in GL(n+2, R),\ {}^tY\Lambda Y = \Lambda\} \text{ unde } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n+1} \end{pmatrix}$$

Notînd cu

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

matricea de trecere a transformării (1.8), avem $\Lambda = {}^tTST$ sau $S = ({}^tT)^{-1}\Lambda T^{-1}$. Dacă $X \in GL(n+2, R)$ aparține la grupul $0_S(n+1,1)$ definit de matricea S, din relația ${}^tXSX = S$ obținem prin amplificare ${}^tT{}^tXSXT = {}^tTST = \Lambda$, deci ${}^tT{}^tX({}^tT)^{-1}\Lambda T^{-1}XT = \Lambda$. Astfel matricea

$$Y = T^{-1}XT = (\mathrm{Ad}\ T^{-1})\ X$$

aparține grupului ortogonal $0_\Lambda\ (n+1),1)$ definit de matricea Λ. Între imaginile celor două reprezentări avem deci izomorfismul

$$\mathrm{Ad}\ T^{-1};\quad 0_S(n+1,1) \to 0_\Lambda(n+1,1) \tag{1.10}$$

aplicația Ad fiind considerată în $GL(n+2, R)$.

Un element al algebrei Lie $o_\Lambda(n+1,1)$ a lui $0_\Lambda(n+1,1)$ este de forma $\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ {}^t\xi & U \end{pmatrix}$ unde ξ este un vector linie, iar U este o matrice antisimetrică, adică avem ${}^tU + U = 0$. Pentru reprezentarea considerată se verifică faptul că algebra Lie $0_\Lambda(n+1,1)$ admite o descompunere în sumă directă de forma (1.4), algebrele de descompunere fiind date de

$$\mathfrak{g}'_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & {}^tu & 0 \\ u & 0 & u \\ 0 & {}^tu & 0 \end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}'_0 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & A & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A \in o(n)\right\} \tag{1.11}$$

$$\mathfrak{g}'_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ {}^t\eta & 0 & -{}^t\eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

În formulele de mai sus, u este un vector coloană, iar η un vector linie. Pentru verificarea afirmației de mai sus observăm că un element $X \in 0_\Lambda(n+1,1)$ este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\alpha & a \\ \alpha & A & b \\ a & -{}^tb & 0 \end{pmatrix} \quad A \in o(n)$$

şi se descompune în mod unic într-o sumă de termeni de forma (1.11), căci din relaţiile obţinute prin identificare

$$'\alpha = 'u + \eta, \quad b = u - '\eta$$

rezultă

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + b), \quad \eta = \frac{1}{2}(\alpha - b)$$

Spaţiile (1.11) nu au elemente comune diferite de zero. Într-adevăr, avem în mod evident $\mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{g}_{-1} = (0)$, $\mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{g}_1 = (0)$. Avem de asemenea $\mathfrak{g}_{-1}' \cap \mathfrak{g}_1 = (0)$, întrucît relaţia $'\eta = u$ implică $u = 0$ $\eta = 0$. Astfel descompunerea considerată este directă.

Pe de altă parte, se verifică prin calcul direct că spaţiile (1.11) satisfac şi relaţiile (1.2).

Conexiuni (L/L_0)-echivalente.

Fie $X = L/L_0$ un spaţiu omogen de ordinul 2 iar $G = L_0/L_1$ grupul său liniar de izotropie. Notînd $n = \dim X$ avem $G \subset GL(n, R)$ iar din (1.5) rezultă că algebra Lie a lui G este $\mathfrak{g}_0$. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n şi P o G-structură pe M. Forma canonică θ a lui P este o 1-formă cu valori în R^n, dar întrucît în baza formulei (1.5) spaţiul tangent la X are acelaşi suport cu algebra abeliană $\mathfrak{g}_{-1}$ putem identifica pe $\mathfrak{g}_{-1}$ cu R^n, prin intermediul unei baze, şi astfel să considerăm că forma θ ia valori în $\mathfrak{g}_{-1}$.

Pe de altă parte, o conexiune pe fibratul P se defineşte printr-o 1-formă ω cu valori în $\mathfrak{g}_0$. Conexiunea este fără torsiune dacă ω verifică relaţia $d\theta + [\omega, \theta] = 0$.

Vom introduce acum o relaţie de echivalenţă a conexiunilor faţă de spaţiul omogen X. (vezi [6]).

DEFINIŢIA 1.3. Două conexiuni fără torsiune ω_1 şi ω_2 pe P se numesc X-echivalente dacă există o funcţie $\varphi : P \to \mathfrak{g}_1$ astfel încît să avem

$$\omega_2 - \omega_1 = [\theta, \varphi] \tag{1.12}$$

Vom nota relaţia de mai sus prin $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_2$. Cei doi membri ai relaţiei (1.6) iau valori în $\mathfrak{g}_0$ datorită definiţiei unei forme de conexiune, respectiv datorită graduării (1.2). Forma $\tau = \omega_2 - \omega_1$ din membrul întîi al relaţiei (1.12) reprezintă forma de deformare a conexiunilor.

PROPOZIŢIA 1.1. *Relaţia* $\overset{X}{\sim}$ *este o relaţie de echivalenţă.*

Într-adevăr, avem $\omega \overset{X}{\sim} \omega$ *corespunzător funcţiei* $\varphi = 0$. *Dacă* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_2$ *prin funcţia* φ, *avem şi* $\omega_2 \overset{X}{\sim} \omega_1$ *prin funcţia* $-\varphi$. *In sfîrşit, dacă* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_2$ *prin* φ_1 *şi* $\omega_2 \overset{X}{\sim} \omega_3$ *prin* φ_2 *atunci rezultă* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_3$ *prin funcţia* $\varphi_1 + \varphi_2$.

O proprietate simplă a conexiunilor X-echivalente se referă la forma conexiunii medii corespunzătoare

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

PROPOZIŢIA 1.2. *Dacă* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_2$ *atunci rezultă* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_m$, $\omega_2 \overset{X}{\sim} \omega_m$.

Intr-adevăr, avem

$$\omega_m - \omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) = \left[\theta, \ \frac{1}{2}\varphi\right]$$

şi prin urmare $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_m$ *prin funcţia* $\frac{1}{2}\varphi$. *Analog avem* $\omega_2 \overset{X}{\sim} \omega$ *prin funcţia* $-\frac{1}{2}\varphi$.

Privitor la formele de curbură ale conexiunilor X-echivalente demonstrăm

PROPOZIŢIA 1.3. *Dacă avem* $\omega_1 \overset{X}{\sim} \omega_2$ *iar* Ω_1, Ω_2 *sînt respectiv formele de curbură asociate lui* ω_1 *şi* ω_2 *atunci avem*

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \underset{1}{\nabla}[\theta, \varphi] + \frac{1}{2}[[\theta, \varphi], \ [\theta, \varphi]] \tag{1.13}$$

unde $\underset{1}{\nabla}_1$ *indică diferenţiala absolută în raport cu conexiunea* ω_1.

Demonstraţie. Forma de curbură a lui ω_i $i = 1, 2$ este

$$\Omega_j = d\omega_i + \frac{1}{2}[\omega_i, \omega_i] \tag{1.14}$$

Ţinînd seama de (1.12) avem

$$[\omega_2, \omega_2] - [\omega_1, \omega_2] = [[\theta, \varphi], \omega_2]$$

$$[\omega_2, \omega_1] - [\omega_1, \omega_1] = [[\theta, \varphi], \omega_1]$$

Diferenţiind (1.12) avem

$$d\omega_2 - d\omega_1 = d[\theta, \varphi]$$

Deoarece $[\omega_1, \omega_2] = [\omega_2, \omega_1]$, din formulele de mai sus deducem

$$\Omega_2 - \Omega_1 = d[\theta, \varphi] + \frac{1}{2}[[\theta, \varphi], \omega_2] + \frac{1}{2}[[\theta, \varphi], \omega_1] \tag{1.15}$$

Inlocuind în (1,15) $\omega_2 = \omega_1 + [\theta, \varphi]$ şi ţinînd seama că $[\theta, \varphi]$ este o 1-formă tensorială de tip adjunct, avem

$$\underset{1}{\nabla}[\theta, \varphi] = d[\theta, \varphi] + [[\theta, \varphi], \omega_1]$$

de unde rezultă formula (1.13)

2. **Morfisme admise.** Fie $X = L/L_0$ şi $X' = L'/L'_0$ două spaţii omogene de ordinul 2 şi G, G' grupurile liniare de izotropie corespunzătoare. Notînd $n = \dim X$, $n' = \dim X'$ considerăm varietăţile diferenţiabile M şi M' de dimensiune n respectiv n'. Fie $P(M, G)$ o G-structură pe M asociată spaţiului omogen X, iar $P'(M', G')$ o G'-structură pe M' asociată lui X'.

Se ştie că un morfism între fibratele principale P, P' este o pereche de aplicaţii (f, h), $f: P \to P'$, $h: G \to G'$ astfel încît să avem $f(za) = f(z)\, h(a)$, unde f este o aplicaţie diferenţiabilă regulată, iar h este un omomorfism de grupuri Lie. Astfel se induce şi o aplicaţie între baze $\hat{f}: M \to M'$ definită prin $\hat{f}(x) = \pi'(f(z))$ unde $z \in \pi^{-1}(x)$ iar π şi π' sînt aplicaţiile de proiecţie.

DEFINIŢIA 2.1. Vom spune că morfismul (f, h) este admis în raport cu omomorfismul $\tilde{h}: L \to L'$ dacă este indus de $\tilde{h}$, iar aplicaţia $\tilde{h}_*: \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}'$ este un omomorfism de algebre Lie graduate.

Astfel, considerînd descompunerile $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{l}' = \mathfrak{g}'_{-1} + \mathfrak{g}'_0 + \mathfrak{g}_1$ restricţiile $h_{*p} = \tilde{h}_* \mid \mathfrak{g}_p \cdot p = -1, 0, 1$ satisfac condiţiile $\tilde{h}_{*p}(\mathfrak{g}_p) \subseteq \mathfrak{g}'_p$.

Omomorfismul $\tilde{h}$ satisface condiţiile $\tilde{h}(L_0) \subseteq L'_0$, $\tilde{h}(L_1) \subseteq L'_1$.

Prin aceasta se induce de asemenea o aplicaţia $\hat{h}: X \to X'$ între spaţiile omogene corespunzătoare.

Vom demonstra acum două proprietăţi referitoare la echivalenţa conexiunilor imagine, respectiv a conexiunilor induse de un morfism admis.

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie (f, h) un M-morfism $(M = M')$ al G-structurilor $P(M, G)$, $P'(M, G')$ admis în raport cu omomorfismul $\tilde{h}: L \to L'$, f fiind un difeomorfism. Dacă ω_0 şi ω_1 sînt conexiuni X-echivalente pe P, atunci conexiunile imagini ω'_0, ω'_1 vor fi X'-echivalente pe P' dacă şi numai dacă formele canonice ale fibratelor satisfac condiţia*

$$\theta' f^* = \tilde{h}_{*-1} \cdot \theta \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Să admitem că avem

$$\omega_1 - \omega_0 = [\theta, \varphi] \tag{2.2}$$

şi fie ω'_i, $i = 0, 1$, conexiunile imagini. Atunci avem $f^*\omega'_i = \tilde{h}_*\omega_i$. Aplicînd $\tilde{h}_*$ la (2.2) şi ţinînd seama de graduare avem

$$\tilde{h}_*(\omega_1) - \tilde{h}_*(\omega_0) = \tilde{h}_*([\theta, \varphi]) = [\tilde{h}_{*-1}\theta, h_{*1}\varphi]$$

prin urmare

$$f^*\omega'_1 - f^*\omega'_0 = [\theta' f_*, h_{*1}\varphi]$$

şi astfel rezultă

$$\omega'_1 - \omega'_0 = [\theta', \varphi'] \tag{2.3}$$

unde $\varphi': P' \to \mathfrak{g}'_1$ este aplicaţia definită de

$$\varphi' = \tilde{h}_{*1} \cdot \varphi \cdot f^{-1} \tag{2.4}$$

Reciproca este de asemenea valabilă.

PROPOZIŢIA 2.2. *Fie (f, h) un morfism admis al G-structurilor $P(M, G)$ $P'(M', G')$ în raport cu omomorfismul $h: L \to L'$ astfel încît $\tilde{h}_*$ este un izomorfism. Dacă ω'_0, ω'_1 sînt conexiuni X'-echivalente pe P' atunci conexiunile induse (imagi-*

nile reciproce) ω_0, ω_1 *pe P vor fi X-echivalente, dacă şi numai dacă formele canonice satisfac relaţia* (2.1).

Demonstraţie. Prin definiţia conexiunilor induse ω_i ale conexiunilor ω_i' avem

$$\omega_i = h_*^{-1} \cdot \omega' \cdot f_* \tag{2.5}$$

Rezultă

$$\omega_1 - \omega_0 = h_*^{-1}\omega_1' f_* - h_*^{-1}\omega_0' f_* = h_*^{-1}(f^*\omega_1' - f^*\omega_0')$$

Dar prin ipoteză avem $\omega_1' - \omega_0' = [\theta', \varphi']$ deci

$$f^*\omega_1' - f^*\omega_0' = [\theta' \cdot f_*, \varphi' \cdot f_*] = [h_{*-1}\theta, \varphi' \cdot f_*]$$

şi rezultă (2.2) unde

$$\varphi = h_{*-1}^{-1} \cdot \varphi' \cdot f_* \tag{2.6}$$

Exemple de morfisme admise.

Exemplul 2.1. Considerăm incluziunea naturală

$$i : SL(n + 1, R) \hookrightarrow SL(n + 2, R) \tag{2.7}$$

definită de

$$i(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad S \in SL\,(n + 1, R)$$

Aceasta va induce un morfism admis între P^n şi P^{n+1}, căci cu notaţiile din exemplul 1.1 avem $i(L_0) \subset L_0'$. Într-adevăr, algebra Lie l'' a lui $i(L)$ este suma directă a subspaţiilor

$$\mathfrak{g}_{-1}'' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{g}_0'' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{l}_1'' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

şi avem $i_*(\mathfrak{g}_p) = \mathfrak{g}_p'' \subset \mathfrak{g}_p'$, $p = -1, 0, 1$. Evident omomorfismul i_* este un omomorfism al algebrelor Lie graduate $\mathfrak{l}$ şi $\mathfrak{l}'$.

Observaţie. Aplicaţia de incluziune a unui subgrup într-un grup nu invariază în general graduarea algebrelor Lie corespunzătoare. Astfel este cazul aplicaţiei de incluziune

$$i : 0_0(n + 1, 1) \hookrightarrow SL\,(n + 2, R), \quad i(A) = A \tag{2.8}$$

unde $0_0\,(n + 1, 1)$ este componenta conexă a grupului $0(n + 1, 1)$. Aceasta rezultă din expresiile corespunzătoare ale elementelor algebrelor Lie, date în formulele (1.6), (1.7).

Exemplul 2.2. Considerăm automorfismul lui $0(n + 1, 1)$ dat de aplicaţia adjunctă

$$\mathrm{Ad}\, T^{-1} : 0_S(n + 1, 1) \to 0_\wedge(n + 1, 1) \tag{2.9}$$

considerat în exemplul 1.2. Acest omomorfism induce un automorfism admis al spaţiului Möbius S^n. Într-adevăr, avem Ad $T^{-1}(L_0) \subset L_0'$ unde L_0 este grupul de izotropie al originii $(x^0 = x^1 = \ldots = x^n = 0)$ din S^n, iar L_0' este grupul de izotropie al aceluiaşi spaţiu, relativ la punctul corespunzător originii prin transformarea (1.8), punct ale cărui coordonate neomogene sînt $(1, 0, \ldots, 0)$.

Pe de altă parte se verifică prin calcul direct că avem $(AdT^{-1})_* (\mathfrak{g}_p) = \mathfrak{g}_p'$, $p = -1, 0, 1$ unde $\mathfrak{g}_p$ şi $\mathfrak{g}_p'$ sînt subspaţiile date de formulele (1.7). şi (1.11).

(Intrat în redacţie la 2 octombrie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. S. Kobayashi — K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry*, N. Y., vol. I, 1963 ; vol. II, 1969.
2. S. Kobayashi — T. Nagano, *On filtered Lie algebras and geometrical structures (I)*, J. Math. and Mec., **13**, 1964, 875—908.
3. S. Kobayashi — T. Ochiai, *G-structures of order two and transgression operators*, J. Diff. Geometry, **6**, 1971, 213—230.
4. S. Kobayashi, *Transformation groups in Differential Geometry*, Springer, 1972.
5. T. Ochiai, *Geometry associated with semi-simple flat homogeneous spaces*, T.A.M.S., **152**, 1970, 1—33.
6. N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces*, J. Math. Soc. Japan, **17**, 1965, 103—139.
7. N. Tanaka, *Graded Lie algebras and geometric structures*, Proc. US-Japan Seminar in Diff. Geometry, Kyoto, 1965, 147—150.

EQUIVALENT CONNECTIONS ON G-STRUCTURES OF ORDER TWO

(Summary)

The paper deals with the equivalence of the connections defined on G-structures of order two with respect to a certain class of homogeneous spaces. This relation was introduced by N. Tanaka [6] and it is considered also by S. Kobayashi and T. Ochiai [3].

In the first section of the paper some general properties of this equivalence are formulated. In the second section one defines the admissible morphisms between the G-structures of order two, and one gives some properties, concerning the induced connections, and the images of two equivalent connections. Some examples are also discussed.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

AFFINE STRUCTURES OVER AN ARBITRARY RING

V. GROZE and A. VASIU

W. Leissner has introduced in two equivalent ways the concept of affine Barbilian plane over a Z-ring (i.e. a ring with 1 having the property $a \cdot b = 1 \Rightarrow b \cdot a = 1$) [1], [2]. Remarking that his algebraic definition may be extended to any ring R with 1, we point out in this note the condition under which the ring R is a Z-ring.

DEFINITION 1. Let R be a ring with unity and $B \subseteq R \times R$ a non empty set. To the pair R, B we associate the following system $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \Phi, \Pi)$, denoted by Geom (R, B) and called *affine geometry over the ring R with domain B*:

1. $\mathfrak{P} = R \times R$ (the elements of $\mathfrak{P}$ are called *points*)
2. $\mathfrak{D} = \{(a, b) + R(u, v) \mid (a, b) \in \mathfrak{P},\ (u, v) \in B\}$ (the elements of $\mathfrak{D}$ are called *lines*)
3. $(a, b)\Phi(c, d) :\Leftrightarrow (c - a, d - b) \in B$. If $(a, b)\Phi(c, d)$, then the points (a, b) and (c, d) are said to be *non-neighbour*.
4. The equivalence relation $\parallel$ (called *parallelism*) is defined on $\mathfrak{D}^2$ by

$$(a, b) + R(u, v) \parallel (c, d) + R(s, t) :\Leftrightarrow R(u, v) = R(s, t).$$

DEFINITION 2. Geom (R, B) is called an *affine Barbilian plane* denoted by $[R, B]$ if:

(B_1) $\forall (u, v) \in B,\ \exists (s, t) \in B : \begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix} \in GL_2(R)$

(B_2) If $(u, v) \in B$, $(s, t) \in B$ and $\begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix} \in GL_2(R)$,

then $\forall \lambda \in R$ $(u, v) + \lambda(s, t) \in B$

(we denoted by $GL_2(R)$ the set of invertible second order matrices whose elements are from R.)

In the ring R we denote by $\mathfrak{U}$ the set of the units:

$\mathfrak{U} = \{r \mid \exists r', rr' = r'r = 1\}$ and $\mathfrak{U}_r = \{r \mid \exists r', rr' = 1\}$, $\mathfrak{U}_e = \{r \mid \exists r', r'r = 1\}$

As in [2] we have:

LEMMA 1. *If* $\begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix} \in GL_2(R)$ *and if* $\begin{bmatrix} u' & v' \\ s' & t' \end{bmatrix}$ *is its inverse, then the matrices*

$$\begin{bmatrix} ru & rv \\ s & t \end{bmatrix} r \in \mathfrak{U}, \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u + ls & v + lt \\ s & t \end{bmatrix}, \quad l \in R$$

have the following inverses:

$$\begin{bmatrix} u'r^{-1} & v' \\ s'r^{-1} & t' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v' & u' \\ t' & s' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u' & v' - u'l \\ s' & t' - s'l \end{bmatrix}$$

LEMMA 2. $(a, b) + R(u, v) = (c, d) + R(s, t)$ *implies* $R(u, v) = R(s, t)$.

DEFINITION 3. Let $L = (a, b) + R(u, v)$ be a line. We say that the pair of points $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in L$ is a *generating pair of* L *if*: $(a_1, b_1) + R(a_2 - a_1, b_2 - b_1) = L$

$(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ is called in this case a *generating direction of* L.

LEMMA 3. $r(u, v) \in B$ *implies* $r \in Ur$. *If* $(u, v) \in B$ *and* $r \in Ur$ *then* $r (u, v) \in B$.

Proof. If $(ru, rv) \in B$, we know by axiom (B_1) that there is an element $(s, t) \in B$ such that:

$$\begin{bmatrix} ru & rv \\ s & t \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R). \text{ Let } \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

be the inverse of the matrix (1), then $ru\alpha_1 + rv\gamma_1 = 1$, that is $r(u\alpha_1 + v\gamma_1) = 1$ implying $r \in U_r$.

Let $(u, v) \in B$ and $r \in U_r$. Then we may find r' such that $rr' = 1$ and $(s, t) \in B$ such that $\begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$, (by axiom B_1). Considering axiom B_2 we have $(u - r's, v - r't) \in B$, and, by lemma 1, the matrix $\begin{bmatrix} s & t \\ u - r's & v - r't \end{bmatrix}$ belongs to $\mathrm{GL}_2(R)$. On the other hand $(s, t) \in B$ imply, by axiom B_2 with $\lambda = r$, that:

$$\begin{aligned} (s + r(u - r's),\ t + r(v - r't)) &= (s + ru - rr's,\ t + rv - rr't) = \\ &= (ru, rv) \in B. \end{aligned} \tag{2}$$

The proof of lemma 3 is achieved.

In Leißner's definition [2] the structure $[R.\ B]$ is defined over a Z-ring and the following axioms are supposed to be satisfied:

(E_1) $(1,0), (0,1) \in B$

(E_2) $(u, v) \in B \Rightarrow r(u, v) \in B$

(E_3) is the same with B_1

(E_4) is the same with B_2.

As a corollary of lemma 3 we deduce that (E_2) is a consequence of (E_3) and (E_4).

Now we have, as in case of Z-rings, the following:

LEMMA 4. *If* $L = (a, b) + R(u, v) \in \mathfrak{D}$ *then the map* $\delta : R \to L,\ l \mapsto (a, b) + l(u, v)$ *is a bijection of the elements of* R *onto* L.

Leißner's proof remains valid under our weakend assumptions.

LEMMA 5. $r(u, v)$ is a generating direction of the line $(a, b) + R(u, v)$ *if and only if* $r \in U_l$.

Proof. Clearly (ru, rv) is a generating direction of the line $(a, b) + R(u, v)$ if and only if

$$(a, b) + R(u, v) = (a, b) + R(ru, rv) \qquad (3)$$
$$\text{i.e. } R(u, v) = Rr(u, v).$$

Since $(u, v) \in B$, there exist $\alpha, \gamma \in R$ such that $u\alpha + v\gamma = 1$. The relation (3) implies:

$$(u, v) \in Rr(u, v),$$

from which we deduce

$$u\alpha + v\gamma \in Rr(u\alpha + v\gamma),$$

that is $l \in Rr$, hence there is r' with the property $r'r = 1$. Conversely, if $r'r = 1$ we have

$$R(u, v) = Rr'r(u, v) \subseteq Rr(u, v),$$

implying relation (3). Denote the set of the generating directions of $[R, B]$ by $B' := \{rd \mid d \in B,\ r \in U_l\}$.

LEMMA 6. $B' \subseteq B \Leftrightarrow R$ *is a Z-ring.*

Proof. Let $B' \subseteq B$ and $(u, v) \in B$. Suppose $r'r = 1$. According with lemma 5, we have $r(u, v) \in B'$. Applying lemma 3, we have $r \in U_r$, i.e. $r'r = 1 \Rightarrow rr' = 1$, hence R is a Z-ring. Conversely, If R is a Z-ring then $U_l = U$ and as $r \in U$ implies, by lemma 3, $rB = B$, on obtains $B' = U_l\ B = UB = B$.

THEOREM 1. *The ring R with l is a Z-ring if and only if in any $[R, B]$ structure the following property holds: "Through two non-neighbour points passes exactly one line".*

Proof. First suppose that through two non-neighbour points passes exactly one line of $[R, B]$. Consider $r \in U_r$ and let us show that $r \in U_l$. Let $(u, v) \in B$; by lemma 3 we have $r(u, v) \in B$. The two lines:

$$(0, 0) + R(u, v), \quad (0, 0) + R(ru, rv)$$

have in common the points $(0, 0)$ and (u, v); consequently

$$R(u, v) = R(ru, rv),$$

and thus we see that (ru, rv) is a generating direction for the line $R(u, v)$. Applying lemma 5, it results that $r \in U_l$.

Conversely, we assume that R is a Z-ring and (a, b) and (c, d) are two non-neighbour points of $[R, B]$. Clearly the line $(a, b) + R(c - a, d - b)$ passes through (a, b) and (c, d). Let $(a, b) + R(u, v)$ be another line with

$$(c, d) \in (a, b) + R(u, v).$$

In this case we deduce that $(c - a, d - b) \in R(u, v)$. Since $(c - a, d - b) = r(u, v) \in B$, according with lemma 3 we obtain $r \in U_r = U$. Hence $(u, v) = r^{-1}(c - a, d - b)$, i.e. $(a, b) + R(u, v) = (a, b) + Rr^{-1}(c - a, d - b) = (a, b) + R(c - a, d - b)$.

THEOREM 2. *Let $[R, B]$ be an affine Barbilian plane. Then there is a set $B_0 \subset R^2$ satisfying the axioms (E_1), (E_2), (E_3), (E_4) such that there is a permutation of $R \times R$ mapping the lines of $[R, B]$ onto the lines of $[R, B_0]$ preserving the non-neighbour and parallelism relations.*

Proof. Let $(u_0, v_0) \in B$ and let $(s_0, t_0) \in B$ such that

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 \\ s_0 & t_0 \end{bmatrix} \in GL_2(R);$$

we denote

$$M = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 \\ s_0 & t_0 \end{bmatrix}^{-1}$$

and we define the map $\varphi : [u, v] \mapsto [u, v]\, M$.
Define $B_0 := \varphi(B)$. The map φ is a bijection and we have:

$$\varphi[u_0, v_0] = [u_0, v_0]M = [1,0]$$

and

$$\varphi[s_0, t_0] = [s_0, t_0]M = [0,1]$$

hence in B_0 the axiom (E_1) is satisfied. The axioms (E_3), (E_4) are obviously satisfied. Then axiom (E_2) is a consequence (corollary to lemma 3).

(Received October 30, 1978)

REFERENCES

1. Leissner, W., *Affine Barbilian-Ebenen* I, Journal of Geometry, 6, 1, 1975, 31–57.
2. Leissner, W., *Affine Barbilian-Ebenen* II, Journal of Geometry, 6, 2, 1975, 105–129.

STRUCTURI AFINE PESTE UN INEL ARBITRAR

(Rezumat)

În această notă se dă o definiţie algebrică a unei clase de structuri afine peste un inel R oarecare cu unitate, generalizînd conceptul de plan afin Barbilian introdus de W. Leissner în [1], [2], în care inelul de coordonatizare era un Z-inel (în care $ab = 1 \Rightarrow b \cdot a = 1$).

STUDIA UNIV. BABEŞ–BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

ASUPRA UNOR PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ PARAMETRICĂ ÎN VARIABILE ÎNTREGI

LIANA LUPŞA

1. Se cunosc numeroase probleme practice al căror model matematic este o problemă de programare parametrică. În cadrul acestora, o categorie aparte este formată din acele probleme în care variabilele sînt supuse şi condiţiei de a fi întregi. Să considerăm de exemplu următoarea problemă dată de I. Drăgan [1, cap. 4, exemplul 43]: o maşină poate produce două repere A şi B cu productivităţile orare respectiv de 50 piese şi 75 piese. Se ştie că maşina poate lucra 20 ore săptămînal şi că există capacităţi de stocaj respectiv de 500 şi 1 000 piese. Cunoscînd că beneficiul unitar la reperul A ia valori din intervalul $[0, +\infty)$, iar beneficiul unitar la reperul B este 1, se cere să se stabilească planul de lucru săptămînal al maşinii astfel încît beneficiul să fie maxim.

Dacă se notează cu x numărul de piese de tip A produse săptămînal şi cu y numărul de piese de tip B produse săptămînal, atunci modelul matematic corespunzător acestei probleme este reprezentat de următoarea problemă de programare parametrică: să se determine maximul funcţiei

$$f(x, y) = tx + y$$

cu condiţiile

$$\frac{x}{50} + \frac{y}{75} \leqslant 20$$

$$x \leqslant 500, \quad y \leqslant 1000$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

$$x, y \text{ întregi}$$

cînd t variază în intervalul $[0, +\infty)$.

O problemă de programare în variabile întregi, în care cel puţin una dintre constantele care alcătuiesc datele problemei depind de un parametru real, se va numi problemă de programare parametrică în variabile întregi.

În continuare vom studia probleme de programare parametrică în variabile întregi în care:

1) funcţia de scop depinde liniar de un parametru, adică este o funcţie $f: R^n \times R \to R$ de forma

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i + td_i) x_i \tag{1}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $t \in R$, c_i şi d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt numere întregi;

2) se cere determinarea maximului funcției (1) pe acele puncte $x \in R^n$ care verifică condițiile:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$x_j \text{ întreg}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

cînd parametrul t variază într-o mulțime nevidă $T \subseteq R$. Coeficienții a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ și $a_i = 1, 2, \ldots, m$, sînt numere întregi.

Vom nota această problemă prin P, iar problema de programare întreagă care se obține atunci cînd parametrul t ia o valoare fixă t_0 din mulțimea T prin $P(t = t_0)$. De asemenea notăm

$$\Omega = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant a_i, i = 1, 2, \ldots, m, x_j \geqslant 0, x_j \text{ întreg}, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

și presupunem Ω compact.

Adoptînd punctul de vedere expus în [5, cap. IV], vom spune că o soluție admisibilă x^0 a problemei P este optimală pentru $t_0 \in T$, dacă ea este o soluție optimală a problemei $P(t = t_0)$. Mulțimea tuturor valorilor $t \in T$ pentru care o soluție admisibilă x^0 a problemei P este optimală, se numește mulțime de optimalitate a lui x^0 și se notează $M(x^0)$.

În continuare ne vom ocupa de descompunerea mulțimii T într-un număr finit de submulțimi nevide T_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, care posedă următoarele proprietăți:

(a) $T = \bigcup_{i=1}^{s} T_i$;

(b) fiecare mulțime T_i este o mulțime de optimalitate;

(c) dacă x^i este o soluție optimală cu proprietatea că T_i este mulțimea sa de optimalitate și x^j este o soluție optimală cu proprietatea că T_j este mulțimea sa de optimalitate, atunci există cel mult un punct $t_i \in T_i$ și cel mult un punct $t_j \in T_j$ astfel încît x^i să fie soluție optimală pentru $t = t_j$ și x^j să fie soluție optimală pentru $t = t_i$.

Ținînd cont de procedeul clasic de rezolvare a problemelor de programare parametrică, problema descompunerii pusă anterior se poate reduce la aceea a determinării mulțimii de optimalitate a unei soluții.

2. Fie $y \in \Omega$. Vom introduce următoarele notații

$$\Omega^0(y) = \left\{x \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) = 0\right\},$$

$$\Omega^-(y) = \left\{x \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) \leqslant -1\right\},$$

$$\Omega^+(y) = \left\{x \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) \geqslant 1\right\}.$$

LEMA 1. *Avem* $\Omega = \Omega^0(y) \cup \Omega^-(y) \cup \Omega^+(y)$ *oricare ar fi* $y \in \Omega$.

Demonstrație. Deoarece x, y și d sînt vectori ale căror componente sînt numere întregi, numărul $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j)$ este de asemenea întreg. Deci avem trei posibilități:

(a) $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) = 0$ și atunci $x \in \Omega^0(y)$;

(b) $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) \leqslant -1$ și atunci $x \in \Omega^-(y)$;

(c) $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j) \geqslant 1$ și atunci $x \in \Omega^+(y)$.

Pentru fiecare $y \in \Omega$ se consideră funcția $g(\cdot, y) : R^n \setminus \Omega^0(y) \to R$ definită prin

$$g(x, y) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j(y_j - x_j)}{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - y_j)}$$ oricare ar fi $x \in R \setminus \Omega^0(y)$, precum și următoarele probleme de programare fracționară întreagă:

(P^+, y): să se determine minimul funcției $g(\cdot, y)$ pe $\Omega^+(y)$;

(P^-, y): să se determine maximul funcției $g(\cdot, y)$ pe $\Omega^-(y)$.

Notăm cu $x^+(y)$ o soluție optimală a problemei (P^+, y) și cu $x^-(y)$ o soluție optimală a problemei (P^-, y).

TEOREMA 2. *Fie* $t_0 \in T$, x^0 *o soluție optimală a problemei* $P(t = t_0)$, *și*

$$\underline{t} = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } \Omega^-(x^0) = \emptyset \\ g(x^-(x^0), x^0) & \text{pentru } \Omega^-(x^0) \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} +\infty & \text{pentru } \Omega^+(x^0) = \emptyset \\ g(x^+(x^0), x^0) & \text{pentru } \Omega^+(x^0) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Atunci avem

$$M(x^0) = \{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\}.$$

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că

$$\{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\} \subseteq M(x^0). \tag{5}$$

Fie $\tilde{t} \in \{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\}$. Vom arăta că oricare ar fi $x \in \Omega$ are loc inegalitatea

$$f(x, \tilde{t}) \leqslant f(x^0, \tilde{t}). \tag{6}$$

Fie $x \in \Omega$. Conform lemei 1 sînt posibile trei cazuri:

Cazul (a): Dacă $x \in \Omega^0(x^0)$, atunci, conform definiţiei lui $\Omega^0(x^0)$, avem

$$\sum_{j=f}^{n} d_j(x_j - x_j^0) = 0.$$

Cum însă x^0 este soluţie optimală pentru $t = t_0$, avem

$$f(x, t_0) \leqslant f(x^0, t_0).$$

Ţinînd cont de relaţia de mai sus, obţinem

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_j^0) \leqq 0.$$

Rezultă deci

$$f(x, \bar{t}) - f(x^0, \bar{t}) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_j^0) \leqq 0,$$

adică inegalitatea (6) are loc.

Cazul (b): Dacă $x \in \Omega^-(x^0)$, atunci $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^0) < 0$. Din definiţia lui $\underline{t}$ rezultă că

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0 - x_j)}{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^0)} \leqq \tilde{t},$$

de unde prin înmulţire cu $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^0)$ se obţine

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \tilde{t}d_j)x_j^0 \geqslant \sum_{j=1}^{n} (c_j + \tilde{t}d_j)x_j.$$

Deci (6) este adevărată.

Cazul (c): Dacă $x \in \Omega^+(x^0)$, atunci $\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^0) > 0$ şi din definiţia lui $\bar{t}$ rezultă că

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0 - x_j)}{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^0)} \geqslant \tilde{t}.$$

Procedînd ca şi în cazul (b), obţinem $f(x, \bar{t}) \leqslant f(x^0, \bar{t})$.

În toate cele trei cazuri este deci verificată inegalitatea (6). Din această inegalitate rezultă că x^0 este o soluție optimală pentru $P(t = \bar{t})$, adică $\bar{t} \in M(x_0)$.

Urmează să arătăm că $M(x^0) \subseteq \{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\}$. Să presupunem prin absurd că există un $t \in M(x^0)$ care nu aparține mulțimii $\{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\}$. În acest caz rezultă că sau

(a) $$t > \bar{t} \text{ și atunci } \bar{t} < +\infty, \text{ adică } \Omega^+(x^0) \neq \emptyset;$$

sau

(b) $$t < \underline{t} \text{ și atunci } \underline{t} > -\infty, \text{ adică } \Omega^-(x^0) \neq \emptyset.$$

În cazul (a) din definiția lui $\bar{t}$ rezultă

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0 - x_j^+(x^0))}{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j^+(x^0) - x_j^0)} < t.$$

Ținînd cont că $x^+(x^0) \in \Omega^+(x^0)$, această inegalitate se mai scrie

$$t\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j^+(x^0) - x_j^0) > \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0 - x_j^+(x^0)),$$

adică $f(x^+(x^0), t) > f(x^0, t)$. Inegalitatea obținută contrazice faptul că $t \in M(x^0)$.

În cazul (b), repetînd același raționament, se obține $f(x^0, t) < f(x^-(x^0), t)$. Dar această relație contrazice faptul că $t \in M(x^0)$.

Atît în cazul (a) cît și în cazul (b) am ajuns deci la o contradicție. Prin urmare avem

$$M(x^0) \leqslant \{t \in T \mid \underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}\}. \tag{7}$$

Din relațiile (5) și (7) rezultă inegalitatea din enunț.

CONSECINȚA 1. a) *Dacă $\Omega^+(x^0) \neq \emptyset$, atunci oricare ar fi $\bar{t} > \bar{t}$, x^0 nu este o soluție optimală a problemei $P(t = \bar{t})$.*

b) *Dacă $\Omega^-(x^0) \neq \emptyset$, atunci x^0 nu este o soluție optimală a problemei $P(t = \bar{t})$ pentru nici un $\bar{t} < \underline{t}$.*

Demonstrație. Afirmațiile rezultă imediat din teorema 2 și din definiția mulțimii de optimalitate.

CONSECINȚA 2. a) *Dacă $\Omega^+(x^0) \neq \emptyset$, atunci $x^+(x^0)$ este o soluție optimală a problemei $P(t = \bar{t})$.*

b) *Dacă $\Omega^-(x^0) \neq \emptyset$, atunci $x^-(x^0)$ este o soluție optimală a problemei $P(t = \underline{t})$.*

Demonstrație. Din teorema 2 rezultă că x^0 este soluție optimală pentru problema $P(t = \bar{t})$. Deci avem

$$f(x, \bar{t}) \leqslant f(x^0, \bar{t}) \text{ oricare ar fi } x \in \Omega. \tag{8}$$

Calculînd valorile funcției $f(\cdot, \bar{t})$ în punctele x^0 și $x^+(x^0)$, obținem $f(x^0, \bar{t}) = f(x^+(x^0), \bar{t})$. Ținînd acum cont de relația (8) avem $f(x, \bar{t}) \leqslant f(x^+(x^0), \bar{t})$ oricare ar fi $x \in \Omega$. Deci $x^+(x^0)$ este o soluție optimală a problemei $P(t = \bar{t})$.

În mod analog se demonstrează și afirmația b).

CONSECINȚA 3. a) *Dacă* $\Omega^+(x_0) \neq \emptyset$, *atunci oricare ar fi* $\tilde{t} \in T$, $\tilde{t} < \bar{t}$, $x^+(x^0)$ *nu este soluție optimală a problemei* $P(t = \tilde{t})$.

b) *Dacă* $\Omega^-(x^0) \neq \emptyset$, *atunci oricare ar fi* $\tilde{t} \in T$, $\tilde{t} > \underline{t}$, $x^-(x^0)$ *nu este soluție optimală a problemei* $P(t = \tilde{t})$.

Demonstrație. Vom demonstra afirmația a). Ținînd cont de definiția lui $\bar{t}$, rezultă datorită lui $\tilde{t} < \bar{t}$ inegalitatea

$$\tilde{t} \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j^+(x_0) - x_j^0)) < \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0 - x_j^+(x_0)),$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \tilde{t}d_j)x_j^+(x^0) < \sum_{j=1}^{n} (c_j + \tilde{t}d_j)x_j^0,$$

ceea ce nu exprimă altceva decît că $f(x^+(x^0), \tilde{t}) < f(x^0, \tilde{t})$. Deci $x^+(x^0)$ nu este soluție optimală a problemei $P(t = \tilde{t})$.

În mod analog se demonstrează afirmația b).

3. Bazîndu-ne pe lema 1, pe teorema 2 și pe consecințele 1 și 2 vom construi un algoritm care va realiza descompunerea mulțimii T, presupunînd bineînțeles că aceasta nu se reduce la un singur punct, într-un număr finit de submulțimi T_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, cu proprietățile (a), (b) și (c) date în paragraful 1.

Pasul 0. Se ia pentru t_0 o valoare rațională arbitrară cu proprietatea că $\inf T \leqslant t_0 \leqslant \sup T$, și lui j i se atribuie valoarea 0. Se trece la pasul 1.

Pasul 1. Se aplică problemei $P(t = t_0)$ unul din algoritmii de rezolvare a problemelor de programare liniară întreagă [3], [4], [5], [6]. Dacă în urma aplicării acelui algoritm se constată că problema $P(t = t_0)$ nu are soluții admisibile, adică Ω este vid, atunci oricare ar fi $\tilde{t} \in T$ problema $P(t = \tilde{t})$ nu are soluții admisibile. Stop.

Dacă problema $P(t = t_0)$ are soluții admisibile, atunci se notează cu x^0 o soluție optimală a sa și se trece la pasul 2.

Pasul 2. Se aplică algoritmul descris în [2] (sau un alt algoritm de rezolvare a problemelor de programare fracționară în variabile întregi) problemei (P^+, x^j). Dacă în urma aplicării algoritmului se constată că problema (P^+, x^j) nu are soluții admisibile, adică mulțimea $\Omega^+(x^j)$ este vidă, atunci se ia

$$T_j = \{t \in T \mid t_j \leqslant t < +\infty\}$$

și se trece la pasul 4. În caz contrar se notează cu x^{j+1} soluția optimală a problemei (P^+, x^j) dată de algoritm. Se ia $t_{j+1} = g(x^{j+1}, x^j)$ și se trece la pasul 3.

Pasul 3. Dacă $t \neq t_{j+1}$, atunci se ia

$$T_j = \{t \in T \mid t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}\}$$

şi se trece la pasul 4. Dacă $t_j = t_{j+1}$, atunci se ia $x^j = x^{j+1}$ şi se revine la pasul 2.

Pasul 4. Dacă $\sup T = \sup T_j$, se trece la pasul 5. Dacă $\sup T > \sup T_j$, atunci se măreşte j cu o unitate şi se revine la pasul 2.

Pasul 5. Dacă $\inf T = t_0$, atunci se ia $h = 0$ şi se trece la pasul 9. Dacă $\inf T < t_0$, atunci se ia $h = 0$ şi se trece la pasul 6.

Pasul 6. Se aplică algoritmul descris în [2] (sau un alt algoritm de rezolvare a problemelor de programare fracţionară în variabile întregi) problemei (P^-, x^h). Dacă în urma aplicării algoritmului se constată că problema (P^-, x^h) nu are soluţii admisibile, atunci se ia

$$T_h = \{t \in T \mid -\infty < t \leqslant t_h\}$$

dacă h este diferit de 0 şi

$$T_h = \{t \in T \mid -\infty < t \leqslant t_1\}$$

dacă h este 0. Se trece la pasul 8. Dacă problema (P^-, x^h) are soluţii admisibile, atunci se notează cu x^{h-1} soluţia optimală dată de algoritm. Se ia $t_{h-1} = g(x^{h-1}, x^h)$ şi se trece la pasul 7.

Pasul 7. Dacă $h = 0$, atunci se ia

$$T_h = \{t \in T \mid t_{h-1} \leqq t \leqq t_1\}$$

şi se trece la pasul 8. Dacă $h \neq 0$ şi $t_h \neq t_{h-1}$, atunci se ia

$$T_h = \{t \in T \mid t_{h-1} \leqq t \leqq t_h\}$$

şi se trece la pasul 8. Dacă $h \neq 0$ şi $t_{h-1} = t_h$, atunci se ia $x^h = x^{h-1}$ şi se trece la pasul 6.

Pasul 8. Dacă $\inf T = \inf T_h$, atunci mulţimile T_i cu $i = h, h+1, \ldots, j$ verifică proprietăţile (a), (b), (c). Stop. Dacă $\inf T < \inf T_j$, atunci se micşorează h cu o unitate şi se trece la pasul 6.

LEMA 3. a) *Fie* $i \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$. *Dacă problema* (P^+, x^i) *are soluţii admisibile şi* $t_{i+1} = t_i$, *atunci* x^{i+1} *este o soluţie optimală a problemei* (P^+, x^{i-1}).

b) *Fie* $i \in \{j+1, j+2, \ldots, -1\}$. *Dacă* x^{i-1} *este o soluţie optimală a problemei* (P^-, x^i) *şi* $t_{i-1} = t_i$, *atunci* x^{i-1} *este o soluţie optimală a problemei* (P^-, x^{i+1}).

Demonstraţie. Lema se demonstrează uşor calculînd diferenţa $g(x^{i-1}, x^i) - g(x^{i-1}, x^{i+1})$ şi ţinînd cont de egalitatea ce se obţine din $t_i = t_{i+1}$ dacă t_i şi t_{i+1} se înlocuiesc cu valorile lor. Pentru demonstrarea afirmaţiei b) se procedează în mod analog.

LEMA 4. x^i *este o soluţie optimală a problemei* $P(t = t_i)$ *oricare ar fi* $i \in \{h, h+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, j-1, j\}$.

Demonstrație. Din pașii 1 și 3 ai algoritmului și din lema 3 rezultă că x^0 este o soluție optimală a problemei $P(t = t_0)$.

Din pașii 2 și 3 ai algoritmului precum și din lema 3 rezultă că x^i, $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$, este o soluție optimală a problemei (P^+, x^{i-1}). Dar atunci, conform consecinței 2, x^i va fi o soluție optimală a problemei $P(t = t_i)$.

Din pașii 6 și 7 ai algoritmului și din lema 3 rezultă că x^i, $i \in \{h, h + 1, \ldots, -1\}$, este o soluție optimală a problemei (P^-, x^{i+1}). Dar atunci, conform afirmației b) din consecința 2, x^i va fi o soluție optimală a problemei $P(t = t_i)$.

LEMA 5. *Oricare ar fi $i \in \{h, h + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, j - 1, j\}$, T_i este mulțimea de optimalitate corespunzătoare soluției x^i.*

Demonstrație. Din pașii 2, 3, 6, 7 și din teorema 2 rezultă că T_0 este mulțimea de optimalitate corespunzătoare soluției x^0.

Fie $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$. Conform pașilor 2 și 3 și lemei 3, x^i este o soluție optimală a problemei (P^+, x^{i-1}). Din afirmația a) a consecinței 3 rezultă atunci că x^i nu este soluție optimală a problemei $P(t = \tilde{t})$ pentru nici un $\tilde{t} \in T$ cu $\tilde{t} < t_i$; deci

$$M(x^i) \subseteq T \setminus \{t \in T \mid t < t_i\} = \{t \in T \mid t_i \leqslant t < +\infty\} \tag{9}$$

Problema (P^+, x^i) poate să aibă sau să nu aibă soluții admisibile.

Dacă problema (P^+, x^i) are soluții admisibie, atunci $t_{i+1} = g(x^i, x^{i+1})$ și conform consecinței 1, rezultă că avem

$$M(x^i) \subseteq T \setminus \{t \in T \mid t > t_{i+1}\} = \{t \in T \mid t \leqslant t_{i+1}\} \tag{10}$$

Din (9) și (10) rezultă că

$$M(x^i) \subseteq \{t \in T \mid t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}. \tag{11}$$

Din lema 4, rezultă că x^i este o soluție optimală a problemei $P(t = t_i)$. Deoarece am presupus că $\Omega^+(x^i) \neq \emptyset$, avem conform teoremei 2

$$\{t \in T \mid t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\} \subseteq M(x^i). \tag{12}$$

Din (11) și (12) rezultă $M(x^i) = \{t \in T \mid t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}$. Din pasul 2 al algoritmului $T_i = \{t \in T \mid t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}$; deci $T_i = M(x^i)$.

Dacă $\Omega^+(x^i) = \emptyset$, atunci conform teoremei 2

$$M(x^i) \supseteq \{t \in T \mid t_i \leqslant t < +\infty\}. \tag{13}$$

Din (9) și (13) rezultă că $M(x^i) = \{t \in T \mid t_i \leqslant t < +\infty\}$. Dar conform pasului 2 avem $T_i = \{t \in T \mid t_i \leqslant t < +\infty\}$, deoarece $\Omega^+(x^i) = 0$. Deci rezultă $T_i = M(x^i)$.

În mod analog se demonstrează că oricare ar fi $i \in \{j, j + 1, \ldots, -1\}$ T_i este mulțimea de optimalitate corespunzătoare soluției x^i.

LEMA 6. *Punctele x^i, $i \in \{h, h + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, j - 1, j\}$, generate de algoritm sînt distincte.*

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi că oricare ar fi k, $k \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ avem relațiile

$$\Omega^+(x^{k+1}) \subset \Omega^+(x^k), \quad x^k \notin \Omega^+(x^{k+1}).$$

Din definiția mulțimilor $\Omega^+(x^k)$ și $\Omega^+(x^{k+1})$ avem

$$\Omega^+(x^k) = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_j^k) \geqslant 1\right\},$$

$$\Omega^+(x^{k+1}) = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \sum_{s=1}^{n} d_s(x_s^k - x_s^{k+1}) \geqslant 1\right\}.$$

Dar $x^{k+1} \in \Omega^+(x^k)$; deci

$$\sum_{s=1}^{n} d_s(x_s^{k+1} - x_s^k) \geqslant 1. \tag{14}$$

Însă atunci, din definiția lui $\Omega^+(x^{k+1})$, rezultă că $x^k \notin \Omega^+(x^{k+1})$.

Fie acum $x \in \Omega^+(x^{k+1})$. Atunci

$$\sum_{s=1}^{n} d_s(x_s - x_s^{k+1}) > 0. \tag{15}$$

Adunînd relațiile (14) și (15) obținem

$$\sum_{s=1}^{n} d_s(x_s - x_s^k) > 1$$

ceea ce implică faptul că $x \in \Omega^+(x^k)$; deci

$$\Omega^+(x^{k+1}) \subset \Omega^+(x^k).$$

În mod analog se demonstrează că oricare ar fi $r \in \{h, j+1, \ldots -1\}$ avem

$$\Omega^-(x^r) \subset \Omega^-(x^{r+1}), \quad x^{r+1} \notin \Omega^-(x^r).$$

Din cele demonstrate mai sus rezultă că avem următoarele incluziuni stricte:

$$\Omega^-(x^h) \subset \Omega^-(x^{h+1}) \subset \ldots \subset \Omega^-(x^{-1}) \subset \Omega^-(x^0), \tag{16}$$

$$\Omega^+(x^0) \supset \Omega^+(x^1) \supset \ldots \supset \Omega^+(x^{j-1}) \supset \Omega^+(x^j), \tag{17}$$

precum și următoarele relații:

$$x^0 \notin \Omega^+(x^1),\ x^1 \notin \Omega^+(x^2), \ldots, x^{j-1} \notin \Omega^+(x^j) \tag{18}$$

și

$$x^0 \notin \Omega^-(x^{-1}),\ x^{-1} \notin \Omega^-(x^{-2}), \ldots, x^{h+1} \notin \Omega^-(x^h). \tag{19}$$

Ținînd cont de faptul că

$$\Omega^+(x^0) \cap \Omega^0(x^0) = \emptyset,\ \Omega^-(x^0) \cap \Omega^0(x^0) = \emptyset,\ \Omega^-(x^0) \cap \Omega^+(x^0) = \emptyset,$$

din relațiile (16) și (17) rezultă

$$\Omega^-(x^s) \cap \Omega^0(x^0) = \emptyset \text{ oricare ar fi } s \in \{h, h+1, \ldots, -1, 0\}, \tag{20}$$

$$\Omega^+(x^r) \cap \Omega^0(x^0) = \emptyset \text{ oricare ar fi } r \in \{0, 1, \ldots, j-1, j\}, \tag{21}$$

$$\Omega^-(x^s) \cap \Omega^+(x^r) = \emptyset \text{ oricare ar fi } s \in \{k, h+1, \ldots, -1, 0\}$$

$$\text{și oricare ar fi } r \in \{0, 1, \ldots, j-1, j\}. \tag{22}$$

Vrem să arătăm acum că punctele x^i, $i \in \{h, h+1, \ldots, j\}$, sînt distincte. Din relația (22) rezultă că oricare ar fi $s \in \{h, h+1, \ldots, -1\}$ și oricare ar fi $r \in \{1, 2, \ldots, j\}$ x^s este diferit de x^r. De asemenea din relațiile (20) și (21) rezultă că x^s este diferit de x^0 oricare ar fi $s \in \{h, h+1, \ldots -1\}$ și x^r este diferit de x^0 oricare ar fi $r \in \{1, 2, \ldots, j\}$.

Din relațiile (18) rezultă că oricare ar fi r și s din mulțimea $\{0, 1, \ldots, j\}$ avem $x^r \neq x^s$, deoarece dacă $r < s$, atunci $x^r \notin \Omega^+(x^s)$. Din relațiile (17) și (19) rezultă că oricare ar fi r și s din mulțimea $\{h, h+1, \ldots, 0\}$ avem $x^r \neq x^s$, deoarece dacă $r < s$, atunci $x^s \notin \Omega^-(x^r)$.

Din cele arătate anterior rezultă că oricare ar fi r, s din mulțimea $\{h, h+1, \ldots, j\}$ avem $x^r \neq x^s$.

Folosind lemele demonstrate vom arăta că are loc următoarea teoremă de convergență a algoritmului.

TEOREMA 7. *Dacă mulțimea Ω este compactă, atunci algoritmul descris conduce după un număr finit de pași la descompunerea mulțimii T într-un număr finit de submulțimi T_i, $i \in \{h, h+1, \ldots, j\}$, cu proprietățile* (a), (b), (c).

Demonstrație. Deoarece Ω este compactă, rezultă că ea conține un număr finit de puncte cu coordonate numere întregi. Conform lemei 6, punctele x^i generate de algoritm sînt distincte și au coordonatele numere întregi. Rezultă că ele sînt în număr finit. Deci, va exista un h astfel încît $\inf T = \inf T_h$ și va exista un j astfel încît $\sup T = \sup T_j$. Numărul de submulțimi în care este împărțită mulțimea T este finit și este egal cu $h + j + 1$.

Rămîne să arătăm că submulțimile T_i verifică proprietățile (a), (b), (c).

Faptul că mulțimile T_i verifică proprietatea (b) rezultă din lema 5.

Pentru a demonstra că este verificată proprietatea (a), va trebui să demonstrăm în prealabil că șirul $(t_i)_{i=h}^{j}$ este nedescrescător.

Fie $i \in \{h, h+1, \ldots, -1\}$. Vrem să arătăm că $t_i \leqslant t_{i+1}$. Să presupunem prin absurd există $s \in \{h, h+1, \ldots, -1\}$ astfel încît $t_s > t_{s+1}$. Conform pasului 6 avem $t_s = g(x^s, x^{s+1})$ și deci inegalitatea anterioară se poate scrie sub forma

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k^{s+1} - x_k^s)}{\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k^s - x_k^{s+1})} > t_{s+1}$$

Ţinînd cont de faptul că $x^s \in \Omega^-(x^{s+1})$ şi de definiţia funcţiei $f(\cdot, t_{s+1})$, rezultă $f(x^{s+1}, t_{s+1}) < f(x, t_{s+1})$ ceea ce contrazice faptului că x^{s+1} este o soluţie optimă a problemei $P(t = t_{s+1})$. Deci $t_i \leqslant t_{i+1}$, oricare ar fi $i \in \{h, h+1, \ldots, -1\}$.

Analog se arată că $t_i \leqslant t_{i+1}$, oricare ar fi $i \in \{0, 1, \ldots, j\}$. Prin urmare şirul $(t_i)_{i=h}^{j}$ este nedescrescător. Mai mult chiar, din paşii 3 şi 7, rezultă $t_i < t_{i+1}$ oricare ar fi $i \in \{h, h+1, \ldots, j\}$ şi $i \neq -1$.

Revenind la problema demonstrării faptului că mulţimile T_i verifică proprietatea (b), să observăm că, din definiţia mulţimilor T_i, rezultă imediat că

$$\bigcup_{i=h}^{j} T_i \subseteq T \tag{23}$$

Rămîne să arătăm că are loc incluziunea inversă. Fie $t \in T$. Deoarece $\inf T = \inf T_h$ şi $\sup T = \sup T_j$, va exista un $i \in \{h, h+1, \ldots, j\}$ astfel încît $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$.

Avem trei posibilităţi:

(a) $i \in \{h, h+1, \ldots, -1\}$ şi atunci $t \in T_i$;

(b) $i \in \{2, 3, \ldots, j+1\}$ şi atunci $t \in T_{i-1}$;

(c) $i \in \{0, 1\}$ şi atunci $t \in T_0$.

În toate cele trei cazuri a existat o mulţime T_i cu $i \in \{h, h+1, \ldots, j\}$ astfel încît $t \in T_i$. Deci

$$T \subseteq \bigcup_{i=h}^{j} T_i \tag{24}$$

Din relaţiile (23) şi (24) rezultă

$$T = \bigcup_{i=h}^{j} T_i$$

Mai trebuie să arătăm că mulţimile T_i verifică şi proprietatea (c). Fie $r, s \in \{h, h+1, \ldots, j\}$ şi $r \neq s$. Pentru fixarea ideilor putem presupune că $s < r$. Din modul de construire al mulţimilor T_i rezultă că există cel mult un punct $t \in T_s \cap T_r$ (şirul $(t_i)_{i=h}^{-1}$ şi şirul $(t_k)_{k=1}^{j}$ sînt şiruri strict crescătoare şi $t_{-1} \leqslant t_0 < t_1$).

Să presupunem prin absurd că există $t_1, t_2 \in T_s$ cu $t_1 \neq t_2$ astfel încît $t_1, t_2 \in M(x^r)$. Conform lemei 5 avem $M(x^r) = T_r$, deci t_1, t_2 aparţin mulţimii T_r. Dar atunci rezultă că $t_1, t_2 \in T_r \cap T_s$, ceea ce contrazice faptul că intersecţia mulţimilor T_s şi T_r conţine cel mult un element. Deci există cel mult un $t \in T_s$ astfel încît $t \in M(x^r)$. În mod analog se poate arăta că există cel mult un $t \in T_r$ astfel încît $t \in M(x^s)$. Rezultă că mulţimile T_i verifică proprietăţile (a), (b), (c).

Observaţie. Dacă T este un interval atunci mulţimile T_i sînt nevide. Dacă T nu este un interval, pentru ca mulţimile T_i să nu fie vide, pasul 8 se înlocuieşte cu pasul 8'.

Pasul 8'. Dacă inf $T = \inf T_h$, atunci se ia $i = h$, $s = 0$ şi se trece la pasul 9. Dacă inf $T < \inf T_h$, atunci se micşorează h cu o unitate şi se trece la pasul 6.

Pasul 9. Dacă $T_i \neq \emptyset$, atunci se măreşte s cu o unitate, se ia $U_s = T_i$ şi se trece la pasul 10. Dacă $T_i = \emptyset$ atunci se trece direct la pasul 10.

Pasul 10. Dacă $i = j$, atunci algoritmul se opreşte. Mulţimile U_k, $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ sînt nevide şi verifică proprietăţile (a), (b), (c). Dacă $i < j$, atunci se măreşte i cu o unitate şi se trece la pasul 9.

4. *Exemplu*. Să se determine maximul funcţiei

$$f(x_1, x_2) = (2 + 3t)x_1 + (1 - t)x_2$$

pe acele puncte din R^2 care verifică condiţiile

$$x_1 + x_2 \leqslant 2$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

$$x_1, x_2 \text{ întregi,}$$

cînd parametrul t variază în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Pentru rezolvarea problemei vom aplica algoritmul descris anterior.

Pasul 0. Luăm $t_0 = 0$ şi $j = 0$. Trecem la pasul 1.

Pasul 1. Rezolvînd problema $P(t = 0)$ observăm că ea admite ca soluţie optimală pe $x^0 = (2,0)$. Trecem la pasul 2.

Pasul 2. Deoarece $\Omega^+(x^0) = \emptyset$, luăm $T_0 = [0, +\infty)$ şi $t_1 = +\infty$. Trecem la pasul 4.

Pasul 4. Deoarece sup $T = \sup T_0$ trecem la pasul 5.

Pasul 5. Deoarece inf $T < T_0$, luăm $h = 0$ şi trecem la pasul 6.

Pasul 6. Rezolvînd problema (P^-, x^0), observăm că (0, 2) este o soluţie optimală a sa. Luăm $t_{-1} = g(x^{-1}, x^0) = -\frac{1}{4}$ şi trecem la pasul 7.

Pasul 7. Deoarece $h = 0$, luăm $T_0 = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ şi trecem la pasul 8.

Pasul 8. Deoarece inf $T < \inf T_0$, lui h îi atribuim valoarea -1 şi trecem la pasul 6.

Pasul 6. Încercînd să rezolvăm problema (P^-, x^{-1}) observăm că $\Omega^-(x^{-1}) = \emptyset$ deci luăm $T_{-1} = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ şi trecem la pasul 8.

Pasul 8. Deoarece inf $T = \inf T_{-1}$ ne oprim. Am obţinut o descompunere a mulţimii $T = (-\infty, +\infty)$ în două submulţimi $T_0 = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ şi $T_{-1} = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$, cu proprietatea că $x^0 = (2,0)$ este o soluţie optimală a problemei $P(t = \bar{t})$ oricare ar fi $\bar{t} \in T_0$ şi $x^{-1} = (0,2)$ este o soluţie optimală a problemei $P(t = \bar{t})$ oricare ar fi $\bar{t} \in T_{-1}$. Maximul funcţiei f este egal cu $4 + 6t$ pentru $t \leqslant -\frac{1}{4}$ şi egal cu $2 - 2t$ pentru $t \leqslant -\frac{1}{4}$.

(Intrat în redacţie la 2 noiembrie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Drăgan, I., *Tehnici de bază în programarea liniară*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1976.
2. Granot, D., Granot, F., *On integer and mixed integer fractional programming problems*, Workshop on integer programming, Bonn, September 8–12, 1975.
3. Korbut, A. A., Finkel'stejn, J. J., *Diskretnoe programmirovanie*, Izdatel'stvo Nauka, Moskva 1969.
4. Kovalev, M. M., *Diskretnaja optimizacija (celocislenoe programmirovanie)*, Izdatel'stvo B G U im. V. I. Lenina, Minsk, 1977.
5. Maruşciac, I., *Programare matematică*, Litografia Universităţii, Cluj-Napoca, 1975.
6. Roy, B., Tuan Phong Nghiem, Bertier, R., *Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P.*, Metra, IV, 1965, 441–460.
7. Tuan, P. N., *A flexible tree-search method for integer programming problems*, Operation Res., 19, 1971, 115–119.

SUR QUELQUES PROBLEMES DE PROGRAMMATION PARAMETRIQUE EN NOMBRES ENTIERS

(Résumé)

Dans ce travail ont été étudiés des problèmes de programmation linéaire paramétrique en nombres entiers dans lesquels :

– la fonction à optimiser est linéaire par rapport à un paramètre t, c'est-à-dire elle est une fonction $f\colon R^n \times R \to R$ définie par $f(x, t) = (c + td)^T x$ pour tout $(x, t) \in R^n \times R$, où c, d sont deux éléments donnés de Z^n (par Z on désigne l'ensemble de nombres entiers),

– on demande la détermination du maximum de la fonction f pour les valeurs de $x \in R^n$ qui vérifient le système

$$\begin{cases} Ax \leqslant a \\ x \geqslant 0 \\ x \in Z^n \end{cases}$$

quand le paramètre t varie dans un ensemble non-vide $T \subseteq R$. A est une matrice de nombres entiers de type (m, n) et a est un élément donné de l'espace Z^n.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

QUELQUES REMARQUES SUR LES EQUATIONS INTEGRALES DE TYPE VOLTERRA D'ARGUMENT MODIFIE

DELIA RĂDULESCU

0. A. Bielecki a remarqué [3] que pour aborder le théorème de point fixe de Banach afin d'obtenir un théorème d'existence et unicité pour une équation intégrale de type Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x), \qquad x \in [a, b] \tag{1}$$

il est utile de choisir une norme convenable en $C[a, b]$.

Plus tard le même problème a été posé en ce qui concerne les équations intégrales de type Volterra d'argument modifié (voir [1], [2]. [4], [5], [6], [7]) de type

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(g(y)))dy + f(x), \qquad x \in [a, b] \tag{2}$$

Nous nous proposons dans cette note d'indiquer une norme en fonction de la modification g de l'argument.

1. Considérons l'équation (2) dans laquelle $\lambda \in \mathbf{R}$, $f \in C[a, b]$, $K \in C([a, b]^2 \times \mathbf{R})$ et K vérifie la condition suivante de Lipschitz:

$$|K(x, y, u) - K(x, y, v)| \leqslant L|u - v|, \quad \forall\, x, y \in [a, b], \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

Nous supposons que $g \in ([a, b], [a - h, b])$, $h > 0$.

Etant donnée la fonction $\psi \in C[a - h, a]$ de sorte que $\psi(a) = f(a)$, il faut déterminer les solutions $\varphi \in C[a - h, b]$ de l'équation (2), ainsi que

$$\varphi|_{[a-h,a]} = \psi. \tag{3}$$

2. Etablir un théorème d'existence et unicité pour le problème (2) + + (3) signifie établir un théorème d'existence et unicité du point fixe de l'opérateur

$$A : C[a - h, b] \to C[a - h, b], \ \varphi \mapsto A\varphi,$$

où

$$A\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, \varphi(g(s)))ds + f(x), \qquad \varphi \in C[a - h, b].$$

Nous allons considérer désormais les espaces Banach $(C[a, b], \|\cdot\|)$ et $(C[a, b], \|\cdot\|_F)$ où

$$\|\varphi\| = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$$

$$\|\varphi\|_F = \max_{x \in [a,b]} (|\varphi(x)| F(x, z))$$

$F : [a, b] \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ étant une fonction continue qui satisfait la condition :

$$\lim_{\tau \to \infty} F(x, \tau) = 0.$$

On démontre facilement que ces deux normes sont équivalentes.

THÉORÈME. *S'il existe une fonction* F, *définie comme ci-dessus, ainsi que*

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{F(x, \tau)}{F(g(s), \tau)} = 0, \qquad \forall s \in [a, b] \tag{4}$$

alors l'opérateur A *a un point fixe unique.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'opérateur A est une contraction. Il résulte en base du théorème de point fixe de Banach que l'opérateur A a un point fixe unique. Nous avons

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \leqslant L|\lambda| \int_a^x |\varphi(g(s)) - \psi(g(s))| ds =$$

$$= L|\lambda| \int_a^x |\varphi(g(s) - \psi(g(s))| \frac{F(g(s), \tau)}{F(g(s), \tau)} ds \leqslant L|\lambda| \cdot \|\varphi - \psi\|_F \int_a^x \frac{1}{F(g(s), \tau)} ds,$$

d'où

$$\|A\varphi - A\psi\|_F \leqslant L|\lambda| \cdot \|\varphi - \psi\|_F \int_a^x \frac{F(x, \tau).}{F(g(s), \tau)} ds.$$

Il résulte de la condition (4) que pour τ suffisamment grand,

$$\int_a^x \frac{F(x, \tau)}{F(g(a), \tau)} ds < 1,$$

donc l'opérateur A est une contraction. En tenant compte de l'observation antérieure, le problème (2) + (3) a une solution unique en $C[a, b]$.

Remarques

1. Si $g(x) = x$, en choisissant

$$F(x, \tau) = e^{-\tau(x-a)}$$

on obtient la norme de Bielecki.

2. Si $g(s) \leqslant x$, $\forall s \in [a, b]$, on peut choisir

$$F(x, \tau) = \frac{h(x)}{e^{\tau(x-a)}}$$

où $h : [a, b] \to (0, +\infty)$.

3. En utilisant cette généralisation de la métrique de Bielecki, on peut donner une démonstration neuve du théorème démontré par B. Rzepecki dans l'article [7].

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1978)

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Alicu, *Problema lui Cauchy relativă la o clasă de ecuații diferențiale cu argument modificat* (manuscris nepublicat).
2. S. Bernfeld, V. Lakshmikantham, *An introduction to nonlinear boundary value problems*, Acad. Press, New York, 1974.
3. A. Bielecki, *Une remarque sur la méthode de Banach — Coniopelli, Tiochnov dans la théorie des équations différentielles ordinaire*, Bull. Acad. Pol. Sc., 4, 1956, 261—264.
4. J. M. Bownds, J. M. Cushing, R. Schutte, *Existence, uniqueness, and extendibility of solutions of Volterra integral systems with multiple, variable lags*, Funkcialaj Ekv., 19, 1976, 101—111.
5. Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus, I. A. Rus, *Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
6. I. A. Rus, *Principii și aplicații ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
7. B. Rzepecki, *On some classes of Differential Equations*, Publ. de l'Instit. Math., tome 25 (39), 1979, Beograd, 157—165.

UNELE OBSERVAȚII ASUPRA ECUAȚIILOR INTEGRALE DE TIP VOLTERRA CU ARGUMENT MODIFICAT

(Rezumat)

În prezența notă se dă o teoremă de existență și unicitate a soluției $\varphi \in C[a-h, b]$ a problemei

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(g(y)))dy + f(x), \qquad x \in [a, b] \qquad \varphi|_{[a-h, a]} = \psi$$

unde

$$f \in C[a, b], \qquad K \in C([a, b]^2 \times R)$$

şi

$$|K(x, y, u) - K(x, y, v)| \leqslant L\,|u - v|$$

$$\forall x, y \in [a, b], \quad u, v \in \mathbf{R}, \ \psi \in C[a - h, a], \quad h > 0 \quad \text{cu} \quad \psi(a) = f(a)$$

Pentru demonstraţie se foloseşte o metrică care este o generalizare a metricii lui Bielecki şi se observă că această metrică permite noi demonstraţii a unor rezoltate cunoscute.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS NONLINÉAIRES

DAMIAN TRIF

Le travail contient une caractérisation des images des applications nonlinéaires à l'aide des applications duales convenablement définies. On en retrouve plusieurs résultats sur l'existence des solutions des équations nonlinéaires.

Soient les espaces de Banach X et Y et l'application $A : X \to Y$. On note $R(A)$ l'image de A. Pour $x \in X$, soit $K[R(A), Ax]$ l'ensemble des $y \in Y$ tels que $y = \lim\limits_{n\to\infty} r_n(y_n - Ax)$, où $y_n \in R(A)$, $y_n \to Ax$ et $r_n > 0$, $r_n \to \infty$.

Soit $\mathfrak{D}(A^*)$ l'ensemble des fonctionnelles y^* réelles et continues sur Y, telles que:

a) si $y^*(z) = 0$ pour tout $z \in R(A)$, $y \in Y$ et Ax est l'élément de la meilleure approximation de y relative à $R(A)$, alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$ on a $y^*[Ax + \alpha(y - Ax)] = \alpha y^*(y)$

b) si $y^*(z) = 0$ pour tout $z \in R(A)$, $x \in X$ et $y \in K[R(A), Ax]$, alors il existe une suite $\alpha_n \in R$, $\alpha_n \to 0$, telle que $y^*(Ax + \alpha_n y)/\alpha_n \to 0$.

Evidemment, toute fonctionnelle linéaire et continue sur Y appartient à $\mathfrak{D}(A^*)$. De plus, toute fonctionnelle convexe sur Y, continue, nonnégative et vérifiant la condition a) appartient à $\mathfrak{D}(A^*)$.

En effet, si $y^*(z) = 0$ pour tout $z \in R(A)$, $x \in X$ et $y \in K[R(A), Ax]$ on a $y = \lim\limits_{n\to\infty} r_n(y_n - Ax)$. Soit $\alpha_n = 1/r_n \to 0$. On a

$$Ax + \alpha_n y = \alpha_n[(Ax + \alpha_n y) - (1 - \alpha_n)y_n]/\alpha_n + (1 - \alpha_n)y_n$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{y(Ax + \alpha_n y)}{\alpha_n} \leqslant y^*\left[\frac{(Ax + \alpha_n y) - (1 - \alpha_n)y_n}{\alpha_n}\right] + \frac{1 - \alpha_n}{\alpha_n} y^*(y_n) =$$

$$= y^*\left[y_n + y - \frac{y_n - Ax}{\alpha_n}\right] \to y^*(Ax) = 0.$$

DÉFINITION 1. *L'application duale de A* est l'application A^* de $\mathfrak{D}(A^*)$ dans l'ensemble des fonctionnelles réelles sur X, définie par $(A^*y^*)(x) = y^*(Ax)$, pour tous $y^* \in \mathfrak{D}(A^*)$ et $x \in X$.

On note $\operatorname{Ker} A^* = \{y^* \in \mathfrak{D}(A^*) \mid A^*y^* = 0\}$ et $^{\perp}\operatorname{Ker} A^* = \{y \in Y \mid y^*(y) = 0 \text{ pour tout } y^* \in \operatorname{Ker} A^*\}$.

THÉORÈME 1. *Soient les espaces de Banach X et Y et l'application $A : X \to Y$. On a $R(A) = {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$ si et seulement si $R(A)$ est fermé.*

Démonstration. Evidemment, $^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$ est fermé et $R(A) \subset {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$. Si $R(A)$ est fermé, on suppose qu'il existe $y_0 \in {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$, $y_0 \notin R(A)$. Soit $y_0^*(y) =$

$= \inf_{x \in X} ||y - Ax||$ pour tout $y \in Y$. On montre facilement que y^* est continue sur Y. De plus, $y_0^* \in \mathfrak{D}(A^*)$:

a) on a $y_0(z) = 0$ pour tout $z \in R(A)$. Soient $y \in Y$, Ax_0 l'élément de la meilleure approximation de y dans $R(A)$ et $\alpha \in [0, 1]$. On a

$$y_0^*[Ax_0 + \alpha(y - Ax_0)] = \inf_{x \in X} ||Ax_0 + \alpha y - \alpha A x_0 - Ax|| \leqslant \alpha ||y - Ax_0|| =$$

$$= \alpha y_0^*(y)$$

et

$$||Ax_0 + \alpha(y - Ax_0) - Ax|| = ||y - Ax - y + \alpha y + Ax_0 - \alpha A x_0|| \geqslant$$

$$\geqslant ||y - Ax|| - (1 - \alpha)||y - Ax_0|| \geqslant y_0^*(y) - y_0^*(y) + \alpha y_0^*(y), \text{ pour tout } x \in X,$$

donc $y_0^*[Ax_0 + \alpha(y - Ax_0)] \geqslant \alpha y_0^*(y)$.

b) Soient $x_0 \in X$, $\alpha \in [0, 1]$ et $y \in K[R(A), Ax_0]$, donc $y = \lim_{n \to \infty} r_n(y - Ax_0)$. On a

$$y_0^*(Ax_0 + \alpha y) = \inf_{x \in X} ||Ax_0 + \alpha y - Ax|| \leqslant ||Ax_0 + \alpha y - y_n||.$$

Pour $\alpha_n = 1/r_n$, on a

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{y_0^*(Ax_0 + \alpha_n y)}{\alpha_n} \leqslant \lim_{n \to \infty} ||y - r_n(y_n - Ax_0)|| = 0.$$

On a $A^* y_0^*(x) = y_0^*(Ax) = 0$, donc $y_0^* \in \operatorname{Ker} A^*$. Mais $y_0^*(y_0) > 0$, contradiction.

Observation 1. Si $R(A)$ est linéaire, on peut utiliser une conséquence du théorème de Hahn-Banach pour démontrer l'existence de $y_0^* \in Y^*$ telle que $y_0^* | R(A) = 0$ et $y_0^*(y_0) \neq 0$. Dans ce cas, on peut prendre $\mathfrak{D}(A^*) = Y^*$.

Observation 2. Si $R(A)$ est convexe, alors y_0 est convexe et nonnégative. Dans ce cas, on peut prendre $\mathfrak{D}(A^*)$ l'ensemble des fonctionnelles convexes, continues, nonnégatives, vérifiant la condition a).

À l'aide du théorème 1, nous allons retrouver quelques résultats sur l'existence des solutions des equations nonlinéaires.

1) Soient X et Y des espaces de Banach, Y réflexif, et $A : X \to Y$, $A \in C^1$. On suppose que $R(A)$ est faiblement fermé. Soit $y \in Y$ et Ax_0 l'élément de la meilleure approximation de y relatif à $R(A)$. Si $y - Ax_0 \in {}^{\perp}[\operatorname{Ker} A'(x_0)^*]$, alors $y \in R(A)$.

Démonstration. Evidemment, ${}^{\perp}[\operatorname{Ker} A'(x_0)^*] = \overline{R[A'(x_0)]} \subset K[R(A), Ax_0]$, donc $y - Ax_0 \in K[R(A), Ax_0]$. Soit $y^* \in \operatorname{Ker} A^*$. Suivant les conditions a) et b) on a

$$y^*(y) = \frac{1}{\alpha_n} y^*[Ax_0 + \alpha_n(y - Ax_0)] \to 0 \quad \text{pour } \alpha_n \to 0$$

donc $y \in {}^{\perp}[\operatorname{Ker} A^*] = R(A)$.

Nous avons retrouvé un résultat de Pohojaev [1]. De la même manière on peut retrouver les résultats de Zabreiko-Krasnoselski [2] et Katchiourovski [3] (Théorème 2).

2) Soit X un espace de Banach, $A : X \to X$ complètement continue et $A \in C^1$. On suppose

a) pour tout $u \in X$, $R(I - A'(u)) = X$

b) $\lim\limits_{||x|| \to \infty} ||x - Ax|| = \infty$.

Alors, pour tout $y \in X$, il existe la solution $x \in X$ de l'équation $x = Ax + y$.

Démonstration. a) $R(I - A)$ est fermé : Soit $x_n - Ax_n \to y$. Si $||x_n|| \to \infty$ alors $||x_n - Ax_n|| \to \infty$, contradiction. Donc x_n est bornée d'où $Ax_n \to z$ pour une sous-suite. Alors $x_n \to y + z$ et $y = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - Ax_n) = y + z - A(y + z) \in$ $\in R(I - A)$.

b) $\perp[\mathrm{Ker}(I - A)^*] = X$: Soit $y \in X$. Suivant un résultat de Zabreiko-Krasnoselski [2], il existe une norme equivalente telle qu'il existe l'élément de la meilleure approximation de y dans $R(I - A)$. Soit $(I - A)x_0$ cet élément. Mais $R(I - A'(x_0)) = X$, d'où $K[R(I - A), (I - A)x_0] = X$. Alors, pour tout $y^* \in \mathrm{Ker}\,(I - A)^*$,

$$y^*(y) = \frac{1}{\alpha} y^*[(I - A)x_0 + \alpha[y - (I - A)x_0]] \to 0 \text{ pour } \alpha \to 0,$$

donc $y \in \perp[\mathrm{Ker}(I - A)^*]$. En conclusion, $R(I - A) = X$.

Nous avons retrouvé un résultat de Katchiourovski [3] (Théorème 1).

3) Soit X un espace de Banach reflexif et $A : X \to X^*$ monotone, hémicontinue et coercitif. Alors A est surjectif.

Démonstration. a) $R(A)$ est fermé : si $Ax_n \to y$ et $||x_n|| \to \infty$ alors $x_n/||x_n|| \to u$ pour une sous-suite, donc $(Ax_n, x_n)/||x_n|| \to (y, u) = +\infty$, contradiction. Il en résulte que, pour une sous-suite, $x_n \to z$ d'où $y = Az$.

b) $R(A)$ est fermé et convexe ([4]).

c) Soit $f \in \mathrm{Ker}\,A^*$, convexe, continue, nonnégative. Alors, pour $x^* \in X^*$, on a

$$f(x^*) = \sup\{(x^*, x) + t \mid x \in X,\ t \in R : (y^*, x) + t \leqslant f(y^*) \text{ pour tout } y^* \in X^*\}.$$

En effet, si $x \in X$ et $t \in R$ tels que $(y^*, x) + t \leqslant f(y^*)$ pour tout $y^* \in X^*$, alors pour $y^* = x^*$ on a $f(x^*) \geqslant (x^*, x) + t$. On connait que pour tout $x^* \in X^*$, il existe $x_0 \in X^{**} \simeq X$ (le sous-gradient de f dans X^*) tel que pour tout $y^* \in X^*$, $f(y^*) - f(x^*) \geqslant (y^* - x^*, x_0)$. Soit $t_0 = f(x^*) - (x^*, x_0)$. On a

$$(y^*, x_0) + t_0 = (y^*, x_0) + f(x^*) - (x^*, x_0) = (y^* - x^*, x_0) + f(x^*) \leqslant f(y^*)$$

pour tout $y^* \in X^*$ et $f(x^*) = (x^*, x_0) + t_0$.

Soient $x \in X$, $t \in R$ tels que $(y^*, x) + t \leqslant f(y^*)$ pour tout $y^* \in X^*$. Si $x \neq 0$ on a

$$(A(sx), sx)/||sx|| = 1/||x|| \cdot (A(sx), x) \to \infty \text{ pour } s \to \infty.$$

Mais pour $y^* = A(sx)$ on a $(A(sx), x) + t \leqslant f(A(sx)) = 0$, contradiction. Donc $x = 0$ et $t \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant f(x^*) \leqslant 0$ pour tout $x^* \in X^*$. En conclusion, $R(A) = {}^{\perp}\mathrm{Ker}\, A^* = {}^{\perp}\{0\} = X^*$ et on retrouve le résultat fondamental de Browder sur la surjectivité des opérateurs monotones.

4. Soit X un espace de Banach réflexif, $A : X \to X^*$ un opérateur monotone, hémicontinue, k-homogène, impare, tel que la contre-image de toute suite convergente soit bornée. Soit $M = \{x \in X \mid (Ax, x) = 0\}$. Alors ${}^{\perp}M \subset R(A)$.

Démonstration. a) $R(A)$ est fermé: si $Ax_n \to f$ alors x_n est bornée, donc pour une sous-suite on a $x_n \to x_0$. Mais A est monotone et hémicontinue, donc $f = Ax_0$.

b) Soit $x^* \in {}^{\perp}M$ et $f \in \mathrm{Ker}\, A^*$, f convexe, continue, nonnégative. On a $f(x^*) = \sup\{(x^*, x) + t \mid x \in X,\ t \in R;\ (y^*, x) + t \leqslant f(y^*),$ pour tout $y^* \in X^*\}$ Pour $y^* = Az$ il résulte $(Az, x) + t \leqslant 0$. Pour $s > 0$ on a $(A(sx), x) + t \leqslant 0$ donc $s^k(Ax, x) + t \leqslant 0$. Si $x \notin M$, alors $(Ax, x) > 0$ et pour $s \to \infty$ on obtient une contradiction, ou $(Ax, x) < 0$ et alors $(A(-x), x) > 0$, obtenant une contradiction. En conclusion, $x \in M$. Donc

$0 \leqslant f(x^*) = \sup\{t \mid t \in R,\ x \in X;\ (y^*, x) + t \leqslant f(y^*)$ pour tout $y^* \in X^*\} \leqslant 0$ parce que $(x^*, x) + t = t \leqslant 0$. Il en résulte $f(x^*) = 0$, d'où $x^* \in {}^{\perp}\mathrm{Ker}\, A^* = R(A)$.

Observation. On démontre facilement que $M = \{0\}$ si $(Ax, x) > 0$ pour $\|x\| > R$. Dans ce cas, $R(A) = {}^{\perp}M = M^*$.

5. Soit X un espace de Banach réflexif, $L : X^* \to X$ un opérateur linéaire, monotone, bijectif, tel que $(u, Lu) \geqslant d\|Lu\|^2$ pour tout $u \in X^*$. Soit $S : X \to X^*$ monotone, hémicontinue. On suppose qu'il existe $\varphi : R_+ \to R_+$ nondécroissante telle que $\|u\| \leqslant \varphi(\|(I + LS)u\|)$. Alors, $R(I + LS) = X$.

Démonstration. Soit $A = L^{-1} + S$.

a) $R(A)$ est fermé: si $Au_n \to f$, alors $u_n + LSu \to Lf$. Si $\|u_n\| \to \infty$ alors $\|(I + LS)u_n\| \to \infty$, contradiction. Donc pour une sous-suite, $u_n \to u_0$. Mais A est maximale monotone, donc $f = Au_0$.

b) Soit $x^* \in X^*$ et $f \in \mathrm{Ker}\, A^*$, convexe, continue, nonnégative. On a $f(x^*) = \sup\{x^*, x) + t \mid x \in X,\ t \in R : (y^*, x) + t \leqslant f(y^*)$ pour tout $y^* \in X^*\}$. Pour tout $z \in X$ on a $(L^{-1}z + Sz, x) + t \leqslant 0$. Soit $z = sx$ où $s > 0$. On a $0 \geqslant 1/s \cdot (L^{-1}(sx) + S(sx), sx) + t \geqslant 1/s \cdot (L^{-1}(sx), sx) + 1/s \cdot (S(0), sx) + t \geqslant \geqslant 1/s \cdot d\|sx\|^2 + (S(0), x) + t = sd\|x\|^2 + (S(0), x) + t$. Si $x \neq 0$, pour $s \to \infty$ on obtient une contradiction, donc $x = 0$. Alors $f = 0$ et $R(A) = X^*$. Mais $R(LA) = L(R(A)) = L(X^*) = X$.

(Manuscrit reçu le 17 novembre 1978)

BIBLIOGRAPHIE

1. Pohožaev, S. I., *O nelineinyh operatorah, imejuščih slabo zamknutuju oblast' značenii, i kvazilineinyh ellipticeskih uravnenijah*, Matem. Sb., **78** (120), 2, 1969, 237–259.
2. Zabreiko, P. P., Krasnosel'skii, M. A., *O razrešimosti nelineinyh operatornyh uravnenii*, Funkt. Anal., 5, 3, 1971, 42–44.

3. Kačjurovski, R. I., *Obobščenie teorem fredgol'myh i teorem o linečnyh operatorah s zamknutoĭ oblast' značenii na nekotorye klassy nelinečnyh operatorov*, D.A.N. **197**, 3, 1971, 520–523.
4. Rockafellar, R. T., *On the virtual convexity of the domain and range of a non-linear maximal monotone operators*, Math. Anal., **185**, 1970, 81–90.

ASUPRA EXISTENȚEI SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR NELINIARE

(Rezumat)

Lucrarea conține o caracterizare a imaginii aplicațiilor neliniare cu ajutorul aplicațiilor duale convenabil definite, generalizînd cazul liniar $R(A) = {}^{\perp}\mathrm{Ker}\, A^*$. În continuare se regăsesc cu ajutorul acestei proprietăți mai multe rezultate asupra existenței soluțiilor ecuațiilor neliniare (Pohojaev [1] Zabreiko – Krasnoselski [2], Kaciurovski [3], Browder).

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

ON A METHOD OF THIRD ORDER

M. BALÁZS

Let X be a real linear Banach space and $P: X \to X$ a continuous mapping. We shall note respectively by $[x', x''; P]$ and $[x', x'', x'''; P]$ the symmetrical divided difference of first and second order of the mapping P for the points $x', x'', x'' \in X$. Let's consider the equation

$$P(x) = x - \Phi(x) = \theta \tag{1}$$

If (x_n) is a sequence of the space X, then (u_n) will denote the sequence defined by $u_n = \Phi(x_n)$ and Γ_n will note the inverse of the linear mapping $[x_n, u_n; P]$, if it exists. The following theorem gives sufficient conditions of the existence and the approximation for the roots of equation (1):

THEOREM. *We suppose that there exists a point $x_0 \in X$ and the constants B_0, d_0, K and M so that the following conditions are satisfied:*

1° *for $x_0 \in X$ and $u_0 = \Phi(x_0) \in X$ there exists the inverse of the divided difference $[x_0, u_0; P]$ and*

$$||\Gamma_0|| = ||[x_0, u_0; P]^{-1}|| \leqslant B_0;$$

2° $||\Gamma_0|| \cdot ||P(x_0)|| = ||\Gamma_0|| \cdot ||x_0 - \Phi(x_0)|| = ||\Gamma_0|| \cdot ||x_0 - u_0|| \leqslant \leqslant B_0||x_0 - u_0|| \leqslant d_0$;

3° $\sup\{||[x', x''; \Phi]||: x', x'' \in \bar{S}\} \leqslant M$ and

$$\sup\{||[x', x'', x'''; P]||: x', x'', x''' \in \bar{S}\} \leqslant K;$$

4° $B_0(||P(x_0)|| + ||P(y_0)||) \leqslant \eta_0 = d_0(1 + B_0KMd_0)$, where $y_0 = x_0 - \Gamma_0 P(x_0)$;

5° $h_0 = B_0K(1 + M)\eta_0 < \frac{4}{9}$,

where $\bar{S} = \{x \in X: ||x - x_0|| \leqslant r\}$, $r = \eta_0\left(2 + \frac{1}{B^0}\right)$.

In these conditions the equality

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n[P(x_n) + P(x_n - \Gamma_n P(x_n))], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

defines by recurence the sequence (x_n) which has the following qualities:

(j) $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x^* \in \bar{S}$ *exists and x^* is the solution of equation* (1);

(jj) *The rate of convergence is given by*

$$||x_n - x^*|| \leqslant \frac{9}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^n\left(\frac{51}{25}h_0\right)^{3^n-1}\eta_0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Proof. a) Let's construct the mapping $F: X \to X$, $F(x) = x - \Gamma_0 P(x)$. We have $F(x_0) = F(u_0) = y_0$ because $F(x_0) - F(u_0) = x_0 - u_0 - \Gamma_0[P(x_0) - P(u_0)] = x_0 - u_0 - \Gamma_0[x_0, u_0; P](x_0 - u_0) = \theta$. From the qualities of the divided differences [1, 2, 4] result the followings:

$$[x', x''; F] = I - \Gamma_0[x', x''; P] \text{ and } [x', x'', x'''; F] = -\Gamma_0[x', x'', x'''; P]$$

therefore

$$[x_0, u_0; F] = I - \Gamma_0[x_0, u_0; P] = \theta \text{ and } [x_0, u_0, y_0; F] = -\Gamma_0[x_0, u_0, y_0; P],$$

where I is the identity operator of X. According to the definition of the divided differences [1, 2, 4] the equalities $F(x_0) = F(u_0)$, $[x_0, u_0; F] = \theta$ and $y_0 = x_0 - \Gamma_0 P(x_0)$ lead us to the followings:

$$\begin{aligned}[x_0, u_0, y_0; F](y_0 - x_0)(y_0 - u_0) &= \{[u_0, y_0; F] - [x_0, u_0; F]\}(y_0 - u_0) = \\ &= [u_0, y_0; F](y_0 - u_0) = F(y_0) - F(u_0) = F(y_0) - F(x_0) = \\ &= y_0 - \Gamma_0 P(y_0) - x_0 + \Gamma_0 P(x_0) = -\Gamma_0 P(y_0).\end{aligned}$$

We have thus $P(y_0) = [x_0, u_0, y_0; P](y_0 - x_0)(y_0 - u_0)$, which by

$$\begin{aligned}||y_0 - x_0|| = ||\Gamma_0 P(x_0)|| \leqslant d_0 \leqslant \eta_0 < r,\ ||u_0 - x_0|| &= ||\Phi(x_0) - x_0|| = \\ = ||P(x_0)|| \leqslant \frac{d_0}{B_0} \leqslant \frac{\eta_0}{B_0} < r\end{aligned} \tag{3}$$

(see 2° and 4°), that means $y_0, u_0 \in \bar{S}$ and the condition 3° leads to

$$||P(y_0)|| \leqslant K||y_0 - x_0|| \cdot ||y_0 - u_0|| \tag{4}$$

Further we have

$$y_0 - u_0 = \Gamma_0 P(u_0) = \Gamma_0(u_0 - \Phi(u_0)) = \Gamma_0(\Phi(x_0) - \Phi(u_0)) =$$

$= \Gamma_0[x_0, u_0; \Phi](x_0 - u_0)$, from which, using (3) we obtain

$$||y_0 - u_0|| \leqslant B_0 M||x_0 - u_0|| \leqslant M d_0 \tag{5}$$

From (4) by (3) and (5) we get

$$||P(y_0)|| \leqslant d_0^2 KM \tag{6}$$

b) From 1° it results that on the basis of the equality (2) the term x_1 of the sequence (x_n) can be constructed, thus $u_1 = \Phi(x_1)$ too. We check the conditions 1°—5° for the point x_1 with analogous constants B_1, d_1, K and M.

Using (2) by 1°, 2° and (6) it results:

$$\begin{aligned}||x_1 - x_0|| \leqslant ||\Gamma_0 P(x_0)|| + ||\Gamma_0 P(y_0)|| &\leqslant (d_0 + B_0 KM d_0^2) = \\ &= d_0(1 + B_0 KM d_0) = \eta_0 < r\end{aligned} \tag{7}$$

which means that $x_1 \in \bar{S}$.

From the constructing mode of u_1 and taking in consideration that $x_1 \in \bar{S}$ we obtain

$$||u_1 - u_0|| = ||\Phi(x_1) - \Phi(x_0)|| = ||[x_1, x_0; \Phi](x_1 - x_0)|| \leqslant \leqslant M||x_1 - x_0|| \leqslant M\eta_0 \tag{8}$$

According to the definition of the divided differences we have

$$P(x_1) - P(y_0) = [x_0, y_0; P](x_1 - y_0) = [x_1, x_0, y_0; P](x_1 - x_0)(x_1 - y_0).$$

From (2) for $n = 0$ we obtain

$$x_1 = x_0 - \Gamma_0 P(y_0) \quad \text{and} \quad x_1 - x_0 = -\Gamma_0(P(x_0) + P(y_0)),$$

therefore

$$P(x_1) = [x_1, x_0, y_0; P]\Gamma_0(P(x_0) + P(y_0))\Gamma_0 P(y_0).$$

which, using (6) and (7), leads us to

$$||P(x_1)|| \leqslant B_0 d_0^2 K^2 M\eta_0 \leqslant \frac{h_0^2}{B_0}\eta_0 < \frac{\eta_0}{B_0}. \tag{9}$$

Using the condition 3°, (7) and (8) and the fact that $u_1 \in \bar{S}$ we may write:

$$||\Gamma_0([x_0, u_0, P] - [x_1, u_1; P])|| \leqslant ||\Gamma_0([x_0, u_0; P] - [x_1, u_0; P])|| + + ||\Gamma_0([x_1, u_0; P] - [x_1, u_1; P])|| \leqslant B_0 K(||x_1 - x_0|| + + ||u_1 - u_0||) \leqslant B_0 K(\eta_0 + \eta_0 M) = B_0 K(M+1)\eta_0 = h_0 < 1. \tag{10}$$

Considering that

$$\Gamma_0[x_1, u_1; P] = I - \Gamma_0([x_0, u_0; P] - [x_1, u_1; P]),$$

from (10) it results that the linear mapping $\Gamma_0[x_1, u_1; P]$ has an inverse and that the following inequality is true:

$$||\{\Gamma_0[x_1, u_1; P]\}^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}.$$

Using the equality $\{\Gamma_0[x_1, u_1; P]\}^{-1}\Gamma_0 = [x_1, u_1; P]^{-1} = \Gamma_1$ we obtain

$$||\Gamma_1|| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1 \tag{11}$$

which means that 1° is satisfied for the points x_1 and u_1 with the constant B_1.

By (9) and (11) we have

$$||\Gamma_1|| \cdot ||P(x_1)|| \leqslant \frac{B_0^2 d_0^2 K^2 M\eta_0}{1 - h_0} \leqslant \frac{h_0^2}{1 - h_0}\eta_0 = d_1 \tag{12}$$

Thus for the point x_1 2° is also true with the constant d_1.

From the existence of the mapping $[x_1, u_1; P]^{-1}$ ((10) — (11)) it results that by (2) we can construct x_2. Let's note $x_1 - \Gamma_1 P(x_1) = y_1$. $y_1 \in \bar{S}$ because

$$||y_1 - x_0|| \leqslant ||y_1 - x_1|| + ||x_1 - x_0|| \leqslant ||\Gamma_1 P(x_1)|| +$$
$$+ \eta_0 \leqslant \frac{h_0^3}{1-h_0}\eta_0 + \eta_0 = \left(\frac{h_0^3}{1-h_0} + 1\right)\eta_0 \leqslant \frac{61}{45}\eta_0 < r.$$

Making the same reasoning we used for obtaining $P(y_0)$ we get

$$||P(y_1)|| = ||[x_1, u_1, y_1; P](y_1 - x_1)(y_1 - u_1)|| \leqslant d_1^2 KM,$$

therefore

$$||\Gamma_1|| \cdot ||P(y_1)|| \leqslant B_1 d_1^2 KM \tag{13}$$

From (12) and (13) it results

$$||x_2 - x_1|| \leqslant B_1(||P(x_1)|| + ||P(y_1)||) \leqslant d_1 + B_1 d_1^2 KM = d_1(1 + B_1 d_1 KM) = \eta_1,$$

which means that 4° is satisfied for the point x_1 with the constants B_1, d_1, K and M and the following relations stand:

$$\eta_1 = \frac{h_0^3}{1-h^0}\eta_0\left(1 + \frac{B_0 KM h_0^3}{(1-h_0)^2}\eta_0\right) = \frac{h_0^3}{1-h_0}\left(1 + \frac{h_0^2}{(1-h_0)^2}\right)\eta_0 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{17}{5}\right)^2 h_0^2\eta_0 \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{17}{5}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)^2\eta_0 \leqslant \eta_0$$

so

$$||x_2 - x_0|| \leqslant ||x_2 - x_1|| + ||x_1 - x_0|| \leqslant \eta_1 + \eta_0 \leqslant \left[1 + \frac{1}{5}\left(\frac{4 \cdot 17}{5 \cdot 9}\right)^2\right]\eta_0 < r.$$

We have

$$h_1 = B_1 K(M+1)\eta_1 = \frac{B_0}{1-h_0}K(M+1)d_1(1 + B_1 d_1 KM) \leqslant \frac{h_0^3}{1-h_0}\frac{1}{5}\left(\frac{17}{5}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{51}{25}\right)^2 h_0^3 = \left(\frac{68}{75}\right)^2 h_0 < h_0 < \frac{4}{9}\,. \tag{14}$$

In conclusion the conditions 1° — 5° are satisfied for the point x_1 with the constants B_1, d_1, K and M and the following relations stand:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{B_0}{1-h_0}\,; \\ d_1 &= \frac{h}{1-h_0}\eta_0\,; \\ \eta_1 &= d_1(1 + B_1 d_1 KM)\,; \\ h_1 &= B_1 K(M+1)\eta_1 \quad \text{and} \\ & x_1, u_1, y_1 \in \bar{S}. \end{aligned} \tag{15}$$

By mathematical induction we can prove that the relations (15) are true for any positive integer. Thus we have

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}; \\ d_n &= \frac{h_{n-1}^2}{1-h_{n-1}}\eta_{n-1}; \\ \eta_n &= d_n(1+B_nd_nKM); \\ h_n &= B_{n-1}K(M+1)\eta_{n-1} \quad \text{and} \\ & x_n, u_n, y_n \in \bar{S} \end{aligned} \tag{16}$$

for all positive integers. Moreover the following relations are also true:

$$\eta_n = \frac{1}{5}\left(\frac{17}{5}\right)^2 h_{n-1}^2\eta_{n-1} \quad \text{and} \quad h_{n-1} \leqslant \left(\frac{51}{25}\right)^2 h_{n-1}^3$$

for $n = 1, 2, \ldots$ From the former inequalities it results that

$$h_n \leqslant \frac{25}{51}\left(\frac{51}{25}h_0\right)^{3^n} \tag{17}$$

and

$$\eta_n \leqslant \left(\frac{5}{9}\right)^n\left(\frac{51}{25}h_0\right)^{3^n-1}\eta_0 \tag{18}$$

Further we shall prove that the sequence (x_n) constructed according to the equality (2) is a Cauchy sequence. Really, using (18) we can write

$$\begin{aligned} ||x_{n+p}-x_n|| &\leqslant ||x_{n+p}-x_{n+p-1}|| + \ldots + ||x_{n+1}-x_n|| \leqslant \eta_{n+p-1} + \ldots \\ \ldots + \eta_n &< \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots < \left(\frac{5}{9}\right)^n\left(\frac{51}{25}h_0\right)^{3^n-1}\eta_0\left[1+\frac{5}{9}\left(\frac{51}{25}h_0\right)+\right. \\ &\left.+\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{51}{25}h_0\right)^2+\ldots\right] \leqslant \frac{9}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^n\left(\frac{51}{25}h_0\right)^{3^n-1}\eta_0. \end{aligned} \tag{19}$$

This means that $||x_{n+p}-x_n|| \to 0$ when $n \to \infty$, for any $p \cdot X$ being a Banach space the existence of the limit $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ results.

For $p \to \infty$ in the inequality (19) we obtain (jj). Because $x_n \in \bar{S}$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$ it results that $x^* \in \bar{S}$.

Now we have to prove that x^* is a solution of the equation (1).

From

$$||P(x_n)|| \leqslant \frac{d_n}{B_n},$$

using the inequality $B_n \geqslant B_0$, which stands for all $n = 1, 2, 3, \ldots$, and the relation (16) we have

$$||P(x_n)|| \leqslant \frac{h_{n-1}^2 \eta_{n-1}}{B_0(1 - h_{n-1})} \leqslant \frac{9}{4B_0} h_{n-1}^2 \eta_{n-1}. \tag{20}$$

The function P being continuous from (20) by (17) and (18) it results

$$\lim_{n\to\infty} ||P(x_n)|| = ||P(x^*)|| = 0 \text{ thus } P(x^*) = \theta.$$

Thus the theorem is established.

Remarks. 1. The radius of $\bar{S}$ and the numerical estimate in the inequality (jj) are not quite optimum but rather chosen for convenience of calculation.

2. If the mapping P is Fréchet derivable and we assume that $[x, x; P] = P'(x)$, then we reobtain the results of paper [3].

(Received January 12, 1979)

REFERENCES

1. Balázs, M., *Contribution to the Study of Solving the Equations in Banach Spaces*, Doctor Thesis, Cluj, 1969.
2. Balázs, M., Goldner, G., *Diferenţe dicizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor*, Studii şi Cercet. Mat., **7**, 21, 1969, 985–996.
3. Bosarge, M. E. and Falb, P. L., *A Multipoint Method of Third Order*, Houston Scientific center IBM Publication No. 320.2350, October, 1968.
4. Ulm, S., *On Generalized Divided Differences, I–II* (Russian) Izv. Akad. Nauk ESSR, **16**, 1967, 13–26 and 146–155.

O METODĂ DE ORDINUL TREI

(Rezumat)

Se consideră spaţiul X vectorial real Banach şi o funcţie continuă $P: X \to X$. Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) $P(x) = x - \Phi(x) = \theta$ se studiază metoda iterativă dată de formula (2) $x_{n+1} = x_n - \Gamma_n[P(x_n) + P(x_n - \Gamma_n P(x_n))]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, unde Γ_n este inversa diferenţei divizate $[x_n, u_n, P]$, de ordinul întîi a funcţiei P în punctul $(x_n, u_n) = (x_n, \Phi(x_n)) \in X \times X$. În lucrare este demonstrată următoarea teoremă: Dacă există un punct $x_0 \in X$ şi numerele B_0, d_0, K şi M astfel încît următoarele condiţii să fie satisfăcute: 1° pentru $(x_0, u_0) \in X \times X$ funcţia liniară $[x_0, u_0; P]$ are inversă şi $||\Gamma_0|| = ||[x_0, u_0; P]^{-1}|| \leqslant B_0$; 2° $||\Gamma_0|| \cdot ||P(x_0)|| \leqslant B_0||x_0 - u_0|| \leqslant d_0$; 3° $\sup\{||[x', x''; \Phi]||: x', x'' \in \bar{S}\} \leqslant M$ şi $\sup\{||[x', x'', x'''; P]||: x', x'', x''' \in \bar{S}\} \leqslant K$; 4° $B_0(||P(x_0)|| + ||P(y_0)||) \leqslant \eta_0 = d_0(1 + B_0KMd_0)$, unde $y_0 = x_0 - \Gamma_0 P(x_0)$; 5° $h_0 = B_0K(1 + M)\eta_0 < \frac{4}{9}$, unde $\bar{S} = \{x \in x: ||x - x_0|| \leqslant r\}$, $r = \eta_0\left(2 + \frac{1}{B_0}\right)$, atunci egalitatea (2) defineşte prin recurenţă un şir de puncte (x_n) care are următoarele proprietăţi: *j*) există $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, $x^* \in S$ şi x^* este o soluţie a ecuaţiei (1); jj) ordinul de convergenţă este trei: $||x_n - x^*|| \leqslant \frac{9}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^n\left(\frac{51}{25} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

VECTEUR INFORMATIONAL ASSOCIÉ À UNE CARACTÉRISTIQUE STATISTIQUE BIDIMENSIONELLE

ELENA OANCEA

Le problème posé c'est de déterminer un indicateur informational associé à une caractéristique statistique bidimensionelle.

Soit (X, Y) une caractéristique statistique bidimensionelle, de distribution de probabilités p_{ij}, $(i, j) \in I = I_1 \times I_2$, où $I_1 = \{1, \ldots, n\}$, $I_2 = \{1, \ldots, m\}$ et f_{ij}, $(i, j) \in I$ les fréquences relatives correspondantes. Les probabilités p_{ij} et les fréquences relatives f_{ij} vérifient la relation:

$$p_{ij} = f_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}, \ (i, j) \in I,$$

$$\varepsilon_{ij} > 0, \ \Sigma_{i,j}\, p_{ij} = 1, \ \Sigma_{i,j} f_{ij}\varepsilon_{ij} = 1.$$

L'entropie empirique correspondante à la distribution considérée est:

$$H(f_{ij}) = -\Sigma_j\Sigma_j \frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \log_2 \frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_{\min}} H(p_{ij}) + \frac{1}{\varepsilon_{\min}} \log_2 \ \varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon_{\min} = \min_i \min_j \ \varepsilon_{ij},$$

$\varepsilon_{\max} = \max\limits_i \max\limits_j \varepsilon_{ij}$, c'est à dire:

$$H(f_{ij}) \leqslant aH(p_{ij}) + b, \tag{1}$$

où $a = 1/\varepsilon_{\min}$, $b = a \log_2 \varepsilon_{\max} = ak$, $H(p_{ij})$ l'entropie théorique du vecteur (X, Y). On observe que $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$.

Il résulte que les valeurs f_{ij}, $(i, j) \in I$ qui approximent les probabilités p_{ij}, $(i, j) \in I$, donnent une certaine information pour le vecteur (X, Y) dépendant de a et b. L'information relative à (X, Y) est complète si $a = 1$ et $b = 0$, c'est à dire $\varepsilon_{ij} = 1$, $(i, j) \in I$.

DÉFINITION. Le vecteur $V(a, b)$ est un *vecteur informational* associé à la variable aléatoire bidimensionelle (X, Y), qui est un indicateur de l'information obtenue expérimentalement apportée par les fréquences rélatives f_{ij}, $(i, j) \in I$. On voit que l'information est optimale quand $a = 1$ et $b = 0$.

On peut considérer le vecteur informational normé

$$W\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

ou

$$W\left(\frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}\right), \quad k = \log_2 \varepsilon_{\max} \tag{2}$$

Dans le cas $k = 0$, on observe que $W = W_0(1, 0)$ et l'information apportée relative à (X, Y) est optimale.

Dans le cas où $k \to \infty$, $W = W_\infty(0,1)$ et l'information obtenue relative à (X, Y) est minimale (ou la desinformation est maximale). En général le vecteur W a les composantes numériques contenues entre ces valeurs extrémales.

Remarque. Dans le cas où p_{ij} est relativement petit:

$$0 < p_{ij} < \delta$$

$\delta > 0$ fixé et suffisant petit, il est possible que f_{ij} correspondant soit nul. Soit I_δ l'ensemble des index pour lesquels $f_{ij} = 0$, alors pratiquement on considère pour calcul seulement les valeurs f_{ij}, $(i, j) \notin I_\delta$ c'est à dire $f_{ij} > 0$ et

$$a' = \frac{1}{\varepsilon_{\min}} = \frac{1}{\min\limits_i \min\limits_j \varepsilon_{ij}}, \ (i, j) \in \{I - I_\delta\}.$$

On veut déterminer maintenent la liaison entre le vecteur informational associé au vecteur (X, Y) et les vecteurs correspondants aux composantes X, respectivement Y.

D'abord on considère le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. Alors [3] $p_{ij} = p_i \cdot q_j$, où $p_i = P(X = x_i), q_j = P(Y = y_j), (i, j) \in I$, x_i respectivement y_j étant des valeurs possibles de X, Y, et $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ix}\varepsilon_{jy}$. L'entropie empirique est

$$H(f_{ij}) = -\sum_i \sum_j \frac{p_i q_j}{\varepsilon_{ix}\varepsilon_{jy}} \log_2 \frac{p_i q_j}{\varepsilon_{ix}\varepsilon_{jy}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_{\min}} [H_X(p_i) + H_Y(q_j) + \log_2 \varepsilon_{\max}],$$

où $\varepsilon_{\min} = \min\limits_i \min\limits_j \varepsilon_{ix}\varepsilon_{jy}$, $H_X(p_i)$ respectivement $H_Y(q_j)$ est l'entropie théorique de X, Y, et

$$\log_2 \varepsilon_{\max} = \log_2 \max_i \varepsilon_{ix} + \log_2 \max_j \varepsilon_{jy}.$$

En notant

$$\frac{1}{\varepsilon_{\min}} = a = a_x \cdot a_Y, \ a_X = \frac{1}{\min\limits_i \varepsilon_{jx}}, \ a_Y = \frac{1}{\min\limits_j \varepsilon_{jy}}$$

$$a \log_2 \varepsilon_{\max} = b = a_X a_Y (\log_2 \varepsilon_{x\max} + \log_2 \varepsilon_{y\max}) = a_Y b_X + a_X b_Y$$

où $b_X = a_X \log_2 \varepsilon_{x\max}$, $b_Y = a_Y \log_2 \varepsilon_{y\max}$, $\varepsilon_{x\max} = \max\limits_i \varepsilon_{ix}$, $\varepsilon_{y\max} = \max\limits_j \varepsilon_{jy}$, on a:

$$H(f_{ij}) \leqslant a_X a_Y [H_X(p_i) + H_Y(q_j)] + a_Y b_X + a_X b_Y$$

ou

$$H(f_{ij}) \leqslant a[H_X(p_i) + H_Y(q_j)] + b.$$

Par conséquent le vecteur informational correspondant au (X, Y) est

$$V(a_X a_Y, \ a_Y b_X + a_X b_Y) \tag{3}$$

et le vecteur normé

$$W\left(\frac{a_X a_Y}{\sqrt{a_X^2 a_Y^2 + (a_Y b_X + a_X b_Y)^2}}, \ \frac{a_Y b_X + a_X b_Y}{\sqrt{a_X^2 a_Y^2 + (a_Y b_X + a_X b_Y)^2}}\right) \tag{4}$$

ou en notant $k_x = \log_2 \varepsilon_{x\max}$, $k_y = \log_2 \varepsilon_{y\max}$

$$W\left(\frac{1}{\sqrt{1+(k_x+k_y)^2}},\ \frac{k_x+k_y}{\sqrt{1+(k_x+k_y)^2}}\right). \tag{5}$$

Si on utilise le vecteur normé donné par (5) on voit que les vecteurs extremals sont

$$W_0(1, 0) \text{ quand } k_x \text{ et } k_y \text{ tendent vers o.}$$

et

$$W_\infty(0, 1) \text{ pour } k_x \to \infty \text{ et } k_y \to \infty.$$

Pratiquement si on connait les composantes du vecteur (X, Y) qui sont indépendantes, on peut déterminer le vecteur informational correspondant en utilisant les formule (3), (4), ou (5).

Dans le cas ou X, Y ne sont pas indépendantes on a :

$$H(f_{ij}) = -\Sigma_i\Sigma_j \frac{p_i q_{j|i}}{\varepsilon_{ij}} \log_2 \frac{p_i q_{j|i}}{\varepsilon_{j}} < a[H_X(p_i) + H_{Y|X}] + b$$

$$\text{où } q_{j|i} = P(Y = y_j | X = x_i),\ H_{Y|X} = \Sigma_i(-\Sigma_j q_{j|i} \log_2 q_{j|i}),$$

$$a = 1/\varepsilon_{\min},\ b = a \log_2 \varepsilon_{\max}.$$

Si $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ix} \cdot \varepsilon_{jy|i}$, $(i, i) \in I$, alors $a = a_X a_{Y|i}$, $b = a_{Y|i} b_X + a_X b_{Y|i}$, $b_X = a_X \log_2 \varepsilon_{x\max}$, $b_{Y|i} = a_{Y|i} \log_2 \varepsilon_{Y|i\max}$, $\varepsilon_{Y|i\max} = \max\limits_j \varepsilon_{jY|i}$.

Donc le vecteur informational associé au (X, Y) est aussi

$$V(a, b)$$

ou

$$W\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Le cas où le vecteur (X, Y) est de type continu avec la densité de probabilité $g(x, y)$, $x, y \in R$ et ayant les fréquences f_{ij}, $(i, j) \in I$, obtenues expérimentalement, où f_{ij} est la fréquence relative de l'événement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$, $x_i, y_j \in R$, on discretise la distribution du (X, Y) comme il suit :

$$\text{Soit } \alpha_x = \min_i x_i, \qquad \beta_x = \max_i x_i$$

$$\alpha_y = \min_j y_j, \qquad \beta_y = \max_j y_j.$$

En conformité aux données expérimentales la densité de probabilité est tronquée au domaine fixé $D = \{[\alpha_x, \beta_x] \times [\alpha_y, \beta_y]\{$. Alors cette densité $\bar{g}$ est donnée par :

$$\bar{g}(x, y) = \begin{cases} 1/c\, g(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

ou

$$c = \iint_D g(x, y)dx\,dy$$

et les probabilités théoriques discrètes associées au vecteur (X, Y) sont

$$\bar{P}_{ij} = \bar{g}(x_i, y_j)\Delta, \ (i, j) \in I,$$

$$\Delta = \frac{\beta_x - \alpha_x}{n - 1} \cdot \frac{\beta_y - \alpha_y}{m - 1}.$$

En utilisant maintenant les probabilités $\bar{P}_{ij}(i, j) \in I$ et les fréquences f_{ij}, $(i, j) \in I$, on détermine le vecteur informational bidimensional pour le vecteur aléatoire (X, Y).

Remarque. Le vecteur informational ainsi déterminé peut être utilisé pour tester la correspondance entre la distribution empirique et celle théorique du (X, Y), [2].

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1979)

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Oancea, M. Rădulescu, *Vector informațional asociat unui experiment*, Revista de Statistică, **8**, 1976, 43–46.
2. E. Oancea, *Méthodes informationalles pour tester la répartition d'une caracteristique statistique*, Proceedings of The International Conference Staquarel' 76 Praga, 1976, v.I, 256–260.
3. A. Rényi, *Calcul des Probabilités avec un appendice sur la Théorie de l'information*, Dunod, Paris, 1966.

VECTOR INFORMAȚIONAL ASOCIAT UNEI CARACTERISTICI STATISTICE BIDIMENSIONALE

(Rezumat)

Folosind frecvențele relative obținute experimental pentru un vector aleator discret (X, Y), se determină un vector informațional $V(a, b)$ care dă indicații despre informația adusă de frecvențele relative asupra distribuției teoretice asociată lui (X, Y). Se compară acest vector cu vectorii informațional ai componentelor X, Y. Se consideră și cazul cînd (X, Y) este un vector aleator continuu.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

ON STEFFENSEN'S METHOD FOR SOLVING NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS DEFINED IN FRÉCHET SPACES

SEVER GROZE

1. In an earlier paper [1] we have studied Steffensen's method for solving operator equations

$$P(x) \equiv x - \Phi(x) = \theta \tag{1}$$

where $P : X \to X$, X being a Fréchet space [2], and θ the null element of the space X. This method is a particular case of the method of chords and which is given by the formula

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n) \tag{2}$$

where $\Lambda_n = [P_{x_n, u_n}]^{-1}$, $u_n = \Phi(x_n)$ $n_n = 0, 1, \ldots$, $P_{x', x''}$ being the generalized divided difference [3] for the operator P in the points x', x''.

In the paper [1] the following theorems are given:

THEOREM A. *If for the initial approximation* $x_0 \in X$, *the following conditions are satisfied:*

1° *There exists* $\Lambda_0 = [P_{x_0, u_0}]^{-1}$ *with* $\rho_{X,X}(\Lambda_0) \leqslant B_0$

2° $\rho_X(P(x_0)) \leqslant \eta_0$

3° $\rho_{X,X}(\Phi_{x',x''}) \leqslant M$, $\rho_{X,X}(\Phi_{x',x''} - \Phi_{x'',x}) \leqslant k\rho\,(x' - x'')$, $\forall x', x'', x''' \in S(x_0, r) \subset X$ *where*

$$r = \max \left\{ \frac{B_0 \eta_0 (1 - \alpha)}{1 - 2\alpha}, \ \eta_0 + \frac{M_0 B_0 \eta_0 (1 - \alpha)}{1 - 2\alpha} \right\}$$

and α *will be defined later*

4° $h_0 = B_0^2 K(M + 1)\eta_0 < \alpha \leqslant \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

then the equation (1) *has a solution* $x^* \in S(x_0, r)$ *which is the limit of the sequence* (2), *the order of the convergence being given by the inequality*

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant (1 - \alpha)^n \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^n - 1} \left[\frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}\right]^{2^n - 1} \sigma \tag{3}$$

where

$$\sigma = B_0 \eta_0 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{k-1} \left[\frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}\right]^{2(2^{k-1} - 1)} < \frac{1}{\alpha}$$

THEOREM B. *If the conditions of the theorem A are satisfied in* $S(x_0, r)$, *where* $r = (1 - \alpha)B_0\eta_0$, *the equation* (1) *has a unique solution* $x^* \in S$.

We remark that in connection with the existence of the solution of the equation (1) an analogous theorem is given by S. U l m [4] in Banach spaces, the operator $\Gamma = [P_{x',x''}]^{-1}$ being uniformly bounded, and also by M. B a l á z s [5] in Banach spaces, where the existence and the uniform boundedness of the second order of the divided differences of the operator P is supposed.

B. J a n k ó [6] proves an analogous theorem, without determining the order rapidity of convergence connected with the variation of majorant α of h_0, the operator P being defined in Banach spaces too.

2. In the present paper we shall give a new theorem of the existence of the solution of the equation (1), without the boundedness condition on the operator $\Lambda_0 = [Px_0, u_0]^{-1}$.

THEOREM. *If for the initial approximation* $x_0 \in X$, *we have*

1° *Then there exists* $\Lambda_0 = [Px_0, u_0]^{-1}$

2° $\rho_X(\Lambda_0 P(x_0)) \leqslant \tilde{\eta}_0$

3° $\rho_{X,X}(\Lambda_0 \Phi_{x',x''}) \leqslant \tilde{M}$,

$\rho_{X,X}(\Lambda_0[\Phi_{x',x''} - \Phi_{x'',x'''}]) \leqslant \tilde{k}\rho_X(x' - x''')$

$\forall x', x'', x''' \in S(x_0, r)$, $r = \max\left\{\frac{B_0\eta_0(1-\alpha)}{1-2\alpha}, \ \eta_0 + \frac{M_0 B_0 \eta_0(1-\alpha)}{1-2\alpha}\right\}$

where α *will be defined later*

4° $\tilde{h}_0 = \tilde{k}(M+1)\eta_0 < \bar{\alpha} \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

then the equation (1) *has a solution* $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x^* \in S(x_0, r)$, *the sequence* (x_n) *being given by* (2) *and the order of the convergence may be characterized by*

$$\rho_X(x^* - x_n) < \frac{1}{\bar{\alpha}}(1-\bar{\alpha})^n\left(\frac{\tilde{h}_0}{\bar{\alpha}}\right)^{2^n-1}\left[\frac{\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha})^2}\right]^{2^n-1} \tag{3'}$$

Proof. We consider the equivalent equation to (1)

$$\tilde{P}(x) \equiv \Lambda_0 P(x) = \theta. \tag{1'}$$

For solving this equation, we have the iterative method

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - [\tilde{P}_{\tilde{x}}, \tilde{u}_n]^{-1} P(\tilde{x}_n). \tag{2'}$$

By induction, it can be proved that for $\tilde{x}_0 = x_0$ the sequence given by (2′) is identical with the sequence given by the iterative procedure (2).

For the operator $\tilde{P}$, the conditions of the theorem A are valid:

Indeed

$$1^\circ \ \tilde{\Lambda}_0 = [\tilde{P}_{x_0,u_0}]^{-1} = [\Lambda_0 \tilde{P}_{x_0,u_0}]^{-1} = \Lambda_0 \Lambda_0^{-1} = I,$$

then $\tilde{\Lambda}_0$ exists an $\rho_{X,X}(\tilde{\Lambda}_0) = 1 = \tilde{B}_0$

$$2^\circ \ \rho_X(\tilde{P}(x_0)) = \rho_X(\Lambda_0 P(x_0)) \leqslant \tilde{\eta}_0$$

$$3^\circ \ \rho_{X,X}(\tilde{\Phi}_{x',x''}) = \rho_{X,X}(\Lambda_0 \Phi_{x',x''}) \leqslant \tilde{M}$$

$$\rho_{X,X}(\tilde{\Phi}_{x',x''} - \tilde{\Phi}_{x'',x'''}) = \rho_{X,X}(\Lambda_0[\Phi_{x',x''} - \Phi_{x'',x'''}]) \leqslant \tilde{k}\rho_X(x' - x''')$$

$$\forall x', x'', x''' \in S(x_0, r)$$

$$4^\circ \ \tilde{h}_0 = \tilde{B}_0 \tilde{K}(\tilde{M} + 1)\tilde{\eta}_0 < \alpha \leqslant \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

It results, by the theorem A, that equation (1′) has at least a solution $x^* \in S$ which is the limit of the sequence constructed by (2′).

We have then

$$\tilde{P}(x^*) = \Lambda_0 P(x^*) = \tilde{0}$$

hence $P(x^*) = 0$.

The order of the convergence is given by (3′).

Remark. The theorem has the advantage over theorem A not only by improving the condition 1 but also $\tilde{h}_0 \leqslant h_0$.

(Received February 2, 1979)

REFERENCES

1. S. Groze, *Metoda lui Steffensen aplicată la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare definite în spaţii supermetrice*, Studii şi Cercet. Mat., 23, 5, 1971.
2. K. Yosida, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
3. S. Groze, *Asupra diferenţelor divizate generalizate*, Anal. Univ., „Al. I. Cuza" Iaşi, Seria nouă, Tom. XVII, 1971, fasc. 2.
4. S. Ulm, *Algorifmi ob obobşcennovo metode Steffensena*, Izvestia Akad. Nauk. Estouskoi SSR, III, 3, 1964.
5. M. Balázs, *Contribuţii la studiul rezolvării ecuaţiilor în spaţii Banach*, Teză de doctorat, Cluj, 1968.
6. B. Jankó, *Rezolvarea ecuaţiilor operatoriale neliniare în spaţii Banach*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1969.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

RELATIONS ENTRE DES ESPACES RIEMANNIENS À TENSEURS RECURRENTS

P. ENGHIŞ

Soit V_n un espace riemannien à métrique

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

à tenseur de courbure R^h_{ijk}, à tenseur de Ricci R_{ik} et à courbure scalaire R.
Soit de même

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij}) \tag{2}$$

le tenseur de courbure projective,

$$C^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h_j - g_{ij}R^h_k) + $$
$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g\ ) \tag{3}$$

le tenseur de courbure conforme,

$$Z^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h_j - g_{ij}R^h_k) \tag{4}$$

le tenseur de courbure coharmonique,

$$T^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) \tag{5}$$

e tenseur de courbure co ncircula ire.
Si on multiplie et on contracte (2) par g^{ik} on obtient

$$P^h_j = \frac{n}{n-1}\left(R^h_j - \frac{R}{n}\delta^h_j\right) \tag{6}$$

où

$$P_{hj} = \frac{n}{n-1}\left(R_{hj} - \frac{R}{n}g_{hj}\right) \tag{7}$$

En contractant les relations (4) et (5) en h et j on obtient

$$Z_{ik} = -\frac{R}{n-2}g_{ik} \tag{8}$$

$$T_{ik} = R_{ik} - \frac{R}{n}g_{ik} \tag{9}$$

On sait que le tenseur de courbure conforme a les tenseurs contractés nuls. Pour le commencement on établit des relations entre ces tenseurs et leurs contractés d'où on déduit des relations entre les espaces à tenseurs récurrents.

Des relations (3) et (4) on déduit que si la courbure scalaire de l'espace V_n est nulle, le tenseur de courbure conforme coïncide avec le tenseur de courbure coharmonique, et le tenseur contracté du tenseur de courbure coharmonique est nul, et de (5) il résulte que le tenseur de courbure concirculaire coïncide avec le tenseur de courbure.

De (7) et (9) on déduit

$$P_{hj} = \frac{n}{n-1} T_{hj} \tag{10}$$

de (8) et (9) on déduit

$$T_{ik} = R_{ik} + \frac{n-2}{n} Z_{ik} \tag{11}$$

et de (10) et (11) on a

$$(n-1) P_{ik} = n R_{ik} + (n-2) Z_{ik} \tag{12}$$

Donc:

Proposition 1. *Entre les tenseurs contractés des tenseurs de courbure, de courbure projective, de courbure coharmonique et de courbure concirculaire on a les relations* (10), (11), (12).

De (3), (4) et (8) on déduit:

$$C^h_{ijk} = Z^h_{ijk} - \frac{1}{n-1} (\delta^h_j Z_{ik} - \delta^h_k Z_{ij}) \tag{13}$$

et de (2), (5), (7), (9) il résulte

$$P^h_{ijk} = T^h_{ijk} - \frac{1}{n-1} (\delta^h_j T_{ik} - \delta^h_k T_{ij}) \tag{14}$$

ou, en tenant compte de (10) on a

$$T^h_{ijk} = P^h_{ijk} + \frac{1}{n} (\delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}) \tag{15}$$

De (3), (5) et (9) on déduit

$$C^h_{ijk} = T^h_{ijk} - \frac{1}{n-2} (\delta^h_j T_{ik} - \delta^h_k T_{ij} + g_{ik} T^h_j - g_{ij} T^h_k) \tag{16}$$

et de (2), (3) et (7) ou (10), (15) et (16) il résulte

$$C^h_{ijk} = P^h_{ijk} - \frac{1}{n(n-2)} (\delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}) - \frac{n-1}{n(n-2)} (g_{ik} P^h_j - g_{ij} P^h_k) \tag{17}$$

qu'en tenant compte de (10) on peut l'écrire

$$C^h_{ijk} = P^h_{ijk} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} (\delta^h_j T_{ik} - \delta^h_k T_{ij}) - \frac{1}{n-2} (g_{ik} T^h_j - g_{ij} T^h_k) \tag{18}$$

Si on égalise (13) avec (16) ou (13) avec (17) on déduit des relations entre le tenseur de courbure coharmonique et le tenseur de courbure concirculaire et leurs contractés, respectivement entre le tenseur de courbure coharmonique et le tenseur de courbure projective et leurs contractés.

On a donc :

PROPOSITION 2. *Entre les tenseurs de courbure conforme, de courbure projective, de courbure concirculaire et de courbure coharmonique il existe les relations* (13), (14), (15), (16), (17) *et* (18).

On dit que l'espace V_n est de courbure récurrente ou simplement récurrente, ou projectivement-récurrent, ou conformément-récurrent, ou coharmoniquement-récurrent, ou concirculairement-récurrent, s'il existe un vecteur covariant φ_r tel qu'on ait respectivement :

$$R^h_{ijk} = \varphi_r R^h_{ijk} \tag{19}$$

$$P^h_{ijk,r} = \varphi_r P^h_{ijk} \tag{20}$$

$$C^h_{ijk,r} = \varphi_r C^h_{ijk} \tag{21}$$

$$Z^h_{ijk,r} = \varphi_r Z^h_{ijk} \tag{22}$$

$$T^h_{ijk,r} = \varphi_r T^h_{ijk} \tag{23}$$

où la virgule désigne la dérivée covariante par rapport à la métrique (1).

Si on contracte (19) en h et j on obtient

$$R_{ik,r} = \varphi_r R_{ik} \tag{24}$$

Un espace V_n qui vérifie (24) est nommé Ricci-récurrent. Si on multiplie et on contracte (24) par g^{ik} on obtient

$$R, r = \varphi_r R \tag{25}$$

et l'espace est nommé de courbure scalaire récurrente. De (25) il résulte

PROPOSITION 3. *Il n'existe pas d'espaces riemanniens proprement — dits récurrents ou Ricci-récurrents à courbure scalaire constante différente de zéro.*

Observation 1. Un espace V_n récurrent est aussi Ricci-récurrent et de courbure scalaire récurrente, la réciproque n'étant pas toujours vraie.

Observation 2. De (20), (21), (22), (23) il résulte qu'un espace V récurrent est aussi projectivement-récurrent, et conformément-récurrent, et coharmoniquement-récurrent et concirculairement-récurrent. Pour la réciproque on a

PROPOSITION 4. *Soit V_n un espace Ricci-récurrent. Si V_n est aussi coharmoniquement-récurrent, ou concirculairement-récurrent, ou conformément-recurrent, alors il est récurrent.*

Pour les espaces concirculairement-récurrents à courbure scalaire non-constante on déduit de (5) qu'ils sont récurrents si le vecteur φ_r est donné par

$$\varphi_r = (\ln R)_{,r} \tag{26}$$

Pour les espaces projectivement-récurrents de (20) il résulte

$$R^h_{ijk,r} - \varphi_r R^h_{ijk} = \frac{1}{n-1}\,[\delta^h_j(R_{ik,r} - \varphi_r R_{ik}) - \delta^h_k(R_{ij,r} - \varphi_r R_{ij})] \tag{27}$$

d'où par la multiplication contractée avec g^{ik} et la descente de l'indice h il résulte

$$R_{hj,r} - \varphi_r R_{hj} = \frac{1}{n}\, g_{hj}(R_{,r} - \varphi_r R) \tag{28}$$

En tenant compte de (28) dans (27) on obtient

$$R^h_{ijk,r} - \varphi_r R^h_{ijk} = \frac{1}{n(n-1)}\,(R_{,r} - \varphi_r R)(g_{ik}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_k)$$

Donc:

PROPOSITION 5. *Les espaces concirculairement-récurrents et les espaces projectivement-récurrents à courbure scalaire non-constante sont récurrents si et seulement si le vecteur* φ_r *est donné par* (26). *Si la courbure scalaire est nulle, ces espaces sont récurrents.*

Observation 3. De (20), (22), (23) il résulte immédiatement que si l'espace est projectivement-récurrent, ou coharmoniquement-récurrent, ou concirculairement-récurrent leurs contractés donnés par (7), (8), (9) sont aussi récurrents avec le même vecteur de récurrence, la réciproque n'étant pas toujours vraie.

Dans un espace coharmoniquement-récurrent, de (22) par contraction en h et j et tenant compte de (8) il résulte (25). Donc:

PROPOSITION 6. *Il n'existe pas d'espaces coharmoniquement-récurrents à courbure scalaire constante différente de zéro.*

Toujours de (25) il résulte:

PROPOSITION 7. *Dans un espace coharmoniquement-récurrent à courbure scalaire non-nulle le vecteur de récurrence est donné par* (26).

De (13) il résulte qu'un espace coharmoniquement-récurrent est aussi conformement-récurrent. Pour la réciproque de (21), (13) et (8) il résulte:

$$Z^h_{ijk,r} - \varphi_r Z^h_{ijk} = -\frac{1}{(n-1)(n-2)}\,(g_{ik}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_k)(R_{,r} - \varphi_r R) \tag{29}$$

d'où on a:

PROPOSITION 8. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace conformément-récurrent soit coharmoniquement-récurrent avec le même vecteur* φ_r, *est que le vecteur de récurrence soit le gradient de la fonction scalaire* R, *ou la courbure scalaire de l'espace soit nulle.*

De (14) il résulte qu'un espace V_n concirculairement-récurrent est aussi projectivement-récurrent, et de (15) il résulte réciproquement qu'un espace projectivement-récurrent est aussi concirculairement-récurrent avec le même vecteur φ_r. On a donc

PROPOSITION 9. *Les espaces projectivement-récurrents sont aussi concirculairement-récurrents avec le même vecteur de récurrence et réciproquement.*

De (16) ou (17) il résulte qu'un espace projectivement-récurrent ou concirculairement-récurrent est aussi conformément-récurrent avec le même vecteur de récurrence φ_r. Pour la réciproque, de (18) il résulte qu'un espace conformément-récurrent est projectivement-récurrent, si et seulement si le tenseur donné par (9) est récurrent de vecteur φ_r. Donc :

PROPOSITION 10. *Tous les espaces projectivement-récurrents ou concirculairement-récurrents sont aussi conformément-récurrents et réciproquement, les espaces conformément-récurrents sont projectivement récurrents si et seulement si le tenseur (9) est récurrent de vecteur φ_r.*

Si on égalise (13) et (17) ou (13) et (16) on déduit que les espaces projectivement-récurrents ou concirculairement-récurrents sont coharmoniquement-récurrents s'ils sont de courbure scalaire récurrente, donc, conformément à la proposition 5, récurrents. Réciproquement, les espaces coharmoniquement-récurrents sont projectivement-récurrents ou concirculairement-récurrents s'ils sont Ricci-récurrents, donc conformément à la proposition 4, récurrents. On a donc :

PROPOSITION 11. *Un espace projectivement-récurrent ou concirculairement-récurrent et coharmoniquement-récurrent est récurrent.*

Des ci-dessus il résulte

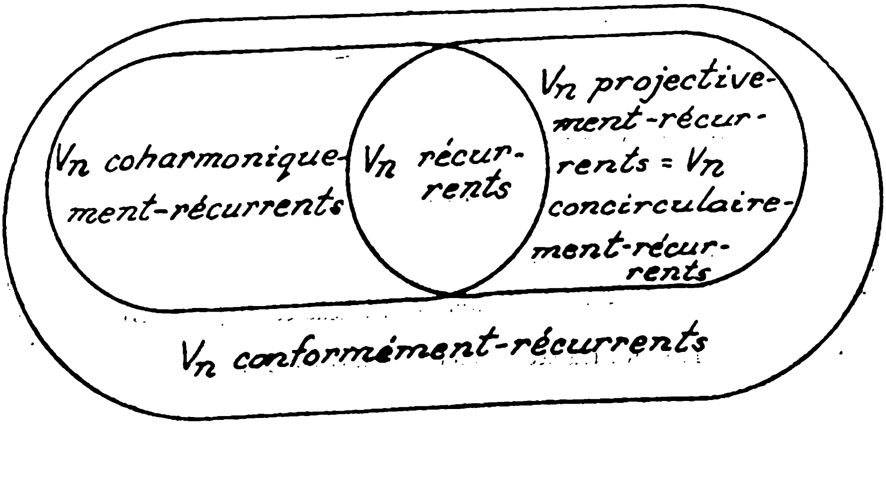
PROPOSITION 12. *Il existe entre les espaces récurrents, projectivement-récurrents, coharmoniquement-récurrents, concirculairement-récurrents, conformément-récurrents les relations d'inclusion et d'intersection :*

V_n *récurrents* $\subset$ V_n *projectivement-récurrents* $=$ V_n *concirculairement-récurrents* $\subset$ $\subset$ V_n *conformément-récurrents.*

V_n *récurrents* $\subset$ V_n *coharmoniquement-recurrents* $\subset$ V_n *conformément-récurrents.*

V_n *projectivement-récurrents* $\cap$ V_n *coharmoniquement-récurrents* $=$ V_n *récurrents.*

On peut représenter schématiquement la proposition 12 par :



Pour les espaces d'Einstein $R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$ de (7) et (9) il résulte que les tenseurs T_{ij} et P_{ij} sont nuls, les relations (11) et (12) sont des identités, et de (14), (16), (17) il résulte :

$$P^{h}_{ijk} = T^{h}_{ijk} = C^{h}_{ijk} \tag{30}$$

Donc :

PROPOSITION 13. *Tous les espaces d'Einstein sont en même temps projectivement-récurrents, concirculairement-récurrents et conformément-récurrents.*

Pour les espaces d'Einsten coharmoniquement- récurrents en tenant compte des propositions 7, 8, 13 et de (30) il résulte

PROPOSITION 14. *Les espaces d'Einstein coharmoniquement-récurrents sont récurrents.*

(Manuscrit reçu le 28 février 1979)

BIBLIOGRAPHIE

1. Adati, T. and Myazawa, T., *On a Riemannian space with recurrent conformal curvature*, Tensor. N. S **18**, 3, 1967, 348–354.
2. Enghiş, P., *Sur les espaces V_n récurrents et Ricci-récurrents*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mec. f. 1, 1972, 3–6.
3. Ishii, I., *On conharmonic transformations*, Tensor N. S., **7**, 2, 1957, 70–80.
4. Matsumoto, M., *On Riemannian spaces with recurrent projective curvature*, Tensor N.S., **19**, 1968, 11–18.
5. Manţia, A., Enghiş, P., *Asupra spaţiilor conform recurente*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 2, 1978, 33–40.
6. Myazawa, T., *On Riemannian spaces admitting some recurrent tensors*, T.R.U. Math., I.c., 1966, 71–72.
7. Patterson, E. M., *Some theorems on Ricci-recurrent spaces*, Journ. London Math. Soc., **27** 1952, 287–295.
8. Sandovici, P., Enghiş, P., Ţarină, M., Spaţii *V_n de curbură proiectivă recurentă*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Phys., f. 1, 1969, 17–21.
9. Walker, A. G., *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Journ. London Math. Soc., **2** (52), 1950, 34–64.

RELAŢII ÎNTRE SPAŢII RIEMANNIENE CU TENSORI RECURENŢI

(Rezumat)

În lucrare se stabilesc la început relaţiile $\overline{(10,) (18)}$ între tensorii de curbură proiectivă, curbură conformă, curbură coarmonică, curbură concirculară şi contractaţii lor. Din aceste relaţii în poziţiile $\overline{3,11}$ se dau relaţii şi condiţii între spaţiile riemanniene cu aceşti tensori recurenţi. În propoziţia 12 se precizează relaţiile de incluziune şi intersecţie ce există între aceste spaţii. În încheiere în propoziţiile 13 şi 14 se rezolvă aceeaşi problemă în cazul spaţiilor Einstein.

STUDIA UNIV. BABEŞ—BOLYAI, MATHEMATICA, XXV, 1, 1980

PROPER EFFICIENCY IN THE COMPLEX VECTORIAL PROGRAMMING

DOREL I. DUCA

1. Introduction. Let us consider the problem of vectorial programming in the complex space:

$$V\text{-min } \operatorname{Re} f(z, \bar{z}) \text{ subject to } z \in \Omega, \tag{VPCS}$$

where $f: C^{2n} \to C^p$ and Ω is a nonempty set in C^n.

This problem was recently formulated by us in [5] (the linear case) and [6] (the nonlinear case), where conditions for a point to be efficient are given.

In this paper the notion of the proper efficiency is generalized [5, 8], giving conditions for a point to be proper efficient for the problem (VPCS).

2. Notations and preliminaries. Let $C^n(R^n)$ denote the n-dimensional complex(real) vector space, $R^n_+ = \{x = (x_j) \in R^n / x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n\}$ the nonnegative orthant of R^n and let $C^{m \times n}$ be the set of $m \times n$ complex matrices. For $A = (a_{kj}) \in C^{m \times n}$, $\bar{A}$, A^T and A^H denote the conjugate, transpose and conjugate transpose of A respectively.

For $z = (z_j)$, $u = (u_j) \in C^n$: $\langle z, u \rangle = u^H z$ denotes the inner product of z and u, and $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_j) \in R^n$ denotes the real part of the vector z.

If $x = (x_j)$, $y = (y_j) \in R^n$, we consider:

$$x \leqq y (x < y) \text{ iff } x_j \leqq y_j \ (x_j < y_j) \text{ for any } j \in \{1, \ldots, n\};$$
$$x \leqslant y \text{ iff } x \leqq y \text{ and } x \neq y.$$

For a vector function $g: C^{2n} \to C^m$ analytic in the $2n$ variables (u^1, u^2) at $(z^0, \bar{z}^0) \in C^{2n}$:

$$\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0) = \left(\frac{\partial g_k}{\partial u_j^1}(z^0, \bar{z}^0)\right) \in C^{n \times m},$$

and

$$\nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0) = \left(\frac{\partial g_k}{\partial u_j^2}(z^0, \bar{z}^0)\right) \in C^{n \times m}.$$

For any nonempty set S in C^m let $S^* = \{u \in C^m / w \in S \Rightarrow \operatorname{Re} \langle u, w \rangle \geqslant 0\}$ be the polar of S, and int S the interior of S.

We define the manifold $Q = \{(u^1, u^2) \in C^{2n} / u^2 = \bar{u}^1\}$.

DEFINITION 1. The function $g: C^{2n} \to C^m$ is concave with respect to the closed convex cone $S \subseteq C^m$ on the manifold Q if for any z^1 and $z^2 \in C^n$ and $t \in [0, 1]$

$$g[tz^1 + (1 - t)z^2, t\bar{z}^1 + (1 - t)\bar{z}^2] - tg(z^1, \bar{z}^1) - (1 - t)g(z^2, \bar{z}^2) \in S \tag{1}$$

If g is analytic, a condition equivalent to (1) is

$$[\nabla_z g(z^2, \bar{z}^2]^T(z^1 - z^2) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^2, \bar{z}^2)]^T(\bar{z}^1 - \bar{z}^2) + g(z^2, \bar{z}^2) - g(z^1, \bar{z}^1) \in S.$$

DEFINITION 2. The analytic function $g: C^{2n} \to C^m$ is said to be strictly concave with respect to the closed convex cone $S \subseteq C^m$ on the manifold Q if for any z^1 and $z^2 \in C^n$

$$[\nabla_z g(z^2, \bar{z}^2)]^T(z^1 - z^2) + [\nabla_{\bar{z}} g(z^2, \bar{z}^2)]^T(\bar{z}^1 - \bar{z}^2) + g(z^2, \bar{z}^2) - g(z^1, \bar{z}^1) \in \operatorname{int} S.$$

DEFINITION 3. The function $f: C^{2n} \to C^p$ has convex real part with respect to the closed convex cone $T \subseteq R^p$ on the manifold Q if for any z^1 and $z^2 \in C^n$ and $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{tf(z^1, \bar{z}^1) + (1 - t)f(z^2, \bar{z}^2) - \\ &- f[tz^1 + (1 - t)z^2, t\bar{z}^1 + (1 - t)\bar{z}^2]\} \in T. \end{aligned} \tag{2}$$

If f is analytic, a condition equivalent to (2) is

$$\operatorname{Re}\{f(z^1, \bar{z}^1) - f(z^2, \bar{z}^2) - [\nabla_z f(z^2, \bar{z}^2)]^T(z^1 - z^2) - [\nabla_{\bar{z}} f(z^2, \bar{z}^2)]^T(\bar{z}^1 - \bar{z}^2)\} \in T.$$

THEOREM 1. *Let $\lambda \in R^p$, $\lambda > 0$ be fixed. If the function $f: C^{2n} \to C^p$ has convex real part with respect to the polyhedral cone R^p_+ on the manifold Q, then the function $h: C^{2n} \to C$, defined by $h(u^1, u^2) = \langle f(u^1, u^2), \lambda\rangle$ for all $(u^1, u^2) \in C^{2n}$, has convex real part with respect to R_+ on Q.*

The statement of the theorem 1 is a direct consequence of Definition 3

THEOREM 2. *Let $h: C^{2n} \to C$ and $g: C^{2n} \to C^m$ be analytic functions, and let $S \subseteq C^m$ be a polyhedral cone with nonempty interior.*

If h has convex real part with respect to R_+ on the manifold Q, and g is strictly concave with respect to S on Q, then a sufficient condition for $z^0 \in \{z/g(z, \bar{z}) \in S\}$ to be a solution of the problem:

$$\min \operatorname{Re} h(z, \bar{z}) \quad \text{subject to } g(z, \bar{z}) \in S, \tag{P}$$

is that there exist $\tau \in R_+$, $v \in S^*$, $(\tau, v) \neq 0$, such that

$$\operatorname{Re}\langle v, g(z^0, \bar{z}^0)\rangle = 0$$

$$\tau\overline{\nabla_z h(z^0, \bar{z}^0)} + \tau\nabla_{\bar{z}} h(z^0, \bar{z}^0) = \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)}v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}.$$

The proof is analogous to the one given in G u l a t i T. R. [9].

3. The vectorial programming problem in complex space. Let $f: C^{2n} \to C^p$ and let Ω a nonempty set in C^n.

DEFINITION 4. A point $z^0 \in \Omega$ is called efficient (minimum Pareto) with respect to f for Ω, if there exists no point $z \in \Omega$ such that $\operatorname{Re} f(z, \bar{z}) \leqslant \operatorname{Re} f(z^0, \bar{z}^0)$.

The problem of determining all efficient points $z \in \Omega$ with respect to f for Ω will be called vectorial programming problem in the complex space and will be denoted by

$$V - \min \operatorname{Re} f(z, \bar{z}) \quad \text{subject to } z \in \Omega. \tag{VPCS}$$

We consider the following programming problem in the complex space:

$$\min \operatorname{Re} \langle f(z, \bar{z}), \lambda \rangle \text{ subject to } z \in \Omega, \qquad (P_\lambda)$$

where $\lambda \in R^p$.

THEOREM 3. *Let $\lambda \in R^p$, $\lambda > 0$ be fixed, let $f: C^{2n} \to C^p$ be a vectorial complex function and let Ω be a nonempty set in C^n.*

If $z_0 \in C^n$ is a solution of the problem (P_λ), then z^0 is an efficient point for the problem (VPCS).

Proof. Since $z^0 \in C^n$ is a solution of the problem (P_λ), we have $z^0 \in \Omega$. Assume that z^0 is not efficient for the problem (VPCS), i.e. there exists $z^1 \in \Omega$ such that $\operatorname{Re} f(z^1, \bar{z}^1) \leqslant \operatorname{Re} f(z^0, \bar{z}^0)$. Since $\lambda > 0$, we have $\operatorname{Re} \langle f(z^1, \bar{z}^1), \lambda \rangle < \operatorname{Re} \langle f(z^0, \bar{z}^0), \lambda \rangle$ which contradicts the optimality of z^0 for (P_λ).

Remark. The converse of Theorem 3 is not true, as seen in the following example. Let $f(w_1, w_2) = (-w_1, w_1 w_2)^T$ for all $(w_1, w_2)^T \in C^2$ and let $\Omega = \{z \in C \,/\, |\arg z| \leqslant \pi/6\}$. The problem (P_λ), $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T > 0$ has the solution $z^\lambda = \lambda_1/(2\lambda_2) > 0$. Hence all the points $z = t > 0$ are efficient. But the efficient point $z^0 = 0$ cannot be obtained as a solution of the problem (P_λ) with $\lambda > 0$.

Therefore, we propose a slightly restricted definition of efficiency that (a) eliminates efficient points of a certain „anomalous" type; and (b) lends itself to more satisfactory characterization.

4. **Proper efficiency.** Let $f: C^{2n} \to C^p$ and let Ω be a nonempty set in C^n.

DEFINITION 5. A $z^0 \in \Omega$ is called a properly efficient point for the problem (VPCS) iff:

a) z^0 is efficient for the problem (VPCS),

b) there exists a scalar $M > 0$ such that

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Re}\,[f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > 0 \\ z \in \Omega \end{array}\right\} \text{ implies } \left\{\begin{array}{l} \exists\, r \in \{1, \ldots, p\}, \text{ such that} \\ \operatorname{Re}\,[f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] \leqslant \\ \leqslant M \operatorname{Re}\,[f_r(z, \bar{z}) - f_r(z^0, \bar{z}^0)]. \end{array}\right.$$

An efficient point that is not properly efficient is said to be improperly efficient.

THEOREM 4. *Let $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T > 0$ with $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r = 1$ be fixed. If $z^0 \in C^n$ is a solution of the problem (P_λ), then z^0 is properly efficient for the problem (VPCS).*

Proof. a) In view of Theorem 3, the point z^0 is efficient for the problem (VPCS).

b) Assume that z^0 is an improperly efficient point for the problem (VPCS) and choose

$$M = (p - 1) \max \{(\lambda_r/\lambda_s)/r,\ s \in \{1, \ldots, p\}\}.$$

Then there exist $s \in \{1, \ldots, p\}$ and $z \in \Omega$ with

$$\mathrm{Re}\,[f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > 0$$

such that

$$\mathrm{Re}[f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > (p-1)\ \mathrm{Re}\,[f_r(z, \bar{z}) - f_r(z^0, \bar{z}^0)]\ \max_{r,s} \frac{\lambda_r}{\lambda_s},$$

for all $r \in \{1, \ldots, p\}$.

Multiplying the last inequality by $\lambda_s/(p-1) > 0$ and taking the summ for all $r \neq s$, we obtain

$$\lambda_s \mathrm{Re}[f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^{p} \lambda_r \mathrm{Re}[f_r(z, \bar{z}) - f_r(z^0, \bar{z}^0)],$$

or

$$\mathrm{Re}\,\langle f(z^0, \bar{z}^0), \lambda\rangle > \mathrm{Re}\,\langle f(z, \bar{z}), \lambda\rangle,$$

which contradicts the optimality of z^0 for the problem (P_λ).

LEMMA *Let $h: C^{2n} \to C^p$ have convex real part with respect to R^p_+ on the manifold Q, and let Ω be a convex set in C^n. If the system*

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, h(z, \bar{z}) < 0 \\ \quad z \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

is inconsistent, then there exists a vector $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T \geqslant 0$ with $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r = 1$, such that

$$\mathrm{Re}\,\langle h(z, \bar{z}), \lambda\rangle \geqq 0 \text{ for all } z \in \Omega.$$

Proof. Let $\varphi = \varphi(x, y)$ denote the real vector function of $2n$ variables $x, y \in R^n$, defined by the formulae

$$\varphi(x, y) = \mathrm{Re}\, h(z, \bar{z}),\ z = x + iy \in C^n,$$

and let

$$X = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^{2n} / z = x + iy \in \Omega\right\}.$$

System (3) is inconsistent iff the system

$$\begin{cases} \varphi(x, y) < 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \end{cases} \tag{4}$$

is inconsistent.

Since the real vector function φ is convex on the set X (Ω is convex and h has convex real part with respect to R^p_+ on Q), the hypotheses of the

Theorem of Fan, Glicksburg and Hoffman [7] are satisfied, thus there exists a vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T \in R^p$, $\lambda \geqslant 0$ with $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r = 1$ such that

$$\langle \varphi(x, y), \lambda \rangle \geqq 0 \text{ for all } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X,$$

or, equivalently

$$\operatorname{Re} \langle h(z, \bar{z}), \lambda \rangle \geqq 0 \text{ for all } z \in \Omega.$$

THEOREM 5. *Let $f: C^{2n} \to C^p$ have convex real part with respect to R^p_+ on the manifold Q and let Ω be a convex set in C^n.*

If z^0 is a properly efficient point for the problem (VPCS), then there exists $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T > 0$ with $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r = 1$ such that z^0 is a solution of the problem (P_λ).

Proof. If z^0 is properly efficient for the (VPCS) then there exists a scalar $M > 0$ such that for each $s \in \{1, \ldots, p\}$, the system

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > 0 \\ \operatorname{Re} [f_s(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z, \bar{z})] > M \operatorname{Re} [f_r(z, \bar{z}) - f_r(z^0, \bar{z}^0)], \ r \neq s \\ z \in \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

is inconsistent.

System (5) being equivalent to the system

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [f_s(z, \bar{z}) - f_s(z^0, \bar{z}^0)] < 0 \\ \operatorname{Re} [M f_r(z, \bar{z}) + f_s(z, \bar{z}) - M f_r(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z^0, \bar{z}^0)] < 0, \ r \neq s \\ z \in \Omega, \end{cases}$$

in view of the previous lemma, for each $s \in \{1, \ldots, p\}$ there exists $\lambda^s \in R^p$, $\lambda^s = (\lambda^s_1, \ldots, \lambda^s_p)^T \geqslant 0$ with $\sum_{r=1}^{p} \lambda^s_r = 1$ such that

$$\operatorname{Re} \left\{ \lambda^s_s f_s [(z, \bar{z}) - f_s(z^0, \bar{z}^0)] + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^{p} \lambda^s_r [M f_r(z, \bar{z}) + f_s(z, \bar{z}) - M f_r(z^0, \bar{z}^0) - f_s(z^0, \bar{z}^0)] \right\} \geqq 0,$$

for all $z \in \Omega$.

Summing these inequalities for $s = 1, \ldots, p$ we obtain

$$\operatorname{Re} \sum_{s=1}^{p} \left\{ \lambda^s_s f_s(z, \bar{z}) + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^{p} \lambda^s_r [M f_r(z, \bar{z}) + f_s(z, \bar{z})] \right\} \geqq$$

$$\geqq \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{p} \left\{ \lambda^s_s f_s(z^0, \bar{z}^0) + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^{p} \lambda^s_r [M f_r(z^0, \bar{z}^0) + f_s(z^0, \bar{z}^0)] \right\} \cdot$$

Rearranging the terms of the sum we obtain

$$\operatorname{Re}\langle f(z, \bar{z}), \lambda\rangle \geqslant \operatorname{Re}\langle f(z^0, \bar{z}^0), \lambda\rangle$$

for all $z \in \Omega$, i.e. z^0 is a solution of the problem (P_λ), with $\lambda = (\lambda_s) \in R^p$ where

$$\lambda_s = \Big(1 + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq s)}}^{p} \lambda_s^r\Big) \Big/ \sum_{r=1}^{p} \Big(1 + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq s)}}^{p} \lambda_s^r\Big) > 0,$$

$s = 1, \ldots, p$.

THEOREM 6. *Let $f: C^{2n} \to C^p$ be an analytic function having convex real part with respect to R_+^p on the manifold Q, let $g: C^{2n} \to C^m$ be an analytic function, let S be a polyhedral cone in C^m with nonempty interior and let*

$$\Omega = \{z \in C^n / g(z, \bar{z}) \in S\}.$$

a) *If the function g is concave with respect to S on Q, then a necessary condition for $z^0 \in C^n$ to be a properly efficient point for the problem (VPCS) is that there exist $\tau \in R_+$, $v \in S^*$, $\lambda = (\lambda_s) \in R^p$, $(\tau, v) \neq 0$, $\lambda > 0$, $\sum_{s=1}^{p} \lambda_s = 1$ such that*

$$\operatorname{Re}\langle v, g(z^0, \bar{z}^0)\rangle = 0$$

$$\tau\overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \tau\nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0) = \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} v + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{v}. \tag{6}$$

b) *If g is strictly concave with respect to S on Q and $z^0 \in \Omega$, then this condition is also sufficient.*

Proof. a) By Theorem 5 it follows that there exists $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_s) > 0$ with $\sum_{s=1}^{p} \lambda_s = 1$ such that z^0 is a solution of the problem (P_λ). In view o fa theorem of Craven and Mond [3], there exist $\tau \in R_+$, $v \in S^*$, $(\tau, v) \neq 0$ such that (6) holds.

b) Since $\lambda > 0$, by Theorem 1, the objective function of the problem (P_λ) has convex real part with respect to R_+ on Q. Hence the hypotheses of Theorem 2 are satisfied, therefore z^0 is a solution of the problem (P_λ). In view of Theorem 4, it follows that z^0 is a properly efficient point for the problem (VPCS).

THEOREM 7. *Let $f: C^{2n} \to C^p$ be an analytic function having convex real part with respect to R_+^p on the manifold Q, S be a closed convex cone in C^m and $g: C^{2n} \to C^m$ be an analytic function, concave with respect to S. Let*

$$\Omega = \{z \in C^n / g(z, \bar{z}) \in S\}.$$

A sufficient condition for $z^0 \in \Omega$ *to be a properly efficient point for the problem (VPCS) is that there exist* $u \in S^*$ *and* $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_s) > 0$ *with* $\sum_{s=1}^{p} \lambda_s = 1$ *such that*

$$\operatorname{Re} \langle u, g(z^0, \bar{z}^0)\rangle = 0$$

$$\overline{\nabla_z f(z^0, \bar{z}^0)} + \nabla_{\bar{z}} f(z^0, \bar{z}^0) = \overline{\nabla_z g(z^0, \bar{z}^0)} u + \nabla_{\bar{z}} g(z^0, \bar{z}^0)\bar{u}. \tag{7}$$

Proof. Since $\lambda > 0$, by Theorem 1 it follows that the objective function of the problem (P_λ) has convex real part with respect to R_+ on Q. Then z^0 is a solution of the problem (P_λ), because the hypotheses of Theorem 1 in [1] are satisfied. By Theorem 4 it follows that z^0 is a properly efficient point for the problem (VPCS).

THEOREM 8. *Let* f, g, S *and* Ω *be as in Theorem* 7. *If, moreover,* S *is a polyhedral cone and one of the following four conditions are satisfied*:

(i) g *satisfies Kuhn-Tucker's complex constraint qualification at* $z^0 \in C^n$ *with respect to* S *on* Q [2];

(ii) *int* $S \neq \emptyset$ *and* g *satisfies Slater's complex constraint qualification with respect to* S *on* Q [4];

(iii) *int* $S \neq \emptyset$ *and* g *satisfies the strict complex constraint qualification with respect to* S *on* Q [4];

(iv) *int* $S \neq \emptyset$ *and* g *satisfies the weak complex constraint qualification at* $z^0 \in C^n$ *with respect to* S *on* Q [4], *then a necessary condition for* $z^0 \in C^n$ *to be a properly efficient point for the problem (VPCS) is that there exist* $u \in S^*$ *and* $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_s) > 0$ *with* $\sum_{s=1}^{p} \lambda_s = 1$ *such that the equalities* (7) *hold.*

Proof. By Theorem 5, there exists $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_s) > 0$ with $\sum_{s=1}^{p} \lambda_s = 1$ such that z^0 is a solution of the problem (P_λ).

Now, a) if (i) is satisfied, by Theorem 3 in [2], there exists $u \in S^*$ which fulfils (7), b) if (ii), or (iii), or (iv) is satisfied, then in view of Theorem 4 în [4] it follows that there exists $u \in S^*$ such that (7) holds.

(Received March 19, 1979)

REFERENCES

1. Abrams, Robert A., *Nonlinear programming in complex space: sufficient conditions and duality*, J. Math. Anal. Appl., **38**, 1972, 619–632.
2. Abrams, Robert A. and Ben-Israel, A., *Nonlinear programming in complex space: necessary conditions*, SIAM J. Control, **9**, 1971, 606–620.
3. Craven, B. D. and Mond, B., *A Fritz John theorem in complex space*, Bull. Austral. Math. Soc., **8**, 1973, 215–220.
4. Duca, Dorel, *Constraint qualifications in nonlinear programming in complex space*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **23**, 1, 1978, 61–65.

5. Duca, Dorel I., *On vectorial programming problem in complex space*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 24, 1, 1979, 51–56.
6. Duca, Dorel I., *The vectorial programming problem in complex space* (to appear).
7. Fan, K., Glicksburg, I. and Hoffman, A. J., *Systems of inequalities involving convex functions*, Amer. Math. Soc. Proc., 8, 1957, 617–622.
8. Geoffrion, A. M., *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, J. Math. Anal. Appl., 22, 1968, 618–630.
9. Gulati, T. R., *A Fritz John type sufficient optimality in complex space*, Bull. Austral. Math. Soc., 11, 1974, 219–224.
10. Maruşciac, Ioan, *Programare geometrică şi aplicaţii*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1978.

PROPRIU EFICIENŢĂ ÎN PROGRAMAREA VECTORIALĂ COMPLEXĂ

(Rezumat)

Generalizind rezultatele din programarea vectorială reală şi pe cele din [5], în lucrarea [6] se formulează problema de programare vectorială complexă neliniară. În această lucrare se defineşte noţiunea de propriu eficienţă în programarea vectorială complexă neliniară şi se dau criterii ca un punct să fie propriu eficient.

I. P. Cluj — Municipiul Cluj-Napoca. Cd. 3003/80

În cel de al XXV-lea an (1980) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* apare în specialităţile:

matematică (4 fascicule)
fizică (2 fascicule)
chimie (2 fascicule)
geologie-geografie (2 fascicule)
biologie (2 fascicule)
filozofie (2 fascicule)
ştiinţe economice (2 fascicule)
ştiinţe juridice (2 fascicule)
istorie (2 fascicule)
filologie (2 fascicule)

На XXV году издания (1980) ***Studia Universitatis Babeş-Bolyai,*** **выходит по следующим специальностям:**

математика (4 выпуска)
физика (2 выпуска)
химия (2 выпуска)
геология-география (2 выпуска)
биология (2 выпуска)
философия (2 выпуска)
экономические науки (2 выпуска)
юридические науки (2 выпуска)
история (2 выпуска)
филология (2 выпуска)

Dans sa XXV-e année (1980) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* paraît dans les spécialités:

mathématiques (4 fascicules)
physique (2 fascicules)
chimie (2 fascicules)
géologie-géographie (2 fascicules)
biologie (2 fascicules)
philosophie (2 fascicules)
sciences économiques (2 fascicules)
sciences juridiques (2 fascicules)
histoire (2 fascicules)
philologie (2 fascicules)

[illegible]

[illegible] prin factorii poștali și prin difuzorii [illegible] pentru străinătate prin ILEXIM Departamentul export-import [illegible] P.O. Box 136–137, telex 11226, București, str. 13 Decembrie nr. 3.