STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

2

1977

CLUJ-NAPOCA

Anul XXII 1977

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

2

Redacţia : 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — ÎNHALT

Recenzii — Books — Livres parus — Buchbesprechung

Cronică — Chronicle — Chronique — Chronik

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

π-SCHUNCK CLASSES WITH THE D PROPERTY

RODICA COVACI

1. The notions of this paper are those of [2]. All groups considered here are finite π-solvable. We shall say that a Schunck class $\mathfrak{X}$ has the D property, if for any finite π-solvable group G, every subgroup H of G with $H \in \mathfrak{X}$ is contained in an $\mathfrak{X}$-projector of G. This definition has sense because of [2], 2.2. It is easy to see that a Schunck class $\mathfrak{X}$ has the D property if and only if for any finite π-solvable group G, the $\mathfrak{X}$-maximal subgroups coincide with the $\mathfrak{X}$-projectors.

The purpose of this paper is the study of the π-Schunck classes with the D property. We prove that some results of J. G. Wood [4], given only for solvable groups, are also true for the more general case of the π-solvable groups.

We shall use the following theorems of R. Baer [1], given for finite groups:

THEOREM 1.1. *Any solvable minimal normal subgroups of a group is abelian.*

THEOREM 1.2. *If the group G has a maximal subgroup with core 1, then the following two properties of G are equivalent:*

(1) There is one and only one minimal normal subgroup of G; there is a prime common divisor of the indexes in G of all maximal subgroups with core 1.

(2) There is a $\neq 1$ normal solvable subgroup of G.

THEOREM 1.3. *Let us suppose that G has a $\neq 1$ normal solvable subgroup and let S be a maximal subgroup of G with $\mathrm{core}_G S = 1$.*

a) The existence of a $\neq 1$ normal solvable subgroups of S implies the existence of a normal subgroup $N \neq 1$ of S with $(|N|, |G:S|) = 1$.

b) If S has a normal subgroup $N \neq 1$ with $(|N|, |G:S|) = 1$, then S is conjugate to any maximal subgroup T of G with $\mathrm{core}_G T = 1$.

2. Examples of π-Schunck classes with the D property.

Example 2.1. The class $\mathfrak{I}$ of all unit groups is a π-Schunck class with the D property.

Example 2.2. The class $\mathcal{S}_\pi$ of all finite π-solvable groups is a π-Schunck class with the D property. Indeed, $\mathcal{S}_\pi$ is a π-homomorph, because the homomorphic image of a π-solvable group is a π-solvable group and the extension of a π-solvable group is also a π-solvable group. Further, any π-solvable group is its own $\mathcal{S}_\pi$-projector, hence (see [2], 2.2.) $\mathcal{S}_\pi$ is a π--Schunck class. Clearly $\mathcal{S}_\pi$ has the D property.

Example 2.3. The class $S_{\pi'}$ of all π'-groups is a π-Schunck class with the D property. In order to prove this, let us notice that any π'-group is π-solvable and that the class $S_{\pi'}$ is a π-homomorph. We prove now that $S_{\pi'}$ is a π-Schunck class, using [2], 2.2. Let G be a π-solvable group and

H a π'-Hall subgroup of G (the existence of a such subgroup is assured by the theorem of Čunihin; see, for instance, [3], VI, 1.7.). H is a $S_{\pi'}$-projector of G. Indeed, $H \in S_{\pi'}$ and if $H \leq L \leq G$, $L_0 \Delta L$ and $L/L_0 \in S_{\pi'}$, we shall prove, by induction on $|G|$, that $L = HL_0$. Two cases are considered:

1) $L < G$. Applying the induction for L, we obtain $L = HL_0$.

2) $L = G$. Again, two cases:

a) $L_0 = 1$. Then $G = G/L_0 \in S_{\pi'}$. Every π'-subgroup of G is contained in a π'-Hall subgroup of G (see the ČUNIHIN theorem). It follows the existence of an element $g \in G$ with $G \subseteq H^g$. Thus $G = H = HL_0$.

b) $L_0 \neq 1$. Let N be a minimal normal subgroup of G with $N \leq L_0$. Since HN/N is a π'-Hall subgroup of G/N, we may apply the induction for G/N and from $HN/N \leq G/N = G/N$, $L_0/N \Delta G/N$, $(G/N)/(L_0/N) \simeq G/L_0 \in S_{\pi'}$ follows $G/N = HN/N \cdot L_0/N$ and so $G = HNL_0 = HL_0$.

Applying now the ČUNIHIN theorem, we conclude that the class $S_{\pi'}$ has the D property.

3. We give now two characterizations of the π-Schunck classes with the D property.

DEFINITION 3.1. ([4]) Let G be a group and S a subgroup of G. The subgroup S „avoids" the chief factor M/N of G is $S \cap M \subseteq N$. Particularly, if N is a minimal normal subgroup of G, S avoids N if $S \cap N = 1$.

DEFINITION 3.2. Let $\mathfrak{X}$ be a Schunck class of π-solvable groups.

a) $\mathfrak{X}$ has the A property if for any π-solvable group G and any subgroup H of G with $\mathrm{core}_G H = 1$, every $\mathfrak{X}$-projector of H is contained in an $\mathfrak{X}$-projector of G.

b) $\mathfrak{X}$ has the B property if for any π-solvable group G and any minimal normal subgroup N of G, the existence of an $\mathfrak{X}$-projector of G which avoids N implies that every $\mathfrak{X}$-maximal subgroup of G avoids N.

THEOREM 3.3. *Let $\mathfrak{X}$ be a π-Schunck class. The following statements are equivalent:*

(1) $\mathfrak{X}$ has the A property;

(2) $\mathfrak{X}$ has the D property;

(3) $\mathfrak{X}$ has the B property.

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2).

Let G be a π-solvable group, H an $\mathfrak{X}$-maximal subgroup of G and S an $\mathfrak{X}$-projector of G. We shall prove, by induction on $|G|$, that H and S are conjugate în G. We distinguish two cases:

1) $G \in \mathfrak{X}$. Then $H = S = G$.

2) $G \notin \mathfrak{X}$. Let N be a minimal normal subgroup of G. Applying the induction for G/N, we deduce the existence of an element $g \in G$ with $H \subseteq S^g N$. Again, two cases:

a) $S^g N \subset G$. The induction for $S^g N$ gives that H and S^g are conjugate in $S^g N$, hence H and S are conjugate in G.

b) $S^g N = G = SN$. If $\mathrm{core}_G S \neq 1$, we may apply the induction for $G/\mathrm{core}_G S$ and hence H and S are conjugate in G. So suppose that $\mathrm{core}_G S = 1$. G being π-solvable, N is either a solvable π-group, or a π'-group.

Let us suppose that N is a π'-group. Then $N \leq 0_{\pi'}(G)$ and $G/0_{\pi'}(G) \simeq \simeq (G/N)/(0_{\pi'}(G)/N)$, hence, by $G/N = SN/N \simeq S/S \cap N \in \mathfrak{X}$, $G/0_{\pi'}(G) \in \in \mathfrak{X}$. But this leads to $G \in \mathfrak{X}$, because $\mathfrak{X}$ is π-closed. Thus we obtain a contradiction with our assumption that $G \notin \mathfrak{X}$. It follows that N is a solvable π-group. Applying 1.1., we deduce that N is abelian. Let us prove that S is a maximal subgroup of G. $S < G$ since $S \in \mathfrak{X}$ and $G \notin \mathfrak{X}$ and $S \leq S^* < G$ implies $S = S^*$ because, if we suppose $S < S^*$, there is an element $s^* \in S^* \setminus S \subseteq G = SN$, hence $s^* = sn$ with $s \in S$, $n \in N$, but we see that $n = s^{-1}\ s^* \in S^* \cap N = 1$ (N is abelian), which means the false result $s^* = s \in S$. For $H < G$, there is a maximal subgroup M of G with $H \leq M$. By the induction for M, H is an $\mathfrak{X}$-projector of M. If $\mathrm{core}_G M \neq 1$, we apply the A property for the π-solvable group G and for $M < G$ with $\mathrm{core}_G M \neq 1$, the $\mathfrak{X}$-projector H of M and the $\mathfrak{X}$-projector S of G and deduce that $H \subseteq S^t$, where $t \in G$, hence H and S are conjugate in G. Let $\mathrm{core}_G M = 1$. We shall prove that S has $a \neq 1$ normal subgroup of relatively prime order to $|G:S|$. Let L be a minimal normal subgroup of S. L is either a solvable π-group, or a π'-group. If L is a solvable π-group, by 1.3. *a*) S has $a \neq 1$ normal subgroup of relatively prime order to $|G:S|$. If L is a π'-group, then even $L \neq 1$ is a normal subgroup of S with $|L|$ relatively prime to $|G:S| = |SN:S| = |N:S \cap N|$. With these, we are in the hypotheses of the theorem 1.3.b) and so S and M are conjugate in G. It follows that $M \in \mathfrak{X}$, which, together with $H \leq M$, implies $H = M$, hence H and S are conjugate in G.

(2) $\Rightarrow$ (3).

The same proof as in [4]. The π-closure of $\mathfrak{X}$ is not used.

(3) $\Rightarrow$ (1).

Let us suppose that $\mathfrak{X}$ has not the A property and let G be a π-solvable group of minimal order with respect to the condition: there is a subgroup H of G with $\mathrm{core}_G H \neq 1$ and there is an $\mathfrak{X}$-projector T of H such that for any $\mathfrak{X}$-projector S of G, $T \nsubseteq S$. We agree to choose H as a subgroup of G of minimal order with respect to the above properties. From the choice of T we obtain that $G \notin \mathfrak{X}$ and $H < G$. For $\mathrm{core}_G H \neq 1$, there is a minimal normal subgroup N of G such that $N \leq \mathrm{core}_G H$. Two cases are considered here:

1) $TN \subset H$. A contradiction is obtained like in [4].

2) $TN = H$. Let S be an $\mathfrak{X}$-projector of G. Analogous to [4], using the minimality of G and the fact that (1) $\Rightarrow$ (2), we deduce that for some $g \in G$, $T \subseteq S^g N$. If we suppose that $S^g N \subset G$, we are led like in [4] to a contradiction. So $S^g N = G = SN$. Now, N is either a solvable π-group or a π'-group. If we suppose that N is a π'-group, then $N \leq \leq 0_{\pi'}(G)$ and $G/0_{\pi'}(G) \simeq (G/N)/(0_{\pi'}(G)/N)$. But $G/N = SN/N \simeq S/S \cap N \in \in \mathfrak{X}$, hence $G/0_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ and, by the π-closure of $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, a contradiction. Thus N is a solvable π-group and by 1.1. N is abelian. It follows that $S \cap T = 1$. This and $TN = (S \cap H)N$ give $S \cap H = (S \cap H)/(S \cap H \cap N) \simeq \simeq (S \cap H)N/N = H/N \in \mathfrak{X}$. For $H < G$, the choice of G and (1) $\Rightarrow \Leftrightarrow$ (2) lead to $S \cap H \subseteq T^h$, with $h \in H$. But $\mathfrak{X}$ has the B property. So $T \cap$

$\cap N = 1$. It follows, by considerations of order, that $S \cap H = T^h$. Hence $T^h \subseteq S$, a contradiction with the choice of T.

4. Let us note with $\mathfrak{D}$ the class of all π-Schunck classes with the D property.

We define the composition of two Schunck classes $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ by:

$< \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} > = \{G/G$ π-solvable group, $G = <S, T>$, where S is an $\mathfrak{X}$-projector of G and T is an $\mathfrak{Y}$-projector of $G\}$.

We notice that $\mathfrak{X} \subseteq < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} >$, $\mathfrak{Y} \subseteq < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} >$.

The purpose of this section is to prove

THEOREM 4.1. *The class $\mathfrak{D}$, partial ordered by inclusion, forms respect to the operations of composition and intersection a complete lattice.*

As we can see in [4], the lattice $\mathfrak{D}$ is not modular, hence not distributive.

In the proof of theorem 4.1. we shall use the following lemmas.

LEMMA 4.2. *If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are π-homomorphs, then $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ is also a π-homomorph.*

Proof. The proof of the fact that $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ is a homomorph is like in [4]. Let now $G/O_{\pi'}(G) \in < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} >$. This means that $G/O_{\pi'}(G) = < S/O_{\pi'}(G), T/O_{\pi'}(G) >$, where $S/O_{\pi'}(G)$ is an $\mathfrak{X}$-projector of $G/O_{\pi'}(G)$ and $T/O_{\pi'}(G)$ is an $\mathfrak{Y}$-projector of $G/O_{\pi'}(G)$. $O_{\pi'}(G)$ being a normal π'-subgroup of S, we deduce that $O_{\pi'}(G) \subseteq O_{\pi'}(S)$, hence $S/O_{\pi'}(S) \simeq (S/O_{\pi'}(G))/(O_{\pi'}(S)/O_{\pi'}(G))$. But $S/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$, hence $S/O_{\pi'}(S) \in \mathfrak{X}$. The class $\mathfrak{X}$ is π-closed and so $S \in \mathfrak{X}$, which implies that S is its own $\mathfrak{X}$-projector. From $S/O_{\pi'}(G)$ is an $\mathfrak{X}$-projector of $G/O_{\pi'}(G)$ and S is its own $\mathfrak{X}$-projector results (see, for instance, [2], 1.5.) that S is an $\mathfrak{X}$-projector of G. Analogously, it can be proved that T is an $\mathfrak{Y}$-projector of G. So $G = <S, T>$, where S and T are $\mathfrak{X}$-, respectively $\mathfrak{Y}$-projectors of G, which means that $G \in < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} >$.

LEMMA 4.3. *If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are π-Schunck classes, then $< \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} >$ is also a π-Schunck class.*

Proof. By 4.2. we know that $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ is a π-homomorph. Using [2], 2.2., it suffices to prove that any π-solvable group G has $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projectors. This proof is like in [4].

LEMMA 4.4. *If $\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{D}$, then $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}> \in \mathfrak{D}$.*

Proof. By 4.3., $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ is a π-Schunck class. Let us prove that $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ has the $\mathfrak{D}$ property. Let G be a π-solvable group and H a $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-maximal subgroup of G. We shall prove by induction on $|G|$ that H coincides with an $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projector of G. Two cases are considered.

1) $G \in < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$. In this case, G is its own $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projector and $H = G$.

2) $G \notin < \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$. Let P be a $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projector of G and N a minimal normal subgroup of G. Applying the induction for G/N, we deduce the existence of an element $g \in G$ with $HN/N \subseteq P^gN/N$, hence $H \subseteq P^gN$. If $P^gN \subset G$, then, by the induction for P^gN, we obtain $H = (P^g)^{g_1}$ for some $g_1 \in P^gN$, hence $H = p^x$ with $x = gg_1 \in G$. If $P^gN = G = PN$, we consider again two possibilities:

a) core $P \neq 1$. By the induction for $G/\mathrm{core}_G P$, the $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-maximal subgroup H $\mathrm{core}_G P/\mathrm{core}_G P$ and the $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projector $P/\mathrm{core}_G P$ of $G/\mathrm{core}_G P$, we deduce that $H = P^x$, for some $x \in G$.

b) $\mathrm{core}_G P = 1$. The minimal normal subgroup N of the π-solvable group G is either a solvable π-group, or a π'-group. If we suppose that N is a π'-group, we get a contradiction in the following way: $N \leq O_{\pi'}(G)$, $G/O_{\pi'}(G) \simeq (G/N)/(O_{\pi'}(G)/N)$, $G/N = PN/N \simeq P/P \cap N \in <\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ and so $G/O_{\pi'}(G) \in <\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ and, $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$ being π-closed, $G \in <\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$. Hence N is a solvable π-group and so, by 1.1., N is abelian. It is easy to see that P is a maximal subgroup of G. Now, the group G, having a maximal subgroup P with $\mathrm{core}_G P = 1$ and a solvable normal subgroup $N \neq 1$, has, by 1.2., only one minimal normal subgroup N. We put $M = HN$. It proves like in [4] that $M = G$. Let us notice that H and P are conjugate in G. Indeed, if we suppose that $\mathrm{core}_G H \neq 1$, by the induction for $G/\mathrm{core}_G H$ and for its $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-maximal subgroup $H/\mathrm{core}_G H$ and its $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$-projector P $\mathrm{core}_G H/\mathrm{core}_G H$ we deduce that H and P are conjugate in G. If $\mathrm{core}_G H = 1$, we reason in the following way. H is a maximal subgroup of G. Further, P has $a \neq 1$ normal subgroup whose order is relatively prime to $|G:P|$. Indeed, let L be a minimal normal subgroup of P. If L is a solvable π-group, from the existence of a solvable normal subgroup $N \neq 1$ of G and a maximal subgroup P of G with core ${}_G P = 1$, where P has a solvable normal subgroup $L \neq 1$, we deduce, by 1.3. a), that P has $a \neq 1$ normal subgroup of relatively prime order to $|G:P|$. If L is a π'-group, then $L \neq 1$ itself is a normal subgroup of P with $(|L|, |G:P|) = 1$. This is true because $|L|$ is a π'-number, while $|G:P| = |PN:P| = |N:P \cap N|$ is a π-number. Applying now 1.3.b), we conclude that H and P are conjugate in G.

COROLLARY 4.5. *If* $\mathfrak{X}_i \in \mathfrak{D}$, $i \in I$, *then* $<\mathfrak{X}_i \,|\, i \in I> \in \mathfrak{D}$.

The following statements can be proved in the same way like in [4]:

LEMMA 4.6. *If* $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'$ *are Schunck classes with* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$ *and* $\mathfrak{X}'$ *and* $\mathfrak{Y}'$ *have the* $\mathfrak{D}$ *property, then* $<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}> \subseteq <\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'>$.

PROPOSITION 4.7. *If* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \mathfrak{D}$ *and* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} \subseteq <\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$, *hen* $\mathfrak{Z} = <\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}>$.

PROPOSITION 4.8. *If* $\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}$ *and* $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{D}$, *then* $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \in \mathfrak{D}$.

Proof. Let $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$, that is $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ and $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{Y}$. But the classes $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are π-closed. So $G \in \mathfrak{X}$ and $G \in \mathfrak{Y}$, hence $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$. With this, we proved that $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ is π-closed. The rest of the proof is like in [4].

COROLLARY 4.9. *If* $\mathfrak{X}_i \in \mathfrak{D}$, $i \in I$, *then* $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \in \mathfrak{D}$.

From 4.5., 4.7., 4.9. follows immediately theorem 4.1. In the lattice $\mathfrak{D}$, we have 0 (the class $\mathcal{J}$) and 1 (the class $\mathfrak{S}_\pi$), but an open problem is to study if $\mathfrak{D}$ is or not complemented.

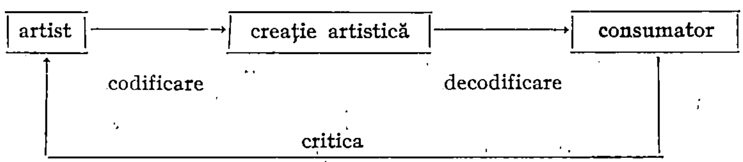
(Received September 21, 1976

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

MODEL CIBERNETIC AL RELAŢIEI ARTIST-CONSUMATOR

IOAN STAN şi RĂZVAN ANDONIE

Alegerea unei strategii de joc este legată de factorul conştiinţă. Să concepem dialogul artist-consumator ca şi un joc matematic cu doi parteneri. Din punct de vedere informaţional, avem structura simplificată:



Vom presupune coincidenţa perfectă a repertoriului artistului cu cel al consumatorului (sau dacă nu, cel puţin incluziunea: repertoriul folosit de artist $\subseteq$ repertoriul consumatorului). De asemenea vom presupune informaţia obiectivă egală cu cea subiectivă (caz extrem al adaptării).
Adică fie:

$$V_A = \begin{bmatrix} Z_1 & \ldots & Z_r \\ p_1 & \ldots & p_r \end{bmatrix} \qquad V'_B = \begin{bmatrix} Z_1 & \ldots & Z_r \\ w_1(t) & \ldots & w_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{r} w_i(t) = 1$$

repertoriul comun de semne, cu probabilităţile corespunzătoare de apariţie. Se ştie că $w_i(t) \rightarrow w_i$ pentru $i = \overline{1, r}$ într-un interval finit de timp [4, p. 104]. Presupunem deci că $w_i = p_i$ $i = \overline{1, r}$.

Fie N = lungimea mesajului

$$N = \sum_{i=1}^{r} n_i \qquad n_i = \text{nr. de apariţii ale semnului } Z_i,$$

deci

$$H_{\text{subiectivă}} = -N \sum_{i=1}^{r} p_i ld p_i = -N \sum_{i=1}^{r} p_i \, ld w_i = H_{\text{obiectivă}}$$

Ne vom referi de acum încolo la mărimi ale entropiei şi redundanţei privind doar obiectul estetic.

Procesele parcurse în codificarea şi decodificarea unei creaţii artistice sînt [1, 2, 4]:

— sintetice (trecere Birkhoff)

— analitice (trecere Moles)

Aceste procese se definesc ca şi mişcări verticale ascendente, respectiv descendente pe scara ordine apropiată — ordine îndepărtată.

Fiecare treaptă a scării se va caracteriza prin conceperea de supersemne de ordin respectiv. Codificarea și decodificarea creației artistice se caracterizează prin salturi verticale de la un nivel la altul, cauzate de necesitatea adaptării la cantitatea de informație.

Prin trecerea de la un nivel i la unul superior $i + 1$, în cazul decodificării, se produce o reducere a informației obiectului contemplat (din punctul de vedere al consumatorului).

Informația extrasă va fi atunci:

$$I_i = H_i - H_{i+1}$$

unde

H_i = entropia obiectului considerată la nivelul de ordine i.

Vom porni de la supersemnele de ordinul I, care sînt percepute inconștient. Trecerea la supersemne de ordin superior se efectuează conștient. Vom considera deci doar extragerea conștientă de informație (care implică un anumit efort din partea consumatorului). Pentru fiecare trecere la un ordin superior de supersemne vom avea o redundanță astfel definită:

$$R_i = \frac{H_i - H_{i+1}}{H_i}$$

Se pot considera și alte tipuri de redundanță. Plăcerea estetică obținută la un astfel de pas va fi:

$$f_i = \frac{R_i}{H_{i+1}}$$

(este expresia plăcerii estetice la nivel microestetic).

La nivel macroestetic (ordine îndepărtată) avem o altă expresie a plăcerii estetice:

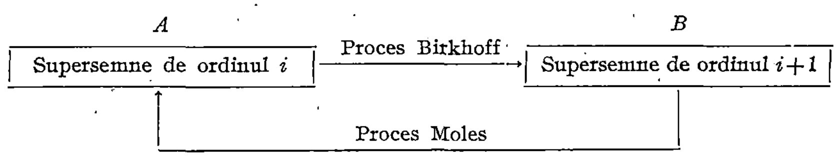
$$f_i = \frac{O_i}{C_i} = \frac{\text{ordine}}{\text{complexitate}}$$

Atunci vom putea concepe un vector al plăcerii estetice la diferite nivele de ordine. Acest vector va caracteriza creația artistică respectivă prin încercarea de exprimare a unor invarianți estetici. Acești invarianți se pot concepe referindu-ne la un cadru social-cultural bine determinat.

Vom considera repertoriul $V_A = V_C$ ca și mulțimea supersemnelor de ordinul I.

Vom considera procesul de decodificare încheiat, cînd nici o componentă f_i, $i = \overline{1, n}$ nu mai poate suferi modificări esențiale (suficient de mari).

Vom numi *stări* ale creației artistice, stadiile în codificarea (decodificarea) ei determinate în mod unic de anumite succesiuni de mișcări verticale pe scara ordine apropiată—ordine îndepărtată. Aceste mişcări sînt determinate de necesitatea adaptării la capacitatea de înţelegere a consumatorului.



A, B, C — stări

A, la nivelul i

B, C la nivelul $i+1$

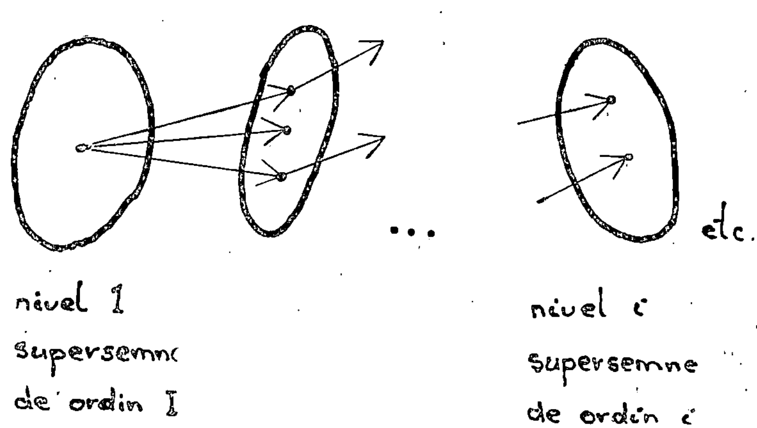
Trecerea: „$A \to B \to A \to B$”

nu ne va duce la starea B ci la o nouă stare, C

$A \begin{smallmatrix} \nearrow B \\ \searrow C \end{smallmatrix}$ deci „$A \to B \to A \to C$”

Acesta este procedeul de determinare iterativă a stărilor. Se poate demonstra că într-o succesiune de mişcări verticale, ultima mişcare este un proces Birkhoff (deoarece acestea scad entropia informaţională a mesajului). Vom conveni ca mişcările verticale să se facă din pas în pas, fără a sări peste un nivel, cum se întîmplă practic. Pentru aceasta putem introduce stări fictive. Deci stările creaţiei se obţin ca şi vîrfuri ale unei arborescenţe, terminalele fiind acelea pentru care procesul de decodificare ar fi practic încheiat. În funcţie de distanţa faţă de vîrful iniţial, vom avea o împărţire în nivele:

Modalitatea de construcţie este de fapt o parcurgere a arborescenţei. Un vîrf (o stare) aparţine unui nivel dacă şi numai dacă ultimul nivel la care



ne-am oprit este chiar acesta. Fiecare nivel este caracterizat printr-o tratare a unei clase de supersemne. Fiecare arc este de fapt ultima etapă într-o succesiune de micșări verticale.

Evident, vor exista și anumite restricții în trecerea de la o stare la alta și, deci, în obținerea unor stări.

Fie X = mulțimea stărilor și U = mulțimea arcelor arborescenței, și fie $G(X, U)$ arborescența obținută cu considerarea restricțiilor respective.

Orice joc are anumite reguli care reglementează [3] :

a) variantele de acțiuni posibile ale jucătorilor
b) cunoștințele fiecăruia despre comportarea celuilalt
c) succesiunea mutărilor
d) rezultatul la care conduce orice succesiune dată de mutări.

Să studiem deci cum pot fi considerate aceste concepte în cazul nostru.

Avem doi parteneri : autorul
consumatorul

Fiecare urmărește un anumit scop. Dacă vom considera relația autor-consumator ca și un joc între cei doi parteneri, atunci, imaginîndu-ne o funcție de cîștig fictivă, cei doi parteneri vor avea același scop — cîștigul maxim.

Conceptele a, b, c, d pot fi considerate astfel :

a) variantele de acțiuni posibile sînt succesiuni de stări ale creației artistice ;

b) cunoștințele fiecărei părți vor fi astfel considerate :

— consumatorul nu are nici o relație suplimentară în decodificarea creației artistice decît ea însăși (adică el nu primește „indicații' din partea autorului) ;

— artistul cunoaște posibilitățile de înțelegere ale consumatorului. El va raporta creația artistică la aceste posibilități. Vom elimina frecventul decalaj dintre posibilitățile reale ale consumatorului și viziunea artistului asupra acestor posibilități ;

c) Vom avea un joc cu două mutări : — codificare
— decodificarea

Succesiunea este cea naturală. Autorul fixează cadrul jocului, mutările posibile, și alege o mutare. Consumatorul va alege și el o mutare din mutările posibile fixate de autor.

d) Rezultatul la care conduce desfășurarea jocului este efectul produs asupra consumatorului, apoi prin feed-back-ul criticii asupra autorului.

Fie $\Delta = \Delta(X, F)$, jocul strategic cu doi parteneri astfel considerat:
X = mulțimea stărilor posibile la diferite nivele ale scării ordinei apropiată — ordine îndepărtată ;
F = mulțimea restricțiilor impuse asupra alternativelor de trecere de la o stare la alta.

X, F se referă la consumatori. Ele sînt fixate de autor, determinînd cadrul jocului.

Ne propunem să definim noțiunea de strategie optimală pentru cei doi parteneri.

Fie $H = \langle H_1, \ldots, H_n \rangle$ vectorul entropiei

$$H_t = H_1 = -N \sum_{i=1}^{r} p_i ld p_i$$

fie $I = \langle I_1, \ldots, I_{n-1} \rangle$ vectorul informației

$$I_i = H_i - H_{i+1}$$

Fie $R = \langle R_1, \ldots, R_{n-1} \rangle$ vectorul redundanței

$$R_i = \frac{H_i - H_{i+1}}{H_i}$$

fie $f = \langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle$ vectorul plăcerii estetice

$$f(^0/c) = f(^R/H),\ f_i = \frac{R_i}{H_{i+q}}$$

$$I_t = H_t = \sum_{i=1}^{n-1} (H_i - H_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} I_i,\ \text{pentru } n \text{ suficient de mare,}$$

unde: I_t = informația maximă care poate fi extrasă

H_t = nedeterminarea maximă existentă la începutul procesului de decodificare

Valorile lui H, I, R, f sînt valori pe care autorul le extrapolează asupra consumatorului. Am convenit să identificăm plăcerea estetică cu măsura ei, la nivel micro-respectiv macroestetic.

Fie Γ mulțimea strategiilor posibile (mulțimea drumurilor de la vîrful inițial la terminale) atît pentru autor cît și pentru consumator (ele sînt aceleași).

Fie $G(X, U)$ graful atașat jocului $\Delta(X, F)$

DEFINIȚIA 1. Se numește strategie optimală (pură) pentru artist, soluția problemei de programare dinamică

$$\text{(presupunînd că } \exists \text{ soluție)} \begin{cases} \max f \\ H,\ R \geqslant 0 \\ F(H,\ R) \leqslant 0 \end{cases}$$

unde F = vectorul restricțiilor

unde între elementele vectorului f există o legătură și unde $n \in N$, suficient de mare pentru ca $H_n = H(\varepsilon)$ să fie suficient de mic.

Această soluție se poate reprezenta în graful $G(X; U)$ sub forma unui drum $\gamma_a \in \Gamma$, drum optimal.

De exemplu, în cazul folosirii lanțurilor Markov simple, deci prin descrierea regulilor de sintaxă prin matrici de tranziție $(p_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, avem :

$$\begin{cases} \max f \\ p_{ij} \geqslant 0 ;\ p_{ij} \leqslant 1 \\ F(p) \leqslant 0 \\ i,\ j = \overline{1,\ n} ;\ p = (p_{ij}) \end{cases}$$

DEFINIȚIA 2. În graful $G(X,\ U)$ se numește strategie optimală (pură) a consumatorului (drum optimal) cel mai scurt drum pentru care H_t scade la o valoare $H(\varepsilon)$ suficient de mică (în cazul că există).

TEOREMĂ: *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\gamma \in \Gamma$ *să fie strategia optimală pentru artist este ca:*

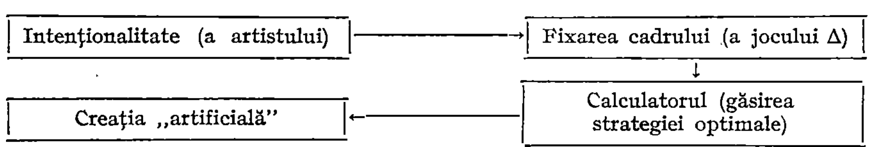
a) $\gamma = \gamma_c$

b) lungimea $(\gamma) = i,\ i \in N$, *este o valoare optimă.*

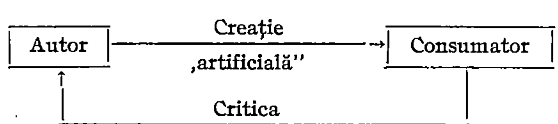
Consecință: Perechea $(\gamma_a,\ \gamma_c)$ este punct de echilibru al jocului Δ,

$$\text{și } \gamma_a = \gamma_c.$$

De fapt stările creației astfel definite sînt stări potențiale, determinate de către autor la începutul fiecărui proces de creație. Ele depind de alegerea unui repertoriu V, de supersemne de ordinul I, și de restricțiile referitoare la supersemnele de ordin superior. Această simplificare este aplicabilă doar în cazul esteticii generative. Și atunci, prin folosirea calculatorului, vom căuta punctul de echilibru al jocului. Aceasta revine deci la o problemă de programare sau de găsire a unui drum optim în graf. Rezultatul va fi creația „artificială" însăși.



Și iată o altă metodă de folosire a acestui model în estetica generativă. Este cazul în care calculatorul nu poate determina punctul de echilibru al jocului.



(1)

Autorul va prezenta consumatorului mai multe creații. Prin critică acesta se va exprima asupra lor. Ciclul se repetă pînă la găsirea punctului de echilibru, a variantei optime. Este de fapt un algoritm de găsirea punctului de echilibru pentru jocul Δ.

Sistemul (1) se manifestă astfel ca şi autoreglabil, tinzînd către o stare de echilibru. Este un sistem cibernetic. Jocul are mai multe etape, mai multe mutări pentru fiecare partener, complicîndu-se. Consumatorul poate fi considerat că este însuşi autorul, critica devenind atunci autocritică.

În cazul creaţiei „neartificiale" intenţionalitatea va acţiona şi în timpul procesului de creaţie, modificînd continuu jocul astfel conceput. Deci nu ne vom mai putea fixa la un joc, ci la o clasă de jocuri.

(Intrat în redacţie la 29 septembrie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. Frank, Helmar, *Kybernetische Analysen subjektiver Sachverhalte*, Quikborn, 1964.
2. Franke, Herbert, *Phänomen Kunst*, Verlag Du Mont, 1974.
3. Guiaşu, S., Maliţa, M., *Triade*, Ed. ştiinţifică, 1973.
4. Gunzenhäuser, Rul, *Mass und Information als ästhetische Kategorien*, Agis Verlag, 1975.

THE CYBERNETICAL MODEL OF THE ARTIST – CONSUMER RELATIONSHIP

(Summary)

This paper aims to construct a cybernetical model of the relationship between the artist and the consumer, using the mathematical theory of games. Based on the results of the informational psychology the concept of strategic game with two sides (the artist & the consumer) was defined as well as the optimal strategy for the two parts. It was also discovered the necessary and sufficient condition that a strategy should be optimal for the artist. This result is shaped as a theorem. The consequence of the theorem comprises the solution of the game given, by finding the equilibrium point. At the end, the applicability of these solutions in the generative esthetics was studied.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

SUBSPAŢII ÎNTR-UN SPAŢIU K_m^*(I)

Subspaţii într-un spaţiu K_m^* recurent

P. ENGHIŞ

Un spaţiu riemannian V_m se numeşte recurent [9] dacă există un vector covariant φ_α astfel încît să avem

$$\bar{R}^{\beta}_{\gamma\delta\varepsilon;\alpha} = \varphi_\alpha \bar{R}^{\beta}_{\gamma\delta\varepsilon} \tag{1,1}$$

unde $\bar{R}^{\beta}_{\gamma\delta\varepsilon}$ sînt componentele tensorului de curbură a spaţiului iar prin punct şi virgulă s-a notat derivarea covariantă în raport cu metrica spaţiului:

$$ds^2 = a_{\alpha\psi}\, dy^\alpha dy^\psi \tag{1,2}$$

Dacă în (1,1) se aplică o contracţie în raport cu β şi δ se obţine

$$\bar{R}_{\gamma\varepsilon;\alpha} = \varphi_\alpha \bar{R}_{\gamma\varepsilon} \tag{1,3}$$

iar spaţiile ce verifică (1,3) au fost numite Ricci-recurente [6]

Dacă în (1,3) se mai aplică o contracţie se obţine

$$\bar{R}_{;\alpha} = \varphi_\alpha \bar{R} \tag{1,4}$$

unde $\bar{R}$ este curbura scalară a spaţiului, iar spaţiile ce verifică (1, 4) s-au numit de curbură scalară recurentă.

Dacă în (1,1), $\varphi_\alpha = 0$ spaţiul se numeşte simetric Cartan.

Considerînd identitatea lui Bianchi

$$\bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\varepsilon} + \bar{R}^{\alpha}_{\beta\delta\varepsilon;\gamma} + \bar{R}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma;\delta} = 0 \tag{1,5}$$

şi ţinînd seama de (1,1) se obţine:

$$\varphi_\varepsilon \bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \varphi_\gamma \bar{R}^{\alpha}_{\beta\delta\varepsilon} + \varphi_\delta \bar{R}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma} = 0 \tag{1,6}$$

relaţie verificată în spaţiile recurente. Spaţiile simetrice Cartan în care există un vector covariant astfel ca (1,6) să aibă loc, împreună cu spaţiile recurente, au fost numite de A. G. Walker [9] spaţii K_m^*. Pentru spaţiile K_m^* se arată [9], că vectorul φ_α este gradient dacă spaţiul este recurent şi poate fi ales gradient dacă spaţiul este simetric Cartan.

Fie acum un spaţiu riemannian V_n de metrică

$$ds^2 = g_{ij} dx^j dx^i \tag{1,7}$$

scufundat în spaţiul riemannian V_m, adică [1]

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n) \qquad (\alpha = \overline{1, m},\ m > n).$$

şi rang $\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\| = n$. Pentru deplasări în V_n avem

$$a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{ij} dx^j dx^i \text{ şi deci } a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^\beta}{\partial x_j} = g_{ij}$$

sau $a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} = g_{ij}$ unde prin virgulă s-a notat derivarea covariantă în raport cu metrica (1,7).

Notînd N^α_p $(p = \overline{n+1, m})$ $m - n$ cîmpuri vectoriale normale la V_n, unitare şi reciproc ortogonale avem

$$a_{\alpha\beta} N^\alpha_p N^\beta_p = e_p, \; a_{\alpha\beta} N^\alpha_q N^\beta_p = 0 \; p \neq q$$

$$a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} N^\alpha_p = 0, \quad e_p = \pm 1.$$

Tensorul lui Euler—Schouten pentru spaţiul V_n este definit de $y^\alpha_{,ij} = y^\alpha_{,i;j}$ şi dacă se notează [10]

$$y^\alpha_{,ij} = \sum_p e_p \Omega_{p|ij} N^\alpha_p \tag{1,8}$$

atunci tensorul secund fundamental a lui V_n este dat de

$$\Omega_{p|ij} = y_{,ij} N_{p|\alpha} \tag{1,9}$$

Ecuaţiile lui Gauss şi Codazzi pentru spaţiul V_n scufundat în V_m se vor scrie

$$R_{ijkh} = \sum_p e_p (\Omega_{p|ik}\Omega_{p|jh} - \Omega_{p|ih}\Omega_{r|jk}) + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\gamma_{,k} y^\delta_{,h} \tag{1,10}$$

$$\Omega_{p|ij,k} - \Omega_{p|ik,j} = \sum_q e_q (\mu_{qp|k}\Omega_{q|ij} - \mu_{qp|j}\Omega_{q|ik}) + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\gamma_{,j} y^\delta_{,k} N^\beta_p$$

unde $\mu_{pq|j} = a_{\alpha\beta} N^\alpha_p N^\beta_{q,j} + [\mu\nu, \beta] y^\mu_{,i} N^\lambda_p N^\beta_q$ şi $\mu_{pq|j} + \mu_{pq|j} = 0$, $\mu_{pp|j} = 0$ iar R^i_{jkh} sînt componentele tensorului de curbură pentru spaţiul V_n.

Dacă spaţiul V_n este scufundat într-un spaţiu V_m recurent, notînd cu φ_r componenta tangenţială a gradientului de recurenţă se obţine:

$$\varphi_\alpha y^\alpha_{,r} = \varphi_r \tag{1,11}$$

Derivînd covariant (1,11) în raport cu (1,7) se obţine

$$\varphi_{\alpha,\rho} y^\rho_{,i} y^\alpha_{,r} + \varphi_\alpha y_{,ri} = \varphi_{r,}$$

şi ţinînd cont de (1,8) rezultă

$$\varphi_{\alpha,\rho} y^\rho_{,i} y^\alpha_{,r} + \varphi_\alpha \sum_p e_p \Omega_{p|ri} N^\alpha_p = \varphi_{r,i} \tag{1,12}$$

În relaţia (1,12) permutînd ρ şi α şi scăzînd relaţiile obţinute se regăseşte rezultatul lui T. Myazawa [5] potrivit căruia vectorul φ_r definit de (1,11) este un gradient.

Pentru început se va presupune că vectorul de recurenţă φ_α nu este ortogonal subspaţiului V_n, deci $\varphi_r \neq 0$.

Derivînd covariant (1,10) în raport cu g_{ij} şi ţinînd seama de (1,1), (1,8), (1,10) şi (1,11) se obţine:

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} - \varphi_r \quad {}_{ijkh} = & - \varphi_r \sum_p e_p \Omega_{p|ijkh} + \sum_p e_p \Omega_{p|ijkh,r} - \\ & - 4 \sum_p e_p \{\Omega_{p|[i|r|}\Omega_{|p|j][k,h]} + \Omega_{p[k|r|}\Omega_{|p|h][i,j]}\} + \\ & + 4 \sum_p e_p \sum_q e_q \{\mu_{qp(h}\Omega_{|q|k][j}\Omega_{p|i]r} + \mu_{qp[j}\Omega_{q|i][h}\Omega_{|p|k]r}\} \end{aligned} \tag{1,13}$$

unde prin paranteza dreaptă s-a notat antisimetrizarea, iar

$$\Omega_{p|ijkh} = \Omega_{p|ik}\Omega_{p|jh} - \Omega_{p|ih}\Omega_{p|jk} \tag{1.14}$$

Rezultă deci

PROPOZIŢIA 1.1. *Subspaţiile unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu verifică relaţiile* (1,13).

Cei $m - n$ tensori definiţi de relaţiile (1,14) verifică proprietăţi analoge proprietăţilor tensorului de curbură.

$$\Omega_{p|ijkh} = \Omega_{p|khij} = -\Omega_{p|jikh} = -\Omega_{p|ijhk}$$

$$\Omega_{p|ijkh} + \Omega_{p|ikhj} + \Omega_{p|ihjk} = 0$$

Tensorii contractaţi ai tensorilor $\Omega_{p|ijkh}$ sînt

$$\varnothing_{p|jh} = \varnothing_{p|hj} = \Omega^i_{p|jih} = \Omega_{p|}\Omega_{p|jh} - \Omega^i_{p|h}\Omega_{p|ij} \tag{1,15}$$

unde $\Omega_{p|} = \Omega_{p|ik}g^{ik}$ este curbura medie a lui V_n pentru direcţia $\underset{p}{N^\alpha}$. [1], iar celălalt nul $\Omega^i_{p|ikh} = 0$.

Relaţiile (1,13) scrise într-o altă formă au fost obţinute pentru prima dată de M. Prîvanovih [7].

Din identitatea lui Bianchi (1,5) scrisă pentru subspaţiul V_n şi din (1,13) rezultă

$$\varphi_r R_{ijkh} + \varphi_k R_{ijhr} + \varphi_h R_{ijrk} = \sum_p e_p(\varphi_r\Omega_{p|ijkh} + \varphi_k\Omega_{p|ijhr} + \varphi_h\Omega_{p|ijrk}) \tag{1.16}$$

Dacă în (1,16) se înmulţeşte contractat cu g^{ir} şi se ţine seama de (1,15) se obţine:

$$A^i_{jkh}\varphi_i = \sum_p e_p(\Omega^i_{p|jkh} - \delta^i_k\varnothing_{p|jh} + \delta^i_h\varnothing_{p|jki})\,\varphi_i \tag{1,17}$$

unde $A^i_{jkh} = R^i_{jkh} - (\delta^i_k R_{jh} - \delta^i_h R_{jk})$, [2].

Înmulţind (1,17) contractat cu g^{ik} se obţine:

$$(R\,\delta^i_h - 2R^i_h)\,\varphi_i = \sum_p e_p(\varnothing_p\delta^i_h - 2\varnothing^i_{p|h})\,\varphi_i \tag{1,18}$$

unde $\varnothing_p = \Omega^2_p - \Omega^i_{p|h}\Omega^h_{p|i}$. Rezultă deci:

PROPOZIŢIA 1.2. *Tensorul de curbură, tensorul A^i_{jkh}, tensorul lui Ricci, curbura scalară, tensorii $\Omega_{p|ijkh}$ şi contractaţii lor dintr-un subspaţiu V_n a unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu, verifică relaţiile (1, 16), (1, 17), (1, 18).*

Dacă subspaţiul V_n scufundat în spaţiul K_m^* recurent este şi el recurent de vector φ_r, atunci din (1,13) rezultă:

$$\varphi_r \sum_p e_p\Omega_{p|ijkh} - \sum_p e_p\Omega_{p|ijkh,r} + 4\sum_p e_p\{\Omega_{p[i|r|}\Omega_{|p|j][k,h]} + \tag{1,19}$$

$$+ \Omega_{p[k|r|}\Omega_{|p|h][i,j]}\} - 4\sum_p e_p \sum_q e_q \{\mu_{qp[h}\Omega_{|q|k][j}\Omega_{p|i]r} + \mu_{qp[j}\Omega_{|q|i][h}\Omega_{|p|k]r}\} = 0$$

Reciproc, dacă pentru un subspaţiu V_n, tensorul secund fundamental verifică (1,19) atunci din (1,13) rezultă să subspaţiul este recurent de vector φ_r. Deci:

PROPOZIŢIA 1.3. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un subspaţiu V_n a unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu să fie recurent este ca tensorul secund fundamental să verifice relaţiile (1,19.)*

Pentru un subspaţiu V_n recurent, din (1,6) scrisă pentru subspaţiul V_n şi din (1,16) rezultă

$$\sum_p e_p(\varphi_r\Omega_{p|ijkh} + \varphi_k\Omega_{p|ijhr} + \varphi_h\Omega_{p|ijrk}) = 0 \tag{1,20}$$

Deci:

PROPOZIŢIA 1.4. *Într-un spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu tensorii $\Omega_{p|ijkh}$ din subspaţiul V_n recurent verifică (1, 20).*

Dacă subspaţiul V_n scufundat în spaţiul K_m^* recurent este simetric Cartan, atunci din (1,13) rezultă că între tensorul de curbură şi cel de al doilea tensor fundamental avem:

$$\varphi_r(R_{ijkh} - \sum_p e_p\Omega_{p|ijkh}) + \sum_p e_p\Omega_{p/ijkh,r} =$$

$$= 4\sum_p e_p\{\Omega_{p[i|r|}\Omega_{|p|j][k,h]} + \Omega_{p[k|r|}\Omega_{|p|h][i,j]}\} - \tag{1,21}$$

$$- 4\sum_p e_p \sum_q e_q\{\mu_{qp[h}\Omega_{|q|k][j}\,\Omega_{|p|i]r} + \mu_{qp[j}\Omega_{q|i][h}\Omega_{|p|k]r}\}$$

şi reciproc, dacă (1,21) are loc, din (1,13) rezultă că subspaţiul V_n este simetric Cartan. Deci:

PROPOZIŢIA 1.5. *O condiţie necesară şi suficientă ca un subspaţiu V_n a unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu să fie simetric Cartan este ca (1,21) să aibă loc.*

Observaţie. Un spaţiu simetric Cartan fiind şi Ricci simetric $R_{ij,r} = 0$, adică un spaţiu Ricci [8], rezultă că subspaţiile unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu ce verifică (1,21) sînt subspaţii A_n^0 introduse de G h. T h. G h e o r g h i u [4].

Din propoziţia 5 şi din (1,16) rezultă că pentru ca un subspaţiu V_n simetric Cartan să fie un subspaţiu K_m^* simetric, pe lîngă relaţiile (1,21) mai trebuie să aibă loc şi (1,20). Astfel, ultimele trei propoziţii ar putea fi sintetizate în:

PROPOZIŢIA 1.6. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un subspaţiu V_n a unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu să fie un spaţiu K_n^* recurent este ca (1, 19) să aibă loc, iar pentru ca să fie un spaţiu K_n^* simetric (1,20) şi (1,21) să aibă loc. În orice subspaţiu K_n^* a unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu are loc (1,20).*

Într-o lucrare anterioară [3] s-a arătat că în orice spaţiu K_n^* vectorul φ_r este soluţie a sistemului $A^i_{jkh}\,\varphi_i = 0$ şi verifică relaţiile $(R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_i = 0$. Din aceste rezultate şi din (1,17) şi (1,18) pentru subspaţiile K_n^* a unui spaţiu K_m^* recurent se deduce

$$\sum_p e_p(\Omega^i_{p|jkh} - \delta^i_k \varnothing_{p|jh} + \delta^i_h \varnothing_{p|jk})\varphi_i = 0 \tag{1,22}$$

şi

$$\sum_p e_p(\varnothing_p\, \delta^i_h - 2\,\varnothing^i_{p|h})\varphi_i = 0 \tag{1,23}$$

Deci:

PROPOZIŢIA 1.7. *Vectorul φ_i a unui subspaţiu K_n^* dintr-un spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu este soluţie a sistemului (1,22) şi satisface (1,23).*

Un subspaţiu a unui spaţiu riemannian este total geodezic [1], dacă $\Omega_{p|ij} = 0$. Din (1,13) pentru subspaţiile total geodezice ale unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă neortogonal la subspaţiu se obţine rezultatul lui M. P r î h a n o v i c h [7] şi T. M y a z a w a [5] potrivit căruia subspaţiu V_n este recurent.

Se consideră în continuare cazul în care vectorul de recurenţă al spaţiului K_m^* este ortogonal la subspaţiul V_n. În acest caz din (1,11) rezultă $\varphi_r = 0$. Înmulţind (1,6) cu $y^\alpha{}_{,i}$, $y^\beta{}_{,j}$, $y^\gamma{}_{,k}$, $y^\delta{}_{,h}$ şi însumînd în raport cu α, β, γ, δ, ţinînd seama că $\varphi_\alpha y^\alpha_r = 0$ rezultă

$$\varphi_\varepsilon \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_i y^\beta_j y^\gamma_k y^\delta_h = 0 \tag{1,24}$$

din care dacă se ţine seama de prima relaţie (1,10) se obţine:

$$\varphi_\rho(R_{ijkh} - \sum_p e_p\,\Omega_{p|ijkh}) = 0.$$

Deoarece $\varphi_\rho \neq 0$ rezultă

$$R_{ijkh} = \sum_p e_p \Omega_{p|ijkh} \tag{1,25}$$

Deci:

PROPOZIŢIA 1.8. *Tensorul de curbură a unui subspaţiu V_n dintr-un spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă ortogonal la subspaţiu este dat de relaţiile (1,25) unde $\Omega_{p|ijkh}$ sînt definiţi de (1,14).*

Observaţie. Pentru tensorul secund fundamental al unui subspaţiu, dintr-un spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă ortogonal la subspaţiu, dintr-o relaţie analogă cu (1,24) şi a doua relaţie (1,10) se deduce:

$$\Omega_{p|ij.k} - \Omega_{p|ik,j} = \sum_q e_q(\mu_{qp|k}\Omega_{q|ij} - \mu_{qp|j}\Omega_{q|ik})$$

Din (1,25) rezultă că subspaţiul V_n în acest caz va fi în acelaşi timp simetric sau recurent, după cum tensorul sumă a celor $m - n$ tensori $\Omega_{p|ijkh}$ definiţi de (1,14) este simetric sau recurent. Deci:

PROPOZIŢIA 1.9. *Subspaţiile unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă ortogonal la subspaţiu sînt simetrice Cartan dacă şi numai dacă tensorul sumă a celor $m - n$ tensori $\Omega_{p|ikjh}$ este covariant constant, recurent de vector ν_r dacă şi numai dacă tensorul sumă a celor $m - n$ tensori $\Omega_{p|ijkh}$ este recurent de vector ν_r şi subspaţiu K_n^* cu vector ν_r dacă şi numai dacă tensorul sumă a celor $m - n$ tensori $\Omega_{p|ijkh}$ este recurent de vector ν_r sau covariant constant şi verifică relaţia*

$$\nu_r \sum_p e_p\, \Omega_{p|ijkh} + \nu_k \sum_p e_p\, \Omega_{p|ijhr} + \nu_h \sum_p e_p\, \Omega_{p|ijrk} = 0.$$

Observaţie. Din relaţia (1,25) rezultă că în acest caz toate proprietăţile unui subspaţiu exprimate cu ajutorul tensorului die curbură se pot exprima cu ajutorul tensorului sumă a celor $m - n$ tensori $\Omega_{p|ijkh}$ şi reciproc.

În particular, dacă subspaţiul este total geodezic din $\Omega_{p|ij} = 0$ rezultă $R_{ijkh} = 0$ şi subspaţiul este euclidian. Deci:

PROPOZIŢIA 1.10. *Subspaţiile total geodezice ale unui spaţiu K_m^* recurent cu vector de recurenţă ortogonal la subspaţiu sînt spaţii euclidiene.*

(Intrat în redacţie la 20 octombrie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton, 1949.
2. P. Enghiş, *Sur les espaces V_n récurrents et Ricci récurrents*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math. Mech., f. 1, 1972, 3–6.
3. P. Enghiş, *Sur les espaces K_n^* de Walker*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 1, 1977, 14–16.
4. Gh. Th. Gheorghiu, *O clasă particulară de spaţii cu conexiune afină*, Studii şi cercetări matematice, 8, **21**, 1969, 1157–1168.
5. T. Myazawa and Goro Chuman, *On certain subspaces of Riemannian recurrent spaces*, Tensor N. S. Nr. 2, 1972, 253–260.
6. E. M. Paterson, *Some theorems on Ricci-recurrent spaces*, Journ. London. Math. Soc. **27**, 1952, 287–295.
7. M. Prîvanovih, *Neke teoreme o podirastarima sa nedrejenim liniama krivine recurentnîh Riemannovîh prostora*, Math. Vesnic, 1, **16**, 1964, 81–87.

8. I. A. Schouten, *Ricci Calculus*, Springer Berlin, 1954.
9. A. G. Walker, *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Proc. London. Math. Soc., 2, **52**, 1950, 36—64.
10. G. E. Watherbern, *An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus*, Cambridge, 1957.

SOUS-ESPACES DANS UN ESPACE K_m^* (I)

Sous-espaces dans un espace K_m^* récurrent

(Résumé)

Dans ce travail on étudie les sous-espaces V_n d'un espace K_m^* récurrent.

Dans le cas où le vecteur de récurrence est-non-orthogonal au sous-espace, on donne les relations (1,13), (1, 16), (1, 17), (1, 18) qui sont vérifiées par les sous-espaces V_n, par le tenseur de courbure, par le tenseur de Ricci, par les tenseurs $\Omega_{p|ijkh}$ et par la courbure scalaire. On donne ensuite, par les relations (1, 19), (1, 20), (1, 21), les conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-espace V_n soit K_m^*, ainsi que les relations (1, 22) et (1, 23) qui sont vérifiées par le vecteur φ_i.

Dans le cas où le vecteur de récurrence est orthogonal au sous-espace, on donne l'expression du tenseur de courbure, d'où on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-espace soit K_n^*.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

METODE CONVERGENTE DE ORDINUL K ÎN SPAŢII SUPERMETRICE

S. GROZE şi B. JANKÓ

1. Considerăm ecuaţia operaţională

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde P este un operator neliniar, definit într-un domeniu S a spaţiului complet supermetric X [1] şi cu valori în spaţiul de acelaşi tip Y, θ fiind elementul nul al spaţiului Y. Presupunem că operatorul P admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul k inclusiv.

Pentru determinarea soluţiei ecuaţiei (1) se foloseşte o metodă iterativă de forma

$$x_{n+1} = A(x_n),\ n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

x_0 fiind o aproximaţie iniţială, iar A un anumit operator definit în spaţiul complet supermetric X şi cu valori în acelaşi spaţiu, operator ce va fi ales în mod convenabil şi care admite derivate de timp Fréchet pînă la ordinul $k - 1$ inclusiv. Presupunem de asemenea că dacă x^* este o soluţie a ecuaţiei (1), avem

$$x^* = A(x^*).$$

Definim ordinul de convergenţă al metodei (2) folosind ideea dată de E. Schröder [2] privitoare la funcţiile de variabilă reală şi extinsă de către B. Jankó [3] asupra operatorilor definiţi în spaţii Banach.

DEFINIŢIA I. Metoda de iteraţie (2) se numeşte convergentă de ordinul k dacă sînt îndeplinite condiţiile

a) $\rho_X(x_n - x^*) \to 0$ pentru $n \to \infty$

b) $A^{(i)}(x^*) = 0_i$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$

unde 0_i este operatorul nul i-liniar.

Problema care se pune în continuare este de a substitui, în mod convenabil, operatorul P din (1) cu un altul, A, definit prin

$$A(x) \equiv F[P(x)] \tag{3}$$

astfel încît să fie îndeplinite condiţiile:

1° relaţia (2) să fie convergentă de ordinul k în sensul definiţiei I.

2° ecuaţiile (1) şi $x - A(x) = \theta'$ să fie echivalente.

Alegerea convenabilă a lui A ne va permite să stabilim diferite clase de metode iterative.

2. Să considerăm operatorul A definit prin

$$A(x) \equiv x + \alpha_x P(x) \tag{4}$$

unde α este un operator liniar pentru x fixat. Considerînd operatorul

$$A^*(x) \equiv x + \alpha_x{}^* P(x)$$

şi punînd condiţia

$$A^{*\prime}(x^*) = \theta_1$$

rezultă că pentru x^* operatorul $\alpha_x{}^*$ trebuie să fie de forma

$$\alpha_{x^*} \equiv -[P'(x^*)]^{-1} = -\Gamma(x^*)$$

dacă operatorul $\Gamma(x^*)$ există.

Forma lui α_{x^*} nu se modifică dacă se ia

$$\alpha_x = -[P'(x) + \beta_x P(x)]^{-1} + \gamma_x P(x) \tag{6}$$

oricare ar fi x, şi dacă β_x şi γ_x sînt operatori biliniari pentru x fixat care urmează să fie precizaţi.

Substituind (6) în (4) obţinem o clasă de metode iterative dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n) + \beta_{x_n} P(x_n)]^{-1} P(x_n) + \gamma_{x_n} P^2(x_n). \tag{7}$$

Particularizînd operatori β_x şi γ_x obţinem diferite metode iterative clasice. Astfel, dacă considerăm $\beta_x \equiv \gamma_x = 0_2$, atunci (7) devine

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n) \tag{8}$$

regăsind astfel metoda convergentă de ordinul doi, a lui Newton-Kantorovici.

Deoarece β_x şi γ_x pot fi aleşi în mod convenabil, rezultă că (8) nu este singura metodă convergentă de ordinul doi.

Dacă se consideră

$$A(x) \equiv x - [P'(x) + \beta_x P(x)]^{-1} P(x) + \gamma_x P^2(x) \tag{9}$$

şi punem condiţia $A^{*\prime\prime}(x^*) = O_2$, se găseşte o relaţie între operatorii biliniari β_x şi γ_x:

$$\begin{gathered} \Gamma(x^*) P''(x^*) n_1 n_2 + 2\Gamma(x^*) \beta_x [P'(x^*) n_1] n_2 + \\ 2\gamma_x [P'(x^*) n_1][P'(x^*) n_2] = O_2 \end{gathered} \tag{10.}$$

operatorul biliniar fiind luat în punctele n_1 şi n_2

Dacă în (10) se alege $\gamma_x{}^* \equiv 0_2$

$$\beta_x n_1 n_2 \equiv -\frac{1}{2} P''(x^*)[\Gamma(x^*) n_1] n_2.$$

Considerînd expresia lui β pentru orice $x \in S$, substituind această expresie în (9) regăsim metoda generalizată a iperbolelor tangente

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - \frac{1}{2}\Gamma(x_n) P''(x_n) \Gamma(x_n) P(x_n)\right]^{-1} \Gamma(x_n) P(x_n) \tag{11}$$

Dacă însă luăm $\beta_{x^*} = O_2$, obţinem

$$\gamma_{x^*} n_1 n_2 \equiv -\frac{1}{2}\Gamma(x^*)P''(x^*)[\Gamma(x^*)n_1]\Gamma(x^*)n_2]$$

care, considerată pentru orice $x \in S$ şi substituită în (9), ne conduce la algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)P(x_n) - \frac{1}{2}\Gamma(x_n)P''(x_n)[\Gamma(x_n)P(x_n)]^2 \tag{12}$$

denumit ,,metoda generalizată a parabolelor tangente".

Diverse particularizări ale operatorilor biliniari β_x şi γ_x ne vor conduce la diferite metode iterative convergente de ordinul trei.

Considerînd alte expresii pentru operatorul A decît cea dată de (9), putem obţine alte clase de metode convergente de diferite ordine. Astfel, dacă considerăm pentru A expresia

$$\tilde{A}(x) \equiv x - [P'(x) + \beta_x P(x)]^{-1}(P(x) + \gamma_x P^2(x)) \tag{9'}$$

şi dacă impunem condiţia $\tilde{A}^{*\prime}(x^*) = O_2$, se obţine următoarea relaţie între operatorii biliniari β_x şi γ_x pentru $x = x^*$

$$P''(x^*)n_1n_2 + 2\beta_{x^*}[P'(x^*)n_1]n_2 = 2\gamma_{x^*}[P'(x^*)n_1][P'(x^*)n_2]. \tag{10'}$$

Particularizarea operatorilor biliniari β_x şi γ_x ne conduce la diferite clase noi de metode iterative de forma

$$x_{n+1} = \tilde{A}(x_n).$$

Dacă se alege, de exemplu, $\beta_{x^*} n_1 n_2 = -P''(x^*)[\Gamma(x^*)n_1]n_2$, din (10') deducem $\gamma_{x^*} n_1 n_2 \equiv -\frac{1}{2} P''(x^*)[\Gamma(x^*)n_1][\Gamma(x^*)n_2]$.

Luînd expresiile lui β_x şi γ_x pentru orice $x \in S$, atunci se regăseşte metoda lui L. V. Vohandu [4].

Menţionăm că din această clasă de metode iterative fac parte şi metodele lui Kaašik [5].

Pentru a obţine metode convergente de ordinul $k > 3$, considerăm operatorul generator sub forma [3]

$$\begin{aligned} A(x) \equiv x - [P'(x) + \beta_1 P(x) + \ldots + \beta_{i+1}P^{i+1}(x)]^{-1}P(x) + \\ + \alpha_1 P^2(x) + \ldots + \alpha_j P^{j+1}(x) \end{aligned} \tag{13}$$

unde operatorii multiliniari β_s şi α_k, $s = 1, \ldots, i+1$, $k = 1, \ldots, j$ pot fi determinaţi din condiţiile

$$A^{*(p)}(x^*) = 0_p, \; p = 1, \ldots, k-1.$$

Aceste clase de metode iterative reprezentate prin relaţiile

$$x_{n+1} = A(x_n), \; \tilde{x}_{n+1} = \tilde{A}(\tilde{x}_n)$$

nu epuizează toate metodele convergente de ordinul k. Astfel, dacă luăm ca operator generator operatorul

$$\bar{A}(x) \equiv x - [P'(x + \alpha_x P(x))]^{-1} P(x) \tag{14}$$

calculînd $\bar{A}^{*''}(x^*)$, avem

$$\bar{A}^{*''}(x^*) \equiv P''(x^*)[I + 2\alpha_{x^*} P'(x^*) n_1] n_2 \tag{15}$$

relaţie care, egalată cu operatorul nul biliniar O_2, ne permite să găsim

$$\alpha_{x^*} = -\frac{1}{2}\Gamma(x^*). \tag{16}$$

Considerînd operatorul α pentru un x oarecare, se regăseşte metoda iterativă dată de B. Jankó [3] pentru spaţiul cu metrică obişnuită.

Observaţii. 1° $\bar{A}'(x)$ se anulează oricare ar fi α_u

2° Dacă în (13) se ia $\alpha_x \equiv 0_2$ regăsim metoda lui Newton-Kantorovici.

3. În continuare dăm condiţii de convergenţă comune pentru clasele de metode prezentate mai sus. Demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Dacă pentru aproximaţia iniţială x_0 şi prima aproximaţie x_1 calculată cu ajutorul procedeului iterativ (2) avem îndeplinite condiţiile*

1° $\rho_X(A(x_1) - A(x_0)) \leq \alpha\rho_X^k(x_1 - x_0)$

2° $\alpha\rho_X^{k-1}(x_1 - x_0) < 1$

pentru α şi k numere reale, iar $k > 1$ şi $0 < \alpha < 1$, atunci ecuaţia $x = A(x)$ are cel puţin o soluţie x^*, limita şirului (x_n) dat de algoritmul (2), ordinul de convergenţă precum şi delimitarea erorii fiind caracterizate de inegalitatea

$$\rho_X(x_n - x^*) \leq \alpha^{\frac{1}{1-k}} H_k [\alpha^{\frac{1}{1-k}} \rho_X(x_1 - x_0)]^{k^n} \tag{17}$$

unde $H_k = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha\rho_X^{k-1}(x_1 - x_0)]^{k^i}$.

Demonstraţie. Vom arăta pentru început că şirul (x_n) dat de algoritmul (2) este fundamental. Într-adevăr, din ipotezele teoremei se deduce

$$\rho_X(x_2 - x_1) = \rho_X(A(x_1) - A(x_0)) \leq \alpha\rho_X^k(x_1 - x_0)$$

$$\cdots$$

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leq \alpha\rho_X^k(x_n - x_{n-1}) \leq \alpha^{1+k+\cdots+k^{n-1}} \rho_X^{k^n}(x_1 - x_0) = \alpha^{\frac{k^n-1}{k-1}} \rho_X^{k^n}(x_1 - x_0)$$

$$\cdots$$

Pentru un întreg pozitiv oarecare avem atunci inegalitatea

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leq \rho_X(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + \rho_X(x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots +$$

$$+ \rho_X(x_{n+2} - x_{n+1}) + \rho_X(x_{n+1} - x_n) \leq \alpha^{-\frac{1}{k-1}} \{[\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_X(x_1 - x_0)]^{k^n}$$

$$[1 + (\alpha\rho_X^{k-1}(x_1 - x_0))^{k^n} + \cdots + (\alpha\rho_X^{k-1}(x_1 - x_0))^{k^{n+p-2}}\}.$$

Notînd $H_k = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha\rho_X^{k-1}(x_1 - x_0)]^{k^i}$, avem

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \alpha^{-\frac{1}{k-1}} H_k [\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_X(x_1 - x_0)]^{k^n}. \tag{18}$$

Spaţiul fiind presupus complet rezultă existenţa unui element $x^* \in X$ astfel ca

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Din (18), făcînd $p \to \infty$, se obţine

$$\rho_X(x_n - x^*) \leq \alpha^{-\frac{1}{k-1}} H_k [\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_X(x_1 - x_0)]^{k^n}$$

regăsind astfel relaţia (17) ce caracterizează rapiditatea convergenţei.

Pentru a arăta că x^* este o soluţie a ecuaţiei operaţionale $x = A(x)$ se observă că

$$\begin{aligned}\rho_X(x^* - A(x^*)) &\leqslant \rho_X(x^* - x_n) + \rho_X(x_n - A(x^*)) \\ &\leqslant \rho_X(x^* - x_n) + \rho_X(A(x_{n-1}) - A(x^*)) \\ &\leqslant \rho_X(x^* - x_n) + \alpha\rho_X^k(x_{n-1} - x^*) < \varepsilon\end{aligned}$$

pentru n destul de mare. Rezultă $\rho_X(x^* - A(x^*)) = 0$ deci $x^* = A(x^*)$.

Observaţii. 1. Dacă condiţia 1° este presupusă adevărată pentru orice cuplu de elemente x, y ale unui şir din spaţiul X, atunci se demonstrează şi unicitatea soluţiei.

Într-adevăr, presupunînd existenţa a două soluţii $x^* \neq y^*$, avem

$$\rho_X(x^* - y^*) = \rho_X(A(x^*) - A(y^*)) \leqslant \alpha\rho_X^k(x^* - y^*)$$

de unde rezultă

$$\alpha\rho_X^{k-1}(x^* - y^*) \geqslant 1$$

contrar condiţiei 2°. Deci x^* este unică.

2. Teorema demonstrată de noi este mai generală decît cea dată de L. Collatz [1] deoarece nu pretindem ca spaţiul să fie L-supermetric şi nici nu presupunem existenţa derivatelor de tip Fréchet de ordin superior.

3. În cazul spaţiului metric o teoremă analogă a fost demonstrată de către B. Jankó şi V. Pop [6].

(Intrat în redacţie la 11 noiembrie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, 1965.
2. E. Schröder, *Über unendlichviele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math, Analen, II, 1970, 317–369.
3. B. Jankó, *Rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1969.
4. L. V. Vohandu, *Ob iterationnîh metodah pri reșenii uravnenii*. Tarusski Gosud. Univ. 1955 (Avtoreferat dissertații).
5. U. Kaasik, *Ob odnom klasse iteraționtîh proțesov dlia priblijenovo reșenia operatinîh uravnenia*. A.D.N., **112**, 4, 1957, 579–582.
6. B. Jankó, V. Pop, *Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale definite în spații metrice cu ajutorul metodelor convergente de ordinul K*, Stud. și Cerc. Matem, 8, **19**, 1967, 1156–1158.

CONVERGENT METHODS OF K ORDER IN SUPERMETRIC SPACES

(Summary)

Using the definition of the order of the convergence given in [3] the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the equation (1) is studied, generalizing the result of [6] by extension of the space.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

PRODUITS TENSORIELS DE n-MONOÏDES

MARIA S. POP

La notion de n-groupe, plus précisément le cas $n > 2$, est dû à Dörnte qui en donna la définition en 1928. Le sujet, ainsi que d'autres généralisations pareilles, fait l'objet d'étude d'autres ouvrages publiés plus tard, parmi lesquels : [2], [5], [6], et [7]. Voici d'abord quelques notions que nous utiliserons dans notre étude.

On appelle n-monoïde, une algèbre universelle munie d'une seule loi de composition n-aire o : $A^n \to A$, supposée associative i.e. vérifiant la condition : pour tout $a_i \in A$; $i=1, 2, \ldots, 2n-1$ et $k=1, 2, \ldots, n$ on a[1] :

$$((a_1, \ldots, a_n)_0, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})_0 = (a_1, \ldots, a_{k-1}, (a_k, \ldots, a_{k+n-1})_0, a_{k+n}, \ldots, a_{2n-1})_0$$

Un n-monoïde $(A, \circ)$ est dit commutatif si pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et tout $a_i \in A$; $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$(a_1, \ldots, a_n)_0 = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})_0$$

Le n-monoïde $(A, \circ)$ s'appelle un n-groupe si pour tout i, $i = 2, \ldots, n-1$ et tout $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, a \in A$, l'équation

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)_0 = a$$

possède une solution unique dans A.

Soit $(A, \circ)$ un n-groupe, où $n \geqslant 3$, et $a \in A$. La solution de l'équation $(a, \ldots, a, x)_0 = a$ s'appelle la transversale de a et se note $\bar{a}$. On peut vérfier sans difficulté que $\bar{a}$ peut occuper n'importe quelle place dans l'équation de définition.

On dit que $e \in A$ est un élément unité du n-groupe $(A, \circ)$ si pour tout élément a de A et quelque soit sa position dans le „produit" on a : $(e, \ldots, e, a, e, \ldots, e)_0 = a$. À la différence de 2-groupes, il existe des n-groupes ne possédant aucun élément unité ou qui en possèdent plusieurs.

Le produit tensoriel des n-groupes abéliens a été introduit par S i o s s o n [6]. Par la suite, nous donnons la définition du produit tensoriel des n-monoïdes, ainsi que quelques propriétés liées à cette notion.

1. **Définitions. Existence.** Soit $(A_i, o_i)_{i \in I}$ une famille de n-monoïdes et munissons le produit $\prod_{i \in J} A_i$ de cette famille, de la loi n-aire „o", par :

$$\forall a_{ij} \in A_i, \ i \in I \text{ et } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$((a_{i1})_{i \in I}, (a_{i2})_{i \in I}, \ldots, (a_{i2})_{i \in I})_0 = ((a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})_{0i})_{i \in I}$$

---

[1] Lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on écrira, plus simplement $(a_1, \ldots, a_n)$ au lieu de $(a_1, \ldots, a_n)_0 \in A$.

Le couple $(\prod_{i\in I} A_i,\ o)$ est, evidemment, un n-monoïde.

Soit C un n-monoïde quelconque.

DÉFINITION 1.1. L'application $s:\prod_{i\in I} A_i \to C$ est dite I-linéaire, si pour tout $i_0 \in I$ et tout $a_i \in A_i$, $i \neq i_0$, l'application

$$s_{i_0}: A_{i_0} \to C \text{ définie par:}$$

$$s_{i_0}(a_{i_0}) = s((a_i)_{i\in I})$$

est un homomorphisme de monoïdes.

Par exemple, pour l'ensemble $I = \{1, 2\}$ et les n-monoïdes A, B et C, l'application $s: A \times B \to C$ est bilinéaire si $a, a_i \in A$; $b, b_i \in B$; $i = 1, 2, \ldots, n$ on a:

$$s((a_1, \ldots, a_n), b) = (s(a_1, b), \ldots, s(a_n, b))$$
$$s(a, (b_1, \ldots, b_n)) = (s(a, b_1), \ldots, s(a, b_n))$$

PROPOSITION 1.2. *Si $s: A \times B \to C$ est une application bilinéaire de n-monoïdes, pour tout $a \in A$, $b \in B$ et $m \in \mathbf{N}$, on a: $s(a^{[m]}, b) = s^{[m]}(a, b) = s(a, b^{[m]})$, où $a^{[m]}$ dénote la puissance m-ème de a, dans le sens de* P o s t [5].

Démonstration par récurrence, en utilisant la définition de la puissance dans un n-monoïde.

PROPOSITION 1.3. *Soient A, B, C des n-groupes et $s: A \times B \to C$ une application bilinéaire; pour tout $m \in \mathbf{Z}$ on a:*
$s(a^{[m]}, b) = s^{[m]}(a, b) = s(a, b^{[m]})$

Pour $m \geqslant 0$ l'assertion résulte de la proposition 1.2. Pour $m < 0$, on rappelle que $a^{[m]}$ est défini comme solution de l'équation

$$(x, a, \ldots, a) = a$$

le membre gauche de l'égalité ayant $m(n-1)+1$ facteurs [5].
On a donc, $a^{[-1]} = \bar{a}$, et on démontre par récurrence suivant $-m$ que $a^{[m]}$ est la solution de l'équation

$$(x, a, \ldots, a, a^{[-m-1]}) = a$$

Ensuite, puisque s est bilinéaire, et en vertu de la proposition 1.2, on a:

$$s(a, b) = s(a^{[m]}, a, \ldots, a, a^{[-1m-1]}), b) =$$
$$= (s(a^{[m]}, b), s(a, b), \ldots, s(a, b), s(a^{[-m-1]}, b)) =$$
$$= (s(a^{[m]}, b), s(a, b), \ldots, s(a, b), s^{[-m-1]}(a, b)) =$$

donc, $s(a^{[m]}, b)$ est la solution de l'équation

$$(x, s(a, b), \ldots, s(a, b), s^{[-m-1]}(a, b)) = s(a, b).$$

D'autre part, C étant un n-groupe, on a:

$$s(a^{[m]}, b) = s^{[m]}(a, b) \text{ pour } m < 0$$

D'une manière analogue, on montre que

$$s(a, b^{[m]}) = s^{[m]}(a, b).$$

DÉFINITION 1.4. Soient $(A_i, o_i)_{i\in I}$ une famille de n-monoïdes, T un n-monoïde, et $t:\prod\limits_{i\in I} A_i \to T$ une application I — linéaire. Le couple (T, t) — ou parfois le n-monoïde T tout seul — s'appelle produit tensoriel de la famille $(A_i, o_i)_{i\in I}$, si pour toute application I-linéaire $s:\prod\limits_{i\in I} A_i \to C$ (C étant un n-monoïde quelconque) il existe un homomorphisme unique $u: T\to C$ tel que $s = u\circ t$.

On utilise les notations usuelles; $T = \bigotimes\limits_{i\in I} A_i$, $t((a_i)_{i\in I}) = \bigotimes\limits_{i\in I} a_i$

THÉORÈME 1.5. *Le produit tensoriel d'une famille de n-monoïdes $(A_i, o_i)_{i\in I}$ existe et il est unique à un isomorphisme près.*

L'unicité résulte de la définition du produit tensoriel en tant que solution du problème universel.

L'existence sera démontrée par une construction analogue à celle donnée pour les bimonoïdes (P. A. Grillet [3]). D'ailleurs, on peut utiliser cette méthode pour prouver l'existence des produits tensoriels pour toute variété.

Soient F un n-monoïde libre ayant $\prod\limits_{i\in I} A_i$ pour système de générateurs et l'inclusion $h:\prod\limits_{i\in I} A_i \to F$.

Désignons ensuite par $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples de la forme $(h((a_i)_{i\in I}),(h((a_{i1})_{i\in I}), \ldots, h((a_{in})_{i\in I}))_0)$ où

$$a_{ij} \in A_i;\ i \in I;\ j = 1, 2, \ldots, n \text{ et}$$

$$a_i = \begin{cases} (a_{i_0 1}, \ldots, a_{i_0 n})\, o_{i_0} & \text{pour } i = i_0 \\ a_{i1} = \ldots = a_{in} & \text{pour } i \neq i_0 \end{cases}$$

Si θ désigne la congruence minimale sur F contenant $\mathcal{F}$, $g: F\to F/\theta$ et $t = g\circ h$, nous montrerons que le couple $(F/\theta, t)$ est le produit tensoriel de la famille de n-monoïdes, $(A_i)_{i\in I}$

Par la définition de la congruence θ, il résulte que t est I-linéaire. Soit $s:\prod\limits_{i\in I} A_i \to C$ une application I-linéaire, où C est un n-monoïde quelconque. Conformément à la définition d'un n-monoïde libre F, il existe un homomorphisme unique $f: F\to C$ tel que $s = f\circ h$. Cela dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & F \arrow[dl, dashed, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'application s étant I-linéaire on a $\ker g = \theta \subseteq \ker f$ ce qui implique l'existence d'un homomorphisme unique $u: F/\theta \to C$ tel que $f = u\circ g$. Mais, $s = f\circ h = (u\circ g)\circ h = u\circ(g\circ h) = u\circ h) = u\circ t$, donc $s =$

$= u \circ t$. S'il existait un autre homomorphisme v tel que $s = v \circ t$, on aurait $s = v \circ (g \circ h) = (v \circ g) \circ h$; d'autre part, vu l'unicité de f tel que $s = f \circ h$ on obtient $f = v \circ g$; On en déduit, $v = u$.

Remarques. 1. Il résulte de la démonstration que $F/\theta = \bigotimes_{i \in I} A_i$ est engendré par les éléments $\bigotimes_{i \in I} a_i$, où $a_i \in A_i$.

2. Tout élément $x \in \bigotimes_{i \in I} A_i$ peut s'écrire sous la forme

$$x = (t^{[p_1]}(a^{i1})_{i \in I}), \dots, t^{[p_m]}((a_{im}))_{i \in I})) \text{ où } p_1, \dots, p_m \in N,$$

$$m \equiv 1 \pmod{n-1}\,;\ a_{ij} \in A_i\,;\ i \in I \text{ et } j = 1, 2, \dots, m.$$

Exemple 1.6. Soient A un n-monoïde quelconque et $\{e\}$ le n-monoïde réduit à un seul élément e. On a :

$A \otimes \{e\} \cong E(A)$, où $E(A)$ désigne l'image homomorphe maximale idempotente de A.

$A \otimes \{e\}$ est engendré par tous les éléments $a \otimes e$ où $a \in A$. L'élément $a \otimes e$ est idempotent car $(a \otimes e)^{[1]} = a \otimes e^{[1]} = a \otimes e$. On a également: Pour tout $a_i \in A$ $i = 1, 2, \dots, n$;

$$(a_1 \otimes e, \dots, a_n \otimes e)^{[1]} = ((a_1, \dots, a_n) \otimes e)^{[1]} = (a_1, \dots, a_n) \otimes e^{[1]} =$$

$$= (a_1, \dots, a_n) \otimes e = (a_1 \otimes e, \dots, a_n \otimes e)$$

donc, tous les éléments de $A \otimes \{e\}$ sont indempotents.

2. Produits tensoriels de n-monoïdes cycliques.

DÉFINITION 2.1. Un n-monoïde A est dit normal si pour tout $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $m \in \mathbf{N}$ on a :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{[m]} = (a_1^{[m]}, a_2^{[m]}, \dots, a_n^{[m]})$$

Tout n-monoïde commutatif est normal.

La démonstration se fait par récurrence en utilisant la commutativité et l'associativité de la loi n-aire, ainsi que la définition de la puissance même dans le sens de Post [5].

Soit $\langle x \rangle$ un n-monoïde cyclique infini (voir [7]), donc: $\langle x \rangle = \{x, x^{[1]}, \dots, x^{[m]}, \dots\}$ et étudions le produit tensoriel de $\langle x \rangle$ par un n-monoïde quelconque A. Soit θ_N la congruence sur A contenant tous les couples de la forme

$$((a_1, \dots, a_n)^{[m]}, (a_1^{[m]}, \dots, a_n^{[m]}))\,;\ m \in \mathbf{N}$$

Cette congruence définit le n-monoïde quotient A/θ_N noté $N(A)$ lequel n'est autre que l'image homomorphe maximale normale de A.

PROPOSITION 2.2. *Si A est un n-monoïde et $\langle x \rangle$ le n-monoïde cyclique infini engendré par x, on a*

$$A \otimes \langle x \rangle \cong N(A)$$

Démonstration. Soient $f: A \to N(A)$ l'homomorphisme canonique et $t: A \times \langle x \rangle \to N(A)$ définie par : $t(a, x^{[m]}) = f(a^{[m]})$ pour tout $a \in A$.

L'application t étant bilinéaire pour tout $a_i \in A$ $i = 1, \ldots, n$ et m entier positif, on a :

$$t((a_1, \ldots, a_n), x^{[m]}) = f((a_1, \ldots, a_n)^{[m]}) = (f((a_1, \ldots, a_n)))^{[m]} =$$

$$= (f(a_1), \ldots, f(a_n))^{[m]} = (f^{[m]}(a_1), \ldots, f^{[m]}(a_n)) = (f(a_1^{[m]}), \ldots, f(a_n^{[m]})) =$$

$$= (t(a_1, x^{[m]}), \ldots, t(a_n, x^{[m]}))$$

et

$$t(a, (x^{[m_1]}, \ldots, x^{[m_n]})) = t(a, x^{[m_1 + \cdots + m_n + 1]}) = f(a^{[m_1 + \cdots + m_n + 1]}) =$$

$$= f((a_m^{[m_1]}, \ldots, a^{[m_n]})) = (f(a^{[m_1]}), \ldots, f(a^{[m_n]})) =$$

$$= (t(a, x^{[m_1]}), \ldots, t(a, x^{[m_n]}))$$

Soient maintenent, C un n-monoïde quelconque, $s: A x \langle x \rangle \to C$ une application bilinéaire, et $g: A \to C$ l'application définie par : $g(a) = s(a, x)$ pour tout $a \in A$; g est un homomorphisme car :

$$g((a_1, \ldots, a_n)) = s((a_1, \ldots, a_n), x) = (s(a_1, x), \ldots, s(a_n, x)) =$$

$$= (g(a_1), \ldots, g(a_n))$$

Im g est un n-sous-monoïde normal de C car, en vertu de la proposition 1.2, on a, pour tout $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$:

$$(g(a_1), \ldots, g(a_n))^{[m]} = (g(a_1, \ldots, a_n))^{[m]} = g((a_1, \ldots, a_n)^{[m]}) =$$

$$= s((a_1, \ldots, a_n)^{[m]}, x) = s((a_1, \ldots, a_n), x^{[m]}) =$$

$$= (s(a_1, x^{[m]}), \ldots, s(a_n, x^{[m]})) = (g^{[m]}(a_1), \ldots, g^{[m]}(a_n))$$

Comme f est l'homomorphisme canonique de A sur $N(A)$ et $g: A \to C$ un homomorphisme de n-monoïdes, il existe un homomorphisme unique $u: N(A) \to C$ tel que $g = u \circ f$ et pour tout $a \in A$, l'on a

$$s(a, x^{[m]}) = s(a^{[m]}, x) = g(a^{[m]}) = u(f(a^{[m]})) = u(t(a, x^{[m]}))$$

c'est-à-dire $s = u \circ t$.

L'unicité de u est immédiate car s'il existe v tel que $s = v \circ t$ on obtient: $g(a) = s(a, x) = v(t(a, x)) = v(f(a))$ pour tout $a \in A$; donc $g = v \circ t$ et par conséquent, $v = u$.

PROPOSITION 2.3. *Si A est un n-monoïde quelconque et B un n-monoïde cyclique infini du type (p, q), le produit $A \otimes B$ est l'image homomorphe maximale normale de A, vérifiant la relation $c^{[p]} = c^{[q]}$ pour tout $c \in N(A)$.*
La démonstration est analogue à celle donnée pour la proposition 2.2.

De plus, puisque $B = \{x, x^{[1]}, \ldots, x^{[p]}, \ldots, x^{[q-1]}\}$ et $x^{[q]} = x^{[p]}$, en conservant les notations précedentes, on peut remarquer que l'on a $f^{[p]}(a) = f^{[q]}(a)$ pour tout $a \in A$. En effet :

$$f^{[p]}(a) = f(a^{[p]}) = t(a, x^{[p]}) = t(a, x^{[q]}) = f(a^{[q]}) = f^{[q]}(a)$$

De même, dans le n-monoïde normal Img este vérifiée une relation analogue car :

$$g^{[p]}(a) = g(a) = s(a, x^{[p]}) = s(a, x^{[p]}) = s(a, x^{[p]}) = s(a^{[q]}, x) =$$

$$= g(a^{[q]}) = g^{[q]}(a), \text{ ce qui achéve la démonstration.}$$

COROLLAIRE 2.4. *Si A est un n-monoïde cyclique fini du type (p_1, q_1) et B un n-monoïde cyclique fini du type (p_2, q_2), $A \otimes B$ est un n-monoïde cyclique fini du type (p, q) où $p = inf(p_1, p_2)$; $q = p + (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. (Ici, $(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ désigne le plus grand commun diviseur des nombres $q_1 - p_1$ et $q_2 - p_2$).*

3. **Produits tensoriels de n-groupes.** THÉORÈME 3.1. *Si A et B sont des n-groupes, il en est de même de leur produit tensoriel $A \otimes B$.*

Demonstration. Remarquons d'abord que tout n-groupe peut être regardé comme une algèbre universelle $(G, o, -)$ munie de deux lois :

1. La loi binaire „o" — associative
2. La loi unaire „$-$" faisant correspondre à chaque élément $a \in G$ sa transversale $\bar{a} \in G$ telle que les relations suivantes [2] sont vérifiées :

$$(\bar{a}, a, \ldots, a, x)_0 = (x, a, \ldots, a, \bar{a})_0 = x$$

$$(a, \bar{a}, a, \ldots, a, x)_0 = (x, a, \ldots, \bar{a}, a)_0 = x$$

Par définition de $A \otimes B$ comme produit de n-monoïdes il résulte que celui-ci est le n-monoïde engendré par les éléments $a \otimes b$ où $A \in a$ et $b \in B$. Il reste à demontrer l'existence de la transversale.

A cet effet on utilise le fait que A et B sont des n-groupes et que l'application tensorielle est bilinéaire : $\forall\ a, x \in A$; $b, y \in B$,

$$(\bar{a} \otimes b, a \otimes b, \ldots, a \otimes b, x \otimes y) =$$

$$= (\bar{a} \otimes b, a \otimes b, \ldots, a \otimes b, x \otimes (b, \bar{b}, \ldots, b, y)) =$$

$$= (\bar{a} \otimes b, a \otimes b, \ldots, a \otimes b, (x \otimes b, x \otimes \bar{b}, \ldots, x \otimes b, x \otimes y)) =$$

$$= ((\bar{a} \otimes b, a \otimes b, \ldots, a \otimes b, x \otimes b), x \otimes \bar{b}, \ldots, x \otimes b, x \otimes y) =$$

$$= ((\bar{a}, a, \ldots, a, x) \otimes b, x \otimes \bar{b}, \ldots, x \otimes b, x \otimes y) =$$

$$= (x \otimes b, x \otimes \bar{b}, \ldots, x \otimes b, x \otimes y) = x \otimes (b, \bar{b}, \ldots, b, y) = x \otimes y$$

De la même façon on montre que :

$$(x\otimes y,\ a\otimes b,\ \ldots,\ a\otimes b,\ \bar{a}\otimes b) = x\otimes y \text{ et}$$

$$(a\otimes b,\ \bar{a}\otimes b,\ \ldots,\ a\otimes b,\ x\otimes y) = (x\otimes y,\ a\otimes b,\ \ldots,\ \bar{a}\otimes b,\ a\otimes b) = x\otimes y,$$

$$\text{donc } \overline{a\otimes b} = \bar{a}\otimes b.$$

De plus, $\bar{a}\otimes b = a\otimes \bar{b}$, car si l'on pose dans la relation démontrée ci-dessus : $x = a$ et $y = \bar{b}$ on obtient

$$a\otimes \bar{b} = (\bar{a}\otimes b,\ a\otimes b,\ \ldots,\ a\otimes b,\ a\otimes \bar{b}) = ((\bar{a},\ a,\ \ldots,\ \bar{a},\ a)\otimes b,\ a\otimes b,\ \ldots,$$

$$a\otimes b,\ a\otimes \bar{b}) = ((\bar{a}\otimes b,\ a\otimes b,\ \ldots,\ \bar{a}\otimes b,\ a\otimes b),\ a\otimes b,\ \ldots,\ a\otimes b,\ a\otimes \bar{b}) =$$

$$= (\bar{a}\otimes b,\ a\otimes b,\ \ldots,\ \bar{a}\otimes b,\ a\otimes (b,\ \ldots,\ b,\ \bar{b})) =$$

$$= (\bar{a}\otimes b,\ a\otimes b,\ \ldots,\ \bar{a}\otimes b,\ a\otimes b) = (\bar{a},\ a,\ \ldots,\ \bar{a},\ a)\otimes b = \bar{a}\otimes b.$$

Il en résulte : $\overline{a\otimes b} = a\otimes \bar{b} = \bar{a}\otimes b$ et (par conséquent) $A\otimes B$ est un n-groupe.

De la propriété 1.3 on déduit que pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $a \in A$ et $b \in B$ on a :

$$a^{[m]}\otimes b = (a\otimes b)^{[m]} = a\otimes b^{[m]}$$

4. **Produits tensoriels de n-monoïdes commutatifs.** Le produit tensoriel commutatif d'une famille de n-monoïdes commutatifs se définit d'une manière analogue au cas, $n = 2$. [4].

DÉFINITION 4.1. Soient $(A_i,\ 0_i)_{iI}$ une famille de n-monoïdes commutatifs, T un n-monoïde et $t : \prod_{i\in I} A_i \to T$ une application I-linéaire ; le couple $(t,\ T)$, ou simplement le n-monoïde T, est appelé produit tensoriel commutatif de la famille, si pour tout n-monoïde commutatif C et toute application I-linéaire $s : \prod_{i\in I} A_i \to C$ il existe un homomorphisme unique $u : T \to C$ tel que $s = u\circ t$.

Nous utiliserons la notation de S i o s s o n pour les n-groupes abéliens [6] ; $T = \boxtimes_{i\in I} A_i$ et $t((a_i)_{i\in I}) = \boxtimes_{i\in I} a_i$. Elle diffère de la notation usuelle pour le produit tensoriel $\otimes_{i\in I} A_i$ pour mettre en évidence que celui-ci n'est nécessairement pas commutatif, même si tous les n-monoïdes A_i possèdent cette propriété. La liasion entre les deux types de produits est donnée par le

THÉORÈME 4.2. *Le produit tensoriel commutatif d'une famille de n-monoïdes commutatifs* $(A_i,\ o_i)_{i\in I}$ *existe et il est unique à un isomorphisme près. Plus précisément*

$$\boxtimes_{i\in I} A_i \cong C(\otimes_{i\in I} A_i)$$

c'est-à-dire $\underset{i\in I}{\boxtimes} A_i$ *est isomorphe à l'image homomorphe maximale commutative du n-monoïde* $\underset{i\in I}{\otimes} A_i$.

Démonstration. Soient $(t, \underset{i\in I}{\otimes} A_i)$ le produit tensoriel d'une famille de n-monoïdes (Théorème 1.5) et $s: \prod\limits_{i\in I} A_i \to C$ une application I-linéaire dans un n-monoïde commutatif C. En vertu de la définition 1.4, il existe un homomorphisme unique $u: \underset{i\in I}{\otimes} A_i \to C$ tel que $s = u \circ t$. L'image homomorphe maximale commutative du n-monoïde $\underset{i\in I}{\otimes} A_i$, notation : $C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i)$, se définit comme le n-monoïde-quotient par rapport à la congruence minimale définie sur $\underset{i\in I}{\otimes} A_i$, contenant tous les couples la forme $((x_1, \ldots, x_n)_0, (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})_0)_{\sigma\in S_n}$; $x_j \in \underset{i\in I}{\otimes} A_i$; $j = 1, \ldots, n$.

Par extention du principe de l'image maximale d'un type donné pour les groupoïdes [1, p. 18] au cas des n-groupoïdes, on montre que $C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i)$ existe.

Soit $f: \underset{i\in I}{\otimes} A_i \to C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i)$ l'application canonique et définissons l'application $t: \prod\limits_{i\in I} A_i \to C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i)$ par $t_c = f \circ t$. Ceci dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[rr, "t_c"] \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "t"] & & C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i) \\
C & & \underset{i\in I}{\otimes} A_i \arrow[ll] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Du fait que C est un n-monoïde commutatif, il résulte l'existence d'un homomorphisme $v: C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i (\to C$ tel que $u = v \circ f$. On a donc, $s = u \circ t = (v \circ f) \circ t = v \circ (f \circ t) = v \circ t_c$, ce qui nous montre que $(C(\underset{i\in I}{\otimes} A_i), t_c)$ n'est autreque le produit tensoriel commutatif $(A_i)_{i\in I}$. Son unicité découle de sa définition comme solution du problème universel.

Conséquence 4.3. Si A est un n-monoïde commutatif et $\{e\}$ le n-monoïde réduit à un seul élément, on a :

$$A \boxtimes \{e\} \cong E(A).$$

Conformément aux 4.2. et 1.6 on a :

$$A \boxtimes \{e\} \cong C(A \otimes \{e\}) \cong C(E(A)) \cong E(A)$$

Conséquence 4.4 Si A est un n-monoïde commutatif et $\langle x\rangle$ un n-monoïde cyclique infini, on a $A \boxtimes \langle x\rangle \cong A$.

En effet, puisque A est commutatif on a $N(A) \cong A$; ensuite, en utilisant 4.2 et 2.2 on obtient

$$A \boxtimes \langle x\rangle \cong C(A \otimes \langle x\rangle) \cong C(N(A)) \cong C(A) \cong A$$

Des théorèmes 3.1 et 4.2 il résulte

Conséquence 4.5. Le produit tensoriel commutatif de deux n-groupes commutatifs est un n-groupe commutatif.

Soit $(\mathbf{Z}, \circ)$ le n-groupe cyclique infini des entiers rationnels, où la loi $\circ : Z^n \to Z$ est définie par :

$$k_i \in Z \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; (k_1, \ldots, k_n)_0 = \sum_{i \in I} k_i + 2 - n$$

On montre facilement que l'on a $1^{[m]} = m + 1$ pour tout $m \in Z$ et que $\mathbf{Z}$ est le n-groupe cyclique infini engendré par 1 ; $\mathbf{Z} = \langle 1\rangle$.

Si l'on utilise 4.4 et 4.5 on obtient :

Conséquence 4.6. Le produit tensoriel commutatif d'un n-groupe commutatif A par le n-groupe cyclique infini des entiers rationnels est isomorphe à $A : A \boxtimes \mathbf{Z} \cong A$.

Nous retrouvons ainsi le théorème 12 de [6]. Siosson [6] définit le produit tensoriel de deux n-groupes abéliens A et B en le construisant, comme étant le n-groupe-quotient F/θ, où F désigne le n-groupe libre sur $A \times B$, et θ la congruence minimale sur F contenant tous les couples de la forme :

$$(h((a_1, \ldots, a_n), b), (h(a_1, b), \ldots, h(a, b))) \tag{1}$$

$$(h(a, (b_1, \ldots, b_n)), (h(a, b_1), \ldots, h(a, b_n)) \tag{2}$$

$$(h(a^{[m]}, b), h(a, b^{[m]})) \tag{3}$$

où $a, a_i \in A$; $b, b_i \in B$; $i = 1, \ldots, n$ et $m \in \mathbf{Z}$

Ensuite, ce même auteur démontre que l'application tensorielle est la solution du problème universel.

Notre définition appliquée aux n-groupes abéliens est équivalente à celle de Siosson. Cela se voit du fait que la condition (3) de l'énoncé du théorème 9 [6] (et, par conséquent les couples du dernier type) n'est pas nécessaire ; en effet, elle découle des conditions (1) et (2) dudit théoreme, en vertu de la proposition 1.3.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1976)

BIBLIOGRAPHIE

1. C l i f f o r d, A. H. and P r e s t o n, G. B., *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1, Math. Surveys, nr. 7, 1961.
2. G l e i c h g e w i c h t, B. und G l a z e k, K., *Remarks on n-groups as abstract algebras*, „Coll. Math." **17**, 2, 1967, 209–219.
3. G r i l l e t, P. A., *The tensor product of semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **138**, 1969, 267–279.
4. G r i l l e t, P. A., *The tensor product of commutative semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **138**, 1969, 280–293.
5. P o s t, E., *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 1940, 208–350.
6. S i o s s o n, F. M., *On Free Abelian m-Groups* (I, II, III), Proc. Japan Acad., 9, **43**, 1967, 876–888.
7. S i o s s o n, F. M., *Cyclic end Homogenous m-Semigroups*, Proc. Japan, Acad., **7**, **39**, 1963, 444–449.

PRODUSE TENSORIALE DE *n*-MONOIDE

(R e z u m a t)

În lucrare se definește produsul tensorial al unei familii de n-semigrupuri. Se demonstrează existența și unicitatea lui pînă la un izomorfism și în particular se studiază produsul tensorial al n-semigrupurilor ciclice. În continuare se introduce produsul tensorial comutativ al n-semigrupurilor comutative. Se arată că pentru n-grupuri comutative definiția produsului tensorial este echivalentă cu cea dată constructiv de S i o s s o n [6] cu observația că în teorema 9 [6] condiția c) nu era necesară, ea rezultînd din condițiile a) și b) conform propoziției 1.3 din prezenta lucrare.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

O FUNCŢIONALĂ INTEGRALĂ DE ECHIVALENŢĂ PENTRU METODE VARIAŢIONALE APLICATE PROBLEMEI STRATULUI LIMITĂ ÎN VARIABILELE LUI MISES

PETRE BRĂDEANU

În acest studiu vom construi pentru ecuaţiile stratului limită în forma lui Mises, folosind conceptul de potenţial local, [2] — [3], o funcţională integrală care să echivaleze problema la limită pusă asupra acestor ecuaţii cu o problemă variaţională pusă asupra funcţionalei.

Ecuaţiile mişcării, considerată iniţial nestaţionară, a unui fluid incompresibil, cu viscozitate şi conductivitate termică variabile, în domeniul D al stratului limită, în raport cu variabilele lui Mises sînt:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + L(u;\ 1) = -\frac{\partial p}{\partial x},\ \text{în } D \times (0,\ T) \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} + L(i;\ \sigma) = \mu u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2,\ \text{în } D \times (0,\ T) \tag{2}$$

$$\left(L(\ ;\alpha) = \rho u \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\alpha} u \frac{\partial}{\partial \psi}\right)}{\partial \psi}\right)$$

$$(D = \{x,\ \psi \in R | x_0 \leq x \leq l,\ 0 \leq \psi \leq \psi_\infty,\ x_0 \geqslant 0\},\ t \in [0,\ T])$$

unde x şi ψ sînt variabilele lui Mises, u — viteza în direcţia x; i — entalpia unităţii de masă a fluidului, p — presiunea în fluidul din stratul limită, μ — coeficientul de viscozitate, $\sigma = \mu c_p/\lambda$ — numărul lui Prandtl (λ — coeficientul de conductivitate termică); $L(\cdot\ ;\ \alpha)$ — operatorul diferenţial care acţionează asupra lui u (cu $\alpha = 1$) şi asupra lui i (cu $\alpha = \sigma$).

Se construieşte funcţia ($i \to V_s i$ unde V_s este o viteză standard)

$$F(t) = \iint\limits_D \left[\frac{\partial u}{\partial t} L(u;\ 1) + \frac{\partial i}{\partial t} L(i;\ \sigma) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{u^2}{V_s}\frac{\partial i}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2\right] \mathrm{d}x d\psi \leqslant 0 \tag{3}$$

unde semnul $\leqslant$ se stabileşte potrivit cu ecuaţiile (1) — (2). Semnul egal corespunde mişcării staţionare în domeniul D al stratului limită.

Se aplică, în (3), identităţi — şi, formula lui Green — de forma:

$$\rho u u_x u_t = \rho(u^2 u_t)_x - \rho u^2 u_{tx} - \rho u u_x u_t$$

. . . .

$$\left(\frac{\mu u}{\sigma} i_\psi u i_t\right)_\psi = \left(\frac{1}{\sigma} u i_\psi\right) u i_t + \frac{\mu}{\sigma} i_\psi u_\psi u i_t + \frac{\mu}{\sigma} u^2 i_\psi i_{t\psi}$$

$$\iint\limits_D (Q_x - P_y) dx dy = \int\limits_C Q dy + P dx$$

unde C este frontiera domeniului D.

Formula (3) se poate transcrie, apoi, în forma dezvoltată

$$
\begin{aligned}
F(t) = & \iint_D \Big\{ -\rho u^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\rho}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \\
& + \mu u \left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu}{2} u^2 \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2\right] - \frac{\rho}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial i^2}{\partial t} - \rho u i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) - \\
& - \mu \frac{u^2}{V_s}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\mu u}{\sigma}\left[\frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial i}{\partial \psi}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial \psi}\right)^2\right]\Big\} dx d\psi + \\
& + \int_C \left(\rho u^2 \frac{\partial u}{\partial t} d\psi + \mu u^2 \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\rho u}{2}\frac{\partial i^2}{\partial t} d\psi + \frac{\mu}{\sigma} u^2 \frac{\partial i}{\partial \psi}\frac{\partial i}{\partial t} dx\right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Să notăm cu u°, i°, p°, μ°, σ° parametrii fluidului în mişcare staţionară şi să presupunem că mişcarea nestaţionară a fluidului reprezintă o abatere mică de la starea staţionară. Atunci, se poate scrie că

$$
u = u^\circ(x, \psi) + \delta u(x, \psi, t), \qquad i = i^\circ(x, \psi) + \delta i(x, \psi, t)
$$

$$
(\delta u \ll u^\circ, \ \delta i \ll i^\circ)
$$

şi că, de exemplu,

$$
u^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx u^{\circ 2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\circ 2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)
$$

Procedînd în acest mod cu toţi termenii din (4), se obţine pentru funcţia $F(t)$ expresia

$$
F(t) = \frac{\partial}{\partial t} J(u, i) \leqslant 0
$$

în care funcţionala $J(u, i)$ are expresia

$$
\begin{aligned}
J(u, i) = & \iint_D \Phi(x, \psi, u_x, u_\psi;\ i, i_x, i_\psi) dx d\psi + \\
& + \int_C \left(\rho u^{\circ 2} u d\psi + \mu^\circ u^{\circ 2} \frac{\partial u^0}{\partial \psi} u dx + \frac{\rho}{2} u^\circ i^2 d\psi + \frac{\mu^0}{\sigma^0} u^{\circ 2}\frac{\partial i^0}{\partial \psi} i dx\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\Phi = & -\rho u^{\circ 2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\frac{\partial u^0}{\partial x} u^2 + \frac{\partial p^0}{\partial x} u + \mu^\circ u^\circ \left(\frac{\partial u^0}{\partial \psi}\right)^2 u + \\
& + \frac{\mu^0}{2} u^{\circ 2}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 - \rho u^\circ i^\circ \frac{\partial i}{\partial x} + \mu^\circ u^\circ \frac{\partial u^0}{\partial \psi}\left[\frac{1}{\sigma^0}\frac{\partial i^0}{\partial \psi} - \frac{u^0}{V_s}\frac{\partial u^0}{\partial \psi}\right] i - \\
& - \frac{\rho}{2}\frac{\partial u^0}{\partial x} i^2 + \frac{\mu^0 u^{02}}{2\sigma^0}\left(\frac{\partial i}{\partial \psi}\right)^2
\end{aligned} \tag{7}
$$

Funcţionala $J(u, i)$, formată dintr-o integrală dublă şi o integrală curbilinie, are proprietatea că pentru mişcarea staţionară satisface condiţia de extrem (staţionaritate) $\partial J/\partial t = 0$ la care se adaugă condiţiile complementare $u^\circ = u$, $i^\circ = i$ etc.

Funcţionala $J(u, i)$ este extremă (minimă) în mişcarea staţionară a fluidului descrisă de ecuaţiile (1) — (2) cu $\partial/\partial t = 0$ pentru $u = u^\circ$, $i = i^\circ$, $p = p^\circ$ etc. [în calculul variaţiei funcţionale J valorile u°, i° etc au valori fixate, valori care nu suportă variaţii].

Afirmaţie reciprocă: se poate arăta că condiţiile de extrem (ecuaţiile lui Euler-Lagrange) pentru funcţionala (6) sînt tocmai ecuaţiile (1) — (2). Ecuaţia lui Euler-Lagrange corespunzătoare funcţionalei (6) relativ la funcţia i este

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial i_x}\right) - \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial i_\psi}\right) = 0 \tag{7'}$$

$$(u^\circ = u, \; i^\circ = i)$$

În cazul acestei probleme obţinem imediat expresiile:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial i} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} i - \mu u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{\mu u}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\partial i}{\partial \psi}, \; (V_s \to 1), \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial i_x} = -\rho u i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial i_\psi} = \frac{\mu}{\sigma} u^2 \frac{\partial i}{\partial \psi} \end{aligned}\right\} \tag{7''}$$

dacă se aplică şi condiţia $u^\circ = u$, $i^\circ = i$ etc.

Înlocuind (7″) în (7′) se găseşte ecuaţia energiei (2). În mod analog se poate arăta că ecuaţia lui Euler-Lagrange, pentru (6), relativ la funcţia u este tocmai ecuaţia mişcării (1) cu $\partial/\partial t = 0$.

Să facem o modificare în integrala curbilinie a funcţionalei (6) cu ajutorul condiţiilor la limită. Să presupunem că mişcarea staţionară a fluidului în domeniul D al stratului limită satisface condiţiile la limită:

$$\begin{gathered} u(x, 0) = 0, \; u(x, \psi_\infty) = u_1(x), \; u(0, \psi) = u_\infty \\ (0 < x \leq l, \; 0 < \psi \leq \psi_\infty) \\ i(x, 0) = i_w, \; i(x, \psi_\infty) = i_\infty, \; i(0, \psi) = i_\infty \end{gathered} \tag{8}$$

unde indicii w şi ∞ indică valori pe corp şi la infinit (frontiera exterioară a stratului limită). Cu ajutorul acestor condiţii se calculează integrala curbilinie din (6). Pe de altă parte, aceste condiţii asigură o soluţie unică pentru ecuaţiile cu derivate parţiale (1) — (2) în cazul staţionar pentru funcţii $p(x)$ acceptabile din punct de vedere hidrodinamic.

Se ajunge la următorul rezultat:

Problema la limită pusă asupra ecuaţiilor cu derivate parţiale ale stratului limită staţionar, (1) — (2) cu $\partial/\partial t = 0$ şi (8), este echivalentă cu problema variațională de extrem (minim) pusă asupra funcționalei integrale $J : D_J \to R$ (potențial local—funcțională echivalentă) de forma

$$J(u, i) = \iint_D \Phi(x, \psi, u, u_x, u_\psi, i, i_x, i_\psi) dx\, d\psi +$$

$$+ \rho \int_0^{\psi_\infty} [(u^{\circ 2} u)_{x=l} - (u^{\circ 2} u)_{x=0}] d\psi - \mu \int_0^l \left(u^{\circ 2} \frac{\partial u^0}{\partial \psi} u \right)_{\psi=\psi_\infty} dx + \tag{9}$$

$$+ \frac{\varphi}{2} \int_0^{\psi_\infty} [(u^\circ i^2)_{x=l} - (u^\circ i^2)_{x=0}] d\psi - \int_0^l \left(\frac{\mu^0}{\sigma^0} u^{\circ 2} \frac{\partial i^0}{\partial \psi} i \right)_{\psi=\psi_\infty} dx$$

cu condițiile complementare:

$$u^\circ = u, \ i^\circ = i, \ p^\circ = p, \ \mu^\circ = \mu, \ \sigma^\circ = \sigma \tag{10}$$

și în următoarele condiții:

(a) domeniul de definiție D_J este format din funcțiile $u(x, \psi)$ și $i(x, \psi)$ continue în domeniul D, care au derivate parțiale continue în D cu excepția frontierei $\psi \to 0$ (x — fixat) unde [4]:

— u și i au dezvoltări analitice în raport cu $\sqrt{\psi}$, adică

$$u, i = c_k \sqrt{\psi} + o(\psi), \ c_k \text{ — independenți de } \psi$$

— derivatele u_ψ, i_ψ (și $u_{\psi\psi}$, $i_{\psi\psi}$) $\to \infty$

(b) funcțiile $u, i \in D_J$ satisfac condițiile la limită (8) cu frontiera liberă $x = l$ (această frontieră pe care nu sînt date funcțiile u și i introduce integrala curbilinie din (4) ca și integralele simple din (9))
unde funcția Φ are expresia (7) iar u°, i° etc sînt funcții fixate (adică funcții care nu primesc variații atunci cînd se calculează prima variație a funcționalei $J(u, i)$).

(Intrat în redacție la 21 noiembrie 1976)

BIBLIOGRAFIE

1. P. Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Ed. tehnică, București, 1973.
2. P. Glansdorff, I. Prigogine, *On a General Evolution Criterion in Macroscopic Physics*, Physica, **30**, 1964, 351—374.

3. S. C. Cheng, A. Kumar, *Application of a Variational Technique to Wedge Flow with Variable Properties*, AIAA Journal, **10**, 12, 1972, 1683—1684.
4. D. Brădeanu, P. Brădeanu, *Comportări asimpotice ale soluţiilor ecuaţiei energiei din stratul limită incompresibil (variabile Mises)*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 1, 1977, 68—72.

AN INTEGRAL FUNCTIONAL OF EQUIVALENCE FOR THE VARIATIONAL METHODS APPLIED TO THE BOUNDARY LAYER PROBLEM IN MISES' FORM

(Summary)

In this paper one constructs an integral functional, using the concept of local potential, which should be applied in the variational method for solving the boundary layer problem in Mises' form.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

A PARTICULAR STARLIKE INTEGRAL OPERATOR

SANFORD S. MILLER[1], PETRU T. MOCANU, MAXWELL O. READE[1]

1. **Introduction.** Let $f(z)$ be regular in the unit disc U with $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. The function $f(z)$ is said to be *starlike* if $\operatorname{Re} zf'(z)/f(z) > 0$ in U. We denote the class of all such functions by S^*.

An (integral) operator defined on S^* is said to be a *starlike (integral) operator* if it maps S^* into S^*.

In a recent paper [2] we studied a general class of starlike integral operators $I: S^* \to S^*$, where $F = I(f)$ is of the from

$$F(z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\Phi(z)}\int_0^z f^{\alpha}(t)\varphi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{1/\beta}, \ z \in U, \tag{1}$$

in which we obtained the following general result.

THEOREM A. *Let $f \in S^*$, let Φ and φ be regular functions in U with $\Phi(0) = \varphi(0) = 1$ and $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$ in U and let α, β, γ, δ be real numbers satisfying the relations*

$$\alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \ \delta \geqslant 0, \ \alpha + \delta > 0 \text{ and } \beta + \gamma = \alpha + \delta. \tag{2}$$

If there exists a real number $J \geqslant 0$, such that

$$J \geqslant \gamma + \operatorname{Re}\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}, \ z \in U, \tag{3}$$

$$\beta + \gamma > J, \tag{4}$$

$$\delta + \operatorname{Re}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \geqslant \max\ (0, J - \lambda(J)), \ z \in U, \tag{5}$$

where

$$\lambda(J) = \frac{1}{2}\min\left[\frac{\beta+\gamma-J}{J}, \frac{J}{\beta+\gamma-J}\right], \ \lambda(0) = 0, \tag{6}$$

then there exists a unique function $F(z) = z + A_2z^2 + \ldots$, satisfying (1), which belongs to S^*.

In this paper we shall apply this general result to the particular operator defined by

$$F(z) = \frac{2}{g(z)}\int_0^z f(t)g'(t)dt, \ z \in U, \tag{7}$$

[1] This work was carried out while these authors were USA-Romania Exchange Scholars.

where g is a regular function in U with $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(z)g'(z)/z \neq 0$, $z \in U$. Our aim is to obtain sufficient conditions on g so that the operator (7) is a starlike integral operator.

For $g(z) \equiv z$ the operator (7) is the well-known integral operator studied by Libera [1].

2. Main result. THEOREM 1: *Let $f \in S^*$ and let g be a regular function in U with $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(z)g'(z)/z \neq 0$, $z \in U$. If there exists a real number J such that*

$$\operatorname{Re} \frac{zg'(z)}{g(z)} \leq J, \ z \in U, \tag{8}$$

$$1 + \operatorname{Re} \frac{zg''(z)}{g'(z)} \geqslant J - \frac{1}{J} + \frac{1}{2}, \ z \in U, \tag{9}$$

then the function F defined by (7),

$$F(z) = \frac{2}{g(z)} \int_0^z f(t)g'(t)dt, \ z \in U,$$

belongs to S^*.

Remarks. (i) If we let $z = 0$ in (8) and (9) we find that J satisfies the condition $1 \leqslant J \leqslant J_0$, where $J_0 = (1 + \sqrt{17})/4 = 1.2807\ldots$ is the positive root of the equation $2J^2 - J - 2 = 0$.

(ii) Since $J - J^{-1} + 2^{-1} > 0$, condition (9) shows that g is a convex univalent function.

Proof. The operator (7) is obtained from (1) by taking $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, $\Phi(z) = g(z)/z$ and $\varphi(z) = g'(z)$. We have $\Phi(0) = \varphi(0) = 1$ and $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$; moreover conditions (2) and (4) of *Theorem A* are obviously satisfied. We also have

$$1 + \frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)}, \ 1 + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)},$$

so that condition (3) follows from (8). Since $1 \leq J < 2$, we obtain

$$\lambda(J) = \frac{1}{2} \min \left(\frac{2-J}{J}, \frac{J}{2-J}\right) = \frac{1}{J} - \frac{1}{2},$$

and $J - \lambda(J) = J - J^{-1} + 2^{-1} > 0$ for $1 \leq J \leq J_0$ so that (5) follows from (9). Thus all hypotheses of *Theorem A* are statisfied and *Theorem 1* now follows from *Theorem A*.

3. Some particular examples. THEOREM 2. *If $f \in S^*$ and $|\lambda| \leq \rho_0$, where $\rho_0 = 0.127\ldots$ is the smallest positive root of the equation $2\rho^3 + \rho^2 - 8\rho + 1 = 0$, then the function F defined by*

$$F(z) = \frac{2(1 + \lambda z)}{z} \int_0^z \frac{f(t)}{(1 + \lambda t)^2} dt, \ z \in U,$$

belongs to S^*.

Proof. Let $g(z) = \frac{z}{1+\lambda z}$, $|\lambda| = \rho < 1$, in *Theorem 1*. Conditions (8) and (9) become

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \operatorname{Re}\frac{1}{1+\lambda z} \leq \frac{1}{1-\rho} \leq J$$

and

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zg''(z)}{g'(z)} = \operatorname{Re}\frac{1-\lambda z}{1+\lambda z} \geqslant \frac{1-\rho}{1+\rho} \geqslant J - \frac{1}{J} + \frac{1}{2}$$

If we take $J = \frac{1}{1-\rho}$, then the last inequality is verified provided $2\rho^3 + \rho^2 - 8\rho + 1 \geqslant 0$ holds, and this last holds if $0 \leq \rho \leq \rho_0$. Hence, for $0 \leq \rho \leq \rho_0$, conditions (8) and (9) hold so that *Theorem 2* now follows from *Theorem 1*.

THEOREM 3. *If $f \in S^*$ and $|\lambda| \leq \rho_1$, where $\rho_1 = 0.124 \ldots$ is the smallest positive root of the equation $4\rho^3 - \rho^2 - 8\rho + 1 = 0$, then the function F defined by*

$$F(z) = \frac{2}{ze^{\lambda z}}\int_0^z f(t)(1+\lambda t)e^{\lambda t}dt, \; z \in U,$$

belongs to S^*.

Proof. Let $g(z) = ze^{\lambda z}$, $|\lambda| = \rho < 1$, in *Theorem 1*. Then if we let $J = 1 + \rho$, then conditions (8) and (9) become

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \operatorname{Re}(1+\lambda z) \leq 1 + \rho \leq J$$

and

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zg''(z)}{g'(z)} \tag{10}$$

$$= \operatorname{Re}\left(1 + \lambda z + \frac{\lambda z}{1+\lambda z}\right) \geqslant 1 - \rho - \frac{\rho}{1-\rho} \geqslant J - \frac{1}{J} + \frac{1}{2}$$

respectively. The last inequality in (10) holds when $4\rho^3 - \rho^2 - 8\rho + 1 \geqslant 0$, and this last holds if $\rho \leq \rho_1$. *Theorem 3* now follows from *Theorem 1*.

THEOREM 4. *If $f \in S^*$ and $|\lambda| \leq \rho_2$, where $\rho_2 = (\sqrt{105} - 7)/28 = 0{,}115 \ldots$ is the positive root of the equation $14\rho^2 + 7\rho - 1 = 0$, then the function F defined by*

$$F(z) = \frac{2}{z(1+\lambda z)}\int_0^z f(t)(1+2\lambda t)dt, \; z \in U,$$

belongs to S^*.

Proof. Let $g(z) = z + \lambda z^2$, $|\lambda| = \rho < \frac{1}{2}$, in *Theorem 1.* If we let $J = (1 + 2\rho)/(1 + \rho)$, then conditions (8) and (9) become

$$\mathrm{Re}\,\frac{zg'(z)}{g(z)} = \mathrm{Re}\,\frac{1 + 2\lambda z}{1 + \lambda z} \leq \frac{1 + 2\rho}{1 + \rho} \leq J,$$

and

$$1 + \mathrm{Re}\,\frac{zg''(z)}{g'(z)} = \mathrm{Re}\,\frac{1 + 4\lambda z}{1 + 2\lambda z} \geqslant \frac{1 - 4\rho}{1 - 2\rho} \geqslant J - \frac{1}{J} + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

The last inequality in (11) becomes

$$\frac{1 - 4\rho}{1 - 2\rho} \geqslant \frac{1 + 7\rho + 8\rho^2}{2\,(1 + 3\rho + 2\rho^2)},$$

which holds if $14\rho^2 + 7\rho - 1 \leq 0$, that is, if $\rho \leq \rho_2$. Hence *Theorem 4* now follows from *Theorem 1.*

(Received November 22, 1976)

REFERENCES

1. R. J. Libera, *Some Classes of Regular Univalent Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 1965, 755–758.
2. S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade, *Starlike Integral Operators* (Submitted for publication).

UN OPERATOR INTEGRAL STELAT PARTICULAR

(Rezumat)

Se aplică un rezultat general obținut în [2] la studiul operatorului integral definit de (7). Se obțin condiții suficiente asupra funcției g astfel ca acest operator integral să fie stelat (adică F să fie stelată dacă f este stelată).

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

DETERMINAREA VARIAŢIEI PERIOADEI CVASINODALE A SATELITULUI ARTIFICIAL AL PĂMÎNTULUI. APLICAŢIE LA SATELITUL EXPLORER-19

T. OPROIU, A. PÁL, E. RADU

1. **Introducere.** Problema determinării elementelor orbitale ale satelitului artificial al Pămîntului şi a variaţiilor acestora din observaţii astronomice sau măsurări telemetrice constituie o problemă de bază a mecanicii cereşti şi a dinamicii zborului spaţial, cu numeroase aplicaţii practice. Pentru rezolvarea acestei probleme, potrivit cu genul şi precizia observaţiilor sau măsurărilor, au fost elaborate diverse metode. Una din acestea se referă la utilizarea observaţiilor simultane obţinute la două sau mai multe staţii de observare din cadrul unei reţele de triangulaţie cosmică. În acest scop s-a creat şi programul de colaborare internaţională „Atmosfera" (iniţial, INTEROBS) [1], care are ca obiectiv determinarea variaţiilor scurt-periodice ale unor parametri de stare ai atmosferei terestre, în corelaţie cu activitatea solară şi geomagnetică. Programul se realizează pe baza unor observaţii sistematice (vizuale, fotografice etc.) asupra unui număr de sateliţi artificiali anume aleşi.

Experienţa a arătat că parametrul orbital care se determină cel mai precis din observaţii simultane şi nesimultane este perioada cvasinodală a satelitului (T_Ω). Suficient de precis se determină şi alte elemente orbitale ca: semiaxa mare (a), înclinarea orbitei (i), longitudinea nodului ascendent (Ω). În lucrarea de faţă se prezintă metodica determinării perioadei cvasinodale şi a variaţiei acesteia la Observatorul Astronomic Cluj-Napoca cu exemplificare la satelitul Explorer-19.

Această metodică comportă o succesiune de etape, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

2. **Determinarea coordonatelor geocentrice ale satelitului.** Poziţia geocentrică a satelitului S se consideră, de obicei, faţă de un sistem de referinţă drept $Oxyz$ (fig. 1), avînd: originea O în centrul de masă al Pămîntului, planul Oxy confundat cu planul ecuatorului, axa Ox îndreptată spre punctul vernal, iar axa Oz orientată după axa de rotaţie a Pămîntului. În acest scop se folosesc atît observaţii simultane (de la două sau mai multe staţii) cît şi nesimultane (de la o singură staţie).

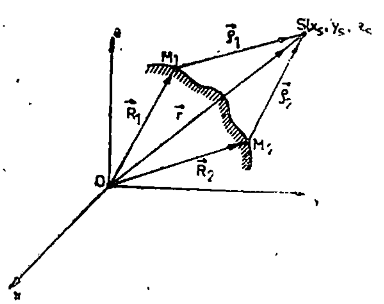


Fig. 1.

În cazul folosirii observaţiilor simultane, de exemplu de la două staţii, determinarea poziţiei geocentrice a satelitului este posibilă prin folosirea ecuaţiilor fundamentale ale geodeziei spaţiale, care au forma:

$$\vec{r} = \vec{R}_1 + \vec{\rho}_1 = \vec{R}_2 + \vec{\rho}_2 \tag{1}$$

unde: $\vec{R}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{R}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ reprezintă razele geocentrice ale stațiilor de observare M_1 și M_2; $\vec{\rho}_1(m_1\rho_1, n_1\rho_1, p_1\rho_1)$, $\vec{\rho}_2(m_2\rho_2, n_2\rho_2, p_2\rho_2)$ — razele vectoare topocentrice ale satelitului S (la care se cunosc cosinușii directori m, n, p din observații, iar $\vec{r}(x_s, y_s, z_s)$ — raza-vectoare geocentrică a satelitului S (fig. 1).

Sistemul (1), format din 6 ecuații scalare cu 5 necunoscute: $(x_s, y_s, z_s, \rho_1, \rho_2)$, se rezolvă, de obicei, prin metoda celor mai mici pătrate ca, de exemplu, în lucrarea [2].

Observațiile simultane necesare în această metodă se determină în practică din observații cvasisimultane (obținute de ambele stații în același interval de timp) folosind metoda grafică sau o metodă analitică. În cazul metodei analitice este recomandabilă aproximarea prin polinoame algebrice de gradul trei. Metoda folosirii observațiilor simultane are avantajul că nu necesită cunoașterea în prealabil a nici unui element orbital.

În cazul cînd dispunem de observații numai de la o singură stație, pozițiile geocentrice ale satelitului se determină din relația [3]:

$$\vec{r} = \vec{R} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{n}_0}{\vec{\rho}_0\cdot\vec{n}_0}\cdot\vec{\rho}_0, \tag{2}$$

unde $\vec{\rho}_0$ și $\vec{n}_0$ sînt, respectiv, versorii direcției topocentrice și ai normalei la planul orbitei osculatoare a satelitului S.

Acești versori, după cum se știe, au componentele:

$$\vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_0 = \begin{bmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{bmatrix} \tag{3}$$

În cazul observațiilor raportate la sistemul de coordonate ecuatoriale, cosinușii directori ai direcției topocentrice sînt:

$$m = \cos\delta\cos\alpha,\ n = \cos\delta\sin\alpha,\ p = \sin\delta \tag{4}$$

Pentru $\vec{\rho}_0\cdot\vec{n}_0 = 0$ (treceri zenitale), determinarea pozițiilor geocentrice cu formula (2) nu este posibilă.

Se observă că, în cazul folosirii observațiilor de la o singură stație, este necesar să cunoaștem două elemente orbitale: înclinarea i și longitudinea nodului ascendent (Ω).

În cazul observațiilor vizuale de precizie medie ($0°,1$ în poziție și $0^s,1$ în timp) este suficient, așa cum s-a dovedit în practică, a se lua în considerare numai variația seculară în longitudinea nodului ascendent cauzată de necentralitatea cîmpului gravitațional terestru. În acest sens, foarte practică este utilizarea formulelor lui Yu.V. B a t r a k o v [4]:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0), \tag{5}$$

unde $\dot{\Omega}$, cu precizia de ordinul J_2^2 şi e^2, are expresia

$$\dot{\Omega} = -\frac{3 J_2 \cos i\, n_0}{2p^2} + \frac{3 J_2^2 \cos i\, n_0}{32\, a^4}[-60+76 \sin^2 i + e^2(-232+281 \sin^2 i)] \quad (6)$$

Parametrii care intervin în ecuaţia (6) au următoarea semnificaţie: J_2 — a doua armonică zonală din dezvoltarea potenţialului terestru, n_0 — mişcarea medie diurnă a satelitului, e — excentricitatea şi $p = a(1 - e^2)$ — parametrul orbitei.

Elementele orbitale iniţiale (la epoca t_0) necesare în formulele (5) — (6) se iau din publicaţiile centrelor de control orbital (Kosmos, Slough etc.).

3. **Determinarea perioadei de revoluţie evasinodale.** Pentru fiecare moment din seria de observaţii dată se determină coordonatele geocentrice ecuatoriale ale satelitului după relaţiile:

$$\begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (7)$$

unde r — raza-vectoare geocentrică a satelitului S, φ — latitudinea punctului subsatelit, λ — longitudinea punctului subsatelit.

Pentru un şir de n momente de timp se obţin următoarele serii de valori ale acestor parametri:

$$\{t_j, r_j, \lambda_j, \varphi_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Folosind aceste valori, se poate determina valoarea celui mai probabil moment ($\bar{t}_0$) al trecerii satelitului la paralelul ceresc de latitudine φ_0. Pentru aceasta, la fiecare moment t_j trebuie adăugată o corecţie care se determină din relaţia [5]:

$$t_0^{(j)} - t_j = \frac{(r^2)_m}{k\sqrt{p}}(\mu_0 - \mu_j) \quad (8)$$

unde μ_0 şi μ_j se determină din formulele:

$$\sin \mu_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\sin i}, \quad \sin \mu_j = \frac{\sin \varphi_j}{\sin i}$$

iar $k = 631.35$ km$^{3/2}$ sec^{-1}, $(r^2)_m$ — valoarea medie a pătratului razei-vectoare în intervalul de la t_1 la t_n. Luînd media valorilor $t_0^{(j)}$, obţinem:

$$\bar{t}_0 = \frac{[t_0^{(j)}]}{n} \quad (9)$$

Abaterea medie pătratică o determinăm din relaţia:

$$\varepsilon_{\bar{t}_0} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (10)$$

unde $v_j = \bar{t}_0 - t_0^{(j)}$. Relația (10) este valabilă în ipoteza că abaterile v_j sînt independente.

În caz că observațiile sînt efectuate în apropierea apexului orbitei, φ variază lent și prin urmare relația (8) dă o valoare incertă pentru $t_0^{(j)}$. Neajunsul poate fi înlăturat considerînd trecerea punctului satelit nu la un paralel, ci la un meridian ceresc de longitudine λ_0. Un sistem similar de formule, analoge cu (8), a fost propus de A. Pál [6].

Relațiile obținute au forma:

$$t_0^{(j)} - t_j = \frac{(r^2)_m}{k\sqrt{p}}(\nu_0 - \nu_j), \tag{11}$$

unde ν_0 și ν_j se determină din formulele:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \nu_j = \dfrac{1}{\cos i} \operatorname{tg} \bar{\lambda}_j, \\ \operatorname{tg} \nu_0 = \dfrac{1}{\cos i} \operatorname{tg} \bar{\lambda}_0, \\ \bar{\lambda}_j = \lambda_j - \Omega; \\ \bar{\lambda}_0 = \lambda_0 - \Omega \end{cases} \tag{12}$$

În relațiile (12), longitudinea nodului ascendent (Ω) se consideră constantă pe durata unei treceri. Atît în relațiile (8), cît și în (11), dacă $(r^2)_m$, p — sînt exprimați în kilometri, $(\mu_0 - \mu_j)$ respectiv $(\nu_0 - \nu_j)$ în grade și $k = 36\,176.0$, intervalul $(t^{(j)} - t_j)$ va fi exprimat în secunde de timp.

Avînd un șir de valori $\bar{t}_0$, perioada de revoluție a satelitului se obține din relația:

$$T_\Omega = \frac{\bar{t}_0' - \bar{t}_0''}{N} \tag{13}$$

unde N reprezintă numărul de revoluții ale satelitului în intervalul considerat. Abaterea medie pătratică a lui T_Ω este dată de relația:

$$\varepsilon_{T_\Omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\bar{t}_0'}^2 + \varepsilon_{\bar{t}_0''}^2}}{N} \tag{14}$$

În cazul în care momentele $\bar{t}_0$ sînt determinate în raport cu un paralel de referință φ_0 dat, relația (13) ne dă perioada de revoluție cvasinodală a satelitului, care, în limitele preciziei observațiilor vizuale, diferă nesemnificativ de perioada nodală [2], [7]. Atunci cînd momentele $\bar{t}_0$ sînt determinate în raport cu un meridian ceresc de longitudine λ_0, relația (13) ne dă perioada de revoluție sinodică a satelitului [8]. Rezultatele experimentale din programul „Atmosfera" arată că, în general, perioada de revoluție a satelitului se poate determina cu precizia de $\pm 0^m\!.001$.

4. **Determinarea variației perioadei de revoluție.** Există mai multe metode pentru a studia variația perioadei de revoluție a satelitului artificial, din care mai răspîndite sînt următoarele trei:

a°. *Metoda Jongolovici*. Această metodă a fost propusă în 1964 de I. D. Jongolovici şi aplicată de T. V. Kasimenko [9], în acelaşi an, la studiul variaţiei perioadei cvasinodale a satelitului 1960 ε 3. Ea constă în a lua pentru forma analitică a perioadei cvasinodale un polinom de gradul doi (pentru serii suficient de lungi ale valorilor lui T_Ω):

$$T_\Omega = a + bt + ct^2, \tag{15}$$

unde coeficienţii (a, b, c) se determină prin metoda celor mai mici pătrate. Variaţia perioadei este dată atunci de relaţia

$$\dot{T}_\Omega = b + 2ct \tag{16}$$

b°. *Metoda grafică*. Această metodă consideră perioada cvasinodală ca funcţie de forma $T_\Omega = T_\Omega(n)$, unde n reprezintă numărul de revoluţii ale satelitului. Într-un sistem cartezian plan se reprezintă valorile $T_\Omega^{(i)}$ în funcţie de n. Printre punctele obţinute se trasează o curbă medie, din care apoi se scot valorile perioadei cvasinodale din 10 în 10 revoluţii. În acest caz, variaţia perioadei este dată de relaţia

$$\Delta T_\Omega = \frac{dT_\Omega}{dn} = \frac{T_\Omega(n+10) - T_\Omega(n)}{10} \tag{17}$$

c°. *Metoda „O—C"*. Aceasta este o variantă a metodei „$O—C$" folosită la studiul stelelor variabile [10].

Mărimile observate pe care le notăm cu O_i sînt momentele $\{\bar{t}_0^{(i)}\}$. Momentele calculate le vom nota cu C_i, iar diferenţele $O_i - C_i$ le vom folosi sub notaţia $(O-C)_i$. Ca epocă iniţială se consideră primul moment observat din seria dată $\bar{t}_0^{(1)}$, adică:

$$C_1 = O_1 \tag{18}$$

Dacă presupunem că perioada satelitului este constantă şi egală cu T_Ω, atunci momentul celei de-a n-a treceri, măsurat la $\bar{t}^{(1)}$, va fi:

$$C_n = C_1 + (n-1)T_\Omega^{(1)}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

În general, momentele observate O_n diferă de cele calculate C_n, deoarece perioada cvasinodală a satelitului suferă unele variaţii.

Pentru sateliţii avînd înălţimea perigeului nu prea mare, datorită în special frînării atmosferice, perioada cvasinodală a satelitului descreşte cvasiliniar. Acest lucru se poate verifica uşor pe cale grafică: se reprezintă valorile $O-C$ în funcţie de n. Dacă curba obţinută se poate aproxima cu o parabolă, atunci perioada descreşte constant. În acest caz variaţia perioadei pe revoluţie poate fi calculată prin relaţia:

$$\Delta_n = \frac{dT_\Omega}{dn} = -\frac{2(O-C)_n}{n(n-1)} \tag{20}$$

Dacă Δ_n nu este constant, dar oscilează în jurul unei valori constante, atunci este recomandabil să determinăm valoarea $T_\Omega^{(x)}$, care aparţine momentului observat al ultimei treceri, O_z, din seria considerată, şi să folosim aceeaşi metodă în sens invers. În acest fel avem:

$$\begin{cases} C_z = O_z \\ C_m = C_z - mT_{\Omega}^{(z)} \ (m = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{21}$$

Valorile Δ_m se obţin prin acelaşi procedeu ca şi Δ_n. Luînd media ponderată a valorilor Δ_n şi Δ_m, obţinem:

$$\overline{\Delta} = \frac{n(n-1)\Delta_n + m(m-1)\Delta_m}{n(n-1) + m(m-1)} \tag{22}$$

Precizia de determinare a variaţiei perioadei pe o revoluţie este în jur de $\pm 0^m.0001$ [11].

Fiecare din metodele de mai sus permite determinarea variaţiei globale a perioadei cvasinodale $\left(\frac{dT}{dn}\right)_t$, variaţie cauzată cu precădere de influenţa a doi factori perturbatori: rezistenţa atmosferei şi presiunea radiaţiei solare directe. Dacă înălţimea perigeului satelitului este mică ($h_\pi \simeq 300$ km), rezistenţa atmosferei este preponderentă, iar pentru sateliţi cu înălţimi mari ale perigeului ($h_\pi \simeq 600$ km) şi avînd raportul aria secţiunii eficace/masă mare (sateliţi — balon), presiunea radiaţiei solare directe nu mai poate fi neglijată şi poate deveni chiar preponderentă.

Efectul acesteia din urmă în perioada cvasinodală poate fi evaluat cu formula [12]:

$$\left(\frac{dT}{dn}\right)_{srp} = K(A/m)T^{5/3}\left(\sqrt{r_1^2 - R_E^2} - \sqrt{r_2^2 - R_E^2}\right) \tag{23}$$

unde:

A — aria secţiunii eficace a satelitului, m — masa satelitului, r_1, r_2 — razele-vectoare ale satelitului la momentele intrării, respectiv ieşirii din conul de umbră al Pămîntului, R_E — raza medie a Pămîntului (= = 6 367,5 km).

Parametrul K este dat de relaţia:

$$K = \frac{3S}{(2\pi MG)^{2/3}c} \tag{24}$$

unde: S — constanta solară, G — constanta atracţiei universale, M — masa Pămîntului, c — viteza luminii.

Variaţia perioadei cauzată de rezistenţa atmosferei, $\left(\frac{dT}{dn}\right)_{ad}$, se determină în acest mod din relaţia:

$$\left(\frac{dT}{dn}\right)_{ad} = \left(\frac{dT}{dn}\right)_t - \left(\frac{dT}{dn}\right)_{srp} \tag{25}$$

5. **Aplicaţie la satelitul Explorer-19.** Vom da un exemplu de aplicare a metodicii descrise mai sus la satelitul Explorer-19 (cod COSPAR: 1963 53 A). Acest satelit a fost lansat la 19 decembrie 1963. Are formă

sferică cu diametrul de 3,65 m și masa de 7 kg. Observațiile optice folosite se referă la perioada 2 iulie — 30 iulie 1970 și au fost efectuate de următoarele stații de urmărire, din rețeaua „Atmosfera": 1 042 (Riazani), 1 024 (Chișinău), 1 062 (Cernăuți), 1 132 (Cluj-Napoca). Precizia măsurărilor este de $0°,1$ în poziție și $0^s,1$ în timp. Folosind metoda grafică, s-au format un număr de 82 perechi de coordonate orizontale simultane, din care s-au determinat apoi pozițiile geocentrice în spațiu, momentul cel mai probabil t_0 al trecerii satelitului la paralelul ceresc $\varphi_0 = 55°$, pentru fiecare trecere considerată (în total 11 valori).

Pentru determinarea variației perioadei s-a aplicat metoda „$O-C$", descrisă la punctul precedent. Drept epoci inițiale (date în MJD = JD — — 2 400 000.5, JD — data Juliană), necesare în formulele (20) și (21), s-au luat primul moment t_0 determinat $O_1 = C_1 = 40\,769{,}91\,946\,030$ (MJD), respectiv ultimul $O_s = C_s = 40\,797{,}79\,696\,667$ (MJD).

Perioadele cvasinodale (date în fracțiuni de zi solară mijlocie) corespunzătoare acestor momente sînt: $T_\Omega^{(1)} = 0^s,07\,809\,154$ respectiv $T_\Omega^{(s)} = 0^s,07\,808\,635$. Pentru determinarea lor s-a reprezentat grafic (la scară mai mare) variația perioadei cvasinodale în funcție de timp. S-a trasat o curbă medie de pe care s-au determinat apoi valorile de mai sus. Perioada cvasinodală are tendința generală de descreștere. Această tendință a fost testată și grafic, reprezentînd valorile $(O-C)_i$ în funcție de n_i (numărul de revoluții socotit de la epoca inițială). Rezultatul este dat în fig. 2.

Unele elemente orbitale necesare în calculele noastre au fost obținute pe cale grafică, utilizînd valorile acestora din efemeridele SAO (Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts S.U.A.). De exemplu, în fig. 3 este dată curba medie a variației excentricității (e) a satelitului Explorer-19 pe perioada 15 mai — 15 august 1970.

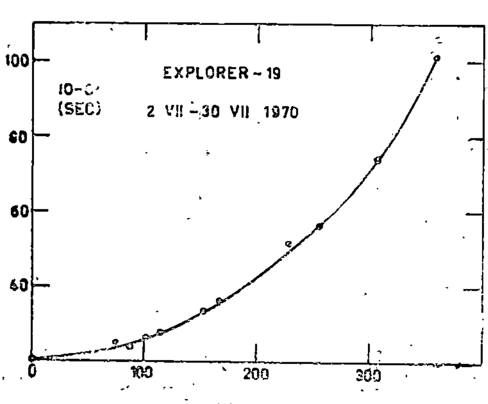


Fig. 2.

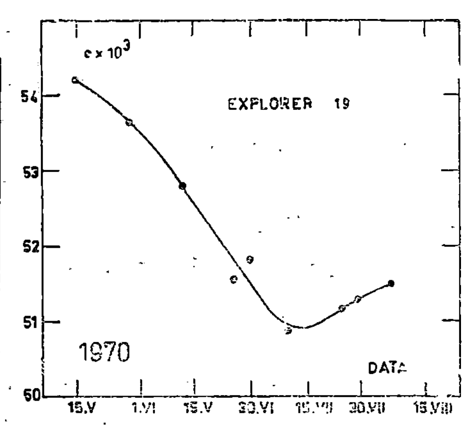


Fig. 3.

În fig. 4 sînt reprezentate în funcţie de timp următoarele mărimi: fluxul solar pe lungimea de undă de 10,7 cm ($S_{10,7}$), variaţia globală a perioadei cvasinodale $\left(\frac{dT}{dn}\right)_t$ precum şi variaţiile acestora cauzate de rezistenţa atmosferei, $\left(\frac{dT}{dn}\right)_{ad}$, respectiv presiunea radiaţiei solare directe, $\left(\frac{dT}{dn}\right)_{srp}$.

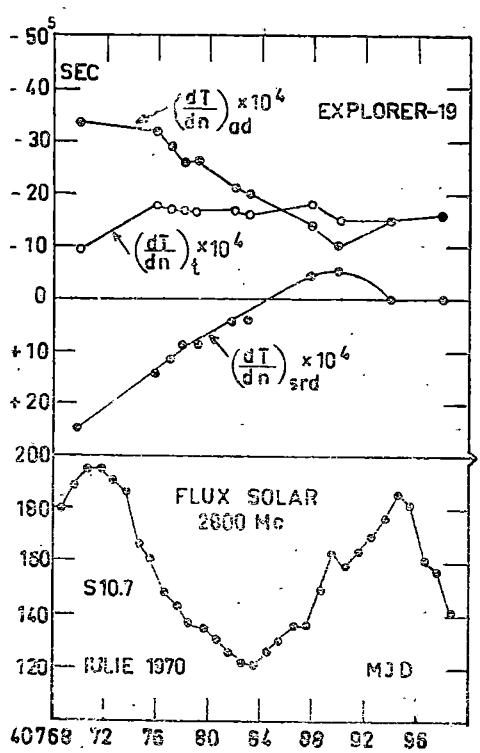


Fig. 4.

6. **Concluzii.** a) La înălţimi mari, cum este cazul satelitului Explorer-19 ($h_\pi \simeq 950$ km), efectul presiunii radiaţiei solare directe asupra perioadei cvasinodale este comparabil cu cel al frînării atmosferei (fig. 3).

b) Din cauză că numărul de observaţii simultane de care am dispus este prea mic, nu putem afirma că există o corelaţie evidentă între fluxul solar pe lungimea de undă de 10,7 cm şi variaţia perioadei cvasinodale. În această situaţie se impune folosirea şi a observaţiilor nesimultane.

c) Precizia de determinare a perioadei cvasinodale este de $0^m\!\!.0\,005$ — — $0^m\!\!.001$, iar a variaţiei perioadei de $0^m\!\!.00\,005$/rev. — $0^m\!\!.0\,001$/rev. Valorile obţinute pentru variaţia perioadei cvasinodale a satelitului Explorer-19 sînt comparabile cu eroarea de determinare a acestei variaţii, ceea ce confirmă rezultatele din [11].

(Intrat în redacţie la 10 ianuarie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. A. Pál, T. Oproiu, *Calcule de orbite instantanee ale sateliţilor artificiali ai Pămîntului, în cadrul programului „INTEROBS", efectuate cu maşina electronică „DACICC-1"*, St. Cerc. Astr., *12*, 1, 1967, 39.
2. I. D. Zhongolovich, *On the Use of the Results Obtained from Synchronous Observations of the Artificial Satelites of the Earth from the INTEROBS Programme for Scientific Purposes*, în *Trajectories of Artificial Celestial Bodies as Determined from Observations*, Ed. J. Kovalevsky, Berlin — Heidelberg — New York, 1966, 1.
3. A. Horváth, *Metod opredeleniia polojeniia sputnika dlia issledovaniia izmeneniia ego perioda obraşceniia po nemnoghim nabliudeniiam*, Naucinîe Inf., **25**, 1972, 30.

4. Yu. V. Batrakov, *Perturbations in the Motion of a Satellite due to the Second Zonal Harmonic of the Earth's Potential*, în *International Symposium on Satellite Dynamics*, Paris, 1962.
5. I. D. Jongolovici, *Metodî predvaritelnoi obrabotki nabliudenii, proizvodiașcihsia po programme INTEROBS*, Nabl. ISZ, *4*, 1966, 77.
6. Gh. Chiș, A. Pál, T. Oproiu, *Ob opredelenii kvazidrakoniceskogo perioda iskusstvennîh sputnikov Zemli. Primenenie k Kosmosu* 44 (1964—53—1), Nabl. ISZ, *8*, 1969, 222.
7. N. P. Erpîliov, *Opredelenie raznosti mejdu kvazidrakoniceskimi i drakoniceskim periodami obrașceniia iskusstvennîh sputnikov Zemli*, Nabl. ISZ, *9*, 1970, 55.
8. M. Ill, *O vîcislenii momentov prohojdeniia iskusstvennogo sputnika Zemli cerez opredelennîi nebesnîi krug*, Biull. SON ISZ, *53*, 1969, 21.
9. T. V. Kasimenko, *Nekotorîe rezultatî opredeleniia drakoniceskogo perioda obrașceniia sputnika 1960 ε3 , iz bazisnîh vizualnîh nabliudenii*, Nabl, ISZ, **4**, 1966, 144.
10. E. Illés — Almár, I. Almár, *Period Changes of the Satellite 1960 ε 3 in 1963*, Mitt. der Sternwarte der Ung. Akad. der Wissenschaften, **59**, 1965, 1.
11. T. V. Kasimenko, *O tocinosti opredeleniia izmenenii perioda sputnika po ego bazisnîm vizualnîm nabliudeniiam*, Naucinîe Inf., **9**, 1968, 15.
12. A. Horváth, *Sravnenie velicin uskorenii sputnika 1963 53 A, voznikaiușcih iz-za atmosfernogo tormojeniia i davleniia solnecinoi radiației*, Nabl. ISZ, **8**, 1969, 187.

DÉTERMINATION DE LA VARIATION DE LA PÉRIODE QUASI-NODALE DU SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE. APPLICATION AU SATELLITE EXPLORER-19

(Résumé)

On présente les méthodes de travail employées à l'Observatoire Astronomique de Cluj-Napoca (Station No. 1132) pour déterminer la période quasi-nodale, ainsi que sa variation, des satellites artificiels de la Terre. Dans ce but, on a employé des observations quasi-simultanées effectuées dans le cadre du programme ATMOSPHERE. Une application numérique pour le satellite Explorer-19 est présentée.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

A DEFINITION OF AN INFORMATIONAL ENERGY IN FUZZY SETS THEORY

D. DUMITRESCU

A. De Luca and S. Termini [1] have introduced a concept of entropy of a fuzzy set as a measure of its degree of fuzziness. This quantity can be interpreted, in analogy with the Shannon's entropy, as a measure of a quantity of information. The notion of informational energy, as an alternative way of building an Information Theory, was introduced by O. Onicescu [2]. In this note we propose the concept of informational energy of a fuzzy set. The informational energy of a fuzzy set can be interpreted as a measure of the degree of nonfuzziness.

Let us consider a set $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ and a lattice L. An L-fuzzy set f (Goguen [3]) on the set X is a function $f: X \to L$. The case $L = [0, 1]$ is the particular case of fuzzy sets in the original sense of Zadeh [4], and will be considered in this paper. We define (follows [1]) the entropy of the fuzzy set f by the functional

$$d(f) = H(f) + H(\bar{f}) = K \sum_{i=1}^{N} S(f(x_i)), \tag{1}$$

where $H(f)$ is the functional given by

$$H(f) = -K \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \ln f(x_i), \tag{2}$$

K is a positive constant, $\bar{f}$ is the complement of f, defined by $\bar{f}(x) = 1 - f(x)$ for all x of X, and S is the Shannon's function $S(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln (1 - x)$. The entropy $d(f)$ satisfies the following properties [1]:

i) $d(f) = 0$ if and only if $f(x) = 0$ or $f(x) = 1$ for all x of X,

ii) $d(f)$ assume the maximum value if and only if $f(x) = 1/2$ for all x of X,

iii) $d(f^*) \leq d(f)$ if f^* satisfies the following inequalities:
$0 \leq f^*(x) \leq f(x) \leq 1/2$ for $0 \leq f(x) \leq 1/2$,
$1 \geqslant f^*(x) \geqslant f(x) \geqslant 1/2$ for $1/2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

We introduce now a new functional $E(f)$ which we call the informational energy of the fuzzy set f:

$$E(f) = \sum_{i=1}^{N} [f^2(x_i) + \bar{f}^2(x_i)] = \sum_{i=1}^{N} e(f(x_i)), \tag{3}$$

where

$$e(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

The equality (3) can be written as

$$E(f) = p(f) + p(\bar{f}),$$

where

$$p(f) = \sum_{i=1}^{N} f^2(x_i).$$

The informational energy $E(f)$ satisfies the properties:

i) $E(f) = E(\bar{f})$,

ii) $E(f)$ assume the minimum value if and only if $f(x_i) = 1/2$ for all x_i of X,
$E(f)$ assume the maximum value if and only if $f(x_i) = 0$ or $f(x_i) = 1$ for all x_i of X.

iii) $E(g) \leq E(f)$ where g is any fuzzy set such that
$g(x) \leq f(x)$ if $g(x) \geqslant 1/2$
$g(x) \geqslant f(x)$ if $g(x) \leq 1/2$.

PROPOSITION 1. *$p(f)$ is a isotone valuation on the lattice $\mathfrak{L}(X)$ of the fuzzy sets $f: X \to L$, i.e. $p(f) + p(g) = p(f \vee g) + p(f \wedge g)$ for all f, g of $\mathfrak{L}(X)$.*

PROPOSITION 2. *$E(f)$ is a valuation on the lattice $\mathfrak{L}(X)$.*

Proof. $E(f) + E(g) = p(f) + p(\bar{f}) + p(g) + p(\bar{g}) =$
$= p(f \wedge g) + p(f \wedge g) + p(\overline{f \wedge g}) + p(\overline{f \vee g}) =$
$= E(f \wedge g) + E(f \wedge g)$.

Let us consider the problem of making a classification of the elements of X in two classes. We consider $f(x_i)$ $(\bar{f}(x_i))$ as the degree to which x_i belongs to the first (second) class. The incertitude present when we must decide to which class x_i belongs, can be measured by $S(f(x_i))$ (follows [1]).

The certainty present when we make a decision concerning x_i can be measured by $e(f(x_i))$, and the total certainty is the informational energy $\sum_{i=1}^{N} e(f(x_i))$.

Let us now consider an experiment in which the elements $x_1, x_2, \ldots, x_N$ of X may occur with the probabilities $p_1, p_2, \ldots, p_N (p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1)$, and a fuzzy set f is defined in X.

The informational energy will be, in this case, defined by:

$$E(f; p_1, p_2, \ldots, p_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 e(f(x_i)). \tag{4}$$

In the classical (non-fuzzy) situation, $f(x_i) \in \{0, 1\}$, we obtain from (4) the Onicescu's informational energy.

By using the informational energy we can organize $\mathfrak{L}(X)$ as a pseudometric space, with respect to the pseudometric

$$\rho(f, g) = |E(f) - E(g)|,$$

Let us define in $\mathfrak{L}(X)$ the equivalence relation $f \sim g$ iff $E(f) = E(g)$. Then the quotient space $L(X) = \mathfrak{L}(X)/\sim$ is a metric space with respect to the metric

$$\rho(\tilde{f}, \tilde{g}) = |E(\tilde{f}) - E(\tilde{g})| = |E(f) - E(g)|,$$

for any $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ of $L(X)$ and f of $\tilde{f}$.

In conclusion, the informational energy previously defined can play a relevant role in the problems of making decision to classify the elements of a fuzzy set into two classes, having, opposite to the entropy, the advantage of a very simple evaluation.

(Received January 22, 1977)

REFERENCES

1. A. De Luca, S. Termini, *A definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory*, Information and Control, **20**, 4, 1972, 301—312.
2. O. Onicescu, *Energie Informationnelle*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **263**, 22, 1966, 841—842.
3. J. A. Goguen, *L — fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl, **18**, 1967, 145—175.
4. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, **8**, 3 1965, 338—353.
5. G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 25, 1967.

O DEFINIȚIE A UNEI ENERGII INFORMAȚIONALE ÎN TEORIA MULȚIMILOR VAGI

(Rezumat)

Se propune o noțiune de energie informațională a unei mulțimi vagi (fuzzy set) și se dau cîteva proprietăți ale acestei energii.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

NATURAL UNIFORM CONVERGENCE STRUCTURES FOR CONVERGENCE GROUPS

CSABA NÉMETHI

In this paper we show that natural uniform convergence structures can be defined on convergence groups and establish several properties of them. The left, right and two-sided uniform convergence structures we introduce are useful for the study of convergence groups, because, as can be seen from the last section, a number of results concerning convergence groups can be deduced from the theory of uniform convergence spaces, and in addition these natural uniform convergence structures make possible the completion of convergence groups.

1. **Terminology and Notations.** Let X be a set. The collection of all (proper) filters on X will be denoted by $F(X)$. For a nonempty $A \subseteq X$ let $[A]$ be the principal filter on X generated by the set A; when $A = \{x\}$, we shall write $[x]$ instead of $[\{x\}]$. The diagonal of X will be denoted by Δ. For any $P, Q \subseteq X \times X$ let $P^{-1} = \{(x, y) \in X \times X | (y, x) \in P\}$ and $PoQ = \{(x, y) \in X \times X | (\exists z \in X)[(x, z) \in P \wedge (z, y) \in Q]\}$. If $\Phi \in F(X \times X)$, then $\Phi^{-1} = \{P^{-1} | P \in \Phi\}$ is again a filter on $X \times X$. For $\Phi, \psi \in F(X \times X)$ the set $\{PoQ | P \in \Phi, Q \in \psi\}$ is a filter base iff all the PoQ are nonempty; in this case it generates a filter denoted by $\Phi o \psi$.

Let $f: X \to Y$ be a mapping, where X and Y are sets. If $\mathfrak{F} \in F(X)$, the image of $\mathfrak{F}$ under f (which is a filter on Y) will be denoted by $f(\mathfrak{F})$. If f is onto and $\mathfrak{G} \in F(Y)$, we shall denote by $f^{-1}(\mathfrak{G})$ the counter-image of $\mathfrak{G}$ under f (which is a filter on X).

If $\mathfrak{F} \in F(X)$ and $\mathfrak{G} \in F(Y)$, then $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ denotes the product filter on $X \times Y$, obtained from $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{G}$. For $f_1: X_1 \to Y_1$ and $f_2: X_2 \to Y_2$ we define the mapping $f_1 \times f_2: X_1 X X_2 \to Y_1 \times Y_2$ by $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

Let $(G, +)$ be a (not necessarily commutative)group. The *left* and *right subtractions* are the mappings $S_L, S_R: G \times G \to G$, defined by $S_L(x, y) = -x + y$, $S_R(x, y) = x - y$. If $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in F(G)$, we shall write $-\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, $-\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}$ rather than $-(\mathfrak{F})$, $+(\mathfrak{F} \times \mathfrak{G})$, $S_L(\mathfrak{F} \times \mathfrak{G})$, $S_R(\mathfrak{F} \times \mathfrak{G})$ respectively. Of course, $-\mathfrak{F} + \mathfrak{G} = (-\mathfrak{F}) + \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{F} - \mathfrak{G} = \mathfrak{F} + (-\mathfrak{G})$.

A *convergence structure* (CS) [2] on the set X is a mapping $\sigma: X \to \mathfrak{P}(F(X))$ such that for any $x \in X$, $\sigma(x)$ is an $\bigcap$-ideal in $F(X)$ and $[x] \in \sigma(x)$. In this case the couple (X, σ) is called a *convergence space.* If (X, σ), (Y, σ') are convergence spaces, a mapping $f: X \to Y$ is said to be *continuous at the point* $x \in X$ if $\mathfrak{F} \in \sigma(x)$ implies $f(\mathfrak{F}) \in \sigma'(f(x))$; f is called *continuous* if it is continuous at every point of X.

A *uniform convergence structure* (UCS) [1] on X is an $\bigcap$-ideal $\mathcal{S}$ in $F(X \times X)$, such that $[\Delta] \in \mathcal{S}$, $\Phi \in \mathcal{S}$ implies $\Phi^{-1} \in \mathcal{S}$ and $\Phi, \psi \in \mathcal{S}$ imply $\Phi o \psi \in \mathcal{S}$ whenever the composition $\Phi o \psi$ exists. Then the pair $(X, \mathcal{S})$ is called a *uniform convergence space.* If $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{S}')$ are uniform convergence spaces, a mapping $f: X \to Y$ is said to be *uniformly continuous* if $\Phi \in \mathcal{S}$

implies $(f \times f)(\Phi) \in \mathcal{S}'$. Any *UCS* $\mathcal{S}$ on X induces a *CS* $\sigma(\mathcal{S})$ on X, where $\sigma(\mathcal{S})(x) = \{\mathcal{F} \in F(X) \mid \mathcal{F} \times [x] \in \mathcal{S}\} = \{\mathcal{F} \in F(X) \mid [x] \times \mathcal{F} \in \mathcal{S}\}$ for each $x \in X$. We remark that the verification of the axioms of a *CS* for $\sigma(\mathcal{S})$ does not make use of the last property of $\mathcal{S}$ (concerning the composition of filters).

By a *convergence group* (*CG*) [2] we shall mean a triplet $(G, +, \sigma)$, where $(G, +)$ is a group and σ is a *CS* on G, compatible with the group-structure of G, i.e. the mappings $(x, y) \mapsto x + y$ and $x \mapsto -x$ are continuous. This means that $\mathcal{F} \in \sigma(x)$, $\mathcal{G} \in \sigma(y)$ imply $\mathcal{F} + \mathcal{G} \in \sigma(x + y)$ and $-\mathcal{F} \in \sigma(-x)$.

2. Uniform Convergence Structures on a Convergence Group.

DEFINITION 1. Let $(G, +)$ be a group and $\mathcal{S}$ a *UCS* on G. $\mathcal{S}$ is called *left invariant* if for any $\Phi \in \mathcal{S}$ and $f: G \times G \to G$ we have $f_L(\Phi) \in \mathcal{S}$, where $f_L: G \times G \to G \times G$ is defined by $f_L(x, y) = (f(x, y) + x, f(x, y) + y)$. Analogously, $\mathcal{S}$ is called *right invariant* if for any $\Phi \in \mathcal{S}$ and $f: G \times G \to G$ we have $f_R(\Phi) \in \mathcal{S}$, where $f_R: G \times G \to G \times G$ is defined by $f_R(x, y) = (x + f(x, y), y + f(x, y))$.

THEOREM 1. *Let $(G, +, \sigma)$ be a CG whose neutral element is O and define:*
$\mathcal{S}_L = \mathcal{S}_L(\sigma) = \{\Phi \in F(G \times G) \mid S_L(\Phi) \in \sigma(O)\}$;
$\mathcal{S}_R = \mathcal{S}_R(\sigma) = \{\Phi \in F(G \times G) \mid S_R(\Phi) \in \sigma(O)\}$.
Then $\mathcal{S}_L(\mathcal{S}_R)$ is the unique left (right) invariant UCS on G that induces σ.

Proof. $\mathcal{S}_L$ is a *UCS*. Indeed, if $\Phi \in \mathcal{S}_L$ and $\Phi \subseteq \psi \in F(G \times G)$, then $\psi \in \mathcal{S}_L$, because $\mathcal{S}_L(\Phi) \subseteq S_L(\psi)$; if $\Phi, \psi \in \mathcal{S}_L$, then the equality $S_L(\Phi \cap \psi) = S_L(\Phi) \cap \mathcal{S}_L(\psi)$ implies that $\Phi \cap \psi \in \mathcal{S}_L$; $[\Delta] \in \mathcal{S}_L$, as $\mathcal{S}_L([\Delta]) = [O]$; $\Phi \in \mathcal{S}_L$ implies $\Phi^{-1} \in \mathcal{S}_L$, because of the trivial equality $S_L(\Phi^{-1}) = -S_L(\Phi)$; finally, supposing that $\Phi, \psi \in \mathcal{S}_L$ and $\Phi \circ \psi$ exists, it follows that $\Phi \circ \psi \in \mathcal{S}_L$, as one can see from the obvious inclusion $S_L(\Phi) + S_L(\psi) \subseteq S_L(\Phi \circ \psi)$.

In order to prove that $\sigma(\mathcal{S}_L) = \sigma$, it is sufficient to observe that for any $\mathcal{F} \in F(G)$ and $x \in G$ we have the equivalences:

$$\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{S}_L)(x) \Leftrightarrow [x] \times \mathcal{F} \in \mathcal{S}_L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_L([x] \times F) = -[x] + \mathcal{F} \in \sigma(0) \Leftrightarrow \mathcal{F} \in \sigma(x).$$

The statement that $\mathcal{S}_L$ is left invariant is easily seen from the equality $S_L(f_L(\Phi)) = S_L(\Phi)$, which is true for any $\Phi \in F(G \times G)$ and $f: G \times G \to G$.

Now let $\mathcal{S}$ be another left invariant *UCS* on G such that $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma$. Let $f, g: G \times G \to G$ be defined by $f(x, y) = -x$, $g(x, y) = x$. Then for any $\Phi \in F(G \times G)$ we have the implications:

$$\Phi \in \mathcal{S} \Rightarrow f_L(\Phi) = [O] \times S_L(\Phi) \in \mathcal{S} \Rightarrow g_L(f_L(\Phi)) = \Phi \in \mathcal{S},$$

that is, $\Phi \in \mathcal{S}$ is equivalent to $[O] \times S_L(\Phi) \in \mathcal{S}$. But:

$$[O] \times \mathcal{S}_L(\Phi) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{S}_L(\Phi) \in \sigma(\mathcal{S})(O) = \sigma(O) \Leftrightarrow \Phi \in \mathcal{S}_L.$$

Thus we have shown that $\mathcal{S} = \mathcal{S}_L$.

Definition 2. Let $(G, +, \sigma)$ be a *CG*. The *UCS* $\mathcal{S}_L(\mathcal{S}_R)$ is called the *left* (*right*) *UCS* of $(G, +, \sigma)$. We also define the *two-sided UCS* $S_T = \mathcal{S}_T(\sigma)$ of $(G, +, \sigma)$ by the equality $\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_L \cap \mathcal{S}_R$.

It is obvious that $\mathcal{S}_T$ induces σ, too.

Theorem 2. *Let* $(G, +, \sigma)$ *be a CG.*

a) *Any left (right) translation* $x \to a + x (x \to x + a)$ *is both* $\mathcal{S}_L - \mathcal{S}_L$ *and* $\mathcal{S}_R - \mathcal{S}_R$ *— uniformly continuous, hence it is also* $\mathcal{S}_T - \mathcal{S}_T$ *— uniformly continuous.*

b) *The symmetry* $x \to -x$ *is both* $\mathcal{S}_L - \mathcal{S}_R$ *and* $\mathcal{S}_R - \mathcal{S}_L$ *— uniformly continuous, hence it is also* $\mathcal{S}_T - \mathcal{S}_T$ *— uniformly continuous.*

The trivial proof is omitted.

Theorem 3. *Let* $(G, +, \sigma)$ *and* $(G', +, \sigma')$ *be CG. If a group-homomorphism* $f: G \to G'$ *is continuous at a point* $x \in G$, *then it is both* $\mathcal{S}_L(\sigma) - \mathcal{S}_L(\sigma')$ *and* $\mathcal{S}_R(\sigma) - \mathcal{S}_R(\sigma')$ *— uniformly continuous, hence it is also* $\mathcal{S}_T(\sigma) - \mathcal{S}_T(\sigma')$ *— uniformly continuous.*

Proof. We denote by 0 and $0'$ the neutral elements of G and G' respectively. Let $\Phi \in \mathcal{S}_L(\sigma)$, i.e. $S_L(\Phi) \in \sigma(0)$. Then $[x] + S_L(\Phi) \in \sigma(x)$. thus $f([x] + S_L(\Phi)) = [f(x)] + S_L((f \times f)(\Phi)) \in \sigma'(f(x))$. However this implies that $S_L((f \times f)(\Phi)) \in \sigma'(0')$, i.e. $(f \times f)(\Phi) \in S_L(\sigma')$. Thus it follows that f is $\mathcal{S}_L(\sigma) - \mathcal{S}_L(\sigma')$ — uniformly continuous.

Theorem 4. *Let* $(G, +)$ *be a group and* $(\sigma_i)_{i \in I}$ *a family of CS on* G, *compatible with the group-structure of* G. *Then* $\mathcal{S}_L(\bigcap_{i \in I} \sigma_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_L(\sigma_i)$, $\mathcal{S}_R(\bigcap_{i \in I} \sigma_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_R(\sigma_i)$ *and* $\mathcal{S}_T(\bigcap_{i \in I} \sigma_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_T(\sigma_i)$.

The proof, being trivial, is omitted.

It is obvious that for a commutative *CG* $\mathcal{S}_L = \mathcal{S}_R = \mathcal{S}_T$. In order to extend this result we introduce the following notation: if $(G, +)$ is a group and $\mathcal{F} \in F(G)$, $\mathcal{F}^*$ will denote the filter on G for which a base is formed of the sets $F^* = \{x + a - x \mid x \in G, \ a \in F\}$, with $F \in \mathcal{F}$.

Theorem 5. *For any CG* $(G, +, \sigma)$ *the following statements are equivalent:*

(a) $\mathcal{S}_L = \mathcal{S}_R$;

(b) $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{S}_L$;

(c) $\mathcal{S}_L \subseteq \mathcal{S}_R$;

(d) *The symmetry* $x \mapsto -x$ *is* $\mathcal{S}_L - \mathcal{S}_L$ *— uniformly continuous;*

(e) *The symmetry* $x \mapsto -x$ *is* $\mathcal{S}_R - \mathcal{S}_R$ *— uniformly continuous;*

(f) $\mathcal{F} \in \sigma(0)$ *implies* $\mathcal{F}^* \in \sigma(0)$.

Proof. The implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (*d*) and (a) $\Rightarrow$ (*c*) $\Rightarrow$ (*e*) are obvious.

(d) $\Rightarrow$ (f). We denote the mapping $x \mapsto -x$ by s. Suppose $\mathcal{F} \in \sigma(0)$. Consider the filter Φ on $G \times G$ generated by the filter base formed of the sets $\{(x, x - a) \mid x \in G, \ a \in F\}$, where $F \in \mathcal{F}$. As $\mathcal{S}_L(\Phi) = -\mathcal{F}$, we have $\Phi \in \mathcal{S}_L$, thus $(s \times s)(\Phi) \in \mathcal{S}_L$, i.e. $S_L((s \times s)(\Phi)) \in \sigma(0)$. The filter $(s \times s)(\Phi)$ is generated by the sets $\{(-x, a - x) \mid x \in G, \ a \in F\}$, with $F \in \mathcal{F}$. Then $S_L((s \times s)(\Phi)) = \mathcal{F}^*$, hence $\mathcal{F}^* \in \sigma(0)$.

(e) $\Rightarrow$ (f). Analogously.

(f) $\Rightarrow$ (a). Let $\Phi \in \mathcal{S}_L$, i.e. $S_L(\Phi) \in \sigma(O)$. Then, denoting $S_L(\Phi)$ by $\mathcal{F}$, we have $\mathcal{F}^* \in \sigma(O)$. $\mathcal{F}^*$ is generated by the sets of the form $\{x - a + b - x \mid x \in G, (a, b) \in P\}$, where $P \in \Phi$. Thus we have $\mathcal{F}^* \subseteq - S_R(\Phi)$, hence $- S_R(\Phi) \in \sigma(O)$, i.e. $\Phi \in \mathcal{S}_R$. Consequently $\mathcal{S}_L \subseteq \mathcal{S}_R$ A similar argument shows that $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{S}_L$.

When $\mathcal{S}_L$ and $\mathcal{S}_R$ are equal, they will be denoted by $\mathcal{S}(\sigma)$.

3. **Uniform Convergence Structures on Subgroups. Direct Products and Quotients.** If X is a set, $Y \subseteq X$ and σ, $\mathcal{S}$ are a CS and a UCS on X, then we denote by $\sigma|_Y$ and $\mathcal{S}|_Y$ the relative CS and UCS on Y, obtained from σ and $\mathcal{S}$ respectively (see [2], [1]).

Analogously, if $(X_i)_{i \in I}$ is a set-indexed family of sets and σ_i, $\mathcal{S}_i$ are CS and UCS on X_i, $i \in I$, then we denote by $\Pi_{i \in I}\sigma_i$ and $\Pi_{i \in I} \mathcal{S}_i$ the product CS and UCS on $\Pi_{i \in I}X_i$, obtained from σ_i, $i \in I$ and $\mathcal{S}_i$, $i \in I$ respectively (see [2], [1]).

THEOREM 6. *Let $(G, +, \sigma)$ be a CG and H a subgroup of G. Then* $\mathcal{S}_L(\sigma|_H) = S_L(\sigma)|_H$, $\mathcal{S}_R(\sigma|_H) = \mathcal{S}_R(\sigma)|_H$ *and* $\mathcal{S}_T(\sigma|_H) = \mathcal{S}_T(\sigma)|_H$.

THEOREM 7. *Let $((G_i, +, \sigma_i))_{i \in I}$ be a set-indexed family of CG. Then* $\mathcal{S}_L(\Pi_{i \in I}\sigma_i) = \Pi_{i \in I}\mathcal{S}_L(\sigma_i)$, $\mathcal{S}_R(\Pi_{i \in I}\sigma_i) = \Pi_{i \in I}\mathcal{S}_R(\sigma_i)$ *and* $\mathcal{S}_T(\Pi_{i \in I} = \Pi_{i \in I}\mathcal{S}_T(\sigma_i)$.

The proofs are trivial, hence omitted.

Now let X be a set and ρ an equivalence relation on X. We denote by X/ρ the set of all equivalence classes and let $\varphi : X \to X/\rho$ be the corresponding canonical mapping. If σ is a CS on X, we denote by σ/ρ the *quotient* CS of σ with respect to the equivalence relation $\rho\cdot$ σ/ρ is a CS on X/ρ, such that $(\sigma/\rho)(\hat{x})$ is the $\bigcap$-ideal in $F(X/\rho)$ generated by the set $\{\varphi(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \sigma(x), \varphi(x) = \hat{x}\}$ for each $\hat{x} \in X/\rho$ (see [2]).

A similar notion can be introduced for uniform convergence spaces. Namely, let $\mathcal{S}$ be a UCS on X and let us denote by $\mathcal{S}/\rho$ the $\bigcap$-ideal in $F(X/\rho \times X/\rho)$ generated by the set $\{(\varphi \times \varphi)(\Phi) \mid \Phi \in \mathcal{S}\}$. As one can easily see, $\mathcal{S}/\rho = \{\hat{\Phi} \in F(X/\rho \times X/\rho) \mid (\exists \Phi \in \mathcal{S})(\varphi \times \varphi)(\hat{\Phi}) \subseteq \Phi\}$. $\mathcal{S}/\rho$ satisfies all the axioms of a UCS, except the last of them (regarding the composition of filters). If this axiom is also satisfied, we call $\mathcal{S}/\rho$ the *quotient* UCS of $\mathcal{S}$ with respect to the equivalence relation ρ. It is not hard to see that $\sigma(\mathcal{S})/\rho \subseteq \sigma(\mathcal{S}/\rho)$. Without entering into details we just mention that the notion of quotient can be defined also without any restriction on the given uniform convergence space, but the case considered above will be sufficient for our purposes.

THEOREM 8. *Let $(G, +, \sigma)$ be a CG and N a normal divisor of G. Let ρ be the equivalence relation on G associated with N. Then* $\mathcal{S}_L(\sigma/\rho) = \mathcal{S}_L(\sigma)/\rho$ *and* $\mathcal{S}_R(\sigma/\rho) = \mathcal{S}_R(\sigma/\rho)$.

Proof. We shall denote by O and $\hat{O}$ the neutral elements of G and G/ρ respectively. Let $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}_L(\sigma/\rho)$, i. e. $S_L(\hat{\Phi}) \in (\sigma/\rho)(\hat{O})$. This means that there exist $x_1, \ldots, x_n \in G$ and $\mathcal{F}_1 \in \sigma(x_1), \ldots, \mathcal{F}_n \in \sigma(x_n)$ such that $\varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = \hat{O}$ and $\varphi(\mathcal{F}_1) \cap \ldots \cap \varphi(\mathcal{F}_n) \subseteq \mathcal{S}_L(\hat{\Phi})$. Let $\mathcal{G}_1 =$

$= -[x_1] + \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{G}_n = -[x_n] + \mathcal{F}_n$. Then $\varphi(\mathcal{G}_1) = \varphi(\mathcal{F}_1), \ldots, \varphi(\mathcal{G}_n) = \varphi(\mathcal{F}_n)$, thus $\varphi(\mathcal{G}_1) \cap \ldots \cap \varphi(\mathcal{G}_n) \subseteq S_L(\hat{\Phi})$ and hence

$$S_L^{-1}(\varphi(\mathcal{G}_1) \cap \ldots \cap \varphi(\mathcal{G}_n)) = (\varphi \times \varphi)(S_L^{-1}(\mathcal{G}_1) \cap \ldots \cap S_L^{-1}(\mathcal{G}_n)) \subseteq$$

$$\subseteq S_L^{-1}(S_L(\hat{\Phi})) \subseteq \hat{\Phi}.$$

But $S_L^{-1}(\mathcal{G}_1), \ldots, S_L^{-1}(\mathcal{G}_n) \in \mathcal{S}_L(\sigma)$, because $S_L(S_L^{-1}(\mathcal{G}_1)) = \mathcal{G}_1 \in \sigma(0), \ldots, S_L(S_L^{-1}(\mathcal{G}_n)) = \mathcal{G}_n \in \sigma(O)$. It follows that $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}_L(\sigma)/\rho$.

Conversely, let $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}_L(\sigma)/\rho$. Then there exists a filter $\Phi \in \mathcal{S}_L(\sigma)$ such that $(\varphi \times \varphi)(\Phi) \subseteq \hat{\Phi}$. But $\Phi \in \mathcal{S}_L(\sigma)$ means that $S_L(\Phi) \in \sigma(O)$. We have $S_L((\varphi \times \varphi)(\Phi)) = \varphi(S_L(\Phi)) \subseteq S_L(\hat{\Phi})$, thus $S_L(\hat{\Phi}) \in (\sigma/\rho)(\hat{O})$, i.e $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}_L(\sigma|\rho)$

COROLLARY 1. *Under the hypotheses of Theorem 8* $\mathcal{S}_L(\sigma)/\rho$ *and* $\mathcal{S}_R(\sigma)/\rho$ *are UCS on* G/ρ, *thus they are the quotient UCS of* $\mathcal{S}_L(\sigma)$ *and* $\mathcal{S}_R(\sigma)$ *respectively under the equivalence relation* ρ.

COROLLARY 2. *Under the hypotheses of Theorem 8 let* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_L(\sigma)$ $(\mathcal{S} = \mathcal{S}_R(\sigma))$. *Then* $\sigma(\mathcal{S})/\rho = \sigma(\mathcal{S}/\rho) = \sigma/\rho$.

Proof. Let $\mathcal{S} = \mathcal{S}_L(\sigma)$. We have $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma$ (Theorem 1), thus $\sigma(\mathcal{S})/\rho = \sigma/\rho$. In addition $\mathcal{S}/\rho = \mathcal{S}_L(\sigma/\rho)$ (Theorem 8), thus $\sigma(\mathcal{S}/\rho) = \sigma(\mathcal{S}_L(\sigma/\rho)) = \sigma/\rho$ (Theorem 1).

4. **Uniform Convergence Structures on Function Groups.** Let $(Y, \mathcal{S})$ be a uniform convergence space, X a set and $Z \subseteq X$. The *UCS of uniform convergence in Z* [1] is a *UCS* on Y^X, defined by

$$\mathcal{U}_Z = \mathcal{U}_Z(\mathcal{S}) = \{\tilde{\Phi} \in F(Y^X \times Y^X) \mid [\tilde{\Phi}, Z] \in \mathcal{S}\},$$

where $[\tilde{\Phi}, Z]$ is the filter on Y generated by the filter base composed of the sets

$$[\tilde{P}, Z] = \{(f(x), g(x)) \mid (f, g) \in \tilde{P},\ x \in Z\},$$

with $\tilde{P} \in \tilde{\Phi}$. We shall write υ_Z or $\upsilon_Z(\mathcal{S})$ in place of $\sigma(\mathcal{U}_Z)$.

If $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, then $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}) = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} \mathcal{U}_Z(\mathcal{S})$ is called the *UCS of uniform convergence on the collection* $\mathcal{Z}$. Again we shall write $\upsilon_{\mathcal{Z}}$ or $\upsilon_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S})$ instead of $\sigma(\mathcal{U}_{\mathcal{Z}})$, and we remark that $\upsilon_{\mathcal{Z}} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} \upsilon_Z$.

Now suppose that we are given a *commutative CG* $(G, +, \sigma)$ and the role of $(Y, \mathcal{S})$ is played by $(G, \mathcal{S}(\sigma))$. It is easy to see that for any $Z \subseteq X$ $\mathcal{U}_Z(\mathcal{S}(\sigma))$ is compatible with the natural group — structure of G^X, and hence so is $\upsilon_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}(\sigma))$ for any $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

THEOREM 9. *We have* $\mathcal{S}(\upsilon_Z(\mathcal{S}(\sigma))) = \mathcal{U}_Z(\mathcal{S}(\sigma))$ *for any* $Z \subseteq X$.

Proof. We denote by O and $\tilde{O}$ the neutral elements of G and G^X respectively. Let $\tilde{\Phi} \in F(G^X \times G^X)$. Then the following equivalences hold:

$$\tilde{\Phi} \in \mathcal{S}(\upsilon_Z(\mathcal{S}(\sigma))) \Leftrightarrow S_L(\tilde{\Phi}) \in (\upsilon_Z(\mathcal{S}(\sigma)))(\tilde{O}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_L(\tilde{\Phi}) \times [\tilde{O}] \in \mathcal{U}_T(\mathcal{S}(\sigma)) \Leftrightarrow [S_L(\tilde{\Phi}) \times [\tilde{O}], Z] \in \mathcal{S}_R(\sigma) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_R([S_L(\tilde{\Phi}) \times [\tilde{O}], Z]) \in \sigma(O).$$

On the other hand

$$\tilde{\Phi} \in \mathcal{U}_Z(\mathcal{S}(\sigma)) \Leftrightarrow [\tilde{\Phi}, Z] \in \mathcal{S}(\sigma) \Leftrightarrow S_L([\tilde{\Phi}, Z]) \in \sigma(O).$$

To finish up the proof it is sufficient to observe that

$$S_R([S_L(\tilde{\Phi}) \times [\tilde{O}], Z]) = S_L([\tilde{\Phi}, Z]).$$

COROLLARY. *We have* $\mathcal{S}(\upsilon_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}(\sigma))) = \mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}(\sigma))$ *for any collection* $\mathcal{Z} \subseteq \subseteq \mathfrak{Z}(X)$.

Proof. By Theorems 4 and 9 we obtain:

$$\mathcal{S}(\upsilon_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}(\sigma))) = \mathcal{S}\left(\bigcap_{Z\in\mathcal{Z}} \upsilon_Z(\mathcal{S}(\sigma))\right) = \bigcap_{Z\in\mathcal{Z}} \mathcal{S}(\upsilon_Z(\mathcal{S}(\sigma))) =$$
$$= \bigcap_{Z\in\mathcal{Z}} \mathcal{U}_Z(\mathcal{S}(\sigma)) = \mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}(\sigma)).$$

5. **Applications.** If $(X, \mathcal{S})$ is a uniform convergence space and $\mathcal{F} \in \in F(X)$, then $\mathcal{F}$ is called an $\mathcal{S}$-*Cauchy filter* [1] if $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{S}$.

Similar notions have been defined for CG: if $(G, +, \sigma)$ is a CG whose neutral element is denoted by O and $\mathcal{F} \in F(G)$, then $\mathcal{F}$ is said to be a *left* (*right*) *Cauchy filter* [2] if $-\mathcal{F} + \mathcal{F} \in \sigma(O)$ $(\mathcal{F} - \mathcal{F} \in \sigma(O))$.

THEOREM 10. *Let* $(G, +, \sigma)$ *bea CG and* $\mathcal{F} \in F(G)$. *Then* $\mathcal{F}$ *is a left* (*right*) *Cauchy filter iff it is an* $\mathcal{S}_L(\mathcal{S}_R)$-*Cauchy filter.*

The proof is trivial.

Paragraph III Section 4 of H. R. Fischer's paper [2] contains several results concerning left (right) Cauchy filters on CG. We also mention Lemma 6 from the work [3] of H. H. Keller. Taking into account our Theorem 10, it follows that all these statements can be reobtained as particular cases of corresponding results regarding Cauchy filters on uniform convergence spaces, established by C. H. Cook and H. R. Fischer [1].

Keller ([3], Korollar to Satz 1) has shown that given a uniform convergence space $(X, \mathcal{S})$, among all UCS $\mathcal{S}'$ on X for which any $\mathcal{S}$-Cauchy filter is also an $\mathcal{S}'$-Cauchy filter, there exists a finest one (i. e. least under the inclusion), say $\mathcal{S}^*$; $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ possess the same Cauchy filters, and hence they induce the same CS (a slightly weaker statement is contained in Theorem 19 of the paper [1] of Cook and Fischer). Using our Theorem 10 we obtain:

THEOREM 11. *Given a CG* $(G, +, \sigma)$, *among all UCS* $\mathcal{S}'$ *on G for which any left* (*right*) *Cauchy filter is also an* $\mathcal{S}'$-*Cauchy filter, there exists a finest one, say* $\mathcal{S}_L^*(\mathcal{S}_R^*)$; *the left* (*right*) *Cauchy filters are precisely the* $\mathcal{S}_L^*(\mathcal{S}_R^*)$-*Cauchy filters, and hence* σ *is induced by* $\mathcal{S}_L^*(\mathcal{S}_R^*)$.

The construction from § 6 of the work [1] of Cook and Fischer, as well as the proof of Satz 4 from Keller's paper [3] yield just $\mathbb{S}_L^*(\mathbb{S}_R^*)$ for *CG*. The purpose of the mentioned authors was in fact to prove the existence of a *UCS* whose Cauchy filters are exactly the left (right) Cauchy filters. As Theorem 10 shows, $\mathbb{S}_L(\mathbb{S}_R)$ is such a *UCS*. Its construction is much simpler than that of $\mathbb{S}_L^*(\mathbb{S}_R^*)$, and, as we have seen, it is workable enough, having several useful properties.

Application to the completion of *CG* will be given in a subsequent paper.

(Received January 22, 1977)

REFERENCES

1. Cook, C. H. and Fischer, H. R., *Uniform convergence structures*, Math. Ann., **173**, 1967, 290–306.
2. Fischer, H. R., *Limesräume*, Math. Ann., **137**, 1959, 269–303.
3. Keller, H. H., *Die Limes-Uniformisierbarkeit der Limesräume*, Math. Ann., **176**, 1968, 334–341.

STRUCTURI DE CONVERGENȚĂ UNIFORME NATURALE PENTRU GRUPURI DE CONVERGENȚĂ

(Rezumat)

Se definesc și se studiază structurile de convergență uniforme stîngă, dreaptă, respectiv bilaterală pentru grupuri de convergență. Ele ne permit să privim grupurile de convergență drept cazuri particulare de spații de convergență uniforme.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

ASUPRA FRACŢIILOR CONTINUE HERMITIENE

E. DANI

1. **Introducere.** Reprezentarea numerelor întregi prin forme pătratice aritmetice de discriminant pozitiv cu ajutorul fracţiilor continue finite este o problemă complet rezolvată [2]. Metoda fracţiilor continue finite însă nu a putut fi generalizată pînă în prezent la cazul formelor pătratice aritmetice de discriminant negativ. În lucrarea de faţă, folosind notaţiile din lucrarea amintită, se va arăta printr-un procedeu constructiv că fracţiile continue hermitiene formează un instrument eficace în rezolvarea problemei reprezentării numerelor întregi prin forme pătratice aritmetice de discriminant negativ în cazul cînd norma unităţii ordinului pătratic real corespunzător este negativă. Se va arăta totodată în ce constă dificultatea de a extinde metoda fracţiilor continue hermitiene la cazul cînd norma unităţii ordinului pătratic real respectiv este pozitivă.

2. **Fracţia continuă hermitiană asociată.** Fie

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

o formă pătratică aritmetică pozitiv definită (a, b şi c sînt coeficienţi numere întregi date, iar x şi y sînt numere întregi necunoscute) cu discriminant negativ $-D^*$, $-D^* = b^2 - 4ac$, $D^* > 0$, unde D^* este diferit de un pătrat perfect şi $D^* \neq 3$.

Discriminantului $-D^*$ i se asociază ecuaţia lui Pell

$$u^2 - Dv^{*2} = 4N(\varepsilon),$$

unde $D = D^*$ dacă $D^* \equiv 0 \pmod 2$ şi $D = 4D^*$ dacă $D^* \equiv 1 \pmod 2$, iar $\varepsilon = \frac{1}{2}(u - \sqrt{D}v^*)$ este unitatea de bază (sau de ordin impar) a ordinului pătratic real de discriminant pozitiv D corespunzător. Cu $N(\varepsilon)$ s-a notat norma unităţii.

Deoarece $D \equiv 0 \pmod 2$, rezultă că $u \equiv 0 \pmod 2$. Pentru cazul $D^* \equiv 1 \pmod 2$ se va folosi în continuare notaţia $v = 2v^*$.

Formei pătratice aritmetice i se poate asocia matricea hermitiană

$$X = \begin{bmatrix} av & \frac{1}{2}(bv - ui) \\ \frac{1}{2}(bv + ui) & cv \end{bmatrix},$$

unde i este unitatea inelului numerelor întregi complexe. Numărul complex $\frac{1}{2}(bv - ui)$ este întreg deoarece $u \equiv 0 \pmod 2$, iar $v \equiv 0 \pmod 2$ în cazul $D^* \equiv 1 \pmod 2$, deci cînd $b \equiv 1 \pmod 2$. În consecinţă şi numărul complex conjugat $\frac{1}{2}(bv + ui)$ este întreg. Deoarece elementele matricei X sînt numere întregi complexe, iar norma (determinantul) matricei X este $N(X) = -N(\varepsilon)$, rezultă că matricea X este o fracție continuă, care admite o descompunere într-un produs de factori de forma

$$(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix},$$

unde q, exceptînd partea finală a operației de descompunere, se poate obține prin algoritmul lui Euclid, aplicat în inelul numerelor întregi complexe asupra numerelor cv și $\frac{1}{2}(bv - ui)$. Deoarece o astfel de descompunere nu este unică, în cele ce urmează se va considera numai o descompunere de formă specială, care să fie în concordanță cu scopul urmărit în această lucrare. Această descompunere se bazează pe faptul că fracția continuă X, în virtutea proprietății $\bar{X}^\tau = X$, este o fracție continuă hermitiană. Aici semnul bară înseamnă înlocuirea elementelor fracției continue X cu conjugatele lor, iar τ este simbolul traspunerii fracției continue (a matricei) [2].

3. **Descompunerea bilaterală a fracției continue hermitiene.** În cazul descompunerii fracțiilor continue definite peste inelul numerelor întregi complexe, pe lîngă factorii de forma (q), mai este nevoie de a considera și factori de forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

și conjugatul lui, care nu se pot exprima ca un produs de factori de forma (q). În continuare, în vederea uniformizării notației, în general și acești factori se vor nota cu simbolul (q).

De asemenea este necesară lărgirea sensului echivalenței simetrice conform definiției

$$X' \overset{s}{\sim} X'' \Leftrightarrow X' \sim ZX''\bar{Z}^\tau,$$

unde echivalența „$\sim$" își păstrează semnificația de la fracțiile continue întregi [2].

Cu notațiile introduse se poate formula relativ la descompunerea fracțiilor continue următoarea

Proprietate. Orice fracție continuă hermitiană X admite o descompunere de forma

$X \sim A\bar{A}^\tau$, dacă $N(X) = 1$, respectiv

$X \sim AH\bar{A}^\tau$, dacă $N(X) = -1$.

unde $A \sim (q_1) \ldots . (q_n)$, *iar* $H = (0)$ *sau* $H = (1)$.

Pentru a construi fracțiile continue A și H, se va aplica o descompunere bilaterală în inelul numerelor întregi complexe cu algoritmul lui Euclid. Bilateral înseamnă că algoritmul se aplică simultan asupra perechilor de numere $z = \frac{1}{2}(bv - ui)$ şi $f = av$, respectiv $\bar{z}$ şi f. Nu se detaliază în continuare această descompunere, deoarece în esență este cunoscută prin lucrarea [3].

4. **Ecuația de fracții continue asociată.** Fie

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

o fracție continuă complexă întreagă (cu elemente numere întregi complexe) cu norma $N(Z)$ egală cu o unitate a numerelor întregi complexe. Se presupune că are loc proprietatea:

$$az_1^2 + bz_1z_2 + cz_2^2 = d,$$

unde z_1 şi z_2 sînt numere întregi reale.

Fracția continuă

$$ZX\bar{Z}^\tau = Y = \begin{bmatrix} d & g \\ \bar{g} & d' \end{bmatrix}$$

este, odată cu X, tot o fracție continuă hermitiană cu norma $N(Y) = N(X)$. Aici $\bar{g}$ este conjugatul elementului g.

Numărul complex g se poate determina rezolvînd congruența $g\bar{g} + N(X) \equiv 0 \pmod{d}$. Pentru o soluție oarecare g fie există o fracție continuă Z, fie nu există. Aici două soluții g' şi g'', $g' \equiv g'' \pmod{d}$, deci aparținătoare aceleiaşi clase, nu diferă esențial între ele în sensul că ori pentru ambele soluții există un Z, ori pentru nici una dintre ele nu există.

În consecință, problema reprezentării numărului întreg d prin forma pătratică aritmetică pozitiv definită $ax^2 + bxy + cy^2$ revine la a rezolva echivalența simetrică $ZX\bar{Z}^\tau = Y$, unde X şi Y sînt fracții continue hermitiene date. Rezolvarea constă în determinarea fracției continue întregi necunoscute Z. Această determinare se poate reduce la rezolvarea unor ecuații de fracții continue întregi mai simple.

Cazul $N(X) = 1$. Pe baza proprietății descompunerii bilaterale se poate scrie $Y = B\bar{B}^\tau$ şi, avînd în vedere descompunerea bilaterală a lui X, rezultă $ZA\bar{A}^\tau\bar{Z}^\tau = B\bar{B}^\tau \Leftrightarrow P\bar{P}^\tau = E$, unde E este fracția continuă unitate şi $P = B^{-1}ZA \Leftrightarrow Z = BPA^{-1}$. Astfel, în acest caz, cînd $N(\varepsilon) = -1$, determinarea fracției continue întregi complexe Z se reduce la rezolvarea ecuației de fracții continue $P\bar{P}^\tau = E$, unde P este o fracție continuă întreagă complexă necunoscută.

Ecuația $P\bar{P}^\tau = E$ are 32 de soluții care formează un grup finit. Soluțiile sînt fracțiile continue de forma

$$P = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \text{ sau } P = \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix},$$

unde m şi n reprezintă două unități oarecare ale inelului numerelor întregi complexe. Avînd în vedere că P poate avea numai un număr finit de forme, se poate stabili printr-un procedeu finit dacă există o fracție continuă Z cu proprietatea stabilită, adică z_1 și z_2 să fie numere întregi reale și fracția continuă Z să aibă forma $Z = BPA^{-1}$.

Cazul $N(X) = -1$. Pe baza posibilității de descompunere bilaterală se poate scrie $Y = BH_2\bar{B}^\tau$ și, avînd în vedere descompunerea bilaterală a lui X, rezultă $ZAH_1\bar{A}^\tau\bar{Z}^\tau = BH_2\bar{B}^\tau \Leftrightarrow PH_1\bar{P}^\tau = H_2$, unde H_1 și H_2 reprezintă una dintre fracțiile continue (0) și (1), iar $P = B^{-1}ZA \Leftrightarrow Z = BPA^{-1}$. Astfel, în cazul de față, cînd $N(\varepsilon) = 1$, determinarea fracției continue întregi complexe Z se reduce la rezolvarea ecuației de fracții continue $= PH_1\bar{P}^\tau = H_2$, unde P este o fracție continuă întreagă complexă necunoscută.

Soluțiile ecuației $PH_1\bar{P}^\tau = H_2$, precum se va arăta în continuare, nu formează un grup finit de fracții continue, precum a fost cazul mai înainte. În acest scop, în prealabil se introduce notația:

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

$H_1 \neq H_2$. Fără restrîngerea generalității se poate lua $H_1 = (0)$ și $H_2 = = (1)$. Ecuația dată se poate scrie în forma

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} & \bar{r} \\ \bar{q} & \bar{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

de unde, după efectuarea înmulțirii și egalării fracțiilor continue componente, rezultă între altele egalitatea $s\bar{r} + r\bar{s} = 1$, care este contradictorie: suma a două numere complex conjugate $s\bar{r}$ și $r\bar{s}$ este un număr par.

$H_1 = H_2$. Se poate verifica prin calcul direct că ecuația $PH_1\bar{P}^\tau = H_2$ este verificată de o infinitate de soluții:

— în cazul $H_1 = H_2 = (0)$ cel puțin de fracțiile continue de forma

$$P = \begin{bmatrix} p & iq' \\ ir' & s \end{bmatrix},$$

unde p, q', r', s sînt numere întregi reale care verifică relația $N(P) = 1$, adică $ps + q'r' = 1$;

— în cazul $H_1 = H_2 = (1)$ cel puțin de fracțiile continue de forma

$$P = \begin{bmatrix} 2e + g + bi & -2bi \\ e + fi & g - bi \end{bmatrix},$$

unde b, e, f, g verifică relația $N(P) = 1$, adică

$$(2g)e - (2b)f = 1 - b^2 - g^2.$$

Nu are sens să se detalieze în continuare rezolvarea ecuației date, deoarece aceasta ori nu are soluție ($H_1 \neq H_2$), ori admite o infinitate de soluții ($H_1 = H_2$) și prin urmare, fără nici o altă considerație, nu se poate determina fracția continuă Z într-un număr finit de etape. Astfel cazul $N(\varepsilon) = 1$ necesită investigații diferite de cele considerate în această lucrare.

5. Concluzii. În încheiere se precizează că metoda expusă este în primul rînd un rezultat cu caracter teoretic şi nu aplicativ. Reprezentarea numerelor întregi reale prin forme pătratice aritmetice de discriminant negativ, cel puţin în cazul $N(\varepsilon) = -1$, se poate efectua în acelaşi mod ca reprezentarea numerelor întregi prin forme pătratice aritmetice de discriminant pozitiv, folosind fracţii continue finite definite peste inelul numerelor întregi complexe în locul fracţiilor continue întregi definite peste inelul numerelor întregi reale.

(Intrat în redacţie la 4 februarie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. Buxštab, A. A., *Teorija čisel*, Moskva, 1960.
2. Dani, E., *Über zweireihige ganzzahlige Matrizen* (*Reduktionstafel*), Mathematica, **14** (37), 1, 1972, 33–48.
3. Skrylev, V., *Konečnye nepreryvnye drobi, obrazovannye kvadratičnymi irracional'nostjami*, Zapiski Naučno-issledovatel'skogo instituta matematiki i mexaniki XGU i Xar'kovskogo Matematičeskogo obščestva, 1940.

ÜBER DIE HERMITESCHEN KETTENBRÜCHE

(Zusammenfassung)

Die Darstellung der ganzen Zahlen durch arithmetischen quadratischen Formen mit positiver Diskriminante, durch die Anwendung der Kettenbrüche, ist ein vollständig gelöstes Problem [2]. Die Methode der Kettenbrüche aber konnte nicht ausgedehnt werden bis jetzt, in entsprechender Weise, zum Fall der quadratischen Formen mit negativer Diskriminante. In dieser Arbeit wird gezeigt, das durch einer konstruktiven Weise, die hermiteschen Kettenbrüche ein entsprechendes Mittel zur Lösung des Problems der Darstellung der ganzen Zahlen durch quadratischen Formen mit negativen Diskriminante bilden, im Falle wenn die Norm der Grundeinheit der zugehörigen quadratischen Körper negativ ist. Es wird zugleich gezeigt in was die Schwierigkeit in der Ausdehnung der Methode der hermiteschen Kettenbrüche zum Fall wenn die Norm der Grundeinheit positiv ist besteht.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

BITOPOLOGII GENERATE DE O G-QUASI-METRICĂ

D. BORŞAN

1. Se cunosc numeroase generalizări ale noţiunii de metrică obţinute fie folosind o funcţie de distanţă cu valori reale nenegative, dar slăbind cerinţele clasice impuse unei metrici [5], [7], fie considerînd o funcţie de distanţă cu valori într-o structură mai puţin restrictivă decît aceea a numerelor reale [6]. În prezenta lucrare, folosind simultan cele două procedee, se dă o generalizare a noţiunii de quasi-pseudometrică.

2. Fie $(\mathfrak{M}, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Notăm cu „$\preccurlyeq$" ordonarea definită în mod natural în $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, prin:

$$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ şi } b_1 \leq b_2, \quad \text{unde } a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathfrak{M}.$$

Considerăm o aplicaţie $\varphi : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, satisfăcînd condiţiile:

(φ_1) $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$;

(φ_2) $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Rightarrow \varphi(a_1, b_1) < \varphi(a_2, b_2)$.

În sfîrşit, fie $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{M}$ satisfăcînd următoarelor condiţii:

$(\mathcal{E}_1)$ $e_0 \in \mathcal{E}$, $a \in \mathfrak{M}$, $\text{non}(\varphi_0 \leqslant a) \Rightarrow \exists e \in \mathcal{E} : \varphi(a, e) \leq e_0$;

$(\mathcal{E}_2)$ $(e_1, e_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \Rightarrow \exists e \in \mathcal{E} : (e, e) \preccurlyeq (e_1, e_2)$.

DEFINIŢIA 2.1. Numim g-quasi-pseudo-metrică (prescurtat g-q.-p.-metrică) pe o mulţime X, o aplicaţie $\rho : X \times X \to \mathfrak{M}$, satisfăcînd următoarele condiţii:

(ρ_1) $\rho(x, x) < e$ pentru orice $x \in X$ şi orice $e \in \mathcal{E}$;

(ρ_2) $\rho(x, z) \leq \varphi[\rho(x, y), \rho(y, z)]$, $x, y, z \in X$.

Cuplul (X, ρ) se numeşte spaţiu g-quasi-pseudo-metric.

Dacă aplicaţia ρ, pe lîngă (ρ_1) şi (ρ_2), se bucură şi de proprietatea

(ρ_3) $\rho(x, y) < e$ pentru orice $e \in \mathcal{E} \Rightarrow x = y$,

atunci ea este o g-quasi- metrică.

Dacă ρ satisface (ρ_1) (ρ_2) şi în plus

(ρ_4) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pentru $x, y \in X$,

atunci ρ este o g-pseudo-metrică.

În sfîrşit, dacă ρ satisface condiţiile (ρ_1), (ρ_2), (ρ_3) şi (ρ_4) atunci este o g-metrică [6].

Observaţia 2.1. Dacă pe mulţimea X putem defini o g-q.-p.-metrică $\rho : X \times X \to \mathfrak{M}$, atunci mulţimea $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{M}$, admite minoranţi în $\mathfrak{M} - \mathcal{E}$ (în caz contrar, cerința (ρ_1) neputînd fi satisfăcută). Urmează evident că dacă $\mathfrak{M}$ are un cel mai mic element m_0, atunci $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{M} - \{m_0\}$.

Observația 2.2. Noțiunea de *g-q-p.*-metrică generalizează conceptul de quasi-pseudo-metrică [5], [7]. Într-adevăr, în cazul particular cînd $\mathfrak{M}$ este mulțimea numerelor reale nenegative, cu ordonarea uzuală, φ operația de adunare a numerelor reale, iar $\mathcal{E} = \mathfrak{M} - \{0\}$, o *g-q.-p.*-metrică este o quasi — pseudo-metrică.

3. Vom arăta, în primul rînd, că o *g-q.-p.*-metrică pe X, determină o topologie pe X.

DEFINIȚIA 3.1. Mulțimea $B_\rho\ (x_0;\ e) = \{x \in X | \rho(x_0,\ x) < e\}$, unde $x_0 \in X$ și $e \in \mathcal{E}$, se numește ρ-glob cu centrul în x_0 și de rază e.

TEOREMA 3.1. Orice ρ-glob include, odată cu un punct, un ρ-glob cu centrul în acel punct.

Demonstrație. Fie $x_1 \in B_\rho(x_0;\ e)$ notînd $d = \rho(x_0,\ x_1)$, avem $d < e$. Conform condiției ($\mathcal{E}_1$), există $e_1 \in \mathcal{E}$ astfel ca $\varphi(d,\ e_1) \leq e$. Arătăm că $B_\rho(x_1;\ e_1) \subseteq B_\rho(x_0;\ e)$.

Fie $x \in B_\rho(x_1;\ e_1)$; urmează că $\rho(x_1\ x) < e_1$. Folosind (ρ_2), putem scrie $\rho(x_0,\ x) \leq \varphi[\rho(x_0,\ x_1),\ \rho(x_1,\ x)] < \varphi(d,\ e_1) \leq e$, deci $x \in B_\rho\ (x_0;\ e)$.

TEOREMA 3.2. *Intersecția a două ρ-globuri cu centrul comun include un ρ—glob de același centru.*

Demonstrație. Fie $B_\rho(x_0;\ e_1)$ și $B_\rho(x_0;\ e_2)$, ρ-globurile cu centrul în x_0 și avînd razele e_1, respectiv e_2. Pentru e_1 și e_2, în baza condiției ($\mathcal{E}_2$) există $e \in \mathcal{E}$, astfel ca $e \leq e_1$ și $e \leq e_2$.

Urmează că $B_\rho(x_0;\ e) \subseteq B_\rho(x_0;\ e_1) \cap B_\rho(x_0;\ e_2)$.

TEOREMA 3.3. *Familia de mulțimi* $\mathcal{B}_\rho = \{B_\rho(x;\ e) | x \in X,\ e \in \mathcal{E}\}$ *formează o bază de topologie pe X.*

Demonstrație. Vom arăta că pentru $x \in B_\rho(x_1;\ e_1) \cap B_\rho(x_2;\ e_2)$ există un ρ-glob, în familia $\mathcal{B}_\rho$, care conține punctul x și este inclus în intersecția celor două ρ-globuri considerate. Într-adevăr, din $x \in B_\rho(x_1;\ e_1) \cap B_\rho(x_2;\ e_2)$ rezultă, conform teoremei (3.1), existența a doua elemente f_1 și f_2 în $\mathcal{E}$, astfel ca $B_\rho(x;\ f_1) \subseteq B_\rho(x_1;\ e_1)$ și $B_\rho(x;f_2) \subseteq B_\rho(x_2;\ e_2)$. Conform teoremei (3.2), există atunci $f \in \mathcal{E}$, astfel încît $B_\rho(x;\ f) \subseteq B_\rho(x;\ f_1) \cap B_\rho(x;\ f_2) \subseteq B_\rho(x_1;\ e_1) \cap B_\rho(x_2;\ e_2)$. Axioma ($\rho_1$), ne asigură însă că $x \in B_\rho(x;f)$. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

În continuare vom nota cu $\mathcal{T}_\rho$, topologia definită de baza $\mathcal{B}_\rho$ și o vom numi topologia generată de *g-q. —p.*-metrica ρ.

4. Unei *g-q.-p.*-metrici pe X i se asociază în mod natural o altă *g-q.-p.*-metrică pe X.

TEOREMA 4.1. *Dacă* $\rho : X \times X \rightarrow \mathfrak{M}$ *este o g-q.-p.-metrică pe X, atunci aplicația* $\rho^* : X \times X \rightarrow \mathfrak{M}$, *definită prin* $\rho^*(x,\ y) = \rho(y,\ x)$ *pentru,* $x\ y \in X$, *este de asemenea o g-q.-p.-metrică pe X.*

Demonstrație. Verificarea axiomelor (ρ_1) și (ρ_2) pentru ρ^* este imediată.

Observația 4.1. Dacă ρ este o *g*-quasi-metrică, ρ^* este de asemenea; dacă ρ este o *g*-pseudo-metrică, atunci $\rho^{*\prime} = \rho$.

Observația 4.2. $(\rho^*)^* = \rho$. Cele două g-q.-p.-metrici ρ și ρ^* le vom numi conjugate.

DEFINIŢIA 4.1. [5]. Un spaţiu X în care sînt definite (în mod arbitrar) două topologii $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ se numeşte spaţiu bitopologic şi se notează $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$.

Observaţia 4.3 O *g-q.-p.*-metrică ρ pe X, permite înzestrarea mulţimii X cu o structură de spaţiu bitopologic $(X, \mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_{\rho^*})$. În acest sens putem vorbi despre bitopologia generată de o *g-q.-p.*-metrică.

TEOREMA 4.2. *Dacă* ρ *şi* ρ^* *sînt g-q.-p.-metrici conjugate pe* X, $e_0 \in \mathcal{E}$ *şi* $x_0 \in X$, *atunci, în spaţiul bitopologic* $(X, \mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_{\rho^*})$ *mulţimea* $\{x \in X| \rho(x_0, x) \geqslant e_0\}$ *este* $\mathcal{T}_\rho$ — închisă, iar mulţimea $\{x \in X|\rho(x, x_0) \geqslant e_0\}$ *este* $\mathcal{T}_{\rho^*}$— *închisă.*

Demonstraţie. Fie $A = \{x \in X|\rho(x_0, x) \geqslant e_0\}$ şi $y \in C(A)$. Urmează că $d = \rho(x_0, y)$ nu este $\geqslant e_0$, deci în baza condiţiei $(\mathcal{E}_1)$ există $e \in \mathcal{E}$, astfel ca $\varphi(d, e) \leq e_0$. Vom arăta că $B_\rho(y\,;\, e) \subseteq C(A)$. Raţionăm prin contradicţie. Fie $z \in B_\rho(y\,;\, e)$ şi presupunem că $z \notin C(A)$. Urmează că avem $\rho(y, z) < e$ şi $\rho(x_0, z) \geqslant e_0$. Avem atunci $e_0 \leq \rho(x_0, z) \leq \varphi[\rho(x_0, y), \rho(y, z)] < \varphi(d, e) \leq$ $\leq e_0$. Contradicţia $e_0 < e_0$, la care am ajuns, demonstrează că $B_\rho(y\,;\, e) \subseteq$ $\subseteq C(A)$, deci $C(A)$ este $\mathcal{T}_\rho$ — vecinătate pentru y. Cum y a fost ales arbitrar în $C(A)$, rezultă că $C(A) \in \mathcal{T}_\rho$, deci A este $\mathcal{T}_\rho$ — închisă.

Să considerăm acum mulţimea $\{x \in X \mid \rho(x, x_0) \geqslant e_0\}$ Avem $\{x \in X|$ $\rho(x, x_0) \geqslant e_0\} = \{x \in X|\rho^*(x_0, x) \geqslant e_0\}$ şi cum ρ^* este o *g-q.-p.*-metrică, urmează, conform celor stabilite mai sus, că această mulţime este $\mathcal{T}_{\rho^*}$-închisă.

TEOREMA 4.3. *Dacă mulţimea parţial ordonată* $\mathfrak{M}$ *are un cel mai mic element* m_0, $\mathcal{E} = \mathfrak{M} - \{m_0\}$ *iar* ρ *şi* ρ^* *sînt g-q.-p.-metrici conjugate pe* X, *atunci* $\{x \in X|\rho(x_0, x) \leq a\}$ *este* $\mathcal{T}_{\rho^*}$-*închisă şi* $\{x \in X|\rho(x, x_0) \leq a\}$ *este* $\mathcal{T}_\rho$ — — *închisă (unde* $x_0 \in X$ *şi* $a \in \mathfrak{M}$).

Demonstraţie. Fie $B = \{x \in X|\rho(x_0, x) \leq a\}$, unde a este un element oarecare fixat din $\mathfrak{M}$. Dacă $y \in C(B)$, avem non $(\rho(x_0, y) \leqslant a)$. Cum $m_0 \leq a$, urmează că $\rho(x_0, y) \neq m_0$, deci $d = \rho(x_0, y) \in \mathcal{E}$. Din non $(d \leqslant a)$, urmează, conform condiţiei $(\mathcal{E}_1)$, că există $e \in \mathcal{E}$ astfel că $\varphi(a, e) \leq d$. Vom arăta că $B_{\rho^*}(y\,;\, e) \subseteq C(B)$. Pentru aceasta, fie $z \in B_{\rho^*}(y\,;\, e)$ şi presupunem că $z \notin C(B)$. Atunci $\rho^*(y, z) = \rho(z, y) < e$ şi $\rho(x_0, z) \leq a$. Avem deci $d =$ $= \rho(x_0, y) \leq \varphi[\rho(x_0, z), \rho(z, y)] < \varphi(a, e) \leq d$. Contradicţia $d < d$, la care am ajuns, arată că $B_{\rho^*}(y\,;\, e) \subseteq C(B)$. Rezultă, în definitiv, că $C(B) \in \mathcal{T}_{\rho^*}$, deci B este $\mathcal{T}_{\rho^*}$- închisă.

Avem $\{x \in X|\rho(x, x_0) \leq a\} = \{x \in X|\rho^*(x_0, x) \leq a\}$ şi, conform celor stabilite mai sus, această mulţime este $\mathcal{T}_\rho$- închisă.

Observaţia 4.4 Dacă ρ este o *g*-pseudo-metrică pe X, atunci $\{x \in X|$ $\rho(x_0, x) \geqslant e_0\}$ este $\mathcal{T}_\rho$ — închisă $(e_0 \in \mathcal{E})$; dacă, în plus, $\mathcal{E} = \mathfrak{M} - \{m_0\}$, mulţimea $\{x \in X|\rho(x_0, x) \leq a\}$ este $\mathcal{T}_\rho$ -închisă $(a \in \mathfrak{M})$.

5. ρ fiind o *g-q.-p.*-metrică pe X, pentru un punct oarecare fixat $x_0 \in$ $\in X$, considerăm aplicaţiile $f = \rho(x_0, \quad) : X \to \mathfrak{M}$ şi $g = \rho(\quad, x_0) : X \to \mathfrak{M}$.

Pentru aplicaţii definite pe un spaţiu topologic şi cu valori într-o latice completă, am introdus şi studiat (în lucrarea [2]), noţiunile de *o*-semicontinuitate (superioară şi inferioară) şi de *o*-continuitate. Presupunînd că M este o latice completă, pentru f şi g de mai sus, definite pe spaţiul bitopologic $(X, \mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_{\rho^*})$ şi cu valori în laticea completă $\mathfrak{M}$, putem vorbi despre *o*-semicontinuitate și o-continuitate, fie relativ la topologia $\mathcal{T}_\rho$ pe X, fie în raport cu $\mathcal{T}_{\rho^*}$. În această ordine de idei avem:

TEOREMA 5.1. *Fie $\mathfrak{M}$ un lanț complet, m_0 cel mai mic element din $\mathfrak{M}$, $\mathcal{S} = \mathfrak{M}-\{m_0\}$ iar $\rho: X \times X \to \mathfrak{M}$ o g-q.-p.-metrică pe X. Atunci, pentru un punct fixat $x_0 \in X$, avem:*
(1) aplicația $f = \rho(x_0, \ )$ este $\mathcal{T}_\rho$-o-semicontinuă superior și $\mathcal{T}_{\rho^*}$-o-semicontinuă inferior pe X;
(2) aplicația $g = \rho(\ , x_0)$ este $\mathcal{T}_\rho$-o-semicontinuă inferior și $\mathcal{T}_{\rho^*}$-o-semicontinuă superior pe X.

Demonstrație. Vom folosi notațiile: $[\leftarrow, a] = \{b \in \mathfrak{M} | b \leq a\}$ și $[a, \to] = \{b \in \mathfrak{M} | a \leq b\}$, pentru $a \in \mathfrak{M}$.

Pentru o aplicație oarecare $\Phi: U \to Y$, unde U este un spațiu topologic iar Y un lanț complet, dens în sine, se cunoaște din lucrarea citată mai sus ([2]) că: Φ este o-$s.c.s.$ pe $U \Leftrightarrow \forall y \in Y: f^{-1}([y, \to])$ este închisă și Φ este $o.s.c.i.$ pe $U \Leftrightarrow \forall y \in Y: f^{-1}([\leftarrow, y])$ este închisă. Ulterior am demonstrat că aceste rezultate rămîn valabile și dacă omitem cerința de densitate în sine impusă lanțului complet Y.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei (5.1)
(1) Avem $f^{-1}([a, \to]) = \{x \in X | \rho(x_0, x) \geqslant a\}$. Dacă $a \neq m_0$, atunci $a \in \mathcal{S}$ și conform teoremei (4.2), $f^{-1}([a, \to])$ este $\mathcal{T}_\rho$-închisă. Dacă $a = m_0$, $f^{-1}([a, \to]) = X$ și deci este de asemenea $\mathcal{T}_\rho$-închisă. Pe de altă parte, mulțimea $f^{-1}([\leftarrow, a]) = \{x \in X | \rho(x_0, x) \leq a\}$, este în baza teoremei (4.3) $\mathcal{T}_{\rho^*}$-închisă; urmează că f este $\mathcal{T}_\rho$-o-$s.c.s.$ și $\mathcal{T}_{\rho^*}$-o-$s.c.i.$ pe X.
(2) Mulțimea $g^{-1}([\leftarrow, a]) = \{x \in X | \rho(x, x_0) \leq a\}$ este $\mathcal{T}_\rho$-închisă (teorema (4.3)); $g^{-1}([a, \to]) = \{x \in X | \rho(x, x_0) \geqslant a\}$ este $\mathcal{T}_{\rho^*}$-închisă pentru $a \in \mathcal{S}$ (teorema (4.2)) și este chiar X pentru $a = m_0$, deci $\mathcal{T}_\rho^*$-închisă. Prin urmare, g este $\mathcal{T}_\rho$-o-$s.c.i.$ și $\mathcal{T}_{\rho^*}$-o-$s.c.s.$ pe X.

COROLAR 1. *Dacă $\mathfrak{M}$ este un lanț complet, m_0 cel mai mic element din $\mathfrak{M}$, $\mathcal{S} = \mathfrak{M} - \{m_0\}$ iar $\rho: X \times X \to \mathfrak{M}$ o g-pseudo-metrică pe X, atunci pentru un punct oarecare fixat $x_0 \in X$, aplicațiile $f = \rho(x_0, \ )$ și $g = \rho(\ , x_0)$ sînt o-continue pe X.*

Afirmația este evidentă ținînd seama de teorema (5.1) și de observația (4.1).

COROLAR 2. *În condițiile corolarului 1, aplicațiile f și g sînt τ_0-continue pe X (continue relativ la topologia ordonării τ_0 pe $\mathfrak{M}$)*

COROLAR 3. *În condițiile corolarului 1, aplicațiile f și g sînt τ_i — continue (continue relativ la interval-topologia τ_i pe $\mathfrak{M}$).*

Într-adevăr, în [2] am arătat că, pentru o aplicație definită pe un spațiu topologic și cu valori într-o latice completă, o-continuitatea aplicației implică τ_ρ-continuitatea și τ_i-continuitatea ei.

Teorema care urmează arată că, dacă $\rho: X \times X \to \mathfrak{M}$ este o g-pseudo-metrică pe X, τ_i-continuitatea aplicațiilor f și g definite mai sus, are loc în condiții mai puțin restrictive impuse mulțimii $\mathfrak{M}$.

TEOREMA 5.2. *Dacă $\mathfrak{M}$ este o mulțime parțial ordonată care are un cel mai mic element m_0, $\mathcal{S} = \mathfrak{M}-\{m_0\}$, iar ρ este o g-pseudo-metrică pe X, atunci* *aplicaţiile* $f = \rho(x_0, \ )$ *şi* $g = \rho(\ , x_0)$, *unde* x_0 *este un punct fixat din* X, *sînt* τ_i — *continue pe* X.

Demonstraţie. Interval-topologic τ_i pe $\mathfrak{M}$ admite ca subbază a mulţimilor închise familia $\mathcal{S} = \{[\rightarrow, a] \mid a \in \mathfrak{M}\} \cup \{[a, \rightarrow] \mid a \in \mathfrak{M})$ [(1], [3]).

Pentru a stabili τ_i-continuitatea aplicaţiilor f şi g este suficient să arătăm [4], că oricare ar fi $S \in \mathcal{S}$, mulţimile $f^{-1}(S)$ şi $g^{-1}(S)$ sînt $\mathcal{T}_\rho$-închise. Aceasta rezultă însă imediat din demonstraţia teoremei (5.1), ţinînd seama de observaţia (4.4).

(Intrat în redacţie la 2 martie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **XXV**, 1967.
2. D. Borşan, *Aplicaţii o-semicontinue*, Studia, Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., 2, 1972, 21—29.
3. O. Frink, *Topology in lattices*, Trans, Amer. Math. Soc., **51**, 1942, 569—582.
4. J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955.
5. J. C. Kelly, *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., **XIII**, 1963, 71—89.
6. G. Baley Price, *A generalization of a metric space with applications to spaces whose elements are sets*, Amer. Journ. of. Math., **63**, 1941, 46—56.
7. W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. Journ. of Math., **53**, 1931, 675—684.

BITOPOLOGIES GENERATED BY A G-QUASIMETRIC

(Summary)

In the paper the concept of g-quasipseudometric is introduced, as a generalization of the classical concept of quasipseudometric. It is shown that a g-quasipseudometric $\rho : X \times X \to \mathfrak{M}$ allows to endow the set X with a structure of bitopological space. Then some results concerning the o-semicontinuity of the maps $\rho(x_0, \ )$ and $\rho(\ , x_0)$ $x_0 \in X$, defined on the bitopological space X and taking values in the complete lattice $\mathfrak{M}$, are established.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1977

ANIVERSĂRI

PROFESORUL GHEORGHE PIC LA 70 DE ANI

Cadrele didactice şi studenţii Facultăţii de matematică, precum şi cercetătorii Institutului de matematică din Cluj-Napoca îşi exprimă caldele lor sentimente de recunoştinţă şi respect pentru activitatea complexă pe care profesorul Gheorghe Pic o desfăşoară, de peste trei decenii, în cadrul facultăţii noastre.

O caracteristică a personalităţii profesorului Gheorghe Pic este dubla sa vocaţie: aceea de pedagog, îndrumător al tinerei generaţii, şi aceea de cercetător pasionat.

Cursurile sale exprimă un suflu nou, orientînd învăţămîntul algebrei către studiul structurilor algebrice. A elaborat şi publicat cursuri de algebră, larg utilizate de studenţii şi doctoranzii noştri.

Profesorul Gheorghe Pic a format o pleiadă de elevi dintre care mulţi îşi desfăşoară activitatea la facultatea noastră sau la alte institute de învăţămînt superior din ţară.

Omul de ştiinţă Gheorghe Pic constituie un exemplu de mobilizator elan ştiinţific. Obţinînd rezultate importante în domeniul algebrei, numele său este cunoscut în largi cercuri ştiinţifice din ţară şi străinătate.

Ca activist obştesc, ca şef de catedră şi decan al facultăţii, profesorul Gheorghe Pic a desfăşurat o bogată activitate pentru modernizarea învăţămîntului matematic şi formarea tinerei generaţii. În acest context este binecunoscut aportul substanţial pe care domnia sa l-a adus la înzestrarea bibliotecii facultăţii. Toate aceste realizări poartă amprenta prestigioasă a profesorului şi omului de ştiinţă.

Cu această ocazie urăm profesorului Gheorghe Pic multă sănătate, fericire şi noi succese pentru continua înflorire a învăţămîntului şi cercetării matematice în ţara noastră.

RECENZII

Louis Comtet, **Advanced Combinatorics.** D. Reidel Publishing Company Dordrecht-Holland/Boston — U.S.A., 1974, XII + *343* pages.

The present work is a revised and enlarged edition of the previous one published in French in 1970 by Presses Universitaires de France, Paris, and contains a modern and extremely detailed presentation of some of the combinatorics branches. As mentioned by the *author in the introduction* he does not intend to give an exhaustive presentation of the large domain of combinatorial analysis. Certain classical aspects have been passed by.

This excellent book is divided into seven chapters and contains an almost unbelievable wealth of material, which is shortly mentioned at the beginning of every chapter.

The main purpose of chapter *I* is to define the language which will be used and to introduce those elementary concepts which will be referred to throughout the book. Chapter I begins with some elementary concepts of the naive theory of sets and continues with arrangements, permutations and combinations (Without and with repetitions), subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$, subsets of Z/nZ, divisions and partition of a set, formal series and generating functions.

Using generating functions the author computes the Catalan numbers and presents the Wedderburn-Etherington commutative bracketing problem. Some concepts about graphs, digraphs, tournamenta and Cayley's theorem on the number of trees conclude the chapter.

Chapter II deals with the theory of the partitions of integers, a theory which belongs to number theory as well as to combinatorial analysis. After the introduction of the concept of partition of integers the generating function of the number of partitions of an integer and the generating functions of the number of the partitions of an integer into m summands are established. Futhermore conditional partitions, Ferrers diagrams and several special identities (the pentagonal theorem of Euler, the Jacobi identity) are studied. In the last part of the chapter the author turns to forbidden *summands*.

The third chapter is basically devoted to various results of formal series and presents famous identities and formulas. Thus among others, Abel's generalization of the binomial formula, the Leibniz formula for Taylor series, the Bell polynomials and their relations with the Stirling numbers of the second kind, logarithmic and potential polynomials, Faà di Bruno's formula are dealt with.

In the next chapter the author solves the following problem: let be given a system $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ of p subsets of a set N, whose mutual relations are somehow known; compute the cardinal of each subset of N that can be formed by taking intersections and unions of the given subsets or their complements. As examples are presented the sieve of Eratosthenes, the ,,problème des rencontres", the ,,problème des ménage" and Rényi's method for linear inequalities with application to Poincaré's formula, Bonferroni inequalities and Ch. Jordan's formulas. The Ryser theorem on permanents ends this chapter.

The Stirling numbers of the first and the second kind, their generating functions and their recurrence relations are studied in chapter V.

The permutations are the subject of chapter VI. Here are treated the algebraic structure of the symmetric group, counting problems related to decomposition in cycles and Frobenius theorem on Eulerian polynomials, followed by the famous theorem of Pólya.

The last chapter uses probabilistic language and gives asymptotic expansions for the number of regular graphs of order two on a set, as well as upper and lower bounds of the number of Sperner systems. Some facts about random permutations, Ramsey's theorem and numbers are also presented.

At the end of each chapter the author provides statements in the form of exercises that serve as supplementary material. These exercises are an excellent means of completing and deepening the reader's understanding and offer valuable suggestions for further research.

The work, in spite of its academic level, is easy to access also to secondary-school graduates owing to the progressive presentation of the material and to the fact that it is based on the knowledge of only a few notions of the main set theory. The book may be considered a guide to those wishing to be initiated in this domain, and is equally useful to those devoted to research-work.

The proofs are clear and rigorous, the notions are carefully defined, exemplified and applied. The easy style is a further assert of the book.

The bibliography includes more than 1000 titles and covers not only the subject dealt with in the present work but also related fields of investigation, such as number theory, graph theory, probabilistic, statistics, developments and approximations.

MARIAN MUREŞAN

Beiträge zur Algebra und Geometrie 4, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975

Der Band beginnt mit einer Anmerkung der Herausgeber und der Redaktion im Andenken von Dr. Andor Kertész Mitbegründer und Initiator der ,,Belträge zur Algebra und Geometrie". Die Arbeiten dieses Bandes gehören meistens dem Gebiet der algebraischen Geometrie wie: M. Roczen — Henselsche Äquivalenz von Singularitäten, G. Pfister — Einige Bemerkungen zur Struktur lokaler Henselscher Ringe, H. J. Fitzner, W. Kleinert, H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen u. Th. Zink — Modulprobleme in der algebraischen Geometrie I, u.a. Ferner der Band enthält gruppentheoretische Arbeiten und Arbeiten die andere algebraische Problemstellungen betrachten.

HERWART WIESLER,

K. P. Müller, H. Wölpert, **Anschauliche Topologie,** B. G. Teubner Stuttgart, 1976.

Das Buch ist ein Band der Reihe ,,Mathematik für die Lehrerausbildung". Die Reihe behandelt studiumsgerecht in Form einzelner aufeinander abgestimmter Bausteine grundlegende und weiterführende Themen aus dem gesamten Ausbildungsbereich der Mathematik für Lehrerstudenten.

Das vorliegende Buch vermittelt einen Überblick über die sogenannte auschauliche Topologie, die sich mit topologischen Problemen im Anschaungsraum beschäftigt. Ausserdem wird gezeigt, wie man der Topologie als Grundstruktur auf einem möglichst auschaulichen Weg eine axiomatische Fundierung geben kann.

Die Abschnitte sind — entsprechend der Konzeption der Reihe — in drei Teile gegliedert: Auf eine anschauliche Hinführung in einem A-Teil folgt eine strenge Durchführung im B-Teil. Abschliessend werden im C-Teil Beispiele für eine mögliche Behandlung in der Schule gegeben.

Der erste Abschnitt besteht aus dem Erläuterungen an Beispielen, was topologische Fragestellungen sind. Weitere solche Beispiele werden im ersten Teil des zweiten Abschnitts im Hinblick auf die anschliessende abstrakte Behandlung im zweiten Teil des Abschnitts angegeben. Der dritte Abschnitt behandelt ebene Netze. Dabei wird die Frage der Durchlaufbarkeit gelöst, und es wird gezeigt, welche Netze nicht plättbar sind. Nach dem Beweis des Fünffarbensatzes für Landkarten werden Bäume als Klasse spezieller Netze untersucht. Netze mit Bewertungen sind Thema des vierten Abschnitts. Sie stellen eine Verbindung zur Graphentheorie her und führen auf sehr praxisnahe Sachprobleme. Der fünfte Abschnitt untersucht Linien im Raum. Insbersondere werden die einfachsten Verschlingungen, Knoten und Ketten betrachtet. Die Abschnitte sechs und sieben betrachten topologische Probleme auf Flächen im Raum. Im achten Abschnitt finden sich die Lösungen der Aufgaben. Das Buch ist stattlich mit anschaulichen Figuren ausgestattet und wird sicher von Leuten die sich mit der Didaktik der mathematischen Schulunterricht beschäftigen wohlgeraten geschätzt.

HERWART WIESLER

K. Magnus, **Schwingungen,** B. G. Teubner Stuttgart, 1976, 251 S.

Das Buch bemüht sich, die mathematischen Methoden im Rahmen der Anwendungsgebiete zugänglich machen. Eine Verbindung anschaulichphysikalischer Überlegungen mit den formalmathematischen Berechnungen ist besonderer Wert dieses Buches. Im einzelnem werden die folgenden Kapitel behandelt ,,Grundbegriffe und Darstellungsmittel, Eigenschwingungen, Selbsterregte Schwingungen, Parametererregte Schwingungen, Erzwungene Schwingungen, Koppelschwingungen". Eine wertvolle Teil dieses sowohl für Studenten als auch für Wissenschaftler interessanten Buches bilden die spezielle Aufgaben. Das Buch ist mit nützlichen bibliographischen Anmerkurgen ausgestattet und enthält einen Sachverzeichnis.

I. POP

CRONICĂ

Centrul de calcul electronic al Universităţi

În anul 1975 Universitatea noastră a fost dotată cu un calculator electronic modern, FELIX C-256. Astfel a luat fiinţă Centrul de calcul al Universităţii, care serveşte necesităţile de prelucrare automată a datelor ale întregului Centru universitar Cluj-Napoca.

În componenţa sa Centrul de calcul are şi un laborator pentru elaborarea de modele şi proiectare de sisteme informatice, unde îşi desfăşoară activitatea: analişti, programatori, ingineri de sistem. De asemenea, în cadrul acestui laborator activează şi un număr însemnat de cadre didactice de specialitate, în primul rînd cele de la Catedra de calcul şi informatică a Facultăţii de matematică, precum şi studenţi. La Centrul de calcul funcţionează un seminar de cercetare ştiinţifică cu tema: Structuri de informaţii şi programare.

Staţia Făget a Observatorului Astronomic

Prin strădania Universităţii din Cluj-Napoca în 1975 au început lucrările de construire a unei staţii de observare în zona Făget a comunei Feleacu. În 1976 s-au terminat construcţiie ca şi amplasarea instrumentelor. Staţia, extinsă pe un teren de 1 ha, pe Dealul Ursului, la o altitudine de 750 m, dispune de o clădire cu o cupolă turnantă de 5 m diametru, care adăposteşte luneta ecuatorială, constînd dintr-o lunetă ($D = 20$ cm, $F = 300$ cm), un telescop ($D = 50$ cm, $F = 250$ cm) şi trei camere-laborator pentru prelucrarea preliminară a observaţiilor. În curte se află o platformă de urmărire a sateliţilor artificiali, dotată cu teodolite şi lunete, precum şi cu o cameră foto UFISZ-25-2.

În zilele de 13–14 noiembrie 1976, cu ocazia inaugurării, a avut loc şi un Colocviu de astronomie şi cercetări spaţiale, organizat de Universitate în colaborare cu Societatea de Ştiinţe Matematice şi Comitetul Naţional Român de Astronomie.

Au fost prezentate un număr de 35 de comunicări.

Publicări de manuale şi monografii

D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, ediţia a II-a, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

E. Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj, 1972.

I. Maurer, E. Virág, *A relációelmélet elemei* (Elemente de teoria relaţiilor), Ed. Dacia, Cluj, 1972.

P. Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1973.

I. Maruşciac, *Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară*, Ed. Dacia, Cluj, 1973.

W. Brechner, *Introducere în teoria problemelor de optimizare convexă cu restricţii*, I, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1974.

L. Némethi, *Programarea în timp a fabricaţiei*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1975.

T. Popoviciu, *Analiză numerică. Noţiuni introductive de calcul aproximativ*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1975.

I. A. Rus, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.

Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus, I. A. Rus, *Introducere în teoria ecuaţiilor operatoriale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.

I. Maurer, E. Virág, *Bevezetés a struktúrák elméletébe*, (Introducere în structuri algebrice), Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.

I. Păvăloiu, *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.

Întreprinderea Poligrafică Cluj-Napoca 275/1977

În cel de al XXII-lea an (1977) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* apare semestrial în specialităţile:

matematică
fizică
chimie
geologie—geografie
biologie
filozofie
ştiinţe economice
ştiinţe juridice
istorie
filologie

На XXII году издания (1977) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит два раза в год со следующими специальностями:

математика
физика
химия
геология—география
биология
философия
экономические науки
юридические науки
история
филология

Dans sa XXII-e année (1977) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* paraît semestriellement dans les spécialités:

mathématiques
physique
chimie
géologie—géographie
biologie
philosophie
sciences économiques
sciences juridiques
histoire
philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM, Departamentul Export—Import Presă, P. O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, str. 13 Decembrie nr. 3.

Lei 10