STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

MATHEMATICA

1976

CLUJ-NAPOCA

ANUL XXI 1976

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI
MATHEMATICA

Redacţia: CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — СОДЕРЖАНИЕ — INHALT

I.P. Cluj — 641/1975

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

UNIFORM CONTINUITY ON SEMIGROUPS AND GROUPS

DONALD MARXEN*

1. **Introduction and Preliminaries.** Generalizations of compact semigroups are often considered in connection with properties of compact semigroups, for the purpose of determining the extent to which these properties hold in the more general setting (see, for example, [3], [4] and [9]). In this paper we investigate the class uniformizable topological semigroups. This class of semigroups contains the (subinvariant) metric semigroups as well as the compact semigroups. Several important properties relating to subgroups of compact semigroups are shown (§3) to hold for the more general uniformizable or completely uniformizable topological semigroups. For example, it is shown that subgroups of uniformizable semigroups are topological and that maximal subgroups of completely uniformizable semigroups are closed.

In section 2 uniformizable topological semigroups are characterized in terms of their continuous, subvariant pseudometrics.

Semigroups which have compactifications (these are necessarily uniformizable) were studied by Dobbins in [3]. In section 4 we provide necessary and sufficient conditions for a topological semigroup to have a compactification.

For a set X let $\Delta(X)$ denote the diagonal of $X \times X$, i.e. $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$. If τ is a topology on a set X we let $[X, \tau]$ denote the topological space determined by X and τ.

A topological semigroup is a triple (S, m, τ) where $[S, \tau]$ is a Hausdorff space and m is a continuous, associative mapping from $[S, \tau] \times [S, \tau]$ into $[S, \tau]$. We refer to m as the multiplication of S and we usually shorten $m[A \times B]$ to AB and (S, m, τ) to either (S, τ) os simply S.

If u is a uniformity on a set X we let $[X, u]$ denote the uniform space determined by X and u, and we let $T(u)$ denote the uniform topology relative to u. Given a topology τ on X, u is said to be compatible with τ if and only if $\tau = T(u)$. The gage of u, i.e. the set of all uniformly continuous pseudometrics on $[X, u]$, will be denoted by $E(u)$.

Given a pseudometric d on X and $n \in N$, N the set of positive integers, set

$$V(d, n) = \{(x,y) : d(x, y) < 2^{-n}\}.$$

For a family ν of pseudometrics on X the collection $\{V(d, n) : d \in \nu, n \in N\}$ is a subbase for a uniformity on X. This uniformity, indicated by $u(\nu)$, is called the uniformity generated by ν.

For a topological space $[X, \tau]$ a family ν of pseudometrics is said to separate points from closed sets if and only if for each closed set F and each $p \in X-F$, there exists some $d \in \nu$ such that

$$d(p, F) = \inf \{d(p, x) : x \in F\} > 0.$$

* Marquette University, Milwaukee, Wisconsin 53233

If d and e are pseudometrics on X, the pseudometric $d \vee e$, defined by

$$(d \vee e)(x, y) = \max\{d(x, y), e(x, y)\},$$

is called the supremum of d and e.

The following theorem can easily be proved.

1.1. TEOREMA. *Let X be a topological space and ν be a family of pseudometrics on X such that each member of ν is continuous on $X \times X$. Then $u(\nu)$ is compatible with the topology of X if and only if the family of supremums of finite subsets of ν separates points from closed sets.*

For details concerning the theory of uniform spaces we refer the reader to [7, Ch. 6] and [5, Ch. 15].

2. Uniformizable Topological Semigroups. The following definition is taken from [9, §3].

2.1. DEFINITION. A topological semigroup (S, m, τ) is said to be uniformizable if and only if there exists a uniformity u on S such that $\tau = T(u)$ and m is a uniformly continuous function from $[S, u] \times [S, u]$ into $[S, u]$.

If u satisfies these conditions we say that u is admissible on (S, m, τ) and that (S, m, τ) admits u.

2.2. *Example.* Let (S, τ) be a compact semigroup, and u be the unique uniformity on S compatible with τ. Then u is admissible on S.

If T is a topological subsemigroup of S and if u is an admissible uniformity on S, then T admits the relative uniformity $\{U \cap T \times T : U \in u\}$. It follows from 2.2 that a topological semigroup is uniformizable if it is a subsemigroup of a compact semigroup. The converse, however, is not true (see 4.5).

2.3 *Example.* If G is a topological group with equal right and left uniformities u_R and u_L, then u_R is admissible on G. In particular, each abelian topological group is uniformizable.

2.4 *Example.* Let W be the space of all countable ordinals and let w denote the unique uniformity on W compatible with the interval topology. When provided with the multiplication $(x, y) \to \max\{x, y\}$, W becomes a topological semigroup on which w is admissible.

2.5 THEOREM. *Let S be a semigroup and u be a uniformity on S. Then the following are equivalent:*

(a) *Multiplication is uniformly continuous with respect to u.*

(b) *For each $W \in u$ there exists a $V \in u$ such that $VV \subseteq W$.*

(c) *For each $U \in u$ there exists a $V \in u$ such that*

$$\Delta(S)V \cup V\Delta(S) \subseteq V \subseteq U.$$

Prof. (*a*) $\leftrightarrow$ (*b*). The product uniformity on $S \times S$ has as a base the family of sets $V\#=\{((s,t),(s',t')) : (s,s'),(t,t')\in V\}$ $(V\in u)$. Moreover, $(m \times m)[V\#] = VV$ where m denotes the multiplication of S.

(*b*) $\to$ (*c*). Given $U \in u$ select W_1 and W_2 in u such that $W_1\ W_1 \subseteq U$ and $W_2\ W_2 \subseteq W_1$. Setting $W_3 = W_1 \cap W_2$ we have $W_3\ W_3\ W_3 \subseteq U$. Finally, set

$$V = \Delta(S)W_3 \cup \Delta(S)W_3\ \Delta(S) \cup W_3\ \Delta(S).$$

(*c*) $\to$ (*b*). For $W\in u$ choose $U\in u$ and $V\in u$ such that $U \circ U \subseteq W$ and $\Delta(S)V \cup V\ \Delta(S) \subseteq V \subseteq U$. If (s, s') and $(t, t') \in V$ then

$$(st,\ s't') = (st,\ st') \circ (st',\ s't') \in U \circ U.$$

It follows that $VV \subseteq W$.

We now characterize uniformizable topological semigroups in terms of continuous, subinvariant pseudometrics. Recall that a pseudometric d on a semigroup S is said to be subinvariant [resp. invariant] if $d(zx,zy) \leq d(x,y)$ and $d(xz,yz) \leq d(x,y)$ [resp. $d(zx,zy)=d(x,y)=d(xz,yz)$] for all x,y and z in S.

2.6 THEOREM. *A topological semigroup* (S, τ) *is uniformizable if and only if the collection of subinvariant pseudometrics which are continuous on* $S \times S$ *separates points from closed sets.*

Proof. Let ν be the collection of subinvariant pseudometrics which are continuous on $S \times S$.

Sufficiency. According to 1.1 the uniformity $u(\nu)$ is compatible with τ. Since the supremum of any two members of ν is again in ν, the collection $\{V(d,n) : d\in\nu,\ n\in N\}$ is a base for $u(\nu)$. Furthermore, $V(d, n+1)$ $V(d, n+1) \subseteq V(d, n)$ for all d and n; for if $d(x,y) < 2^{-n-1}$ and $d(u, v) < 2^{-n-1}$,

$$d(xu, yv) \leq d(xu, yu) + d(yu, yv) \leq d(x, y) + d(u, v) < 2^{-n}.$$

Necessity. If u is an admissible uniformity an (S, τ) and if F is closed in S and $p\in S-F$, there exists an $e\in E(u)$ and $n_0\in N$ such that $e(p,F) > 2^{-n_0}$. Select a sequence $\{U_n : n = 0, 1, \ldots\}$ of entourages in u satisfying the following properties for all $n\in N$:

(i) $U_n = U_n^{-1}$,

(ii) $U_n \circ U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1} \cap V(e, n_0)$, and

(iii) $\Delta(S)\ U_n \cup U_n\Delta(S) \subseteq U_n$.

The existence of such a sequence is guaranteed by the axioms of a uniformity and 2.5. Define a nonnegative, real-valued function β on $S \times S$ by $\beta(x,y) = 2^{-n}$ if $(x,y)\in U_n - U_{n-1}$ and $\beta(x,y) = 0$ if $(x,y)\in U_n$ for all n. For $x, y\in S$ set

$$d(x, y) = \inf\{\Sigma_0^n\beta(x_i,\ x_{i+1}) : x = x_0,\ x_1, \ldots, x_{n+1} = y\}$$

The function d is a pseudometric on S and

$$U_n \subseteq V(d, n) \subseteq U_{n-1} \cap V(e, n_0)$$

for each n [7, Thm. 6.12, p. 185]. Furthermore, if $(a, b) \in U$ and $c \in S$, $(ca, cb) \in U$ and $(ac, bc) \in U$ ((iii)), hence $\beta(ca, cb) \leq \beta(a, b)$ and $\beta(ac, bc) \leq \leq \beta(a, b)$. It follows that d is a member of ν. Finally, we observe that $V(d, n) \subseteq V(e, n_0)$, for all n, implies that $d(p, F) \geqslant 1$.

Using 2.6 we can now define admissibility of a uniformity in terms of its gage. The following result is Theorem 2 of [9, p. 29].

2.7 Let (S, τ) be a topological semigroup. A uniformity U on S is admissible on (S, τ) if and only if $\tau = T(u)$ and the gage of u has a base consisting of subinvariant pseudometrics.

2.8 *Example.* Let A be a normed complex algebra with norm $\| \ \|$ [10, Sec. 18.1]. Denote by S the topological semigroup whose space is the open unit sphere $\{x \in A : \|x\| < 1\}$ and whose multiplication is defined by that of A. If d represents the norm metric on S then d is subinvariant and $u(\{d\})$ is admissible on S.

2.9 *Example.* Let $(R, +)$ denote the additive group of reals together with the usual topology, let $| \ |$ denote the absolute value metric and let C denote the uniformity generated by the set of all pseudometrics $\psi_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ where $f: R \to R$ is continuous. Clearly, $| \ |$ is invariant and hence generates an admissible uniformity on $(R, +)$. The uniformity C, on the other hand, is compatible with the topology of R but is not admissible on $(R, +)$. Consider the function $g: R \to R$ defined by $g(x) = x^2$ and let $\varepsilon > 0$. Choose $n \in N$ such that $2^{-n} < \varepsilon$ and let $m \in N$ be chosen arbitrarily. If e is subinvariant on R and $x, y \in R$ satisfy $e(x, y) < 2^{-m}$, select $a \in R$ such that $x + y + 2a > 0$ and $2a\,|x - y| > > 2^{-n} - |x - y|(x + y)$. Then $(a + x, a + y) \in V(e, m)$ while $\psi_g(a + x, a + y) > 2^{-n}$.

It was shown in 2.2 that subsemigroups of compact semigroups are uniformizable. This property does not characterize uniformizable topological semigroups as we will see in §3. However, it can be shown that each uniformizable semigroup is densely embeddable in a topological semigroup admitting a complete uniformity.

2.10. Definition. A topological semigroup S is said to be completely uniformizable if and only if S admits a uniformity u for which $[S, u]$ is a complete uniform space.

2.11. A topological semigroup S is uniformizable if and only if it is a dense subsemigroup of a completely uniformizable topological semi-group.

Proof. If u is an admissible uniformity *on* S, the multiplication of S extends to a uniformly continuous, associative binary operation on the completion of $[S, u]$.

3. Subgroups of Uniformizable Topological Semigroups.

Several important properties of subgroups of compact semigroups remain true if we assume uniformizability or complete uniformizability in place of compactness. Theorem 3.1 below follows immediately from 3 of [9]. For the sake of convenience we include its short proof.

3.1 THEOREM. *Let G be a topological semigroup which is also an abstract group. If u is an admissible uniformity on G then $x \to x^{-1}$ is uniformly continuous with respect to u. In particular, G is a topological group.*

Proof. If d is subinvariant on G then d is invariant and $d(x, y) = d(x^{-1}, y^{-1})$ for all $x, y \in G$. Therefore, $V(d, n)^{-1} = V(d, n)$ for each n.

3.2 A subgroup of a uniformizable topological semigroup is a topological group.

As a corollary we obtain the following well-known result [6, 1.5, p. 13].

3.3 A subgroup of a compact semigroup is a topological group.

3.4 *Remark.* Recall that 3.2 does not generalize to the class of all topological semigroups. For example, the additive group of reals together with the topology generated by $\{[r, s) : r < s\}$ is a topological semigroup but not a topological group. This example also serves to point out that uniformizability of the underlying space does not imply uniformizability of the semigroup.

We now turn our attention to the class of uniformizable topological groups. Theorem 3.5 below, which provides a characterization of this class, was proved independently by G. De Marco [2] and the author [8].

In view of 3.1 a topological group (G, τ) admits a uniformity u if and only if both operations are uniformly continuous with respect to u. Let u_R and u_L denote respectively, the right and left uniformities on G. It is well-known [1, §3 Exer. 3, p. 306] that equality of these uniformities implies the uniformizability of G; in particular, u_R is admissible on G if (and only if) $u_R = u_L$. Furthermore, equality of u_R and u_L is a necessary condition for uniformizability and, in fact, u_R is the only possible admissible uniformity on G. Suppose w is admissible on G and let ν_0 be the set of invariant pseudometrics in the gage of w. Since ν_0 is a base for $E(w)$, $\{V(d, n) : d \in \nu_0,\ n \in N\}$ is a base for w consisting of invariant entourages. According to [1, §3 Exer. 1, p. 306], w coincides with u_R. This completes the proof of

3.5 THEOREM. *Let G be a topological group and let u_R and u_L denote its right and left uniformities respectively. The following are equivalent:*

(a) *G is iuniformizable.*

(b) *u_R and u_L are identical.*

(c) *u_R is the unique admissible uniformity on G.*

Examples of topological groups with distinct right and left uniformities are found in [1, §3 Exer. 4, p. 306] and [7, 0(d), p. 210] (See

Example 3.11). There existence, of course, implies that the class of uniformizable semigroups fails to contain the class of topological groups.

The next result is Corollary 1, §3.3 of [1, p. 245].

3.7 If G is a locally compact topological group then $[G, u_R]$ is a complete uniform space.

3.8 A locally compact subgroup of a uniformizable topological semigroup S is closed in S.

3.9 A locally compact subgroup of a compact semigroup S is closed in S.

3.10 A connected, uniformizable semigroup has no proper, open locally compact subgroups.

3.11 *Example.* Let S denote the topological semigroup whose underlying space is Euclidean 2-space and whose multiplication is defined by $((x, y), (u, v)) \to (xu, xv + y)$. The open (but not closed) subgroup $G = \{(x, y) \in S : x \neq 0\}$ is a locally compact topological group. According to 3.10 (or 3.8) S is not uniformizable. That S is not uniformizable also follows from 3.5 since the right and left uniformities on G are distinct.

3.12. Let $(R, \times)$ denote the multiplicative semigroup of real numbers with the usual topology. This semigroup is not uniformizable since its subgroup $R - \{0\}$ is locally compact but not closed.

The closure of a subgroup of a compact semigroup is a topological group [6, Thm 1.5, p. 13]. This important result follows immediately from our next theorem.

3.13. THEOREM. *The closure of a subgroup of a completely uniformizable topological semigroup is a completely uniformizable topological group.*

Proof. Let S be a topological semigroup and let u be an admissible uniformity on S such that $[S, u]$ is complete. If $\bar{G}$ denotes the closure of a subgroup G of S and $\bar{U}$ the relative uniformity on $\bar{G}$, then $[\bar{G}, \bar{U}]$ is the completion of $[G, U_R]$ and $(\bar{G}, T(\bar{U}))$ is a topological group ([1, Ch. III, 3.4]). Finally, $\bar{U}$ is admissible on $(\bar{G}, T(\bar{U}))$ since multiplication on G is uniformly continuous with respect to U_R.

3.14 Each maximal subgroup of a completely uniformizable topological semigroup is closed.

3.15 *Example.* Let Q denote the rationals and let S be the subsemigroup $\{q + n\sqrt{2} : q \in Q, n = 0, 1, \ldots\}$ of the additive reals with the usual topology. Then S is uniformizable but not completely uniformizable. Observe that Q is a maximal subgroup of S which is not closed.

4. **Compactifiable Semigroups.** In [3] Dobbins investigates the kernel of a locally compact, compactifiable topological semigroup and provides a necessary and sufficient condition for a topological semigroup to have a metric compactification. As we have already observed (2.2), uniformizability of a topological semigroup S is a necessary condition

for S to have a compactification. In this section we characterize compactifiable semigroups in terms of their continuous pseudometrics.

Recall that a uniformity u on a space X is said to be precompact if the completion of $[X, u]$ is a compact space.

4.1 THEOREM. *A topological semigroup S has a compactification if and only if there exists a precompact uniformity u admissible on S.*

Proof. Let S_0 be a compactification of S, let u_0 denote the unique admissible uniformity on S_0, and let u be the relative uniformity on S. Clearly, u is admissible on S and, since $[S_0, u_0]$ is the completion of $[S, u]$, u is precompact. The converse follows from the proof of 2.11.

4.2 THEOREM. *A topological semigroup S has a compactification if and only if the collection of totally bounded, subinvariant pseudometrics which are continuous on $S \times S$, separates points from closed sets.*

Proof. According to 2.7 and 1.1 a uniformity u is admissible on S if and only if the subinvariant members of its gage separate points from closed sets. The result now follows from the fact that u is precompact if and only if each member of its gage is totally bounded [5, Thm. 15.16].

4.3 [3, 2.2]. Let S be a topological semigroup whose underlying space is metrizable. Then S has a metrizable compactification if and only if the topology of S is determined by a totally bounded, subinvariant metric.

4.4 *Example.* Let T be the additive semigroup of nonnegative reals together with its usual topology and let d be the metric on T defined by $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$. The uniformity generated by d is an admissible precompact uniformity on T. Given any c, x and $y \in T$,

$$d(x + c, y + c) = d(c + x, c + y) =$$
$$= e^{-c}|e^{-x} - e^{-y}| \leq |e^{-x} - e^{-y}| = d(x, y),$$

hence d is subinvariant. Suppose now that d is not totally bounded. Then for some $\varepsilon > 0$ there exists a sequence x_n in T such that

$$x_n \in T - \bigcup_{k=1}^{n-1} \{x : d(x, x_k) < \varepsilon\}.$$

This is impossible since e^{-x} is bounded on T. The completion of $[T, u(d)]$ is precisely the one-point compactification $T \cup \{\infty\}$ of T. The point ∞ becomes zero element relative to the extended operation on $T \cup \{\infty\}$.

4.5 *Example.* The additive group of reals $(R, +)$, with the usual topology, has U_R as its unique admissible uniformity. Since R is complete, but not compact relative to U_R, $(R, +)$ fails to have a compactification.

Other examples of non-compactifiable semigroups include 3.4, 3.11, 3.12 and 3.15.

A topological space X is called pseudocompact if every continuous function of X into the reals is bounded. These spaces are precisely those for which every compatible uniformity is precompact [5, 15Q.1, p. 237].

4.6 A pseudocompact topological semigroup has a compactification if and only if it is uniformizable.

4.7 *Example*. The topological semigroup W of 2.4 is pseudocompact and uniformizable and therefore has a compactification. The compact semigroup W^* of all ordinals less than or equal to w_1 and multiplication defined by $(x, y) \to \max \{x, y\}$ is the unique compactification of W.

(Received March 15, 1975)

REFERENCES

1. N. Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
2. G. De Marco, *Sulla uniformita naturale nei gruppi topologici*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47** (1972), 167–169.
3. J. Dobbins, *On the kernel of a locally compact semigroup*, Duke Math J. **39** (1972), 327–331.
4. R. Ellis, *A note on the continuity of the inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 372–373.
5. L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Norstrand, Princeton, 1960.
6. K. Hofmann and P. Mostert, *Elements of Compact Semigroups*, Charles E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.
7. J. Kelley, *General Topology*, Van Norstrand, Princeton, 1955.
8. D. Marxen, *Uniform Semigroups*, Ph. D. Dissertation, University of Kentucky, 1971.
9. $_*{}^*{}_*$ *Uniform Semigroups*, Math, Ann. **202** (1973), 27–36.
10. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
11. A. D. Wallace, *The Rees-Suschkewitsch structure theorem for compact simple semigroups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 430–432.

CONTINUITATE UNIFORMĂ PE SEMIGRUPURI ŞI GRUPURI

(Rezumat)

Se studiază semigrupurile uniformizabile şi acele subsemigrupuri ale acestora care sînt grupuri. Se dau caracterizări ale semigrupurilor topologice uniformizabile şi ale celor compactifiabile.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

ASUPRA METRIZABILITĂŢII SPAŢIILOR A_n T-RECURENTE

P. ENGHIŞ

Fie A_n un spaţiu cu conexiune afină cu torsiunea în care notăm Γ^i_{jk} componentele conexiunii afine şi cu $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ componentele tensorului de torsiune.

Spaţiul A_n se numeşte T-recurent, sau de torsiune recurentă [2] dacă există un vector covariant φ_r astfel ca

$$T^i_{jk,r} = \varphi_r T^i_{jk} \tag{1}$$

unde prin virgulă este notată derivarea covariantă în raport cu conexiunea Γ^i_{jk}.

Contractînd relaţia (1) în i şi j se obţine

$$T_{k,r} = \varphi_r T_k \tag{2}$$

unde T_k este vectorul de torsiune, deci [2] într-un spaţiu A_n T-recurent vectorul de torsiune este şi el recurent cu acelaşi vector de recurenţă.

Considerînd [6] tensorii ce se obţin din tensorul de torsiune prin produs tensorial sau produs tensorial contractat

$$T^i_{jh}T^k_{pr},\quad T^i_{jh}T^k_{ip},\quad T^i_{jk}T^s_{si},\quad T^i_{jk}T^j_{ip} = T_{kp} \tag{3}$$

se constată de asemenea [2] că într-un spaţiu A_n T-recurent şi ei sînt recurenţi de vector $2\varphi_r$.

Dintre tensorii definiţi de relaţiile (3) considerăm tensorul

$$T_{kp} = T^i_{jk}T^j_{ip} \tag{4}$$

care este tensor simetric, numit [6] tensorul pătratic de torsiune şi aplicînd identităţile lui Ricci obţinem:

$$T_{kp,mn} - T_{kp,nm} = \Gamma^s_{kmn}T_{sp} + \Gamma^s_{pmn}T_{ks} - T^s_{mn}T_{kp,s}$$

Ţinînd seama că într-un spaţiu A_n T-recurent tensorul patratic de torsiune este şi el recurent [2] de vector $2\varphi_r$ avem

$$2(\varphi_{m,n} - \varphi_{n,m})\, T_{kp} = \Gamma^s_{kmn}T_{sp} + \Gamma^s_{pmn}T_{ks} - 2\varphi_s T^s_{mn}T_{kp}$$

şi cum

$$\varphi_{m,n} - \varphi_{n,m} = \partial_n\varphi_m - \partial_m\varphi_n - \varphi_s T^s_{mn}$$

rezultă

$$\Gamma^s_{kmn}T_{sp} + \Gamma^s_{pmn}T_{ks} = 2(\partial_n\varphi_m - \partial_m\varphi_n)\, T_{kp} \tag{5}$$

iar dacă vectorul de recurenţă φ_r este gradient avem

$$\Gamma^s_{kmn}T_{sp} + \Gamma^s_{pmn}T_{ks} = 0 \tag{6}$$

Avem deci:

PROPOZIŢIA 1. *Într-un spaţiu A_n T-recurent, tensorul patratic de torsiune satisface relaţiile* (5), *iar dacă vectorul de recurenţă φ_r este gradient atunci satisface relaţiile* (6).

Definind într-un spaţiu A_n [4], [5] lungimea unui vector $\mathcal{V}(v^i)$ care are originea într-un punct regulat (x^k), printr-o funcţie analitică $\lambda(x^i, v^i)$, $(i = 1, \ldots, n)$ ce satisface condiţiile

a) λ este o funcţie omogenă de grad unu în raport cu v^i

b) λ se conservă prin transportul paralel al vectorului $\mathcal{V}$ dintr-un punct (x^k) într-un punct infinit vecin $(x^k + dx^k)$

c) λ este invariantă la transformările de coordonate se obţine sistemul

$$\begin{gathered} v^i \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} = \lambda \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} v^j \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} = 0 \\ \Gamma^h_{ijk} v^i \frac{\partial \lambda^h}{\partial v^h} = 0 \\ \left(\Gamma^s_{ijk}\Gamma^h_{spq} - \Gamma^s_{ipq}\Gamma^h_{sjk}\right) v^i \frac{\partial \lambda}{\partial v^h} = 0 \\ - - - - - - - \\ - - - - - - - \end{gathered} \tag{7}$$

pe care trebuie să-l verifice funcţia λ, cu condiţiile de compatibilitate:

$$\begin{gathered} \alpha^{pq}_m \Gamma^h_{ipq} = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{|2} \\ \Gamma^h_{ijk,r} = \mu^{pq}_{jhr}\Gamma^h_{ipq}, \quad \Gamma^s_{ijk}\Gamma^h_{spq} - \Gamma^s_{ipq}\Gamma^h_{sjk} = \nu^{mn}_{jkpq}\Gamma^h_{imn} \end{gathered} \tag{8}$$

Un astfel de spaţiu se numeşte spaţiu A_n metrizabil.

Să stabilim în ce condiţii un spaţiu A_n T-recurent este metrizabil, adică admite ca invariant ataşat unui vector o funcţie

$$\lambda = \sqrt{e^{-2\varphi} T_{kp} v^k v^p} \tag{9}$$

cu det. $T_{kp} \neq 0$, funcţie ce să reprezinte lungimea unui vector, deci să satisfacă sistemul (7), unde φ este deocamdată arbitrară, iar T_{kp} tensorul patratic de torsiune.

Impunînd funcţiei λ condiţia ca să satisfacă sistemul (7) se constată că prima ecuaţie este identic satisfăcută. Ecuaţiile doi şi trei devin:

$$\begin{gathered} 2\partial_k \varphi T_{mn} v^m v^n + \partial_k T_{mn} v^m v^n - \Gamma^n_{jk} T_{mn} v^j v^m - \Gamma^m_{jk} T_{mn} v^i v^n = 0 \\ T_{mn}\Gamma^m_{ijp} v^i v^n + T_{mn}\Gamma^n_{ijp} v^i v^m = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

În prima ecuație (10) introducînd în locul derivatei parțiale derivata covariantă și ținînd seama de faptul că T_{kp} este recurent cu vector de recurență $2\varphi_r$, iar în ecuația a doua permutînd convenabil indicii de însumare obținem:

$$(\partial_k\varphi - \varphi_k)\, T_{mn}v^m v^n = 0, \quad (\Gamma^i_{mjp}T_{in} + \Gamma^i_{njp}T_{im})\, v^m v^n = 0. \tag{11}$$

Ecuațiile (11) trebuind să fie identic satisfăcute în raport cu componentele v^i ale vectorului și cum $T_{kp} \neq 0$ prin ipoteză rezultă că pentru ca (9) să fie o soluție a sistemului (7) trebuie ca

$$\varphi_k = \partial_k\varphi \quad \text{și} \quad \Gamma^i_{mjp}T_{in} + \Gamma^i_{njp}T_{im} = 0 \tag{12}$$

Prima relație (12) impune vectorului φ_r de T-recurență condiția de a fi gradientul funcției φ, iar a doua relație (12) este relația (6) care conform propoziției 1 este satisfăcută într-un spațiu A_n T-recurent cu gradient de recurență. Se constată imediat că dacă $g_{ij} = e^{-2\varphi}T_{ij}$ atunci $g_{ij,r} = 0$ și avem:

PROPOZIȚIA 2. *Un spațiu A_n T-recurent în care det. $T_{kp} \neq 0$ este metrizabil, dacă și numai dacă vectorul φ_r de T-recurență este gradientul unei funcții scalare φ, tensorul metric fiind $g_{ij} = e^{-2\varphi}T_{ij}$.*

Introducînd definiția dată de A. Haimovici [3] unghiului a două direcții (X^i), (Y^i), dintr-un punct al unui spațiu A_n ca o funcție $V(x^i, X^i, Y^i)$ ce satisface condițiile:

a) V este funcție omogenă de grad zero în raport cu componentele X^i și Y^i separat

b) V este invariantă la transportul paralel al direcțiilor X^i și Y^i de-a lungul unui arc de curbă infinitezimală

c) V este invariantă la transformările de coordonate, se obține sistemul

$$\begin{gathered} X^i\frac{\partial V}{\partial X^i} = 0 \quad Y^i\frac{\partial V}{\partial Y^i} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x^j} - \Gamma^i_{hj}\left(X^h\frac{\partial V}{\partial X^i} + Y^h\frac{\partial V}{\partial Y^i}\right) = 0 \\ \Gamma^h_{ijk}\left(X^i\frac{\partial V}{\partial X^h} + Y^i\frac{\partial V}{\partial Y^h}\right) = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

ce trebuie să-l verifice funcția V pentru ca spațiul A_n să admită o metrică unghiulară de forma

$$\cos V = \frac{T_{ij}X^iY^j}{\sqrt{T_{ij}X^iX^j}\sqrt{T_{ij}Y^iY^j}} \tag{14}$$

unde T_{ij} este tensorul patratic de torsiune.

Spațiile A_n ce admit o metrică unghiulară de această formă, au fost numite [5] H-metrizabile.

Punînd condiţia ca funcţia V definită de (14) să verifice sistemul (13) se constată că primele ecuaţii sînt verificate. Pentru ecuaţiile doi ale sistemului (13) se obţine

$$(2T_{mn}T_{pq}T_{ik,j} - T_{ik}T_{pq}T_{mn,j} - T_{ik}T_{mn}T_{pq,j})\, X^iX^mX^nY^kY^pY^q = 0$$

Spaţiul A_n fiind presupus însă T-recurent, tensorul patratic de torsiune este şi el recurent de unde rezultă că aceste ecuaţii sînt identităţi.

Pentru ecuaţiile trei ale sistemului (13) avem

$$2T_{mn}T_{pq}(T_{si}\Gamma^s_{kjh} + T_{sk}\Gamma^s_{ijh}) - T_{ik}T_{pq}(T_{sm}\Gamma^s_{njh} + T_{sn}\Gamma^s_{mjh}) -$$
$$- T_{ik}T_{mn}(T_{sp}\Gamma^s_{qjh} + T_{sq}\Gamma^s_{pjh})\, X^iX^mX^nY^kY^pY^q = 0$$

care dacă ţinem seama de (5) rezultă că şi ele sînt identităţi şi avem

PROPOZIŢIA 3. *Spaţiile A_n T-recurente sînt totdeauna H-metrizabile, metrica unghiulară fiind dată de* (14).

(Intrat în redacţie la 21 mai 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Eisenhart, L. P., *Non Riemannian Geometrie*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **VIII**, 1927.
2. Enghiş, P., *Sur les espaces à connexion affine avec torsion récurrente*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 1, 1973, 13–16.
3. Haimovici, A., *Spaţii cu metrică unghiulară*, I, Com. Acad. R.P.R., **1** (1951), 157–163; II, St. Cercet. Şt., Acad. R.P.R., fil. Iaşi, **2** (1951), 66–82.
4. Murgescu V., *Asupra unor invarianţi ataşaţi unui tensor în spaţii cu conexiune afină*, Studii şi Cercet. Şt., Acad. R.P.R., fil. Iaşi, VII, 2 (1956), 75–98.
5. Murgescu, V., *Sur les espaces à connexion affine à courbure récurrente*, An. Şt. Univ. Iaşi, **VI** (1958), 67–79.
6. Vrînceanu, G., *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., 1952.

SUR LA MÉTRISABILITÉ DES ESPACES A_n T-RÉCURRENTS

(Résumé)

Dans le travail on étudie le problème de la métrisabilité des espaces A_n T-récurrents. On montre que les espaces T-récurrents sont toujours H-métrisables et si le vecteur de récurrence est gradient, alors ils sont métrisables.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

SPAŢII METRICE $\mathcal{S}(G.,S,\perp)$ (II)

ANGELA VASIU

În această notă se continuă studiul spaţiilor metrice asociate unui grup abstract G, ce admite un sistem de generatori S format din elemente de ordinul doi, introduse în [7].

§ 1. **Snop Normal.** În acest paragraf vrem să studiem mulţimea planelor perpendiculare pe un plan a. Teoremele pe care le vom demonstra ne vor conduce la concluzia că dacă $a \overline{\in} C$, centrul grupului G atunci mulţimea planelor perpendiculare pe a sînt cuprinse într-un singur snop de plane.

THEOREMA 1.1. *Prin orice punct $P(\gamma) \overline{\ni} a$ există o dreaptă perpendiculară pe planul a. Ea este unică dacă $P(\gamma)$ nu este un pol pentru planul a.*

Demonstraţie. Dacă $P(\gamma) \neq P(\gamma^a)$, adică dacă $P(\gamma)$ nu este polul lui a atunci conform teoremei 2.5 din [7] $P(\gamma)$ şi $P(\gamma^a)$ sînt jonctibile şi fie $x, y \in P\gamma) \cap P(\gamma^a)$ atunci x^a, $y^a \in P(\gamma^a) \cap P(\gamma)$. Pe baza teoremei 1.2 din [7] $D(x,y) = D(x^a, y^a) = D(x, y^a) = D(x,y)^a$, adică $D(x,y)$ este unica dreaptă perpendiculară pe planul a.

Dacă $P(\gamma)$ este polul lui a, atunci orice dreaptă determinată de a_1, a_2, a_3 unde $a_1, a_2, a_3 \in P(\gamma)$ este perpendiculară pe planul a avînd în vedere teorema 4.4 din [5].

LEMA 1.1. *Planele perpendiculare pe un plan a nu aparţin unui fascicul.*

Demonstraţie. Dacă punctul propriu nesingular $P(\gamma) \overline{\ni} a$, care conform teoremei 2.3 din [7] există, este un pol, teorema este demonstrată. În caz contrar fie $D = D(a_1, b_1)$ dreapta perpendiculară pe planul a prin $P(\gamma)$. Punctul propriu $P(\gamma)$ fiind nesingular există un plan $c_1 \overline{\in} D(a_1, b_1)$ şi $c_1 \overline{\perp} a_1$. Atunci $c_1 \overline{\perp} a$. Fie P_1 punctul determinat de planul a şi dreapta $D(a_1\ b_1)$. Atunci $P_1^{c_1}$ este un punct cu proprietatea că $P_1^{c_1} \overline{\ni} a$ şi $P_1^{c_1} \overline{I}$ $D(a_1, b_1)$. Dreptele perpendiculare pe a prin $P(\gamma)$ şi $P_1^{c_1}$ sînt distincte, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 1.2. *Dacă $a, b, c \perp u$, $abc \overline{\in} S$ şi $P(a,b,c) \overline{\ni} u$ atunci oricare ar fi $d \in P(a, b, c)$ este perpendicular pe u.*

Demonstraţie. Dacă $u \overline{\in} P(a, b, c)$ atunci avînd în vedere teorema 1.4 din [7] din $d \overline{\in} P(a, b, c)$ rezultă că $d^u \in P(a, b, c)$ dacă şi numai dacă $d \perp u$. Să arătăm că $d^u \in P(a, b, c)$.

Avem $abcd = ef \in S^2$ atunci $(abcd)^u = (ef)^u = e_1 f_1 \in S^2$, dar $(abcd)^u = a^u b^u c^u d^u = abcd^u \in S^2$ şi deci $d^u \in P(a, b, c)$ adică $d \perp u$.

TEOREMA 1.3. *Dacă $a, b, c, d \in S$ şi $u \overline{\in} C$ atunci din $a \perp u$, $b \perp u$, $c \perp u$, $d \perp u$ rezultă $abcd \in S^2$.*

Demonstraţie. Din existenţa a patru puncte proprii necoplanare (teorema 2.3 din [7]) avem un punct propriu $P(\gamma) \overline{\ni} u$. Atunci pentru două plane distincte $a \neq b$ există un plan $a' \in P(\gamma)$ astfel că $a' \in D(a, b)$ deci

$aba' \in S$, dar conform proprietăţii de simetrie a relaţiei ternare ρ definite în S în [6], avem de asemenea $a'ab \in S$. Fie $a'ab = b'$ deci $ab = a'b'$.

În acest caz $abcd = a'b'cd$ cu $a' \in P(\gamma)$. În mod analog pentru dreapta determinată de b' şi c există un plan $b'' \in P(\gamma)$ cu proprietatea $b'c = b''c''$. Se obţin în acest fel relaţiile:

$$abcd = a'b'cd = a'b''c'd = a'b''c'''d' \quad \text{cu} \quad a', b'', c''' \in P(\gamma).$$

Planul $a' \in D(a, b)$ cu $a, b \perp u$ atunci conform teoremei 1.2 din [7] $a' \perp u$. În mod analog b'', c''' sînt perpendiculare pe planul u.

Dacă $P(\gamma)$ nu este un pol al planului u, atunci conform teoremei 1.1 a', b'', c''' sînt incidente cu dreapta perpendiculară pe u prin $P(\gamma)$ şi deci $a'b''c'''d' = abcd \in S^2$.

Dacă $P(\gamma)$ este un pol al planului u şi celelalte trei puncte proprii din teorema 2.3 din [7] sînt incidente cu u, raţionamentul nu poate fi condus în acelaş fel. În acest caz presupunem contrariul, că $abcd \overline{\in} S^2$. Să arătăm că atunci $u \in C$, contrar ipotezei.

Din $abcd \overline{\in} S^2$ rezultă că nici un produs format cu trei elemente din a, b, c, d nu aparţine la S conform proprietăţii 2 a relaţiei de incidenţă quaternare θ definită în S [6]. În acest caz cele patru plane determină patru puncte necoplanare $P_1 = p(a, b, c)$, $P_2 = P(a, b, c)$ $P_3 = p(a, cd)$, $P = P(b, c, d)$ Deoarece oricare trei puncte necoliniare nu conţin planul u, u poate aparţine la cel mult două din ele pentru că în caz contrar u ar coincide cu a, b, c sau d în contradicţie cu ipoteza a, b, c, d diferit de u deoarece $a, b, c, d \perp u$. Conform teoremei 1.2 orice plan prin punctele P_i $i = 1, 4$ neincidente cu u este perpendicular pe planul u. Printre punctele P_i care sînt neincidente cu u cel puţin unul este diferit de $P(\gamma)$, punctul propriu care este un pol pentru u.

Notăm $Q = P_i$ un punct diferit de $P(\gamma)$. Atunci, dacă x este un plan oarecare neincident cu $P(\gamma)$ sau Q, considerăm dreapta determinată de x şi un plan $y \in Q$, $D(x, y)$. Deoarece $P(\gamma)$ este propriu, există un plan $z \in D(x,y) \cap P(\gamma)$. Planele y, x aparţin dreptei $D(x,y)$, sînt perpendiculare pe planul u, deoarece orice plan prin Q şi $P(\gamma)$ este perpendicular pe planul u, deci conform teoremei 4.4 din [5] dreapta $D(x, y) \perp u$, iar pe baza teoremei 1.2 din [7] şi planul $z \perp u$. Aceasta înseamnă că orice plan al spaţiului asociat este perpendicular pe u şi deci $u \in C$, care demonstrează teorema.

DEFINIŢIA 1.1. *Dacă pentru un plan a există un snop de plane P cu proprietatea $x^a = x$ este echivalent cu $x \in P$ sau $x = a$ îl numim snop normal al lui a şi îl notăm cu $P(a)$.*

Avînd în vedere proprietatea de simetrie a relaţiei de perpendicularitate, pentru două plane $a, b \overline{\in} C$, $a \in P(b)$ este echivalent cu $b \in P(a)$.

§ 2. Proprietăţi metrice ale dreptelor şi punctelor proprii.

TEOREMA 2.1. *Dacă $a \overline{\in} C$ şi D este o dreaptă proprie atunci există un plan b, $b \perp a$ cu $b \in D$.*

Demonstraţie. Dacă $a \in D$ atunci, deoarece D este proprie, există un plan $b \in P(a) \cap D$, şi deci $b \perp a$ cu $b \in D$.
Dacă $a \overline{\in} D$, considerăm un punct propriu P_1, $P_1\ I\ D$, atunci conform teoremei 1.1 există o dreaptă D_1, $D_1 I P_1$ şi $D_1 \perp a$. Dreptele D şi D_1 sînt incidente cu punctul P_1, propriu deci există un plan $b \in D_1 \cup D$, atunci b este planul căutat, avînd în vedere teorema 1.2 din [7].

Consecinţă. Din $a, b\ I\ D$ şi $a, b \perp c$ rezultă $a = b$ sau $D \perp c$.

TEOREMA 2.2. *Dacă P este un punct propriu, atunci oricare ar fi D o dreaptă, există un singur plan b, $b\ I\ P$ şi $b \perp D$.*

Demonstraţie. Conform teoremei precedente pentru un plan $x \in D$ există o dreaptă $D_1 I P$ şi $D_1 \perp x$ şi la fel pentru un plan y, $x = y$, $y \in D$ există o dreaptă D_2, $D_2 I P$ şi $D_2 \perp y$. Dreptele D_1 şi D_2 fiind incidente cu un punct propriu există un plan b, $b \in D_1 \cap D_2$ şi deci $b \perp x$ şi $b \perp y$ adică $b \perp D$ şi bIP Dacă PID atunci b este planul determinat de P, $P(x)$ şi $P(y)$.

TEOREMA 2.3. *Snopurile normale ale planelor incidente cu o dreaptă dacă nu coincid sînt coliniare.*

Demonstraţie. Dacă două snopuri $P(a)$ şi $P(b)$ sînt distincte atunci conform teoremei 2.5 din [7] ele sînt joctibile, adică există $x, y \in P(a) \cap \cap P(b)$ adică $x, y \perp a, b$. Conform teoremei 1.2 din [7] orice plan care aparţine dreptei $D(x,y)$ este perpendicular pe a şi de asemenea pe b, deci orice plan care aparţine dreptei $D(x, y) = D(P(a), P(b))$ este perpendicular pe dreapta $D(a, b)$ şi invers, deci snopurile de plane perpendiculare pe $D(a, b)$ sînt coliniare.

DEFINIŢIA 2.1. *Dreptele $D(a, b)$ şi $D(P(a), P(b))$ dacă $P(a) = P(b)$ se numesc drepte polare.*

Observaţie. Dreapta $D(a, b)$ este polară $D(P(a), P(b))$ şi $D(P(a), P(b))$ este polară dreptei $D(a, b)$ şi se numesc polare reciproce.

§ 3. Axiomele metricii neeuclidiene, euclidiene şi supereuclidiene. În § 1 al acestei note am văzut că fiecărui plan $a \in C$ i se asociază în mod unic un snop normal. Reciproca acestei proprietăţi nu este adevărată în orice grup $(G.S)$ care verifică sistemul de axiome din [5]. Există grupuri $(G.S)$ în care la plane distincte corespund snopuri normale distincte, după cum există grupuri $(G.S)$ pentru care această proprietate nu are loc.
Această proprietate conduce la o diferenţiere a grupurilor $(G.S)$ care satisfac axiomele A, B, C din [5] prin axiome auxiliare.

AXIOMA *NE*. Dacă $a, b, c \perp x, y$ atunci $abc \in S$.

AXIOMA *E*. Există cinci plane a, b, c, x, y astfel ca $a, b, c \perp x, y$, $x \neq y$ şi $abc \overline{\in} S$ şi nu există şase plane a', b', c', x', y', z' astfel ca $a', b', c' \perp x', y', z'$ astfel ca $a'b'c' \overline{\in} S$ şi $x'y'z' \overline{\in} S$ şi $P(a', b', c') \neq P(x', y', z')$.

AXIOMA *SE*. Există şase plane $a, b, c \perp x, y, z$ astfel ca $abc \overline{\in} S$ şi $xyz \overline{\in} S$ cu $P(a, b, c) \neq P(x, y, z)$.

DEFINIŢIA 3.1. Planele a şi b cu $a \neq b$, $a, b \in S$ se zic paralele dacă $P(a) = P(b)$ şi le notăm prin $a||b$.

Planele x,y din axioma E sînt paralele deoarece $P(x) = P(y) = P(a,b,c)$, de asemenea planele x, y şi z şi a, b şi c din axioma SE sînt paralele adică $x||y||z||x$ şi $a||b||c||a$.

Axioma NE are loc în cazul geometriilor de tip neeuclidian şi vom spune că ea caracterizează metrica neeuclidiană, iar axioma E are loc în geometrii de tip euclidian şi vom spune că axioma E caracterizează metrica euclidiană.

Axioma SE caracterizează o altă clasă de geometrii pe care le numim geometrii de tip supereuclidian şi vom numi metrica definită prin axioma SE metrică supereuclidiană.

(*Intrat în redacţie la 8 ianuarie 1974*)

BIBLIOGRAFIE

1. Ahrens, J., *Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff*, Math. Zeitschr., **71** (1959).
2. Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Grundlehren d. math. Wiss., Bd. **96** (1959).
3. Dicounzo, V., *Sulla construzione gruppale di una geometria metrica a debole struttura d'incidenzo*, Rend. di Mat. e delle sue appl., **XXV**, 593—603.
4. Lingenberg, R., *Uber Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt*, I, II, III, IV, Math. Ann. **137** (1959), 26—41, 83—106; **142** (1961), 184—224; **158** (1965), 297—325.
5. Vasiu, A. *Grupuri* (*G.S*) *cu sistem de generatori involutivi* (I), Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2, 1973, 13—20.
6. Vasiu, A., *Grupuri* (*G.S*) *cu sistem de generatori involutivi* (II), Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 1, 1974, 33—34.
7. Vasiu, A., *Spaţii metrice* $\mathcal{S}(G., S, \perp)$ (I), Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 1975, 26—30.

ESPACES MÉTRIQUES $\mathcal{S}$ $(G, S, \perp)$ (II)

(Résumé)

Dans cette note on étend l'étude des espaces métriques $\mathcal{S}(G, S, \perp)$ introduits dans [7]. Les théorèmes établis conduisent à une division des espaces $\mathcal{S}(G, S, \perp)$ en espaces avec une métrique non-euclidienne, euclidienne ou supereuclidienne.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

SECŢIUNI RECURENTE ALE UNUI FIBRAT VECTORIAL ÎN RAPORT CU O LEGE DE DERIVARE (II)

PROFIRA SANDOVICI

3. **Condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa unei secţiuni $u \in \Sigma$, ∇-recurentă** Homomorfismul $\lambda_0 : \Phi_{p_0'} \to R \setminus \{0\}$ $(= GL\ (1, R))$ defineşte o reprezentare liniară a grupului Φ_{p_0} în R:

$$\Phi_{p_0} \times R \to R : (a, r) \mapsto \lambda_0(a^{-1})r. \tag{3.1}$$

Vom nota prin $\varepsilon\ (P[p_0])$ fibratul asociat cu fibratul de olonomie $P[p_0]$ şi de fibră tip R, pe care grupul Φ_{p_0} acţionează prin (3.1). Din (2.4) rezultă:

PROPOZIŢIA 3.1. *Funcţia $f_0 : P[p_0] \to R$, care se asociază unei secţiuni $u \in \Sigma$ ∇-recurentă prin* (2.1), *corespunde unei secţiuni a fibratului $\varepsilon\ (P[p_0])$, în izomorfismul ce există între $\mathcal{F}(M)$-modulul secţiunilor lui $\varepsilon(P[p_0])$ şi $\mathcal{F}(M)$-modulul Φ_{p_0}-funcţiilor $P[p_0] \to R$.*

PROPOZIŢIA 3.2. *Următoarele două condiţii sînt condiţii necesare şi suficiente pentru ca să existe o secţiune $u \in \Sigma$ ∇-recurentă:*

1. *Pentru un $p_0 \in P$, grupul de olonomie Φ_{p_0} al conexiunii Γ invariază un subspaţiu de dimensiune 1 al spaţiului vectorial F, deci există $\tilde{u}_0 \in F$ astfel ca $\tilde{u}_0 \neq 0$,*

$$\mathcal{R}(a^{-1})\, \tilde{u}_0 = \lambda_0(a)\, \tilde{u}_0 \quad \forall a \in \Phi_{p_0} \tag{3.2}$$

2. *Fibratul $\varepsilon(P[p_0])$, asociat fibratului de olonomie $P[p_0]$ şi de fibră tip R pe care Φ_{p_0} acţionează prin* (3.1), *admite o secţiune care nu se anulează pentru nici un punct $x \in M$.*

Dacă condiţiile 1. şi 2. sînt satisfăcute într-un punct $p_0 \in P$, atunci ele sînt satisfăcute în orice alt punct al lui P.

Demonstraţie. Ne interesează în primul rînd în ce măsură condiţiile 1. şi 2. depind de punctul $p_0 \in P$. Fie deci $p_1 \in P$ un punct care nu aparţine lui $P[p_0]$, deoarece în caz contrar avem $\Phi_{p_0} = \Phi_{p_1}$ şi $P[p_0] = P[p_1]$. Putem să presupunem fără a pierde din generalitate, că $p_1 = p_0 g$. Atunci $\Phi_{p_1} = g^{-1}\Phi_{p_0} g$ şi pentru $a' = g^{-1}ag \in \Phi_{p_1}$ avem

$$\mathcal{R}(a^{-1})\, \tilde{u}_0 = \mathcal{R}(g)\, \mathcal{R}(a'^{-1})\, \mathcal{R}(g^{-1})\, \tilde{u}_0$$

Ţinînd seamă de (3.2) deducem că Φ_{p_1} invariază subspaţiul lui F subîntins de $\tilde{u}_1 = \mathcal{R}(g^{-1})\, \tilde{u}_0$, şi anume avem

$$\mathcal{R}(a'^{-1})\, \tilde{u}_1 = \lambda_1(a')\, \tilde{u}_1 \quad \forall a' \in \Phi_{p_1},$$

unde

$$\lambda_1(a') = \lambda_0(a) \quad \forall a \in \Phi_{p_0}\ \forall\, a' = g^{-1}ag \in \Phi_{p_1}. \tag{3.3}$$

Să presupunem acum că fibratul $\varepsilon(P[p_0])$ admite o secţiune a cărei Φ_{p_0} — funcţie este $f_0 : P[p_0] \to R$.

Definim în acest caz funcţia $f_1: P[p_1] \to R$ astfel că $f_1(pg) = f_0(p)\ \forall p \in P[p_0]$. Arătăm că f_1 este o Φ_{p_1}-funcţie. Într-adevăr, din definiţia lui f_1 avem pentru $p' = pg \in \Phi_{p_1}$ şi $a' = g^{-1}ag \in \Phi_{p_1}$, $f_1(p'a') = f_1(p'g^{-1}ag) = f_1(pag) = f_0(pa)$. Apoi, din faptul că f_0 este o Φ_{p_0}-funcţie rezultă din relaţia de mai sus şi din (3.3) $f_1(p'a') = \lambda_0(a)\ f_0(p) = \lambda_1(a') f_1(p')\ \forall p' \in P[p_1]\ \forall a' \in \Phi_{p_0}$. Rezultă de aici existenţa unei secţiuni a fibratului $\varepsilon(P[p_1])$ definită de funcţia f_1. Am stabilit astfel că dacă condiţiile 1. şi 2. sînt verificate în punctul $p_0 \in P$, atunci ele sînt satisfăcute şi în punctul $p_1 \in P$.

Necesitatea condiţiilor 1. şi 2. rezultă din propoziţiile 1.3, 2.1 şi 3.1. Să demonstrăm suficienţa lor. Presupunem deci existenţa unui element $\tilde{u}_0 \in F$ avînd proprietatea (3.2) şi a unei secţiuni a fibratului $\varepsilon(P[p_0])$ a cărui Φ_{p_0}-funcţie să o notăm prin f_0. Admitem deci existenţa unei funcţii $f_0: P[p_0] \to R$ astfel încît $f_0(pa) = \lambda_0(a)\ f_0(p) \forall p \in P[p_0]\ \ \forall a \in \Phi_{p_0}$. În aceste condiţii definim funcţia

$$\tilde{u}: P \to F,\ \tilde{u}(p) = f_0(p)\,\tilde{u}_0\ \forall p \in P[p_0]\ \forall p_0 \in P \tag{3.4}$$

Arătăm că $\tilde{u}$ este o G-funcţie. Fie $p \in P$ şi $g \in G$ elemente arbitrare. Să presupunem întîi că $p,\ pg \in P[p_0]$. Atunci avem din (3.4) şi din (2.4), (3.2),

$$\tilde{u}(pg) = f_0(pg)\,\tilde{u}_0 = \lambda_0(g) f_0(p)\tilde{u}_0 = f_0(p)\,\mathcal{R}(g^{-1})\,\tilde{u}_0 = \mathcal{R}(g^{-1})\,\tilde{u}(p).$$

Dacă $p \in P[p_0]$ şi $pg \in P[p_1]$, atunci din (3.4), (2,6), (2,5) deducem $\tilde{u}(pg) = f_1(pg)\,\tilde{u}_1 = f_0(p)\,\mathcal{R}(g^{-1})\,\tilde{u}_0 = \mathcal{R}(g^{-1})\,\tilde{u}(p)$, de unde rezultă că $\tilde{u}$ este o G-funcţie pe P cu valori în F.

Dar, după definiţia (3.4), $\tilde{u}$ este astfel încît valorile sale pe o varietate de olonomie $P[p_0]$ sînt proporţionale cu un element constant $\tilde{u}_0$ al spaţiului vectorial F. Atunci, după prop. 1.3, rezultă că secţiunea $u \in \Sigma$ asociată lui $\tilde{u}$ este ∇-recurentă şi astfel este demonstrată şi suficienţa condiţiilor 1. şi 2.

4. **∇-recurenţă cu 1-forma de recurenţă φ gradient.** PROPOZIŢIA 4.1. *Fie $u \in \Sigma$ o secţiune ∇-recurentă. 1-forma de recurenţă φ este un gradient dacă şi numai dacă homomorfismul $\lambda_0: \Phi_{p_0} \to GL(1, R)$ din prop. 2.1, pentru un $p_0 \in P$, este constant* $(\lambda_0 = 1)$.

Demonstraţie. a) Dacă λ_0 este constant, atunci $\lambda_0(a) = 1\ \forall a \in \Phi_{p_0}$. În acest caz, din (2.4) şi (3.6), rezultă $\lambda = 1$ pentru orice grup de olonomie Φ_p şi funcţiile f au o valoare constantă de-a lungul unei fibre, aceeaşi pentru orice fibrat de olonomie $P[p]$, şi prin urmare aceste funcţii definesc o funcţie $g: M \to R,\ f = g \circ \pi$. Dacă $t \to p_t$ este o curbă în P, atunci $\dot{p}_t f = \dot{x}_t g\ \forall t$, unde $x_t = \pi(p_t)$.

Într-adevăr, avem $\dot{p}_t f = \dot{p}_t(g \circ \pi) = \pi_*(\dot{p}_t)(g) = \dot{x}_t g$. Dar atunci din (1.5) rezultă $(\nabla_X u)(x_t) = d\, ln\, g(x_t)_{|dt}\, u(x_t)$, de unde deducem $(\nabla_X u)(x_t) = \dot{x}_t(ln\ g)\ u(x_t)$. Deoarece $X_{x_t} = \dot{x}_t$, avem în punctul x_1 $(\nabla_X u)(x_1) = \{X(ln\ g)u\}\ (x_1)$. Cum x_1 este un punct arbitrar al lui M, rezultă $\nabla_X u = (d\, ln\, g)(X)\, u\ \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$, deci

$$\nabla u = (d\, ln\, g) \otimes u \tag{4.1}$$

şi avem

$$\varphi = d \ln g \tag{4.2}$$

b) Dacă $\nabla_X u = \varphi(X) u$ şi $\varphi = dm$, $m \in \mathcal{F}(M)$, atunci $\varphi(\dot{x}_t) = dm(\dot{x}) = \dot{x}_t(m) = dm(x_t)_{/dt}$ iar din (2.7), avînd în vedere ca $x_0 = x_1$, deducem pentru orice $a \in \Phi_{p_0}$

$$\lambda_0(a) = \exp\left(\int_0^1 \frac{dm(x_t)}{dt}\, dt\right) = \exp\left(m(x_1) - m(x_0)\right) = 1$$

Dăm în continuare exemple în care homomorfismul λ din prop. 2.1. este constant. Vom considera pentru ξ fibratul reperelor liniare $B(M_n)$ iar pentru $E(\xi)$ fibratul tensorial de un tip (r, s) arbitrar. În acest caz spaţiul vectorial F este spaţiul tensorial $\otimes^r_s R^n$ iar reprezentarea liniară $\mathcal{R}$ a lui $GL(n, R)$ în F este extensiunea tensorială. Modulul Σ este modulul cîmpurilor de tensori de tip (r, s) pe M_n iar legea de derivare ∇ derivata covariantă în raport cu o conexiune liniară Γ.

PROPOZIŢIA 4.2. *Dacă grupul de olonomie Φ_{p_0} al unei conexiuni Γ pe $B(M_n)$, (M_n conexă), este un subgrup ortogonal, atunci, pentru orice cîmp de tensori de tip (r, s) recurent în raport cu Γ, homomorfismul λ este constant* ($\lambda = 1$).

Demonstraţie. Dacă u este un cîmp de tensori de tip (r, s) recurent, atunci $\tilde{u}_0 \in \otimes^r_s R^n$ este invariant prin $\mathcal{R}(a^{-1})\ \forall a \in \Phi_{p_0}$. Cum $\Phi_{p_0} \subset O(n)$ iar $\mathcal{R}$ este o extensiune tensorială a lui $GL(n, R)$, rezultă că $\mathcal{R}(\Phi_{p_0})$ este un subgrup ortogonal al lui $GL(\otimes^r_s R^n)$ în raport cu structura euclidiană indusă de R^n în $\otimes^r_s R^n$.

Din (2.2) rezultă că $\lambda(a)$ este o valoare proprie reală a lui $\mathcal{R}(\Phi_{p_0})$, deci avem $\lambda(a) = \pm 1\ \forall a \in \Phi_{p_0}$ Cum din (2.7) avem $\lambda(a) > 0\ \forall a \in \Phi_{p_0}$, rezultă $\lambda = 1$.

Din propoziţiile 4.1 şi 4.2 rezultă imediat următorul enunţ:

PROPOZIŢIA 4.3. *Fie M un spaţiu riemannian conex.*

Atunci, pentru orice cîmp de tensori pe M, recurent în raport cu conexiunea lui Levi-Civita, 1-forma de recurenţă este un gradient.

Dăm în încheiere o nouă aplicaţie a prop. 4.1. Se ştie că dacă u este un cîmp de tensori de tip (r,r) recurent în raport cu o conexiune liniară Γ şi dacă $C^1_1 \cdot \ldots \cdot C^r_r\, u \neq 0$, unde C^α_β sînt contracţii, atunci 1-forma de recurenţă este un gradient. Avem în acest caz $F = \otimes^r_r R^n$ şi grupul $\mathcal{R}(\Phi_{p_0})$, $p_0 \in B(M)$, invariază un element $\tilde{u}_0 = u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r} \in F$ unde $(e_i)\, i = \overline{1, n}$, $(e^i)\, i = \overline{1, n}$ sînt bazele duale canonice ale lui R^n. Dacă $a = (a^i_j)$ şi $\bar{a} = (\bar{a}^i_j)$ este matricea inversă a lui a, atunci deducem din (2.2)

$$u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} a^{k_1}_{i_1} \ldots a^{k_r}_{i_r} \bar{a}^{j_1}_{m_1} \ldots \bar{a}^{j_r}_{m_r} = \lambda(a)\, u^{k_1 \ldots k_r}_{m_1 \ldots m_r}$$

de unde, prin contracţie completă, obţinem

$$u^{i_1\ldots i_r}_{i_1\ldots i_r} = \lambda(a)\, u^{i_1\ldots i_r}_{i_1\ldots i_r}\ \forall a \in \Phi_{p_0}.$$

Deoarece

$$u^{i_1\ldots i_r}_{i_1\ldots i_r} \neq 0, \text{ rezultă } \lambda(a) = 1\ \forall a \in \Phi_{p_0}.$$

(Intrat în redacţie la 3 aprilie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Wong, Y. C., *Reccurent tensors on a linearly connected differentiable manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., **99** (1961), 325–341.
2. Pham Mau Quan, *Introducion a la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.
3. Walker, A. G., *On Ruse's Spaces of Recurrent Curvature*, Proc. London Math. Soc. (2) **52** (1950), 36–64.
4. Sandovici, P., *Secţiuni recurente ale unui fibrat vectorial în raport cu o lege de derivare* (I), Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 1975, 21–25.

SUR LES SECTIONS RÉCURRENTES D'UN FIBRÉ VECTORIEL PAR RAPPORT A UNE LOI DE DÉRIVATION (II)

(Résumé)

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une section $u \in \Sigma$, ∇-récurrente. De même on énonce une condition nécessaire et suffisante pour que la forme φ soit un gradient.

JANOWSKI ALPHA-STARLIKE-CONVEX FUNCTIONS

NICOLAE N. PASCU

1. **Introduction.** Let $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ be regular in the unit disc D and for $\alpha \in R$ let

$$K(\alpha, f(z)) = p(z) + \alpha z p'(z)/(1 - \alpha + \alpha p(z)), \tag{1}$$

where $p(z) = zf'(z)/f(z)$. We denote by $SC\alpha$ the class of functions $f(z)$, for which $Re\ K(\alpha, f(z)) > 0$, for $z \in D$, and $f(z) \cdot f'(z) \neq 0$ for $z \in D - \{0\}$. Note that $SC_0 = S^*$ the class of functions univalent starlike in D.

Functions in the class SC_α are called alpha-starlike-convex functions, and such functions, for $\alpha \in [0, 1]$, have been shown to be univalent starlike [8].

In [1], W. Janowski, investigated properties of the class $S^*(M)$, of regular functions $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, satisfying

$$|p(z) - M| < M, \ (M \geqslant 1) \text{ for } z \in D. \tag{2}$$

It is clear that $S^*(M) \subset S^*$ and $S^*(\infty) = S^*$.

In [5] are combined the notions of Janowski starlike functions [1] and Alpha-convex functions, introduced by Petru T. Mocanu in [6], and investigated in [2, 3, 4, 7], to obtain a new subclass of starlike functions. We denote the class of such functions by $S^*(\alpha, M)$ and the functions in the class $S^*(\alpha, M)$ are called Janowski alpha-convex functions.

In this note we combine the notions of Janowski starlike functions and Alpha-starlike-convex functions to obtain a new sublcass of starlike functions, and we denote the class of such functions by $SC(\alpha, M)$.

Note that $S^*(M) = SC(0, M)$, $SC_\alpha = SC(\alpha, \infty)$ $S^* = SC(0, \infty)$ and for $0 \leq \alpha \leq 1$, $SC(\alpha, M) \subset SC_\alpha \cap S^*(M)$.

The integral representation of the functions in $SC(\alpha, M)$, $\alpha \in (0, 1]$, the distortion theorem, the coefficient problem and the relation of the functions in $SC(\alpha, M)$ with those of $S^*(\alpha, M)$ are discussed.

DEFINITION. Let $\alpha \in R$ and suppose that $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ is regular in D, with $f(z) \cdot f'(z) \neq 0$, for $z \in D - \{0\}$. If

$$|K(\alpha, f(z)) - M| < M, \ (M \geqslant 1) \tag{3}$$

for each $z \in D$, the $f(z)$ is said to be a Janowski alpha-starlike-convex function.

We denote the class of such functions by $SC(\alpha, M)$.

THEOREM 1. *If* $\alpha \in [0, 1]$ *then* $SC(\alpha, M) \subset SC_\alpha \cap S^*(M)$.

Proof. Let $f(z) \in SC(\alpha, M)$. From (3) we can see that $ReK(\alpha, f(z)) > 0$ and hence $SC(\alpha, M) \subset SC_\alpha$.

Suppose that $f(z) \in S^*(M)$. Since at the point $z = 0$ condition (2) is satisfied, there exists a point $z_0 = r_0e^{it}$ t $(0 < r_0 < 1)$, such that

$$|zf'(z)/f(z) - M| \leq |z_0f'(z_0)/f(z_0) - M| = M \tag{4}$$

for all $z, |z| \leq r_0$. If we let $p(z) = zf'(z)/f(z)$ then (4) becomes

$$|p(z) - M| \leq |p(z_0) - M| = M, \text{ and from (1) we obtain} \tag{5}$$

$$|K(\alpha, f(z)) - M| = |p(z) + \alpha\, zp'(z)/(1 - \alpha + \alpha p(z)) - M|. \tag{6}$$

If $p'(z_0) = 0$ then by (5) and (6) we obtain $|K(\alpha, f(z_0)) - M = M$. If $p'(z_0) \neq 0$ then we must have $\arg z_0 p'(z_0) = \arg (p(z_0) - M) = u$, and by (5) and (6) we obtain

$$|K(\alpha, f(z_0)) - M| = |M + \alpha|z_0 p'(z_0)|/(1 - \alpha + \alpha M(1 + e^{iu}))| \geqslant M.$$

In both cases we obtain $|K(\alpha, f(z_0)) - M| \geqslant M$, which contradicts (2).

Hence we must have $|zf'(z)/f(z) - M| < M$ for all $z \in D$, and $f(z) \in S^*(M)$.

2. **Integral representation.** THEOREM 2. *If $f(z) \in SC(\alpha, M)$, the solution $F(z)$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, of the differential equation*

$$zF'(z)/F(z) = K(\alpha, f(z)) \tag{7}$$

is in $S^*(M)$.

The proof is immediate.

We will consider the converse problem : given the function $F(z) \in S^*(M)$ and $\alpha \in (0, 1]$. Is the solution $f(z)$, $f(0) = 0$, of the differential equation (7) a function in $SC(\alpha, M)$?

THEOREM 3. *If $F(z) \in S^*(M)$ and $0 < \alpha \leq 1$, then the solution $f(z)$ of the differential equation (7) with the condition $f(0) = 0$ is a function in $SC(\alpha, M)$.*

Proof. By a formal integration of the differential equation (7) we obtain

$$f(z) = \frac{1}{\alpha z^{1/\alpha - 1}} \int_0^z t^{1/\alpha - 2} F(t)\, dt \tag{8}$$

Because $F(z) \in S^*(M)$, for each $z \in D$ $|K(\alpha, f(z)) - M| < M$, therefore, in order to prove this theorem, it is sufficient to show that $f(z)$ is regular in D, $f'(0) = 1$ and $f(z) \cdot f'(z) \neq 0$, for each $z \in D, z \neq 0$.

Let be $G(z) = z[F(z)/z]^{\alpha}$. Because $F(z) \in S^*(M), M \geqslant 1, 0 < \alpha \leq 1$, we have $|zG'(z)/G(z) - M| = |(1 - \alpha)(1 - M) + \alpha(zF'(z)/F(z) - M)| \leq \leq (1 - \alpha)(M - 1) + \alpha M < M$.

It results that $G(z) \in S^*(M)$.

The solution (8) can be written

$$f(z) = z[h(z)/z]^{1/\alpha}, \text{ where } h(z) = \left[1/\alpha \int_0^z G^{1/\alpha}(t)\, t^{-1} dt\right]^{\alpha} \tag{9}$$

For $G(z) \in S^*(M)$ it results that $h(z) \in S^*(\alpha, M)$, and $h(z)/z = 1 + + \dots$ doesn't vanish in D. Thus for $[h(z)/z]^{1/\alpha}$ we can chose the branch which equals 1 when $z = 0$.

From (9) it results that $f(z)$ is regular, it doesn't vanish in D and $f'(0) = 1$.

We now show that $f'(z)$ doesn't vanish in D. If we suppose that $f'(z_0) = 0$ for $0 < |z_0| < 1$, then $p(z_0) = 0$ and using the same argument as in the proof of Theorem 1 [8], we conclude that $Re\ K(\alpha, f(z_0)) \leq 0$, and hence $|K(\alpha, f(z_0)) - M| \geqslant |Re\ K(\alpha, f(z_0)) - M| \geqslant M$, which contradicts that $F(z) \in S^*(M)$. This completes the proof of the theorem.

From the proof of the Theorem 3 we obtain the following result:

THEOREM 4. *If $f(z) \in SC(\alpha, M)$, $0 < \alpha \leq 1$, then there exists a function $h(z) \in S^*(\alpha, M)$ such that $f(z) = z[h(z)/z]^{1/\alpha}$, where we chose the branch which equals 1 when $z = 0$.*

From Theorem 3 we obtain

COROLLARY 1. *If $F(z) \in S^*(M)$, $M \geqslant 1$ and $0 < \alpha \leq 1$, then the function*

$$\frac{1}{\alpha z^{1/\alpha - 1}} \int_0^z t^{1/\alpha - 2} F(t)\, dt \text{ is in } S^*(M).$$

3. Distortion properties and coefficient problem. We will let $m = 1 - - 1/M$ and we denote by $h(M, t; z)$ the function defined by $h(M, t; z) = = \frac{z}{(1 - tmz)^{(1+m)/m}}$ if $m > 0$ and $h(M, t; z) = ze^{tz}$ if $m = 0$, where $|t| = 1$.

The function $h(M, t; z)$ is in $S^*(M)$ and is the extremal function for many problems in this class. If in (8) we take $F(z)$ to be $h(M, t; z)$ then we obtain the Janowski alpha-starlike-convex function

$$F(\alpha, M, t; z) = \frac{1}{\alpha z^{1/\alpha - 1}} \int_0^z v^{1/\alpha - 1}(1 - tmv)^{-(1+m)/m} dv, \text{ if } m > 0 \tag{10}$$

$$\text{and } F(\alpha, M, t; z) = 1/(\alpha z^{1/\alpha - 1}) \int_0^z t^{1/\alpha - 1} e^{tv} dv, \text{ if } m = 0.$$

These functions will serve as the extremal functions for the class $SC(\alpha, M)$.

In what follows, use will be made of the hypergeometric functions

$$G(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1 - zu)^{-b} du, \tag{11}$$

where $Re\ a > 0$ and $Re\ (c - a) > 0$. These functions are regular for $z \in D$.

In addition we define the functions

$$H(\alpha, M; r) = \begin{cases} \frac{r}{\alpha} G\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1+m}{m}, \frac{1}{\alpha} + 1; mr\right) & \text{if } m > 0, \\ \frac{1}{\alpha r^{1/\alpha - 1}} \int_0^r t^{1/\alpha - 2} e^t \, dt & \text{if } m = 0. \end{cases}$$

THEOREM 5. *If* $f(z) \in SC(\alpha, M)$, $0 < \alpha \leq 1$, *then for* $|z| = r (0 < r < 1)$ *we have*

$$-H(\alpha, M; -r) \leq |f(z)| \leq H(\alpha, M; r). \tag{12}$$

Equality holds in both cases for the function (10).

Proof. By Theorem 3 there exists a function $F(z) \in S^*(M)$ such that

$$f(z) = \frac{1}{\alpha z^{1/\alpha - 1}} \int_0^z t^{1/\alpha - 2} F(t) \, dt.$$

If we take $z = r$ and integrate along the positive real axis, we obtain

$$f(r) = \frac{1}{\alpha r^{1/\alpha - 1}} \int_0^r t^{1/\alpha - 2} F(t) \, dt.$$

Since $F(z) \in S^*(M)$ we have ([1], Theorem 7)

$$x(1 + mx)^{-(1+m)/m} \leq |F(x)| \leq x(1 - mx)^{-(1+m)/m} \text{ if } m > 0, \tag{13}$$

and

$$xe^{-x} \leq |F(x)| \leq xe^x \text{ if } m = 0, \text{ and hence} \tag{14}$$

$|f(r)| \leq H(\alpha, M; r)$ (making the change of variables $x = ru$ and using (12) and (13)). Applying the above argument to $e^{-i\theta} f(ze^{i\theta})$ which is in $SC(\alpha, M)$, if $f(z)$ is in $SC(\alpha, M)$, we obtain $|f(z| \leq H(\alpha, M; r)$.

Consider the straight line L, joining 0 to $f(z) = Re^{i\theta}$. Since $f(z)$ is starlike, L is the image a Jordan arc l in D, connecting 0 and $z = re^{i\theta}$.

The image of l under the mapping $z^{1/\alpha - 1} f(z)$, will in general consist of many line segments emanating from the origin, each of lenghth

$$r^{1/\alpha - 1} R = |z^{1/\alpha - 1} f(z)| = \int_l |d[t^{1/\alpha - 1} f(t)]| = \int_l \left| \frac{dt^{1/\alpha - 1} f(t)}{dt} \right| \cdot |dt| =$$

$$= \int_l |t^{1/\alpha - 1} F(t) \, dt| \geqslant \int_0^r x^{1/\alpha - 1} (1 + mx)^{-(1+m)/m} dx.$$

By substituting $x = ru$ and using (11) and (12), we obtain

$$|f(z)| \geqslant -H(\alpha, M; -r).$$

The case $m = 0$ makes use of (14) and is omitted.

Note that functions in $SC(\alpha, M)$ are bounded for $\alpha \in [0, 1]$ and $M \geqslant 1$.

THEOREM 6. *If $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ is in $SC(\alpha, M)$, $M \geqslant 1$, then*

$$|a_n| \leq \frac{1}{|1 - \alpha + \alpha n|} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 + km)}{(n-1)!}, \quad n = 2, \ldots, N, \tag{15}$$

and

$$|a_n| \leq \frac{1}{|1 - \alpha + \alpha n|} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 + km)}{(n-1)(N-2)!}, \quad n = N + 1, \ldots, \tag{16}$$

where α is real, $N \in [2M, 2M + 1]$ is natural, and $m = 1 - 1/M$. Equality holds if $f(z)$ is the function $F(\alpha, M, t; z)$.

The proof results if we observe that, if $f(z)$ is in $SC(\alpha, M)$, then $F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \alpha + \alpha n) z^n$ is in $S^*(M)$, and using the estimations of the coefficients in $S^*(M)$ [1].

(Received April 9, 1975)

REFERENCES

1. W. Janowski, *Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families*, Ann. Polon. Math., **23** (1970), 159–177.
2. S. S. Miller, *Distortion properties of Alpha-starlike functions*, Notices Amer. Math. Soc., 1972, **19**, p. A–115, Abstract 691–30–19 P.A.M.S. (1973), **38**, 311–318.
3. S. S. Miller, P. T. Mocanu and M. O. Reade, *All α-convex functions are starlike and univalent*, Proc. Amer. Math. Soc., **37**, No. 2 (1973), 553–554.
4. S. S. Miller, P. T. Mocanu and M. O. Reade, *Bazilevic functions and generalized convexity*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **19**, No. 2 (1974), 213–224.
5. S. S. Miller, P. T. Mocanu and M. O. Reade, *Janowski Alpha-Convex Functions*, (to appear).
6. Petru T. Mocanu, *Sur deux notions de convexité généralisée dans la représentation conforme*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Series Math.-Mech. Fasc. 2 (1971), Cluj.
7. P. T. Mocanu and M. O. Reade, *On generalized convexity in conformal mappings*, Rev. Roum. de Math. Pures et appl., 1971, 16, 1541–1544.
8. N. N. Pascu, *Alpha-starlike-convex functions* (to appear).

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

THE LAGRANGE INTERPOLATION OPERATORS ARE DENSELY DIVERGENT

IOAN MUNTEAN

In this note we shall show that the well-known Runge-Faber divergence phenomenon for interpolation polynomials is rather a rule than an exception. More precisely, we shall prove that the continuous functions x on the interval $[0, 1]$, for which the sequence of Lagrange interpolation polynomials (corresponding to a given matrix of nodes) does not converge uniformly to x, generate an uncountable dense set in the space of all continuous functions on $[0, 1]$. A similar result for Fourier series was earlier been established in [2] and [5], page 102.

Consider a triangular infinite matrix of numbers in $[0, 1]$

$$(T)\qquad \begin{array}{l} t_1^1 \\ t_2^1,\ t_2^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_n^1,\ \ldots,\ t_n^n \\ \cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

where the numbers of the same line (or nodes) are distinct. We associate with the nodes of the n-th line the Lagrange interpolation operator L_n $C[0, 1] \to C[0, 1]$ given by

$$(L_n(x))(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_n^i)\, l_n^i(t),\ x \in C[0, 1],\ t \in [0, 1], \tag{1}$$

where

$$l_n^i(t) = \frac{(t - t_n^1) \ldots (t - t_n^{i-1})\,(t - t_n^{i+1}) \ldots (t - t_n^n)}{(t_n^i - t_n^1) \ldots (t_n^i - t_n^{i-1})\,(t_n^i - t_n^{i+1}) \ldots (t_n^i - t_n^n)}.$$

Here $C[0, 1]$ is the Banach space of all continuous functions $x: [0, 1] \to \to R$ endowed with the usual uniform norm $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, 1]\}$. Our main result can be stated as follows.

THEOREM. *Given an arbitrary matrix (T), denote by U_T the set of all functions $x \in C[0,1]$ for which the sequence of interpolation polynomials $L_n(x)$ is unbounded. Then U_T is a G_δ uncountable dense set in $C[0, 1]$.*

COROLLARY 1. *Given an arbitrary matrix (T), denote by D_T the set of all functions $x \in C[0, 1]$ for which $L_n(x) \nrightarrow x$ in $C[0, 1]$ as $n \to \infty$. Then D_T is an uncountable dense set in $C[0, 1]$.*

COROLLARY 2 (Faber [1]). *For every matrix (T) there exists a continouos function x on $[0,1]$ (even an infinite uncountable set of such functions) with $L_n(x) \nrightarrow x$ in $C[0, 1]$ as $n \to \infty$.*

Let $(X, \|\cdot\|)$ and $(Y, \|\cdot\|)$ be two normed spaces over the same field of real or complex numbers. The set $(X,Y)^*$ of all linear and continuous mappings $A : X \to Y$ becomes a normed space with respect to the norm $\|A\| = \sup \{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. The proof of the above Theorem is based on a result which is a less known generalization of the Banach-Steinhaus theorem (see [5], page 98; [6], ch VII, § 6). Next we present a direct proof of a sharp form of this result.

LEMMA. *Let $\mathcal{A} \subset (X,Y)^*$ be a set for which $\{\|A\| : A \in \mathcal{A}\}$ is unbounded and denote by $U_{\mathcal{A}}$ the set of all $x \in X$ for which $\{\|A(x)\| : A \in \mathcal{A}\}$ is unbounded too. Then $U_{\mathcal{A}}$ is a G_δ set, i. e., it can be written as the intersection of a countable family of open and dense sets in X. Moreover, if X is complete, then $U_{\mathcal{A}}$ is a dense and uncountable set in X.*

Proof of Lemma. Given an $n \in N$, denote by X the set of $x \in X$ for which there exists an $A \in \mathcal{A}$ such that $\|A(x)\| > n$. It is easily to see that X_n is open and $U_{\mathcal{A}} = \bigcap \{X_n : n \in N\}$. We shall prove that each X_n is dense in X. Suppose the contrary. Then there are an $n_0 \in N$, an $x_0 \in X$ and a closed ball $B_0 = \{x \in X : \|x_0 - x\| \leq r\}$ such that $B_0 \cap \cap X_{n_0} = \emptyset$. For every $x \in X$, $x \neq 0$, we have $\frac{r}{\|x\|} x + x_0 \in B_0$, hence $\frac{r}{\|x\|} x + x_0 \notin X_{n_0}$. Thus, for all $A \in \mathcal{A}$ we successively obtain:

$$\left\| A \left(\frac{r}{\|x\|} x + x_0 \right) \right\| \leq n_0, \quad \frac{r}{\|x\|} \|A(x)\| - \|A(x_0)\| \leq n_0 \text{ and } \|A(x)\| \leq \frac{2n_0}{r} \|x\|$$

for all $x \in X$. Consequently, $\|A\| \leq \frac{2n_0}{r}$ for all $A \in \mathcal{A}$, which contradicts the hypothesis of Lemma.

Now, we prove that if X is complete then $U_{\mathcal{A}}$ is dense in X. To this end, let us take an $x_0 \in X$ and an arbitrary closed ball $B_0 = \{x \in \in X : \|x_0 - x\| \leq r_0\}$ with the center in x_0. Since X_1 and $\operatorname{int} B_0$ are open and $\overline{X_1} = X$, there is a closed ball $B_1 = \{x \in X : \|x_1 - x\| \leq r_1\}$, $r_1 \in]0,1[$, such that $B_1 \subset X_1 \cap \operatorname{int} B_0 \subset X_1 \cap B_0$. If the closed balls $B_1 \supset \ldots \supset B_n$ with the corresponding radii $r_1 \in]0, 1[, \ldots, r_n \in \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ have already been constructed, choose a closed ball $B_{n+1} = = \{x \in X : \|x_{n+1} - x\| \leqslant r_{n+1}\}$ with $r_{n+1} \in \left] 0, \frac{1}{n+1} \right[$ such that $B_{n+1} \subset \subset X_{n+1} \cap \operatorname{int} B_n \subset X_{n+1} \cap B_n$, and so on. Since $\|x_n - x_m\| \leqslant r$ for $n \leqslant m$, $r_n \to 0$ as $n \to \infty$ and X is complete, there exists $\lim_{m\to\infty} x_m = = x \in \bigcap \{B_n : n \in N\}$, so we have $x \in B_0 \cap (\bigcap\{X_n : n \in N\}) = B_0 \cap U_{\mathcal{A}}$, that is $U_{\mathcal{A}}$ is dense in X.

The unboundedness of $\{\|A\| : A \in \mathcal{A}\}$ implies $X \neq \{0\}$, hence from $\overline{U_{\mathcal{A}}} = X$ we derive the existence of an $x_0 \in U_{\mathcal{A}}$ with $x_0 \neq 0$. Then the uncountable set $\{\lambda x_0 : \lambda \in R, \ \lambda \neq 0\}$ is included in $U_{\mathcal{A}}$ because

$\sup\{\|A(\lambda x_0)\|: A \in \mathcal{A}\} = |\lambda| \sup\{\|A(x_0)\|: A \in \mathcal{A}\} = \infty$ for all $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$.

Proof of Theorem. The interpolation operators L_n in (1) are linear and continuous. Moreover,

$$\|L_n\| = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} |l_n^i(t)| : t \in [0, 1]\right\}$$

and

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} |l_n^i(t)| : t \in [0, 1]\right\} > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$$

for all $n \in N$ (see [4], page 512). Thus

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n\| = \infty \tag{2}$$

and the Lemma is applicable with $X = Y = C[0, 1]$ and $\mathcal{A} = \{L_n : n \in N\}$.

Remark. The above Teorem and its Corollaries are true for any other approximation proceeding in which an equality of type (2) holds. So are, e. g., the interpolation proceedings with a prescribed modulus of continuity [7] and the Newton-Cotes quadrature formulae [3].

(Received June 12, 1975)

REFERENCES

1. G. Faber, *Uber die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Jber. Deutsch. Mat.-Verein., **23** (1914) 192—210.
2. K. H. Indlekofer, *Bemerkung zur Divergenz von Fourierreihen*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **15** (1972) 53—59.
3. F. Locher und K. Zeller, *Divergenz bei Quadraturverfahren*, Math. Z., **117** (1970) 18—20.
4. I. P. Natanson, *Constructive Function Theory*, (Russian), Gosizdat., Moscow, 1949.
5. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
6. L. Schwartz, *Analyse mathématique II*, Éd. Hermann, Paris, 1967.
7. P. O. H. Vértesi, *On Certain Operators III*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **23** (1972) 109—113.

DIVERGENŢA DENSĂ A OPERATORILOR DE INTERPOLARE AI LUI LAGRANGE

(Rezumat)

Se arată că funcţiile continue $x:[0,1] \to R$, pentru care şirul polinoamelor de interpolare ale lui Lagrange $L_n(x)$ (corespunzătoare unei matrice date de noduri) este nemărginit în norma uniformă, constituie o mulţime nenumărabilă de tip G_δ densă în spaţiul $C[0,1]$.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

ON CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ANTON MUREŞAN

Many papers deal with boundary-value problems for ordinary and partial differential equations. We mention here only [2], [5], [6], [7] which also contain extensive references.

In this note we make use of some maximum principles in order to discuss some homogeneous boundary-value problems. In same cases we have succeded to improve known results.

The author is indebted to Prof. Ioan A. Rus whose ideas and suggestions were very useful in the elaboration of this paper.

1. The case of the systems of ordinary differential equations. Let

$$L(y) = y'' + By' + Cy = 0 \tag{1}$$

be a system of ordinary differential equations, where

$$y^* = (y_1, \ldots, y_n) \text{ and } B, C \in C([a, b], M_{nn}(R)).$$

Ioan A. Rus (see [6], Th. 1.1, pag. 1512) established conditions on matrices B and C so that the homogeneous problem

$$L(y) = 0,\ y(a) = 0,\ y(b) = 0 \tag{2}$$

admits only the trivial solution, $y \equiv 0$.

He also noticed, under a more restrictive condition, that if we write (*) $B(x) = b(x)\, I + B_1(x)$, where I is the unity matrix of n th order, and the matrix C is so that $\tau C \tau^* < -\alpha^2 ||\tau||^2$ for any $\tau \in R^n$, with a positive constant α, which does not depend on τ, then the problem (2) has only trivial solution if (see [6], (1.3))

$$||B_1|| < 2\alpha, \tag{3}$$

where $||B_1|| = ||B - bI||$ is the spectral norm of matrix B_1 (see [9]).

We want to find an expression for the scalar function $b(x)$, which assures that $||B_1||$ has the minimal value, in the particular case $n = 2$.

It is known (see [9], Th. 1.3) that $||A|| = [\rho(A^*A)]^{1/2}$, where the spectral radius ρ of a matrix A, $\rho(A)$, is

$$\rho(A) = \max_{i=\overline{1, n}} |\lambda_i|,$$

with λ_i, $i = \overline{1, n}$, the eigenvalues of matrix A.

If

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{then} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} - b & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - b \end{bmatrix} \quad \text{and}$$

$$B_1^* = \begin{bmatrix} b_{11} - b & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} - b \end{bmatrix}.$$

The characteristic equation of matrix $B_1^* B_1$ is

$$t^2 - [2b^2 - 2b(b_{11} + b_{22}) + b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2]t + \\ + [b_{12}b_{21} - (b_{11} - b)(b_{22} - b)]^2 = 0,$$

and, as the discriminant $\Delta \geqslant 0$ (this can be easily proved),

$$\rho(B_1^* B_1) = \frac{2b^2 - 2b(b_{11} + b_{22}) + b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2}{2} + \\ + \frac{\sqrt{(2b - b_{11} - b_{22})^2 + (b_{12} - b_{21})^2\,[(b_{12} + b_{21})^2 + (b_{11} - b_{22})^2]}}{2}.$$

It is easily seen that $||B_1||^2 = \rho(B_1^* B_1)$ has the minimal value for

$$b(x)\,\frac{b_{11}(x) + b_{22}(x)}{2},$$

i.e.

$$\min||B_1||^2 = \rho(B_1^* B_1) = \Big|_{b = \frac{b_{11}+b_{22}}{2}} = \frac{(b_{11} - b_{22})^2 + 2b_{12}^2 + 2b_{21}^2}{4} + \\ + \frac{\sqrt{(b_{21} - b_{12})^2[(b_{12} + b_{21})^2 + (b_{11} - b_{22})^2]}}{2}.$$

For the boundary value problem

$$L(y) = y'' + By' + Cy = 0,\ y(a) = 0,\ y(b) = 0 \tag{2'}$$

where

$$B, C \in C([a, b], M_{22}(R)),$$

we can state the following theorem

THEOREM 1. *If the elements of matrix B verify the inequality* $(b_{11} - b_{22})^2 + 2b_{12}^2 + 2b_{21}^2 + 2\sqrt{(b_{21} - b_{12})^2[(b_{12} + b_{21})^2 + (b_{11} - b_{22})^2]} < 16\alpha^2$ (4) *where α is so that*

$$\tau C \tau^* < -\alpha^2||\tau||^2,\ \forall\ \tau \in R^2, \tag{5}$$

then the boundary value problem (2′) has only the trivial solution, $y \equiv 0$.

Proof. Note that relation (4) is the inequality (1.3) from [6] for the problem (2′).

2. The case of the systems of partial differential equations. In this section we want to make similar considerations concerning the systems of partial differential equations.

Let be the following system:

$$L(y) = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_i} + A_0(x)y = 0, \tag{6}$$

where $y^* = (y_1, \ldots, y_n)$ is a vectorial function, $y : \overline{\Omega} \to R^n$, and

$$A_{ij},\ A_i,\ A_0 \in C(\overline{\Omega},\ M_{nn}(R)), \tag{7}$$

Ω being a bounded domain of R^m, with boundary Γ and the closure $\overline{\Omega}$.

Conditions are known (see [8]) under which the maximum principle for system (6) takes place; when the homogeneous boundary value problem has only the trivial solution. We want to improve these conditions in a particular case (see [2] and [8]).

We suppose that for $n = 2$, matrices A_{ij}, A_i are of the following form:

$$A_{ij} = a_{ij} I,\ a_{ij} \in C(\overline{\Omega}, R), \tag{8}$$

I unity matrix of 2 order,

$$A_i = a_i I + A_i^{(1)},\ a_i \in C(\overline{\Omega}, R),\ A_i^{(1)} \in C(\overline{\Omega}, M_{22}(R)), \tag{9}$$

and that the following conditions are verified:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqslant \gamma^2 ||\lambda||^2,\ \gamma \neq 0,\ \forall \lambda \in R^m \tag{10}$$

$$\tau A_0 \tau^* < -\alpha^2 ||\tau||^2,\ \alpha \neq 0,\ \forall \tau \in R^2. \tag{11}$$

The problem is to determin the expressions of the scalar functions $a_i(x)$ so that $\sum_{i=1}^{m} ||A_i^{(1)}||^2$ be minimal.
This can be made by determining $a_i(x)$ separately for each i, which was already solved in section 1. Taking therefore

$$a_i(x) = \frac{a_{11i}^{(1)}(x) + a_{22i}^{(1)}(x)}{2} = \frac{\mathrm{Tr}\left(A_i^{(1)}\right)}{2}, \tag{12}$$

where $Tr(A)$ is the trace of matrix A, then the norm $||A_i^{(1)}||^2$ has the minimal value, i.e.

$$\min ||A_i^{(1)}||^2 = \frac{\left(a_{11i}^{(1)} - a_{22i}^{(1)}\right)^2 + 2\left(a_{12i}^{(1)}\right)^2 + 2\left(a_{21i}^{(1)}\right)^2}{4} + \\ + \frac{\sqrt{\left(a_{21i}^{(1)} - a_{12i}^{(1)}\right)^2\left[\left(a_{12i}^{(1)} + a_{21i}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{11i}^{(1)} - a_{22i}^{(1)}\right)^2\right]}}{2}. \tag{13}$$

For the boundary value problem

$$L(y) = 0,\ y|_\Gamma = 0, \tag{14}$$

where $L(y)$ is given by relation (6) with the coefficients given by relations (8) and (9), the following theorem takes place:

THEOREM 2. *If the elements of matrices* $A_i^{(1)}$, $i = \overline{1, m}$ *verify the inequality*

$$\sum_{i=1}^{m} \{ (a_{11i}^{(1)} - a_{22i}^{(1)})^2 + 2\,(a_{12i}^{(1)})^2 + 2\,(a_{21i}^{(1)})^2 + \\ + 2\sqrt{(a_{21i}^{(1)} - a_{12i}^{(1)})^2 [(a_{12i}^{(1)} + a_{21i}^{(1)})^2 + (a_{11i}^{(1)} - a_{22i}^{(1)})^2]} \} < 4\alpha^2\gamma^2 \tag{15}$$

where α *and* γ *are given by relations* (10) *and* (11), *then the boundary value problem* (14) *has only the trivial solution,* $y \equiv 0$.

Proof. Note that the first member of the inequality (15) represents the minimum of the sum of the squared norms, $\sum_{i=1}^{m} ||A_i^{(1)}||^2$, and this minimum must not exceed $4\alpha^2\gamma^2$.

3. The case of system of n equations ($n \geqslant 2$) : negative result.
3.1. Let

$$L(y) = y'' + By' + Cy = 0\,. \tag{1}$$

be a system of ordinary equations, where

$$y^* = (y_1, \ \ldots, \ y_n) \text{ and } B, C \in C([a, b], \ M_{nn}(R)).$$

We suppose that matrix B is antisymmetric, i.e. $B = -B^*$. We want to determin the minimum of function $f(b) = ||B - bI||$ in this case. We consider the characteristic equation

$$\det[(B^* - bI)(B - bI) - tI] = 0 \tag{16}$$

which can be written under the form

$$\det[B^*B - (t - b^2)I] = 0, \tag{16'}$$

or

$$\det[B^*B - sI] = 0, \tag{16''}$$

where $s = t - b^2$. Then it follows that

$$s_k = t_k - b^2, \quad k = \overline{1, n}, \tag{17}$$

are eigenvalues of matrix B^*B and they are independent of b. From (17) we conclude that the eigenvalues of matrix $(B^* - bI)(B - bI)$ which will provide the norm $f(b)$, are given by the relation

$$t_k = s_k + b^2. \tag{18}$$

We have

$$f^2(b) = ||B - bI||^2 = \max_{k=\overline{1,n}} |t_k| = \max_{k=\overline{1,n}} |s_k + b^2| \leq$$

$$\leqslant \max_{k=\overline{1,n}} (|s_k| + b^2) = \max_{k=\overline{1,n}} |s_k| + b^2$$

and therefore $f^2(b)$ will have the minimal value for $b \equiv 0$. Then the following negative result takes place:

THEOREM 3. *If matrix B of the system of equations* (1) *is antisymmetric, $B = - B^*$, then decomposition* (*) $B = bI + B_1$ *with* $b \not\equiv 0$ *leads to values which are greater for $f(b)$ than its minimal value, i.e. the decomposition* (*) *is the best one when* $b \equiv 0$.

In these conditions min $f(b) = [\rho(B^*B)]^{1/2} = ||B||$, i.e. it is exactly the spectral norm of antisymmetric matrix B. Hence:

THEOREM 4. *If the matrix B of the system* (1) *is antisymmetric and*

$$||B|| < 2\alpha, \tag{19}$$

where α is so that

$$\tau C\tau^* < - \alpha^2||\tau||^2, \ \forall \tau \in R^n, \ \tau \neq 0, \tag{20}$$

then the boundary value problem (2) *has only the trivial solution, $y \equiv 0$.*

Proof. Note that relation (19) is exactly the relation (1.3) from [6] and $||B|| = \min \ ||B - bI||$ for $b \equiv 0$.

3.2. Let

$$L(y) = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} A_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + A_0(x)y = 0 \tag{6}$$

be a system of partial differential equations, where matrices $A_{ij}(x)$, $A_i(x)$, $A_0(x)$ are given by the relations (8), (9) and verify the conditions (10), (11).

We suppose, moreover, that matrices A_i are antisymmetric, i.e. $A_i = - A_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Making the same considerations as in sections 2 and 3.1 we get the following negative result:

THEOREM 5. *If matrices A_i of system* (6) *are antisymmetric, $A_i = -A_i^*$, $i=\overline{1,m}$, then the decomposition $A_i = a_iI + A_i^{(1)}$ with $a_i \not\equiv 0$, $i = \overline{1, m}$ lead to greater values for $\sum_{i=1}^{m} ||A_i^{(1)}||^2$ than its minimum.*

In this conditions the minimum of sum $\sum_{i=1}^{m} ||A_i^{(1)}||^2 = \sum_{i=1}^{m} ||A_i||^2$ is precisely the sum of squared spectral norms of matrices A_i. Therefore:

THEOREM 6. *If matrices A_i in system* (6) *are antisymmetric and*

$$\sum_{i=1}^{m} ||A_i^{(1)}||^2 = \sum_{i=1}^{m} ||A_i||^2 < 4 \ \alpha^2\gamma^2 \tag{21}$$

where α and γ are given by relations (10) *and* (11), *then the boundary value problem* (14) *has only the trivial solution, $y \equiv 0$.*

Proof. The same proof of theorem 2 is followed, taking into account theorem 5, as well.

4. *Remarks*. 1. We can take into consideration the boundary value problems for parabolic systems, getting analogue results to those of theorems 2, 4, 6 (see also [3]).

2. In [1] it has been studied the problem of finding the function's minimum $f(t) = ||A - tB||$, where A, B are nxn complex matrices. It is shown that the values of t, for which $f(t)$ is minimal, belong to a compact interval, whose extremities are solutions of an algebric equation or a system of algebric equations.

Unfortunately, even the actual writting of this equation or of the system is very difficult (if not impossible) to realise, and even more their solvation. In addition, there is nothing precise concerning the real minimal value of the function $f(t)$ and even some estimations for this have been never given.

The problems dealt with in this paper are obtained when A is a nxn real matrix and $B = I$.

(Received June 25, 1975)

REFERENCES

1. Friedland, S., *On matrix approximation*, Preprint.
2. Mureşan, A., *On the uniqueness of the solution of Dirichlet's problem relative to a strong elliptic system of second order partial differential equations*, Mathematica (to appear).
3. Mureşan, A., *A maximum principle for second order parabolic system*, Mathematica (to appear).
4. Rus, A. I., *Sur les propriétés des normes des solutions d'un système d'equations différentielles du second ordre*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Physica, f.1, 1968, 19—26.
5. Rus, A. I., *Asupra unicităţii soluţiei problemei lui Dirichlet relativ la sisteme tari eliptice de ordinul al doilea*, Studii şi Cerc. Mat. **9** (20), 1968, 1337—1352.
6. Rus, A. I., *Asupra unei probleme bilocale*, Studii şi Cerc. Mat. **10** (21), 1969, 1511—1521.
7. Rus, A. I., *Un principe du maximum pour les solutions d'un système fortement elliptique*, Glasnik Mat. 4 (24), 1969, 75—78.

8. Rus, A. I., *Un principiu de maxim pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale parţiale,* Colocviul de Ecuaţii diferenţiale şi aplicaţii, Iaşi, oct. 1973 (în volum).
9. Varga, R. S., *Matrix iterative analysis,* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1962.

ASUPRA UNOR PROBLEME LA LIMITĂ

(Rezumat)

În lucrare, folosind principii calitative ale analizei (principii de maxim), se dau condiţii în care anumite probleme la limită omogene au numai soluţia banală.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРХНЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Т. СТ. НИКОЛОВА*, Д. Д. БАЙНОВ*

I. **Постановка задачи.** Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t) = f\{t, x(t), \bar{x}(t), \tilde{x}(t), x(\tau_0^{x(t)}); \bar{\dot{x}}(t), \tilde{\dot{x}}(t), \dot{x}(\Delta_0^{x(t)}), \tag{1}$$

$$\int_0^t \mathcal{F}[t, s, x(s), \bar{x}(s), \tilde{x}(s), x(\tau_0^{x(s)}), \dot{x}(s), \bar{\dot{x}}(s)\, \tilde{\dot{x}}(s), \dot{x}(\Delta_0^{x(s)})]ds\}, \qquad t \geqslant 0,$$

$$x(t) = \varphi(t), \ \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t), \ \ t \in [\alpha_0, 0] = \mathfrak{I}_0 \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l)$($n$ и l — натуральные числа) при каждом $t \in I_T = [0, T]$ $(T > 0)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — начальная функция, определённая и непрерывно дифференцируемая на сегменте $\mathfrak{I}_0$, $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (под $\dot{x}(0)$ понимается правая производная), $\bar{x}(t) = \max\limits_{u \in [0,t]} x(u)$, $\tilde{x}(t) = \max\limits_{u \in [t-d, t]} x(u)$, $d > 0$. Преобразованные аргументы $\tau_0^{x(t)}$ и $\Delta_0^{x(t)}$ определяются при помощи рекуррентных соотношений

$$\tau_k^{x(t)} = \tau_k(t, x(t), \bar{x}(t); \tilde{x}(t), x(\tau_{k+1}^{x(t)}), \dot{x}(t), \bar{\dot{x}}(t), \tilde{\dot{x}}(t), \dot{x}(\Delta_{k+1}^{x(t)})),$$

$$\Delta_k^{x(t)} = \Delta_k(t, x(t), \bar{x}(t), \tilde{x}(t), x(\tau_{k+1}^{x(t)}), \dot{x}(t), \bar{\dot{x}}(t), \tilde{\dot{x}}(t), \dot{x}(\Delta_{k+1}^{x(t)}))$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1 \quad (m \geqslant 1)$$

$$\tau_m^{x(t)} = \tau_m(t, x(t), \bar{x}(t), \tilde{x}(t), \dot{x}(t), \bar{\dot{x}}(t), \tilde{\dot{x}}(t)),$$

$$\Delta_m^{x(t)} = \Delta_m(t, x(t), \bar{x}(t), \tilde{x}(t), \dot{x}(t), \bar{\dot{x}}(t)\, \tilde{\dot{x}}(t)).$$

Предположим, что функция $f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4^\circ, \eta_2, \eta_3, \eta_4^\circ, u)$ определена по t на сегменте I_T, а по остальным аргументам — на некотором множестве $G_1 \subset R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^l$($R$ — вещественная ось); функция $\mathcal{F}(t, s, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4^\circ, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4^\circ)$ определена по t и s на множестве $I_T \times I_T (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$, а по остальным аргументам — на множестве $G_2 \subset R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n$; функции $\tau_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4^k, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4^k)$ и $\Delta_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4^k, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4^k)(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ определены по t на сегменте I_1, а по остальным аргументам — на G_2; функции $\tau_m(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3))$ и $\Delta_m((t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ определены по t на сегменте I_T, а по остальным аргументам — на множестве $G_3 \subset R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n$; $\alpha_0 = \min\{d, \min\limits_k \inf\limits_{\zeta_k \in I_T \times G_2} \tau_k((\zeta_k),$

$\min\limits_k \inf\limits_{\zeta_k \in I_T \times G_2} \Delta_k(\zeta_k), \inf\limits_{\zeta_m \in I_T \times G_3} \tau_m(\zeta_m), \inf\limits_{\zeta_m \in I_T \times G_3} \Delta_m(\zeta_m)\}$, $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$,

---

* Пловдивский университет имени П. Хилендарского.

Начальная задача (1), (2) является обобщением некоторых задач, которые впервые появились в автоматическом регулировании при анализе так называемых систем с насыщением [1]. Для частного случая, когда f зависит только от t, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$, задача (1), (2) исследована в [2] и [3].

Пусть $F = F(t)$ — скалярная, неотрицательная и ограниченная на сегменте $\mathfrak{I}_T = [\alpha_0, T]$ функция, интегрируемая на I_T.

Определим следующие множества из R^n:

$$\omega_T = \left\{\xi : |\xi| \leqslant |\varphi(0)| + \int_0^T F(t)\,dt\right\},\quad \Omega_T = \{\eta : |\eta| \leqslant F^* = \sup_{t \in \mathfrak{I}_T} F(t)\},$$

$$\tilde{\omega} = \bigcup_{s \in \mathfrak{I}_0} \{\varphi(s)\},\quad \tilde{\Omega} = \bigcup_{s \in \mathfrak{I}_0} \{\dot{\varphi}(s)\}$$

($|\cdot|$ — некоторая норма в соответствующем конечномерном пространстве).

Пусть G_1, G_2, и G_3 определены следующим образом:

$$G_1 = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)} \times \omega^{(3)} \times \omega^{(4)} \times \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)} \times \Omega^{(4)} \times R^l,$$

$$G_2 = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)} \times \omega^{(3)} \times \omega^{(4)} \times \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)} \times \Omega^{(4)},$$

$$G_3 = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)} \times \omega^{(3)} \times \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)},$$

где $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega_T$, $\omega^{(3)} = \omega^{(4)} = \omega_T \cup \tilde{\omega}$,

$$\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)} = \Omega_T,\ \Omega^{(3)} = \Omega_T \cup \tilde{\Omega},\quad \Omega^{(4)} = \Omega_{T-\Delta} \cup \tilde{\Omega},$$

а $\Delta > 0$ — некоторое число, которое будет определено ниже.

Всюду дальше принимаем, что выполнены следующие условия, обозначенные через (A):

A1. В области $Q_T = I_T \times G_1$ функция f непрерывна по t, удовлетворяет неравенству

$$|f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4^0, \eta_2, \eta_3, \eta_4^0, u)| \leqslant F(t)$$

и условию Липшица по всем аргументам кроме первого с константами соответственно L_1, L_2, L_3, L_4, M_2, M_3, M_4, α.

A2. В области $\bar{Q}_T = I_T \times I_T \times G_2$ функция $\mathcal{F}$ непрерывна по t и s и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам кроме первого и второго с константами соответственно N_1, N_2, N_3, N_4, P_1, P_2, P_3, P_4.

A3. В области $\bar{\bar{Q}}_T = I_T \times G_2$ функции τ_K и Δ_K ($k = 0, 1, \ldots, m-1$) непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам кроме первого с константами соответственно λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 и ограничениям:

$$\min_k \inf_{\zeta_k \in \bar{\bar{Q}}_T} \{t - \tau_k(\zeta_k)\} \geqslant 0,\qquad \min_k \inf_{\zeta_k \in \bar{\bar{Q}}_T} \{t - \Delta_k(\zeta_k)\} \geqslant \Delta > 0;$$

в области $\overline{\overline{Q}}_T = I_T \times G_3$ функции τ_m и Δ_m непрерывны по t, удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам кроме первого с константами соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ и ограничениям

$$\inf_{\zeta_m \in \overline{\overline{Q}}_T} \{t - \tau_m(\zeta_m)\} \geqslant 0, \quad \inf_{\zeta_m \in \overline{\overline{Q}}_T} \{t - \Delta_m(\zeta_m)\} \geqslant \Delta > 0.$$

А4. На интервале $\mathcal{J}_0$ функции $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ удовлетворяют условиям:

$$|\varphi(t) - \varphi(\overline{t})| \leq B|t - \overline{t}|, \quad |\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(\overline{t})| \leq \beta|\overline{t} - t|, \quad |\varphi(t)| \leq F(t)$$

А5. Выполнено условие согласования:

$$\dot{\varphi}(0) = f(0, \varphi(0), \varphi(0)\, \tilde{\varphi}(0), \varphi(\tau_0^{\varphi(0)}), \dot{\varphi}(0), \tilde{\dot{\varphi}}(0), \dot{\varphi}(\Delta_0^{\varphi(0)}), 0).$$

Пусть $h = \min\{I, \Delta\}$ и $\mathcal{J}_h = [\alpha_0, h]$. Обозначим через C пространство функций $y: \mathcal{J}_h \to R^4$, определённые и непрерывные на сегменте $\mathcal{J}_h$, с метрикой, порождённой нормой [4]

$$\|y\| = \sup\{|y(t)|^{-\rho t} : t \in \mathcal{J}_h\}, \tag{3}$$

где

$$\rho > \rho_0 = \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 + 4a(1-c)}},$$

а

$$a = \alpha N_0 + \lambda_0 (N_4 \Phi + P_4 \beta) \alpha q, \quad b = L_0 + \lambda_0 q\, (L_4 \Phi + M_4 \beta) +$$
$$+ P_0 \alpha + \mu_0 q\, \alpha (N_4 \Phi + P_4 \beta), \quad c = M_0 + \mu_0 q\, (L_4 \Phi + M_4 \beta),$$
$$L_0 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \; M_0 = M_2 + M_3, \quad N_0 = N_1 + N_2 + N_3 +$$
$$+ N_4, \; P_0 = P_1 + P_2 + P_3, \quad \lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$
$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \Phi = \max\{B, F^*\},$$
$$q = \frac{1 - (\lambda_4 \Phi + \mu_4 \beta)^{m+1}}{1 - (\lambda_4 \Phi + \mu_4 \beta)}$$

Можно доказать, что C — полное метрическое пространство.

II. Теоремы существования и единственности решения начальной задачи.

ТЕОРЕМА I. *Пусть выполнены условия* (A). *Пусть кроме того*

$$1 - [M_0\, \mu_0 q\, (L_4 \Phi + M_4 \beta)] > 0 \tag{4}$$

Тогда начальная задача (1), (2) *имеет единственное решение на интервале* $\mathcal{J}_h$ *в классе непрерывно дифференцируемых функций* $x(t)$, *производная* $\dot{x}(t)$ *которых удовлетворяет условию*: $|\dot{x}(t)| \leq F(t)$, $t \in \mathcal{J}_h$.

Доказательство. Пусть оператор Π действует в C по формуле

$$\Pi y(t) = \begin{cases} f\{t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), x(\tau_0^{x(t)}), \bar{y}(\tilde{t}), y(t), y(\Delta_0^{x(t)}), \int_0^t \mathcal{F}[t, s, x(s), \dot{x}(s), \\ \ddot{x}(s), x(\tau_0^{x(s)}), y(s), \bar{y}(s), y(\tilde{s}), y(\Delta_0^{x(s)})]\,ds\}, \ t \in I_h \\ \dot{\varphi}(t), \quad t \in \mathcal{J}_0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_0^t y(s)\,ds,$$

и пусть Y_h — множество функций $y \in C$, удовлетворяющие условиям:

$$|y(t)| \le F(t), \quad t \in \mathcal{J}_h; \qquad y(t) = \dot{\varphi}(t), \quad t \in \mathcal{J}_0.$$

Легко видно, что $\Pi Y_h \subset Y_h$.

На основе (5) и А4 получаем

$$|x(t) - x(\bar{t})| \le \Phi\,|t - \bar{t}|, \quad t, \bar{t} \in \mathcal{J}_h, \quad y \in Y_h.$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y_n$. Тогда

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \|y_1 - y_2\|\,e^{\rho t}$$

а для соответствующих $\dot{x}_1$, $\dot{x}_1$ имеем

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \frac{1}{\rho}\|y_1 - y_2\|e^{\rho t}, \quad \text{т.е.} \quad \|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{\rho}\|y_1 - y_2\|.$$

Из условий AI—A4, (5) и (3) следует

$$|\Pi y_1(t) - \Pi y_2(t)| \le L_1|x_1(t) - x_2(t)| + L_2|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)| + L_3|\ddot{x}_1(t) -$$
$$- \ddot{x}_2(t)| + L_4|x_1(\tau_0^{x_1(t)}) - x_2(\tau_0^{x_2(t)})| + M_2|\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)| + M_3|\tilde{y}_1(t) -$$
$$- \tilde{y}_2(t)| + M_4|y_1(\Delta_0^{x_1(t)}) - y_2(\Delta_0^{x_2(t)})| + \alpha\int_0^t \{N_1|x_1(s) - x_2(s)| + N_2|\dot{x}_1(s) -$$
$$- \dot{x}_2(s)| + N_3|\ddot{x}_1(s) - \ddot{x}_2(s)| + N_4|\dot{x}_1(\tau_0^{x_1(s)}) - x_2(\tau_0^{x_2(s)})| + P_1|y_1(s) -$$
$$- y_2(s)| + P_2|\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)| + P_3|\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)| + P_4|y_1(\Delta_0^{x_1(s)}) -$$
$$- y_2(\Delta_0^{x_2(s)})|\}\,ds \le \frac{L_0}{\rho}\|y_1 - y_2\|\,e^{\rho t} + M_0\|y_1 - y_2\|e^{\rho t} + L_4\,\Phi\,|\tau_0^{x_1(t)} -$$
$$- \tau_0^{x_2(t)}| + M_4\,\beta|\,\Delta_0^{x_2(t)} - \Delta_0^{x_1(t)}| + \alpha\int_0^t \Big\{\frac{N_0}{\rho}\|y_1 - y_2\|\,e^{\rho s} + \tag{7}$$
$$+ P_0\|y_1 - y_2\|\,e^{\rho s} + N_4\,\Phi|\,\tau_0^{x_1(s)} - \tau_0^{x_2(s)}| + P_4\,\beta|\,\Delta_0^{x_1(s)} - \Delta_0^{x_2(s)}|\Big\}\,ds\,.$$

Обозначая через $\gamma_k^{x(t)}$ какую-нибудь из функций $\tau_k^{x(t)}$ и $\Delta_k^{x(t)}$ ($k = 0,1, \ldots, m$) из А3 получаем

$$|\gamma_k^{x_1(t)} - \gamma_k^{x_2(t)}| \leq \frac{\lambda_0}{\rho} ||y_1 - y_2|| e^{\rho t} + \mu_0 ||y_1 - y_2|| e^{\rho t} + \lambda_4 \Phi | \tau_{k+1}^{x_1(t)} - \tau_{k+1}^{x_1(t)}| +$$

$$+ \mu_4 \beta \, | \Delta_{k+1}^{x_1(t)} - \Delta_{k+1}^{x_2(t)}|, \ k = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{8}$$

$$|\gamma_m^{x_1(t)} - \gamma_m^{x_1(t)}| \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\rho} ||y_1 - y_2|| e^{\rho t} + \mu_0 ||y_1 - y_2|| e^{\rho t}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$|\gamma_0^{x_1(t)} - \gamma_0^{x_2(t)}| \leq \left(\frac{\lambda_0}{\rho} + \mu_0\right) q \, ||y_1 - y_2|| e^{\rho t}. \tag{10}$$

Подставляем (10) в (7) и получаем

$$|\Pi y_1 (t) - \Pi y_2 | (t) \leq \mathcal{K} (\rho) ||y_1 - y_2|| e^{\rho t},$$

где положено

$$\mathcal{K}(\rho) = a \frac{1}{\rho^2} + b \frac{1}{\rho} + c$$

Имея в виду (3), получаем

$$||\Pi y_1 - \Pi y_2|| \leq \mathcal{K} (\rho) \, ||y_1 - y_2||$$

Из условия (4) следует $\mathcal{K}(\rho) < \mathcal{K}(\rho_0) = 1$. Следовательно Π — оператор сжатия на множестве Y_h. Тогда существует единственное решение операторного уравнения $y = \Pi y$, которое может быть найдено последовательными приближениями по схеме $y_{n+1} = \Pi y_n$, $n = 0,1,\ldots$ если только $y_0 \in Y_h$. Отсюда следует утверждение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия* (*A*) *при* $T = \infty$ *и в области* Q_∞

$$|\mathcal{F} (t, s, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)| \leq W \quad (W = \text{const} > 0.).$$

Пусть кроме того функции f, $\mathcal{F}$, $\gamma_k^{\cdot}$ ($k = 0,1, \ldots, m-1$) *и* γ_m *соответственно в областях* Q_∞, $\overline{Q}_\infty$, $\overline{\overline{Q}}_\infty$, $\overline{\overline{\overline{Q}}}_\infty$ *удовлетворяют условию Липшица по* t *с константами* E, θ, e, e, . *Пусть наконец* $L_2 = L_3 = M_2 = M_3 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_2 = \mu_3 = 0$,

$$\lambda_4 \Phi + \mu_4 \tilde{\beta} < 1, \ C_3 - C_2 \geqslant \sqrt{2 C_1 C_4}, \quad C_3 > 0, \ C_2 \geqslant 0, \tag{11}$$

где

$$C_1 = [E + L_1 \Phi + \alpha (W + \theta \Delta)] \, (1 - \lambda_4 \Phi) + L_4 \Phi \, (e + \lambda_1 \Phi),$$

$$C_2 = M_4 \, (e + \lambda_1 \Phi) - \mu_4 \, [E + L_1 \Phi + \alpha \, (W + \theta \Delta)],$$

$$C_3 = 1 - \lambda_4 \Phi - \mu_1 L_4 \Phi, \ C_4 = \mu_4 + \mu_1 M_4, \ \tilde{\beta} = \frac{1}{2 C_4} (C_3 - C_2 +$$

$$+ \sqrt{(C_3 - C_2)^2 - 4 C_1 C_4}).$$

Тогда, если $\beta \leq \tilde{\beta}$, то начальная задача (1), (2) имеет единственное решение на интервале $\mathcal{J}_\infty = [\alpha_0, +\infty)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, производная $\dot{x}(t)$ которых удовлетворяет условию: $|\dot{x}(t)| \leq F(t)$, $t \in \mathcal{J}_\infty$.

Доказательство. Рассмотрим шаговый процесс построения решения с шагом Δ. Покажем, что полученное таким образом решение будет обладать производной, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\tilde{\beta}$. Действительно, легко проверить, что из условий теоремы 2 следуют условия теоремы 1. Следовательно, существует единственное решение $x(t)$ начальной задачи (1), (2) на интервале $\mathcal{J}_\Delta$.

Пусть t, $t^* \in \mathcal{J}_\Delta$. Тогда из условий теоремы 2 следует

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(t^*)| \leq E\,|t - t^*| + L_1\,\Phi|t - t^*| + L_4\,\Phi|\,\tau_0^{x(t)} - \tau_0^{x(t^*)}| +$$

$$+ M_4\beta|\Delta_0^{x(t)} - \Delta_0^{x(t^*)})| + \alpha\,[W|\,t - t^*| + \theta\,\Delta|t - t^*|\,]; \qquad (12)$$

$$|\gamma_k^{x(t)} - \gamma_k^{x(t^*)}| \leq e\,|t - t^*| + \lambda_1\Phi|t - t^*| + \lambda_4\,\Phi|\tau_{k+1}^{x(t)} - \tau_{k+1}^{x(t^*)}| +$$

$$+ \mu_1|\dot{x}(t) - \dot{x}(t^*)| + \mu_4\,\beta|\Delta_{k+1}^{x(t)} - \Delta_{k+1}^{x(t^*)}|, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$|\gamma_m^{x(t)} - \gamma_m^{x(t^*)}| \leq e|t - t^*| + \lambda_1\,\Phi|\,t - t^*| + \mu_1|\dot{x}(t) - \dot{x}\,(t^*)|$$

и следовательно

$$|\gamma_0^{x(t)} - \gamma_0^{x(t^*)}| \leq \frac{(e + \lambda_1\Phi)\,|t - t^*| + \mu_1|\dot{x}(t) - \dot{x}(t^*)|}{1 - (\lambda_4\,\Phi + \mu_4\,\beta)}.$$

Подставляя (13) в (12) и пользуясь (11), получаем

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(t^*)| \leq \frac{C_1 + C_2\tilde{\beta}}{C_3 - C_4\tilde{\beta}}|t - t^*| = \tilde{\beta}\,|t - t^*|.$$

Допустим, что при помощи N ($N \geqslant 2$) шагов построено решение начальной задачи на интервале $\mathcal{J}_{N\Delta}$, причем производная этого решения удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\beta_N \leq \tilde{\beta}$. Тогда это решение может быть продолжено на интервал $\mathcal{J}_{(N+1)\Delta}$. Аналогичным образом, как это делалось для $N - 1$, можно показать, что производная продолженного решения будет удовлетворять условию Липшица с постоянной

$$\beta_{N+1} \leq \max\left\{\beta_N, \frac{C_1 + C_2\,\tilde{\beta}}{C_3 - C_4\,\tilde{\beta}}\right\} = \tilde{\beta},$$

т. е. индукцией по N показано, что рассматриваемое решение обладает производной, удовлетворяющей условию Липшица с постоянной $\tilde{\beta}$ (на каждом интервале $\mathcal{J}_{N\Delta}$).

Шаговый процесс построения решения можно продолжить до бесконечности. Полученное склеенное решение будет соответствовать утверждению теоремы 2.

(Поступило 15 II. 1975)

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, Е. П., *Автоматическое регулирование*, Физматгиз, М., 1960.
2. Петухов, В. Р., *Вопросы качественного исследования решений уравнений с „максимумами"*, Известия высших учебных заведений, математика, 3 (40), 1964.
3. Магомедов, А. Р., *теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Изв. Акад. наук Азерб. ССР., Сер. физико-техн. и матем. наук, 2, 1971.
4. Bielicki, A., *Une remarque sur la méthode de Banach — Cacciopoli — Tikhonov*, Bull. Acad. Polon. Sci., IV, 5, 1956.

TEOREME DE EXISTENŢĂ ŞI DE UNICITATE A SOLUŢIEI UNOR SISTEME DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE DE TIP ULTRANEUTRU

(Rezumat)

În lucrare se demonstrează teoreme asupra existenţei şi unicităţii soluţiei locale şi globale ale problemei (1)—(2).

ASUPRA EXISTENŢEI SOLUŢIEI SLABE ALE UNOR PROBLEME DIRICHLET NELINIARE

C. KALIK

Considerăm problema Dirichlet reprezentată de următoarele condiţii

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f(x, u) = g(x), \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

unde $\Omega \subset R^n$ este un domeniu mărginit. După cum se va preciza mai jos, în cadrul funcţiilor f admise de noi intră funcţii cu neliniaritate de tip exponenţial.

La început precizăm cadrul necesar formulării exacte a problemei. Considerăm funcţiile $\Phi_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ şi $\Psi_1(v) = (1 + |v|)\, ln\, (1 + |v|) - |v|$ definite pe R. Φ_1 şi Ψ_1 sînt o pereche de funcţii Young, cu ajutorul cărora putem genera două spaţii Orlicz L_{Φ_1} şi L_{Ψ_1} [1]. Normele din aceste spaţii Orlicz le vom nota cu $||\cdot||_{\Phi_1}$, respectiv cu $||\cdot||_{\Psi_1}$. Este uşor de văzut că au loc următoarele incluziuni algebrice şi topologice

$$L^*_{\Phi_1} \subset L_2(\Omega) \subset L^*_{\Psi_1}$$

Fie E_{Φ_1} închiderea, în $L^*_{\Phi_1}$, a funcţiilor $u : \Omega \to R$, măsurabile şi mărginite. Notăm cu V spaţiul Banach

$$V = \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1_2(\Omega) \cap E_{\Phi_1}$$

cu norma

$$||v||_V = ||v||_{\mathcal{H}^1_2} + ||v||_{\Phi_1}$$

$\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1_2(\Omega)$ este spaţiul Sobolev obţinut prin închiderea mulţimii $C_0^\infty(\Omega)$ în topologia dată de norma

$$||v||_{\mathcal{H}^1_2} = \left\{\sum_{i=1}^{n} ||D_i\, u||_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\right\}^{1/2}$$

Scopul acestei lucrări este de a da condiţii, care să asigure existenţa şi unicitatea unei funcţii $u_0 \in V$, pentru care să avem

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega f(x,\ u_0)\cdot v\,dx = \int_\Omega g\cdot v\,dx, \qquad \forall v \in V, \tag{3}$$

unde $g \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ este o funcţie oarecare dată.

În cele ce urmează vom considera numai funcţii $f : \Omega \times R \to R$ care satisfac condiţiile lui Caratheodory [1]. Formulăm şi ipotezele noastre de lucru:

I_1. $\exists\, a \in \mathfrak{L}(\Omega)$, $\exists b \geqslant 0$, $\exists \beta > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x,s)|^{2+\beta} \leq a(x) + b\Phi_1[(2 + \beta)s],\ \forall s \in R \tag{I_1}$$

I_2. $f(x,s) \geqslant 0$ pentru aproape fiecare $x \in \Omega$ şi $\forall s \in R$. De asemenea f este nedescrescătoare în raport cu variabila s.

I_3. $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$; $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pentru $\forall x \in \Omega$ şi $s \in R$; există $\gamma > 0$ astfel ca $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geqslant \gamma|\xi|^2$ pentru $\forall x \in \Omega$ şi $\forall \xi \in R^n$.

Observăm că un exemplu simplu de funcţie f care satisface ipotezele I_1 şi I_2 este dată de funcţia e^s.

LEMA 1. *Dacă are loc ipoteza I_1, atunci avem*

$$f: D\left(\frac{1}{2+\beta};\ \theta;\ L^*_{\Phi_1}\right) \to \mathfrak{L}^{2+\beta}(\Omega),$$

$$u \mapsto f(x, u(x)),$$

unde $D\left(\frac{1}{2+\beta};\ \theta;\ L^*_{\Phi_1}\right)$ *este discul din* $L^*_{\Phi_1}$, *de rază* $\frac{1}{2+\beta}$ *şi cu centrul în* θ.

Demonstraţie. Fie $u \in D\left(\frac{1}{2+\beta};\ \theta;\ L^*_{\Phi_1}\right)$, $\Rightarrow \|(2+\beta)u\|_{\Phi_1} \leq 1$.

Se ştie, din teoria spaţiilor Orlicz, că această inegalitate atrage după sine şi inegalitatea

$$\int_\Omega \Phi_1((2+\beta)u)\,dx \leq 1,$$

ceea ce, împreună cu inegalitatea $[I_1]$, ne arată că avem

$$\int_\Omega |f(x, u|^{2+\beta}\,dx < +\infty.$$

Q.e.d.

Observaţie. Avînd în vedere rezultatele din lucrarea [1], lema 1 atrage după sine următoarele concluzii:

$$f: \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right) \to \mathfrak{L}^{2+\beta}(\Omega),$$

iar acest operator este continuu şi mărginit în $\forall u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$. Cu $\pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$, am notat mulţimea acelor funcţii din $L^*_{\Phi_1}$ care se află la o distanţă mai mică decît $\frac{1}{2+\beta}$ de la subspaţiul E_{Φ_1}.

LEMA 2. *Dacă este satisfăcută ipoteza I_1, atunci pentru orice număr γ astfel încît*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\beta} = \frac{1}{\gamma_0} \leq \frac{1}{\gamma} \leq 1,$$

şi pentru orice $u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$, *avem*

$$L^*_{\Phi_1} \to \mathfrak{L}^{\gamma}(\Omega), \quad v \mapsto f(x,u) \cdot v$$

iar acest operator este liniar şi continuu.

Demonstraţie. Aşa după cum s-a văzut la lema 1, avem $f(x, u) \in \mathfrak{L}^{2+\beta}(\Omega)$. Fie $v \in L^*_{\Phi_1}$. Deoarece $L^*_{\Phi_1} \subset L^2(\Omega)$, avem $v \in L^2(\Omega)$ şi ţinînd seamă de inegalitatea $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\beta} \leq \frac{1}{\gamma} \leq 1$, rezultă $f(x,u) \cdot v \in \mathfrak{L}^{\gamma}(\Omega)$, precum şi inegalitatea

$$\int_\Omega |f(x,u) \cdot v|^\gamma \, dx \leq c\|f(x,u)\|_{\mathfrak{L}^{2+\beta}} \cdot \|v\|_{\mathfrak{L}^2} \leq C\|f(x,u)\|_{\mathfrak{L}^{2+\beta}}\|v\|_{\Phi_1}$$

Deci operatorul considerat este şi mărginit. Liniearitatea acestui operator fiind evidentă, rezultă şi mărginirea lui. Q.e.d.

Fie $g \in L^2(\Omega)$ un element oarecare fixat şi

$$F(u) = F_1(u) + F_2(u) - (g,u), \; u \in V, \tag{4}$$

unde

$$F_1(u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad F_2(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(x,s)ds$$

şi

$$(g,u) = \int_\Omega g \cdot dx$$

Notînd cu $F_1'(u)$ respectiv cu $F_1''(u)$ derivatele Gâteaux ale funcţionalei F_1 în punctul u, găsim că

$$<F_1'(u), v> = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall v \in V$$

şi

$$F_1''(u) \cdot (v,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall v \in V.$$

Dacă ipoteza I_3 are loc, atunci avem

$$F_1''(u) \cdot (v,v) \geqslant \gamma\|v\|^2_{\mathcal{H}^1_2}, \quad \forall \; v \in V, \tag{5}$$

de unde rezultă şi convexitatea strictă a funcţionalei F_1.

LEMA *Dacă ipoteza* I_1 *este satisfăcută, atunci funcţionala* F_2 *este definită pe* $\pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$, *există derivata ei în* $\forall u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$ *şi*

$$< F_2'(u), v > = \int_\Omega f(x,u) \cdot v dx, \quad \forall\, v \in L^*_{\Phi_1},$$

adică $F_2'(u) = f(x,u)$.

Demonstraţie. Notăm

$$\Phi(x,u) = \int_0^{u(x)} f(x,s) ds$$

Φ este tot o funcţie Caratheodory. În acest caz, aşa după cum se demonstrează în [2], există o funcţie măsurabilă $\theta : \Omega \to R$, astfel încît să avem $0 \leq \theta(x) \leq 1$, $x \in \Omega$ şi

$$\Phi(x,u) = \Phi\ (x, \theta u) \cdot u = f(x, \theta u) \cdot u.$$

De aici rezultă

$$F_2(u) = \int_\Omega f(x, \theta u) \cdot u\ dx.$$

Dacă $u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$, atunci şi $\theta u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$ iar pe baza lemei 1, putem trage concluzia că $f(x, \theta u) \in L^{2+\beta}$. Lema 2, însă, ne arată că $f(x, \theta u) \cdot v \in L^\gamma$. Ţinînd seamă de faptul că $\gamma \geqslant 1$, avem $f(x, \theta u) \cdot v \in L(\Omega)$. De unde, pe baza reprezentării de mai sus a funcţionalei F_2, rezultă că această funcţională este definită pe $\pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$.

Fie $u \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$ un element oarecare fixat. Vom arăta că are loc egalitatea

$$\lim_{\|h\|_{\Phi_1} \to 0} \frac{|F_2(u+h) - F_2(u) - (f(x,u), h)|}{\|h\|_{\Phi_1}} = 0 \tag{6}$$

Deoarece $\pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$ este o mulţime deschisă, pentru orice h suficient de mic avem $u + h \in \pi\left(E_{\Phi_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$. Însă

$$|F_2(u+h) - F_2(u) - (f(x,u), h)| = \left| \int_\Omega \{\Phi(x, u+h) - \Phi(x, u) - f(x,u) \cdot h\}\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_\Omega \{f(x, u + \theta h) - f(x,u)\} \cdot h dx \right| \leq C \|f(x, u + \theta h) - f(x,u)\|_{\mathfrak{L}^{2+\beta}} \cdot \|h\|_{\Phi_1},$$

de unde, ţinînd seamă de continuitatea operatorului f, rezultă egalitatea (6) şi, deci,

$$< F_2'(u), h > = \int_\Omega f(x,u) \cdot h \, dx.$$

Q.e.d.

Observăm că în lema de mai sus s-a demonstrat, de fapt, existenţa derivatei Frechét a lui F_2.

TEOREMA 1. *Dacă sînt satisfăcute ipotezele I_1, I_2 şi I_3, atunci funcţionala F are un minim global unic pe V.*

Demonstraţie. Conform unor rezultate cunoscute [3] pentru a demonstra existenţa şi unicitatea unui punct de minim global este suficient să arătăm că F este convexă, mărginită inferior şi coercivă.

Inegalitatea (3) ne-a arătat că F_1 este convexă. Ipoteza I_2 atrage după sine inegalitatea

$$\Phi(x,\sigma) - \Phi(x,t) = \int_t^\sigma f(x,s)ds \geqslant f(x, t) (\sigma - t),$$

care înseamnă convexitatea lui Φ în raport cu a doua variabilă. De aici rezultă în mod evident convexitatea lui F_2. În sfîrşit, ţinînd seamă de convexitatea funcţionalelor F_1 şi F_2, precum şi de linearitatea lui (g,u), rezultă convexitatea (chiar convexitatea strictă) a lui F.

Mărginirea inferioară a lui F rezultă din următoarele inegalităţi:

$$F(u) \geqslant \gamma||u||^2_{\mathcal{H}_2^1} - ||g||_{\mathcal{L}^2} \cdot ||u||_{\mathcal{L}^2} \geqslant \gamma \cdot c \cdot ||u||^2_{\mathcal{L}^2} - ||g||_{\mathcal{L}^2}||u||_{\mathcal{L}^2} =$$

$$= \gamma \cdot C\left(||u||_{\mathcal{L}^2} - \frac{||g||_{\mathcal{L}^2}}{2\gamma C}\right)^2 - \frac{||g||^2_{\mathcal{L}^2}}{4\gamma C} \geqslant - \frac{||g||^2_{\mathcal{L}^2}}{4\gamma C}.$$

Dacă $\lim ||u||_V = +\infty$, atunci avem $\lim ||u||_{\Phi_1} = +\infty$. Însă din continuitatea incluziunii $L^*_{\Phi_1}$ L_2 rezultă că $\lim ||u||_{\mathcal{L}^2} = +\infty$. Ultima egalitate atrage după sine pe $\lim \{\gamma \cdot c||u||^2_{\mathcal{L}^2} - ||g||_{\mathcal{L}^2}||u||_{\mathcal{L}^2}\} = +\infty$. Ţinînd seamă şi de inegalitatea

$$F(u) \geqslant \gamma \cdot c||u||^2_{\mathcal{L}^2} - ||g||_{\mathcal{L}^2}||u||_{\mathcal{L}^2},$$

din raţionamentul de mai sus putem trage concluzia

$$\lim ||u||_V = +\infty \Rightarrow \lim F(u) = +\infty$$

care înseamnă tocmai coercivitatea funcţionalei F. Astfel, existenţa punctului de minim global este demonstrată.

Unicitatea punctului de minim rezultă din stricta convexitate a funcţionalei F, care la rîndul său rezultă din stricta convexitate a lui F_1 Q.e.d.

TEOREMA 2. *Dacă sînt îndeplinite ipotezele I_1, I_2 şi I_3, atunci problema Dirichlet considerată are o soluţie slabă unică pentru orice $g \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ dat.*

Demonstraţie. Conform teoremei 1, funcţionala F are un minim global unic pe V. Notăm acest punct de minim cu u_0.

Cu ajutorul lemei 3 putem trage concluzia că funcţionala F este derivabilă în u_0 şi că

$$< F'(u_0),v > = < F_1'(u_0) > + < F'(u_0),v > - (g, v), \ \forall\ v \in V$$

Avînd în vedere că F este convexă, faptul că u_0 este un punct de minim echivalent cu identitatea

$$<F'(u_0),v> = 0, \ \forall\ v \in V,$$

care este tocmai identitatea (3) Q.e.d.

(Intrat în redacţie la 10 mai 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. Caratheodory, C., *Vorlesungen uber reelle Functionen*, Leipzig und Berlin, 1918.
2. Krasnoselskii, M. A., Rutitckii, J. B., *Vipuklie functii i prostranstva Orlicza*, Moscova, 1958.
3. Vainberg, M. M., *Variationnii metod i metod monotonnih operatorov*, Moskva, 1972.

SUR L'EXISTENCE DE LA SOLUTION FAIBLE DE QUELQUES PROBLEMES DIRICHLET NON-LINÉAIRES

(Résumé)

Dans cet article on étudie le problème Dirichlet (1) — (2) pour les cas où la fonction f est non-linéaire de type exponentiel. Les restrictions sur l'équation (1) sont précisées dans les hypothèses I_1, I_1, I_3. On prouve l'existence de solution faible du problème Dirichlet à l'aide de la fonctionnelle (4) en démontrant qu'il existe un minimum global de cette fonctionnelle sur un sousensemble d'un espace Orlicz.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

DERIVAREA PARŢIALĂ NUMERICĂ A FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

HOANG TRUNG DU

1. Introducere. Problema construirii formulelor de derivare parţială numerică este deosebit de importantă în analiza numerică, aceste formule servind în special la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

În cazul unei singure variabile problema este tratată în numeroase lucrări, dar în cazul a două sau mai multe variabile numărul lucrărilor publicate este foarte redus. O metodă generală pentru a construi asemenea formule s-a bazat în special pe formulele de interpolare; menţionăm în acest sens lucrările lui D. D. Stancu [6] şi T. Tsuda [8].

În această lucrare vom prezenta o nouă metodă, aşa numita metodă a descompunerii succesive pentru derivarea parţială numerică a funcţiilor de mai multe variabile, care se bazează pe metoda funcţiei „blending" introdusă de W. J. Gordon [1—3].

Se consideră o funcţie $f\colon \Omega_n \to R$, unde $\Omega_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ este un hiperparalelipiped din spaţiul euclidian n dimensionale E_n, despre care presupunem că admite toate derivatele parţiale care vor interveni în lucrare. Mulţimea acestor funcţii este interpolatoare, adică orice element al ei se poate interpola pe reţele de puncte prin diferite metode, inclusiv metoda lui W. J. Gordon [2—3]. Prin această metodă funcţia $f(x_1, \ldots, x_n)$ se exprimă ca o combinaţie liniară de funcţii avînd o variabilă mai puţin. Acesteia din urmă i se poate aplica aceeaşi metodă, astfel se poate exprima ca o combinaţie liniară de funcţii de $n - 2$ variabile. Repetînd acest procedeu de n ori, obţinem o aproximaţie a lui f printr-o mulţime de scalari daţi, reprezentînd valorile lui f pe reţele de puncte considerate. Aceasta se numeşte metoda descompunerii succesive [1].

Acest procedeu se poate aplica pentru a construi formule de derivare parţială numerică pentru funcţii de mai multe variabile.

În paragraful al doilea vom da forma generală a procedeului bazat pe formula de interpolare simplă (primul pas), iar în al treilea vom prezenta formula construită cu ajutorul metodei descompunerii succesive şi evaluarea restului formulei respective. În ultimul paragraf se dă un exemplu concret pentru cazul $n = 2$.

2. Metoda interpolatorică simplă. Pentru simplificarea expunerii vom detalia cazul $n = 2$, cazurile $n \geqslant 3$ tratîndu-se în mod analog.

Fie m, n două numere naturale şi $\Omega_2 = [a, b] \times [c, d]$. Considerăm funcţia $f \in C^{m+1,n+1}(\Omega_2)$ şi diviziunile

$$\Delta_x = \{x_i\}_{i=0}^{m} \quad \Delta_y = \{y_j\}_{j=0}^{n}$$

astfel ca

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant b, \; c \leqslant y_0 < y_1 < \ldots < y_n \leqslant d,$$

Fie $\pi = \Delta_x \times \Delta_y$. Vom considera următorii proiectori de aproximare (operatori de aproximare liniari și idempotenți):

$$P_1[f] = \sum_{i=0}^{m} f(x_i, y)\Phi_i(x), \quad P_2[f] = \sum_{j=0}^{n} f(x, y_j)\psi_j(y) \tag{2.1}$$

unde

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \; i = 0,1, \ldots, m; \quad \psi_j(y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{n} \frac{y - y_l}{y_j - y_l}, \; j = 0,1, \ldots, n \tag{2.2}$$

sînt polinoamele fundamentale de interpolare ale lui Lagrange, deci cu proprietatea că

$$\Phi_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad \psi_j(y_l) = \delta_{jl}, \tag{2.3}$$

δ_{ik}, δ_{jl} fiind simbolurile lui Kronecker. Operatorii rest asociați lui P_1 și P_2 se pot exprima sub forma integrală următoare (a se vedea [3]):

$$\begin{aligned} R_1[f] &= f - P_1[f] = \int_a^b K_1(x; s) f^{(m+1,0)}(s, y)\,ds \\ R_2[f] &= f - P_2[f] = \int_c^d K_2(y; t) f^{(0,n+1)}(x, t)\,dt, \end{aligned} \tag{2.4}$$

unde în general $K_1(x; s)$, $K_2(y; t)$ sînt funcțiile lui Green pentru anumite probleme la limită. În cazul de față constatăm că au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} K_1(x; s) &= \frac{(x - s)_+^m}{m!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{(x_i - s)_+^m}{m!} \Phi_i(x), \\ K_2(y; t) &= \frac{(y - t)_+^n}{n!} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(y_j - t)_+^n}{n!} \psi_j(y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

cu folosirea notației de la funcții spline:

$$(u - v)_+^k = \begin{cases} (u - v)^k & \text{dacă } u \geqslant v \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

În acest caz, printr-o analiză a lui K_1 și K_2 putem scrie [2]:

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \prod_{i=0}^{m} (x - x_i) \frac{f^{(m+1,0)}(\xi, y)}{(m+1)!}, \quad \min_i x_i \leqslant \xi \leqslant \max_i x_i \\ R_2[f] &= \prod_{j=0}^{n} (y - y_j) \frac{f^{(0,n+1)}(y, \eta)}{(n+1)!}, \quad \min_j y_j \leqslant \eta \leqslant \max_j y_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se vede ușor că P_1, P_2 sînt proiectori comutativi, adică $P_1P_2 = P_2P_1$, iar resturile R_1, R_2 au aceleași proprietăți. Bazați pe lucrarea [2] considerăm cele două aproximante extreme

$$P_1 \oplus P_2 \text{ și } P_1P_2, \tag{2.7}$$

în care semnul $\oplus$ indică suma booleană. Deci orice $f \in C^{m+1,n+1}(\Omega_2)$ se poate reprezenta sub formele

$$f(x, y) = (P_1 \oplus P_2)[f] + R_1R_2[f]\,;\; f(x,y) = P_1P_2[f] + (R_1 \oplus R_2)[f]. \tag{2.8}$$

În vederea stabilirii unor formule de derivare parțială numerică, adică a unor formule care permit să se calculeze în mod aproximativ valorile, pe anumite puncte, ale unor derivate parțiale ale funcției f printr-o combinație liniară a valorilor funcției pe planele $x_i = 0$ $(i = 0,1, \ldots, m)$ și $y_j = 0$ $(j = 0,1, \ldots, n)$, vom putea porni de la formulele (2.8). În cele ce urmează ne vom ocupa de formulele (2.8); în special de prima egalitate, iar cealaltă se obține ca un caz particular al acesteia.

Fie p,q două numere întregi nenegative, astfel ca să avem $0 \leqslant p \leqslant m$, $0 \leqslant q \leqslant n$. Aplicînd operatorii de derivare $\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}$ și $\dfrac{\partial^q}{\partial y^q}$ asupra primei egalități a lui (2.8), obținem:

$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^{p+q}(P_1 \oplus P_2)[f]}{\partial x^p \partial y^q} + \frac{\partial^{p+q}(R_1R_2)[f]}{\partial x^p \partial y^q}. \tag{2.9}$$

Mai explicit putem scrie

$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^{p+q} P_1[f]}{\partial x^p \partial y^q} + \frac{\partial^{p+q} P_2[f]}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q}(P_1P_2)[f]}{\partial x^p \partial y^q} + \frac{\partial^{p+q} T(R_1R_2)[f]}{\partial x^p \partial y^q}.$$

Dacă notăm $h_i(y) = f(x_i, y)$, $g_j(x) = f(x, y_j)$ și ținem seama de relațiile din (2.1), obținem:

$$f^{(p,q)}(x,y) = \sum_{i=0}^{m} h_i^{(q)}(y)\Phi_i^{(p)}(x) + \sum_{j=0}^{n} g_j^{(p)}(x)\psi_j^{(q)}(y) -$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j)\Phi_i^{(p)}\psi_j^{(q)}(y) + (R_1R_2)^{(p,q)}[f], \tag{2.10}$$

unde am folosit notația

$$\varphi^{(u,v)}(x,y) = \partial^{u+v}\varphi(x, y)/\partial x^u \partial y^v.$$

În ceea ce privește restul $(R_1R_2)^{(p,q)}[f]$ din expresia (2.10), aplicînd un procedeu folosit de D.D. Stancu [6], sau direct din (2.6), putem obține următorul rezultat:

LEMA 2.1. *Dacă* $K_1(x; s)$ *şi* $K_2(y; t)$ *nu schimbă semnul pe* $[a,b]$, *respectiv pe* $[c, d]$, *atunci pentru perechea de numere* (p,q), *restul formulei de derivare numerică* (2.10) *se poate reprezenta sub forma*

$$(R_1R_2)^{(p,q)}[f] = \frac{U^{(p)}(x)V^{(q)}(y)}{(m+1)!\,(n+1)!} f^{(m+1,n+1)}(\xi, \eta), \tag{2.11}$$

unde

$$U(x) = \prod_{i=0}^{m}(x - x_i), \quad V(y) = \prod_{j=0}^{n}(y - y_j).$$

Observaţii: 1) Condiţia ca $K_1(x; s)$ şi $K_2(y; t)$ să aibă acelaşi semn pe $[a, b]$, respectiv pe $[c, d]$, se poate realiza, de exemplu, cînd $x \not\in [a, b]$, respectiv $y \not\in [c, d]$, cu alte cuvinte dacă $(x, y) \not\in \Omega_2$.

2) În cazul că p,q iau valori 0 sau 1, iar x coincide cu unul dintre punctele x_i, cînd $p = 1$ şi y coincide cu unul dintre punctele y_j, cînd $q = 1$, atunci condiţia din lema 2.1. se poate înlătura [6].

Apoi, dacă ţinem seama de (2.10) sau (2.11), rezultă că are loc

LEMA 2.2. Formula (2.10) este exactă pentru clasa funcţiilor de forma

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} f_i(y)\ \Phi_i(x) + \sum_{j=0}^{n} g_j(x)\ \psi_j(y), \tag{2.12}$$

unde funcţiile $f_i(y)$, $g_j(x)$ sînt funcţii derivabile de toate ordinele care intervin.

Conform definiţiei gradului parţial de exactitate date în [6], formula (2.10) are gradul parţial de exactitate (m,n). Aceasta rezultă ca un caz particular al lui (2.12) — şi anume cînd $f_i(y) = g_j(x) = 1$.

Formula (2.9) ne permite calculul aproximativ al derivatei parţiale. Dar procedeul acesta este complicat fiindcă nu întotdeauna derivatele $f^{(0,q)}(x_i, y)$, $f^{(p,0)}(x, y_j)$ se pot găsi uşor, cu excepţia unor clase de funcţii speciale, cum este clasa funcţiilor care au proprietatea de separare a variabilelor, adică $f(x, y) = h(x)\,g(y)$. Pentru a înlătura aceste dificultăţi vom aplica metoda descompunerii succesive.

3. **Derivarea prin metoda descompunerii succesive**. Această metodă se poate aplica în două variante:

a) Se aplică derivatelor parţiale $f^{(0,q)}(x_i, y)$ şi $f^{(p,0)}(x, y_j)$ noi proiectori, se obţin formule liniare de aproximare care fac uz de valorile funcţiei f pe anumite reţele de puncte de bază.

b) Se aproximează $f(x, y)$ printr-o combinaţie liniară de valorile ale funcţiei pe punctele considerate iar pe urmă se aplică operatorii de derivare.

Vom vedea că cele două variante ale acestei metode sînt echivalente. În acest paragraf vom trata varianta *b* şi din echivalenţa dintre cele două se obţine şi varianta *a*.

Aici trebuie să folosim mai mulţi proiectori de aproximare pe mai multe nivele, deci trebuie să indicăm indicele de nivel.

Să considerăm următoarele două reţele pe dreptunghiul Ω_2:

$$\Delta_x^1 = \{x_i^1\}_{i=0}^{m_1}, \ \Delta_y^1 = \{y_j^1\}_{j=0}^{n_1}, \tag{3.1}$$

astfel ca

$$a \le x_0^1 < x_1^1 < \ldots < x_{m_1}^1 \le b, \ c \le y_0^1 < y_1^1 < \ldots < y_{n_1}^1 \le d$$

şi

$$\Delta_x^2 = \{x_k^2\}_{k=0}^{m_2}, \qquad \Delta_y^2 = \{y_l^2\}_{l=0}^{n_2} \tag{3.1'}$$

astfel ca

$$a \le x_0^2 < x_1^2 < \ldots < x_{m_2}^2 \le b; \ c \le y_0^2 < y_1^2 < \ldots < y_{m_2}^2 \le d,$$

pentru orice m_1, m_2, n_1, n_2, numere naturale

Fie

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \prod_{i=0}^{m_1} (x - x_i^1), & U_2(x) &= \prod_{k=0}^{m_2} (x - x_k^2) \\ V_1(y) &= \prod_{j=0}^{n_1} (y - y_j^1), & V_2(y) &= \prod_{l=0}^{n_1} (y - y_l^2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Luăm patru familii de funcţii de bază ataşate celor patru diviziuni: Δ_x^1, Δ_x^2, Δ_y^1, Δ_y^2, constînd din polinoamele fundamentale de interpolare ale lui Lagrange: $\Phi_{1i}(x)$, $\Phi_{2k}(x)$, $\psi_{1j}(y)$, $\psi_{2l}(y)$. Cu acestea construim pentru primul nivel proiectorii:

$$P_{11}[f] = \sum_{i=0}^{m_1} f(x_i^1, y)\ \Phi_{1i}(x), \ P_{21}[f] = \sum_{j=0}^{n_1} f(x, y_j^1)\ \psi_{1j}(y), \tag{3.4}$$

iar pentru al doilea nivel proiectorii:

$$P_{12}[f] = \sum_{k=0}^{m_2} f(x_k^2, y)\ \Phi_{2k}(x), \ P_{22}[f] = \sum_{l=0}^{n_2} f(x, y_l^2)\ \Phi_{2l}(y). \tag{3.4'}$$

Se observă că din cei doi indici de la proiectori, primul se referă la variabila asupra căreia se aplică, iar al doilea indică nivelul la care se referă.

Se pot stabili imediat relaţiile între proiectori:

$$\begin{gathered} P_{11}P_{21} = P_{21}P_{11}, \ P_{11}P_{22} = P_{22}P_{11}; \ P_{21}P_{12} = P_{12}P_{21}, \\ P_{12}P_{22} = P_{22}P_{12}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

În ceea ce priveşte resturile asociate, ele se pot exprima sub forma următoare:

$$\begin{aligned} R_{1r}[f] &= \int_a^b K_{1r}(x; s) f^{(m_r+1, 0)}(s, y)\, ds = \frac{U_r(x)}{(m_r+1)!} f^{(m_r+1, 0)}(\xi_r, y), \\ R_{2s}[f] &= \int_c^d K_{2s}(y; t) f^{(0, n_s+1)}(x, t)\, dt = \frac{V_s(y)}{(n_s+1)!} f^{(0, n_s+1)}(x, \eta_s), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$r,s = 1, 2$; unde $K_{uv}(u, v = 1, 2)$ şi ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 sînt definite ca în al doilea paragraf. Cu acestea putem enunţa:

LEMA 3.1. *Pentru orice funcţie* $f \in C^{m+1, n+1}(\Omega_2)$, *unde* $m = max(m_1, m_2)$, $n = max(n_1, n_2)$ *avem următoarea schemă de aproximare*

$$f(x,y) = P(x, y) + R(x, y) = P[f] + R[f]. \tag{3.7}$$

unde

$$P[f] = \sum_{l=0}^{n_2} \sum_{i=0}^{m_1} f_{il} \Phi_{1i}(x) \psi_{2l}(y) + \sum_{k=0}^{m_2} \sum_{j=0}^{n_1} f_{kj} \Phi_{2k}(x) \psi_{1j}(y) -$$

$$- \sum_{=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{n_1} f_{ij} \Phi_{1i}(x) \psi_{1j}(y), \tag{3.8}$$

cu

$$f_{il} = f(x_i^1, y_l^2), \; f_{kj} = f(x_k^2, y_j^1), \; f_{ij} = f(x_i^1, y_j^1)$$

iar

$$R[f] = R_{12}[f] + R_{22}[f] + R_{11}R_{21}[f] - R_{22}R_{11}[f] - R_{12}R_{21}[f]. \tag{3.9}$$

Aceasta rezultă imediat dacă ţinem cont de relaţiile (3.4), (3.4'), (3.5) şi o teoremă dată de W. J. G o r d o n [2].

Vom introduce următoarele definiţii:

DEFINIŢIA 3.1. Vom spune că cele două nivele de descompuneri sînt *consistente* dacă cele trei grupe de erori

$$R_{11}R_{21}, \; R_{12}[I - R_{21}], \; R_{21}[I - R_{11}], \tag{3.10}$$

sînt de acelaşi ordin de mărime, unde I este operatorul identitate.

DEFINIŢIA 3.2. Formula obţinută prin metoda descompunerii succesive cu nivele consistente se numeşte *formulă consistentă.*

LEMA 3.2. *Pentru* m_2,n_2 *suficient de mari formula* (3.7) *este consistentă.*

Aceasta rezultă din faptul că dacă m_2,n_2 sînt suficient de mari atunci $R_{12}[f]$ şi $R_{22}[f]$ pot fi făcute atît de mici încît să nu depăşească pe $||R_{11}R_{21}||$.

În cele ce urmează vom considera $m_2 \gg m_1$, $n_2 \gg n_1$, ca să nu avem multe dificultăţi în evaluarea ordinului de mărime al restului. Cît de mare să fie m_2 faţă de m_1, respectiv n_2 faţă de n_1, depinde de ordinul de aproximaţie dorit. Un caz concret se obţine cînd se iau ca funcţii de bază funcţiile spline cubice [2].

Vom aplica operatorul de derivare $D^{(p,q)} = \partial^{p+q}/\partial x^p \, \partial y^q$ asupra formulei (3.7), pentru p,q numere întregi nenegative şi $0 \leq p \leq m_1$, $0 \leq q \leq n_1$. Se obţine

$$f^{(p,q)}(x, y) = P^{(p,q)}[f] + R^{(p,q)}[f], \tag{3.11}$$

unde pe baza lui (3.8) avem

$$P^{(p,q)}[f] = \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{l=0}^{n_2} f_{il}\ \Phi_{1i}^{(p)}(x)\ \psi_{2l}^{(q)}(y) + \sum_{k=0}^{m_2}\sum_{j=0}^{n_1} f_{kj}\ \Phi_{2k}^{(p)}(x)\ \psi_{1j}^{(q)}(y) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{n_1} f_{ij}\ \Phi_{1i}^{(p)}(x)\ \psi_{1j}^{(q)}(y). \qquad (3.12)$$

Problema care rămîne de cercetat este restul formulei (3.11). În acest scop vom folosi următoarea definiție:

DEFINIȚIA 3.3. Pentru orice $g \in C^{m+1,n+1}(\Omega_2)$ definim

$$||f|| = \max_{(x,y)\in\Omega_2} |f(x,y)|. \qquad (3.13)$$

Vom folosi acum o teoremă din [5, p. 289]

TEOREMA 3.1. *Fie punctele de interpolare $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Dacă $f^{(n+1)}(x)$ este continuă, atunci pentru orice $k \le n$ (k număr natural) avem*

$$R_n^{(k)}(x) = \prod_{j=0}^{n-k} (x - \xi_j)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1-k)!},$$

unde $R_n(x)$ este restul formulei de interpolare iar cele $n+1-k$ puncte distincte ξ_j sînt independente de x și verifică inegalitățile

$$x_j < \xi_j < x_{j+k},\ j = 0, 1, \ldots, n-k.$$

Cu aceasta putem enunța

TEOREMA 3.2. *Dacă funcțiile $K_{uv}(u, v = 1, 2)$ nu schimbă semnul pe $[a,b]$, respectiv pe $[c,d]$, atunci pentru orice $f \in C^{m_2+1,n_2+1}(\Omega_2)$, $0 \le p \le m_1$, $0 \le q \le n_1$, avem*

$$||(f - P(f))^{(p,q)}|| = ||R^{(p,q)}(f)|| \le \varepsilon_{m_2p}||f^{(m_2+1,q)}||(b-a)^{m_2+1-p} +$$

$$+ \varepsilon_{n_2q}||f^{(p,n_2+1)}||(d-c)^{n_2+1-q} + \varepsilon_{m_1p}\varepsilon_{n_1q}||f^{(m_1+1,n_1+1)}||(b-a)^{m_1+1-p}(d-c)^{n_1+1-p}$$

$$+ \varepsilon_{m_2p}\varepsilon_{n_1q}||f^{(m_2+1,n_1+1)}||(b-a)^{m_2+1-p}(d-c)^{n_1+1-q} +$$

$$+ \varepsilon_{m_1p}\varepsilon_{n_2q}||f^{(m_1+1,n_2+1)}||(b-a)^{m_1+1-p}(d-c)^{n_2+1-q}, \qquad (3.14)$$

unde pentru orice u,v numere naturale s-a folosit notația

$$\varepsilon_{uv} = 1/(u - v + 1)! \qquad (3.15)$$

Demonstrația: Din (3.6), (3.8) și condiția teoremei avem

$$R[f] = \frac{U_2(x)}{(m_2+1)!}f^{(m_2+1,0)}(\xi_2, y) + \frac{V_2(y)}{(n_2+1)!}f^{(0,n_2+1)}(x, \eta_2) +$$

$$+ \frac{U_1(x)V_1(y)}{(m_1+1)!(n_1+1)!}f^{(m_1+1,n_1+1)}(\xi_1, \eta_1)$$

$$+ \frac{U_1(x)V_2(y)}{(m_1+1)!(n_2+1)!}f^{(m_1+1,n_2+1)}(\xi_1, \eta_2) - \frac{U_2(x)V_1(x)}{(m_2+1)!(n_1+1)!}f^{(m_2+1,n_1+1)}(\xi_2, \eta_1).$$

Condiţia invariabilităţii semnelor lui K_{uv} $(u, v = 1, 2)$ pe $[a, b]$ şi $[c, d]$ ne permite să folosim procedeul dat de D. D. S t a n c u [6]; găsim

$$R^{(p,q)}[f] = \frac{U_2^{(p)}(x)}{(m_2+1)!} f^{(m_2+1,q)}(\xi_2, y) + \frac{V_2^{(q)}(y)}{(n_2+1)!} f^{(p,n_2+1)}(x, \eta_2) +$$

$$+ \frac{U_2^{(p)}(x) V_1^{(q)}(y)}{(m_1+1)!(n_1+1)!} f^{(m_1+1,n_1+1)}(\xi_1, \eta_1) - \frac{U_1^{(p)}(x) V_2^{(q)}(y)}{(m_1+1)!(n_2+1)!} f^{(m_1+1,n_2+1)}(\xi_1, \eta_2) -$$

$$- \frac{U_2^{(p)}(x) V_1^{(q)}(y)}{(m_2+1)!(n_1+1)!} f^{(m_2+1,n_1+1)}(\xi_2, \eta_1). \tag{3.16}$$

În virtutea teoremei 3.1 şi definiţiei 3.3 obţinem evaluarea (3.14).

COROLARUL 3.1. *Dacă funcţia f are derivate parţiale continue de orice ordin, atunci pentru m_1, n_1 fixate şi $m_2, n_2 \geqslant m_1 + n_1 + 1$, avem*

$$||R^{(p,q)}|| \leq M/(m_1 + n_1 + 2 - q - p)! \tag{3.17}$$

unde M este o constantă depinzînd numai de f şi Ω_2, adică

$$M = M(f; a, b; c, d).$$

COROLARUL 3.2. *Dacă $m_1 = m_2 = m$, $n_1 = n_2 = n$, atunci avem următoarea formulă de derivare parţială numerică de tip produs.*

$$f^{(p,q)}(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} f_{ij} \Phi_{1i}^{(p)}(x) \psi_{1j}^{(q)}(y) + R^{(p,q)}[f], \tag{3.18}$$

unde

$$R^{(p,q)} f = \frac{U^{(p)}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1,q)}(\xi, y) + \frac{V^{(q)}(y)}{(n+1)!} f^{(p,n+1)}(x, \eta) -$$

$$- \frac{U^{(p)}(x) V^{(q)}(y)}{(m+1)!(n+1)!} f^{(m+1,n+1)}(\xi, \eta) \tag{3.19}$$

care a fost găsită de D. D. S t a n c u [6] pe altă cale.

Deci cu formula (3.12) putem calcula aproximativ derivatele parţiale ale funcţiei f pe orice punct exterior lui Ω_2, cu o eroare dată în (3.16).

Observaţie. Domeniul de valabilitate al formulei este în general, după cum am precizat înainte, exteriorul lui Ω_2. Totuşi, în cazuri particulare, se poate aplica şi pentru puncte interioare ale lui Ω_2. Se poate chiar ca punctul de derivare să coincidă cu unul dintre noduri (observaţia a doua din paragraf doi).

În ceea ce priveşte cealaltă variantă de a construi formule de derivare parţială numerică, vom face următoarele observaţii:

Pentru $r = 1,2$ avem

$$\begin{aligned} D^{(0,q)}P_{1r}[f] &= P_{1r}D^{(0,q)}[f], \quad D^{(p,0)}P_{2r}[f] = P_{2r}D^{(p,0)}[f] \\ D^{(0,q)}R_{1r}[f] &= R_{1r}D^{(0,q)}[f], \quad D^{(p,0)}R_{2r}[f] = R_{2r}D^{(p,0)}[f], \end{aligned} \tag{3.20}$$

unde $D^{(p,q)}$, pentru p,q întregi nenegativi, este operatorul de derivare definit mai înainte. Deci, se ajunge la aceeaşi formulă dacă se foloseşte şi varianta a.

Pentru funcţii cu un număr de variabile mai mare ca doi putem construi în mod analog formula de derivare parţială numerică.

Această metodă cere un număr mare de puncte de bază pentru ca să obţinem o aproximaţie bună, ceea ce implică să se efectueze un număr foarte mare de calcule; aceasta se poate realiza cu ajutorul calculatoarelor electronice de mare viteză.

4. **Exemplu.** Vom prezenta acum o aplicaţie la calculul cu aproximaţie al derivatei parţiale de ordinul (1,1) al unei funcţii de două variabile.

Să considerăm $\Omega_2 = [0,1]\times[0,1]$ şi reţelele de puncte $x_0^1 = y_0^1 = 0$, $x_1^1 = y_1^1 = 1/2$, $x_2^1 = y_2^1 = 1$, pentru nivelul întîi şi $x_0^2 = y_0^2 = 0$, $x_1^2 = y_1^2 = 1/3$, $x_2^2 = y_2^2 = 2/3$, $x_3^2 = y_3^2 = 1$, pentru nivelul al doilea. Atunci, conform teoriei făcute în paragraful trei, obţinem pentru derivata parţială de ordinul (1,1) în origine formula de aproximare:

$$f^{(1,1)}(0,0) \approx P^{(1,1)}(0,0),$$

unde

$$\begin{aligned} P^{(1,1)}(0,0) = {} & 3\Big[6f(0,0) - 9f\Big(0,\frac{1}{3}\Big) + \frac{9}{2}f\Big(0,\frac{2}{3}\Big) - f(0,1) - 9f\Big(\frac{1}{3},0\Big) + \\ & + 4f\Big(\frac{1}{2},0\Big) + \frac{9}{2}f\Big(\frac{2}{3},0\Big)\Big] + 4\Big[-\frac{9}{2}f\Big(\frac{1}{2},0\Big) + 9f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\Big) + \frac{9}{2}f\Big(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\Big) + \\ & + f\Big(\frac{1}{2},1\Big) - \frac{3}{2}f\Big(0,\frac{1}{2}\Big) + 9f\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\Big) - 4f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) - \frac{9}{2}f\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\Big)\Big] + \\ & + \Big[\frac{9}{2}f(1,0) - 9f\Big(1,\frac{1}{3}\Big) + \frac{9}{2}f\Big(1,\frac{2}{3}\Big) - f(1,1) + \frac{3}{2}f(0,1) - 9f\Big(\frac{1}{3},1\Big) - \\ & - 4f\Big(\frac{1}{2},1\Big) - \frac{9}{2}f\Big(\frac{2}{3},1\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Pentru delimitarea erorii se obţine inegalitatea:

$$||R^{(1,1)}|| \leq \frac{1}{12}(2||f^{(4,1)}|| + 2||f^{(1,4)}|| + 3||f^{(3,3)}|| + ||f^{(4,3)}|| + ||f^{(3,4)}||).$$

(Intrat în redacţie la 10 martie 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. Barnhill, R. E., Gordon, W. J., Thomas, D. H., *The method of succesive decomposition for multivariate integration*, GMR — 1281, General motors corporation, Warren, Michigan, 1972.
2. Gordon, W. J., *Distributive lattices and approximation of multivariate function. Approximation with special emphasis on spline functions*, (ed. by I. J. Schoenberg), Acad. Press 1969.
3. Gordon, W. J., *Blending function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation*, SIAM J. Numer. Anal. **8** (1971), 158—177.
4. Gordon, W. J. and Hall, C. A., *Transfinite element methods*, Numer. Math. **21** (1972), nr. 2, 109—129.
5. Isaacson, E. and Keller, H., *Analysis of numerical methods*, New York, 1966.
6. Stancu, D. D., *Contribuții la derivarea parțială numerică a funcțiilor de două și mai multe variabile*, Bul. Științ. Secț. Mat. și Fiz. **VIII**, nr. 4, 1956.
7. Stancu, D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*. SIAM J. Numer. Anal. Ser. B, **1** (1964).
8. Tsuda, T., *Numerical differentiation of function of very many variables*, Numer. Math. **18** (1972), 327—335.

NUMERICAL PARTIAL DIFFERENTIATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

(Summary)

In this paper the author has constructed a new general formula for the numerical partial differentiation of functions of several independent variables of interpolatory type. This formula has been obtained by using the method of succesive decomposition and is based on a method for multivariate interpolation of W. J. Gordon [2], [3].

EXTENSION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE NEWTON

D.V. IONESCU et P. PAVEL

D. V. Ionescu a fait une théorie de la formule de quadrature de Newton [1] en partant de la formule de quadrature avec les noeuds a, x_1, b de degré d' exactitude au moins 2, qui pour $f \in C^3\,[a,b]$ est

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left\{\frac{x_1 - \frac{2a-b}{3}}{x_1 - a} f(a) + \frac{(b-a)^3}{3(x_1-a)(b-x_1)} f(x_1) + \frac{x_1 - \frac{a+2b}{3}}{x_1 - b} f(b)\right\} +$$

$$+ \int_a^b \varphi(x) f'''(x)dx. \tag{1}$$

Dans cette formule la fonction φ s' obtient par un problème aux limites. Pour $x_1 = \frac{a+2b}{3}$ la formule (1) se réduit à la formule de type Gauss avec le noeud a et le noeud $\frac{a+2b}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + \int_a^b \overline{\varphi}(x) f'''(x)dx \tag{2}$$

D' après le cas génèral étudié dans le travail [1] la fonction $\overline{\varphi}$ est positive sur l'intervalle (a, b) et on a

$$\int_a^b \overline{\varphi}(x)dx = \frac{(b-a)^4}{36 \cdot 6} = \frac{(b-a)^4}{216} \tag{3}$$

Pour $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, la formule (1) se réduit à la formule de Gauss avec le noeud b et le noeud $\frac{2a+b}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(b) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right] + \int_a^b \overline{\overline{\varphi}}(x) f'''(x)dx \tag{4}$$

D' après le travail cité [1] la fonction $\overline{\overline{\varphi}}$ est négative sur l'intervalle (a, b) et on a

$$\int_a^b \overline{\overline{\varphi}}(x)dx = -\frac{(b-a)^4}{218} \tag{5}$$

En ajoutant les formules (2) et (4) membre à membre on obtient la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b)\right] + R[f] \tag{6}$$

où

$$R[f] = \int_a^b \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2} f'''(x)\,dx. \tag{7}$$

Nous sommes arrivés à la formule de Newton dont le degré d' exactitude est 3, parce que d'après les formules (3) et (5) on a

$$\int_a^b [\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)]dx = 0 \tag{8}$$

Si $f \in C^4[a, b]$, on peut mettre le reste de la formule sous la forme

$$R[f] = \int_a^b \psi(x) f^{\mathrm{IV}}(x)dx. \tag{9}$$

et d' après ce qu'on sait [1] la fonction ψ est négative sur l'intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \psi(x)dx = -\frac{(b-a)^5}{6480}. \tag{10}$$

ce qui montre que le degré d' exactitude de la formule est 3.

Nous avons eu l'idée de construire, en suivant la même méthode, une formule du type Newton (6) mais où les noeuds intérieurs sont multiples comme dans la formule de quadrature de Turan [3].

Nous traiterons dans l'avenir le problème en général mais pour voir l'intérêt d'une telle formule nous l' exposons dans ce travail seulement pour le cas des noeuds intérieurs triples.

Nous montrerons qu'une telle formule a le degré d'exactitude *5*.

1. Considérons pour commencer la formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b f(x)dx = Af(a) + Cf(x_1) + C'f'(x_1) + C''f''(x_1) + Bf(b) + R[f] \tag{11}$$

où $x_1 \in (a, b)$ et les coefficients A, C, C', C'', B se calculent de manière que $R[x^k] = 0$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.

Nous calculerons particulièrment les coefficients A, B qui seront importants pour ce travail.

En procédant comme dans l'introduction de ce travail, remplaçant dans la formule (11) la fonction f par $f(x) = (x - b)(x - x_1)^3$ et ensuite par $f(x) = (x - a)(x - x_1)^3$ nous aurons

$$A(b - a)(x_1 - a)^2 = \int_a^b (x - b)(x - x_1)^3 dx. \tag{12}$$

et

$$B(b - a)(b - x_1)^2 = \int_a^b (x - a)(x - x_1)^3 dx. \tag{13}$$

ce calcule donne

$$\begin{aligned} A &= \frac{b - a}{2(x_1 - a)^3}\left\{(x_1 - a)^3 - (b - a)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(x_1 - a) - \frac{1}{10}(b - a)^3\right\} \\ B &= \frac{b - a}{2(b - x_1)^3}\left\{(b - x_1)^3 - (b - a)(b - x_1)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(b - x_1) - \frac{1}{10}(b - a)^3\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

2. On peut choisir x_1 de manière que A soit nul. Cela a été montré en général par D. V. Ionescu dans le travail [1]. On obtient l'équation

$$(x_1 - a)^3 - (b - a)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(x_1 - a) - \frac{1}{10}(b - a)^3 = 0$$

qui a une seule racine réelle comprise entre a et b. En posant

$$x_1 - a = (b - a)u$$

on a l'équation en u

$$u^3 - u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{10} = 0 \tag{15}$$

dont la seule solution réelle est

$$u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\left\{\sqrt[3]{50(-2 + 3\sqrt{6})} - \sqrt[3]{50(2 + 3\sqrt{6})}\right\}$$

ce qui donne

$$x_1 = a + (b - a)u_1 \tag{16}$$

3. On peut choisir aussi x_1 de manière que B soit nul. On a

$$(b - x_1)^3 - (b - a)(b - x_1)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(b - x_1) - \frac{1}{10}(b - a)^3 = 0 \tag{17}$$

En posant

$$b - x_1 = (b - a)v$$

on a l'équation

$$v^3 - v^2 + \frac{1}{2} v - \frac{1}{10} = 0$$

qui est identique à l'équation (15). Elle a une racine $v_1 = u_1$ réelle comprise entre a et b

Donc

$$\bar{\bar{x}}_1 = b - (b - a)\ v_1 = b - (b - a)u_1$$

Les noeuds $\bar{x}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ sont symétriques par rapport au milieu de l'intervalle $[a, b]$.

$$\bar{x}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = (b + a) \tag{18}$$

En prenant dans la formule de quadrature (11) $x_1 = \bar{x}_1$ que nous désignons toujours par x_1, la formule (11) devient

$$\int_a^b f(x)dx = C_1 f(x_1) + C_1' f'(x_1) + C_1'' f''(x_1) + Bf(b) - \int_a^b \bar{\varphi}(x) f^{(5)}(x)dx\,. \tag{19}$$

On démontre que la fonction $\bar{\varphi}$ est négative sur l'intervalle $[a, b]$ Il est utile de calculer $\int_a^b \bar{\varphi}(x)dx$.

En posant dans la formule (19)

$$f(x) = \frac{(x - x_1)^4 (x - b)}{5!}$$

nous obtenons

$$\int_a^b \bar{\varphi}(x)dx = -\frac{1}{5!}\left\{\frac{(b-a)^6}{6} - \frac{4}{5}(b - a)^5(b - x_1) + \frac{3}{2}(b - x_1)^2(b - a)^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}(b - x_1)^3(b - a)^3 + \frac{1}{2}(b - x_1)^4(b - a)^2\right\} \tag{20}$$

En remplaçant le noeud x_1 par $\bar{\bar{x}}_2$ nous avons la formule

$$\int_a^b f(x)dx = A\ f(a) + C_2\ f(x_2) + C_2' f'(x_2) + C_2'' f''(x_2) - \int_a^b \bar{\bar{\varphi}}(x)\ f^{(5)}(x)dx. \tag{21}$$

où la fonction $\overline{\overline{\varphi}}$ est positive sur l'intervalle (a, b) et nous avons

$$\int_a^b \overline{\overline{\varphi}}(x)dx = \frac{1}{5!}\left\{\frac{(b-a)^6}{6!} + \frac{4}{5}(b-a)^5(a-x_1) + \frac{3}{2}(b-a)^4(a-x_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}(b-x_1)^3 + (a-x_2)^4\frac{(b-a)^2}{2}\right\}$$

En ajoutant les formules (19) ét (21) nous obtenons la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,[Af(a) + Bf(b) + C_1 f(x_1) + C_1' f'(x_1) + C_1'' f''(x_1) +$$
$$+ C_2\, f(x_2) + C_2' f'(x_2) + C_2'' f''(x_2)] - \int_a^b \frac{\overline{\varphi}(x) + \overline{\overline{\varphi}}(x)}{2} f^{(5)}(x)dx \qquad (22)$$

En tenant compte de la propriété (18) on voit que

$$\int_a^b \frac{\overline{\varphi}(x) + \overline{\overline{\varphi}}(x)}{2}\,dx = 0$$

ce qui montre que la formule de quadrature de Newton-Turan (22) a le degré d'exactitude au moins 4.

On démontre que cette formule a le degré d'exactitude 5. parce qu'en remplaçant $f(x)$ par $(x - x_1)^3(x - x_2)^3$ on obtient la formule

$$6!\int_a^b \psi(x)dx = (b-a)^7\left[\frac{11}{60} + \frac{1}{20}u_1^2\right] \neq 0.$$

(Manuscrit reçu le 9 juin 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *La formule de quadrature généralisé de Newton*, Anal. Şt. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, XX, 1974, 151—159.
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
3. P. Turan, *On the Theory of the Mechanical Quadrature*, Acta Sci. Math. Szèged, 12, 1950.

O EXTINDERE A FORMULEI ÎN CUADRATURĂ A LUI NEWTON

(Rezumat)

În această lucrare se construieşte, după metoda folosită în [1] o formulă de cuadratură de tip Newton, în care nodurile interioare sînt multiple. Rezultatele obţinute sînt prezentate în cazul nodurilor interioare triple. Se obţine formula de cuadratură (22) cu gradul de exactitate 5.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

AN EFFICIENT REALIZATION OF AN ALGORITHM TO COMPUTE THE FIRST EFFICIENT POINT OF A LINEAR MULTIOBJECTIVE PROGRAM

I. MARUSCIAC

1. Introduction. Let $A = (a_{ij})$ and $C = (c_{ij})$ be mXn and kXn matrices and $b, x \in R^n$ column vectors. In this paper we use the following convetion for vector inequalities. If $u, v \in R^n$, then

$$u \leqq v (u < v) \text{ iff } \forall j \in \{1,2, \ldots, n\} \Rightarrow u_j \leqq v_j \ (u_j < v_j);$$

$$u \leq v \text{ iff } u \leqq v \text{ and } u \neq v.$$

We denote: $S = \{x \in R^n : Ax = b;\ x \geqq 0\}$.

DEFINITION 1. A point $x^0 \in R^n$ is an efficient point of S (with respect to C) if

(i) $x^0 \in S$;

(ii) there is no $x \in S \ni Cx \geqslant Cx^0$.

Let E be the set of all efficient points, called *efficient set* (with respect to C).

In order to compute E a general algorithm has been given recently by J. P. Evans and R. E. Steuer [1]. This algorithm has three phases. In phase 1 one proceeds to a basic feasible solution (b.f.s.) if one exists or terminates if the problem is inconsistent. Phase 2 of the algorithm proceeds from a b.f.s. to an efficient basis if one exists or detects that $E = \emptyset$. At each interation a linear programming sub-problem is used to test for efficiency of a b.f.s. Once the first efficient basis has been identified, in phase 3 one enumerates the list of efficient b.f.s. by means of another sub-program to test for efficiency of an adjacent b.f.s.

The purpose of this note is to give a new method for realization of phase 2 of the latter algorithm. In this algorithm no sub-programs are needed as in options 1,2,4 and 5, p. 66—67 of [1] to test for efficiency. There is a strong connection between our method and the sequential maximization idea of [1]. The difference consists in the fact that in this method one can always find an efficient extreme point if one exists or terminates with the indication that $E = \emptyset$, without constructing the sequence S_0, $S_1, \ldots, S_k$ of sequential maximizing subsets of S (see [1], p. 64).

Generally the notations and definitions we will use will be the same as in [1].

2. Efficiency criteria. By renumerating variables if necessary and partitioning A and C, we have

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1}Nx_N,\ z = C_BB^{-1}b - (C_BB^{-1}N - C_N)\, x_N,$$

where B and N denotes respectively basic and nonbasic column vectors of A. Denote:

$$D = B^{-1}N,\ R = -(C_BB^{-1}N - C_N);\ d = B^{-1}b,\ r = C_BB^{-1}b$$

and assume that $x_N = (x_1, \ldots, x_{n-m})^T$, $x_B = (x_{n-m+1}, \ldots, x_n)^T$. For the present pupose it is convenient to express our multiobjective program in the following simplex-like tableau

$$
\begin{array}{rc|cccc|c|}
 & & -x_1 & -x_2 & \ldots & -x_{n-m} & 1 \\
\hline
x_{n-m+1} & = & d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1,n-m} & d_1 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
x_n & = & d_{m1} & d_{m2} & \ldots & d_{m,n-m} & d_m \\
\hline
z_1 & = & r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1,n-m} & r_1 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
z_k & = & r_{k1} & r_{k2} & \ldots & r_{k,n-m} & r_k \\
\hline
\end{array} \qquad (1)
$$

We will use the following efficiency criterion which can be derived from Lemmas 2.1, 2.3 and Corollary 2.2., p. 57 of [1].

THEOREM 1. *Let $x^0(0, d)$ $(d \geqq 0)$ be a b.f.s. in S. Let $Q = \{i : x^0_{Bi} = 0\} = \{i : d_i = 0\}$. Then $x^0 \in E$ if and only if*

$$Ru \leq 0,\ D_Q u \leqq 0,\ u \geqq 0 \qquad (2)$$

is inconsistent, where

$$D_Q = (d_{ij}),\ i \in Q,\ j = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Remark 1. If $x^0 = (0, d)$ is a nondegenerate b.f.s., then $Q = \emptyset$ and (2) becomes

$$Ru \leq 0,\ u \geqq 0. \qquad (2')$$

Row-vectors and column-vectors we denote:

$$d^{i\cdot} = (d_{i1}, \ldots, d_{i,n-m}),\ d^{\cdot j} = (d_{1j}, \ldots, d_{mj})^T,$$

$$r^{i\cdot} = (r_{i1}, \ldots, r_{i,n-m}),\ r^{\cdot j} = (r_{1j}, \ldots, r_{kj})^T.$$

LEMMA 1. *If in (1) there exists $h \in \{1, 2, \ldots, m\}$ such that $d_h < 0$ and $d^{h\cdot} \geqq 0$, then $S = \emptyset$ (i.e. the problem is inconsistent).*

Proof. From (1) we have that

$$x_{n-m+h} = -d^{h\cdot} x_N + d_h < 0,\ \forall x_N \geqq 0,$$

i.e. $S = \emptyset$.

LEMMA 2. *Assume that $d \geqq 0$. If in (1) there exists $s \in \{1, \ldots, n-m\}$ such that $r^{\cdot s} < 0$ and $d^{\cdot s} \leqq 0$, then $E = \emptyset$ (each criterion is unbounded).*

Proof. We consider

$$x_s = t > 0,\ x_j = 0,\ j \in \{1, \ldots, n-m\} \setminus \{s\}. \qquad (3)$$

Then

$$\forall i \in \{1,2, \ldots, m\} \Rightarrow x_{n-m+i} = -d_{is}t + d_i \geqq 0, \ \forall t > 0 \tag{4}$$

and

$$z_i(t) = -r_{is}t + r_i \to +\infty, \ t \to +\infty, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

In what follows we will assume that $S \neq \emptyset$ (i.e. the problem is consistent) and therefore that $d \geqq 0$.

LEMMA 3. *If there exists* $s \in \{1, \ldots, n-m\}$ *such that* $r^{\cdot s} \leq 0, d^{\cdot s} \leqq 0$ *and* $\exists i_s \in \{1, 2, \ldots, k\} \ni r^{i_s \cdot} \geqq 0$, *then* $E = \emptyset$ *(criterion* z_{i_s} *is bounded).*

Proof. We consider again $x_N \in R^{n-m}$ as in (3). Then from (4) it follows that $x_j \geqq 0, \ j = n-m+1, \ldots, n, \ \forall t > 0$, and if $r_{is} < 0$

$$z_i(t) = -r_{is}t + r_i \to +\infty, \ t \to +\infty.$$

But from assumption $r^{\cdot s} \leq 0$, so at least one such a coefficient $r_{is} < 0$ exists. Since $r_{i_s s} = 0$, we have

$$\max_{x \in S} z_{i_s}(x) = r_{i_s}.$$

Therefore $E = \emptyset$ and z_{i_s} is bounded.

LEMMA 4. *If there exists* $i \in \{1,2, \ldots, k\} \ni r^{i\cdot} > 0$, *then* $x^0 = (0, d) \in E$.

Proof. If $r^{i\cdot} > 0$, then it is clear that the system

$$Ru \leq 0, \quad u \geqq 0$$

has no solution $u \in R^{n-m}$, and from Theorem 1 it follows that $x^0 \in E$.

Let $i_1, i_2, \ldots, i_h$ $(1 \leqq h \leqq k)$ be distinct numbers of $\{1,2, \ldots, k\}$ such that

$$\begin{aligned}
&r_{i_1 j} \geqq 0, \ j \in J_0 = \{1,2, \ldots, n-m\}, \ J_1 = \{j \in J_0 ; \ r_{i_1 j} = 0\},\\
&r_{i_2 j} \geqq 0, \ j \in J_1, \ J_2 = \{j \in J_1 : r_{i_2 j} = 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{i_h j} \geqq 0, \ j \in J_{h-1}, \ J_h = \{j \in J_{h-1} : r_{i_h j} = 0\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Obviously $J_0 \supseteq J_j \supseteq \ldots \supseteq J_h$.

LEMMA 5. *If* $J_1, J_2, \ldots, J_{h-1}$ *are not empty and* $J_h = \emptyset$, *then* $x^0 = (0,d) \in E$.

Proof. If $x^0 = (0,d) \notin E$, then there is $\bar{x} = (\bar{x}_S, \bar{x}_B) \in S$ such that

$$R\bar{x}_S \leq Rx^0_S = 0. \tag{6}$$

Let $H = \{j \in J_0 : \bar{x}_{Sj} > 0\}$. From (6) it is clear that $H \neq \emptyset$. First we prove that $H \subseteq J_1$. Indeed, if there is $h \in H \setminus J_1$, then from $r_{i_1h} > 0$ it follows

$$r^{i_1\cdot}\bar{x}_S = \sum_{j \in H} r_{i_1j}\bar{x}_{Sj} > 0,$$

which contradicts (6). Therefore $H \subseteq J_1$. Denote by

$$s = \max\,\{l \in \{1,2,\ \ldots,\ h\} : H \subseteq J_s\}.$$

Then we have $1 \leqq s < h$ and $J_{s+1} \neq J_s$.

Since

$$r_{i_{s+1}j} > 0,\ j \in J_s \setminus J_{s+1},$$

$$r^{i_{s+1}\cdot}\bar{x}_B = \sum_{i \in J_s} r_{i_{s+1}j}\bar{x}_{Sj} > 0,$$

which again contradicts (6).

From the proof of Lemma 6 it follows

COROLLARY 1. *If $J_1, J_2,\ \ldots,\ J_{k-1}$ are nonempty then $x^0 = (0, d) \in E$. As a special case of Lemma 5 we have*

COROLLARY 2. *Let $r^{i\cdot} \geqslant 0$ and $J_1 = \{j \in J_0 : r_{ij} = 0\}$. If there is $s \in \{1,2,\ \ldots,\ k\} \setminus \{i\}$ such that $\forall j \in J_1 \Rightarrow r_{sj} > 0$, then $x^0 = (0,d) \in E$.*

LEMMA 6. *If $J_1, J_2, \ldots, J_{h-1}, J_h$ are nonempty and $\exists s \in J_h \ni \forall i \in \{1,2, \ldots,\ k\} \setminus \{i_1,i_2,\ \ldots,\ i_h\} \Rightarrow r_{is} < 0$ and $d^{\cdot s} \leqq 0$, then $E = \emptyset$ (functions z_i, $i \neq i_1,i_2,\ \ldots,\ i_h$ are unbounded on S).*

Proof. It is similar to the proof of Lemma 2.

Denote by

$$S_h = \{y : c_{i_h}y = \max\,\{c_{i_h}x : x \in S_{h-1}\}\},\ h = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ S_0 = S.$$

LEMMA 7. *If $J_1, J_2,\ \ldots,\ J_{h-1}$ are nonempty and criteria z_i, $i \in I = \{1,2,\ \ldots,\ k\} \setminus \{i_1,i_2,\ \ldots,\ i_{h-1}\}$ are unbounded on S_{h-1}, then $E = \emptyset$.*

Proof. From the definition of S_h it follows that $S_h = \emptyset$. Now, if $p_1,\ \ldots,\ p_k$ is a set of positive weights, then the function

$$\sum_{i \in I} p_i z_i(x) \geqq \min_{i \in I}\ z_i(x)$$

is unbounded on S_{h-1}, and from Lemma 4.5, p. 65 of [1], it follows that $E = \emptyset$.

Summarize these results we have

THEOREM 2. *Let A,C,b,S and E be as defined in introduction. Then after a finite number of Gauss-Jordan elimination steps we obtain an efficient extreme point if one exists or we terminate with the indication that $E = \emptyset$.*

3. **Description of the algorithm.** In describing the algorithm which follows from Lemmas 1—7 it will be assumed that the vector x contains any artificial variables which were added to aid formation of an initial basis as in tableau (1). The general outline of the algorithm is as follows.

Step 1. Starting from an initial basis proceed do a b.f.s. if one exists or terminate if the problem is inconsistent (Lemma 1).

Step 2. Set $i := i_1$, $J_i := J_0 = \{1,2, \ldots, n-m\}$.

Step 3. Maximize $\bar{z}_i(x) = -\sum_{i \in J_i} r_{ij}x_j + r_i$ on S. If $\max \bar{z}_i < +\infty$ then go to Step 4, else go to Step 5.

Step 4. Set $i := i_{i+1}$, $J_i := J_{i+1} = \{i \in J_i : r_{ij} = 0\}$. If $J_{i+1} = \emptyset$ or $i + 1 \geqq k$ then terminate, $x^0 = (0,d) \in E$ (Lemmas 5,7 and Corollary 1), else go to Step 3.

Step 5. Verify the conditions of Lemmas 2,3 and 6. If the conditions are satisfied then terminate $E = \emptyset$, (at least one criterion z_i unbounded) else set $i := i_{i+1}$, $J_i := J_i$ and go to Step 3.

Remark 2. To maximize $\bar{z}_i = \sum_{j \in J_i} r_{ij}x_i + r_i$ it means to „positivize" the coefficients r_{ij}, $j \in J_i$ in Tableau (1) by a number of Gauss-Jordan elimination steps.

Remark 3. Generally we obtain another efficient point if we start instead of z_{i_1} with another criterion z_i.

Example. Find an efficient point of the criterion functions

$$z_1 = x_1 - x_2, \; z_2 = -x_1 + 2x_2$$

subject to

$$-x_1 + x_2 \leqq 1, \; x_1 + x_2 \leqq 2$$

$$x_1 - x_2 \leqq 1, \; x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0.$$

Starting from the simplex tableau

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	-1	1	1
$x_4 =$	1	1	2
$x_5 =$	1	-1	1
$z_1 =$	-1	1	0
$z_2 =$	1	-2	0

with b.f.s. $x^0 = (0,0,1,2,1)$, we maximize z_1. After a Gauss-Jordan step we obtain

$$\begin{array}{r|cc|c|}
 & -x_5 & -x_2 & 1 \\ \hline
x_3 = & 1 & 0 & 2 \\
x_4 = & -1 & 2 & 1 \\
x_1 = & 1 & -1 & 1 \\ \hline
z_1 = & 1 & 0 & 1 \\
z_2 = & -1 & -1 & -1 \\ \hline
\end{array}$$

b f s. $x^1 = (1,0,2,1,0) \notin E$ because $r_{22} = -1 < 0$. So we maximize $\tilde{z}_2 = x_2 - 1$. After a new Gauss-Jordan step we have

$$\begin{array}{r|cc|c|}
 & -x_5 & -x_4 & 1 \\ \hline
x_3 = & 1 & 0 & 2 \\
x_2 = & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\
x_1 = & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline
z_1 = & 1 & 0 & 1 \\
z_2 = & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline
\end{array}$$

As Corollary 1 shows b.f.s. $x^2 = (3/2,\ 1/2,\ 2;0,0) \in E$.

If we maximize z_2, we obtain

$$\begin{array}{r|cc|c|}
 & -x_3 & -x_4 & 1 \\ \hline
x_5 = & 1 & 0 & 2 \\
x_2 = & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\
x_1 = & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline
z_1 = & -1 & 0 & -1 \\
z_2 = & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ \hline
\end{array}$$

and from Lemma 5 it follows that b.f.s. $x^3 = (1/2,3/2,0,0,2) \in E$. It is clear tha in tis case there is no other efficient extreme point. So $E = [x^2, x^3]$

(Received September 10, 1975)

REFERENCES

1. J. P. Evans and R. E. Steuer, *A revised simplex method for linear multipleobjective programs*, Mathematical Programming, 5 (1973), 54–72.
2. C. L. Mangasarian, *Nonlinear Prngramming* (McGraw-Hill, New-York, 1969).
3. I. Maruşciac, M. Rădulescu, *Un problème général de la programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mech., f. 2 (1970), 55–65.
4. I. Maruşciac, *Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniare*, Ed. Dacia, 1973.
5. S. I. Zuhovitzkii, A. I. Avdeeva, *Lineinoe i vypukloe programmirovanie*, Izd. Nauka, Moskva, 1964.

O REALIZARE EFICIENTĂ A UNUI ALGORITM PENTRU CALCULUL PRIMULUI PUNCT EFICIENT ÎNTR-O PROGRAMARE LINIARĂ CU MAI MULTE FUNCŢII DE SCOP

(Rezumat)

Se dă o nouă metodă pentru determinarea primului punct eficient într-o problemă de programare liniară cu mai multe funcţii de scop. În algoritmul prezentat se evită complet folosirea unor subprograme pentru testarea eficienţei la fiecare iteraţie, cum se întîmplă în alte metode cunoscute. Algoritmul permite totdeauna determinarea unui prim punct eficient extremal (dacă un asemenea punct există), sau se opreşte cu indicaţia că mulţimea eficientă $E = \emptyset$. Pentru determinarea altor puncte eficiente extremale adiacente se poate folosi, de exemplu, algoritmul lui J. P. Evans şi R. E. Steuer [1].

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

RÉPARTITIONS CUMULATIVES

ELENA OANCEA

L'article présente le problème pratique de déterminer la répartition d'une caractéristique X étant donné un échantillon stratifié. C'est à dire, soit

$$(x_i^{(k)})_{i=1,\dots,n_k}, \qquad k = 1, \dots, r,$$

les valeurs d'échantillon correspondant à la classe k, pour la caractéristique X. On cherche la répartition théorique de la variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est la réunion de toutes les valeurs d'échantillon.

I. **Le cas discret.** Soit X et Y variables aléatories discrètes, définies sur le même espace de probabilité (Ω, K, P), avec la répartition respectivement :

$$\begin{aligned} &X\binom{x_i}{p_i}_{i=1,\dots,n} \\ &Y\binom{y_j}{q_j}_{j=1,\dots,m} \end{aligned} \tag{1}$$

La variable aléatoire cumulative Z des variables X et Y est définie sur le même espace de probabilité (Ω, K, P) avec l'ensemble des valeurs

$$\{z_i, \ i = 1, \dots, h\} = \{x_i, \ i = 1, n\} \cup \{y_j, \ j = 1, \dots, m\}.$$

où $h \leq n + m$.

Pour déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire cumulative, soient les répartitions données par (1).

1. On considère le cas où $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $y_i \in [c, d]$, $j = 1, \dots, m$, $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$, et $x_i < y_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Alors la répartition de Z sera

$$\binom{z_k}{p'_k}_{k=1,\dots,n+m},$$

où l'ensemble des valeurs z_k, $k = 1, \dots, n + m$ est en fait la réunion des valeurs ordonnées des x_i, $i = 1, \dots, n$, y_j, $j = 1, \dots, m$.

Pour les probabilités p'_k, $k = 1, \dots, n + m$ on a

PROPOSITION 1. *Les nombres donnés par*

$$p'_k = \begin{cases} \dfrac{p_k n_1}{n_1 + m_1}, & k = 1, \dots, n, \\[2ex] \dfrac{q_{k-n} m_1}{n_1 + m_1}, & k = n + 1, \dots, m \end{cases}$$

où n_1, m_1 est respectivement le dénominateur commun des p_i, q_j, constituent le système de probabilités de la répartition de Z.

On voit facilement que $p'_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, n + m$, et $\sum_1^{n+m} p'_k = 1$.

PROPOSITION 2. *La fonction de répartition de Z sera:*

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1 \\ F_X(x) \dfrac{n_1}{n_1 + m_1}, & x_1 < x \leqslant y_1 \\ F_X(x) \dfrac{n_1}{n_1 + m_1} + F_Y(x) \dfrac{m_1}{n_1 + m_1}, & y_1 < x \leqslant y_m \\ 1, & x < y_m, \end{cases}$$

où F_X, F_Y sont les fonctions de répartition de X et Y.

Evidemment on peut construire la fonction de répartition dans les mêmes conditions, pour le cas de plusieurs variables aléatoires discrètes.

2. On suppose que les variables aléatoires discrètes X, Y ont les répartitions données par (1), où $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, $y_j \in [c, d]$, et $[a, b)] \cap [c, d] \neq \emptyset$. Alors la répartition de Z sera

$$\begin{pmatrix} z_i \\ p_i' \end{pmatrix}_{i=1, \ldots, h}, \quad h < n + m,$$

où: $z_i = x_j$, ou $z_i = y_j$, ou $z_i = x_j = y_k$, les valeurs z_i étant ascendantes.

PROPOSITION 3. *Les probabilités p_i' de la répartition de Z seront:*

$$p_i' = \begin{cases} \dfrac{p_j n_1}{n_1 + m_1}, & \text{si } z_i = x_j \\ \dfrac{q_j m_1}{n_1 + m_1}, & \text{si } z_i = y_j \\ \dfrac{p_j n_1 + q_k m_1}{n_1 + m_1}, & \text{si } z_i = x_j = y_k. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $p_i' \geqslant 0$, $i = 1, \ldots h$ et $\sum_1^h p_i' = 1$. La fonction de répartition de Z dans ce cas s'écrit analoguement comme dans le cas précédent, étant connues les valeurs z_i, $i = 1, \ldots h$, ascendantes.

3. On considère le cas où les valeurs des variables aléatories discrètes X, Y données par (1), satisfont les conditions

$$x_i \in [a, b], \; y_j \in [a, b] \quad i, j = 1, \ldots, n, (n = m)$$

$$x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

et X et Y sont indépendantes[1].

---

[1] Le cas où X, Y ont les valeurs dans $[a, b]$, mais $x_i \neq y_j$, alors la répartition de Z s'obtient comme au point 1, respectivement 2, si quelques-uns de $x_i = y_j$.

PROPOSITION 4. *La fonction de répartition de la variable aléatoire Z sera*

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1 = y_1 \\ F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x)F_Y(x), & x_k < x \leqslant x_{k+1} \\ & k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & x > x_n = y_n. \end{cases} \tag{3}$$

La fonction de répartition F_Z peut être exprimée aussi avec les probabilités p_i, q_i, $i = 1, \ldots n$, sous la forme

$$F_Z(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \sum_{i=1}^{k} q_i$$

$$x_k < x \leqslant x_{k+1}, \ k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Démonstration. On voit immédiatement que F_Z est une fonction de répartition, parce que par construction il résulte qu'elle est nondécroissante, continue à gauche et

$$\lim_{x\to\infty} F_Z(x) = 1, \ \lim_{x\to-\infty} F_Z(x) = 0.$$

Pour vérifier que F_Z est nondécroissante, aoit $x' < x''$, $x', x'' \in R$ et $x' \in (x_k, x_{k+1}]$, $x'' \in (x_j, x_{j+1}]$, $a < j$, $k, j = 1, \ldots, n$. Alors de (4) il résulte

$$F_Z(x'') - F_Z(x') = \sum_{k+1}^{j} p_i \left(1 - \sum_{1}^{j} q_i\right) + \sum_{k+1}^{j} q_i \left(1 - \sum_{1}^{j} p_i\right) \cdot$$

On voit que quelconque sera $j, k = 1, \ldots, n$

$$F_Z(x'') - F_Z(x') \geqslant 0. \tag{5}$$

Si $x', x'' \in (x_k, x_{k+1}]$, alors $F_Z(x'') - F_Z(x') = 0$.

Pour $x', x'' \notin [a, b]$, l'inégalité (5) reste valable. Donc F_Z est nondécroissante. Par construction F_Z est continue à gauche pour $x \in R$.

Les probabilités $p_k' = P(Z = x_k)$, $k = 1, \ldots, n$ peuvent être calculées avec la fonction de répartition F_Z:

$$p_k' = P(Z = x_k) = F_Z(x_{k+1}) - F_Z(x_k) =$$

$$p_k(1 - q_1 \ldots - q_k) + q_k(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1}),$$

$k = 1, \ldots, n$.

On voit que $p_k' \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$ et

$$\sum_{k=1}^{n} p_k' = 1 - q_1 \sum_{1}^{n} p_i - q_2 \sum_{2}^{n} p_i - \ldots - q_n p_n +$$

$$+ q_1 + q_2 \sum_{2}^{n} p_i + \ldots + q_n p_n = 1.$$

Par conséquent p'_k, $k = 1, \ldots, n$ constituent le système de probabilités de Z, c'est à dire la répartition de Z sera:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ p'_k \end{pmatrix} k = 1, \ldots, n.$$

Remarques. 1 La répartition de Z ainsi obtenue correspond à la maniere de construction de la variable aléatoire cumulative du point 2, où $x_i = = y_j$. En fait, dans ce cas, on avait

$$p'_i = \frac{n_1 p_i + m_1 q_i}{n_1 + m_1}$$

et on voit que les quantités associées à p_i, respectivement à q_i:

$$\frac{n_1}{n_1 + m_1}, \quad \frac{m_1}{n_1 + m_1}$$

sont dans cette formulation respectivement:

$$1 - (q_1 + \ldots + q_i), \quad 1 - (p_1 + \ldots + p_{i-1}).$$

2. Analoguement on peut construire la répartition de la variable cumulative Z dans le cas de plusieurs variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ indépendantes.

3. Le procédé peut être utilisé aussi quand l'ensemble des valeurs des variables X_i, $i = 1, \ldots, k$, $k \geqslant 2$, est infini, mais dénombrable,

II. **Le cas continu.** 1. Soient X, Y variables aléatoires continues avec la densité de probabilité, pour X:

$$f_1(x), \; x \in [a, b], \; 0, \; x \notin [a, b],$$

et pour Y:

$$f_2(x), \; x \in [c, d], \; 0, \; x \notin [c, d].$$

On suppose que $[a, b] \cup [c, d] = \emptyset$.

THÉORÈME 1. *La variable aléatoire cumulative Z aura la densité de probabilité f donnée par:*

$$f(x) = \begin{cases} k_1 f_1(x), & x \in [a, b] \\ k_2 f_2(x), & x \in [c, d] \\ 0 \quad , & x \notin [a, b] \cup [c, d], \end{cases} \qquad (6)$$

où

$$k_1 = h_1/L, \; k_2 = h_2/L, \; L = h_1 + h_2, \; h_1 = b - a, \; h_2 = d - c.$$

Démonstration. On voit que f donnée par (6) satisfait les conditions:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in R, \text{ et } \int_R f(x)dx = 1,$$

parce que

$$\int_a^b f_1(x)dx = 1, \qquad \int_c^d f_2(x)dx = 1,$$

donc f est densité de probabilité.

Un cas particulier est le suivant: Soit X avec la densité:

$$f_1(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad 0, \quad x \notin [\alpha, \beta], \quad [a, b] \subset [\alpha, \beta],$$

et Y avec la densité

$$f_2(x), \quad x \in [\gamma, \delta], \quad 0, \quad x \notin [\gamma, \delta] \quad \text{et} \quad [c, d] \subset [\gamma, \delta].$$

La variable aléatoire cumulative aura la densité de probabilité donnée par:

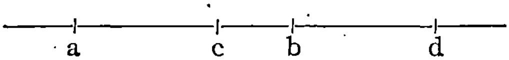
$$f(x) = \begin{cases} k_1 f_1(x), & x \in [a, b] \\ k_2 f_2(x), & x \in [c, d] \\ 0 \quad , & x \notin [a, b] \cup [c, d], \end{cases}$$

où $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$, et

$$k_1 = h_1/v_1 L, \quad k_2 = h_2/v_2 L, \quad h_1 = b - a, \quad h_2 = d - c, \quad L = h_1 + h_2,$$

$$v_1 = \int_a^b f_1(x)\, dx, \qquad v_2 = \int_c^d f_2(x)\, dx.$$

2. On considère les variables aléatoires X et Y données au point précédent, et on suppose que $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$. Pour fixer les idées, soient les points a, b, c, d qui déterminent les intervalles $[a, b]$, $[c, d]$ situés comme il suit:



Alors on a:

THÉORÈME 2. *La densité de probabilité f de la variable aléatoire cumulative Z sera*:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 f_1(x) & , \quad x \in [a, c] \\ k_{12}[f_1(x) + f_2(x)], & \quad x \in [c, b] \\ k_2 f_2(x) & , \quad x \in [b, d] \\ 0 & , \quad x \notin [a, d], \end{cases}$$

où $k_1 = h_1/v_1 L$, $k_{12} = h_{12}/v_{12} L$, $k_2 = h_2/v_2 L$, $h_1 = c - a$, $h_{12} = b - c$,

$$h_2 = d - b, \; L = h_1 + h_2 + h_{12},$$

$$v_1 = \int_a^c f_1(x)\, dx, \qquad v_{12} = \int_c^b [f_1(x) + f_2(x)]dx, \qquad v_2 = \int_b^d f_2(x)\, dx$$

3. Le cas où X a la densité

$$f_1(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad 0, \quad x \notin [\alpha, \beta]$$

et Y a la densité

$$f_2(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad 0, \quad x \notin [\alpha, \beta]$$

et soit l'intervalle $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$, alors:

THÉORÈME 3. *La variable aléatoire cumulative Z aura la densité de probabilité*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{v_1 + v_2} [f_1(x) + f_2(x)], & x \in [a, b] \\ 0 \quad , & x \notin [a, b], \end{cases}$$

où

$$v_1 = \int_a^b f_1(x)\, dx; \qquad v_2 = \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Dans le cas $[a, b] = [\alpha, \beta]$, la densité de probabilité de Z sera:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2[f_1(x) + f_2(x)], & x \in [\alpha, \beta] \\ 0 \quad , & x \notin [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

4. Soient X et Y variables aléatoires indépendantes dont les densités de probabilité sont f_1, respectivement f_2. Alors:

THÉORÈME 4. *La variable aléatoire cumulative Z aura la densité de probabilité:*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) - [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)\ F_1(x)], \quad x \in R, \tag{7}$$

où F_1, F_2 sont les fonctions de répartition correspondantes à X, respectivement à Y.

Démonstration. On voit que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in R$, parce que

$$f_1(x) \geqslant 0 \quad f_2(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq F_1(x) \leq 1, \quad 0 \leq F_2(x) \leq 1, \quad x \in R.$$

Alors quelque soit $x \in R$, on a:

$$f_1(x)F_2(x) + f_2(x)\ F_1(x) \leq f_1(x) + f_2(x),$$

c'est à dire $f(x) \geqslant 0$.

De l'intégrale

$$\int_R f(x)dx = \int_R [f_1(x) + f_2(x) - [f_1(x)\, F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]]\, dx$$

il résulte :

$$\int_R f(x)\,dx = 2 - \int_R d[F_1(x)\,F_2(x)] = 1.$$

Donc f est densité de probabilité.

Remarques. 1. La densité donnée par (7 peut être écrite aussi sous la forme

$$f(x) = f_1(x)[1 - F_2(x)] + f_2(x)\;[1 - F_1(x)].$$

2. Pour X_1, X_2, X_3 variables aléatoires indépendantes, avec les densités respectivement f_1, f_2, f_3 et les fonctions de répartition F_1, F_2, F_3, la variable aléatoire cumulative Z aura la densité :

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - [f_1(x)\,F_2(x) + f_1(x)\,F_3(x) + \\ &+ f_2(x)\,F_1(x) + f_2(x)\,F_3(x) + f_3(x)\,F_1(x) + f_3(x)\,F_2(x)] + \\ &+ f_1(x)\,F_2(x)\,F_3(x) + f_2(x)\,F_1(x)\,F_3(x) + f_3(x)\,F_1(x)\,F_2(x) \end{aligned}$$

$$x \in R.$$

Analoguement ou peut construire la densité dans le cas d'un nombre k de variables aléatoires indépendantes ($k > 3$).

(Manuscrit reçu le 23 juillet 1975)

REPARTIŢII CUMULATIVE

(Rezumat)

Se defineşte variabila aleatoare cumulativă prin reuniunea mulţimilor valorilor unor variabile aleatoare date. Utilizînd, în cazul discret, probabilităţile corespunzătoare variabilelor cumulate, iar în cazul continuu, densităţile de probabilitate, se construieşte repartiţia variabilei cumulative, respectiv funcţia de repartiţie, pentru diferite situaţii posibile.

Problema repartiţiilor cumulative prezintă mare interes în practica statisticii.

ÎN MEMORIAM

ACADEMICIAN TIBERIU POPOVICIU

În ziua de 29 octombrie 1975 s-a stins din viață academicianul TIBERIU POPOVICIU, ilustru reprezentant al școlii matematice românești, profesor la Facultatea de Matematică a Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca.

Născut la Arad la 16 februarie 1906, își manifestă talentul său excepțional încă din fragedă tinerețe, devenind, încă de pe băncile liceului, unul dintre cei mai activi colaboratori ai „Gazetei Matematice", editînd el însuși revista „Jurnal matematic" care a ajuns să fie cunoscută peste hotarele țării.

După obținerea licenței în matematici la București, între anii 1927—1930 este elev al Școlii normale superioare din Paris. Tot la Paris, în anul 1933, obține titlul de doctor în matematici cu teza *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* în care introduce noțiunea de funcție convexă de ordin superior, care s-a dovedit fundamentală în teoria aproximării funcțiilor.

Intors în țară, își pune întreaga capacitate și întreg talentul în slujba dezvoltării învățămîntului matematic românesc, urcînd toate treptele universitare la universitățile din Cluj, București și Iași. În anul 1946 se stabilește definitiv la Cluj, unde a creat o prestigioasă școală de analiză numerică binecunoscută și apreciată în întreaga lume matematică. În același timp și-a adus o contribuție deosebită la organizarea învățămîntului matematic, în calitate de decan al Facultății de matematică și fizică din Cluj între anii 1950—1953 și șef al Catedrei de analiză pînă în ultimii ani ai vieții.

Ca o recunoaștere a meritelor sale științifice deosebite, în 1948 este ales membru corespondent al Academiei Române, iar în anul 1963 — membru titular. In această calitate a organizat și condus Institutul de Calcul al Filialei Academiei din Cluj-Napoca, la baza activității căruia a stat ideea de integrare a cercetării matematice cu producția, idee pentru care academicianul Tiberiu Popoviciu a militat cu deosebită energie și competență în timpul întregii sale vieți.

Ca savant, a contribuit la creșterea prestigiului matematicii românești în lume, prin participarea sa activă la viața matematică internațională, precum și prin organizarea la Cluj-Napoca a unor manifestări științifice de recunoscut prestigiu.

Prin rezultatele sale remarcabile, concretizate în peste 300 de studii și monografii, s-a impus ca un specialist de frunte pe plan mondial în domenii ca analiza matematică, analiza numerică, algebră, teoria numerelor și ecuații funcționale.

Ctitor al școlii românești de analiză numerică, aduce contribuții importante în teoria calculului numeric. Astfel, fundamentează calculul cu diferențe divizate ca un calcul prediferențial, stabilește o formulă generală de medie, care permite precizarea structurii restului în formulele de aproximare liniară ale analizei, inițiază studiul conservării diferitelor proprietăți de alură prin anumiți operatori care intervin în teoria celei mai bune aproximații.

Profesorul și savantul Tiberiu Popoviciu și-a cîștigat mari merite în popularizarea științei matematice, în calitatea sa de președinte al Filialei din Cluj a Societății de Științe Matematice.

Pentru meritele sale deosebite a fost distins cu înaltul titlu de „Om de știință emerit", precum și cu ordine și medalii ale R. S. România.

Prin dispariția academicianului Tiberiu Popoviciu știința și învățămîntul din țara noastră pierd pe unul dintre cei mai de seamă reprezentanți.

În cel de al XXI-lea an de apariţie (1976) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde fasciculelele:

matematică
fizică
chimie
geologie—geografie
biologie
filozofie
ştiinţe economice
ştiinţe juridice
istorie
filologie

На XXI году издания (1976) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими выпусками:

математика
физика
химия
геология—география
биология
философия
экономические науки
юридические науки
история
филология

Dans leur XXI-e année de publication (1976) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les fascicules suivants:

mathématiques
physique
chimie
géologie—géographie
biologie
philosophie
sciences économiques
sciences juridiques
histoire
philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă.

Lei 10