

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

U

MATHEMATICA

1

1979

29599

CLUJ-NAPOCA

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00348

Z.F.C.
n
K.E.J

o

REDACTOR ȘEF: Prof. I. VLAD

REDACTORI ȘEFI ADJUNCTI: Prof. I. HAIDUC prof. I. KOVÁCS prof. I. A. RUS

COMITETUL DE REDACȚIE MATEMATICĂ: Prof. C. KALIK prof. I. MARUȘCIAC, prof.
P. MOCANU, prof. I. MUNTEAN, prof. A. PÁL (redactor responsabil), prof. D. D. STANCU,
conf. M. RĂDULESCU (secretar de redacție)

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ BOLYAI

MATHEMATICA

1

Redacția : 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — INHALT — СОДЕРЖАНИЕ

P. DOVICI, Spațiile de anulare a curburii unei legi de derivare într-un fibrat vectorial ● The nullity spaces of the curvature for a derivation law in a vector bundle	3
V. GA, Studiul comparativ al eficienței unor algoritmi pentru programarea geometrică ● Comparison of the efficiency of some algorithms for geometric programming	7
E. LAINI, Sintetizarea a două distribuții de arborescență ● Синтез двух распределений разветвлений	16
KISS E., Une démonstration simple d'un théorème d'arithmétique ● O demonstrație simplă a unei teoreme de aritmetică	21
V. POP, The triple system VW Cephei ● Системul triplu VW Cephei	23
CS. NEMETHI, Uniformizations of certain convergence structures ● Uniformizări ale unor structuri de convergență	28
P. BRĂDEANU, ȘT. MAKSAY, Determinarea entalpiei în cazul răspîndirii unui jet parietal peste o placă de temperatură constantă ● La détermination de l'enthalpie dans le cas de la propagation d'un jet pariétal sur une plaque avec la température constante	34
M. S. OP, Asupra reducerii n -grupurilor la grupuri ● On the reduction of the n -group to group	38
E. OANCEA, M. RĂDULESCU, Asupra unei metode de ajustare statistică ● Sur une méthode d'approximation statistique	41
GR. M. DOVAN, GH. MUREȘAN, T. TOADERE, Asupra unui sistem informatic privind evidența studenților ● Sur un système informatique concernant l'évidence des étudiants	46
D. I. DUCA, On vectorial programming problem in complex space ● Asupra unei probleme de programare vectorială în domeniul complex	51
E. DUCA, Asupra ordonării punctelor eficiente extremale într-o problemă de programare vectorială ● On the ordering of the efficient extremal points in a vectorial programming problem	57
VIRÁG I., Bemerkung zu einem Satz von H. Wielandt ● Despre o teoremă a lui H. Wielandt	61
I. MUNTEAN, Sur le théorème de convexité de Liapounoff ● Asupra teoremei de convexitate a lui Liapunov	67
M. FRENȚU, C. TERCHILĂ, Macroprocesor în sistemul SIRIS-2 ● Macroprocessor in the SIRIS-2 system	71
I. A. RUS, Some metrical fixed point theorems ● Teoreme metrice de punct fix	73

In memoriam

Profesorul TIBERIU MIHĂILESCU	78
Recenzii — Books — Livres parus — Buchbesprechung — Рецензии	
Gh. Micula, Funcții spline și aplicații (I. PĂVĂLOIU)	79
Wolfgang Brauch, Programmierung mit FORTRAN (F. LANDA)	79
Cronica — Chronicle — Chronique — Chronik — Хроника	
Coloquiul de Geometrie și Topologie	80
Al III-lea Coloquiul de Cercetări operaționale	80

SPAȚIILE DE ANULARE A CURBURII UNEI LEGI DE DERIVARE ÎNTR-UN FIBRAT VECTORIAL

PROFIRA SANDOVICI

Spațiile și indicile de anulare în cazul unei varietăți riemanniene au fost considerate pentru întâia oară de către S. S. Chern și N. Kuiper [2]. Acești autori au arătat că dacă indicele de anulare este constant pe o mulțime deschisă a lui M , atunci pe această mulțime, câmpul spațiilor de anulare $N: x \rightarrow N_x$ este complet integrabil și varietățile de foliație obținute pe această cale sînt local plate. Mai târziu R. Maltz [4] demonstrează că aceste varietăți sînt subvarietăți total geodezice ale lui M . Pe de altă parte, A. Gray [3] reconsideră noțiunile de spațiu și indice de anulare în cazul unui câmp tensorial de tip (1, 3) care formal are proprietățile tensorului de curbură.

În cele ce urmează se stabilesc unele proprietăți ale spațiilor de anulare a curburii unei legi de derivare într-un fibrat vectorial.

Fie $\pi: E \rightarrow M$ un fibrat vectorial diferențiabil C^∞ local trivial cu fibra tip R^n și avînd drept bază o varietate diferențiabilă M de dimensiune n . Vom nota prin ∇^π o lege de derivare în fibratul π și cu R^π , 2-forma de curbură a sa. [1].

DEFINIȚIA 1. Se numește spațiu de anulare a curburii R^π într-un punct $x \in M$, subspațiul N_x al spațiului tangent $T_x(M)$ definit prin

$$N_x = \{v \in T_x(M) \mid R_x^\pi(v, w) = 0 \forall w \in T_x(M)\}$$

Se spune că un câmp de vectori $X \in \mathfrak{X}(M)$ este un câmp de anulare a lui R^π , dacă X aparține câmpului de subspații $N: x \rightarrow N_x$, adică dacă $X_x \in N_x$ pentru orice $x \in M$.

DEFINIȚIA 2. Se numește indice de anulare a lui R^π funcția

$$\mu: x \in M \rightarrow \mu(x) = \dim N_x \in \mathbf{R}$$

În continuare, dacă nu se face nici o specificare, vom preesupune $\mu \neq 0$, $\mu \neq n$.

PROPOZIȚIA 1. Dacă indicele de anulare μ al lui R^π este constant pe o mulțime deschisă $G \subseteq M$, atunci câmpul $N: x \rightarrow N_x$ al spațiilor de anulare este complet integrabil pe G .

Demonstrație. Notăm prin $L(\pi, \pi)$ fibratul vectorial al aplicațiilor liniare ale fibrelor lui π iar prin $\nabla^{L(\pi, \pi)}$ vom nota legea de derivare indusă de Δ^π în $L(\pi, \pi)$ și definită pentru orice secțiune σ a lui $L(\pi, \pi)$ de formula

$$\nabla_x^{L(\pi, \pi)} \sigma = [\nabla_x^\pi, \sigma]$$

Atunci, pentru oricare trei câmpuri de vectori $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, este satisfăcută următoarea identitate a lui Bianchi [7]

$$\sum_{x, Y, Z} \{\nabla_Z^{L(\pi, \pi)}(R^\pi(X, Y)) - R^\pi([X, Y], Z)\} = 0$$

Presupunând că X și Y sînt două cîmpuri de anulare a lui R^π , din această identitate deducem că $R^\pi([X, Y], Z) = 0$ pentru Z arbitrar și astfel rezultă că $[X, Y]$ este de asemenea un cîmp de anulare a lui R^π . Potrivit teoremei lui Frobenius, de aici rezultă că sistemul diferențial N este complet integrabil.

Pentru a obține noi proprietăți ale lui N , vom considera un anumit caz particular. Fie $L_2(T(M), L(E, E))$ fibratul vectorial al aplicațiilor biliniare ale fibratului tangent $\tau: T(M) \rightarrow M$ în fibratul vectorial $L(\pi, \pi)$ [1]. Notăm prin ∇^* o lege de derivare în $L_2(T(M), L(E, E))$ definită ∇^π și de o lege de derivare ∇^τ în fibratul tangent τ prin formula

$$(\nabla_Z^* \omega)(X, Y) = \nabla_Z^{L(\pi, \pi)}(\omega(X, Y)) - \omega(\nabla_Z^\pi X, Y) - \omega(X, \nabla_Z^\pi Y) \quad (1)$$

Se spune că ∇^π este de curbură recurentă în raport cu ∇^* dacă există pe M o 1-formă φ astfel ca să avem

$$\nabla_Z^* R^\pi = \varphi(Z) R^\pi \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$$

PROPOZIȚIA 2. Dacă R^π este recurent și variatarea M este conexă prin arce, atunci avem $n - \mu(x) \geq 2$ pentru orice $x \in M$.

Demonstrație. În condițiile enunțului, R^π nu se anulează în nici un punct x al lui M . [6].

Cum $R^\pi(X, Y) = -R^\pi(Y, X)$ pentru orice $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, avem $\dim N_x \leq n - 2$.

PROPOZIȚIA 3. Dacă 2-forma de curbură R^π este recurentă în raport cu ∇^* , atunci

$$T^\tau(X, Y) \in N \quad \forall X, Y \in N \quad (2)$$

$$\nabla_Z^\tau Y \in N \quad \forall Y \in N, \forall Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (3)$$

unde T^τ este 2-forma de torsiune a lui ∇^τ

Demonstrație. Pentru o lege de derivare $\nabla^* = (\nabla^\tau, \nabla^\pi)$ definită prin (1), are loc următoarea identitate Bianchi [7]

$$(\nabla_X^* R^\pi)(Y, Z) + (\nabla_Y^* R^\pi)(Z, X) + (\nabla_Z^* R^\pi)(X, Y) + R^\pi(T^\tau(X, Y), Z) + \\ + R^\pi(T^\tau(Y, Z), X) + R^\pi(T^\tau(Z, X), Y) = 0$$

În ipoteza că R^π este recurent în raport cu ∇^* , din această identitate, scrisă pentru $X, Y \in N$ și Z arbitrar, deducem că $R^\pi(T^\tau(X, Y), Z) = 0$, de unde rezultă $T^\tau(X, Y) \in N$.

Luînd acum $\omega = R^\pi$ în (1) și substituind $\nabla_Z^* R^\pi$ prin $\varphi(Z) R^\pi$, obținem, pentru $Y \in N$ și Z, X arbitrari, $R^\pi(X, \nabla_Z^\tau Y) = 0$ unde deducem că $\nabla_Z^\tau Y \in N$

COROLAR. Dacă R^π este recurent în raport cu $\nabla^* = (\nabla^\tau, \nabla^\pi)$, atunci $R^\tau(X, Y)Z \in N \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall Z \in N$. Dacă în plus $T^\tau = 0$, atunci $R^\tau(X, Y)Z \in N \forall X, Y \in N, \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstrație. Prima parte a enunțului rezultă din (3) și din definiția lui $R^\tau(X, Y)$. Pentru a doua parte utilizăm identitatea lui Bianchi $R^\tau(X, Y)Z + R^\tau(Y, Z)X + R^\tau(Z, X)Y = 0$.

COROLAR 2. Dacă R^π este recurent în raport cu $\nabla^* = (\nabla^\tau, \nabla^\pi)$ și indicile μ de anulare a lui R^π este constant, atunci cîmpul N al spațiilor de anulare a

lui R^π este paralel în raport cu ∇^* iar varietățile integrale de dimensiune μ ale lui N sînt subvarietăți ale lui M autoparalele în raport cu ∇^* .

PROPOZIȚIA 4. Dacă R^π este recurent în raport cu $\nabla^* = (\nabla^\tau, \nabla^\pi)$ unde ∇^τ este de torsiune nulă și varietatea M este conexă prin arce, atunci 1-forma de recurență φ se anulează pe orice cîmp de vectori care aparține cîmpului N de anulare a lui R^π .

Demonstrație. Avem prin ipoteză $\nabla_X^* R^\pi = \varphi(X)R^\pi \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ și $T^\tau = 0$. Atunci, din identitatea (4) rezultă pentru $X \in N$ și $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi(X)R^\pi(Y, Z) = 0$ de unde, deoarece $R^\pi \neq 0$ [6], obținem $\varphi(X) = 0$ în fiecare punct $x \in M$.

Să presupunem că ipotezele din propoziția 4 sînt satisfăcute și că în plus indicele de anulare μ al lui R^π este constant. Dacă L este o varietate integrală a lui N și $i: L \rightarrow M$ este aplicația de incluziune, atunci avem $i^*\varphi = 0$ deoarece, pentru orice vector

$$\xi \in T_y(L), \text{ avem } i_{*,y}\xi \in N_{i(y)} \text{ și } (i^*\varphi_{i(y)})(\xi) = \varphi_{i(y)}(i_{*,y}\xi) = 0.$$

PROPOZIȚIA 5. Dacă R^π este recurent în raport cu $\nabla^* = (\nabla^\tau, \nabla^\pi)$, atunci spațiul de anulare N_x este invariant prin acțiunea elementelor algebrei grupului de oloonomie infinitesimală a lui ∇^τ .

Demonstrație. Deoarece legea de derivare indusă de ∇^τ în fibratul vectorial $L(\tau, \tau)$ este $\nabla_X^{L(\tau, \tau)}(R^\tau(Y, Z)) = [\nabla_X^\tau, R^\tau(Y, Z)]$, din corolarul 1 și din (3) deducem că

$$\nabla_X^{L(\tau, \tau)}(R^\tau(Y, Z))W \in N \quad \forall W \in N$$

Prin inducție completă obținem în general

$$\nabla_{X_k}^{L(\tau, \tau)} \dots \nabla_{X_1}^{L(\tau, \tau)}(R^\tau(Y, Z))W \in N$$

$$\forall W \in N, \quad \forall Y, Z, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \quad k = 1, 2, \dots$$

(Intra: în redacție la 14 martie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V., *Varietăți diferențiabile finite și infinite dimensionale*, I, Ed. Acad. R.S.R., București, 1976.
2. Chern, S. S., Kuiper, N., *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space*, Ann. of Math., **56**, 1952, 422-430.
3. Gray, A., *Spaces of constancy of curvature operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** 1966, 897-902.
4. Maltz, R., *The nullity spaces of the curvature operator*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, **VIII**, 1966, 1-20.
5. Rosenthal, A., *Riemannian manifolds of constant nullity*, Michigan Math. I., **14**, 1967, 469-480.

6. Sandovici, P., *Secțiuni recurente ale unui fibrat vectorial în raport cu o lege de derivare*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., (I), 1975, 21–25; (II), 1976, 19–22.
7. Sandovici, P., *Legi de derivare de curbura recurentă într-un fibrat vectorial*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., 1, 1978, 16–20.

THE NULLITY SPACES OF THE CURVATURE FOR A DERIVATION LAW IN A VECTOR
BUNDLE

(S u m m a r y)

In this paper some properties of the nullity spaces of the curvature for a derivation law in a vector bundle are given. The author considers particularly the case of recurrent curvature.

STUDIUL COMPARATIV AL EFICIENȚEI UNOR ALGORITMI PENTRU PROGRAMAREA GEOMETRICĂ

VALERICĂ LANGA

Această lucrare își propune compararea rezultatelor obținute pentru diferite programe geometrice test cu metode specifice programării geometrice și cu metode generale de programare neliniară.

1. **Introducere.** În teoria programării geometrice (dezvoltată de Duffin, Peterson și Zener) se consideră o problemă de optimizare de următoarea formă:

Program geometric primal P

$\min g_0(x)$, în condițiile

$$g_k(x) \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$x > 0$$

unde:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \text{ iar } g_k(x) = \sum_{i \in I_k} C_i x_1^{a_{i1}} \cdot x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}$$

Prin I_k am notat mulțimea de indici:

$$I_k = \{m_k, m_k + 1, \dots, n_k\} \text{ unde } m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1,$$

$$\dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = m$$

Exponenții a_{ij} sînt numere reale arbitrare iar coeficienții C_i sînt pozitivi. Polinoamele generalizate g_k ($k = 0, 1, \dots, p$) se numesc pozinoame.

Corespunzător acestui program primal rezultă următorul

Program geometric dual D

$\max v(y)$, în condițiile

$$\sum_{i \in I_0} y_i = 1$$

$$A^T y = 0$$

$$y \geq 0$$

unde

$$v(y) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{C_i}{y_i} \right)^{y_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k}; \quad \lambda_k = \sum_{i \in I_k} y_i, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m \text{ iar } A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

este matricea exponenților programului primal P.

Diferitele metode de rezolvare ale programelor geometrice consideră atît probleme de genul celor prezentate cît și forme transformate ale acestora. Astfel, printr-o schimbare logaritmică de variabile, în $x_j = z_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, se obține următorul program :

Program geometric primal transformat \mathcal{P}
 $\min p_0(z)$, în condițiile
 $p_k(z) \leq 1$, $K = 1, 2, \dots, p$

unde :

$$P_k(z) = \sum_{i \in I_k} C_i e^{a_i \cdot z}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p,$$

a^i fiind linia i din matricea exponenților A .

Deoarece funcția $f(x) = e^x$ este o funcție convexă și orice combinație pozitivă de funcții convexe este tot o funcție convexă, despre programul P , se poate afirma că este un program convex.

Pentru a enunța o problemă transformată și în cazul problemei duale este necesară noțiunea de grad de dificultate care se definește cu ajutorul relației :

$$\text{grad dific.} = \text{nr. term.} - \text{nr. variab.} - 1$$

Prin numărul termenilor se înțelege numărul total de termeni ai funcției de scop împreună cu restricțiile, iar prin numărul variabilelor — numărul variabilelor independente X , dat de rangul matricei A . Se demonstrează ([3]) că orice problemă netrivială de programare geometrică se reduce la o problemă în care matricea exponenților A este de rang n și n este mai mic decît numărul total de termeni m . Prin urmare, gradul de dificultate, $d = m - n - 1$ poate fi presupus întotdeauna ca fiind nenegativ.

În cazul unui program geometric avînd un grad pozitiv de dificultate, prin eliminarea restricțiilor de egalitate ale programului dual, folosind de exemplu metoda simplex, se obține următorul program transformat :

Program geometric dual transformat D
 $\max \ln v(y)$, în condițiile
 $By \leq b$
 $y \geq 0$

unde $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ iar în $v(y)$ variabilele y sînt presupuse exprimate în funcție de y_1, y_2, \dots, y_d .

B este o matrice de tipul $(n+1) \times d$ iar b este un vector coloană cu $n+1$ componente.

Deoarece funcțiile $v(y)$ și $\ln v(y)$ au același punct de maxim pe domeniul restricțiilor duale, programul dual transformat D consideră drept funcție de scop logaritmul funcției duale. În acest fel programul geometric dual transformat poate fi încadrat în clasa programelor neliniare cu funcția de scop concavă și restricțiile liniare.

2. Metode de rezolvare a problemelor de programare geometrică. Se cunosc mai multe metode pentru rezolvarea problemelor de programare geometrică. Metodele considerate în această lucrare se pot grupa în felul următor :

Pentru problema primală

I. Metode specifice programării geometrice

1. Metoda liniarizării [5]
2. Metoda condensării [7]

II. Metode generale de programare neliniară

1. Metoda funcțiilor de penalizare interioare a lui Fiacco și McCormick [4].
2. Metoda direcțiilor admisibile a lui Zoutendijk — Zuhevički [8].

Pentru problema duală

1. Metoda gradientului proiectat a lui Rosen [7]
2. Metoda funcțiilor interioare de penalizare

Metodele specifice problemelor de programare geometrică conduc la o succesiune de programe liniare care pot fi rezolvate cu ajutorul calculatoarelor electronice ținând seama de faptul că pentru metoda simplex există programe bine puse la punct și verificate în practică.

Metoda funcțiilor interioare de penalizare se bazează pe transformarea problemei de optimizare inițială într-o secvență de probleme nerestricționate prin intermediul unei funcții auxiliare, care își atinge minimumul într-un punct care reprezintă o aproximație pentru punctul de minim al problemei inițiale.

Metoda direcțiilor admisibile poate fi aplicată unui program geometric primal sub forma sa transformată P_* , iar metodele considerate pentru rezolvarea programelor geometrice duale se aplică programului dual transformat D_* .

Datorită faptului că algoritmul gradientului proiectat construiește puncte aflate pe frontiera domeniului soluțiilor admisibile și în astfel de puncte funcția $\ln V(y)$ nu este diferențiabilă, programul D_* este înlocuit, în cazul acestei metode, cu următorul program aproximant:

$\max \ln V(y)$, în condițiile

$$By \leq b - \varepsilon$$

$$y \geq \varepsilon$$

unde ε este un număr pozitiv suficient de mic.

Aceste metode de rezolvare a problemelor de programare geometrică au fost programate la calculatorul *FELIX C-256* și rulate folosind următoarele probleme test:

Problema primala nr. 1.

$$\begin{aligned} \min (x_1 + x_2) \\ x_1^{-1} + x_2^{-1} \leq 1 \\ x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

Problema duala nr. 1

$$\begin{aligned} \max \left(\frac{1}{y_1}\right)^{y_1} \left(\frac{1}{y_2}\right)^{y_2} \left(\frac{1}{y_3}\right)^{y_3} \left(\frac{1}{y_4}\right)^{y_4} (y_3 + y_4)^{(y_3 + y_4)} \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema primala nr. 2

$$\begin{aligned} \min & (2x_1x_3^{-1}x_4 + 2x_1 + x_1x_4 + x_2^{-1}) \\ & x_1^{-1}x_2 + x_1^{-1} \leq 1 \\ & x_1x_4^{-1} \leq 1 \\ & x_1x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 > 0 \end{aligned}$$

Problema primala nr. 3

$$\begin{aligned} \min & (x_1x_2^{-1} + x_1^{-1}x_2^{-1}) \\ & x_1^{-1}x_2^{-1} \leq 1 \\ & x_1^{-1}x_2^2 + x_1^{-1} \leq 1 \\ & \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 \leq 1 \\ & \frac{1}{4}x_1^{-1}x_2^2 + 2x_1^{-1} \leq 1 \\ & x_1, x_2 > 0 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema duala nr. 2

$$\begin{aligned} \max & \left(\frac{2}{y_1}\right)^{y_1} \left(\frac{2}{y_2}\right)^{y_2} \left(\frac{1}{y_3}\right)^{y_3} \left(\frac{1}{y_4}\right)^{y_4} \cdot \\ & \left(\frac{1}{y_5}\right)^{y_5} \left(\frac{1}{y_6}\right)^{y_6} \cdot \left(\frac{1}{y_7}\right)^{y_7} \left(\frac{1}{y_8}\right)^{y_8} \\ & (y_5 + y_6)^{(y_5 + y_6)} y_7^{y_7} \cdot y_8^{y_8} \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8 = 0 \\ & -y_4 + y_5 = 0 \\ & -y_1 + y_6 = 0 \\ & y_1 + y_3 - y_7 = 0 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema duală nr. 3

$$\begin{aligned} \max & \left(\frac{1}{y_1}\right)^{y_1} \left(\frac{1}{y_2}\right)^{y_2} \left(\frac{1}{y_3}\right)^{y_3} \left(\frac{1}{y_4}\right)^{y_4} \left(\frac{1}{y_5}\right)^{y_5} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{1/9}{y_6}\right)^{y_6} \left(\frac{1/9}{y_7}\right)^{y_7} \left(\frac{1/4}{y_8}\right)^{y_8} \left(\frac{2}{y_9}\right)^{y_9} \cdot y_3^{y_3} \\ & (y_4 + y_5)^{(y_4 + y_5)} (y_6 + y_7)^{(y_6 + y_7)} (y_8 + y_9)^{(y_8 + y_9)} \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + 2y_6 - y_8 - \\ & - y_9 = 0 \\ & -y_1 - y_2 - y_3 + 2y_4 + 2y_7 + 2y_8 = 0 \end{aligned}$$

Problema primala nr. 4

$$\begin{aligned} \min & x_1^2x_2^{-1} \\ & x_1^{-1} \leq 1 \\ & \frac{1}{5}x_1x_2 \leq 1 \\ & x_1^{-2} + x_2^{-2} \leq 1 \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

3. Comparația și concluzia. În literatura de specialitate, în realizarea diferitelor comparații între algoritmi, se folosesc în esență drept criterii:

1. timpul de rulare la calculatorul electronic
2. rapiditatea convergenței
3. erorile introduse prin calcule

Este greu de văzut care dintre aceste criterii este cel mai bun pentru a judeca eficiența unor algoritmi. De altfel, criteriul numărul unu este în mare măsură influențat de numărul de iterații efectuate, deci de rapiditatea convergenței algoritmului considerat. Criteriul numărul trei își are justificarea numai în situația în care sînt cunoscute soluțiile exacte cel puțin pentru o parte din problemele considerate, lucru care în majoritatea cazurilor este foarte greu de aflat.

Făcînd o comparație între algoritmi amintiți de programare geometrică, am avut în vedere ca un prim aspect în cazul programelor primale compararea rezultatelor obținute cu metodele specifice programării geometrice cu cele obținute cu metodele generale de programare neliniară. În al doilea rînd, am încercat să stabilim un algoritm care să poată fi preferențiat în cele două categorii.

În realizarea comparației între algoritmi menționați de programare geometrică, considerăm că trebuie ținut seama și de eficiența unor algoritmi intermediari folosiți ca părți componente în metodele generale utilizate pentru rezolvarea unui program geometric. În cazul nostru, în stabilirea eficienței metodei penalizării interioare, trebuie luată în considerare și eficiența algoritmului folosit în optimizarea nerestricționată. Principalii algoritmi folosiți în literatură pentru optimizarea nerestricționată sînt: Cauchy, Fletcher-Reeves, Davidon-Fletcher-Powel și Newton generalizat. O prezentare a lor se găsește în [2]. Diferiți autori afirmă că, deoarece efortul pe iterație este aproximativ același pentru fiecare metodă, timpul de calcul este cam în același raport cu numărul de iterații. În majoritatea problemelor test întîlnite, algoritmul cu cel mai mic număr de iterații se pare a fi cel al lui Fletcher-Reeves. Acesta ar fi unul din motivele pentru care programul metodei funcțiilor interioare de penalizare folosește pentru determinarea minimumului nerestricționat, acest algoritm. În plus, în fiecare algoritm pentru optimizare nerestricționată se determină la fiecare iterație lungimea pasului de deplasare pe direcția considerată în așa fel încît pe această direcție funcția să descrească (crească). Aceasta este în general o problemă dificilă și se reduce la problema determinării unui punct de minim (maxim) unidimensional. Programul metodei funcțiilor interioare de penalizare folosește pentru acest scop o subrutină din pachetul de subrutine științifice ale calculatorului IBM-360, care se bazează pe interpolarea cu o cubică a funcției al cărui minim unidimensional trebuie determinat. Se pare că tipul de lucru al acestei subrutine este relativ mare, fapt care influențează timpul-mașină necesar rezolvării în ansamblu a unui program geometric. Această metodă prezintă însă avantajul de a introduce erori relativ mici în calcule. De exemplu, pentru problema primală numărul unu, folosind metoda funcțiilor interioare de penalizare, s-au obținut valorile $x_1 = 2,000050$, $x_2 = 2,000050$, iar valoarea funcției de scop găsită a fost 4,000100, soluția exactă a acestei probleme fiind $x_1 = 2,000000$, $x_2 = 2,000000$ iar minimumul funcției 4,000000.

De altfel, trebuie menționat faptul că eficiența algoritmilor mai depinde, cel puțin în apropierea punctului de optim, și de eroarea de rotunjire introdusă de calculator. Deci, dacă dorim rezultate de o mare precizie, atunci calculul în dublă precizie este absolut obligatoriu. În plus, procesul de acumulare a erorilor este cu atît mai mare cu cît numărul iterațiilor crește. Este semnificativ în acest sens faptul că metoda direcțiilor admisibile, care ajunge la soluția optimă a unui program geometric după un număr mult mai mic de iterații decît metoda funcții-

lor interioare de penalizare, obține pentru problema primală numărul unu soluția $x_1 = 2,00000$ $x_2 = 2,00000$, respectiv 4,00000 pentru minimul funcției.

Așa după cum se anticipa, timpul necesar rulării este influențat în mare parte de rapiditatea convergenței. De exemplu, programului metodei funcțiilor interioare de penalizare, care efectuează un număr relativ mare de iterații, îi este necesar un timp de lucru destul de mare în comparație cu celelalte metode care se caracterizează printr-o rapiditate a convergenței mai ridicată. Rezultatele obținute pentru problemele primale și duale considerate, sistematizate din punctul de vedere al celor trei criterii s-ar putea prezenta sub forma tabelelor 1 și 2.

În aceste tabele am notat prin Nr. iter. — numărul total de iterații necesar pentru obținerea soluției optime, iar prin TIME — timpul unității centrale a calculatorului exprimat în sutimi de secundă necesar execuției programului.

Rezultatele obținute pentru problemele test folosite credem că ne îndreptătesc să deducem următoarele concluzii ce pot fi îmbunătățite pe măsură ce numărul problemelor test vor crește.

1. Metodele generale de programare neliniară, metoda funcțiilor interioare de penalizare și metoda direcțiilor admisibile pot fi aplicate cu succes și programelor geometrice sub forma lor standard sau sub forma modificată.

Problema	Problema primala nr. 1				Problema primala nr. 2				
	Metoda	x	$g_0(x)$	TIME	Nr. iter.	x	$g_0(x)$	TIME	Nr. iter.
Metoda liniarizării		2,019655 1,992620	4,012276	570	12	1,256997 0,257075 0,795547 1,256997	11,96162	1314	11
Metoda condensării									
Metoda funcț. inter. de penaliz.		2,000050 2,000050	4,000100	344	19	1,2668322 0,2668055 0,7892415 1,2671791	11,954980	3285	214
Metoda direcțiilor admisibile		2,00000 2,00000	4,00000	742	15				

2. În ceea ce privește primele două criterii de comparație considerate, metodele specifice programelor geometrice rămân superioare metodelor generale de programare neliniară.

3. Comparând rezultatele obținute cu cele două metode generale de programare neliniară se poate afirma că dacă din anumite motive rapiditatea convergenței este considerat criteriul mai important, atunci metoda direcțiilor admisibile pare a fi mai bună decât metoda funcțiilor interioare de penalizare. În ceea ce privește timpul de rulare se pare că metoda funcțiilor interioare de penalizare este superioară. Menționăm că prin rapiditatea convergenței am înțeles în acest caz numărul total de iterații efectuate pentru atingerea soluției optime.

4. Faptul că algoritmul lui Rosen se aplică unui program care aproximează un program geometric dual are influență asupra rezultatelor obținute cel puțin în cazul problemelor duale cu număr mare de variabile. De exemplu, în cazul problemei duale numărul doi, folosind algoritmul lui Rosen se obține pentru funcția duală de scop valoarea 11,62123, iar folosind metoda funcțiilor interioare de penalizare se obține 11,8673803, care este o valoare mult mai apropiată de valorile obținute pentru funcția primală de scop. După cum se demonstrează în teorema de dualitate a programării geometrice, valoarea funcției primale de

Tabel 1

Problema primala nr. 3				Problema primala nr. 4			
x	$g_0(x)$	TIME	Nr. iter.	x	$g_0(x)$	TIME	Nr. iter.
				1,021993 4,846446	0,215512	241	3
2,71574 1,30987	2,35440	397	4	1,02155 4,89453	0,21321	214	3
2,8340016 1,353665	2,35424	1342	90	1,0217219 4,8917207	0,2134046	1086	77
2,70156 1,30444	2,35484	1667	23	1,02157 4,89433	0,21323	2017	49

Tabel 2

14

Problema Metoda	Problema duala nr. 1				Problema duala nr. 2				Problema duala nr. 3			
	Y	V(y)	TIME	Nr. iter.	y	V(y)	TIME	Nr. inter.	Y	V(y)	TIME	Nr. iter.
Metoda funcțiilor interioare de penaliza-	0,50000	4,00000	263	7	0,37074	11,867380	5137	93	0,87374	2,29736	11524	441
	0,50000				0,20583				0,12626			
	0,50000				0,13643				0,00108			
	0,50000				0,28699				0,44313			
					0,28699				0,27594			
					1,30393				0,09242			
					0,50717				0,02143			
					0,37074				0,17620			
Metoda lui Rosen	0,50000	3,99999	113	1	0,28106	11,62123	3415	91				
	0,50000				0,28838							
	0,50000				0,10065							
	0,50000				0,32991							
					1,00297							
					0,38172							
					0,28106							

V. LANGĂ

scop în punctul de optim al programului primal trebuie să coincidă cu valoarea funcției duale de scop în punctul de optim al programului dual.

5. Totuși metoda gradientului proiectat a lui Rosen se poate caracteriza printr-o bună rapiditate în convergență și printr-un timp de execuție inferior timpului de execuție necesar metodei funcțiilor interioare de penalizare în cazul aplicării acestor două metode programelor geometrice.

Nu putem încheia, fără a sublinia faptul că aceste concluzii trebuie să privească prin prisma caracterului lor experimental: ele sînt susceptibile de modificări pe măsură ce numărul experimentelor vor crește.

(Intrat în redacție la 8 septembrie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. Asaadi, J., *A computational comparison of nonlinear programs*, Math. programming, 4, 1973, 144-154.
2. Dumitru, V., *Programare neliniară. Algoritmi, programare, rezultate numerice*, Ed. Academiei, București, 1975.
3. Duffin, R. J., Peterson, E., Zener, C., *Geometric Programming* (Traducere în limba rusă), Izd. Mir, Moskva, 1972.
4. Fiacco, V. A., Mc Cormick, G. P., *Nonlinear programming sequential unconstrained minimization techniques* (Traducere în limba rusă), Izd. Mir, Moskva, 1972.
5. Gochet, W., Smeers, Y., *Using of linear programs for solving of geometric programs*, Cahier du Centre d'étude de recherche operationnelle, 16, 1974.
6. Huard, P., *Tour d'horizon. Programmation non lineaire*, Revue française d'informatique et de recherche operationnelle RI, 1971, 3-48.
7. Marușciac, I., *Programare geometrică și aplicații*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca (sub tipar).
8. Marușciac, I., *Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară*, Ed. Dacia, Cluj, 1972.
9. Polak, E., *Penalty Function Methods. Computational Methods in optimization. A Unified Approach*, Academic Press, New-York and London, 1971, 126-150.

COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF SOME ALGORITHMS FOR GEOMETRIC PROGRAMMING

(Summary)

The efficiency of the different algorithms for geometric programming is compared. The comparison of the efficiency is done between general algorithms for the convex programming and algorithms specific for the geometric programming.

SINTETIZAREA A DOUĂ DISTRIBUȚII DE ARBORESCENȚĂ

E. DANI

1. **Introducere.** Prezenta lucrare se bazează în mod nemijlocit pe două lucrări: [1] în care, ca rezultat intermediar s-a construit distribuția arborescențelor în funcție de trei caracteristici: semilungimea m , numărul divizorilor primi principali k și indicele radicalului d și [3], în care s-a construit o distribuție în funcție de două caracteristici: semilungime m și numărul n al divizorilor primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 . În vederea construirii celor două distribuții s-au folosit două funcții generatoare: $g_1(x, y)$ pentru prima distribuție [1, [4]], respectiv $g_2(x, z; m_0)$ pentru cea de a doua distribuție [3]. Ambele funcții depind de două variabile, a doua depinde și de un parametru.

Scopul lucrării de față este construirea unei distribuții în raport cu reuniunea caracteristicilor celor două distribuții construite. Procedînd în mod similar ca în lucrările citate, se trece prima dată la construirea ecuației funcționale a unei funcții generatoare de trei variabile și de un parametru $g(x, y, z; m_0)$ care sintetizează funcțiile generatoare definite anterior.

2. **Ecuația funcțională.** Funcția $g_1(x, y)$ s-a definit prin ecuația funcțională

$$xyg_1(x, y)g_1(x, 1) - g_1(x, y) + 1 = 0, \quad (1)$$

iar funcția $g_2(x, z; m_0)$ prin ecuația funcțională

$$xg_2^2(x, z; m_0) - (1 + (1 - z)x^{m_0})g_2(x, z; m_0) + 1 = 0. \quad (2)$$

Funcțiile generatoare $g_1(x, y)$ și $g_2(x, z; m_0)$ se consideră dezvoltate în serie Mac-Laurin. Coeficientul $T_1(m, k)$ al termenului de grad m în x și k în y al funcției $g_1(x, y)$ determină distribuția arborescențelor în funcție de semilungimea m și numărul divizorilor primi principali k . Coeficientul $T_2(m, n)$ al termenului de grad m în x și n în z al funcției $g_2(x, z; m_0)$ determină distribuția arborescențelor în funcție de semilungimea m și numărul n al divizorilor primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 .

Pentru $y = 1$ funcția generatoare $g_1(x, y)$ trece în funcția generatoare $f(x)$ a numărului tuturor arborescențelor de semilungime m . Ecuația funcțională a funcției $f(x)$ este următoarea: $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

Avînd în vedere că orice arborescență ireductibilă $A0$ este de forma $A0 = 1.A.0$, unde A este o arborescență [2], rezultă că numărul arborescențelor de semilungime $m + 1$ este egal cu numărul tuturor arborescențelor de semilungime m și prin urmare $xf(x)$ este funcția generatoare a numărului de arborescențe ireductibile. În general $(xf(x))^k$ este funcția generatoare a numărului de arborescențe cu k divizori primi principali.

Dacă funcția generatoare a arborescențelor de semilungime m cu n divizori de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 este $g_2(x, z; m_0)$, funcția

generatoare a arborescențelor ireductibile de semilungime $m + 1$ cu n divizori primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 este $xg_2(x, z; m_0) + (z - 1)x^{m_0}$. Termenul $(z - 1)x^{m_0}$ apare în urma faptului că o arborescență de semilungime $m_0 - 1$ cu nici un divizor prim de tip dat se transformă într-o arborescență de tip dat de semilungime m_0 . Pentru $z = 1$ se obține $xg_2(x, 1; m_0) = xg_1(x, 1) = xf(x)$.

Pe baza celor stabilite, în ecuația funcțională (1), funcția $g_1(x, y)$ se poate înlocui cu funcția $g(x, y, z; m_0)$ de trei variabile x, y, z și de un parametru m_0 , dacă simultan funcția $xg_1(x, 1)$ se înlocuiește cu $xg(x, 1, z; m_0) + (z - 1)x^{m_0} = xg_2(x, z; m_0) + (z - 1)x^{m_0}$, unde $xg(x, 1, 1; m_0) = xg_2(x, 1; m_0) = xg_1(x, 1) = xf(x)$. Se obține ecuația funcțională sintetizată:

$$yg(x, y, z; m_0)(xg(x, 1, z; m_0) + (z - 1)x^{m_0}) - g(x, y, z; m_0) + 1 = 0, \quad (3)$$

prin care se definește funcția generatoare $g(x, y, z; m_0)$.

3. Funcția generatoare. Funcția generatoare $g(x, y, z; m_0)$ este o generalizare veritabilă a funcțiilor generatoare $g_1(x, y)$ și $g_2(x, z; m_0)$, deci implicit și a funcției $f(x)$ deoarece: $g(x, y, 1; m_0) = g_1(x, y)$, $g(x, 1, z; m_0) = g_2(x, z; m_0)$ și $g(x, 1, 1; m_0) = f(x)$. Coeficientul $T(m, k, n; m_0)$ al termenului de grad m în x , k în y și n în z al seriei funcției $g(x, y, z; m_0)$ reprezintă numărul arborescențelor de semilungime m , cu k divizori primi principali și cu n divizori primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 .

Dezvoltînd funcția $g(x, y, z; m_0)$ în serie Mac-Laurin, în raport cu variabila y , se obține:

$$g(x, y, z; m_0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Y^k y^k, \quad Y = xg(x, 1, z; m_0) + (z - 1)x^{m_0}. \quad (4)$$

În continuare se trece la dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcției Y^k , $k \geq 1$, în raport cu variabila x . Se studiază separat cazurile $k = 1$ și $k \geq 2$.

$k = 1$. Seria funcției Y depinde de seria funcției $g(x, 1, z; m_0) = g_2(x, z; m_0)$ ai cărei coeficienți sînt polinoame $P(m, 1, z; m_0)$ în variabila z , corespunzătoare distribuției arborescențelor de semilungime m în funcție de numărul n al divizorilor primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 , independent de numărul divizorilor primi principali. Astfel se poate scrie

$$\begin{cases} P(m, 1, z; m_0) = \sum_{k=1}^{m-1} P(m-1, k, z; m_0) + \Delta(m, z; m_0) \\ \Delta(m, z; m_0) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m \neq m_0, \\ z - 1 & \text{dacă } m = m_0, \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

și prin urmare

$$\begin{cases} T(m, 1, n; m_0) = \sum_{k=1}^{m-1} T(m-1, k, n; m_0) + \delta(m, n; m_0) \\ \delta(m, n; m_0) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m \neq m_0, \\ 1 & \text{dacă } m = m_0 \text{ și } n = 1, \\ -1 & \text{dacă } m = m_0 \text{ și } n = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

unde $m \geq 2$, $n = 0$, $[m/m_0]$, $[m/m_0]$ fiind partea întreagă a numărului m/m_0 . Notînd cu $T(M, K, N; m_0)$ un termen oarecare din membrul doi al identității (6) se consideră $T(M, K, N; m_0) = 0$ dacă nu este îndeplinită condiția: $N = 0$, $[M/m_0]$.

$k \geq 2$. Punînd în ecuația (3) $y=1$ se obține următoarea ecuație funcțională pentru funcția Y :

$$Y^2 - ((z-1)x^{m_0} + 1)Y + (z-1)x^{m_0} + x = 0 \quad (7)$$

și prin urmare pentru determinarea coeficienților seriei funcției Y^k , $k \geq 2$, se poate folosi următoarea relație de recurență:

$$Y^k = ((z-1)x^{m_0} + 1)Y^{k-1} - ((z-1)x^{m_0} + x)Y^{k-2}. \quad (8)$$

Potrivit identității (8), coeficientul termenului de grad m al seriei funcției Y^k este un polinom $P(m, k, z; m_0)$ de variabila z , definit prin relația de recurență

$$P(m, k, z; m_0) = P(m, k-1, z; m_0) - P(m-1, k-2, z; m_0) + (z-1)(P(m-m_0, k-1, z; m_0) - P(m-m_0, k-2, z; m_0)), \quad (9)$$

unde $m \geq 2$, $k = 2$, m . Notînd cu $P(M, K, z; m_0)$ un polinom oarecare din membrul doi al identității și exceptînd cazul $P(0, 0, z; m_0) = 1$, se consideră $P(M, K, z; m_0) = 0$ dacă nu este îndeplinită condiția: $M \geq 1$, $K = 1$, M .

Din identitatea (9) coeficientul $T(m, k, n; m_0)$ al termenului de grad m în x , k în y și n în z , este definit prin relația de recurență

$$T(m, k, n; m_0) = T(m, k-1, n; m_0) - T(m-1, k-2, n; m_0) + T(m-m_0, k-1, n-1; m_0) - T(m-m_0, k-2, n-1; m_0) - T(m-m_0, k-1, n; m_0) + T(m-m_0, k-2, n; m_0), \quad (10)$$

unde $m \geq 2$, $k = 2$, m , $n = 0$, $[m/m_0]$. Notînd cu $T(M, K, N; m_0)$ un coeficient oarecare din membrul doi al identității și exceptînd cazul $T(0, 0, 0; m_0) = 1$ se consideră $T(M, K, N; m_0) = 0$ dacă nu este îndeplinită condiția: $M \geq 1$, $K = 1$, M ; $N = 0$, $[M/m_0]$.

Pentru a putea calcula valorile $T(m, k, n; m_0)$ prin recurență pe baza formulelor (6) și (10) este necesară precizarea încă a următoarelor valori particulare:

$$\begin{cases} T(1, 1, 0; 1) = 0, T(1, 1, 1; 1) = 1, \\ T(1, 1, 0; m_0) = 1, T(1, 1, 1; m_0) = 0, m_0 \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

În concluzie se poate enunța următoarea teoremă:

TEOREMA 1. Numărul $T(m, k, n; m_0)$ al arborescențelor de semilungime m , cu k divizori primi principali și cu n divizori primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 este dat prin funcția generatoare

$$g(x, y, z; m_0) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{n=0}^{[m/m_0]} T(m, k, n; m_0) z^n y^k x^m, \quad (12)$$

definită prin ecuația funcțională (3) ai cărei coeficienți se calculează prin recurență cu formulele (11), (6) și (10).

Coeficienții seriei (12), calculați pentru $m_0 = 1$, $m = 1, 10$, sînt trecuți în tabelul 1 din lucrarea [4].

4. **Coeficientul redus.** Coeficientul redus este numărul acelor arborescențe, dintre cele caracterizate prin coeficientul $T(m, k, n; m_0)$, care nu au radicali proprii. O arborescență A admite arborescența B ca radical dacă se poate scrie $A = B^d$ cu un exponent d oarecare. Radicalul este propriu dacă $d \geq 2$ și este impropriu dacă $d = 1$. Ca purtător de informație relativ la distribuția cercetată se va folosi polinomul $P(m, k, z; m_0)$, definit prin formulele (5) și (9), la care se mai adaugă

$$P(1, 1, z; m_0) = \begin{cases} z & \text{dacă } m_0 = 1, \\ 1 & \text{dacă } m_0 \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Divizibilitatea polinoamelor, inclusiv polinomul de grad 0, se înțelege în modul obișnuit în teoria numerelor. Cîmul a două polinoame cu coeficienți numere întregi aparține domeniului de integritate al polinoamelor cu coeficienți numere întregi. În acest sens, folosind ca simbol pentru coeficientul redus PR în loc de P , se poate scrie pe baza teoremei 2 din lucrarea [1] o formulă analogă cu funcția lui Euler:

$$PR(m, k, z; m_0) = \sum_{d \mid m} \mu(d) P(m/d, k/d, z^d; m_0), \quad (14)$$

unde $m \geq 1$, $k = 1$, m ; D este cel mai mare divizor comun al numerelor m și k , iar $\mu(d)$ este funcția lui Moebius.

Coeficientul redus $TR(m, k, n; m_0)$ este coeficientul polinomului $PR(m, k, z; m_0)$. Se poate scrie și formula directă

$$TR(m, k, n; m_0) = \sum_{d \mid m} \mu(d) T(m/d, k/d, n/d; m_0), \quad (15)$$

unde $m \geq 1$, $k = 1$, m , $n = 0$, $[m/m_0]$ și, notînd cu $T(M, K, N; m_0)$ un coeficient oarecare din membrul doi al egalității, se consideră $T(M, K, N; m_0) = 0$ dacă nu este îndeplinită condiția $M \geq 1$, $K = 1$, $M, N = 0$, $[M/m_0]$, N întreg.

În concluzie rezultă următoarea teoremă:

TEOREMA 2. Numărul $TR(m, k, n; m_0)$ al arborescențelor de semilungime m , cu k divizori primi principali, cu n divizori primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 și fără radicali proprii este dat prin formula (15), unde $m \geq 1$, $k = 1$, m , $n = 0$, $[m/m_0]$, iar D este cel mai mare divizor comun al numerelor m și k .

Pentru $m_0 = 1$, $m = 1, 10$ numerele reduse sînt trecute în tabelul 1 din lucrarea [4].

Prin inversarea formulei (15) rezultă o a treia teoremă:

TEOREMA 3. Numărul arborescențelor de semilungime m , cu k divizori primi principali și n divizori primi de ordin oarecare de tip dat de semilungime m_0 admite descompunerea

$$T(m, k, n; m_0) = \sum_{d \mid m} TR(m/d, k/d, n/d; m_0), \quad (16)$$

unde $m \geq 1$, $k = 1$, m , $n = 0$, $[m/m_0]$, și D este cel mai mare divizor comun al numerelor m și k .

Se precizează că numărul $TR(m/d, k/d, n/d; m_0)$ corespunde mulțimii tuturor arborescențelor care admit un radical de indice maxim d .

5. **Observații finale.** Rezultatele formulate prin teoremele 1—3, împreună cu teorema 1 din lucrarea [1], permit construirea distribuției arborilor în funcție de semilungime, ordinul grupului rotirii și numărul divizorilor primi de tip dat de semilungime oarecare. Rezolvarea acestei probleme în toată generalitatea ei necesită studierea prealabilă a divizibilității arborilor. Într-un caz simplu însă, când divizorul prim este o muchie suspendată, problema poate fi rezolvată relativ ușor. Lucrarea [4] este destinată rezolvării acestei probleme. De cazul general intenționăm să ne ocupăm cu altă ocazie.

(Intrat în redacție la 27 martie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Dani, E., *Cislo derev'ev dannoj dliny*, *Mathematica*, 18 (41), 2, 1976.
2. Dani, E., *Operații cu arborescențe*, „Probleme actuale de informatică și conducere”, CI, 8, Cluj-Napoca, 1977.
3. Dani, E., *Raspredelenie razvetvlenij dannoj dliny v zavisimosti ot čisla visjačix dug*, An. șt. Univ. „Al. I. Cuza”, *Matematica*, XXIV, S. I. a, f. 1, Iași, 1978.
4. Dani, E., *Distribuția arborilor de lungime dată în funcție de numărul muchiilor suspendate* (sub tipar).

СИНТЕЗ ДВУХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЙ

(Резюме)

Настоящая работа основывается на предыдущих работах, в одной из которых было построено распределение разветвлений в зависимости от трёх характеристик: от полудлины, числа главных простых дивизоров и индекса корня, а в другой было построено распределение разветвлений в зависимости от двух характеристик: от полудлины и числа простых дивизоров любого порядка данного типа данной полудлины. Для построения этих двух распределений были определены две генерирующие функции. Целью работы является построение одного распределения по отношению к объединению характеристик двух построенных распределений. Действуя так же как и в предыдущих работах, складывается, синтезом ранее определённых генерирующих функций, одна генерирующая функция трёх переменных и одного параметра.

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

KISS ERNEST

M. Yehuda Rav donne une démonstration pour le théorème suivant ;

THÉORÈME *L'équation diophantienne*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k}$$

m et n nombres naturels, $(m, n) = 1$, a des solutions x_1, x_2, \dots, x_k nombres naturels s'il existe deux nombres naturels M et N avec les propriétés suivantes ;

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{M}{N} ; N_1, N_2, \dots, N_k / N ; \\ (N_1, N_2, \dots, N_k) &= 1 \text{ et} \\ N_1 + N_2 + \dots + N_k &\equiv 0 \pmod{M}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous donnons une démonstration simple de ce théorème.
La condition est suffisante.

Soit

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N} ; N_1, N_2, \dots, N_k / N$$

et

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = hM.$$

Nous avons

$$\frac{m}{n} = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_k}{hN} = \frac{1}{hN} + \dots + \frac{1}{hN} \cdot \frac{N_i}{N_i}$$

q.e.d.

La condition est nécessaire.

Soit

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = \frac{x_2 x_3 x_4 \dots x_k + \dots + x_1 x_2 \dots x_{k-1}}{x_1 x_2 \dots x_k}$$

et

$$(x_2 x_3 \dots x_k, \dots, x_1 x_2 \dots x_{k-1}) = d.$$

Nous avons

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{x_2 \dots x_k}{d} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_{k-1}}{d}}{\frac{x_1 x_2 \dots x_k}{d}}$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_k}{d} = hm = N$$

$$\frac{x_2 x_3 \dots x_k}{d} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_{k-1}}{d} = hm = M$$

et

$$\left(\frac{x_2 x_3 \dots x_k}{d}, \dots, \frac{x_1 x_2 \dots x_{k-1}}{d} \right) / N = 1$$

q.e.d.

Observation. De cette démonstration nous pourrions déduire que la solution existe même si $(N_1, N_2, \dots, N_k) \neq 1$, mais nous pouvons constater que s'il existe des solutions il y a toujours de tels diviseurs N_1, N_2, \dots, N_k , pour lesquels $(N_1, N_2, \dots, N_k) = 1$.

(Manuscrit reçu le 4 avril 1978)

BIBLIOGRAPHIE

1. Yehuda Rav, *On the representation of rational numbers as a sum of a fixed number of unit fractions*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik”, Band 222, Heft 3;4, 1966, 207–213.

O DEMONSTRAȚIE SIMPLĂ A UNEI TEOREME DE ARITMETICĂ

(R e z u m a t)

Se dă o demonstrație elementară a teoremei care exprimă condiția necesară și suficientă ca o fracție rațională să se descompună în k fracții cu numărătorul unitate.

THE TRIPLE SYSTEM VW CEPHEI

VASILE POP

1. **Introduction.** The close binary system VW Cephei has been observed as far back as in 1926. Recently Heintz [2] discovered a new component, constituting with the binary VW Cephei a triple system. From astrometric measurements, Hershhey [3] established that its absolute parallax is $\Pi = 0''.041$ and determined the following orbital elements with respect to the mass center of the triple system:

$$\begin{aligned} i &= +29^{\circ}.2; \\ \Omega &= 0^{\circ}.9; \\ \omega &= 255^{\circ}.5; \\ \alpha &= 0''.130 \pm 0''.002; \\ \alpha/\Pi &= 3.2 \pm 0.2 \text{ a.u.}; a_1 = 3.4 \text{ a.u.}; \\ c &= 0.595 \pm 0.028; \\ T &= 1966.48 \pm 0.20; \\ P &= 30.45 \pm 1.17 \text{ years.} \end{aligned}$$

On the basis of photometric, spectrophotometric and astrometric measurements, the following physical data of this system were determined:

$$\begin{aligned} \text{apparent magnitude } m_i \text{ (maximum)} &= 7^m.3; \\ \text{light variation amplitude} &= 0^m.4; \\ \text{light variation period } P &= 0.278 \text{ days}; \\ \text{component spectra} &: G5 + K1; \\ \text{component masses} &: M_A = 1.1 \pm 0.3 M_{\odot}; \\ &M_B = 0.4 \pm 0.1 M_{\odot}; \\ &M_C = 0.58 \pm 0.14 M_{\odot}; \\ \Delta m = m_C - m_{A,B} &= 2^m.9; \\ \text{radial velocity } V_0 &= -35 \text{ km/sec}; \\ \text{radial velocity amplitude } K &= 75 \text{ km/sec,} \end{aligned}$$

where A and B denote the components of the close binary and C denotes the third component.

VW Cephei has been often observed during the more than 50 years passed from its discovery. Kwee [4] started an international campaign in order to observe photoelectrically this star. Some photometric characteristics of the system VW Cephei were studied at the Cluj-Napoca Astronomical Observatory, too. So, from observations published till 1963, as well as from his own observations, Todoran [8] studied the period variation of VW Cephei, determining periodic photometric elements. In order to explain the period variation, he assumed the existence of the third body. Resuming the problem, with more observations, Todoran and Pop [9] have determined new photometric elements, confirming the decrease of the system period.

Table 1

Min. Hel. J.D. 2400000+	E	(O-C) ₁
41145.3548 δ	26529.5	+0.0094
145.4963	27530	+0.0018
171.5160	26723.5	+0.0090
392.4942	28417.5	+0.0047
394.5835	28425	-0.0033
42465.5368	32273	-0.0077
473.4733	32301.5	+0.0067
475.4156	32308.5	+0.0008
625.4312	32847.5	+0.0044
634.3412	32879.5	+0.0083
681.3789	33048.5	+0.0107
681.5125	33049	-0.0048
686.3813	33066.5	+0.0034
686.5225	33067	-0.0045
712.5475	33160.5	+0.0080
732.4442	33232	-0.0048
732.5800	33232.5	+0.0018
754.4292	33311	-0.0067
866.4534	33713.5	+0.0055
869.3744	33724	-0.0058
869.5157	33724.5	+0.0063
43270.4275	35165	-0.0052
281.4268	35204.5	+0.0106
43382.4537	35567.5	+0.0090

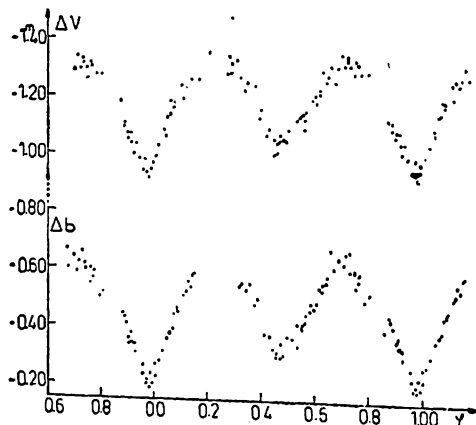


Fig 1

paper tape by an EZ-8 recording potentiometer. The observation moments accuracy is 0.1 minutes.

Drawing the light curves observed each night, we determined 19 moments of minimal brightness, which, together with, 5 supplementary minima (determined from previous observations), are included in Table 1. The first column contains the minima moments (in Julian days JD) and the other ones contain

The recent discovery of the third body calls for a re-examination of the existent observations, as well as for carrying on them, in order to:

— study and explain the period variation;

— determine as precisely as possible the physical parameters of the system and, on this basis, to verify the existent theoretical models and to create other ones, more adequate;

— study the evolution of close binary systems;

— ascertain if it is or is not an X-ray source (VW Cephei has been included in the UHURU Catalogue (1974) among the non-identified X-ray sources).

For these reasons the variable star VW Cephei has been included in our observation programme.

2. Observations and Light Curves. By using the 50 cm telescope of the Cluj-Napoca Astronomical Observatory, we performed, between February 21, 1975 and September 8, 1977, 820 observations of the system VW Cephei, as follows: 600 in the visual domain (v), 165 in blue (b) and 55 in integral light (without filter). The photoelectric photometer uses as radiation receiver an RCA 1P21 photomultiplier; the spectral domains v and b were selected by using filters Corning 3384 and BG 12+GG 13 respectively. As the comparison star, BD + 74°877, is angularly near to the variable star, the differential extinction was neglected. The background, comparison star and variable star brightnesses were recorded on a

the epoch E and the differences $(O-C)_1$ calculated with respect to the photometric elements given by Todoran and Pop [9]:

$$\text{Min. I} = \text{Hel. JD } 2433483.4710 + 0.27831542 E. \quad (1)$$

From the observations in b and v performed between 25–30 September 1975, we have drawn the light curves represented in Figure 1. Studying the light curves and those observed during other nights, we remark:

- the light curves present strong enough asymmetries both at the main minimum and at the secondary one;
- the brightness maxima have unequal heights and present asymmetries;
- although most of the dots scattering in the light curves is due to the observation errors, there is an intrinsic light variation.
- the existence of a small hump about the phase 0.8; it must be observed and studied better in the future.

3. Period Variations. The period variation of the system VW Cephei has been studied by Todoran and Pop [9]. In order to examine the period behavior after 1972, we considered the subsequent minima, as well as those of Table 1. Out of them we made up 8 mean dots, which we added to those obtained in 1972 and included in Table 2. The $(O-C)_2$ differences were calculated with the elements:

$$\text{Min. I} = \text{Hel. JD } 2433483.4707 + 0.27831758 E. \quad (2)$$

Table 2

Min. Hel. J.D. 2400000+	n	E	$(O-C)_2$	Min. Hel. J.D. 2400000+	n	E	$(O-C)_2$
24763.6847	10	-31330	-0.0962	36875.6053	23	12188	+0.0011
25510.4202	10	28647	-0.0868	37161.4395	27	13215	+0.0020
25799.3129	10	27609	-0.0877	37188.4301	24	13312	-0.0042
26926.5022	5	23599	-0.0846	37497.3637	14	14422	-0.0031
27543.2514	2	21343	-0.0872	38288.3232	6	17264	-0.0222
29193.4324	3	15414	-0.0511	38614.5251	2	18436	-0.0085
29461.5787	8	14429	-0.0476	39372.3512	12	21159	-0.0412
30453.4012	7	10887	-0.0260	39686.5686	10	22288	-0.0443
30936.5669	3	9151	-0.0196	39936.7702	4	23187	-0.0502
31984.7155	2	5385	-0.0150	40359.4204	13	24702	-0.0511
32824.6861	12	2367	-0.0069	40490.3388	17	25176	-0.0553
33483.4681	6	0	-0.0026	40825.4299	27	26380	-0.0586
33871.4416	12	+ 1394	+0.0007	40959.3039	8	26861	-0.0553
33920.4313	12	1570	+0.0020	41197.5386	17	27717	-0.0605
34464.5379	12	3525	-0.0023	41581.3370	7	29096	-0.0620
34701.3874	5	4376	-0.0010	42100.3930	12	30961	-0.0680
35240.5035	2	6313	+0.0139	42465.5345	5	32273	-0.0795
35930.4424	4	8792	+0.0036	42653.5400	5	32948.5	-0.0675
36275.5536	30	10032	+0.0010	42686.3837	4	33066.5	-0.0653
36829.4050	29	12022	+0.0004	42732.5758	4	33232.5	-0.0739
36842.4858	29	12069	+0.0003	42869.3822	3	33724	-0.0706
36857.5150	29	12123	+0.0003	43270.4275	1	35165	-0.0809
36858.3499	16	12126	+0.0002				

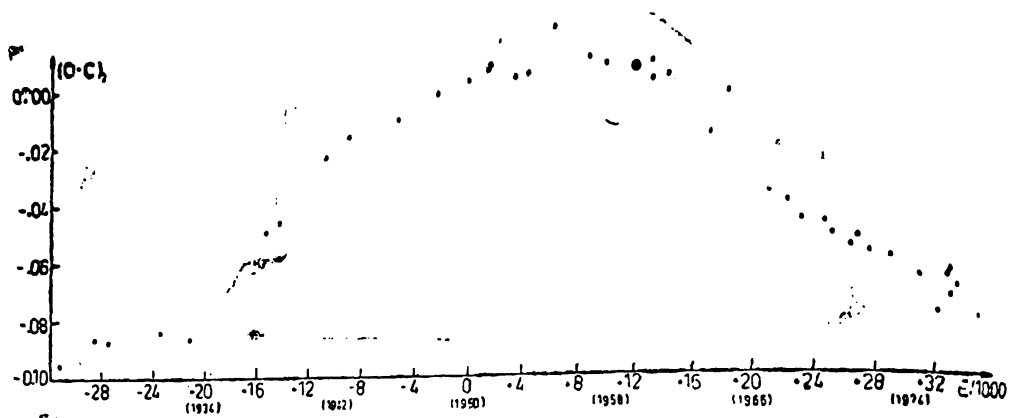


Fig. 2

With the data of Table 2, we have drawn the diagram $(O-C)_2$ versus E (Figure 2). Examining this diagram, we remark:

- after 1934 a sudden period change occurred;
- between 1952–1960, small period fluctuations occurred;
- after 1960, the period decreased with respect to the period given by Equation (2). This decrease carries on;
- according to Hershey's study [3], the light equation effect, calculated with the astrometric orbit, has an amplitude rising not above 0.02 days. As the $(O-C)_2$ differences are very large with respect to this value, it results that the period variations are effective and are due to the physical effects occurring into the close binary system;
- all the above mentioned period changes are superposed on a general decrease of the orbital period of this binary system. Assuming that the period decreased linearly from $P = 0^d.27831984$ in 1934 (Dugan [1]) to $P = 0^d.27831542$ in 1975 it results a decrease rate of 0.108×10^{-6} days/year.

4. **Theoretical Models.** In order to explain the observed phenomena, several models for VW Cephei were proposed.

Kwee [4] assumes that there is a gas ring which gives rise to a non-homogeneous absorption and rotates around the binary system with a period near to this one's orbital period. Leung and Jurkevich [5] determined a difference of 0.0010784 days between the two periods, as well as a beat period of 718 days. The assumed light curve yielded by the gas ring absorption is a sinusoid with an amplitude of $0^m.05$. The 718 days period imitates tolerably well the oscillation period of secondary minima moments and of maxima heights.

Van't Veer [10] shows that, physically and dynamically it is difficult to conceive such a ring, having about the same revolution period as the binary system and remaining for a long time independent of the binary system motion. His model supposes the existence of some local temporary emissions, occurring especially in the neighbourhood of the Lagrangian point L_1 ; these emissions should be in connection with the gas stream necessary

for an explanation of the orbital period variation. This model explains better the observation data, seeming to be more real.

Very recently, Pustyl'nik and Sorgsepp [6], [7] proposed for VW Cephei a model which supposes that, around the main component, there is a thin gas shell, having the form of a disk, and a warm spot yielded by a gas leak from a component to another through the Lagrangian point L_1 . The small humps, observed in the light curves about the phase 0.870, should be yielded by the bright spot. A small part of the main minimum depth should be due to the eclipse of the warm spot. The intrinsic variability observed in the light curve at the brightness maxima, as well as other characteristics are explained by the existence, around the main component, of the gas disk consisting of two equal portions with different optical depths. The fast variations of the physical conditions in this gas shell and its transparency change with respect to the star radiation should be responsible for the intrinsic variability.

(Received June 6, 1978)

REFERENCES

1. Dugan, R. S., Contribution from the Princeton University Observatory, **13**, 1933, 13.
2. Heintz, W. D., IAU Inf. Circ. Visual Double Stars, **64**, 1955.
3. Hershey, J. L., Astron. J., **80**, 1975, 662.
4. Kwee, K. K., B.A.N., **18**, 1966, 448.
5. Leung, K. C., Jurkevich, J., Bull. Amer. Astr. Soc., **1**, 1969, 251.
6. Pustyl'nik, I., Sorgsepp, L., Publ. Astrophys. Obs. Tartu, **43**, 1975, 130.
7. Pustyl'nik, I., Sorgsepp, L., Acta Astronomica; **26**, 1976, 319.
8. Todoran, I., St. Cerc. Astr., **8**, 1963, 27.
9. Todoran, I., Pop, V., Acta Astronomica, **22**, 1972, 267.
10. Van't Veer, F., Astron. & Astrophys., **26**, 1973, 357.

SISTEMUL TRIPLU VW CEPHEI

(Rezumat)

Pe baza a 820 de observații fotoelectrice se determină 24 de momente de minim de strălucire. Se analizează aspectul curbelor de lumină și se studiază variația perioadei. Sînt menționate modelele teoretice propuse pentru explicarea fenomenelor observate.

UNIFORMIZATIONS OF CERTAIN CONVERGENCE STRUCTURES

CSABA NÉMETHI

The first section of the paper is a continuation of the author's earlier work [8] concerning uniformizations of convergence groups, while the second one deals with the convergence structure of continuous convergence, for which several methods of uniformization are compared.

The author is grateful to Professor P. H a m b u r g for his valuable suggestions concerning the subject of the present note.

1. **Uniformizations of Convergence Groups.** We shall make free use of the terminology and notations of our paper [8], where we have introduced the notion of left (resp. right) invariant uniform convergence structure on a group, and have constructed for any convergence group the left, right and two-sided uniform convergence structures. Definition 1 in [8] however must be modified, because it led to an error in the proof of Theorem 1. Its corrected (and more natural) version is the following.

DEFINITION 1. Let $(G, +)$ be a group and \mathfrak{s} a uniform convergence structure on G . \mathfrak{s} is called *left* (resp. *right*) *invariant* if $\Phi \in \mathfrak{s}$ implies $[\Delta] + \Phi \in \mathfrak{s}$ (resp. $\Phi + [\Delta] \in \mathfrak{s}$).

Recall that for a group $(G, +)$, the *left* and *right* *subtractions* are the mappings $S_L, S_R: G \times G \rightarrow G$ defined by $S_L(x, y) = -x + y$, $S_R(x, y) = x - y$.

THEOREM 1. Let $(G, +, \sigma)$ be a convergence group whose neutral element is 0, and define:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_L &= \mathfrak{s}_L(\sigma) = \{\Phi \in F(G \times G) : S_L(\Phi) \in \sigma(0)\}; \\ \mathfrak{s}_R &= \mathfrak{s}_R(\sigma) = \{\Phi \in F(G \times G) : S_R(\Phi) \in \sigma(0)\}.\end{aligned}$$

\mathfrak{s}_L (resp. \mathfrak{s}_R) is the unique left (resp. right) invariant uniform convergence structure on G that induces σ .

Proof. In [8] it is proved that \mathfrak{s}_L is a uniform convergence structure and $\sigma(\mathfrak{s}_L) = \sigma$.

\mathfrak{s}_L is left invariant, because if $S_L(\Phi) \in \sigma(0)$, then $S_L([\Delta] + \Phi) = S_L(\Phi) \in \sigma(0)$.

Now let \mathfrak{s} be another left invariant uniform convergence structure on G . We claim that for any $\Phi \in F(G \times G)$, $\Phi \in \mathfrak{s}$ is equivalent to $[0] \times S_L(\Phi) \in \mathfrak{s}$. Indeed, $\Phi \in \mathfrak{s} \Leftrightarrow [\Delta] + \Phi \in \mathfrak{s}$, $[0] \times S_L(\Phi) \in \mathfrak{s} \Leftrightarrow [\Delta] + [0] \times S_L(\Phi) \in \mathfrak{s}$, and it is sufficient to observe that $[\Delta] + \Phi = [\Delta] + [0] \times S_L(\Phi)$.

If in addition S induces σ , then

$$\Phi \in \mathfrak{s} \Leftrightarrow [0] \times S_L(\Phi) \in \mathfrak{s} \Leftrightarrow S_L(\Phi) \in \sigma(\mathfrak{s})(0) = \sigma(0) \Leftrightarrow \Phi \in \mathfrak{s}_L.$$

DEFINITION 2. Let $(G, +, \sigma)$ be a convergence group. \mathfrak{s}_L (resp. \mathfrak{s}_R , resp. $\mathfrak{s}_T = \mathfrak{s}_L \cap \mathfrak{s}_R$) is called the *left* (resp. *right*, resp. *two-sided*) *uniform convergence structure* of $(G, +, \sigma)$.

Remark 1. Let $(G, +)$ be a group and \mathcal{U} a (classical) uniformity on G . Denoting by $[\mathcal{U}]$ the principal uniform convergence structure on G generated by \mathcal{U} , it is easy to see that $[\mathcal{U}]$ is left invariant if and only if for any $U \in \mathcal{U}$ there exists a $U' \in \mathcal{U}$ with $\Delta + U' \subseteq U$. In this case we shall say that \mathcal{U} itself is left invariant. This condition is slightly weaker than the one given in Á. Császár's book [3], p. 448, where it is required that \mathcal{U} should possess a base formed of sets U with the property $\Delta + U = U$, but is sufficient for proving that the left uniformity $\mathcal{U}_L(\mathcal{F})$ of a topological group $(G, +, \mathcal{F})$ is the unique left invariant uniformity on G that induces \mathcal{F} . Theorem 1 is a generalization of this result, because it is an easy exercise to verify that for a topological group $(G, +, \mathcal{F})$, letting σ denote the convergence structure associated with \mathcal{F} , we have $\mathfrak{S}_L(\sigma_{\mathcal{F}}) = [\mathcal{U}_L(\mathcal{F})]$.

Of course, one may consider similarly the „right” case, and in addition for a topological group $(G, +, \mathcal{F})$, $\mathfrak{S}_R(\sigma_{\mathcal{F}}) = [\mathcal{U}_R(\mathcal{F})]$, where $\mathcal{U}_R(\mathcal{F})$ is the two-sided uniformity on G .

THEOREM 2. *Let $(G, +, \sigma)$ be a convergence group. The associated left and right uniform convergence structures can be expressed as follows:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_L &= \{ \Phi \in F(G \times G) : (\exists \mathcal{F} \in F(G)) [-\mathcal{F} + \mathcal{F} \in \sigma(0) \wedge \Phi \supseteq [\Delta] + \mathcal{F} \times \mathcal{F}] \}; \\ \mathfrak{S}_R &= \{ \Phi \in F(G \times G) : (\exists \mathcal{F} \in F(G)) [\mathcal{F} - \mathcal{F} \in \sigma(0) \wedge \Phi \supseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F} + [\Delta]] \}. \end{aligned}$$

Proof. Let $\Phi \in \mathfrak{S}_L$, i.e. $S_L(\Phi) \in \sigma(0)$. Then for the filter $\mathcal{F} = S_L(\Phi) \cap \cap [0]$ we have $-\mathcal{F} + \mathcal{F} \in \sigma(0)$ and $\Phi \supseteq [\Delta] + \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Conversely, if $\Phi \in F(G \times G)$, $\mathcal{F} \in F(G)$, $-\mathcal{F} + \mathcal{F} \in \sigma(0)$ and $\Phi \supseteq [\Delta] + \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, then $S_L(\Phi) \supseteq S_L([\Delta] + \mathcal{F} \times \mathcal{F}) = -\mathcal{F} + \mathcal{F} \in \sigma(0)$, i.e. $\Phi \in \mathfrak{S}_L$.

Remark 2. For the case of a commutative convergence group $(G, +, \sigma)$ W. Gähler [6] has shown that the \cap -ideal in $F(G \times G)$ generated by all filters of the form $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{F} + [\Delta]$ and $[\Delta]$, with $\mathcal{F} - \mathcal{F} \in \sigma(0)$, is the finest of all uniform convergence structures on G that induce σ , whose Cauchy filters are precisely the filters \mathcal{F} on G with $\mathcal{F} - \mathcal{F} \in \sigma(0)$, and that with Φ and Ψ contain also $-\Phi$ and $\Phi + \Psi$. By Theorem 2 this uniform convergence structure is just $\mathfrak{S}(\sigma) = \mathfrak{S}_R(\sigma)$ (see also S. Gähler, W. Gähler and G. Kneis [5]). Our Theorem 2 shows also that W. Gähler could have simplified his construction, while from Theorem 1 it follows that $\mathfrak{S}(\sigma)$ is not only the finest, but even the unique uniform convergence structure on G that induces σ and is closed under the addition of filters.

Recall that a convergence structure σ on a set X is called *regular* [4] if $\mathcal{F} \in \sigma(x)$ implies $\bar{\mathcal{F}} \in \sigma(x)$, where the filter $\bar{\mathcal{F}}$ is generated by all sets of the form

$$\bar{F} = \{ y \in X : (\exists \mathcal{Q} \in \sigma(y)) F \in \mathcal{Q} \},$$

with $F \in \mathcal{F}$. Similarly, a uniform convergence structure \mathfrak{S} on X is said to be *regular* [9] if $\Phi \in \mathfrak{S}$ implies $\bar{\Phi} \in \mathfrak{S}$. If \mathfrak{S} is regular, then so is $\sigma(\mathfrak{S})$. For the natural uniform convergence structures of convergence groups the reverse implication is also true:

THEOREM 3. Let $(G, +, \sigma)$ be a convergence group. The following statements are equivalent:

- (a) σ is regular;
- (b) $\mathfrak{S}_L(\sigma)$ is regular;
- (c) $\mathfrak{S}_R(\sigma)$ is regular;
- (d) $\mathfrak{S}_T(\sigma)$ is regular.

Proof. (a) \Rightarrow (b). Suppose σ is regular, and let $\Phi \in \mathfrak{S}_L(\sigma)$, i.e. $S_L(\Phi) \in \sigma(0)$. Then $\overline{S_L(\Phi)} \in \sigma(0)$. But $S_L(\overline{\Phi}) \supseteq \overline{S_L(\Phi)}$, because from the continuity of S_L it follows that $S_L(\overline{H}) \subseteq \overline{S_L(H)}$ for each $H \in \Phi$. Hence $S_L(\overline{\Phi}) \in \sigma(0)$, i.e. $\overline{\Phi} \in \mathfrak{S}_L(\sigma)$.

(a) \Rightarrow (c). Analogously.

[(b) \wedge (c)] \Rightarrow (d), because regularity is preserved by forming the supremum of a family of uniform convergence structures.

(b) \Rightarrow (a), (c) \Rightarrow (a) and (d) \Rightarrow (a), taking into account that each of $\mathfrak{S}_L(\sigma)$, $\mathfrak{S}_R(\sigma)$ and $\mathfrak{S}_T(\sigma)$ induces σ .

2. Uniformizations of the Convergence Structure of Continuous Convergence. Let (X, τ) , (Y, σ) be convergence spaces, and let $\mathcal{C} = \mathcal{C}((X, \tau), (Y, \sigma))$ denote the set of all continuous maps from X to Y . For $\tilde{\mathfrak{F}} \in F(\mathcal{C})$ and $\mathfrak{F} \in F(X)$, $\tilde{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ will denote the filter on Y for which a base is formed of the sets

$$\tilde{F}(F) = \{f(x) : f \in \tilde{F}, x \in F\},$$

with $\tilde{F} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ and $F \in \mathfrak{F}$. Analogously, if $\Phi \in F(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ and $\mathfrak{F} \in F(X)$, then the sets

$$P(F \times F) = \{(f(x'), g(x'')) : (f, g) \in P, x', x'' \in F\},$$

where $P \in \Phi$ and $F \in \mathfrak{F}$, constitute a base for a filter on $Y \times Y$, denoted by $\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$.

C. H. Cook and H. R. Fischer [2] have defined on \mathcal{C} the convergence structure of continuous convergence $\gamma_c = \gamma_c(\tau, \sigma)$ as follows:

$$\gamma_c(f) = \{\tilde{\mathfrak{F}} \in F(\mathcal{C}) : (\forall x \in X)(\forall \mathfrak{F} \in \tau(x)) \tilde{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \in \sigma(f(x))\}$$

for each $f \in \mathcal{C}$.

If σ is induced by a uniform convergence structure \mathfrak{S} , then γ_c is uniformizable. This statement was proved erroneously in [2], because the construction given there yields a set of filters on $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ which is not closed under finite intersections, hence cannot be a uniform convergence structure. This error was pointed out by P. Hamburg and V. Bălan [1], [7], who have also given a counter-example. They propose the following modification of the construction given in [2]:

Let

$$\Gamma_c = \Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}) = \{\Phi \in F(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : (\forall \mathfrak{F} \in \bigcup_{x \in X} \tau(x)) \Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \in \mathfrak{S}\}.$$

Γ_c satisfies all the axioms of a uniform convergence structure, except the one which requires that $[\Delta_{\mathcal{C}}] \in \Gamma_c$. Instead of it we have $[(f, f)] \in \Gamma_c$ for each

$f \in \mathcal{C}$. This weaker property is sufficient for many purposes. For instance, one can associate with Γ_c a convergence structure on \mathcal{C} (using the well-known construction), and obtains precisely γ_c . Hence γ_c is induced by the "almost uniform convergence structure" Γ_c .

Now let

$$\Gamma_c^* = \Gamma_c^*(\tau, \mathfrak{S}) = \{\Phi^* \in F(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : (\exists \Phi \in \Gamma_c) \Phi^* \supseteq \Phi \cap [\Delta_{\mathcal{C}}]\}.$$

As shown in [1] and [7], Γ_c^* is the finest uniform convergence structure on \mathcal{C} coarser than Γ_c , and γ_c is induced by Γ_c^* .

In what follows we shall deal with the case when instead of (Y, σ) we have a convergence group $(G, +, \sigma)$. By Theorem 1, σ is induced by each of the uniform convergence structures $\mathfrak{S}_L(\sigma)$, $\mathfrak{S}_R(\sigma)$ and $\mathfrak{S}_T(\sigma)$, thus any of them can play the role of the above \mathfrak{S} . On the other hand, $(\mathcal{C}, +, \gamma_c)$ is a convergence group. Consequently, one may consider the uniform convergence structures $\mathfrak{S}_L(\gamma_c)$, $\mathfrak{S}_R(\gamma_c)$ and $\mathfrak{S}_T(\gamma_c)$, which also induce γ_c .

THEOREM 4. *Let (X, τ) be a convergence space and $(G, +, \sigma)$ a convergence group. $\mathfrak{S}_L(\gamma_c)$ (resp. $\mathfrak{S}_R(\gamma_c)$) is the finest left (resp. right) invariant uniform convergence structure on \mathcal{C} coarser than $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma))$ (resp. $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_R(\sigma))$).*

Proof. Let $\tilde{0}$ denote the neutral element of \mathcal{C} . In order to show that $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_L(\gamma_c)$, consider a $\Phi \in \Gamma_c$, $x \in X$ and $\mathfrak{F} \in \tau(x)$. It is easy to see that $S_L(\Phi)(\mathfrak{F}) \supseteq S_L(\Phi)(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$. But $\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \in \mathfrak{S}_L(\sigma)$, i.e. $S_L(\Phi)(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \in \sigma(0)$. It follows that $S_L(\Phi)(\mathfrak{F}) \in \sigma(0)$ for any $x \in X$ and any $\mathfrak{F} \in \tau(x)$, hence $S_L(\Phi) \in \gamma_c(\tilde{0})$, i.e. $\Phi \in \mathfrak{S}_L(\gamma_c)$.

Now let \mathfrak{S} be another left invariant uniform convergence structure on \mathcal{C} coarser than $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma))$. If $\Phi \in \mathfrak{S}_L(\gamma_c)$, i.e. $S_L(\Phi) \in \gamma_c(\tilde{0})$, then, since γ_c is induced by Γ_c , we have $[\tilde{0}] \times S_L(\Phi) \in \Gamma_c$. This implies that $[\tilde{0}] \times S_L(\Phi) \in \mathfrak{S}$. But, as shown in the proof of Theorem 1, this is equivalent to $\Phi \in \mathfrak{S}$. Hence $\mathfrak{S}_L(\gamma_c) \subseteq \mathfrak{S}$.

COROLLARY. *With the same hypotheses the following inclusions hold:*

- a) $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma)) \subseteq \Gamma_c^*(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_L(\gamma_c)$;
- b) $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_R(\sigma)) \subseteq \Gamma_c^*(\tau, \mathfrak{S}_R(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_R(\gamma_c)$;
- c) $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_T(\sigma)) \subseteq \Gamma_c^*(\tau, \mathfrak{S}_T(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_T(\gamma_c)$.

Proof. a) and b) are easy consequences of Theorem 4.

c) follows by observing that

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_T(\sigma)) &= \Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma) \cap \mathfrak{S}_R(\sigma)) = \Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_L(\sigma)) \cap \Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_R(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_L(\gamma_c) \cap \\ &\quad \cap \mathfrak{S}_R(\gamma_c) = \mathfrak{S}_T(\gamma_c). \end{aligned}$$

Hence $\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}_T(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}_T(\gamma_c)$, which, together with Theorem 4, implies the second inclusion in c).

THEOREM 5. *Let (X, τ) be a convergence space and $(G, +, \sigma)$ a convergence group. We have $\mathfrak{S}_L(\gamma_c) = \mathfrak{S}_R(\gamma_c)$ if and only if $\mathfrak{S}_L(\sigma) = \mathfrak{S}_R(\sigma)$.*

Proof. If $\mathfrak{S}_L(\gamma_c) = \mathfrak{S}_R(\gamma_c)$, then, since $(G, +, \sigma)$ is isomorphic to the subgroup of $(\mathcal{C}, +)$ formed of all constant functions, endowed with the relativized convergence structure, it follows that $\mathfrak{S}_L(\sigma) = \mathfrak{S}_R(\sigma)$.

Conversely, suppose $\mathfrak{S}_L(\sigma) = \mathfrak{S}_R(\sigma) = \mathfrak{S}(\sigma)$, and let $\Phi \in F(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Observe that for any $\mathfrak{F} \in \tilde{F}(X)$, $S_L(\Phi)(\mathfrak{F}) = S_L(\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \vee [\Delta_X]))$, hence

$$\Phi \in \mathfrak{S}_L(\gamma_c) \Leftrightarrow S_L(\Phi) \in \gamma_c(\tilde{0}) \Leftrightarrow (\forall \mathfrak{F} \in \bigcup_{x \in X} \tau(x))$$

$$S_L(\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \vee [\Delta_X])) \in \sigma(0) \Leftrightarrow (\forall \mathfrak{F} \in \bigcup_{x \in X} \tau(x))$$

$$\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \vee [\Delta_X]) \in \mathfrak{S}_L(\sigma) = \mathfrak{S}(\sigma).$$

Repeating this argument for $\mathfrak{S}_R(\gamma_c)$, we conclude that $\mathfrak{S}_L(\gamma_c) = \mathfrak{S}_R(\gamma_c)$.

Remark 3. If $\mathfrak{S}_L(\sigma) = \mathfrak{S}_R(\sigma)$ (for instance if the group $(G, +)$ is commutative), then, simplifying the notations, the Corollary of Theorem 4 becomes:

$$\Gamma_c(\tau, \mathfrak{S}(\sigma)) \subseteq \Gamma_c^*(\tau, \mathfrak{S}(\sigma)) \subseteq \mathfrak{S}(\gamma_c). \quad (*)$$

In general both inclusions may be strict, even if the group $(G, +)$ is commutative. This is shown by the following.

Example. Let $X = G = R$ (the set of real numbers) with the usual group structure, and $\tau = \sigma =$ the convergence structure generated by the Euclidean topology.

The first inclusion in $(*)$ is strict, since $[\Delta_{\mathcal{C}}] \notin \Gamma_c$. Indeed, if \mathfrak{F} denotes the neighbourhood filter of 0, then $\mathfrak{F} \in \tau(0)$, but $[\Delta_{\mathcal{C}}](\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \notin \mathfrak{S}(\sigma)$, i.e. $S_R([\Delta_{\mathcal{C}}](\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})) \notin \sigma(0)$. This follows from the fact that for $\varepsilon > 0$ arbitrary, taking $x_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $y_0 = -\frac{\varepsilon}{2}$ and $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = \frac{x}{\varepsilon}$, we have $x_0, y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $(f, f) \in \Delta_{\mathcal{C}}$ and $f(x_0) - f(y_0) = 1$.

In order to show that also the second inclusion in $(*)$ is strict, consider the sequence $((f_n, g_n))_n$, where $f_n, g_n: R \rightarrow R$ are defined by $f_n(x) = \frac{x}{n} + nx$, $g_n(x) = nx$. Let Φ denote the filter on $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ associated with this sequence. Then $\Phi \in \mathfrak{S}(\gamma_c)$, because $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ uniformly on each compact in R .

The filter Φ fails to belong to Γ_c . Indeed, if \mathfrak{F} is again the neighbourhood filter of 0, then $\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \notin S(\sigma)$, i.e. $S_R(\Phi(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})) \notin \sigma(0)$. To see this, observe that for $\varepsilon > 0$ and $n \in N$ arbitrary, taking $p \in N$ with $p \geq n$ and $p > \frac{1}{2\varepsilon}$, $x_0 = \frac{1}{2p}$, $y_0 = -\frac{1}{2p}$, we have $x_0, y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ and $f_p(x_0) - g_p(y_0) = 1 + \frac{1}{2p^2} > 1$.

Now we are prepared to show that $\Phi \notin \Gamma_c^*$. Suppose on the contrary that there exists a $\Psi \in \Gamma_c$ with $\Phi \supseteq \Psi \cap [\Delta_{\mathcal{C}}]$. Since $f_n \neq g_n$ for each $n \in N$, the last inclusion implies that $\Phi \supseteq \Psi$, hence $\Phi \in \Gamma_c$, which is a contradiction.

REFERENCES

1. Bălan, V., *Convergence in function spaces* (Romanian). Thesis, University of Craiova, 1977.
2. Cook, C. H. and Fischer, H. R., *On equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann, 159, 1965, 94–104.
3. Császár, Á., *General topology*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.
4. Fischer, H. R., *Limesräume*, Math. Ann., 137, 1959, 269–303.
5. Gähler, S.; Gähler, W. and Kneis, G., *Completions of pseudo-topological vector spaces*, Math. Nachr., 75, 1976, 185–206.
6. Gähler, W., *Über Limes- und Pseudouniformisierbarkeit*, Demonstratio Math., 6, 1973, 613–632.
7. Hamburg, P. und Bălan, V., *Bemerkungen über den uniformen Limitierung der stetigen Konvergenz*, to appear.
8. Némethi, Cs., *Natural uniform convergence structures for convergence groups*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 2, 1977, 60–66.
9. Sjöberg, B., *Über die Fortsetzbarkeit gleichmässig stetiger Abbildungen*, Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 40, 1970, 41–46.

UNIFORMIZĂRI ALE UNOR STRUCTURI DE CONVERGENȚĂ

(Rezumat)

Primul paragraf este continuarea unui studiu început de autor în [8], privind uniformizări ale grupurilor de convergență.

În paragraful al doilea sînt comparate cîteva metode de uniformizare a structurii de convergență a convergenței continue.

DETERMINAREA ENTALPIEI ÎN CAZUL RĂSPÂNDIRII UNUI JET PARIETAL, PESTE O PLACĂ DE TEMPERATURĂ CONSTANTĂ

PETRE BRĂDEANU, ȘTEFAN MAKSAY

1. Introducere. Studiul mișcării jetului parietal, adică a jetului care se răspîndește de-a lungul unui perete solid, a fost inițiat de M. B. G l a u e r t [1] și continuat, printre alții, de N. I. A k a t n o v [2]. Presupunînd că jetul de fluid incompresibil se propagă laminar de-a lungul unui perete într-un mediu în repaos, de aceeași natură cu fluidul din jet, Akatnov determină pentru distribuția componentei longitudinale a vitezei în jet expresia

$$u = \sqrt{\frac{E_0}{\nu \xi}} \varphi(\eta), \quad \varphi(\eta) = \frac{\eta_\infty^2}{6} \left(\sqrt{\frac{\eta}{\eta_\infty}} - \frac{\eta^3}{\eta_\infty^3} \right)$$

unde

$$\eta = (E_0 \nu \xi)^{-1/4} \psi, \quad \eta_\infty = \sqrt[4]{40}, \quad \zeta = x,$$

$$\int_0^{\psi_\infty} u \psi d\psi = E_0, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

notațiile fiind cele folosite în mod curent în teoria stratului limită: x este coordonata pe placă iar ψ este funcția de curent (variabilele lui Mises; referitor la notații a se vedea de exemplu [3] sau [2]).

2. Rezolvarea ecuației energiei. Considerînd originea sistemului de coordonate așezată în sursa jetului, axa Ox de-a lungul peretelui plan în sensul mișcării iar axa Oy normală la placă îndreptată spre semispațiul ocupat de fluid, ecuația energiei are forma ($i = c_p T$ - entalpia)

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) i(x, y) = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} \quad (1)$$

Această ecuație a fost integrată în cazul plăcii de temperatură constantă, egală cu a fluidului exterior, și în cazul plăcii izolate termic [4].

În cele ce urmează vom determina distribuția entalpiei în jetul incompresibil în ipoteza că placa are temperatură constantă diferită de cea a fluidului exterior jetului, adică

$$i(x, y) = i_w \quad \text{pentru } y = 0 \quad (2)$$

$$i(x, y) = i_\infty \quad \text{pentru } y = \infty$$

$$(i_w = \text{const.}, \quad i_\infty = \text{const.}, \quad i_w \neq i_\infty)$$

Transcriind ecuația energiei în raport cu variabilele (ξ, ψ) în forma

$$\frac{1}{v} \frac{\partial i}{\partial \xi} = u \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial i}{\partial \psi} \right) \quad (3)$$

și efectuind schimbarea de funcție

$$i(\xi, \psi) = (i_w - i_\infty)h(\xi, \eta) + i_\infty \quad (4)$$

atunci, dacã se neglijează termenul disipativ (ceea ce este admisibil într-un fluid incompresibil), ecuația energiei (3) devine

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varphi \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{4} \frac{\partial h}{\partial \eta} = \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (5)$$

La această ecuație adãugãm condițiile la limitã

$$h(\xi, 0) = 1, \quad h(\xi, \eta_\infty) = 0 \quad (6)$$

Soluția de similitudine (automodelare) a acestei probleme este

$$i(\eta; \sigma) = i_w - (i_w - i_\infty) \frac{F(\eta; \sigma)}{F(\eta_\infty; \sigma)} \quad (7)$$

unde

$$F(\eta; \sigma) = \int_0^{\sqrt{\eta/\eta_\infty}} (1 - t^3)^{\sigma-1} dt, \quad t = \sqrt{\eta/\eta_\infty} \quad (8)$$

Spre exemplificare, pentru diferite valori ale numãrului lui Prandtl, avem urmãtoarele soluții

$$T \left(\eta; \frac{2}{3} \right) = T_w - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (T_w - T_\infty) G(t), \quad (9)$$

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln [t + (1 - t^{3/2})^{1/3}] + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t - (1 - t^3)^{1/3}}{\sqrt{3}(1 - t^3)^{1/3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18};$$

$$T(\eta; 1) = T_w - (T_w - T_\infty)t \quad (10)$$

$$T \left(\eta; \frac{5}{3} \right) = T_w - \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} (T_w - T_\infty) H(t), \quad (11)$$

$$H(t) = \frac{1}{3} \ln [1 - t^3)^{1/3} + t] + \frac{1}{3} t(1 - t^3)^{2/3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{t - 2(1 - t^3)^{1/3}}{3t} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

3. Considerații mecanice asupra distribuției entalpiei în jet. Din forma soluției (7), deoarece

$$0 \leq \frac{F(\eta; \sigma)}{F(\eta_\infty; \sigma)} \leq 1 \quad (12)$$

remarcãm cã temperatura fluidului din jet este cuprinsã între T_w și T_∞ . Ținînd

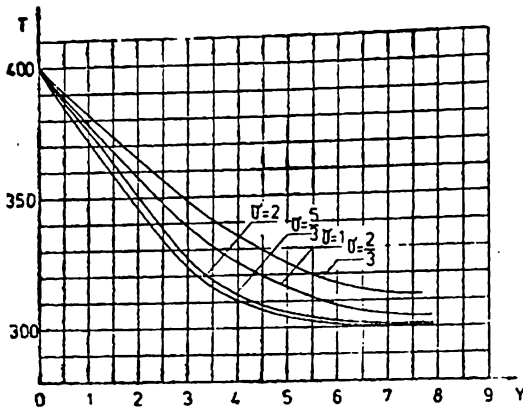


Fig. 1.

seama de relația dintre variabilele (ξ, η) și (x, y)

$$y \sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3 x^3}} = \frac{2}{\eta_\infty} \ln \frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} + \frac{12}{\sqrt{3} \eta_\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} t}{2+t} \quad (13)$$

în fig. 1 este reprezentată repartiția temperaturii în jet pentru diferite valori ale numărului lui Prandtl σ .

Fluxul termic local care străbate unitatea de suprafață situată pe $\eta = \text{const.}$ este

$$q(\eta, x; \sigma) = \frac{\lambda \eta_\infty (T_w - T_\infty)}{12 F(\eta_\infty; \sigma)} \sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3 x^3}} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_\infty} \right)^{3/2} \right]^\sigma \quad (14)$$

Se observă că acest flux este extrem pe placă și tinde către zero pentru η tinzînd către η_∞ .

În cazul $T_w > T_\infty$ avem $q(\eta, x; \sigma) > 0$ și, prin urmare, căldura se transmite de la straturile de fluid din apropierea plăcii spre fluidul de la infinit iar în cazul $T_w < T_\infty$ de la fluidul exterior spre straturile de fluid din apropierea plăcii.

Aceste rezultate relativ la sensul transferului de căldură se păstrează și pe suprafața plăcii unde

$$q_w(x; \sigma) = \frac{\lambda \eta_\infty (T_w - T_\infty)}{12 F(\eta_\infty; \sigma)} \sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3 x^3}} \quad (15)$$

Pentru a menține temperatura plăcii constantă, $T = T_w$, în cazul $T_w > T_\infty$ este necesară o încălzire a plăcii dinspre domeniul $y < 0$ iar în cazul $T_w < T_\infty$ este necesară o răcire a ei. Cantitatea de căldură necesară încălzirii, respectiv răcirii plăcii este dată de formula (15).

Debitul de căldură printr-o față a plăcii de lungime l și lățime d este dat de formula

$$Q_w = \frac{\lambda d \eta_\infty (T_w - T_\infty)}{3 F(\eta_\infty; \sigma)} \sqrt[4]{\frac{l E_0}{\nu^3}} \quad (16)$$

BIBLIOGRAFIE

1. Glauert, M., B., *The Wall Jet*, Journal of Fluid Mechanics, vol. I, Pt. 6, 1956, p. 625—642.
2. Akatnov, N. I., *Primenenie peremennih Mizesa k zadace o rasprostraneni laminarnoi strui vdoli stenki*, Prikladnaia Matematika i Mehanika (PMM), 1, 1960.
3. Brădeanu, P., *Mecanica fluidelor*, Ed. tehnică, București, 1973.
4. Brădeanu, P., Maksay, Șt., *Asupra determinării temperaturii în jeturi vîscoase semi-mărginite*, Studia Univ. Babeș—Bolyai, ser. Math.—Mech., t. 2, 1974, 84—87.

LA DÉTERMINATION DE L'ENTHALPIE DANS LE CAS DE LA PROPAGATION D'UN JET PARIÉTAL SUR UNE PLAQUE AVEC LA TEMPÉRATURE CONSTANTE

(Résumé)

Dans le présent travail on détermine, avec l'équation d'énergie de la couche limite, une distribution de similitude pour la température dans un jet incompressible pariétal en supposant que la température de la plaque plane est constante. Cette constante n'est pas égale avec la température du fluide extérieur au jet. Le fluide extérieur est supposé incompressible et en repos. Ensuite, nous avons calculé les caractéristiques du changement de chaleur (le flux de chaleur).

ASUPRA REDUCERII n -GRUPURILOR LA GRUPURI

MARIA S. POP

Cercetările cu privire la reducerea n -grupurilor la grupuri pot fi grupate în două direcții exprimate prin teoremele lui Post [2] respectiv Hosszu [1].

TEOREMA (Post [2]). Pentru orice n -grup (A, \circ) există un bigrup $(A^*, *)$ și un subgrup normal $(A_0, *) \triangleleft (A^*, *)$ cu proprietățile:

- A este o clasă de echivalență lui A^* în raport cu A_0 ;
- A^*/A este grup ciclic generat de clasa de echivalență A ;
- $|A^*/A_0| = n - 1$
- produsul n -ar coincide pe mulțimea de bază A a n -grupului cu efectuarea produsului binar de n factori.

Grupul $(A^*, *)$ cu proprietățile a)–d) se numește grup înfășurător, iar subgrupul normal A_0 se numește bigrup asociat n -grupului (A, \circ) .

Teorema lui Post are dezavantajul introducerii unor elemente ce nu aparțin mulțimii de bază a n -grupului, operația binară $*$ definindu-se în A^* , mulțimea claselor de echivalență a sistemelor ordonate de i elemente din A , $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

În 1963 Hosszu [1] arată că acest inconvenient poate fi evitat și pe mulțimea A se poate construi un grup astfel ca produsul n -ar să se obțină cu ajutorul operației binare de grup și al unui automorfism al grupului.

TEOREMA (Hosszu [1]). O operație n -ară „ \circ ” definită pe A este operație de n -grupuri dacă și numai dacă ea se poate scrie explicit sub forma:

$$(x_1, \dots, x_n)_\circ = x_1 \cdot f(x_2) \cdot f^2(x_3), \dots, f^{n-1}(x_n) \cdot a$$

unde $x_1, \dots, x_n \in A$, „ \cdot ” este o operație binară de grup definită pe aceeași mulțime A , f un automorfism al grupului (A, \cdot) cu proprietatea f^{n-1} este un automorfism interior, adică există $a \in A$ astfel că $f^{n-1}(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ și $f(a) = a$.

Grupul (A, \cdot) definit de teorema lui Hosszu se numește grupul redus al n -grupului (A, \circ) în raport cu elementul fix a și se notează $\text{red}_a A$. Operația binară „ \circ ” poate fi exprimată cu ajutorul operației n -are [3] astfel:

$$x \cdot y = (x, a, \dots, \bar{a}, y)_\circ$$

În lucrare se demonstrează că cele două modalități de reducere a n -grupurilor la grupuri nu sînt independente și anume, ele definesc doi functori covarianți naturali echivalenți de la categoria n -grupurilor $n\text{-Gr}$ la categoria grupurilor Gr .

Alegem în n -grupul (A, \circ) un element $a \in A$. Cu ajutorul elementelor alese definim un functor $F: n\text{-Gr} \rightarrow Gr$ astfel:

- dacă $(A, \circ) \in \text{Ob } n\text{-Gr}$ atunci $F(A, \circ) = \text{red}_a A$
- dacă $f \in \text{Hom}_{n\text{-Gr}}(A, B)$ atunci $F(f): \text{red}_a A \rightarrow \text{red}_a B$; $F(f)(x) = (b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_\circ$.

Pentru orice $x, y, \in \text{red}_a A$ avem :

$$\begin{aligned} F(f)(x \cdot y) &= (b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x, y))_o = (b, f(a), \dots, f((x, a, \dots, \bar{a}, y)_o))_o = \\ &= ((b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_o, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(y))_o = \\ &= ((b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_o, (b, \dots, \bar{b}, b, f(a))_o, \dots, f(\bar{a}), f(y))_o = \\ &= ((b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_o, b, \dots, \bar{b}, (b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(y))_o)_o = \\ &= F(f)(x) \cdot F(f)(y), \end{aligned}$$

deci $F(f) \in \text{Hom}_{Gr}(\text{red}_a A, \text{red}_b B)$

Se verifică imediat că $F(1_A)(x) = (a, a, \dots, \bar{a}, x)_o = x = 1_{F(A)}(x)$ și că pentru orice omomorfisme n -grupale $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ avem $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, adică F este un functor covariant.

Aplicația $G: n-Gr \rightarrow Gr$ care asociază fiecărui n -grup (A, \circ) bigrupul asociat $(A_0, *)$ definit prin teorema lui Post, deci $G(A) = A_0$ și fiecărui $f \in \text{Hom}_{n-Gr}(A, B)$ aplicația $G(f): A_0 \rightarrow B_0$; $G(f)([a_1, \dots, a_{n-1}]) = [f(a_1), \dots, f(a_{n-1})]$, definește un functor covariant.

Observăm mai întâi că aplicația $G(f)$ este bine definită, nedepinzînd de reprezentanți. Într-adevăr, dacă $[a_1, \dots, a_{n-1}] = [a'_1, \dots, a'_{n-1}]$, adică $(a_1, \dots, a_{n-1}, x)_o = (a'_1, \dots, a'_{n-1}, x)_o$ pentru orice $x \in A$, atunci oricare ar fi $y \in B$, avem :

$$\begin{aligned} (f(a_1), \dots, f(a_{n-1}), y)_o &= (f(a_1), \dots, f(a_{n-1}), (f(x), \dots, f(x), \overline{f(x)}), y)_o = \\ &= ((f(a_1), \dots, f(a_{n-1}), f(x))_o, \dots, f(x), \overline{f(x)}, y)_o = \\ &= (f((a_1, \dots, a_{n-1}, x)_o), \dots, f(x), f(x), y)_o = \\ &= (f((a'_1, \dots, a'_{n-1}, x)_o), \dots, f(x), \overline{f(x)}, y)_o = \\ &= (f(a'_1), \dots, (f(a'_{n-1}), (f(x), \dots, \overline{f(x)}), y)_o)_o = (f(a'_1), \dots, f(a'_{n-1}), y)_o, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că $[f(a_1), \dots, f(a_{n-1})] = [f(a'_1), \dots, f(a'_{n-1})]$

Pe de altă parte, pentru orice $[a_1, \dots, a_{n-1}], [a'_1, \dots, a'_{n-1}] \in A_0$ avem :

$$\begin{aligned} G(f)([a_1, \dots, a_{n-1}] * [a'_1, \dots, a'_{n-1}]) &= G(f)((a_1, \dots, a_{n-1}, a'_1)_o, \dots, a'_{n-1}) = \\ &= [f((a_1, \dots, a_{n-1}, a'_1)_o), \dots, f(a'_{n-1})] = [(f(a_1), \dots, f(a_{n-1}), f(a'_1))_o, \dots, f(a'_{n-1})] = \\ &= [f(a_1), \dots, f(a_{n-1})] * [f(a'_1), \dots, f(a'_{n-1})] = G(f)([a_1, \dots, a_{n-1}]) * \\ &* G(f)([a'_1, \dots, a'_{n-1}]), \end{aligned}$$

deci $G(f) \in \text{Hom}_{Gr}(A_0, B_0)$.

Se verifică imediat și celelalte condiții conform cărora $G(f)$ este un functor covariant.

TEOREMA. *Functorii F și G definiți de cele două modalități de reducere a n -grupurilor la grupuri sînt natural echivalenți.*

Demonstrație. Definim aplicația $\varphi: \text{Ob } n-Gr \rightarrow \text{Hom } Gr$ astfel :

dacă $A \in \text{Ob } n-Gr$ atunci $\varphi(A) = \varphi_A: \text{red}_a A \rightarrow A_0$;

$$\varphi_A(x) = [a, \dots, \bar{a}, x]$$

Arătăm că φ_A este omomorfism de bigrupuri. Într-adevăr $\forall x, y \in \text{red}_a A$ avem :

$$\begin{aligned} \varphi_A(x \cdot y) &= \varphi_A((x, a, \dots, \bar{a}, y)_o) = [a, \dots, \bar{a}, (x, a, \dots, \bar{a}, y)_o] = \\ &= [a, \dots, \bar{a}, x] * [a, \dots, \bar{a}, y] = \varphi_A(x) * \varphi_A(y) \end{aligned}$$

Mai mult, pentru $\forall A, B \in \text{Ob } n\text{-Gr}$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{red}_* A & \xrightarrow{\varphi_A} & (A_0, *) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ \text{red}_* B & \xrightarrow{\varphi_B} & (B_0, *) \end{array}$$

este comutativă.

Într-adevăr pentru orice $x \in \text{red}_* A$, $\varphi_B \circ F(f)(x) = \varphi_B((b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_0) = [b, \dots, \bar{b}, (b, f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x))_0] = [(b, \dots, \bar{b}, b, f(a))_0, \dots, f(\bar{a}), f(x)] = [f(a), \dots, f(\bar{a}), f(x)] = G(f)([a, \dots, \bar{a}, x]) = G(f) \circ \varphi_A(x)$, ceea ce demonstrează că φ este o transformare naturală.

Dar φ este o echivalență naturală deoarece toate componentele sale, φ_A , sînt izomorfisme.

Într-adevăr pentru $\forall x, y \in A$ astfel încît $\varphi_A(x) = \varphi_A(y)$ avem $[a, \dots, \bar{a}, x] = [a, \dots, \bar{a}, y]$, deci sistemele (a, \dots, \bar{a}, x) și (a, \dots, \bar{a}, y) sînt echivalente în sensul lui Post.

Atunci

$$x = (a, a, \dots, \bar{a}, x)_0 = (a, a, \dots, \bar{a}, y)_0 = y$$

ceea ce demonstrează că φ_A este o injecție.

Pentru orice $[a_1, \dots, a_{n-1}] \in A_0$, cum $a_1 = (a, \dots, \bar{a}, a, a_1)_0$ avem: $[a_1, \dots, a_{n-1}] = [(a, \dots, \bar{a}, a, a_1)_0, a_2, \dots, a_{n-1}] = [a, \dots, \bar{a}, (a, a_1, \dots, a_{n-1})_0] = \varphi_A((a, a_1, \dots, a_{n-1})_0)$ și φ_A este surjecție.

φ_A fiind omomorfism bijectiv este izomorfism, ceea ce demonstrează complet teorema.

(Intrat în redacție la 17 iulie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Hosszú, M., *On the explicit form of n-group operations*, Publ. Math., Debrecen, **10**, 1963, 88–92.
2. Post, E., *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 1940, 208–350.
3. Timm, J., *Kommutative n-Gruppen*, Diss., Hamburg, 1967.

ON THE REDUCTION OF THE n -GROUP TO GROUP

(Summary)

In this paper it is proved that the two kinds of reduction of n -groups to groups, given by the theorems of Post [2] and Hosszú [1], define two covariant functors, naturally equivalent from the category of n -groups to the category of groups.

ASUPRĂ UNEI METODE DE AJUSTARE STATISTICĂ

E. OANCEA și M. RĂDULESCU

În articolul [1] se prezintă o metodă de ajustare, când dependența între două caracteristici X, Y este de tip parabolic

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

care verifică ipoteza dependenței de acest tip și estimează coeficienții ecuației (1) pe baza datelor de selecție. De asemenea se construiește o statistică convenabilă pentru determinarea unui interval de încredere sau verificarea unei ipoteze statistice relativ la parametrul a din ecuația (1), prin valoarea medie a unei anumite variabile aleatoare Z .

În cele ce urmează ne propunem să determinăm un interval de încredere pentru dispersia lui Z , precum și să extindem procedeul de ajustare pentru cazul unei dependențe de tip parabolic de ordinul $n = 3$.

1. Din [1] rezultă că pentru determinarea unui interval de încredere relativ la parametrul $2a$, se folosește statistica normală $N(0, 1)$:

$$Z = \frac{\bar{Z} - M}{\frac{\sigma}{\sqrt{k-1}}}$$

unde

$$\bar{Z} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} Z_i, \quad M = M\bar{Z}, \quad \frac{\sigma^2}{k-1} = D^2\bar{Z}$$

σ^2 fiind dispersia lui Z_i , $i = \overline{1, k-1}$. Variabilele de selecție

$$Z_i = \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i - \frac{1}{k-1}(\bar{y}_k - \bar{y}_1)}{k_i}, \quad i = \overline{1, k-1} \quad (2)$$

corespund valorilor

$$\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i - \frac{1}{k-1}(\bar{y}_k - \bar{y}_1)}{k_i}$$

în cazul când $x_{i+1} - x_i = d = \text{const.}$, $k_i = d^2 \left(i - \frac{k}{2} \right)$, $i = \overline{1, k-1}$ iar (x_i, y_{ij}) , $i = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, n_i}$ sînt datele de selecție relativ la cele două caracteristici (X, Y) și

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

Pentru a determina un interval de încredere relativ la $D^2\bar{Z}$, se presupune că variabilele \bar{Y}_i , $i = \overline{1, k}$ sînt independente și normale $N(m, \sigma)$. Atunci abaterile $\bar{Y}_i - \bar{Y}$, $i = \overline{1, k-1}$ unde

$$\bar{Y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i$$

sînt normale $N(0, \sigma)$ și statistica

$$\chi^2 = \frac{s^2}{\sigma^2} (k-1), \quad (3)$$

unde

$$s^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2,$$

este de tip χ^2 cu $k-1$ grade de libertate și de parametru 1. Prin urmare, alegînd un nivel de semnificație q din

$$P(\chi^2 \in (a_q, b_q)) = 1 - q$$

se obține intervalul de încredere pentru σ^2 :

$$\frac{s^2(k-1)}{b_q} < \sigma^2 < \frac{s^2(k-1)}{a_q}$$

sau

$$\sqrt{\frac{1}{b_q} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2} < \sigma < \sqrt{\frac{1}{a_q} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2}, \quad (4)$$

unde

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i$$

și valoarea lui a se fixează în mod convenabil.

Ținînd seama de expresia lui Z_i rezultă

$$D^2 Z_i = \frac{2\sigma^2 + \frac{1}{(k-1)^2} 2\sigma^2}{k_i^2} = \frac{2}{k_i^2} \left(1 + \frac{1}{(k-1)^2} \right) \sigma^2$$

și prin urmare

$$D^2 \bar{Z} = 2[1 + (k-1)^2] \sigma^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k_i^2} \quad (5)$$

Se observă că înmulțind relația cu un factor pozitiv convenabil se obține

$$2[1 + (k - 1)^2] \frac{1}{b_q} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k_i^2} < D^2 \bar{Z} < \\ < 2[1 + (k - 1)^2] \frac{1}{a_q} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k_i^2}, \quad (6)$$

care reprezintă intervalul de încredere pentru dispersia lui \bar{Z} . Ținând seama că variabila aleatoare \bar{Z} este asociată parametrului $2a$, rezultă că (6) reprezintă un interval de încredere pentru dispersia lui $2a$.

2. Să presupunem că din analiza norului statistic rezultă că dependența între caracteristicile X și Y este de forma

$$y = \alpha x^3 + \beta \alpha^2 + \gamma x + \delta, \quad (7)$$

care are loc când punctele (x_i, \bar{y}_i) , $i = \overline{1, k}$ se distribuie aproximativ sub forma unei curbe ce prezintă două extreme, un minim și un maxim local de abscise, respectiv x_{min} , x_{max} . Se presupune că x_{min} , x_{max} se pot determina suficient de exact. (Pentru precizarea lui x_{min} , x_{max} se pot considera observații suplimentarea în vecinătatea absciselor punctelor presupuse de extrem.) Fie

$$h = \frac{x_{min} + x_{max}}{2},$$

atunci făcînd transformarea $z = x - h$ ecuația de dependență (7) devine

$$y = az^3 + bz + c. \quad (8)$$

În continuare se consideră valorile de observație (z_i, \bar{y}_i) , $i = \overline{1, k}$; $z_i = x_i - h$. Pentru estimarea parametrilor a , b , c se poate utiliza metoda dată în [1], la punctul 1. Și anume:

Fie

$$m_i = \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{z_{i+1} - z_i} \quad i = \overline{1, k-1}$$

atunci

$$m_i \approx 3az_i^2 + b, \quad i = \overline{1, k-1},$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} m_i = 3a \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + (k-1)b$$

$$b = \frac{1}{k-1} \left[\sum_{i=1}^{k-1} m_i - 3a \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 \right]$$

sau

$$b = \bar{m} - 3aM_2 \quad (9)$$

$$\bar{m} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} m_i, \quad M_2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2$$

Prin urmare

$$m_i = 3a_i z_i^2 + \bar{m} - 3a_i M_2$$

de unde

$$3a_i = \frac{m_i - \bar{m}}{z_i^2 - M_2}, \quad i = \overline{1, k-1}. \quad (10)$$

Dacă $3a_i, i = \overline{1, k-1}$ este aproximativ constant, atunci ipoteza că dependența între X și Y este de tipul (7) este adevărată.

Practic se atribuie lui $3a$ valoarea

$$3a = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} 3a_i,$$

iar

$$c = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{y}_i - az_i^2 - bz_i).$$

Pentru determinarea unui interval de încredere relativ la parametrul $3a$ se pot folosi variabilele aleatoare

$$Z_i = \frac{\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i - \frac{1}{k-1} (\bar{Y}_k - \bar{Y}_1)}{k_i}, \quad i = \overline{1, k-1}$$

unde s-a presupus $z_{i+1} - z_i = d = \text{const.}$ și $k_i = z_i^2 - M_2$. Atunci statistica

$$Z = \frac{\bar{Z} - M}{\frac{\sigma}{\sqrt{k-1}}}$$

unde

$$\bar{Z} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} Z_i, \quad M = M\bar{Z}, \quad \frac{\sigma^2}{k-1} = D^2 \bar{Z},$$

σ^2 fiind dispersia pentru o variabilă aleatoare $Z_i, i = \overline{1, k-1}$; în ipoteza că Z_i verifică condițiile teoremei centrale a teoriei probabilităților [2], este normală $N(0, 1)$.

Se observă că valoarea medie M corespunde parametrului $3a$. Alegînd o probabilitate de risc q , din

$$P(|Z| < z_q) = 1 - q$$

rezultă un interval de încredere pentru M și anume:

$$\bar{Z} - z_q \frac{\sigma}{\sqrt{k-1}} < M < \bar{Z} + z_q \frac{\sigma}{\sqrt{k-1}},$$

care se poate calcula în cazul cînd σ este cunoscut.

În cazul cînd σ este necunoscut se poate utiliza statistica T de tip Student cu $n - k$ grade de libertate:

$$T_{n-k} = \frac{\bar{Z} - M}{\frac{s}{\sqrt{k-1}}}$$

unde

$$s^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) s_i^2, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n,$$

iar s_i^2 se calculează conform [1].

Intervalul de încredere referitor la abaterea medie pătratică DZ , se determină analog celor prezentate la punctul 1 și este dat de inegalitățile (4).

(Intrat în redacție la 18 iulie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. E. Oancea, M. Rădulescu, *Metodă de ajustare statistică*, Revista de statistică, 1, 1977, 29-33.
2. M. Iosifescu, M. Mihoc, R. Theodorescu, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Ed. tehnică, București, 1966.

SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION STATISTIQUE

(Résumé)

Dans la première partie on complète la méthode donnée dans [1] en déterminant un intervalle de confiance pour la variance d'une variable aléatoire associée à un paramètre $2a$ de la dépendance parabolique d'ordre 2, (1) des deux caractéristiques statistiques.

Ensuite on étend cette méthode de [1] pour une dépendance parabolique d'ordre 3.

ASUPRA UNUI SISTEM INFORMATIC PRIVIND EVIDENȚA STUDENȚILOR

GR. MOLDOVAN, GH. MUREȘAN, T. TOADERE

1. **Introducere.** Ideea proiectării și realizării unui sistem informatic pentru evidența studenților este mai veche la Universitatea din Cluj-Napoca. În lume, la unele institute de învățămînt superior de mare renume există astfel de sisteme informatice, dar specifice sistemului de învățămînt și modului de organizare a institutelor de învățămînt superior din țările respective. De aceea, concepția și implementarea unui astfel de sistem informatic la institutele de învățămînt superior din țara noastră constituie o notă de originalitate. Datorită existenței unui Centru de calcul, ideea realizării unui sistem informatic pentru evidența studenților de la universitatea noastră a putut fi materializată. În anul universitar 1976/1977, sprijiniți de conducerea universității, s-a făcut prima experimentare a sistemului la Facultatea de matematică, unde am avut tot concursul, atît al conducerii facultății cît și al secretariatului. În anul universitar 1977/1978, datorită avantajelor pe care le are pentru realizarea unor aplicații, sistemul s-a folosit la trei facultăți din cadrul Universității (Matematică, Științe economice și Drept), iar pentru anul universitar 1978/1979 s-a aplicat, cu acordul Ministerului Educației și Învățămîntului, la studenții din întreaga Universitate din Cluj-Napoca.

În cele ce urmează vom prezenta foarte pe scurt cîteva caracteristici ale sistemului și cîteva idei în proiectarea lui.

2. **Despre proiectarea sistemului.** Sistemul informatic privind evidența studenților are în vedere un ansamblu de aplicații care se fac și se pot face pe calculator. Datorită acestui fapt el are un caracter modular. Cel pe care îl prezentăm în continuare se va referi numai la rezolvarea unor probleme privind înscrierea studenților (obținerea unui registru de evidență), căminizarea lor și atribuirea de burse. Pentru a putea realiza aceste aplicații s-a conceput o fișă de înscriere care să conțină datele necesare rezolvării următoarelor probleme: obținerea de liste cu studenții pe grupe de studii, obținerea unui registru de evidență al studenților pe facultate, pe specializări, ani de studii și în ordine alfabetică, obținerea cataloagelor la toate disciplinele de învățămînt, a tabelor cu drepturi de bursă, a tabelor cu studenții bursieri, tabele cu repartizarea pe cămine a studenților, tabele cu foile de drum necesare și lista studenților, precum și diferite situații statistice. Fișa concepută în cadrul acestui sistem, numită FIȘĂ DE ÎNSCRIERE, conține datele din fișa de înscriere existentă pînă acum, datele din declarația de solicitare bursă și cererea de cămin, prin urmare un singur document primar în locul a trei. Datele de pe fișa de înscriere se perforează pe 6 cartele. Fiecare cartelă conține un grup coerent de date. Marea majoritate a informațiilor se scriu în clar, iar codificările, acolo unde apar, sînt cît mai naturale. Completarea fișelor se face de către studenți la înscriere, cu excepția unui număr mic de informații (număr matricol, distanța pînă la stația C.F.R. de debarcare și media de absolvire a anului precedent).

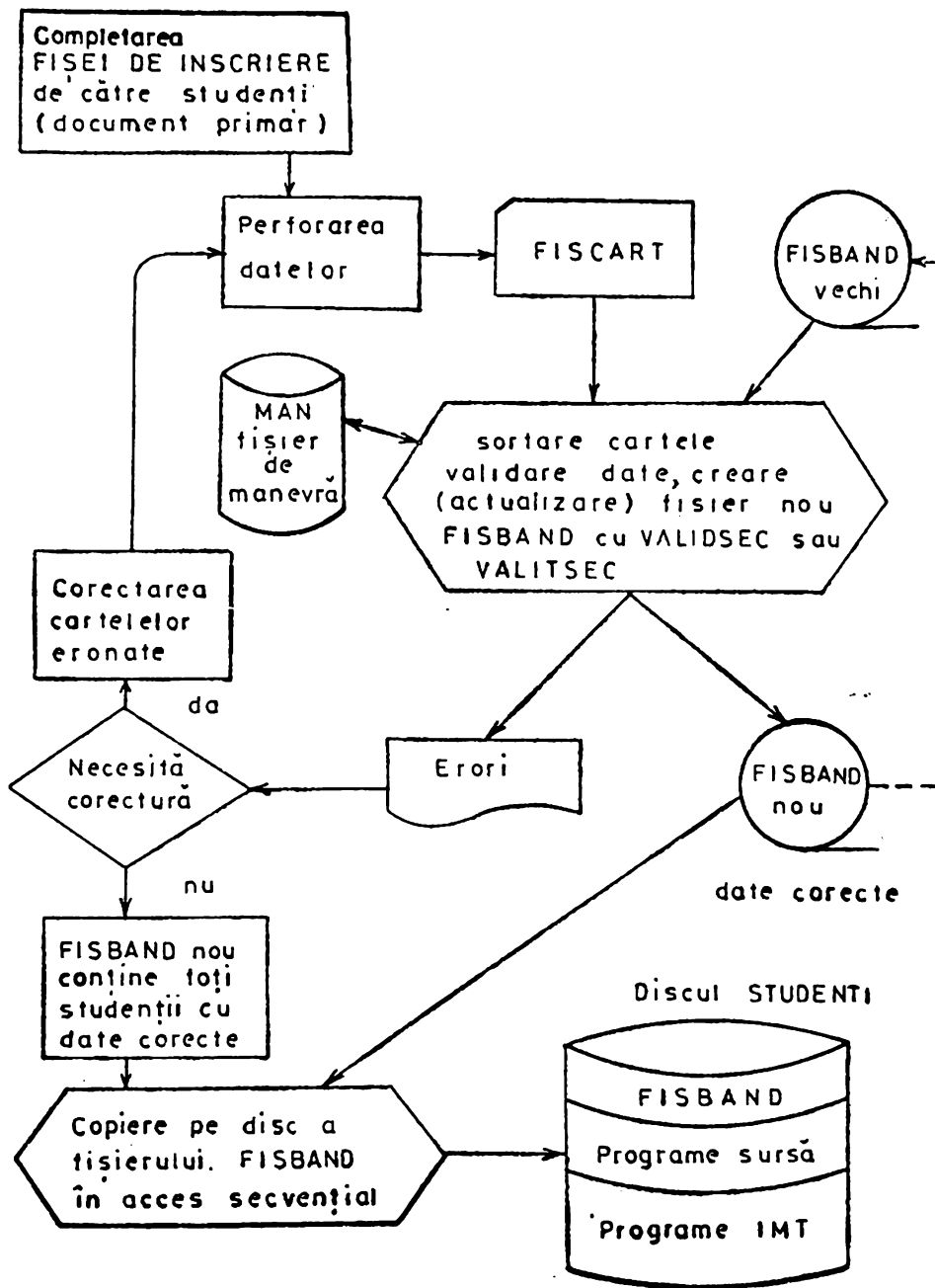


Fig. 1.

Pentru completarea fișei se afișează la fiecare decanat un model împreună cu indicațiile necesare și coduri.

Pentru realizarea unor aplicații este necesară parcurgerea unor etape, impuse de sistem, pînă la crearea unui disc STUDENȚI care să conțină informații corecte despre toți studenții precum și ansamblul de programe necesare. Schema logică de sistem într-o formă simplificată se prezintă în fig. 1. Detaliile sînt în documentația de exploatare a sistemului.

3. Programe. Programele pe care le conține sistemul se grupează în două categorii: a) programe de validare, creare, actualizare; b) programe pentru realizarea unor aplicații.

Programele urmăresc o exploatare eficientă a calculatorului prin timp-calculator redus, oferind o libertate în alegerea și corectarea datelor, respectiv actualizarea lor, precum și o utilizare simplă și comodă a lor chiar de către un nespecialist.

Iată o listă a cîtorva programe din sistem, împreună cu funcțiunile lor:

Nr. crt.	Numele programului (numele cărții din biblioteca IMT)	Funcția îndeplinită
1	VALIDFIN	Sortare cartele, validare date, creare (actualizare) fișier nou: FISBAND
2	VALIDSEC	"
3	VALITFIN	"
4	VALITSEC	"
5	GRUPEREP	Editarea grupelor de studenți
6	REGISTRE	Întocmirea și scrierea registrelor de evidență
7	CATALREP	Întocmirea și listarea cataloagelor de examen
8	BURSE	Întocmirea listelor cu bursierii

Primele patru programe au aceeași funcție de îndeplinit, dar rezolvă situații particulare. Astfel, programele 1 și 2 se folosesc la facultățile care au registre matricole pentru fiecare specializare, programele 3 și 4 se folosesc în celelalte cazuri. Programele 1 și 3 realizează o actualizare după o singură cheie (nr. matricol), iar programele 2 și 4 după două chei (nr. matricol și nume student). În exploatare se preferă, la primele corecturi, folosirea programelor 2 și 4. Ele prezintă mai multă siguranță pentru o actualizare corectă, necesitînd însă folosirea cartelei de date 1 pentru actualizarea oricărui cîmp din structura articolului. Pentru actualizarea unui volum mai mic de date se pot folosi programele 1 și 3. La aceste programe este de remarcat multitudinea de funcții și faptul că un singur program poate crea și întreține fișierul FISBAND, care cuprinde datele despre studenți. Aceste programe permit introducerea oricăror cartele dintre cele șase despre un student și care în pachetul de cartele de date pot fi situate oriunde. Aceste programe folosesc în afară de cititorul de cartele și imprimantă doar două benzi, una cu fișierul vechi (de actualizat), pe cealaltă creîndu-se fișierul nou actualizat. Celelalte programe sînt pentru exploatarea fișierului creat, realizînd diferite aplicații conform tabelului dat.

Programele sînt păstrate atît în format sursă, cît și IMT în bibliotecile de programe care se află pe discul STUDENȚI. Pentru exploatare ele se apelează din format IMT cu ajutorul următoarelor cartele de comandă:

1	11	1	11
JOB ...		JOB...	
FETCH DV:RD1, LN:STUDENTI,		FETCH DV:RD1, LN:STUDENTI,	
FN: { VALIDSEC VALIDFIN VALITSEC VALITFIN }, GN:1, VN:1		FN: { GRUPEREP REGISTRE CATALREP BURSE }, GN:1, VN:1	
. INIT DV:RD2, VS:111222		. INIT DV:RD2, VS:111222	
. INIT DV:MT2, VS:NOU		. INIT DV:MT1, VS:111222	
. ASSIGN A, DV:RD2		. ASSIGN A, DV:RD1	
. LABEL A, FN:'MANEVRA'		. LABEL A, FN:'FISBAND'	
. ASSIGN B, DV:MT2		. ASSIGN B, DV:RD2	
. LABEL B, FN:'FISBAND'		. LABEL B, FN:'MANEVRA'	
. ASSIGN C, DV:MT1		. ASSIGN C, DV:MT1	
. LABEL C, FN:'FISBAND'		. LABEL C, FN:'TIPOUT'	
. RUN NL:25000, TIME:10		. RUN NL:250000, TIME:10	
cartelele din fișierul FISCART		cartelă parametru	
. EOF		. EOJ	
. EOJ			

Cartela marcată cu 1) se folosește în această formă atunci cînd se actualizează fișierul FISBAND. La prima rulare se folosește cartela ASSIGN C, DV:AB.

Cartela marcată cu 2) indică FN-ul fișierului de ieșire, care cuprinde situațiile cerute conform programelor indicate în cartela FETCH, și care trebuie listat cu TIPOUT variantele 1 și 2.

4. Posibilități de perfecționare și extindere. După un experiment de un an sau doi se va putea revedea structura și volumul de informații absolut necesare prelucrării pe calculator și în felul acesta să se facă eventual reducerea numărului de cartele pentru un student.

Poate să crească numărul aplicațiilor care folosesc datele existente pe prezenta fișă, elaborînd noi programe. La proiectarea acestui sistem s-a avut în vedere extinderea lui pentru realizarea unor evidențe școlare. Astfel, prin intermediul perforatorului de cartele (PUNCH-ul) se poate obține pentru fiecare student o cartelă, aranjate în ordine alfabetică pe grupe și ani de studii. Pe baza cataloagelor se trec notele studenților obținute la diferite examene. Într-o altă variantă, în cazul existenței unor terminale de tip DISPLAY cu afișaj electronic, această operație se poate face direct la secretariatele facultăților.

Perfecționarea acestui sistem și realizarea de noi aplicații este în atenția și preocuparea noastră.

(Intrat în redacție la 20 iulie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. *Indicații metodologice privind elaborarea și avizarea proiectelor de sisteme informatice pentru întreprinderi și alte unități economice*, I.C.I., decembrie 1977.
2. *Calculator FELIX C-256, COBOL ANS*. Manual de utilizare, SIRIS 3, mai 1976.
3. Gr. Moldovan, *Posibilități de conducere modernă a învățământului, folosind mijloacele informaticii*, Universitatea politică și de conducere, jud. Cluj, 1978.

SUR UN SYSTÈME INFORMATIQUE CONCERNANT L'ÉVIDENCE DES ÉTUDIANTS

(R é s u m é)

L'ouvrage signale la réalisation à l'Université de Cluj-Napoca d'un système informatique pour l'évidence des étudiants et présente brièvement la conception générale de réalisation de ce système.

ON VECTORIAL PROGRAMMING PROBLEM IN COMPLEX SPACE

DOREL I. DUCA

1. Notations. Let $C^n(R^n)$ denote the n -dimensional complex(real) vector space,

$$R_+^n = \{x = (x_j) \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

the non-negative orthant of R^n and let $C^{m \times n}$ be the set of $m \times n$ complex matrices.

For $A = (a_{kj}) \in C^{m \times n}$, let $\bar{A} = (\bar{a}_{kj})$, $A^T = (a_{jh})$ and $A^H = \bar{A}^T$ denote the conjugate, transpose and conjugate transpose of A respectively. For $z = (z_j)$, $u \in C^n$: $\langle z, u \rangle = u^H z$ — denotes the inner product of z and u , and $\text{Re } z = = (\text{Re } z_j) \in R^n$ — denotes the real part of the vector z .

If T is a nonempty set in C^m , then:

$$T^* = \{w \in C^m / v \in T \Rightarrow \text{Re } \langle w, v \rangle \geq 0\}.$$

is the polar of T . Furthermore, we introduce

$$-T = \{z / -z \in T\} \text{ and } T_* = \{z^0 + z / z \in T\}.$$

If $d^1, \dots, d^p \in C^n$, we denote by D , either the $n \times p$ matrix with columns d^1, \dots, d^p , or the set having d^1, \dots, d^p as elements.

If $x = (x_j)$, $y = (y_j) \in R^n$, we consider

$$x \leq y (x < y) \text{ iff } x_j \leq y_j (x_j < y_j) \text{ for every } j \in \{1, \dots, n\},$$

$$x \leq y \text{ iff } x \leq y \text{ and } x \neq y.$$

2. The vectorial programming problem in complex space. Let $z \in C^n$, $b \in C^m$, $A \in C^{m \times n}$, $d^1, \dots, d^p \in C^n$ and let S be a polyhedral cone in C^m . We denote by

$$\Omega = \{z \in C^n / Az - b \in S\},$$

the set of "feasible" points.

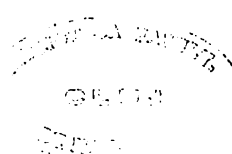
DEFINITION 1. A point $z^0 \in \Omega$ is called efficient with respect to $D \in C^{n \times p}$ for Ω , if there exists no point $z \in \Omega$ such that $\text{Re } D^H z \leq \text{Re } D^H z^0$.

It is easy to verify that a point $z^0 \in \Omega$ is efficient with respect to D for Ω , iff

$$\left. \begin{array}{l} z \in \Omega \\ z^0 - z \in D^* \end{array} \right\} \text{ implies } z - z^0 \in D^*.$$

The problem of determining all efficient points $z \in \Omega$ with respect to D for Ω will be called vectorial programming problem in complex space and will be denoted by

$$V\text{-min } \text{Re } D^H z \text{ subject to } Az - b \in S. \quad (VPCS)$$



3. Efficiency conditions. **THEOREM 1.** Let $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T > 0$ be fixed, and let $d = D\lambda$. If z^0 is a solution of the problem:

$$\min \operatorname{Re} \langle d, z \rangle \quad \text{subject to } Az - b \in S, \quad (1)$$

then z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

Proof. Since z^0 is a solution of the problem (1), we have

$$\operatorname{Re} \langle d, z^0 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle d, z \rangle \quad \text{for all } z \in \Omega;$$

hence

$$\sum_{s=1}^p \lambda_s \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle \leq 0 \quad \text{for all } z \in \Omega. \quad (2)$$

Let $z \in \Omega$ be such that $z^0 - z \in D^*$, or, equivalently,

$$\operatorname{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle \geq 0 \quad \text{for all } s \in \{1, \dots, p\}. \quad (3)$$

Since $\lambda > 0$, it follows, from (2) and (3) that

$$\operatorname{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle = 0 \quad \text{for all } s \in \{1, \dots, p\},$$

or, equivalently, $\operatorname{Re} \langle d^s, z - z^0 \rangle = 0$ for all $s \in \{1, \dots, p\}$, i.e. $z - z^0 \in D^*$. Therefore, z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

COROLLARY. Let $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T > 0$ be fixed, and let $d = D\lambda$. If z^0 is a solution of the problem (1), then the hyperplane

$$H(d, \alpha) = \{z \in C^n / \operatorname{Re} \langle d, z \rangle = \alpha\},$$

where $\alpha = \operatorname{Re} \langle d, z^0 \rangle$, separates Ω and $(-D^*)_s$.

Proof. The point $z^0 \in \Omega$ being a solution of the problem (1), we have

$$\operatorname{Re} \langle d, z^0 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle d, z \rangle \quad \text{for all } z \in \Omega.$$

On the other hand, since $d \in \operatorname{con} D = D^{**}$ we have

$$\operatorname{Re} \langle d, z^0 - z \rangle \geq 0 \quad \text{for all } z^0 - z \in D^*,$$

i.e.

$$\operatorname{Re} \langle d, z^0 \rangle \geq \operatorname{Re} \langle d, z \rangle \quad \text{for all } z \in (-D^*)_s.$$

THEOREM 2. Let $\{d^{s_1}, \dots, d^{s_r}\} \subseteq \{d^1, \dots, d^p\}$ and let \tilde{D} be either the matrix with columns d^{s_1}, \dots, d^{s_r} , or the set $\{d^{s_1}, \dots, d^{s_r}\}$. If z^0 is an efficient point with respect to \tilde{D} for Ω and

$$\Omega \cap (-\tilde{D}^*)_s = \{z^0\},$$

then z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

Proof. By hypothesis we have $D^* \subseteq \tilde{D}^* = (\{d^{s_1}, \dots, d^{s_r}\})^*$ thus $(-D^*) \subseteq (-\tilde{D}^*)$, i.e. $(-D^*)_s \subseteq (-\tilde{D}^*)_s$. Then

$$\Omega \cap (-D^*)_s \subseteq \Omega \cap (-\tilde{D}^*)_s = \{z^0\}.$$

Let $z \in \Omega$ be such that $z^0 - z \in D^*$, i.e. $z \in \Omega \cap (-D^*)_{z^0}$. Since $\Omega \cap (-D^*)_{z^0} \subseteq \{z^0\}$ and $z^0 \in \Omega \cap (-D^*)_{z^0}$, it follows that $\Omega \cap (-D^*)_{z^0} = \{z^0\}$, thus $z = z^0$. So $z - z^0 = 0 \in D^*$. In other words z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

From Theorem 2 one can deduce directly the following

COROLLARY. Let $s \in \{1, \dots, p\}$ be fixed. If the problem

$$\min \operatorname{Re} \langle d^s, z \rangle \quad \text{subject to } Az - b \in S$$

has a unique solution z^0 , then z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

THEOREM 3. Let $F : C^p \rightarrow C$ be a function satisfying the following condition :

$$\forall w^1, w^2 \in C^p \text{ with } \operatorname{Re} w^1 \leq \operatorname{Re} w^2 \Rightarrow \operatorname{Re} F(w^1) < \operatorname{Re} F(w^2).$$

If z^0 is a solution of the problem

$$\min \operatorname{Re} F(D^H z) \quad \text{subject to } Az - b \in S, \tag{4}$$

then z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

Proof. Assume that $z^0 \in \Omega$ is not efficient with respect to D for Ω . Then there exists $z \in \Omega$ such that $\operatorname{Re} D^H z \leq \operatorname{Re} D^H z^0$. But this inequality implies $\operatorname{Re} F(D^H z) < \operatorname{Re} F(D^H z^0)$, which is in contradiction with the fact that z^0 is a solution of the problem (4).

Remark. If $\lambda \in R^p$, $\lambda > 0$ is fixed and $F(w) = \langle \lambda, w \rangle$ for all $w \in C^p$, Theorem 3 reduces to Theorem 1.

THEOREM 4. If D^* is a subspace of C^n , then all points of Ω are efficient with respect to D for Ω .

Proof. Let $z^0 \in \Omega$ and $z \in \Omega$ be such that $z^0 - z \in D^*$. Since D^* is a subspace of C^n it follows that $z - z^0 \in D^*$, thus z^0 is an efficient point with respect to D for Ω .

THEOREM 5. Let $E \subseteq \Omega$ be the set of all efficient points with respect to D for Ω . Then $\Omega \setminus E$ is a convex set.

Proof. If $E = \Omega$, then the theorem is obvious. Let $z^0, z^1 \in \Omega \setminus E$. Then there exist $w^0, w^1 \in \Omega$ such that $\operatorname{Re} D^H w^0 \leq \operatorname{Re} D^H z^0$ and $\operatorname{Re} D^H w^1 \leq \operatorname{Re} D^H z^1$. Let $t \in [0, 1]$, $z^t = (1 - t)z^0 + tz^1$ and $w^t = (1 - t)w^0 + tw^1$. We must show that $z^t \in \Omega \setminus E$ for any $t \in [0, 1]$. Since Ω is convex, we have $z^t, w^t \in \Omega$ for any $t \in [0, 1]$.

On the other hand we have

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} D^H w^t &= (1 - t)\operatorname{Re} D^H w^0 + t\operatorname{Re} D^H w^1 \leq \\ &\leq (1 - t)\operatorname{Re} D^H z^0 + t\operatorname{Re} D^H z^1 = \operatorname{Re} D^H z^t, \end{aligned}$$

for any $t \in [0, 1]$. Therefore $z^t \in \Omega \setminus E$ for any $t \in [0, 1]$, thus $\Omega \setminus E$ is a convex set.

DEFINITION 3. A $z^0 \in \Omega$ is called a properly efficient point for the problem (VPCS) iff :

- a) z^0 is efficient with respect to D for Ω ,
- b) there exists a scalar $M > 0$ such that

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \langle d, z^0 - z \rangle > 0 \\ z \in \Omega \end{array} \right\} \text{implies } \left\{ \begin{array}{l} \exists r \in \{1, \dots, p\}, \text{ such that} \\ \operatorname{Re} \langle d^r, z^0 - z \rangle \leq M \operatorname{Re} \langle d^r, z - z^0 \rangle. \end{array} \right.$$

An efficient point that is not properly efficient is said to be improperly efficient.

THEOREM 6. Let $\lambda \in R^p$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T > 0$ be fixed, $d = D\lambda$, and let z^0 be a solution of the problem (1). Then z^0 is properly efficient for the problem (VPCS).

Proof. In view of Theorem 1, the point z^0 is efficient for the problem (VPCS). Now assume that z^0 is an improperly efficient point for (VPCS) and choose

$$M = (p - 1) \max_{r,s} \frac{\lambda_r}{\lambda_s}.$$

Then there are $s \in \{1, \dots, p\}$ and $z \in \Omega$ with $\text{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > 0$ such that

$$\text{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > (p - 1) \max_{r,s} \frac{\lambda_r}{\lambda_s} \text{Re} \langle d^r, z - z^0 \rangle,$$

for all $r \in \{1, \dots, p\}$. Therefore

$$\text{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > (p - 1) \frac{\lambda_r}{\lambda_s} \text{Re} \langle d^r, z - z^0 \rangle,$$

for all $r \in \{1, \dots, p\}$.

Multiplying the last inequality by $\lambda_s / (p - 1) > 0$ and adding for all $r \neq s$, we obtain

$$\lambda_s \text{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > \sum_{r \neq s} \lambda_r \text{Re} \langle d^r, z - z^0 \rangle,$$

or

$$\text{Re} \langle d, z^0 \rangle > \text{Re} \langle d, z \rangle,$$

that contradicts the optimality of z^0 for the problem (1).

LEMMA. Let $c^1, \dots, c^p \in C^n$ and $z^0 \in \Omega$. If the system

$$\begin{cases} \text{Re} \langle c^s, z \rangle < \text{Re} \langle c^s, z^0 \rangle, & s = 1, \dots, p \\ z \in \Omega \end{cases} \quad (5)$$

is inconsistent, then there exists a vector $\lambda \in R^p$,

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \geq 0 \text{ with } \sum_{s=1}^p \lambda_s = 1, \text{ such that}$$

$$\text{Re} \langle c, z \rangle \geq \text{Re} \langle c, z^0 \rangle \text{ for all } z \in \Omega,$$

where $c = \sum_{s=1}^p \lambda_s c^s$.

Proof. Let $f_s = f_s(x, y)$ denote the real function of $2n$ variables $x, y \in R^n$, $s \in \{1, \dots, p\}$ defined by the formulae

$$f_s(x, y) = \text{Re} \langle c^s, z \rangle, \quad z = x + iy \in C^n,$$

and let

$$X = \{(x, y) \in R^{2n} / z = x + iy \in \Omega\}, \quad z^0 = x^0 + iy^0 \in C^n.$$

System (5) is inconsistent iff the system

$$\begin{cases} f_s(x, y) < f_s(x^0, y^0), & s = 1, \dots, p \\ (x, y) \in X \end{cases} \quad (6)$$

is inconsistent.

Since the function $f_s, s = 1, \dots, p$ are linear, and X is convex (Ω is convex), the hypotheses of the basic Theorem on convex systems [see 2, p. 62] are satisfied, thus there exists a vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \geq 0$ with $\sum_{s=1}^p \lambda_s = 1$, such that

$$\sum_{s=1}^p \lambda_s f_s(x, y) \geq \sum_{s=1}^p \lambda_s f_s(x^0, y^0) \text{ for all } (x, y) \in X,$$

or, equivalently,

$$\sum_{s=1}^p \lambda_s \operatorname{Re} \langle c^s, z \rangle \geq \sum_{s=1}^p \lambda_s \operatorname{Re} \langle c^s, z^0 \rangle \text{ for all } z \in \Omega.$$

THEOREM 7. *The point z^0 is properly efficient for the problem (VPCS) iff there exists $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T > 0, \lambda \in R^p$ such that z^0 is a solution of the problem (1).*

Proof. The sufficiency was proved in Theorem 6.

Necessity. If z^0 is properly efficient for (VPCS) then there exists a scalar $M > 0$ such that for each $s \in \{1, \dots, p\}$, the system

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > 0, \\ \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 - z \rangle > M \cdot \operatorname{Re} \langle d^r, z - z^0 \rangle, & r \neq s, \\ z \in \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

is inconsistent.

System (7) being equivalent to the system

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle d^s, z \rangle < \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 \rangle, \\ \operatorname{Re} \langle d^s + Md^r, z \rangle < \operatorname{Re} \langle d^s + Md^r, z^0 \rangle, & r \neq s, \\ z \in \Omega, \end{cases}$$

in view of the previous lemma, for each $s \in \{1, \dots, p\}$ there exists $\lambda^s \in R^p$,

$\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_p^s)^T \geq 0$ with $\sum_{r=1}^p \lambda_r^s = 1$ such that

$$\begin{aligned} & \lambda_s^s \operatorname{Re} \langle d^s, z \rangle + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r^s \operatorname{Re} \langle d^s + Md^r, z \rangle \geq \\ & \geq \lambda_s^s \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 \rangle + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r^s \operatorname{Re} \langle d^s + Md^r, z^0 \rangle. \end{aligned}$$

, equivalently,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle d^s, z \rangle + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r \operatorname{Re} \langle d^r, z \rangle &\geq \\ \geq \operatorname{Re} \langle d^s, z^0 \rangle + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r \operatorname{Re} \langle d^r, z^0 \rangle &\text{ for all } z \in \Omega. \end{aligned}$$

Taking the sum for $s \in \{1, \dots, p\}$ and rearranging the terms we obtain

$$\sum_{r=1}^p \left(1 + M \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq r)}}^p \lambda_s \right) \operatorname{Re} \langle d^r, z \rangle \geq \sum_{r=1}^p \left(1 + M \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq r)}}^p \lambda_s \right) \operatorname{Re} \langle d^r, z^0 \rangle,$$

for all $z \in \Omega$, i.e. z^0 is a solution of the problem (1) with

$$\lambda_s = \left(1 + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r \right) / \sum_{s=1}^p \left(1 + M \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^p \lambda_r \right) > 0, \quad s \in \{1, \dots, p\}.$$

Consequently, to compute properly efficient points for the problem (VPCS) it is sufficient to solve the problem of parametrical programming (1), when the parameter λ runs over the set

$$\Delta = \left\{ \lambda \in R^p / \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T > 0 \text{ and } \sum_{s=1}^p \lambda_s = 1 \right\}.$$

(Received July 21, 1978)

REFERENCES

1. Ben-Israel, A., *Linear equations and inequalities on finite dimensional, real or complex space: a unified theory*, J. Math. Anal. Appl., 27, 1969, 367–389.
2. Berge, C. and Gouila-Houri, A., *Programming, games and transportation networks*, Wiley, New York, 1965.
3. Geoffrion, A. M., *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, J. Math. Anal. Appl., 22, 1968, 618–630.
4. Marușciac, I., Rădulescu, M., *Un probleme general de la programmation lineaire a plusieurs fonctions economiques*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, 2, 1970, 55–65.
5. Marușciac, I., Rădulescu, M., *Sur l'ensemble des points efficients d'un problème de la programmation mathématique*, Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza” din Iași, 18, 1972, 210–226.
6. Philip, J., *Algorithms for the vector maximization problem*, Math. Programming, 2, 1972, 207–229.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE VECTORIALĂ ÎN DOMENIUL COMPLEX (Rezumat)

În lucrare se consideră problema de programare vectorială în domeniul complex: $V\text{-min Re } D^H z$ în condițiile $Az - b \in S$, (VPCS) unde $D^H \in C^{p \times n}$, $A \in C^{m \times n}$, $b \in C^m$, $z \in C^n$, iar $S \subseteq C^m$, care reprezintă o generalizare a problemei de programare vectorială liniară reală. Se definește noțiunea de eficiență (optimalitate Pareto) și se stabilesc criterii ca un punct să fie eficient pentru problema (VPCS). De asemenea se generalizează noțiunea de propriu eficiență.

ASUPRA ORDONĂRII PUNCTELOR EFICIENTE EXTREMALE ÎNTR-O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE VECTORIALĂ

EUGENIA DUCA

În prezenta lucrare se dă un algoritm care permite ordonarea soluțiilor eficiente extreme ale unui program vectorial, după un supercriteriu liniar fracționar.

Considerăm următoarea problemă de optimizare :

$$\max f(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \quad (1)$$

în condițiile

$$x \in X \quad (2)$$

și x este un punct extremal al mulțimii

$$\Omega = \{x \in R^n / Ax \leq b\}, \quad (3)$$

unde $c, d, x \in R^n$, $b \in R^m$, $\alpha, \beta \in R$, A este o matrice de tipul $m \times n$ având rangul n , iar $X \subseteq R^n$, $X \neq \emptyset$.

Notăm cu $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega / x \text{ este extremal}\}$.

Vom da o metodă de obținere a tuturor punctelor mulțimii $\tilde{\Omega} \cap X = \{x^1, \dots, x^l\}$, ordonate în raport cu valorile funcției f , adică astfel ca să avem inegalitatea $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ pentru $k = 1, \dots, l-1$.

Problema de optimizare considerată reprezintă o generalizare a problemelor studiate de D. D u c a [1] și R. K. G u p t a și K. S w a r u p [3]. Astfel dacă $X = R^n$ se obține problema studiată de D. D u c a [1], iar dacă $X = \{x \in R^n / Bx = e\}$, unde B este o matrice de tipul $l \times n$, iar $e \in R^l$, se obține problema studiată de G u p t a și S w a r u p [3].

Vom presupune în continuare că $\Omega \subset S$, unde

$$S = \{x \in R^n / d^T x + \beta > 0\}.$$

Deoarece f este explicit quasimonotonă pe S [4], orice maxim local al problemei

$$\max\{f(x) / x \in \Omega\}, \quad (4)$$

este și maxim global. Mai mult, soluția optimă x^0 a problemei (4) este un punct extremal al mulțimii Ω , adică $x^0 \in \tilde{\Omega}$.

Pentru determinarea soluției optime $x^0 \in \tilde{\Omega}$, folosim metoda de tip simplex dată în [1]. Vom atașa problemei (4) tabelul simplex :

$$y = \begin{array}{c} -x^T \quad 1 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline -c^T & \alpha \\ \hline -d^T & \beta \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (5)$$

După efectuarea a n pași Gauss-Jordan modificați ($G-J m.$) de eliminare a variabilelor independente x_1, \dots, x_n se ajunge la următorul tabel simplex:

$$\begin{array}{l}
 y_{n+1} = \\
 \dots \\
 y_m = \\
 f = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline E & r \\ \hline p^T & P \\ \hline q^T & Q \\ \hline \end{array} \right.
 \end{array} \quad (6)$$

unde

$$x_k = - \sum_{j=1}^n e_{kj} y_j + r_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Să presupunem că în tabelul (6) se poate citi o soluție bazică, adică $y_i = r_i \geq 0, i = n+1, \dots, m.$

TEOREMA 1. *Punctul extremal $x^0 \in \bar{\Omega}$, dat de intersecția hiperplanelor $y_1 = \dots = y_n = 0$, este un punct de maxim al funcției f pe Ω , dacă și numai dacă:*

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \delta_j = Qp_j - Pq_j \geq 0. \quad (8)$$

Demonstrația este analogă celei prezentată în [2].

Această teoremă ne furnizează algoritmul de determinare a unei soluții optime a problemei (4). Dacă x^0 dat de intersecția hiperplanelor $y_1 = \dots = y_n = 0$ nu este punct de maxim al funcției f pe Ω , adică există cel puțin un indice $k, k \in \{1, \dots, n\}$ pentru care $\delta_k < 0$, atunci se efectuează un pas $G-J m.$, alegînd elementul pivot din coloana k . Obținem în acest fel un nou punct extremal x' . Deoarece $f_k(t) = (-p_k t + P)/(-q_k t + Q)$ este crescătoare pentru $t > 0$ suficient de mic, vom avea că $f(x') > f(x^0)$. Repetînd acest pas ajungem, după un număr finit de pași ($\bar{\Omega}$ are un număr finit de puncte) fie la un maxim al funcției f pe Ω , fie la constatarea că f este nemărginită pe Ω .

DEFINIȚIA 1. Punctul $x' \in \bar{\Omega}$ se numește presoluție optimă a problemei (4) dacă

$$f(x') = \max \{f(x) | x \in \bar{\Omega} \setminus \{x^0\}\}.$$

Dacă $f(x') = f(x^0)$, x' se numește presoluție optimă improprie, iar dacă $f(x') \neq f(x^0)$, x' se numește presoluție optimă proprie.

DEFINIȚIA 2. Punctul $x_k^* \in \bar{\Omega}$ se zice că este adiacent punctului x^0 dacă x^* se obține din (6)-(7) trecînd în bază variabila secundară y_i în locul unei variabile bazice $y_j, i \in \{n+1, \dots, m\}$.

TEOREMA 2. *Dacă*

$$\forall i \in \{n+1, \dots, m\} \text{ și } \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow c_{ij} \leq 0,$$

atunci $\bar{\Omega} = \{x^0\}$.

Demonstrația este prezentată în [5].

Presupunem în continuare că există cel puțin un $i \in \{n+1, \dots, m\}$ și cel puțin un $j \in \{1, \dots, n\}$ astfel că $e_{ij} > 0$. Notăm cu $J = \{j \in \{1, \dots, n\} / \exists i \in \{n+1, \dots, m\} \text{ cu } e_{ij} > 0\}$, cu $i(j)$ linia elementului pivot din coloana $j \in J$ și cu

$$T_j = [Pe_{i(j),j} - p_j r_{i(j)}] / [Qe_{i(j),j} - q_j r_{i(j)}], \quad j \in J.$$

TEOREMA 3. Fie $s \in J$. Dacă

$$\forall j \in J \Rightarrow T_s \geq T_j, \tag{9}$$

atunci punctul x^s este o presoluție optimă a problemei (4).

Demonstrația este dată în [1].

Considerăm mulțimea

$$\Omega_s = \Omega \cap \left\{ x \in R^n / \sum_{j=1}^n (p_j - T_s q_j) y_j \geq P - T_s Q \right\}.$$

TEOREMA 4. Dacă există $s \in J$ ce verifică (9) cu $r_{i(s)} \delta_s > 0$, atunci $x^0 \notin \Omega_s$ și

$$f(x^s) = \max \{f(x) / x \in \Omega_s\}$$

Demonstrația se găsește în [1].

În baza celor de mai sus, obținem algoritmul de determinare a tuturor punctelor mulțimii $\tilde{\Omega} \cap X$, ordonate în raport cu valorile descrescătoare ale funcției f .

Pasul 1. Se rezolvă problem (4). Dacă problema nu are programe, algoritmul s-a terminat și $\tilde{\Omega} \cap X = \emptyset$. Dacă problema nu are soluție optimă finită se continuă cu pasul 6. Dacă problema are soluție optimă finită se continuă cu pasul 2 luînd pentru k valoarea 0.

Pasul 2. Se determină mulțimea $X_k = \{x^k, \dots, x^{\tau_k}\}$ a tuturor punctelor extreme optime.

Pasul 3. Pentru fiecare $s \in \{1, \dots, \tau_k\}$ se testează dacă $x^k \in X$. Dacă da, atunci evident $x^k \in \tilde{\Omega} \cap X$; în caz contrar $x^k \notin \tilde{\Omega} \cap X$.

Pasul 4. Pentru fiecare $s \in \{1, \dots, \tau_k\}$ se notează cu

$$J_s = \{j \in J / \delta_j > 0, e_{i(j),j} > 0, r_{i(j)} > 0\}.$$

Dacă pentru toți $s \in \{1, \dots, \tau_k\}$ avem $J_s = \emptyset$, algoritmul s-a terminat. În caz contrar pentru fiecare $s \in \{1, \dots, \tau_k\}$ pentru care $J_s \neq \emptyset$ se determină numărul

$$T'_s = \max \left\{ \frac{Pe_{i(j),j} - p_j r_{i(j)}}{Qe_{i(j),j} - q_j r_{i(j)}} / j \in J_s \right\},$$

și apoi

$$T_s^- = \max \{T'_s / s \in \{1, \dots, \tau_k\}, J_s \neq \emptyset\}.$$

Pasul 5. În tabelul corespunzător soluției x^k se introduce restricția :

$$\sum_{j=1}^n (p_j^{(\bar{i})} - T_s^- q_j^{(\bar{i})}) y_j \geq P^{(\bar{i})} - T_s^- Q^{(\bar{i})},$$

unde $p_j^{(k)}, q_j^{(k)}, j = 1, \dots, n; P^{(k)}, Q^{(k)}$ sînt p_j, q_j, P, Q corespunzători soluției x^k . Numărul k se înlocuiește cu $k + 1$ și se trece la pasul 2.

Pasul 6. Se rezolvă problema:

$$\max\{f(x)/Ax \leq b, |x_j| \leq M, j = 1, \dots, n\}$$

unde M este un număr suficient de mare. Se continuă cu pasul 2 luînd $k = 0$.

Algoritmul prezentat furnizează toate punctele mulțimii $\bar{\Omega} \cap X = \{x^1, \dots, x^t\}$ ordonate în raport cu valorile descrescătoare ale funcției f , adică avem $f(x^{k+1}) \leq f(x^k), k = 1, \dots, t - 1$.

Să alegem în continuare pe X ca fiind egal cu mulțimea de eficiență [6] a următorului program vectorial liniar:

$$F(x) = Cx \rightarrow \max \quad (10)$$

în condițiile

$$Ax \leq b, \quad (11)$$

unde C este o matrice de tipul $l \times n$.

În cele ce urmează folosim următoarea notație: dacă $u, v \in R^n$ atunci

$$u \leq v (u < v) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow u_j \leq v_j (u_j < v_j),$$

$$u \leq v \Leftrightarrow u \leq v \text{ și } u \neq v.$$

DEFINIȚIA 3. Un punct $x^* \in \Omega$ se numește eficient (în raport cu C) dacă nu există nici un alt punct $x \in \Omega$ cu proprietatea că $Cx \geq Cx^*$.

Pentru testarea eficienței unui punct x^k , (pasul 3) obținut cu algoritmul descris mai sus, este avantajos să completăm tabelul (5) astfel:

$$y = \begin{array}{c} -x^T \quad 1 \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline -C & 0 \\ \hline -c^T & \alpha \\ \hline -d^T & \beta \\ \hline \end{array} \right. \end{array} \quad (12)$$

După eliminarea variabilelor independente x_1, \dots, x_n obținem tabelul

$$y_{n+1} = \begin{array}{c} -y_1 \dots -y_n \quad 1 \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline E & r \\ \hline V & v \\ \hline p^T & P \\ \hline q^T & Q \\ \hline \end{array} \right. \end{array} \quad (13)$$

Dacă notăm cu :

$$I = \{i \in \{n + 1, \dots, m\} / r_i = 0\},$$

și cu

$$E_I = (e_{ij}), i \in I, j \in \{1, \dots, n\},$$

avem următorul criteriu de eficiență [7].

TEOREMA 5. *Punctul $x^0 \in \bar{\Omega}$ dat de intersecția hiperplanelor $y_1 = \dots = y_n = 0$ este un punct eficient (în raport cu C) dacă și numai dacă sistemul*

$$Vz \leq 0, E_I z \leq 0, z \geq 0$$

este inconsistent.

Utilizînd acest criteriu de eficiență algoritmul descris permite determinarea tuturor punctelor eficiente extreme ale unei probleme de programare vectorială. Scriînd punctele în ordinea în care le obținem $\{x^1, \dots, x^l\}$, avem că $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$, $k = 1, \dots, l - 1$, prin urmare punctele eficiente extreme sînt ordonate după supercriteriul liniar fracționar f .

Pentru ilustrarea algoritmului considerăm următorul exemplu numeric :

$$F(x) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \rightarrow \max$$

în condițiile

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1.$$

Ne propunem să determinăm toate punctele eficiente extreme, ordonate după supercriteriul :

$$f(x) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 + 1}.$$

Avem $\Omega \subset S$, deci algoritmul se poate aplica.

Atașăm problemei tabelul simplex inițial (14).

	$-x_1$	$-x_2$	1	
$y_1 =$	ⓐ	0	1	(14)
$y_2 =$	0	1	1	
$F =$	-1	-1	0	
$f =$	-1	1	0	
	-1	-1	1	

	$-y_1$	$-x_2$	1	
$x_1 =$	1	0	1	(15)
$y_2 =$	0	1	1	
$F =$	1	-1	1	
$f =$	1	1	1	
	1	-1	2	

Pasul 1. Maximizăm f pe Ω . Variabilele fiind nenegative, eliminarea lor nu este necesară. Deoarece $\delta_1 = -1 < 0$, efectuăm un pas $G - J m.$ cu elementul pivot ales din prima coloană. Obținem tabelul (15).

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 x_1 = \\
 y_1 = \\
 y_2 = \\
 F = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & -y_1 & -x_2 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 \\
 & -1 & -1 & -1 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & -1 & 2
 \end{array} \right. \\
 f = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & -1 & 2
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (16);
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 x_1 = \\
 y_1 = \\
 x_2 = \\
 F = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & -y_1 & -y_2 & 1 \\
 \hline
 & \textcircled{1} & 0 & 1 \\
 & -1 & 1 & 0 \\
 & 1 & -1 & 1 \\
 \hline
 & 2 & -1 & 2 \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 2 & -1 & 3
 \end{array} \right. \\
 f = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 2 & -1 & 3
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (17)$$

Cum $\delta_1, \delta_2 > 0$, punctul $x^0 = (1, 0)$ realizează maximumul funcției f pe Ω .

Pasul 2. Deoarece $r > 0$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ avem $X_0 = \{x^0\}$.

Pasul 3. Deoarece sistemul:

$$\begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$z_1, z_2 \geq 0,$$

este inconsistent, rezultă că x^0 este eficient, deci $x^0 \in \ddot{\Omega} \cap X$.

Pasul 4. Avem $J_1 = \{1, 2\}$ și $T_{\bar{1}} = T'_1 = \max \{0, 0\} = 0$.

Pasul 5. În tabelul (15) introducem restricția $y_1 + x_2 \geq 1$ și obținem tabelul (16).

Determinăm acum soluția optimă a problemei (16) (pasul 2). După un pas $G - J m.$ obținem tabelul (17) și soluția $x^1 = (1, 1)$. Obținem o altă soluție optimă dacă efectuăm un pas $G - J m.$ cu elementul pivot $e_{11} = 1$. Obținem tabelul (18). Celelalte două tabele care se mai pot obține nu dau soluții noi.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 y_1 = \\
 y_2 = \\
 x_2 = \\
 F = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & -x_1 & -y_2 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 \\
 & -1 & -1 & 0 \\
 \hline
 & -2 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 0 & 1 & 0 \\
 & -2 & -1 & 1
 \end{array} \right. \\
 f = \left\{ \begin{array}{c|c|c}
 & 0 & 1 & 0 \\
 & -2 & -1 & 1
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (18)$$

Deoarece sistemul (19) este inconsistent, punctul x^1 este eficient.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2z_1 - z_2 \leq 0 \\ z_2 \leq 0 \\ -z_1 + z_2 \leq 0 \\ z_1, z_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (19); \quad \left\{ \begin{array}{l} -2z_1 - z_2 \leq 0 \\ z_2 \leq 0 \\ -z_1 - z_2 \leq 0 \\ z_1, z_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (20).$$

Sistemul (20) fiind compatibil, punctul $x^2 = (0, 0)$ nu este eficient. Continuînd cu pasul 4, în ultimul tabel vom introduce restricția $-x_1 + 1/2y_2 \geq 1/2$. Se obține un nou punct x^3 care nu este eficient. Deoarece $J_s = \emptyset$ algoritmul s-a terminat. Am obținut astfel că:

$$X = \{x^0, x^1\} \quad \text{și} \quad f(x^0) = 1/2 > 0 = f(x^1).$$

(Intrat în redacție la 1 august 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Duca, D., *Ordonarea soluțiilor extremale într-o problemă de programare fracționară*, Studii și cerc. mat. (va apare).
2. Duca, D., *Asupra unei probleme de programare fracționară*, Studii și cerc. mat., 29, 1977, 487-497.
3. Gupta, R. K., Swarup, K., *A cutting plane algorithm for extreme point linear fractional functional's programming*, Cahiers Centre Études Recherche Oper., 16, 1974, 161-177.
4. Martos, B., *Nonlinear programming theory and methods*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
5. Marușciac, I., *Metoda planelor secante pentru determinarea preoptimului în programarea liniară*, Studii și cerc. mat., 30, 1978.
6. Marușciac, I., *On the hierarchy of the efficient extreme points in multiobjective programming*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., 1, 1977, 53-60.
7. Marușciac, I., *An efficient realization of an algorithm to compute the first efficient point of a linear multiobjective program*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math., 1976, 66-72.

ON THE ORDERING OF THE EFFICIENT EXTREMAL POINTS IN A VECTORIAL PROGRAMMING PROBLEM

(Summary)

In this paper we consider the optimization problem

$$\max f(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

subject to: $x \in X$ and x is an extremal point of the set $\Omega = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$, where $c, d, x \in R^n$; $b \in R^m$; $A \in R^{m \times n}$; $\alpha, \beta \in R$; $X \subseteq R^n$. We present an algorithm which enables one to determine all points of the set $\bar{\Omega} \cap X$, ordered with respect to the values of the function f . If X is the set of efficiency points of a linear vectorial program, we obtain all extremal efficient points of the vectorial program, ordered with respect to the supercriterion f .

BEMERKUNG ZU EINEM SATZ VON H. WIELANDT

VIRÁG IMRE

Es seien G eine endliche Gruppe, $H \neq G$ eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von H , so dass gilt

$$H \cap x^{-1}Hx \subseteq N \text{ für alle } x \in G - H. \quad (1)$$

Wir setzen $H^* = H - N$ und

$$K = G - \bigcup_{x \in G} x^{-1}H^*x. \quad (2)$$

Nach einem Satz von H. Wielandt (vgl. [1]) ist K ein Normalteiler von G und es gilt $K \cap H = N$ sowie $G = KH$.

In dieser Note werden wir, mittels elementarer Methoden, den oben erwähnten Satz von Wielandt in einem speziellen Fall beweisen.

SATZ. Hat die Untergruppe H ein Element h der Ordnung 2 mit $C_G(h) \cap \bigcap N = \{1\}$ ($C_G(h)$ ist der Zentralisator von h in G), so gelten die folgenden Aussagen:

- (i) K ist ein abelscher Normalteiler von G .
- (ii) $K \cap H = N$.
- (iii) $G = KH$.
- (iv) N ist ein abelscher Normalteiler von G .
- (v) $G = KC_G(h)$, $H = NC_G(h)$ und $H \cap x^{-1}Hx = N$ für alle $x \in G - H$.
- (vi) G/N ist eine Frobeniusgruppe zu H/N .

Beweis. Beachtet man (1) und (2), so kann man leicht nachprüfen, dass wegen $C(h) \cap N = \{1\}$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- 1° $H \neq N$.
- 2° $x^{-1}H^*x \cap y^{-1}H^*y = \emptyset$ für $yx^{-1} \in G - H$.
- 3° $C_G(x) = C_H(x)$ für alle $x \in H^*$.
- 4° $x^{-1}Kx = K$ für alle $x \in G$.
- 5° $N \subseteq K$.

6° $|G| = \frac{|K| |H|}{|N|}$, wobei $|X|$ die Anzahl der Elemente von X ist.

Es sei $I = \{x^{-1}h^{-1}xh \mid x \in G\}$. Wir beweisen, dass $I \cap z^{-1}H^*z = \emptyset$ für alle $z \in G - H$ ist. Gibt nämlich $I \cap z^{-1}H^*z \neq \emptyset$ für ein $z \in G - H$ und ist $y = x^{-1}h^{-1}xh$ ein Element des Durchschnitts $I \cap z^{-1}H^*z$, dann folgt aus $y \in I$ dass $h^{-1}yh = y^{-1}$ gilt, denn h ist ein Element der Ordnung 2 und hat somit die Eigenschaft $h^{-1} = h$. Aus $y \in z^{-1}H^*z$ folgt andererseits $y^{-1} \in z^{-1}H^*z$. Demnach liegt $h^{-1}yh$ in $z^{-1}H^*z$. Daraus folgt $y \in hz^{-1}H^*zh^{-1} \cap z^{-1}Hz$. Beachtet man nun 2°, so resultiert $zh^{-1}z^{-1} = zhz^{-1} \in H$. Wegen $h \in H^*$ ist dann $h \in H^* \cap z^{-1}H^*z$. Andererseits ist aber $H^* \cap z^{-1}H^*z = \emptyset$; somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt. Also folgt $I \cap z^{-1}H^*z = \emptyset$ für alle $z \in G - H$.

Nach (2) ist daher

$$I \cap K = I - (I \cap H^*). \quad (3)$$

Es seien nun $y_1 = x_1^{-1}h^{-1}x_1h$ und $y_2 = x_2^{-1}h^{-1}x_2h$ Elemente von I . Gilt $y_1 = y_2$, also $y_1y_2^{-1} = x_1^{-1}h^{-1}x_1x_2^{-1}hx_2 = 1$, dann ist $h^{-1}x_1x_2^{-1}h = x_1x_2^{-1}$ und folglich $x_1x_2^{-1} \in C_G(h)$, d.h. $C_G(h)x_1 = C_G(h)x_2$. Umgekehrt, ist $C_G(h)x_1 = C_G(h)x_2$, dann ist leicht zu ersehen, dass $y_1 = y_2$ gilt. Folglich ist

$$|I| = |G : C_G(h)|, \quad (4)$$

wobei $|G : C_G(h)|$ der Index von $C_G(h)$ in G ist.

Auf Grund von (1) und von 1°, ist leicht zu ersehen, dass $y = x^{-1}h^{-1}xh \in I \cap H$ genau dann gilt, wenn x aus H ist. Daraus folgt wegen 3°, dass $|I \cap H| = |H : C_H(h)| = |H : C_G(h)|$ ist. Gemäss unserer Voraussetzung ist N ein Normalteiler von H mit $C_G(h) \cap N = \{1\}$. Dann ist die Transformation mit h ein fixpunktfreier Automorphismus der Ordnung 2 von N . Es ist also (vgl. [2], p. 506), N abelsch und $I \cap N = N$. Daher ist

$$|I \cap H^*| = |(I \cap H) - (I \cap N)| = |H : C_G(h)| - |N|. \quad (5)$$

Aus den Relationen (3), (4), (5) und 6° folgt

$$\begin{aligned} |K| - |N| &\geq |I \cap K| - |N| = |I| - |I \cap H^*| - |N| = \\ &= |G : C_G(h)| - |H : C_G(h)| = \frac{|K||H|}{|N||C_G(h)|} - \frac{|H|}{|C_G(h)|} = (|K| - |N|) \frac{|H|}{|N||C_G(h)|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Da wegen 5° $|N| \leq |K|$ gilt, folgt aus (6), dass $|K| - |N| = (|K| - |N|) \frac{|H|}{|N||C_G(h)|}$ ist. Dann haben wir entweder $|K| = |N|$ oder $\frac{|H|}{|N||C_G(h)|} = 1$.

Wenn $|K| = |N|$ gilt, so ist nach 5° $K = N$ und aus (2) folgt dann $G = \bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx$. Somit gilt $G = H$ im Widerspruch zu der Voraussetzung $G \neq H$.

Also haben wir $\frac{|H|}{|N||C_G(h)|} = 1$. Hieraus und aus $C_G(h) \cap N = \{1\}$ folgt $H = NC_G(h)$. Nach (5) ist folglich $I \cap H^* = \emptyset$. Wegen (3) ist dann $K = I$.

Seien $y_1 = x_1^{-1}h^{-1}x_1h$ und $y_2 = x_2^{-1}h^{-1}x_2h$ Elemente von $K = I$. Wegen 4° haben wir $y_1y_2^{-1} = x_2^{-1}(x_1x_2^{-1})^{-1}h^{-1}(x_1x_2^{-1})hx_2 \in K$. Daraus folgt, dass K ein Normalteiler von G ist. Auf Grund der Eigenschaften 5° und 6° folgt $G = KC_G(h)$ und $K \cap C_G(h) = \{1\}$. Die Transformation mit h ist also ein fixpunktfreier Automorphismus der Ordnung 2 von K und folglich ist K abelsch. Demnach gelten die Aussagen (i) – (v). Es ist leicht zu ersehen, dass die Eigenschaft (vi) sofort aus (i) – (v) folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wenn $N = \{1\}$ ist, so erhalten wir als Folgerung unseres Satzes das folgende bekannte Ergebnis.

FOLGERUNG. Ist G eine Frobeniusgruppe zu H von gerader Ordnung, dann ist K ein abelscher Normalteiler von G .

(Eingegangen am 5 August 1978)

LITERATUR

1. Wielandt, H., *Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen*, Math. Nachr., **18**, 1958, 274–280.
2. Huppert, B., *Endliche Gruppen*, I, Berlin–Heidelberg–New–York, Springer, 1967.

DESPRE O TEOREMĂ A LUI H. WIELANDT

(R e z u m a t)

Fie H un subgrup al unui grup finit G , N un subgrup normal al lui H astfel ca $H \cap x^{-1}Hx \subseteq N$ pentru fiecare $x \in G - H$. Fie $K = G - \bigcup_{x \in G} x^{-1}H^*x$ ($H^* = H - N$)

În această notă se dă o demonstrație elementară a următoarei teoreme:

Dacă H are un element h de ordinul 2, astfel că $C_G(h) \cap N = \{1\}$ (unde $C_G(h)$ este centralizatorul lui h în G) atunci:

- a) K este un subgrup normal abelian al lui G .
- b) $K \cap H = N$.
- c) $G = K \cdot H$.
- d) N este un subgrup normal abelian al lui G .
- e) $G = K \cdot C_G(h)$, $H = N \cdot C_G(h)$ și $H \cap x^{-1}Hx = N$ pentru fiecare $x \in G - H$.
- f) Grupul factor G/N este un grup Frobenius.

SUR LE THÉORÈME DE CONVEXITÉ DE LIAPOUNOFF

IOAN MUNTEAN

Soient T un intervalle compact de l'axe réel et $L^1(T)$ l'espace de Banach des classes \tilde{g} de fonctions réelles mesurables équivalentes g , qui sont intégrables au sens de Lebesgue sur T , muni de la norme

$$\|\tilde{g}\| = \int_T |g(t)| dt, \quad g \in \tilde{g} \in L^1(T).$$

Cette note contient une démonstration complète, basée sur les résultats d'analyse fonctionnelle classique, du théorème suivant de convexité de A. A. Liapounoff [3]:

THÉORÈME. Soit \mathcal{E} l'ensemble de toutes les parties E de T , qui sont mesurables au sens de Lebesgue. Si $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n \in L^1(T)$, alors l'ensemble de vecteurs

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\int_E f_1(t) dt, \dots, \int_E f_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n : E \in \mathcal{E} \right\}, \quad \tilde{f}_i \in \tilde{f}_i,$$

est convexe et compact dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

Dans un cas plus général, où $\mathcal{L} = \{(\mu_1(E), \dots, \mu_n(E)) \in \mathbb{R}^n : E \in \mathcal{E}'\}$ et μ_1, \dots, μ_n sont des mesures réelles finies et non atomiques sur une σ -algèbre \mathcal{E}' , des démonstrations incomplètes de ce théorème ont été données par J. Lindenstrauss [4] et W. Rudin [5], Theorem 5.2. D'autres extensions et variantes du théorème de Liapounoff sont présentées dans l'article de synthèse de V. I. Arkine et V. L. Lévine [1].

Les applications de ce théorème, surtout à l'étude du principe „bang-bang” dans la théorie du contrôle optimal (cf. L. D. Berkovitz [2]), réclament seulement le cas particulier considéré dans cette note, c'est-à-dire le cas où T est un intervalle compact de l'axe réel muni de la mesure de Lebesgue. La première partie de notre démonstration suit, en essence, la construction de J. Lindenstrauss. Pour justifier l'un des moments clef du raisonnement de W. Rudin, la deuxième partie utilise les théorèmes classiques de prolongement et de représentation des fonctionnelles linéaires et continues sur l'espace $L^1(T)$.

Démonstration du théorème. 1. On peut admettre que la longueur de l'intervalle T est positive. On désigne par $M(T)$ l'espace de Banach des classes \tilde{g} des fonctions réelles mesurables équivalentes g , qui sont essentiellement bornées sur T , muni de la norme

$$\|\tilde{g}\| = \text{vrai max } \{|g(t)| : t \in T\}, \quad g \in \tilde{g} \in M(T).$$

L'espace $M(T)$ coïncide avec le dual $(L^1(T))^*$ du $L^1(T)$ à l'exception d'une

bijection linéaire et isométrique, définie par

$$\tilde{g} \mapsto \int_T h(t) g(t) dt, \quad g \in \tilde{g} \in M(T), \quad h \in \tilde{h} \in L^1(T).$$

Considérons l'ensemble convexe

$$G = \{ \tilde{g} \in M(T) : \text{il existe } g \in \tilde{g} \text{ avec } 0 \leq g(t) \leq 1 \text{ p.p.t. } t \in T \}.$$

Nous prouvons que G est fermé lorsque $M(T) = (L^1(T))^*$ est équipé avec la topologie faible $\sigma = \sigma((L^1(T))^*, L^1(T))$. En effet, supposons qu'il existe une classe \tilde{g}_0 appartenant à la σ -adhérence de G , telle que $\tilde{g}_0 \neq G$. Alors, pour tout $g_0 \in \tilde{g}_0$, on a $\text{mes } E_1 > 0$ ou $\text{mes } E_2 > 0$, où $E_1 = \{t \in T : g_0(t) < 0\}$ et $E_2 = \{t \in T : g_0(t) > 1\}$. Si l'on pose

$$\varepsilon = \int_{E_1} [-g_0(t)] dt + \int_{E_2} [g_0(t) - 1] dt \text{ et } h_0 = \chi_{E_1} - \chi_{E_2},$$

où χ_{E_i} est la fonction caractéristique de E_i , alors $\varepsilon > 0$, $\tilde{h}_0 \in L^1(T)$ et l'ensemble

$$V = \left\{ g \in M(T) : \left| \int_T [g_0(t) - g(t)] h_0(t) dt \right| < \varepsilon \right\}$$

devient un σ -voisinage de \tilde{g}_0 . Par suite, il existe une classe $\tilde{g} \in G \cap V$, d'où l'on arrive à la contradiction

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \int_{E_1} [-g_0(t) + g(t)] dt + \int_{E_2} [g_0(t) - g(t)] dt = \\ &= \left| \int_T [g_0(t) - g(t)] h_0(t) dt \right| < \varepsilon, \quad g \in \tilde{g}. \end{aligned}$$

De plus, G est σ -compact car, d'après le théorème de Bourbaki-Alaoglu, la boule unité $B = \{g \in M(T) : \| \tilde{g} \| \leq 1\}$ est σ -compacte et $G \subset B$.

Considérons maintenant l'application linéaire $A : M(T) \rightarrow R^n$, définie par

$$A(\tilde{g}) = \int_T f(t) g(t) dt, \quad g \in \tilde{g} \in M(T),$$

où $f = (f_1, \dots, f_n)$. Il est facile à voir que l'application A est σ -continue car, si ε est un nombre positif, alors l'ensemble

$$U = \left\{ \tilde{g} \in M(T) : \left| \int_T f_i(t) g(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

est un σ -voisinage de l'origine de $M(T)$ et l'on a $\|A(\tilde{g})\| < \varepsilon$ pour tout $g \in U$,

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne en R^n . Il en résulte que l'image $A[G]$ est convexe et compacte dans R^n .

Comme $\mathfrak{L} \subset A[G]$, le théorème sera démontré dès que l'on ait $A[G] \subset \mathfrak{L}$. Soit $p \in A[G]$. L'ensemble non vide et convexe

$$G_p = \{\tilde{g} \in G : A(\tilde{g}) = p\}$$

est σ -compact car A est une application σ -continue. Le théorème bien connu de Krein-Milman met en évidence un point extrémal \tilde{g}_0 pour G_p . Soit $g_0 \in \tilde{g}_0$ tel que $0 \leq g_0(t) \leq 1$ pour tout $t \in T$. On va montrer qu'il existe un ensemble $E \in \mathfrak{S}$ tel que

$$g_0(t) = \chi_E(t) \quad \text{p. p. t. } t \in T, \quad (1)$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème, car

$$p = A(\tilde{g}_0) = A(\tilde{\chi}_E) = \int_T f(t) \chi_E(t) dt = \int_E f(t) dt \in \mathfrak{L}.$$

2. Pour prouver l'affirmation (1) supposons le contraire. Alors la mesure de l'ensemble $E_0 = \{t \in T : 0 < g_0(t) < 1\} \in \mathfrak{S}$ est positive et $E_0 = \bigcup \{E_n : n \in N\}$, où $E_n = \left\{t \in T : \frac{1}{n} \leq g_0(t) \leq 1 - \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{S}$. D'ici on déduit aisément l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ et d'un ensemble $E \in \mathfrak{S}$, tels que $\text{mes } E > 0$ et

$$\varepsilon \leq g_0(t) \leq 1 - \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in E. \quad (2)$$

Puisque la mesure de l'ensemble E est positive, l'ensemble $Y = \{\tilde{y} = \tilde{\chi}_E \cdot \tilde{x} : \tilde{x} \in L^1(T)\}$ est un sous-espace à dimension infinie de l'espace $L^1(T)$. L'enveloppe linéaire Z des classes $\tilde{\chi}_E \cdot \tilde{f}_1, \dots, \tilde{\chi}_E \cdot \tilde{f}_n$ est un sous-espace propre fermé de Y . Par conséquent, il existe une fonctionnelle linéaire et continue y^* sur Y , avec $y^* \neq 0$ et $y^*[Z] = \{0\}$, donc il existe un prolongement linéaire et continu x^* de y^* sur tout l'espace $L^1(T)$.

En vertu du théorème de représentation des fonctionnelles linéaires et continues sur $L^1(T)$, on peut choisir une (seule) classe $\tilde{u} \in M(T)$ telle que

$$x^*(\tilde{x}) = \int_T u(t) x(t) dt, \quad x \in \tilde{x} \in L^1(T), u \in \tilde{u}.$$

En particulier, pour tout $\tilde{y} = \tilde{\chi}_E \cdot \tilde{x} \in Y$ on a

$$y^*(\tilde{y}) = x^*(\tilde{y}) = \int_T u(t) \chi_E(t) x(t) dt, \quad (3)$$

d'où on déduit immédiatement que $\tilde{v} = \tilde{\chi}_E \cdot \tilde{u} \neq \tilde{0}$.

D'autre part, si l'on pose $w = \varepsilon \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$, on a $\tilde{w} \in M(T)$,

$$-\varepsilon \leq w(t) \leq \varepsilon \quad \text{p.p.t. } t \in T, w(t) = 0 \quad \text{p.p.t. } t \in T \setminus E \quad (4)$$

et, en utilisant (3) avec $\tilde{y} = \tilde{\chi}_E \cdot \tilde{f}_i \in Z$, on a de même

$$\int_T w(t) f_i(t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ou $A(\tilde{w}) = 0$, donc

$$A(\tilde{g}_0 \pm \tilde{w}) = A(\tilde{g}_0) = p. \quad (5)$$

Les relations (2) et (4) entraînent $\tilde{g}_0 \pm \tilde{w} \in G$ d'où, en vertu de (5), on obtient $\tilde{g}_0 \pm \tilde{w} \in G_p$. Comme $\tilde{w} \neq 0$, on arrive à une contradiction avec l'extrémalité du point \tilde{g}_0 pour G_p .

(Manuscrit reçu le 3 septembre 1978)

BIBLIOGRAPHIE

1. Arkine, V. I. et Lévine, V. L., *Convexité des valeurs des intégrales vectorielles, théorèmes de sélections mesurables et problèmes variationnels*, Uspehi Mat. Nauk, 27, no. 3, 1972, 21–77.
2. Berkovitz, L. D., *Optimal Control Theory*, Applied Math. Sci., vol. 12, Springer Verlag, New York, 1974.
3. Liapounoff, A. A., *Sur les fonctions-vecteurs complètement additives*, I, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 4, 1940, 465–478; *ibid.*, II, 10, 1946, 277–279.
4. Lindenstrauss, J., *A short proof of Liapounoff's convexity theorem*, J. Math. Mech., 15, 1966, 971–972.
5. Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

ASUPRA TEOREMEI DE CONVEXITATE A LUI LIAPUNOV

(R e z u m a t)

Se prezintă o demonstrație completă, bazată pe metodele analizei funcționale, a teoremei de convexitate a lui A. A. Liapunov.

MACROPROCESOR ÎN SISTEMUL SIRIS—2

M. FRENȚIU și C. TERCHILĂ

În cele ce urmează dorim să semnalăm implementarea unui macroprocesor util programatorilor în limbajul ASSIRIS cît și în anumite situații speciale. Macroprocesorul operează asupra unui text sursă. Acest text conține la început toate macrodefinițiile. Ultimei macrodefiniții îi urmează programul sursă cu macroapeluri.

Forma generală a unei macrodefiniții este următoarea :

MACRO identificator

Corpul macrodefiniției, ce conține instrucțiunile care compun macrodefiniția. El poate conține parametri formali, identificați prin numărul de ordine precedat de semnul & (astfel, &3 va fi al treilea parametru formal)

ENDMACRO

Identificatorul care urmează cuvîntului MACRO este numele macrodefiniției.

În programul sursă cu macroapeluri, un macroapel are forma următoare :

identificator &pa₁, &pa₂, ..., &pa_n, &&

unde identificator este numele macro-ului chemat iar $pa_i, i = \overline{1, n}$ sînt parametri actuali ce trebuiesc înlocuiți prin cei n parametri formali din corpul macrodefiniției. Macroprocesorul va face această înlocuire și va insera în locul liniei de macroapel întregul corp al macrodefiniției cu numele identificatorului respectiv.

De exemplu, dacă avem macrodefiniția

MACRO MUTA

LD4I,0	&1
LD4I,1	&2
MVSR,0	&3

ENDMACRO

atunci prelucrarea, de către procesor, a macroapelului

MUTA &SIR, &132, &IMPR, &&

va avea ca efect înlocuirea acestui macroapel prin

LD4I,0	SIR
LD4I,1	132
MVSR,0	IMPR

Menționăm că macroprocesorul este independent de orice limbaj de programare și se bazează doar pe inserarea unui text — corpul macrodefiniției preluat, în locul macroapelului. Pentru un program sursă cu macrodefiniții, el

acționează înainte de compilare „predînd” compilatorului un nou program sursă complet „curățat” de macrodefiniții și macroapeluri.

Folosirea acestei facilități în programare are multe avantaje. Grupuri de instrucțiuni care se repetă frecvent într-un program vor putea forma macrodefiniții. Numele macro poate fi orice identificator și va putea deci sugera operația efectuată de macro, dînd astfel claritate programului. În plus, un macro odată definit va putea fi apelat ori de cîte ori, ușurînd munca de programare.

De asemenea, macrofacilitățile permit extinderea unui limbaj de bază prin definirea de noi instrucțiuni cu ajutorul celor existente, sau chiar definirea unui nou limbaj. Este deci posibil ca programatorul să-și construiască un nou limbaj, adecvat unei clase speciale de probleme, fără să fie necesară conceperea unui compilator pentru acest limbaj.

Macroprocesorul a fost implementat în limbajul ASSIRIS și cere 16 K octeți. El se găsește la Centrul de calcul al Universității „Babeș-Bolyai”, sub numele MACRO și poate fi obținut de cei interesați.

(Intrat în redacție la 3 septembrie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Brown, P. J., *The MLI Macroprocessor*, CACM, 10, 1967, 618—623.
2. Wegner, P., *Programming Languages, Information Structures and Machines Organisation*, McGraw Hill, New—York, 1968.
3. Waite, W. M., *A Language Independent Macroprocessor*, CACM, 10, 7, 1967, 433—440.
4. Terchilă, C., *Limbaje cu macrofacilități*, Colocviul Național Studențesc, Iași, martie, 1978.
5. Frențiu, M., Terchilă, C., *Proiectarea și implementarea unui macroprocesor*, Al IV-lea Simpozion „Informatică și conducere”, Cluj-Napoca, 10—13 mai 1978.

MACROPROCESSOR IN THE SIRIS-2 SYSTEM

(Summary)

The paper presents an implementation of a macroprocessor for the SIRIS-2 system.

SOME METRICAL FIXED POINT THEOREMS

IOAN A. RUS

1. Introduction. There are many metrical fixed point theorems (see B. E. Rhoades [9], I. A. Rus [13], ...). In this paper, we shall prove a general metrical fixed point theorem which is a generalization of a lot of well-known results.

Let X be a nonempty set and $f: X \rightarrow X$ a mapping. We put

$$\begin{aligned} F_f &= \{x \mid f(x) = x, x \in X\}, \\ O_f(x; n) &= \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}, x \in X, n \in \mathbb{N}, \\ O_f(x; \infty) &= \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}, \end{aligned}$$

and

$$\delta(A) = \sup_{a, b \in A} d(a, b), \text{ for } A \subset (X, d)$$

Let $\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a mapping with the following properties

- (a) $(r \leq s, r, s \in \mathbb{R}_+^5) \Rightarrow (\varphi(r) \leq \varphi(s))$
- (b) $(r \in \mathbb{R}_+, r > 0) \Rightarrow (\varphi(r, r, r, r, r) < r)$
- (c) $r - \varphi(r, r, r, r, r) \rightarrow +\infty$, when $r \rightarrow +\infty$
- (d) the mapping φ is continuous

Example 1. Let $\alpha_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 5, \sum_{i=1}^5 \alpha_i < 1$. Define

$$\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ by } \varphi(r) = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_i$$

Example 2. For $\alpha \in]0, 1[$, we define $\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\text{by } \varphi(r) = \alpha \max \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$$

Example 3. For $\alpha \in]0, 1[$, we define $\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\text{by } \varphi(r) = \alpha \max \left\{ r_1, r_2, r_3, \frac{1}{2} (r_4 + r_5) \right\}$$

Example 4. Let $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, be a function with the following properties

- (a') $(r \leq s, r, s \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow (\psi(r) \leq \psi(s))$
- (b') $(r \in \mathbb{R}_+, r > 0) \Rightarrow (\psi(r) < r)$
- (c') $r - \psi(r) \rightarrow +\infty$, for $r \rightarrow +\infty$
- (d') the mapping ψ is continuous

We define $\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$, by $\varphi(r) = \psi(r_1)$.

It is easy to prove that all these functions satisfy at the conditions (a)–(d).
Let $r \in \mathbf{R}^+$. For simplicity we put

$$\begin{aligned}\varphi^2(r, r, r, r, r) &= \varphi(\varphi(r, r, r, r, r), \dots, \varphi(r, r, r, r, r)), \dots, \\ \varphi^n(r, r, r, r, r) &= \varphi(\varphi^{n-1}(r, r, r, r, r), \dots, \varphi^{n-1}(r, r, r, r, r)), \dots\end{aligned}$$

We have

LEMMA 1. *If φ satisfies the conditions (a)–(d), then $\varphi^n(r, r, r, r, r) \rightarrow 0$, when $n \rightarrow \infty$, for each $r > 0$*

Proof. Let $a_n = \varphi^n(r, r, r, r, r)$. From (b) we have $a_{n+1} \leq a_n$.
On the other hand

$$a_{n+1} = \varphi(a_n, a_n, a_n, a_n, a_n)$$

If we suppose that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r^* > 0$$

then from (d) we have

$$r^* = \varphi(r^*, r^*, r^*, r^*, r^*) < r^*$$

This means $r^* = 0$. The proof is complete.

2. φ -contractions. DEFINITION 1. Let (X, d) be a complete metric space. A mapping $f: X \rightarrow X$ is said to be a φ -contraction iff

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x)))$$

for all $x, y \in X$ and φ satisfies the conditions (a)–(d).

For $x_0 \in X$, we denote

$$r_{x_0} = \sup\{r \mid r - \varphi(r, r, r, r, r) \leq d(x_0, f(x_0)), r \in \mathbf{R}^+\}$$

LEMMA 2. *If f is a φ -contraction and $x_0 \in X$, then*

(i) *for all $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$d(f^i(x_0), f^j(x_0)) \leq \varphi(\delta(0_f(x_0; n)), \dots, \delta(0_f(x_0; n)))$$

(ii) *for each $n \in \mathbf{N}$, there is $p \leq n$, such that*

$$\delta(0_f(x_0; n)) = d(x_0, f^p(x_0))$$

(iii) $\delta(0_f(x_0; n)) \leq r_{x_0}$, for each $n \in \mathbf{N}$

Proof. (i) We have

$$\begin{aligned}d(f^i(x_0), f^j(x_0)) &\leq \varphi(d(f^{i-1}(x_0), f^{j-1}(x_0)), d(f^{i-1}(x_0), f^i(x_0)), \\ &\quad d(f^{j-1}(x_0), f^j(x_0)), d(f^{i-1}(x_0), f^j(x_0)), \\ &\quad d(f^{j-1}(x_0), f^i(x_0))) \leq \\ &\leq \varphi(\delta(0_f(x_0; n)), \dots, \delta(0_f(x_0; n)))\end{aligned}$$

(ii) $d(f^i(x_0), f^j(x_0)) \leq \varphi(\delta(0_f(x_0; n)), \dots, \delta(0_f(x_0; n))) < \delta(0_f(x_0; n))$

(iii) From (ii) we have

$$\begin{aligned} \delta(O_f(x_0; n)) &= d(x_0, f^n(x_0)) \leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^n(x_0)) \leq \\ &\leq d(x_0, f(x_0)) + \varphi(\delta(O(x_0; n)), \dots, \delta(O_f(x_0; n))) \end{aligned}$$

or

$$\delta(O_f(x_0; n)) - \varphi(\delta(O_f(x_0; n)), \dots, \delta(O_f(x_0; n))) \leq \delta(x_0, f(x_0)).$$

3. F_f for φ -contractions. The main result of this paper is the following fixed point theorem.

THEOREM 1. Let (X, d) be a complete metric space and $f: X \rightarrow X$ a φ -contraction. Then

- (i) $F_f = \{x^*\}$
- (ii) $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)$, for each $x_0 \in X$
- (iii) $d(x_n, x^*) \leq \varphi^n(r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0})$, where

$$r_{x_0} = \sup \{r \mid r - \varphi(r, r, r, r, r) \leq d(x_0, f(x_0)), r \in \mathbf{R}_+\}$$

Proof. (i) + (ii). Let $x_0 \in X$ and $i < j$. From lemma 2 we have

$$\begin{aligned} d(f^i(x_0), f^j(x_0)) &\leq \varphi(\delta(O(f^{i-1}(x_0); j - i + 1)), \dots, \\ &\delta(O(f^{i-1}(x_0); j - i + 1))) \leq \dots \leq \\ &\leq \varphi^i(\delta(O(x_0; j)), \dots, \delta(O(x_0; j))) \leq \\ &\leq \varphi^i(r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0}, r_{x_0}) \end{aligned}$$

and from lemma 1 the sequence $(f^i(x_0))_{i \in \mathbf{N}}$ is Cauchy, hence convergent. Let x^* be the limit. We prove now that $x^* \in F_f$. We have

$$\begin{aligned} d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, f^i(x_0)) + d(f^i(x_0), f(x^*)) \leq d(x^*, f^i(x_0)) + \\ &+ \varphi(d(x^*, f^{i-1}(x_0)), d(x^*, f(x^*)), d(f^i(x_0)), f^{i-1}(x_0)), \\ &d(x^*, f^i(x_0)), d(f^{i-1}(x_0), f(x^*))) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} d(x^*, f(x^*)) &\leq \varphi(0, d(x^*, f(x^*)), 0, 0, d(x^*, f(x^*))) \leq \\ &\leq \delta(d(x^*, f(x^*)), d(x^*, f(x^*)), \dots, d(x^*, f(x^*))) \end{aligned}$$

If $d(x^*, f(x^*)) > 0$, then

$$d(x^*, f(x^*)) \leq \varphi(d(x^*, f(x^*)), \dots, d(x^*, f(x^*))) < d(x^*, f(x^*))$$

This means, $d(x^*, f(x^*)) = 0$ i.e. $x^* \in F_f$.

Let now $x^*, y^* \in F_f$. From the φ -contractivity of f we have

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &\leq \varphi(d(x^*, y^*), 0, 0, d(x^*, y^*), d(x^*, y^*)) \leq \\ &\leq \varphi(d(x^*, y^*), \dots, d(x^*, y^*)) \end{aligned}$$

and

$$d(x^*, y^*) = 0, \text{ i.e. } F_f = \{x^*\}$$

(iii) This follows from $(i < j)$

$$d(f^i(x_0), f^j(x_0)) \leq \varphi^i(r_{x_0}, \dots, r_{x_0})$$

Remark 1. For φ as in example 1, we have from theorem 1 a theorem given by G. E. Hardy, T. D. Rogers [4] (see also Lj. Ćirić [2], I. A. Rus [10]).

Remark 2. For φ as in example 2 and 3, we have from theorem 1 some theorems given by Lj. Ćirić [2].

Remark 3. For φ as in example 4, we have from theorem 1, a theorem of F. Browder [1] (see also M. Furi [3], I. A. Rus [12]).

4. **The sets with two metrics.** Let X be a nonempty set, d and δ two metrics on X and $f: X \rightarrow X$ a mapping. For such a kind of mapping many fixed point theorems are given by M. G. Maia [7], K. Iseki [5], I. A. Rus [11] (see also [13]). In what follows we give the following general result.

THEOREM 2. *If*

(i) *there exists* $c > 0$, *such that*

$$d(f(x), f(y)) \leq c\delta(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

(ii) (X, d) *is a complete metric space*

(iii) $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ *is continuous*

(iv) *the mapping* $f: (X, \delta) \rightarrow (X, \delta)$, *is a* φ -*contraction*

then $F_f = \{x^*\}$ *and* $f^n(x_0) \xrightarrow{(x,d)} x^*$ *for each* $x_0 \in X$.

Proof. From the proof of theorem 1 and the condition (iv), $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in (X, δ) and by the condition (i) is a Cauchy sequence in (X, d) . Let x^* be the limit of $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) . From the condition (iii), we have $x^* \in F_f$. The unicity of the fixed point follows from the condition (iv).

Remark 4. This theorem is a generalization of some results given by Maia [7], Rus [11]. For example, when φ is as in example 4 we have

THEOREM 3. *If*

(i) *there exist* $C > 0$, *such that*

$$d(f(x), f(y)) \leq c\delta(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

(ii) (X, d) *is a complete metric space*

(iii) $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ *is continuous*

(iv) *there exists a mapping* $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, *as in example 4, such that*

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \psi(\delta(x, y)), \quad \forall x, y \in X$$

then, $F_f = \{x^*\}$, *and* $f(x_0) \xrightarrow{(x,d)} x^*$ *for each* $x_0 \in X$.

REFERENCES

1. F. Browder, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, Indag. Math., **30**, 1968, 27–35.
2. L. j. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proceed. A.M.S., **45**, 1974, 267–273.
3. M. Furi, *Un teorema di punto fisso per trasformazioni di uno spazio metrico completo in sé*, Accad. Naz. Lincei, XLV, 1968, 207–211.
4. G. E. Hardy, T. D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull., **16**, 1973, 201–206.
5. K. Iseki, *A common fixed point theorem*, Math. Sem. Notes, S, Kōbe Univ., 1974.
6. R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., **60**, 1968, 71–76.
7. M. G. Maia, *Un'osservazione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **40**, 1968, 139–143.
8. S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Bull. Un. Mat. Ital., **5**, 1972, 26–42.
9. B. E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Mat. Soc., **226**, 1977, 257–290.
10. I. A. Rus, *On common fixed points*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **18**, 1, 1973, 31–33.
11. I. A. Rus, *On a fixed point theorem of Maia*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **23**, 1, 1977, 40–42.
12. I. A. Rus, *Results and problems in the metrical fixed point theory*, The first Romanian-American seminar on operator theory and applications, Iaşi, 20–24 III 1978.
13. I. A. Rus, *Principii și aplicații ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

TEOREME METRICE DE PUNCT FIX

(R e z u m a t)

În lucrare se stabilesc două teoreme generale de punct fix, teoreme ce cuprind ca și cazuri particulare teoremele binecunoscute ale lui: Banach, Browder, Ćirić, Iseki, Maia.

IN MEMORIAM

Profesorul TIBERIU MIHĂILESCU

În ziua de 25 martie 1979 s-a stins din viață, la București, profesorul Tiberiu Mihăilescu, fost titular al Catedrei de geometrie a Facultății de matematică a Universității noastre între anii 1948—1962.

S-a născut la 6/19 februarie 1902 în București, unde urmează cursurile primare și medii, și a absolvit secția reală a Liceului „Gh. Lazăr”, promoția 1920. Întimpiniind multe dificultăți materiale și nevoit de timpuriu să lucreze pentru a se întreține, el reușește să-și continue studiile la Facultatea de științe a Universității din București, Secția de matematici, luându-și licența în anul 1927. A funcționat apoi o vreme ca profesor de matematică în învățământul secundar, la liceele din Tîrgoviște, Ploiești, precum și la Liceul „Dimitrie Cantemir” din București. Își începe activitatea științifică din anul 1939, cînd atras de opera profesorului său Gh. Țițeica, asupra geometriei diferențiale proiective a rețelelor, publică primele lucrări științifice. În anul 1942 își ia doctoratul în matematică la Universitatea din București, cu o teză intitulată „Rețele conjugate cu transformatele lui Laplace în corespondență asimptotică”. În 1943 este numit asistent și apoi șef de lucrări la Catedra de geometrie a Universității din București. În 1948 este numit profesor de geometrie la Universitatea din Cluj, unde activează fără întrerupere pînă în anul 1962, anul transferului său la Catedra de matematică a Institutului de Petrol, Gaze și Geologie din București.

În intervalul de timp petrecut la Universitatea din Cluj, profesorul Tiberiu Mihăilescu a deținut, de asemenea, și funcția de șef al Catedrei de geometrie, aducînd o contribuție substanțială în organizarea învățămîntului și a cercetării matematice în domeniul geometriei. Acest interval a constituit etapa cea mai fecundă a activității sale științifice, orientată în mod deosebit spre aplicarea metodei reperului mobil a lui E. Cartan în geometria proiectivă. Cercetările sale din acest domeniu vizează îndeosebi două direcții importante: teoria rețelelor și teoria varietăților neolonome. În cea dintîi a dat proprietăți noi ale rețelelor conjugate, ale rețelelor Darboux-Țițeica și ale rețelelor Terracini-Pantazi. În domeniul spațiilor neolonome, inaugurează studiul varietăților liniare neolonome din E_3 cu ajutorul metodei reperului mobil, studiind, de asemenea, clase remarcabile de astfel de varietăți, precum și corespondențe asociate. O mare parte dintre rezultatele proprii sînt cuprinse în cele două cărți publicate de Editura Academiei și anume *Geometria diferențială proiectivă* (1958) și *Geometria diferențială proiectivă. Teoria corespondenței* (1963). Numeroase și ample articole sau memorii, publicate în revistele din țară și de peste hotare, au finalizat prodigioasa sa creație științifică. Opera sa didactică, concretizată în magistralele sale prelegeri excelînd în claritate și rigoare, va rămîne neuitată în memoria profesorilor de matematică pe care i-a format. Erudiția sa, depășind cu mult marginile specialității, s-a manifestat în diferite alte forme, printre care amintim colaborarea la redactarea *Lexiconului Tehnic Român*.

Prin dispariția profesorului Tiberiu Mihăilescu învățămîntul și știința din țara noastră au pierdut pe unul dintre cei mai devotați slujitori.

RECENZII

G. h. Micula, *Funcții spline și aplicații*, Ed. tehnică, București, 1978, 341 p.

Le travail présente une synthèse des principaux problèmes ayant trait aux fonctions spline et à leurs applications à l'intégration numérique des équations, à l'intégration numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles à la mécanique etc.

L'auteur aborde, dans la première partie du travail, dans son ensemble de manière systématique la problématique ayant trait à l'approximation des fonctions, à l'aide des fonctions spline notamment l'existence des fonctions spline, les propriétés extrémales des fonctions spline, la convergence des fonctions spline etc. Ensuite, l'auteur aborde le problème des fonctions spline généralisées, à partir de certaines propriétés extrémales de ces fonctions. A titre particulier des fonctions spline généralisées, l'auteur présente les fonctions spline trigonométriques, les fonctions spline exponentielles, des fonctions spline de Tchébycheff etc.

L'ouvrage contient également, dans un chapitre à part, l'extension de la théorie des fonctions spline aux fonctions de deux variables.

Dans la dernière partie du travail on donne un certain nombre d'applications des fonctions spline ayant trait aux formules d'intégration numérique optimales, à l'intégration numérique des équations différentielles avec des conditions initiales et des conditions aux limites polylocales, à l'approximation des solutions des équations intégrales et intégro-différentielles, à l'approximation des solutions de certaines classes d'équations aux dérivées partiales etc.

Le langage moderne de l'analyse fonctionnelle, utilisé par l'auteur pour aborder les problèmes ayant trait à la théorie des fonctions spline et à leurs applications, apporte et garde une note de clarté et de rigueur à la présentation du matériel et rend l'ouvrage aisément accessible tant à ceux qui veulent effectuer des recherches dans cette théorie qu'à ceux qui ont le désir d'en faire des applications pratiques.

La plupart des résultats présentés dans l'ouvrage appartiennent en propre à l'auteur et ont été obtenus dans le cadre des recherches faites récemment, ce qui démontre l'affirmation d'une nouvelle direction de recherches de l'école d'analyse numérique de Cluj-Napoca, le nombre de

ceux qui s'intéressent à ces problèmes allant toujours croissant.

La bibliographie comprend un grand nombre de références, ce qui démontre l'effort fait par l'auteur de mettre à la disposition du lecteur une source d'information aussi complète que possible.

Le travail s'adresse à un grand cercle de spécialistes, tels que mathématiciens, physiciens, ingénieurs, techniciens, étudiants et en général à tous ceux qui désirent s'initier à ce nouveau domaine des mathématiques.

ION PĂVĂLOIU

Wolfgang Brauch, *Programmierung mit FORTRAN*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977, 189S.

Das Buch — in dritter Auflage — bringt eine sehr sorgfältig geschriebene Einführung in Basic FORTRAN IV. Es wendet sich an Ingenieurstudenten aller Fachrichtungen und an angehende Benutzer einer Rechenanlage denen es die Grundkenntnisse des FORTRAN Gebrauchs vermittelt. Alle im Text erscheinenden Informatikbegriffe werden, oft in Anlehnung an die einschlägigen DIN Normen definiert und erläutert. Im einleitenden Teil des Buches werden der allgemeine Aufbau und die Wirkungsweise einer Rechenanlage vorgestellt. Es folgt ein gesondertes Kapitel über Programmablaufpläne, sodann die Sprachbeschreibung die allgemeine Anweisungen, Unterprogramme und spezielle Eingabe Ausgabeverfahren (Benutzen von Zweikoordinatenschreiber und Magnetplatten) einschliesst. Es werden zahlreiche Beispiele und Aufgaben, sowie die Lösungen dazu gebracht.

Die Aufgabenstellung ist einfach, leicht verständlich, und für dasselbe Problem werden oft mehrere Lösungen geboten, die die verschiedenen Möglichkeiten der Sprache veranschaulichen. Die Programme wurden auf einer IBM 1130 Rechenanlage ausgeführt.

Ein ganz besonderer Verdienst dieses Buches ist, dass neben den Erklärungen zu den Anweisungen Ratschläge und Hinweise stehen, die sich aus einer andauernden FORTRAN Praxis ergeben.

FRIEDRICH LANDA

CRONICĂ**Colocviu de Geometrie și Topologie**

În zilele de 22—24 septembrie 1978 a avut loc la Cluj-Napoca un colocviu de geometrie și topologie organizat de către Universitatea „Babeș-Bolyai”, Facultatea de matematică, în colaborare cu Filiala S.S.M. Cluj. În cadrul acestui colocviu au prezentat conferințe și comunicări un număr de 50 participanți din Cluj-Napoca precum și din centrele universitare București, Iași, Timișoara, Brașov, Craiova și Tg. Mureș. Lucrările colocviului s-au desfășurat în ședințe plenare și în următoarele secții: Geometrie diferențială, Topologie diferențială, Topologie generală, Structuri geometrice.

Conferințele s-au referit la următoarele tematici: Plane afine Barbillan, Structuri olomorfe neolomne, Geometria varietăților diferențiabile, Spații cu tensor recurent. Comunicările desfășurate în cadrul secțiilor de geometrie diferențială și topologie diferențială au abordat chestiuni legate de geometria spațiilor riemanniene și cu conexiune afină, spații Finsler, structuri complexe și aproape complexe, fibrate vectoriale și tensoriale, fibrări topologice. În cadrul secției de structuri geometrice au fost prezentate comunicări referitoare la structuri Hjelmslew, plane de translație, teoreme de închidere în plane proiective generale, precum și probleme referitoare la geometrizarea unor teorii fizice. În secția de topologie generală comunicările s-au referit la spații de proximitate, sfere în clanuri, spații uniforme, structuri de convergență, structuri algebrico-topologice.

Cu prilejul colocviului s-a realizat un amplu schimb de experiență între specialiștii din diferite centre universitare ale țării, atât în privința predării geometriei și topologiei în institutele de învățământ superior cit și referitor la orientarea generală a cercetării științifice în aceste domenii.

Al III-lea Colocviu de Cercetări operaționale

În zilele de 20—21 octombrie 1978 a avut loc la Cluj-Napoca al III-lea Colocviu de Cercetări operaționale, organizat de către Facultatea de matematică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, în colaborare cu Facultatea de științe ale naturii de la Universitatea din Craiova. Acest colocviu, cum arată și titlul, este al treilea în seria colocviilor organizate pe tema cercetărilor operaționale la cele două universități.

Colocviul a fost deschis de prof. dr. Ion Vlad, rectorul Universității „Babeș-Bolyai”, după care a urmat cuvântul de salut rostit de prof. Árpád Pál, decanul Facultății de matematică a Universității din Cluj-Napoca.

Lucrările colocviului s-au desfășurat în următoarele secții: Teoria jocurilor și control optimal, Programare matematică, Modelarea matematică în economie, știință și tehnică și Teoria generală a optimizării. În cadrul colocviului au fost prezentate 42 de comunicări de către participanți din Cluj-Napoca, Craiova, București, Iași, Brașov, Reșița, Tâșnad. La colocviu au participat personalități marcante din țară, specialiști cunoscuți în acest domeniu. Printre aceștia amintim: prof. dr. Irinel Drăgan (Univ. Iași), prof. dr. Ioan Marușciac (Univ. din Cluj-Napoca), prof. dr. Ioan Munteanu (Univ. din Cluj-Napoca), conf. dr. Aristide Leonte (Univ. Craiova), cerc. șt. pr. dr. Mihai Dragomirescu (Centrul de statistică din București), conf. dr. Gabriel Orman (Universitatea din Brașov) ș.a.

Colocviul a prilejuit un prețios schimb de experiență între specialiștii din țară care au preocupări din domeniul cercetărilor operaționale.



În cel de al XXIV-lea an (1979) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* apare semestrial în specialitățile :

matematică
fizică
chimie
geologie-geografie
biologie
filozofie
științe economice
științe juridice
istorie
filologie

На XXIV году издания (1979) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* выходит два раза в год со следующими специальностями :

математика
физика
химия
геология-география
биология
философия
экономические науки
юридические науки
история
филология

Dans sa XXIV-e année (1979) *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* paraît semestriellement dans les spécialités :

mathématiques
physique
chimie
géologie-géographie
biologie
philosophie
sciences économiques
sciences juridiques
histoire
philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM Departamentul export—import presă, P. O. Box 136—137, telex 11226, București, str. 13 Decembrie nr. 3.

Lei 10