STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

1975

CLUJ-NAPOCA

ANUL XX 1975

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI
MATHEMATICA

Redacţia: CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

LES ANNEAUX DE TYPE (m, n) (I)

I. PURDEA

Les groupes m-aires (ou m-groupes) pour $m > 2$ ont été introduits par Dörnte [1] comme une généralisation des groupes (bigroupes). Plus tard on a publié plusieurs travaux sur les m-groupes. Une partie de ces travaux ont été cités dans [2] et [5]. Les notions et les résultats de la théorie des m-groupes utilisés dans ce travail se trouvent dans [1], [2] et [5]. Nous rappelons quelques unes de ces notions.

DÉFINITION. Soit $m \geqslant 2$ un nombre entier. On appelle m-semigroupe une algèbre universelle avec une seule opération m-aire $+ : G^m \to G$, l'opération „+" étant associative; donc, pour $x_1, \ldots, x_{2m-1} \in G$ quelconque et $i = 1, \ldots, m$ on a[1] $((x_1, \ldots, x_m)_+, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1})_+ =$
$= (x_1, \ldots, x_{i-1}, (x_i, \ldots, x_{i+m-1})_+, x_{i+m}, \ldots, x_{2m-1})_+$

Le m-semigroupe $(G, +)$ est un m-groupe si pour $k = 2, \ldots, m-1$ et quels que soient $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m$, l'application $G \to G$, $x \mapsto (a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_m)_+$ est bijective. Le m-groupe $(G, +)$ est commutatif ou abélien si quels que soient $x_1, \ldots, x_m \in G$ et la permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$ nous avons

$$(x_1, \ldots, x_m)_+ = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})_+.$$

Soit $(G, +)$ un m-groupe, $m \geqslant 3$ et $a \in G$. La solution de l'équation:

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{(m-1)k}, x)_+ = a$$

s'appelle transversale d'ordre k de a et se note $\overset{k}{\overline{a}}$. Pour $\overset{1}{\overline{a}}$ nous écrivons simplement $\bar{a}$.

Si dans le m-groupe commutatif $(G, +)$ il existe un élément $e \in G$ tel que

$$(x, e, \ldots, e)_+ = x$$

pour $\forall x \in G$ alors „e" s'appelle élément neutre. Un m-groupe peut avoir plusieurs éléments neutres ou peut n'en avoir aucun.

Dans ce qui suit nous donnerons une généralisation de la notion d'anneau. Nous supposerons que $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ sont des nombres entiers.

DÉFINITION. Une algèbre universelle $(R, +, \circ)$, „+" étant une opération m-aire appelée addition, „o" une opération n-aire appelée multiplication, est un anneau de type (m, n) ou un (m, n)-anneau si:

a) $(R, +)$ est un m-groupe abélien
b) $(R, \circ)$ est un n-semigroupe

[1] Soit $(x_1, \ldots, x_m) \in G^m$. Nous noterons $+(x_1, \ldots, x_m)$ par $(x_1, \ldots, x_m)_+$.

c) l'opération „o" est distributive par rapport à „+" c'est-à-dire pour $i = 1, \dots, n$ et $x_1, \dots, x_{i-1}, \overset{1}{x_i}, \dots, \overset{m}{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n \in R$ on a :

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, (\overset{1}{x_i}, \dots, \overset{m}{x_i})_+, x_{i+1}, \dots, x_n)_0 =$$

$$= ((x_1, \dots, x_{i-1}, \overset{1}{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n)_0, \dots, (x_1, \dots, x_{i-1}, \overset{m}{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n)_0)_+.$$

Un élément $e \in R$ s'appelle élément zéro du (m, n)-anneau si e est un élément neutre de $(R, +)$.

L'anneau $(R, +, \circ)$ de type (m, n) s'appelle corps de type (m, n) ou (m, n)-corps si $(R-0, \circ)$ est un n-groupe, 0 étant l'ensemble des éléments zéros.

Les anneaux de type (2, 3) ont été étudiés par W. G. L i s t e r [3].

Exemples. 1. Si $(R, +, \cdot)$ est un anneau (un (2,2)-anneau) alors R est un (m, n)-anneau par rapport aux opérations „+" et „o" définies comme il suit :

$$(x_1, \dots, x_m)_+ = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

$$(x_1, \dots, x_n)_\circ = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$$

2. Soit $R = \{2k + 1 | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $m > 2$ un nombre impair et $n \geqslant 2$ un nombre entier. Soit

$$(x_1, \dots, x_m)_+ = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

$$(x_1, \dots, x_n)_\circ = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$$

$(R, +, \circ)$ est un (m, n)-anneau sans élément zéro.

3. Dans l'ensemble $R = \{a, b\}$ définissons une opération ternaire „+"

$$(a, a, a)_+ = b, \qquad (a, b, b)_+ = b$$

$$(a, a, b)_+ = a, \qquad (b, b, b)_+ = a$$

et une binaire „ · "

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	a

$(R, +, \cdot)$ est un (3,2)-corps sans éléments zéro.

THÉORÈME 1. *Soit* $(\mathrm{R}, +, \circ)$ *un* (m, n)*-anneau et* $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n \in \mathrm{R}$.

a) *Si* $\mathrm{m} \geqslant 3$ *alors pour tout* $\mathrm{k} > 0$ *entier et* $\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$,

$$\overset{\mathrm{k}}{\overline{(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)}} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_{i-1}, \overset{\mathrm{k}}{\overline{\mathrm{x}_i}}, \mathrm{x}_{i+1}, \dots, \mathrm{x}_n)_\circ \tag{1}$$

b) *Si* $\mathrm{m} = 3$,

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)_\circ = \begin{cases} (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)_\circ & \textit{pour } \mathrm{n} \textit{ pair} \\ (\bar{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)_\circ & \textit{pour } \mathrm{n} \textit{ impair} \end{cases} \tag{2}$$

c) *Si* 0 *est un élément zéro et* $1 \le i \le n$ *alors* $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ$ *est un élément zéro.*

Démonstration. De la définition de la transversale d'ordre k il résulte

$$\Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)_\circ, \ldots, (x_1, \ldots, x_n)_\circ}_{(m-1)k}, \overline{(x_1, \ldots, x_n)_\circ}^{\,k}\Big)_+ = (x_1, \ldots, x_n)_\circ.$$

La distributivité de l'opération „o" par rapport de „+" et la définition de la transversale d'ordre k, impliquent

$$\Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)_\circ, \ldots, (x_1, \ldots, x_n)_\circ}_{(m-1)k}, \Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, \overset{k}{\bar{x}}\, x_{i+1}, \ldots, x_n\Big)_\circ\Big)_+ =$$

$$= (x_1, \ldots, x_{i-1}, \Big(\underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{(m-1)k}, \overset{k}{\bar{x}_i}\Big)_+, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ = (x_1, \ldots, x_n)_\circ$$

Donc

$$\Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)_\circ, \ldots, (x_1, \ldots, x_n)_\circ}_{(m-1)k}, \overline{(x_1, \ldots, x_n)_\circ}^{\,k}\Big)_+ =$$

$$= \Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)_\circ, \ldots, (x_1, \ldots, x_n)_\circ}_{(m-1)k}, (x_1, \ldots, x_{i-1}, \overset{k}{\bar{x}_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ\Big)_+$$

$(R, +)$ étant un m-groupe, il en résulte (1).

b) On sait [1] que si $m = 3$ alors pour $\forall\, x \in R$ on a $\bar{\bar{x}} = x$. Par conséquent, de (1) résulte (2).

c) On sait [5] qu'un élément $e \in R$ est neutre pour $(R, +)$ si et seulement si il est idempotent, c'est-à-dire $(e, \ldots, e)_+ = e$.

Comme l'opération „o" est distributive par rapport à „+" on a: $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ = (x_1, \ldots, x_{i-1}, (0, \ldots, 0)_+, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ = ((x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ, \ldots, (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ)_+$
Donc $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ$ est idempotent et il suit qu'il est neutre pour $(R, +)$

Remarque. En général, l'élément zéro $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)_\circ$ est différent de 0.

DÉFINITION. Soit $(R, +, \circ)$ un (m, n)-anneau. Un sousensemble $R' \subseteq R$ est un (m, n)-sousanneau de R si les opérations „+" et „o" de R induisent dans R' une structure de (m, n)-anneau.

On vérifie aisément que l'ensemble $S(R, +, \circ)$ des (m, n)-sousanneaux du (m, n)-anneau $(R, +, \circ)$ est un système de fermeture algébrique. Par conséquent $(S(R, +,), \subseteq)$ est un treillis algébrique.

De la même manière on démontre:

THÉORÈME 2. *Soit* $(R_1, +, \circ)$, $(R_2, +, \circ)$ *deux algèbres universelles avec une opération m-aire „+" et une n-aire „o" et* $f : R_1 \to R_2$ *un homomorphisme.*

1) *Si* $(R_1, +, \circ)$ *est un* (m, n)-*anneau alors la sousalgèbre* $f(R_1)$ *de l'algèbre* $(R_2, +, \circ)$ *est un* (m, n)-*anneau.*

2) *Si* $(R_1, +, \circ)$ *et* $(R_2, +, \circ)$ *sont des* (m, n)-*anneaux et* R_2' *est un* (m, n)-*sousanneau de* $(R_2, +, \circ)$ *alors* $f^{-1}(R_2')$ *est un* (m, n)-*sousanneau de* $(R_1, +, \circ)$.

La catégorie des (m, n)-anneaux sera la catégorie dont les objets sont les (m, n)-anneaux, les morphismes les homomorphismes de (m, n)-anneaux et le produit des morphismes est la composition des homomorphismes.

THÉORÈME 3. *La catégorie des* (m, n)-*anneaux a des produits.*

Démonstration. Soit $(R_i, +, \circ)$ $(i \in I)$ une famille de (m, n)-anneaux et $R = \prod_{i \in I} R_i$. Définissons sur l'ensemble R les opérations „$+$" et „$\circ$" de la manière suivante:

si $(f_1, \ldots, f_m) \in R^m$, $(g_1, \ldots, g_n) \in R^n$ alors

$$(f_1, \ldots, f_m)_+(i) = (f_1(i), \ldots, f_m(i))_+, \ \forall i \in I \tag{3}$$

$$(g_1, \ldots, g_n)_\circ(i) = (g_1(i), \ldots, g_n(i))_\circ, \ \forall i \in I \tag{4}$$

On voit aisément que $(R, +, \circ)$ est un (m, n)-anneau.

Mentionnons que, si $f_1, \ldots, f_{m-1}, f \in R$ alors la solution de l'equation

$$(f_1, \ldots, f_{m-1}, \xi)_+ = f$$

est la fonction

$$\xi : I \to \bigcup_{i \in I} R_i, \ \xi(i) = x_i$$

où x_i est la solution de l'équation

$$(f_1(i), \ldots, f_{m-1}(i), x_i)_+ = f(i).$$

On démontre (comme dans la catégorie des anneaux) que $(R, +, \circ)$ est le produit dans la catégorie des (m, n)-anneaux de la famille des (m, n)-anneaux $(R_i, +, \circ)$, $(i \in I)$.

Remarque. Si I est un ensemble et $(R, +, \circ)$ un (m, n)-anneau alors de $R^I = \Pi\{R_i | R_i = R, \ i \in R\}$
il résulte que R^I est un (m, n)-anneau par rapport aux opérations définies par (3) et (4).

THÉORÈME 4. *Soit* $(R_i, +, \circ)$ $(i \in I)$ *une famille de* (m, n)-*anneaux et* $(R, +, \circ)$ *le* (m, n)-*anneau produit de la famille considérée. Si* $j \in I$ *alors* $(R, +, \circ)$ *aura un sousanneau isomorphe avec* R_j *si et seulement si il y a une famille d'homomorphismes* $f_i : R_j \to R_i$, $i \in I$, $i \neq j$.

Démonstration. L'application

$$f: R_j \to R, \ f(x) = f_x : I \to \bigcup_{i \in I} R_i, \ f_x(j) = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ f_i(x) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

est un homomorphisme injectif.

Inversement, si $f: R_j \to R$ est un homorphisme injectif et $p_i: R \to R_i$ est la projection canonique, alors $p_i o f: R_j \to R_i$ $(i \in I)$ est une famille d'homomorphismes.

Remarque. Le théorème est aussi valable pour les algèbres universelles.

THÉORÈME 5. *Soit* $(R_i, +, o)$ $(i \in I)$ *une famille de* (m, n)*-anneaux. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

a) *Pour* $\forall i \in I$ *le* (m, n)*-anneau* $(R_i, +, o)$ *a un élément zéro idempotent par rapport à l'opération „o".*

b). *Le (m,n)-anneau* $(\prod_{i\in I} R_i, +, \circ)$ *a un élément zéro idempotent par rapport à l'opération „o".*

c) *Le (m,n)-anneau* $(\prod_{i\in I} R_i, +, \circ)$ *a pour* $\forall i \in I$ *un (m, n)- sousanneau* $\bar{R}_i$ *isomorphe avec* $(R_i, +, \circ)$ *et* $\bigcap_{i\in I} \bar{R}_i$ *a un seul élément.*

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b). Si $O_i \in R_i$, $i \in I$ est un élément zéro idempotent par rapport à „o" de $(R_i, +, \circ)$ alora $(O_i)_{i\in I}$ est un élément zero idempotent par rapport à „o" dans $(\prod_{i\in I} R_i, +, \circ)$.

b) $\Rightarrow$ *c)*. Si $(0_i)_{i\in I}$ est un élément zéro idempotent par rapport à „o" dans $(\bigcup_{j\in I} R_i, +, o)$ alors

$$\bar{R}_i = \{f \in \prod_{i\in I} R_j | f(j) = 0_j \text{ si } j \neq i\}$$

est un (m, n)-sousanneau de $(\prod_{i\in I} R_i, +, o)$ isomorphe avec $(R_i, +, o)$ et $\bigcap_{i\in I} \bar{R}_i = \{(0_i)_{i\in I}\}$.

c) $\Rightarrow$ *a)*. Si $\bigcap_{i\in I} \bar{R}_i = \{(0_i)_{i\in I}\}$ alors $\{(0_i)_{i\in I}\}$ est un (m, n)-sousanneau de $(\Pi R, +, o)$. Il résulte que $\{0_i\}$ est un (m, n)-sousanneau de $(R_i, +, o)$, d'où il suit que 0_i est un zéro idempotent par rapport de „o", dans $(R_i, +, o)$.

Remarque. 1. La condition *a)* est équivalente avec l'affirmation: pour $\forall i \in I$ le (m, n)-anneau $(R_i, +, o)$ a un sousanneau contenant un seul élément. Ce fait permet de transposer le théorème précedent pour les algèbres universelles.

2. Des théorèmes analogues aux théorèmes 4 et 5 ont été donnés pour les m-groupes par Timm [5].

THÉORÈME 6. *L'ensemble* $E(G, +)$ *des endomorphismes du* m*-groupe abélien* $(G, +)$ *est un* (m, n)*-anneau par rapport aurx opéations*

$$(f_1, \ldots, f_m)_+(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))_+ \tag{5}$$

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)_o(x) = g_1(g_2(\ldots(g_n(x)))) \tag{6}$$

où $f_i, g_j \in E(G, +)$, $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. *L'application* $1_G: G \to G$ $1_G(x) = x$ *est un élément neutre de* $(E(G), o)$.

Démonstration. De (5) et (6) il résulte $(f_1, \ldots, f_m)_+ \in E(G, +)$ et $(g_1, \ldots, g_n)_\circ \in E(G, +)$. Par rapport à l'opération définie par (5) $E(G, +)$ est un m-groupe abélien. Nous démontrerons seulement que l'équation

$$(f_1, \ldots, f_{m-1}, \xi)_+ = f$$

(où $f_1, \ldots, f_{m-1}, f \in E(G, +)$ et ξ est l'inconnue) a des solutions dans $E(G, +)$. Pour $\forall x \in G$ l'équation

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x), y)_+ = f(x) \tag{7}$$

a une solution unique y dans G. Soit $\xi(x) = y$ où y est la solution de l'équation (7). Démontrons que $\xi \in E(G, +)$. Pour chaque $x_1, \ldots, x_m \in G$ nous avons

$$\begin{aligned}(f_1((x_1, \ldots, x_m)_+), \ldots, f_{m-1}((x_1, \ldots, x_m)_+), \xi((x_1, \ldots, x_m)_+))_+ = \\ = f((x_1, \ldots, x_m)_+)\end{aligned} \tag{8}$$

et

$$(f_1(x_i), \ldots, f_{m-1}(x_i), \xi(x_i))_+ = f(x_i), \ (i = 1, \ldots, m).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}((f_1(x_1), \ldots, f_{m-1}(x_1), \ \xi(x_1))_+, \ldots, (f_1(x_m), \ldots, f_{m-1}(x_m), \ \xi(x_m))_+)_+ = \\ = (f(x_1), \ldots, f(x_m))_+.\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que $f_1, \ldots, f_{m-1} \in E(G, +)$ et que le m-groupe $(G, +)$ est abélien il suit

$$\begin{aligned}(f_1((x_1, \ldots, x_m)_+), \ldots, f_{m-1}((x_1, \ldots, x_m)_+), \ (\xi(x_1), \ldots, \xi(x_m))_+)_+ = \\ = f((x_1, \ldots, x_m)_+).\end{aligned}$$

De (8) et de la dernière égalité il résulte

$$\xi((x_1, \ldots, x_m)_+) = (\xi(x_1), \ldots, \xi(x_m))_+$$

Donc $\xi \in E(G, +)$.

THÉORÈME 7. *Si* $(\mathrm{R}, +, \cdot)$ *est un* $(\mathrm{m}, 2)$*-anneau alors l'application* $\mathrm{F} : \mathrm{R} \to \mathrm{E}(\mathrm{R}, +)$ *définie comme il suit:*

$$\mathrm{F}(a) = \mathrm{f}_a : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \ \mathrm{f}_a(\mathrm{x}) = a\mathrm{x}$$

est un homomorphisme de $(\mathrm{m}, 2)$*-anneaux. Si* $(\mathrm{R}, \cdot)$ *a un élément neutre alors* F *est un homomorphisme injectif.*

Démonstration. Nous montrerons d'abord que $f_a \in E(R, +)$. En effet,

$$\begin{aligned}f_a((x_1, \ldots, x_m)_+) = a \cdot (x_1, \ldots, x_m)_+ = (ax_1, \ldots, ax_m)_+ = \\ = (f_a(x_1), \ldots, f(x_m))_+.\end{aligned}$$

Donc $f_a \in E(R, +)$. Maintenant nous montrerons que F est un homomorphisme. Pour $\forall a_1, \ldots, a_m, x \in R$ nous avons

$$f_{(a_1, \ldots a_m)_+}(x) = (a_1, \ldots, a_m)_+ \cdot x = (a_1 x, \ldots, a_m x)_+ = (f_{a_1}(x), \ldots, f_{a_m}(x))_+ = \\ = (f_{a_1}, \ldots, f_{a_m})_+(x).$$

$$f_{a_1 a_2}(x) = (a_1 a_2)x = a_1(a_2 x) = f_{a_1}(f_{a_2}(x)) = (f_{a_1} \circ f_{a_2})(x).$$

Donc F est un homomorphisme. Si $1 \in R$ est un élément neutre de $(R, \cdot)$ alors

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1 \cdot 1 \neq a_2 \cdot 1 \Rightarrow f_{a_1} \neq f_{a_2}.$$

Donc F est injectif.

Soit $(R, +, \circ)$ un (m, n)-anneau, ρ une congruence sur $(R, +, \circ)$, $a \in R$ et

$$[a] = \{x \in R | a \rho x\}.$$

Dans R/ρ les égalités

$$([x_1], \ldots, [x_m])_+ = [(x_1, \ldots, x_m)_+]$$

$$([x_1], \ldots, [x_n])_0 = [(x_1, \ldots, x_n)_0]$$

définissent deux opérations et l'application $p: R \to R/\rho$, $p(x) = [x]$, est un homomorphisme surjectif. Le théorème 2 montre que $(R/\rho, +, \circ)$ est un (m, n)-anneau. Dans cet (m, n)-anneau nous avons $\overline{[x]} = [\bar{x}]$ d'où il résulte

$$x \rho y \Rightarrow \bar{x} \rho \bar{y}$$

THÉORÈME 8. *Soit $(R, +)$ un* m-*groupe. Si ρ et ρ' sont des congruences sur $(R, +)$ alors*

$$\rho\rho' = \rho'\rho$$

c'est-à-dire les congruences d'un m-*groupe commutent.*

Démonstration. Maltzev [4] a démontré le fait suivant: Les congruences dans chaque algèbre d'une variété d'algèbres commutent si et seulement si il existe un polynôme $p(x, y, z)$ qui vérifie les identités

$$p(x, x, z) = z, \qquad p(x, z, z) = x$$

pour toutes les algèbres de la variété.

B. Gleichgewicht et K. Glazek ont montré dans [2] que la classe $\mathcal{G}$ des m-groupes est une variété d'algèbres dont le domaine d'opérations est constitué par l'opération m-aire „+" et l'opération unaire $x \to \bar{x}$.

Définissons sur $\mathcal{G}$ le polynôme $p(x, y, z) = (x, \bar{y}, y, \ldots, y, z)+$. Pour chaque m-groupe $(R, +, {}^-)$ on a

$$p(x, x, z) = (x, \bar{x}, x, \ldots, x, z) = z$$

$$p(x, z, z) = (x, \bar{z}, z, \ldots, z) = x.$$

Comme les congruences de $(R, +)$ sont les mêmes que celles de $(R, +, ^{-})$ il résulte que pour chaque m-groupe les congruences commutent.

Conséquences. 1. Le treillis des congruences d'un m-groupe est modulaire.

2. Les congruences d'un (m, n)-anneau commutent.

3. Le treillis des congruences d'un (m, n)-anneau est modulaire.

4. Le treillis $C(R, +, \circ)$ des congruences du (m, n)-anneau $(R, +, \circ)$ est un soustreillis du treillis $C(R, +)$ des congruences d'un m-groupe $(R, +)$.

En effet si $\rho, \rho' \in C(R, +, \circ)$ alors

$$\inf_{C(R,+,\circ)}(\rho, \rho') = \rho \cap \rho' = \inf_{C(R,+)}(\rho, \rho')$$

et

$$\sup_{C(R,+,\circ)}(\rho, \rho') = \rho \cdot \rho' = \sup_{C(R,+)}(\rho, \rho').$$

(Manuscrit reçu le 13 septembre 1973)

BIBLIOGRAPHIE

1. Dörnte, W., *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, „Math. Zeitschrift", **29**, 1—19, 1928.
2. Gleichgewicht, B. and K. Glazek, *Remarks on n-groups as abstract algebras*, „Coll. Math.," **17**, 2, 209—219, 1967.
3. Lister, W. G., *Ternary rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **154**, 37—55, 1971.
4. Maltzew, A. I., *De la théorie générale des systèmes algébriques* (en russe), „Mat. Sb.," **35** (77), 3—20, 1954.
5. Timm, J., *Kommutative n-Gruppen*, Disertation, Hamburg, 1967.

INELE DE TIPUL (m, n) (I)

(Rezumat)

Printr-o generalizare naturală a inelelor se introduc (m, n)-inelele şi se studiază anumite proprietăţi ale acestora. Printre altele se arată că laticea congruenţelor unui (m, n)-inel este modulară.

SUR LES HOMOMORPHISMES DES STRUCTURES RELATIONNELLES (II)[1]

MICHELINE FRODA – SCHECHTER

THÉORÈME 3. *Soient* $\mathfrak{A} = (A, \Gamma_1)$, $\mathfrak{B} = (B, \Gamma_2)$, $\mathfrak{C} = (C, \Gamma_3)$ *des structures relationnelles telles que* $\rho \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ *et soient* $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ *des applications. Si* φ *et* ψ *sont des* ρ*-homomorphismes le produit* $\psi\varphi : A \to C$ *est aussi un* ρ*-homomorphisme.*

Démonstration. On a par hypothèse selon le Th. 1 $\varphi\rho_A \subseteq \rho_{\varphi A}$ donc $\psi\varphi\rho_A \subseteq \psi\rho_A$; mais il résulte du Th. 2 (i), $(\varphi A, \Gamma_2)$ étant sous-structure de $\mathfrak{B}$ et ψ un ρ-h. que $\psi\rho_{\varphi A} \subseteq \rho_{\psi\varphi A}$ donc $\psi\varphi\rho_A \subseteq \rho_{\psi\varphi A}$ ce qui prouve que $\psi\varphi$ est $\rho - h$.

THÉORÈME 4. *Si* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *sont les structures relationnelles du théorème précédent et* φ *est une* ρ*-factorisation de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *et* ψ *une* ρ*-factorisation de* $\mathfrak{B}$ *dans* $\mathfrak{C}_\psi$ *(respectivement dans* $\mathfrak{L}$*) alors* $\psi\varphi$ *est une* ρ*-factorisation de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{C}_\psi$ *et aussi dans* $\mathfrak{C}_{\psi\varphi} = (\psi\varphi A, \Gamma_3)$ *(respectivement dans* $\mathfrak{C}$*).*

Démonstration. Par hypothèse, selon le Th. 1, on a $\varphi\rho_A = \rho_B$, $\psi\rho_B = \rho_{\psi B}$ (respectivement $\psi\rho_B = \rho_C$), donc $\psi\varphi\rho_A = \psi\rho_B = \rho_{\psi B}$, (respectivement $\psi\varphi\rho_A = \rho_C$), c'est-à-dire $\psi\varphi$ est une $\rho - f.$ dans $\mathfrak{C}_\psi$ (respectivement $\mathfrak{C}$). Si $\psi\varphi$ est une $\rho - f.$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}_\psi$ elle est aussi $\rho - f.$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$. En effet $\psi\varphi A \subseteq \psi B$ implique $\rho_{\psi\varphi A} \subseteq \rho_{\psi B}$ d'où, avec $\psi\varphi\rho_A = \rho_{\psi B}$ on obtient $\rho_{\varphi\varphi A} \subseteq \psi\varphi\rho_A$; l'implication inverse résulte du fait que $\psi\varphi$ est un $\rho - h$.

Remarque. Si φ n'est, dans le théorème précédent, qu'une factorisation dans $\mathfrak{B}_\varphi$, même si ψ est une factorisation dans $\mathfrak{C}$, il ne résulte plus que $\psi\varphi$ est une factorisation. Considérons en effet l'exemple suivant:

Exemple 5. Soient $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$, $\varphi a_1 = b_1$, $\varphi a_2 = \varphi a_3 = b_3$ $\psi b_1 = c_1$ $\psi b_2 = \psi b_3 = c_2$ $\Gamma = \Gamma(2) = \{\rho\}$, $\rho_A = \{(a_1, a_1), (a_2, a_3)\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_3, b_3)\}$ et $\rho_C = \{(c_1, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_2)\}$; φ est une factorisation dans $\mathfrak{B}_\varphi$ sans être factorisation dans $\mathfrak{B}$ et ψ est une factorisation dans $\mathfrak{C}$ car $\varphi\rho_A = \{(b_1, b_1), (b_3, b_3)\} = \rho_{\varphi A} \subset \rho_B$ (inclusion stricte) et $\psi\rho_B = \rho_C$. Enfin $\psi\varphi$ est un homomorphisme qui n'est pas une factorisation car l'inclusion $\psi\varphi\rho_A = \{(c_1, c_1), (c_2, c_2)\} \subset \rho_C = \rho_{\psi\varphi A}$ est stricte.

THÉORÈME 5. *Soient* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{C}$ *les structures relationnelles du Th.* 3. *(i) Si* φ *est une* ρ*-factorisation forte de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}_\varphi$ *et* ψ *une* ρ*-factorisation forte de* $\mathfrak{B}$ *dans* $\mathfrak{C}_\varphi$ *alors* $\psi\varphi$ *est une* ρ*-factorisation forte de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$. *(ii) Si* φ *est une* ρ*-factorisation forte de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *et* ψ *comme pour (i), alors* $\psi\varphi$ *est une* ρ*-factorisation forte de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{C}_\psi$. *(iii) Si* φ *est comme*

[1] La première partie a paru dans cette même revue, tome XIX fascicule 2 (1974), avec la bibliographie des deux parties.

pour (ii) et ψ est une ρ-factorisation forte de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}$ alors $\psi\varphi$ est une ρ-factorisation forte de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$.

Démonstration. (i) Il résulte du Th.1 et de l'hypothèse que $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A}$ et $\rho_B = \overset{-1}{\psi}\rho_{\psi B}$; selon le Th. 3 $\psi\varphi$ est un $\rho - h.$, donc $\rho_A \subseteq \overset{-1}{\varphi}\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A}$. D'autre part, selon le Th. 2 (ii), la restriction de ψ à φA est une $\rho - f.f$ et $\rho_{\varphi A} = \overset{-1}{\psi}\rho_{\psi B}$; mais $\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A} \subseteq \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi B} = \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A} = \rho_A$ donc $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_{\beta\varphi A} = \overset{-1}{\widehat{\psi\varphi}}\rho_{\psi\varphi A}$, c'est-à-dire $\psi\rho$ est $\rho - f.f.$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$.

(ii) On a $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_B$, $\rho_B = \overset{-1}{\psi}\rho_{\Psi B}$ donc $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi B}$ c'est-à-dire $\psi\varphi$ est une ρ-$f.f$ dans $\mathfrak{C}_\psi$.

(iii) De $\rho_A = \overset{-1}{\psi}\rho_B$ et $\rho_B = \psi\rho_C$ il résulte que $\psi\rho$ est ρ-$f.f.$ dans $\mathfrak{C}$.

Soient $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to C$ des applications. Si $\psi\varphi$ est une surjection, ψ en est aussi une. Dans les deux théorèmes suivants A, B, C sont les supports des structures relationnelles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ telles qu'un prédicat ρ appartient à l'intersection de leurs domaines.

THÉORÈME 6. *Soit φ une ρ-factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. (i) Si $\psi\varphi$ est un ρ-homomorphisme (surjectif) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$ alors ψ est également ρ-homomorphisme (surjectif). (ii) Si $\psi\varphi$ est une ρ-factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$ (respectivement $\mathfrak{C}_\psi$) alors ψ est une ρ-factorisation de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$ (respectivement $\mathfrak{C}_\psi$) (iii) Si $\varphi\psi$ est une ρ-factorisation (surjective) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$ alors ψ est une ρ-factorisation (surjective) de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}$.*

Démonstration. (i) On a par l'hypothèse $\varphi\rho_A = \rho_B$ et $\psi\varphi\rho_A \subseteq \rho_C$ donc $\psi\varphi\rho_A = \psi\rho_B$ d'où $\psi\rho_B \subseteq \rho_C$. (ii) De $\varphi\rho_A = \rho_A$ et $\psi\varphi\rho_A = \rho_{\psi\varphi A}$ (respectivement $\psi\varphi\rho_A = \rho_{\psi B}$) on obtient $\psi\rho_B = \rho_{\psi\varphi A}$ (respectivement $\psi\rho_B = \rho_{\psi B}$) donc selon le Th. 1, ψ est une ρ-$f.$ (iii) De $\varphi\rho_A = \rho_B$ et $\psi\varphi\rho_A = \rho_B$ on obtient $\psi\rho_B = \rho_C$.

THÉORÈME 7. *Soit φ une ρ-factorisation surjective de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. (i) Si $\psi\varphi$ est une ρ-factorisation forte de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$ (respectivement $\mathfrak{C}_\psi$) alors ψ est une ρ-factorisation forte de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}_{\psi\varphi}$ (respectivement dans $\mathfrak{C}_\psi$). (ii) Si $\psi\varphi$ est une ρ-factorisation forte (surjective) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$ alors ψ est une ρ-factorisation forte (surjective) de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}$.*

Démonstration. (i) On a $\rho_A = \overset{-1}{\widehat{\psi\varphi}}\,\rho_{\psi\varphi A} = \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A}$ donc $\varphi\rho_A = \varphi\overset{-1}{\varphi}\overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A} = \overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A}$ car φ est surjection, d'où, avec $\varphi\rho_A = \rho_B$, on obtient $\rho_B = \overset{-1}{\psi}\rho_{\psi\varphi A}$; d'une manière analogue on obtient de $\rho_A = \overset{-1}{\widehat{\psi\varphi}}\rho_{\psi B}$ que $\rho_B = \overset{-1}{\psi}\rho_{\psi B}$.

(ii) $\rho_A = \overset{-1}{\widehat{\psi\varphi}}\rho_C$ implique comme plus haut $\rho_B = \overset{-1}{\psi}\rho_C$.

Remarque. La condition imposée à φ, dans le théorème précédent, d'être une surjection est essentielle. Considérons en effet l'exemple suivant :

Exemple 6. Soit $A = \{a_1, a_1', a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $\Gamma = \Gamma(2) = \{\rho\}$, $\rho_A = \{(a_1, a_2), (a_1', a_2)\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_2)\}$, $\rho_C = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_2, c_3)\}$, $\varphi : A \to B$, $\varphi a_1 = \varphi a_1' = b_1$, $\varphi a_2 = b_2$, $\psi : B \to C$, $\psi b_i = c_i$ $(i =$

$= 1, 2, 3)$. On voit que φ est une factorisation non surjective sur la structure, car $\varphi\rho_A = \rho_B$, $\psi\varphi : A \to C$ est une factorisation forte de (A, Γ) dans $(\psi\varphi A, \Gamma)$, car $\psi\varphi A = \{c_1, c_2\}$, $\rho_{\psi\varphi A} = \rho_C \cap (\psi_\beta A)^2 = \{(c_1, c_2)\}$ donc $\overset{-1}{\widehat{\psi\varphi}}\rho_{\psi\varphi A} = \rho_A$ et ψ n'est qu'un homomorphisme car l'inclusion $\psi\rho_B \subset \rho_C$ est stricte.

On peut cependant montrer que ψ est toujours un homomorphisme dans le théorème 6 même si φ n'est pas une surjection. En vérité de $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}\rho_C$ on obtient $\varphi\rho_A = \varphi\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}_C \subseteq \overset{-1}{\psi}\rho_C$; mais $\varphi\rho_A = \rho_B$ donc $\rho_B \subseteq \overset{-1}{\psi}\rho_C$, c'est-à-dire ψ est un ρ-h. On prouve de même manière que ψ est ρ-h. dans les cas (i) et (ii).

Si ε est une équivalence sur le support d'une structure relationnelle $\mathfrak{A} = (A, \Gamma)$ on peut définir une structure relationnelle $\mathfrak{A}/\varepsilon$ ayant comme support l'ensemble quotient A/ε et telle que la surjection canonique $\theta : A \to A/\varepsilon$ est une factorisation. Pour celà il suffit de poser $\rho_{A/\varepsilon} = \theta(\rho_A)$ pour tout $\rho \in \Gamma$; la structure $\mathfrak{A}/\varepsilon$, uniquement déterminée, s'appelle *structure quotient* de $\mathfrak{A}$ par rapport à l'équivalence ε.

DÉFINITION 7. On dira qu'une équivalence ε sur le support A d'une structure relationnelle $\mathfrak{A} = (A, \Gamma)$ est une *ρ_A-congruence* si $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ et $a_i \equiv a_i'(\varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n)$ impliquent $(a_1', \ldots, a_n') \in \rho_A$. Une *congruence* sur $\mathfrak{A}$ (*congruence relationnelle*) est une équivalence sur A qui est une ρ_A-congruence pour tout $\rho \in \Gamma$.

Soit $\varphi : A \to B$ une application et *Ker* φ son noyau, c'est-à-dire, pour $a_1, a_2 \in A : a_1 \equiv a_2$ $(Ker\ \varphi) \Leftrightarrow \varphi a_1 = \varphi a_2$.

THÉORÈME 8. *Le noyau d'une ρ-factorisation $\varphi : A \to$ B est une ρ_A-congruence si et seulement si φ est une ρ-factorisation forte, donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ (ou $\mathfrak{B}_\varphi$) soit une factorisation forte est que son noyau soit une congruence sur $\mathfrak{A}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que φ est une ρ-factorisation dans la structure et que *Ker* φ est une ρ_A-congruence. Soient $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$ quelconques tels que $\varphi a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. L'application φ étant une ρ-factorisation il existe des éléments $a_1', \ldots, a_n' \in A$ tels que $\varphi a_i' = b_i$ et $(a_1', \ldots, a_n') \in \rho_A$. Mais alors, *Ker* φ étant congruence on obtient $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ donc φ est une ρ-*f.f.* sur $\mathfrak{B}_\varphi$. Si ρ est une ρ-factorisation sur la structure on raisonne de même à partir de $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_B$, car dans ce cas aussi il *y* a des éléments $a_1', \ldots, a_n' \in A$ tels que $\varphi a_i' = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $(a_1', \ldots, a_n') \in \rho_A$. Réciproquement si φ est une ρ-factorisation forte, de $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ et de $a_i \equiv a_i'$ $(Ker\ \varphi)$ $(i = 1, \ldots, n)$ on a $\varphi a_i' = \varphi a_i$ donc $(\varphi a_1', \ldots, \varphi a_n') \in \rho_{\varphi A}$ d'où $(a_1', \ldots, a_n') \in \rho_A$ c'est-à-dire *Ker* φ est une ρ_A-congruence.

Remarque. Si le noyau d'un homomorphisme φ est une congruence, φ n'est même pas une factorisation. En effet considérons l'exemple suivant :

Exemple 7. Soit $A = \{a_1, a_1', a_2, a_2'\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $\varphi : A \to B$, $\varphi a_1 = \varphi a_1' = b_1$, $\varphi a_2 = \varphi a_2' = b_2$, $\Gamma = \Gamma(2) = \{\rho\}$, $\rho_A = \{(a_1, a_2), (a_1', a_2), (a_1, a_2'), (a_1', a_2')\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_2), (b_2, b_1)\}$. On voit que φ est un homomorphisme surjectif, *Ker* φ est une ρ-congruence sur A, mais φ n'est pas une factorisation car l'inclusion $\varphi\rho_A \subset \rho_B$ est stricte.

Le théorème précédent permet d'obtenir ce

COROLLAIRE. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équivalence* ε *sur le support* A *d'une structure relationelle* $\mathfrak{A}$ *soit une congruence sur* $\mathfrak{A}$ *est que la surjection canonique* $\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\varepsilon$ *soit une factorisation forte de* $\mathfrak{A}$ *sur la structure quotient* $\mathfrak{A}/\varepsilon$.

Le théorème 9 ci-dessous s'applique aux systèmes algébriques. On dit que $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, \Omega)$ est un système algébrique de support A ayant Γ comme domaine de prédicats et Ω comme domaine des opérations si (A, Γ) est une structure relationnelle et si à chaque symbole $\omega \in \Omega$ correspond une opération m-aire[2] ω_A. Si $\Gamma = \emptyset$, $\mathfrak{A}$ est une algèbre universelle; si $\Omega = \emptyset$, $\mathfrak{A}$ est une structure relationelle.

On utilisera pour les systèmes algébriques la terminologie suivante

1. Une application $\varphi : A \to B$ est un ω-*homomorphisme* $(\omega \in \Omega)$ si $\varphi(\omega_A(a_1, \ldots, a_m) = \omega_B(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_m)$ (si $\Gamma = \emptyset$ et φ est pour chaque $\omega \in \Omega$ un ω-homomorphisme, φ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'algèbre $\mathfrak{B}$ dans le sens usuel).

2. Une équivalence ε sur le support A d'un système algébrique $\mathfrak{A}$ est une ω_A-*congruence* si les relations $a_i \equiv a_i'$ (ε) pour $i = 1, \ldots, m$ impliquent $\omega_A(a_1, \ldots, a_m) \equiv \omega_A(a_1', \ldots, a_m')$ (ε) (si $\mathfrak{A}$ est une algèbre universelle et ε est ω-congruence pour tout $\omega \in \Omega$, ε est une congruence (algébrique) sur $\mathfrak{A}$).

Ces définitions impliquent les résultats suivants: Le noyau d'un ω-homomorphisme est une ω_A-congruence et si ε est une ω_A-congruence on peut définir univoquement sur l'ensemble quotient A/ε une opération $\omega_{\bar{A}}$ en posant

$$\omega_{\bar{A}}([a_1]_\varepsilon, \ldots, [a_m]_\varepsilon) = [\omega_A(a_1, \ldots, a_m)]_\varepsilon$$

telle que la surjection canonique $\theta : A \to A/\varepsilon$ est un ω-homomorphisme, $[a]_\varepsilon$ désignant la classe de $a \in A$ modulo ε.

Soient $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, \Omega)$ et $\mathfrak{B} = (B, \Gamma, \Omega)$ deux systèmes algébriques, ε_A et ε_B des équivalences sur les supports A respectivement B des structures données et $\varphi : A \to B$ un ε-homomorphisme surjectif. On peut alors définir une application $\bar{\varphi} : A/\varepsilon_A \to B/\varepsilon_B$ en posant $\bar{\varphi}[a]_A = [\varphi a]_B$, où $[a]_A$ et $[b]_B$ désignent les classes modulo ε_A respectivement ε_B des éléments $a \in A$ et $b \in B$, et

$$(*) \qquad \bar{\varphi}\theta_A = \theta_B\varphi$$

où $\theta_A : A \to A/\varepsilon_A$ et $\theta_B : B \to B/\varepsilon_B$ sont les surjections canoniques correspondant aux équivalences ε_A, ε_B données. Avec ces hypothèses l'application $\bar{\varphi}$ préserve les propriétés de φ dans le sens suivant:

THÉORÈME 9. 1° *Si* ε_A *et* ε_B *sont des congruences pour les opérations* m-*aires* ω_A *respectivement* $\omega_B(\omega \in \Omega)$ *et* φ *est un* ω-*homomorphisme alors*

---

[2] Application de A^m dans A, m nombre naturel.

$\overline{\varphi}$ est aussi un ω-homomorphisme pour les opérations $\omega_{\overline{A}}$, $\omega_{\overline{B}}$ sur les quotients A/ε_A, B/ε_B.

2° *Si θ_A et θ_B sont des ρ-factorisations ($\rho \in \Gamma$) et l'application φ est un ρ-homomorphisme (une ρ-factorisation) alors $\overline{\varphi}$ est un ρ-homomorphisme (une ρ-factorisation).*

3° *Si θ_A est une ρ-factorisation, ε_B une ρ_B-congruence et φ une ρ-factorisation forte alors $\overline{\varphi}$ est également ρ-factorisation forte*[3].

Démonstration. 1°) $\overline{\varphi}(\omega_A([a_1]_A, \ldots, [a_m]_A) = \overline{\varphi}[\omega_A(a_1, \ldots, a_m)]_A = [\varphi(\omega_A(a_1, \ldots, a_m)]_B = [\omega_B(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_m)]_B = \omega_{\overline{B}}([\varphi a_1]_B, \ldots, [\varphi a_m]_B) = \omega_B(\overline{\varphi}[a_1]_A, \ldots, \overline{\varphi}[a_m]_A)$.

2°) L'application θ_B étant une $\rho - f.$ elle est aussi un $\rho - h.$ donc d'après le Th. 3, le produit $\theta_B\varphi$ est un $\rho - h.$, d'où, selon (*), $\overline{\varphi}\theta_A$ est également $\rho - h.$ En appliquant (i) du Th. 6 on obtient que $\overline{\varphi}$ est un $\rho - h.$ Si φ est une $\rho - f.$ on obtient de la même manière, en utilisant successivement le Th. 4, (*) et le point (iii) du Th. 6, que $\overline{\varphi}$ est une $\rho - f.$

3° Si ε_B est une ρ_B congruence alors θ_B est une $\rho - f.f$ donc, selon le Th. 5 (iii), $\theta_B\varphi$ est une $\rho - f.f.$, donc $\overline{\varphi}\theta_A$ l'est aussi. Il résulte alors du Th. 7 (ii) que $\overline{\varphi}$ est une $\rho - f.f.$

Peut-être n'est-il pas inutile de conclure par quelques remarques sur les homomorphismes bijectifs. Selon [3] une application bijective φ de $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{B}$ est un *isomorphisme* si φ est, ainssi que son inverse, un homomorphisme. Cependant on ne pourrait définir l'isomorphisme, comme cela se fait dans le traité [2] (page 74), comme étant un homomorphisme bijectif. En effet on sait que l'inverse d'un homomorphisme (relationnel) n'est pas toujours un homomorphisme — donc la relation d'isomorphie ne serait plus symétrique. Mais une factorisation bijective est un isomorphisme. En vérité si $\varphi : A \to B$ est une ρ-factorisation donnée, on a selon le Th. 1, $\varphi\rho_A = \rho_B$ d'où $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_B$ donc $\overset{-1}{\varphi} : B \to A$ est une factorisation et par conséquent aussi un homomorphisme. La dernière égalité montre aussi qu'une factorisation bijective est un factorisation forte et d'ailleurs, son inverse l'est aussi.

(Manuscrit reçu le 11 février 1974)

ASUPRA OMOMORFISMELOR STRUCTURILOR RELAŢIONALE (II)

(R e z u m a t)

În această parte a lucrării se dau proprietăţi ale produsului omomorfismelor de diferite tipuri ale structurilor relaţionale, se caracterizează congruenţa relaţională ca nucleu al unei factorizări tari şi se obţine un rezultat asupra congruenţelor sistemelor algebrice.

---

[3] On utilise ce théorème dans notre travail [7] dans le cas plus particulier où ε_A et ε_B sont simultanément des congruences algébriques et des congruences relationnelles sur les systèmes $\mathfrak{A}$ respectivement $\mathfrak{B}$.

GRUPUL DE MIŞCĂRI AL SPAŢIILOR K_3^*

P. ENGHIŞ

Fie V_n un spaţiu riemannian de metrică

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

şi o transformare infinitezimală

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i dt \tag{2}$$

Transformarea (2) se numeşte mişcare a spaţiului V_n dacă invariază metrica spaţiului [1]. Invarianţa metricii (1) printr-o transformare (2) este dată de anularea derivatei Lie a tensorului metric [6] $\underset{\xi}{\mathfrak{L}} g_{ij} = 0$ adică:

$$\xi^s \partial_s g_{ij} + g_{sj}\partial_i \xi^s + g_{is}\partial_j \xi^s = 0 \tag{3}$$

Ecuaţiile (3) sînt ecuaţilie lui Killing [3] pentru un V_n. Determinarea grupului de mişcări al spaţiului V_n revine la integrarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (3) în funcţiile ξ^i, deci la determinarea operatorilor $Xf = \xi^i \partial_i f$ ai transformărilor infinitezimale ale grupului.

În lucrările lui Fubini [2] şi Krucikovici [4] se dau clasificări ale spaţiilor V_3 după grupurile de mişcări. Totuşi determinarea efectivă a grupului de mişcări al unui spaţiu riemannian dat se cere a fi făcută direct, întrucît nu se poate recunoaşte uşor forma canonică în care se încadrează metrica respectivă.

Spaţiile K_3^* introduse de A. G. Walker [5] cuprind spaţiile riemanniene recurente, adică spaţii pentru care există un vector covariant φ_r astfel ca

$$R^i_{jkh,r} = \varphi_r R^i_{jkh} \tag{4}$$

unde R^i_{jkh} este tensorul de curbură al spaţiului iar prin virgulă s-a notat derivata covariantă în raport cu metrica (1) şi spaţiile simetrice Cartan, adică

$$R^i_{jkh,r} = 0 \tag{5}$$

pentru care există un vector covariant φ_r astfel ca să aibă loc relaţia

$$\varphi_r R^i_{jkh} + \varphi_k R^i_{jhr} + \varphi_h R^i_{jrk} = 0 \tag{6}$$

Spaţiile recurente verifică şi ele relaţia (6) după cum rezultă imediat din identitatea lui Bianchi.

Pentru spaţiile K_3^* A. G. Walker [5] arată că metrica lor într-un sistem convenabil de coordonate poate fi pusă sub forma

$$ds^2 = \Psi(x^1, x^3)\ (dx^1)^2 + 2dx^1dx^2 + (dx^3)^2 \tag{7}$$

unde $\Psi(x^1, x^3)$ este o funcţie oarecare de x^1 şi x^3.

Pentru spaţiile K_3^* cu metrica (7) sistemul Killing (3) devine

$$\begin{aligned}
&\xi^1\partial_1\Psi + \xi^3\partial_3\Psi + 2\Psi\partial_1\xi^1 + 2\partial_1\xi^2 = 0\\
&\Psi\partial_2\xi^1 + \partial_2\xi^2 + \partial_1\xi^1 = 0\\
&\Psi\partial_3\xi^1 + \partial_3\xi^2 + \partial_1\xi^3 = 0\\
&\partial_2\xi^1 = 0\\
&\partial_3\xi^1 + \partial_2\xi^3 = 0\\
&\partial_3\xi^3 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Din a patra şi a şasea ecuaţie a sistemului (8) rezultă că ξ^1 nu depinde de x^2 iar ξ^3 nu depinde de x^3. Din ecuaţia a cincea deducem că ξ^1 este liniar în x^3, iar ξ^3 liniar în x^2, deci de forma

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= A(x^1)x^3 + C(x^1)\\
\xi^3 &= -A(x^1)x^2 + D(x^1)
\end{aligned} \tag{9}$$

Din ecuaţia a doua a sistemului (8) rezultă

$$\xi^2 = -A'(x^1)x^3x^2 - C'(x^1)x^2 + B(x^1, x^3) \tag{10}$$

Scriind acum că (9) şi (10) verifică prima şi a treia ecuaţie (8) rezultă

$$\begin{aligned}
&[A(x^1)x^3 + C(x^1)]\partial_1\Psi + [-A(x^1) +\\
&+ D(x^1)]\partial_3\Psi + 2\Psi C'(x^1) - 2C''(x^1)x^2 + 2\partial_1 B = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Psi A(x^1) - 2A'(x^1)x^2 + \partial_3 B + D'(x^1) = 0 \tag{12}$$

Din condiţiile (12) rezultă $A'(x^1) = 0$ şi deci $A(x^1) = a =$ const. Din condiţiile (11), ţinînd seama de acest rezultat avem

$$a\partial_3\Psi + 2C''(x^1) = 0 \tag{13}$$

şi ecuaţiile (11) şi (12) ne dau

$$\begin{aligned}
\partial_1 B &= -\frac{1}{2}[ax^3 + C(x^1)]\partial_1\Psi - \frac{1}{2}D(x^1)\partial_3\Psi - \Psi C'(x^1)\\
\partial_3 B &= -a\Psi - D'
\end{aligned} \tag{14}$$

În consideraţiile noastre funcţia Ψ este arbitrară, deci în general nu verifică condiţii suplimentare. Astfel vom distinge mai multe situaţii.

a) Considerăm funcţia $\Psi(x^1, x^3)$ arbitrară. Din (13) rezultă atunci $a = 0$ şi $C''(x^1) = 0$, adică

$$C(x^1) = c_1x^1 + c_2 \qquad (c_i = \text{const}) \tag{15}$$

În acest caz sistemul (14) devine

$$\partial_1 B = -\frac{1}{2}(c_1 x^1 + c_2)\partial_1 \Psi - \frac{1}{2} D(x^1)\partial_3 \Psi - \Psi C_1$$

$$\partial_3 B = -D' \tag{16}$$

Scriind condiţiile de integrabilitate ale sistemului (16) găsim

$$-D''(x^1) = -\frac{1}{2}(c_1 x^1 + c_2)\partial_{13}\Psi - \frac{1}{2} D(x^1)\partial_{33}\Psi - \partial_3 \Psi c_1 \tag{17}$$

Funcţia Ψ fiind presupusă arbitrară, rezultă $c_1 = c_2 = D = 0$ şi din (16) avem $B = b =$ const. deci $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = b$, $\xi^3 = 0$. Operatorii transformărilor infinitizemale se reduc la $X_1 = \partial_2$, grupul de mişcări este un grup de translaţii de-a lungul axei x^2. Avem deci:

PROPOZIŢIA 1. *Un spaţiu* K_3^* *cu metrica* (7) *şi cu funcţia* Ψ *arbitrară, admite ca grup de mişcări un grup de translaţii paralele cu axa* x^2.

b) Ecuaţia (13) este satisfăcută dacă funcţia Ψ are forma:

$$\Psi = f_1(x^1)x^3 + f_2(x^1) \tag{18}$$

Se observă că prin schimbarea de variabilă $x'^2 = x^2 + \int f_2(x^1)dx^1$ putem presupune $f_2 = 0$. În acest caz însă tensorul de curbură este nul şi spaţiul K_3^* este euclidian.

c) Dacă funcţia Ψ depinde numai de variabila x^1 spaţiul este de asemenea euclidian.

d) Să presupunem că funcţia Ψ depinde numai de x^3. Din (13) rezultă că $a = 0$ şi $c'' = 0$ adică $C = c_1 x^1 + c_2$, pentru ca spaţiul să nu fie euclidian. Ecuaţiile (16) în acest caz devin

$$\partial_1 B = -\frac{1}{2} D(x^1)\partial_3 \Psi + \Psi c_1 \quad \partial_3 B = -D'(x^1) \tag{19}$$

cu condiţiile de integrabilitate

$$D''(x^1) = \frac{1}{2} D(x^1)\partial_{33}\Psi - \partial_3 \Psi c_1 \tag{20}$$

Derivînd ecuaţiile (20) în raport cu x^3 avem

$$\frac{1}{2} D(x^1)\partial_{333}\Psi - \partial_{33}\Psi c_1 = 0 \tag{21}$$

din care pentru funcţia Ψ arbitrară de x^3 rezultă $D = c_1 = 0$. Din (19) pentru B avem $B = b =$ const. şi deci $\xi^1 = c_2$, $\xi^2 = 0$ $\xi^3 = 0$ şi operatorii grupului de mişcări sînt $X_1 = \partial_1$ $X_2 = \partial_2$ grupul de mişcări fiind un grup cu doi parametri abelian, grup de translaţii paralele cu planul x^1, x^2. Avem deci

PROPOZIŢIA 2. *Un spaţiu* K_3^* *de metrică* (7) *şi cu funcţia* $\Psi(x^3)$ *arbitrară, admite ca grup de mişcări un grup cu doi parametri abelian, grup de translaţii paralele cu planul* x^1, x^2.

e) Condiţiile (21) pot fi verificate dacă $\partial_{333}\Psi = 0$ şi $c_1 = 0$, din care rezultă $\Psi = \alpha_1(x^3)^2 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3$. Dacă $\alpha_1 \neq 0$ (în caz contrar spaţiul este euclidian) printr-o schimbare de coordonate se poate lua $\alpha_1 = 1$ şi $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dacă facem abstracţie de spaţiile asemenea. Condiţiile de integrabilitate (20) în acest caz se reduc la $D'' = D$ din care avem $D = d_1 e^{x^1} + d_2 e^{-x^1}$ (d_i = const)

Ecuaţiile (14) în acest caz devin

$$\partial_1 B = -x^3(d_1 e^{x^1} + d_2 e^{-x^1})$$

$$\partial_3 B = -d_1 e^{x^1} + d_2 e^{-x^1}$$

din care rezultă $B = -d_1 x^3 e^{x^1} + d_2 x^3 e^{-x^1} + d_3$ şi deci

$$\xi^1 = c_2, \quad \xi^2 = -d_1 x^3 e^{x^1} + d_2 x^3 e^{-x^1} + d_3, \quad \xi^3 = d_1 e^{x^1} + d_2 e^{-x^1}$$

şi operatorii grupului de mişcări sînt

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_1, \quad X_2 = -x^3 e^{x^1}\partial_2 + e^{x^1}\partial_3 \\ X_3 &= x^3 e^{-x^1}\partial_2 + e^{-x^1}\partial_3, \quad X_4 = \partial_2 \end{aligned} \tag{22}$$

iar structura grupului este

$$\begin{aligned} (X_1X_2) &= X_2, \quad (X_1X_3) = -X_3, \quad (X_1X_4) = 0 \\ (X_2X_3) &= 2X_4, \quad (X_2X_4) = 0, \quad (X_3X_4) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Grupul G_4 obţinut este rezolubil de tipul I după clasificarea dată de G. I. Krucikovici [4]. Deci avem

PROPOZIŢIA 3. *Spaţiile* K_3^* *cu metrica* (7) *în care funcţia* $\Psi = (x^3)^2$, *posedă un grup* G_4 *de mişcări avînd structura dată de* (23).

Observaţie. Grupul G_4 cu structura (23) este grup maxim de mişcări pentru spaţiul K_3^*.

f) Condiţiile (21) mai pot fi satisfăcute şi dacă $\Psi(x^3) = e^{x^3}$. În acest caz condiţiile de integrabilitate (20) ne dau $D = -2c_1$ şi ecuaţiile (14) devin $\partial_1 B = 0$, $\partial_3 B = 0$ din care deducem $B = b$ şi deci $\xi^1 = c_1 x^1 + c_2$, $\xi^2 = -c_1 x^2 + b$. $\xi^3 = -2c_1$. Operatorii grupului de mişcări vor fi

$$X_1 = x^1\partial_1 - x^2\partial_2 - 2\partial_3, \quad X_2 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_2 \tag{24}$$

iar structura

$$(X_1X_2) = -X_2, \quad (X_1X_3) = X_3, \quad (X_2X_3) = 0 \tag{25}$$

Grupul G_3 este rezolubil de tipul V după clasificarea dată de G. I. Krucikovici [4] şi deci avem:

PROPOZIŢIA 4. *Spaţiile* K_3^* *cu metrica* (7) *în care* $\Psi = e^{x^3}$, *posedă un grup de mişcări* G_3 *rezolubil cu structura dată de* (25).

(Intrat în redacţie la 20 martie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Eisenhart, L. P., *Riemannian geometry*, Princeton, 1949.
2. Fubini, G., *Sugli spazi che amettoro un gruppo continuo di movimenti*, „Annali di Mat.", (3) 8 (1903), p. 39–81.
3. Killing, W., *Über der Gründlagen der Geometrie*, „Journ. für der reine und angew. Math.", (109), 1892, p. 121–186.
4. Krucikovici, G. I., *Klassificaţia trehmenrnîh riemannovîh prostranstvo po gruppam dvijenia*, U.M.N. **IX**, 1954, p. 3–40.
5. Walker, A. G., *On Ruse's spacces of recurrent curvature*, Proc. London Math. Soc., 2 (52) 1950, p. 36–64.
6. Yono, K., *The Theory of Lie derivations and its applications*, Narth. Holland publ., Amsterdam, 1955.

LE GROUPE DE MOUVEMENTS DES ESPACES K_3^*

(Résumé)

On montre dans l'ouvrage que les espaces K_3^* à métrique (7) admettent comme groupe de mouvements un groupe de translations parallèles à l'axe x^2 si la fonction Ψ est arbitraire, un groupe à deux paramètres, groupe de translations parallèles au plan x^1, x^2 si la fonction Ψ dépend seulement de la variable x^3, un groupe à trois paramètres résoluble avec les opérateurs donnés par (24) et avec la structure (25) si la fonction $\Psi = e^{x^3}$, et un groupe à quatre paramètres, groupe résoluble avec les opérateurs (22) et avec la structure (23) si $\Psi(x^3) = (x^3)^2$.

SECŢIUNI RECURENTE ALE UNUI FIBRAT VECTORIAL ÎN RAPORT CU O LEGE DE DERIVARE (I)

PROFIRA SANDOVICI

Fie M o varietate diferenţiabilă conexă, $\mathcal{F}(M)$ inelul funcţiilor diferenţiabile pe M, $\mathcal{X}(M)$ $\mathcal{F}(M)$-modulul cîmpurilor de vectori diferenţiabile pe M (prin diferenţiabil subînţelegem diferenţiabilitate C^∞). Dacă E este un fibrat vectorial peste M, vom nota prin Σ $\mathcal{F}(M)$-modulul secţiunilor diferenţiabile $u: M \to E$ şi prin ∇ o lege de derivare în $\Sigma: \nabla: \mathcal{X}(M) x \Sigma \to \Sigma$. Pentru $u \in \Sigma$, aplicaţia $X \to \nabla_X u$ defineşte o 1-formă pe M cu valori în Σ, pe care o notăm prin ∇u. Avem $(\nabla u)(X) = \nabla_X u \ \forall X \in \mathcal{X}(M)$. ∇u este o secţiune a fibratului vectorial $T^*(M) \otimes E$.

DEFINIŢIE. O secţiune $u \in \Sigma$ se numeşte recurentă în raport cu o lege de derivare ∇ (sau ∇-recurentă) dacă există o 1-formă $\varphi: x \in M \to \varphi_x \in T^*_x(M) \subset T^*(M)$ astfel încît

$$\nabla u = \varphi \otimes u.$$

φ se numeşte 1-forma (sau cîmp de covectori) de recurenţă.

1. **Generalizarea teoremelor lui Y. C. Wong [1] pentru ∇-recurenţă în modulul Σ.** În cele ce urmează vom considera fibratul vectorial E asociat unui fibrat principal $\xi = P(M, \pi, G)$, iar ∇ o lege de derivare în Σ indusă de o conexiune Γ pe ξ. Vom presupune că fibra tip a lui E este spaţiul vectorial F de dimensiune finită şi că $\mathcal{R}$ este o reprezentare liniară a grupului structural G în F. În aceste condiţii există un izomorfism între secţiunile $u \in \Sigma$ şi $\mathcal{F}(M)$-modulul $\mathcal{F}_G$ al funcţiilor $\tilde{u}: P \to F$ cu proprietatea că $\tilde{u}(pa) = \mathcal{R}(a^{-1})\tilde{u}(p) \ \forall p \in P \ \forall a \in G$, definit prin

$$u(x) = \tilde{p}(\tilde{u}(p)) \ \forall p \in P_x, \ x = \pi(p) \tag{1.1}$$

unde $\tilde{p}: F \to E_x$ este izomorfismul indus de p între fibra tip F şi fibra E_x a lui E în x. Pentru ∇ avem

$$\widetilde{\nabla_X u} = \tilde{X}\tilde{u} + \mathcal{R}_*(\omega(\tilde{X}))\tilde{u}, \tag{1.2}$$

unde $\tilde{X}$ este un cîmp de vectori pe P proiectabil pe X, ω 1-forma conexiunii Γ iar $\mathcal{R}_*$ reprezentarea liniară indusă de $\mathcal{R}$ în algebra Lie $\underline{G}$ a lui G. Dacă $\tilde{X}$ coincide cu ridicarea orizontală $\underline{X}$ a lui X avem

$$(\nabla_X u)(x) = \tilde{p}(\underline{X}_p \tilde{u}) \ \forall p \in P_X, \ x = \pi \ (p). \tag{1.3}$$

Y. C. Wong [1] dă o caracterizare a cîmpurilor de tensori de un tip (r, s) oarecare, recurente în raport cu o conexiune liniară Γ pe o varietate diferenţiabilă conexă, considerînd funcţiile pe fibratul reperelor liniare ce definesc cîmpul tensorial şi restricţiile lor la fibratele de olonomie în raport cu conexiunea Γ. Următoarele trei propoziţii transpun rezultatele lui Y. C. Wong în cazul ∇-recurentei în modulul Σ.

PROPOZIŢIA 1.1. *Dacă* $\mathrm{u} \in \Sigma$ *este* ∇*-recurent, atunci restricţia funcţiei* $\tilde{\mathrm{u}} \in \mathscr{F}_G$ *la o curbă orizontală a lui* P *în raport cu conexiunea* Γ *este proporţională cu un element constant* $\tilde{\mathrm{u}}_0 \in \mathrm{F}$.

Demonstraţie. Fie $c: [0, 1] \subset R \to P; t \mapsto c(t) = p_t$ o curbă orizontală diferenţiabilă. Fie $\underline{X} \in \mathfrak{X}(P)$ un cîmp de vectori orizontali astfel ca $\underline{X}_{p_t} = \dot{p}_t \; \forall t \in [0, 1]$. După (1.3) avem $(\nabla_X u)(x_t) = \tilde{p}_t(\underline{X}_{p_t}\tilde{u}) \; \forall t \in [0, 1]$ unde $X = \pi_* \underline{X}$ şi $x_t = \pi(p_t)$ iar din ∇-recurenţa lui u rezultă că $\nabla_X u = \varphi(X)u$. Din aceste formule şi din $u(x_t) = \tilde{p}_t(\tilde{u}(p_t))$ obţinem $\underline{X}_{p_t}\tilde{u} = [\varphi(X)(x_t)]\tilde{u}(p_t)$ $\forall t \in [0, 1]$ de unde, ţinînd seamă că $\underline{X}_{p_t} = \dot{p}_t$, deducem

$$\frac{d\tilde{u}(p_t)}{dt} = [\varphi(X)\,(x_t)]\tilde{u}(p\,) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Astfel, funcţia vectorială $t \in [0, 1] \to \tilde{u}(p_t) \in F$ verifică un sistem diferenţial de forma $\frac{dv}{dt} = f(t)v$, unde $f(t) = \varphi(X)(x_t)$ este o funcţie diferenţiabilă cu valori reale. Aplicînd acestui sistem teoria sistemelor diferenţiale, deducem că dacă $\tilde{u}(p_{t_0}) = 0$ pentru un $t_0 \in [0, 1]$, atunci $\tilde{u}(p_t) = 0 \; \forall t \in [0, 1]$ şi $\tilde{u}(p_t)$ este proporţional cu elementul nul al lui F. Dacă $\tilde{u}(p_t)$ nu se anulează pentru nici un $t \in [0, 1]$, atunci avem

$$\vec{u}(p_t) = (\exp \int f(t)\, dt)\, \tilde{u}_0,$$

unde $\tilde{u}_0 \in F$ este un element constant.

PROPOZIŢIA 1.2. *Dacă* $\mathrm{u} \in \Sigma$ *este* ∇*-recurent şi varietatea diferenţiabilă* M *este conexă, atunci* $\mathrm{u(x)} \neq 0$ *pentru orice* $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$.

Demonstraţie. Să presupunem că pentru $x_0 \in M$ avem $u(x_0) = 0 \in E_x$. Fie $x_1 \in M$ un punct arbitrar diferit de x_0 şi $c: t \in [0, 1] \to c(t) = x_t$ o curbă diferenţiabilă pe porţiuni, astfel încît $x_0 = c(0)$, $x_1 = c(1)$ (o varietate diferenţiabilă conexă este conexă prin arce). Fie $p_0 \in P$ deasupra lui x_0, $\pi(p_0) = x_0$. Există atunci o ridicare orizontală unică $\underline{c}: t \in [0, 1] \to p_t \in P$ a lui c, astfel încît $\underline{c}(0) = p_0$. Deoarece prin ipoteză $u(x_0) = 0$, avem $\tilde{u}(p_0) = \tilde{p}_0^{-1}(u(x_0)) = 0$ iar din demonstraţia prop. 1.1. deducem că $\tilde{u}(p_t) = 0 \; \forall t \in [0, 1]$ şi în particular $\tilde{u}(p_1) = 0$. Ţinînd seama de faptul că $\tilde{p}_1 : F \to E_{x_1}$ este un izomorfism de spaţii vectoriale şi că $u(x_1) = \tilde{p}_1(\tilde{u}(p_1))$, rezultă $u(x_1) = 0$. Astfel, dacă $u(x_0) = 0$ pentru un $x_0 \in M$, atunci $u = 0$, ceea ce contrazice presupunerea că u este recurent.

Notăm prin $P[p_0]$ subvarietatea de olonomie a lui P în raport cu conexiunea Γ care trece prin punctul $p_0 \in P$. În ipoteza că varietatea M este conexă, avem $\pi^{-1}(x) \cap P[p_0] \neq \emptyset$ pentru orice $x \in M$, $p_0 \in P$.

PROPOZIŢIA 1.3. *Fie* M *o varietate diferenţiabilă conexă. O secţiune* $\mathrm{u} \in \Sigma$ *este* ∇*-recurentă dacă şi numai dacă restricţia lui* $\tilde{\mathrm{u}} \in \mathscr{F}_G$ *la o sub-*

varietate de olonomie $\mathrm{P}[\mathrm{p}_0]$ *nu se anulează şi este proporţională cu un element constant al lui* F.

Demonstraţie. a) Dacă $u \in \Sigma$ este ∇-recurent, atunci după prop. 1.2. $u(x) \neq 0\ \forall x \in M$ iar din prop. 1.1. rezultă că $\tilde{u}(p) = f(p)\tilde{u}(p_0) \forall p \in P[p_0]$, unde $f: P[p_0] \to R$ şi $f(p) \neq 0\ \forall p \in P[p_0]$.

Prin urmare, restricţia lui $\tilde{u}$ la $P[p_0]$ este proporţională cu un element constant $\tilde{u}(p_0) \in F$.

b) Presupunem acum că $u \in \Sigma$ este astfel încît restricţia lui $\tilde{u} \in \mathcal{F}_G$ la $P[p_0]$ este nenulă în fiecare punct şi este proporţională cu un element constant $\tilde{u}_0 \in F$, deci că

$$\tilde{u}(p) = f(p)\tilde{u}_0,\ f(p) \neq 0 \qquad \forall p \in P[p_0] \tag{1.4}$$

Fie $X \in \mathfrak{X}(M)$, $x_1 \in M$ arbitrari şi $c: t \mapsto c(t) = x_t$ o curbă integrală a lui X prin punctul $x_1 = c(1)$. Fie $p_1 \in P[p_0]$ astfel încît $\pi(p_1) = x_1$ şi fie $\underline{c}: t \mapsto p_t$ ridicarea orizontală a lui c prin punctul $\underline{c}(1) = p_1$. Avem atunci din (1.3): $(\nabla_X u)(x_t) = \tilde{p}_t(\dot{p}_t\tilde{u})\ \forall t$ şi ţinînd seama de (1.4) obţinem

$$(\nabla_X u)(x_t) = \frac{df(p_t)}{dt}\tilde{p}_t(\tilde{u}_0) = \frac{d\ln f(p_t)}{dt}\, u(x_t), \tag{1.5}$$

de unde, pentru $t = 1$, avem

$$(\nabla_X u)(x_1) = g \cdot u(x_1). \tag{1.6}$$

Cum $x_1 \in M$ şi $X \in \mathfrak{X}(M)$ sînt arbitrari iar membrul întîi din (1.6) este $\mathcal{F}(M)$-liniar în raport cu X, rezultă că

$$\nabla_X u = \varphi(X)u \tag{1.7}$$

unde $\varphi: X \in \mathfrak{X}(M) \to \varphi(X) \in \mathcal{F}(M)$ este o 1-formă pe M. (1.7) exprimă ∇-recurenţa lui u.

2. **∇-recurenţa şi grupurile de olonomie.** În prop. 1.3. s-a formulat o condiţie necesară şi suficientă ca secţiunea $u \in \Sigma$ să fie ∇-recurentă. Vom nota cu $\tilde{u}_0 \in F$ valoarea constantă cu care este proporţională restricţia lui $\tilde{u} \in \mathcal{F}_G$ la o varietate de olonomie $P[p_0]$. Astfel, avem pentru u ∇-recurent

$$\tilde{u}(p) = f_0(p)\tilde{u}_0,\ \ f_0(p) \neq 0 \quad \forall p \in P[p_0]. \tag{2.1}$$

În continuare studiem condiţiile (2.1).

PROPOZIŢIA 2.1. *Dacă* Φ_{p_0} *este grupul de olonomie în* $\mathrm{p}_0 \in \mathrm{P}$, *atunci*

$$\mathcal{R}(a^{-1})\tilde{u}_0 = \lambda_0(a)\tilde{u}_0 \qquad \forall a \in \Phi_{p_0}, \tag{2.2}$$

unde $\lambda_0: \Phi_{p_0} \to \mathrm{R}$ *este un homomorfism al lui* Φ_{p_0} *în grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.*

Demonstrație. $\tilde{u}(pa) = \mathfrak{R}(a^{-1})\tilde{u}(p)$ iar din (2.1) $\tilde{u}(pa) = f_0(p)\ \mathfrak{R}(a^{-1})\tilde{u}_0$ de unde deducem că

$$\mathfrak{R}(a^{-1})\tilde{u}_0 = \frac{f_0(pa)}{f_0(p)}\tilde{u}_0 \quad \forall p \in P[p_0]\ \forall a \in \Phi_{p_0} \tag{2.3}$$

Membrul doi al formulei (2.3) depinde numai de a și prin urmare avem

$$f_0(pa) = \lambda_0(a) f_0(p), \quad \lambda_0(a) \neq 0\ \forall\, p \in P[p_0] \quad \forall\, a \in \Phi_{p_0} \tag{2.4}$$

Deoarece $(pa)a' = p(aa')$, din (2.4) deducem că

$$\lambda_0(aa') = \lambda_0(a)\ \lambda_0(a')\ \forall a, a' \in \Phi_{p_0}.$$

Observație. Din (2.2) rezultă că grupul de olonomie Φ_{p_0} invariază subspațiul vectorial al lui F subîntins de $\tilde{u}_0$.

Vom avea în vedere faptul că varietatea P este reuniunea disjunctă a varietăților de olonomie $P[p_0]$ și dacă $p_0, p_1 \in P$ nu se pot uni cu un drum orizontal, atunci pentru $p_1 = p_0 g$, $g \in G$, avem $P[p_1] = P[p_0]g$ și $\Phi_{p_1} = g^{-1}\ \Phi_{p_0}\ g$.

Fie $p_1 = p_0 g$ și $\tilde{u}_0 = \tilde{u}(p_0)$, $\tilde{u}_1 = \tilde{u}(p_1)$ elementele lui F cu care sînt proporționale restricțiile lui $\tilde{u}$ la $P[p_0]$, $P[p_1]$. Atunci, din $\tilde{u}(p_0 g) = \mathfrak{R}(g^{-1})\tilde{u}(p_0)$, rezultă

$$\tilde{u}_1 = \mathfrak{R}(g^{-1})\tilde{u}_0. \tag{2.5}$$

PROPOZIȚIA 2.2. *Pentru* $p_1 = p_0 g$ *astfel ca* $P[p_1] \cap P[p_0] = \emptyset$ *au loc relațiile:*

$$f_1(pg) = f_0(p), \quad \lambda_1(g^{-1}ag) = \lambda_0(a)\forall p \in P[p_0]\forall a \in \Phi_{p_0} \tag{2.6}$$

Demonstrație. Din $\tilde{u}(pg) = \mathfrak{R}(g^{-1})\tilde{u}(p)$ și din (2.1), (2.5) deducem că $\tilde{u}(pg) = f_0(p)\tilde{u}_1$, și prin urmare $f_1(pg) = f_0(p)$. Avem apoi, pentru $p' = pg$, $a' = g^{-1}ag$ unde $p \in P[p_0]$, $a \in \Phi_{p_0}$ $f_1(p'a') = f_0(pa) = \lambda_0(a) f_0(p) = \lambda_0(a) f_1(p')$. Pe de altă parte, din (2.4) avem $f_1(p'a') = \lambda_1(a') f_1(p')$, și astfel rezultă $\lambda_0(a) = \lambda_1(a')$.

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie* $u \in \Sigma$ *o secțiune* ∇*-recurentă cu covectorul de recurență* φ *și* $\lambda_0 : \Phi_{p_0} \to R \setminus \{0\}$ *homomorfismul din prop.* 2.1. *Dacă* $\underline{c} : t \in [0, 1] \to p_t \in P[p_0]$ *este drumul orizontal care unește punctele* p_0 *și* $p_1 = p_0 a$ $(a \in \Phi_{p_0})$, *atunci*

$$\lambda_0(a) = \exp\left(\int_0^1 \varphi(\dot{x}_t)dt\right). \tag{2.7}$$

unde $c : t \in [0, 1] \to x_t \in M$ *este proiecția lui* $\underline{c}$ *pe* M $(x_t = \pi(p_t))$.

Demonstrație. Din (1.5) și (1.7), unde $X_{x_t} = \dot{x}_t$, rezultă că

$$\frac{d\ln f(p_t)}{dt} = \varphi(\dot{x}_t),$$

de unde, integrînd de-a lungul lui c, obţinem

$$\frac{f(p_1)}{f(p_0)} = \exp\left(\int_0^1 \varphi(\dot{x}_t)\ dt\right).$$

(2.7) rezultă din această formulă şi din (2.4).

(Intrat în redacţie la 3 aprilie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Wong, Y. C., *Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold*, „Trans. Amer. Math. Soc.," **99** (1961), 325–341.
2. Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.
3. Walker, A. G., *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, „Proc. London Math. Soc.," (2) **52** (1950), 36–64.

SUR LES SECTIONS RÉCURRENTES D'UN FIBRÉ VECTORIEL PAR RAPPORT À UNE LOI DE DÉRIVATION (I)

(Résumé)

L'auteur introduit la notion de section récurrente dans un fibré vectoriel E par rapport à une loi de dérivation ∇ définie dans le module Σ des sections différentiables de E. On dit que la section $u \in \Sigma$ est ∇-récurrente s'il existe une 1-forme φ sur M telle que on a $\nabla u = \varphi \otimes u$.

On généralise les théorèmes de Y. C. Wong [1] pour cette notion de ∇-récurrence.

SPAŢII METRICE $\mathbb{S}$ $(G., S, \perp)$ (I)

ANGELA VASIU

În nota [5] se dă un sistem de axiome pentru un grup abstract care admite un sistem de generatori format numai din elemente involutive (de ordinul doi). Submulţimea elementelor lui S de forma:

$$P(\alpha) = \{x | \times \in S, \ \alpha x \in S^2, \ \alpha = abc, a, b, c \in S, \ abc \,\overline{\in}\, S\}$$

o numim un snop, iar submulţimea elementelor lui S de forma:

$$D(x, y) = \{z | z \in S, \ xyz \in S, \ x \neq y\}$$

o numim un fascicul.

Cuplului (G, S) i se asociază o structură geometrică numită spaţiul asociat grupului G, notat prin $\mathbb{S}$ $(G.S)$. El constă din ansamblul $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, S, \perp)$, al mulţimii snopurilor, fasciculelor, sistemului de generatori şi relaţia de apartenenţă $(\in)$ definită între ele. Elementele lui $\mathfrak{P}$ le numim în $\mathbb{S}$ $(G.S)$ puncte, cele ale lui $\mathfrak{D}$, drepte iar elementele lui S plane.

Din teoremele stabilite pentru grupul (G, S) se deduce că spaţiul $\mathbb{S}$ $(G.S)$ este o structură de incidenţă în care prin trei puncte necoliniare nu trece totdeauna un plan; prin două puncte trece cel mult o dreaptă; printr-un punct şi o dreaptă neincidente nu trece totdeauna un plan. În spaţiul $\mathbb{S}$ $(G.S)$ se defineşte un grup de deplasări G^* care este izomorf cu grupul G cînd centrul acestuia este format numai din elementul unitate al grupului.

Pentru a sublinia generalitatea spaţiilor de incidenţă introduse, observăm că ele sînt independente de axiome de ordonare, de axiome de continuitate, de axiome de tranzitivitate; adică fiind date două puncte distincte nu există totdeauna o deplasare care transformă unul în celălalt.

Geometria metrică plană sub forma lui B a c h m a n n [2] a fost generalizată pentru spaţiul treidimensional de A h r e n s în [1]. Spaţiile metrice introduse generalizează planele metrice introduse în [4] şi spaţiile metrice introduse în [3].

Două plane $a, b, a \neq b$ se numesc perpendiculare şi notăm $a \perp b$ dacă în G, produsul ab este involutiv. Spaţiul asociat $\mathbb{S}$ $(G.S)$ împreună cu relaţia de perpendicularitate $\perp$ îl numim spaţiul metric asociat grupului $(G.S)$ şi se notează $\mathbb{S}$ $(G, S, \perp)$.

1. Proprietăţi ale spaţiului metric asociat $\mathbb{S}$ $(G., S, \perp)$.

DEFINIŢIA 1.1. O dreaptă $D(x, y)$ se numeşte perpendiculară pe planul a, $a \,\overline{\in}\, D(x, y)$ dacă $D(x, y)^a = D(x, y)$ unde $D(x, y)^a = \{z^a | z \in D(x, y)\}$.

TEOREMA 1.1. *Fie* z *un plan şi* D(x, y) *o dreaptă astfel ca* $z \in D(x, y)$ *atunci* $z^a \in D(x, y)$ *dacă şi numai dacă* $a \in D(x, y)$ *sau* $a \perp z$.

Demonstraţie. Presupunem $z, z^a \in D(x, y)$ şi $a \,\overline{\in}\, D(x, y)$ atunci din $zaz^a = zaaza = zza = a$ rezultă

$$z, z^a \in D(x, y) \cap D(a, z)$$

Deoarece $a \in D(x, y)$ rezultă $D(x, y) \neq D(a, z)$ atunci conform teoremei 2.8 din [5] rezultă $z = z^a$ şi deci $az = za$ adică $z \perp a$.

Invers, dacă $a \in D(x, y)$ atunci din $a, z, a \in D(x, y)$ rezultă $aza \in D(x, y)$ conform teoremei 2.7 din [7] şi deci $z^a \in D(x, y)$. Dacă $z \perp a$ atunci $z^a = z$ şi deci $z^a \in D(x, y)$.

TEOREMA 1.2. *Dacă* D(a, b) $\perp$ c *atunci* c $\perp$ x, *oricare ar fi* x $\in$ D(a, b).

Demonstraţie. Dreapta $D(a, b)$ fiind perpendiculară pe planul c înseamnă că $D(a, b)^c = D(a, b)$. Deoarece $c \overline{\in} D(a, b)$ înseamnă că $abc \overline{\in} S$ şi deci există un punct $P_1 = P(a, b, c)$. Fie $P_2 \neq P_1$ un punct care conţine planele a, b care conform axiomei B din [5] există. Avem $a, b \in \in P_1 \cap P_2$. Atunci pentru un plan $x \in D(a, b)$ rezultă conform teoremei 3 din [6] $x \in P_1$ şi $x \in P_2$.

Planele c şi x mai au un punct comun $P_3 \neq P_1$. Planul $x^c \in D(a, b)$ deoarece dreapta $D(a, b) = D(a, b)^c$ şi deci $x^c \in P_1 \cap P_2$. Punctul $P_3 \in c$ şi rezultă conform teoremei 4.3 din [5] că $P_3 = P_3^c$ adică $x^c \in P_3$.

Am obţinut în acest fel următoarele relaţii:

$$x \in P_1 \cap P_2 \cap P_3; \quad x^c \in P_1 \cap P_2 \cap P_3; \; c \in P_1 \cap P_2$$

Dacă prepunem $x \neq x^c$ atunci conform teoremei 4 [6]$c \in P_2$ şi din $a, b, c \in P_1 \cap P_2$ rezultă conform axiomei A din [5] $abc \in S$ ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $c \overline{\in} D(a, b)$ şi deci $x = x^c$ adică $xc = cx$, şi $x \perp c$.

TEOREMA 1.3. *Dacă* γ = abc *şi* d $\overline{\in}$ P(γ) *atunci din* a $\perp$ d *rezultă* P(γ) $\neq$ P(γ^d).

Demonstraţie. Deoarece $a \not\perp d$ rezultă $a \neq a^d$. Presupunem că $P(\gamma) = P(\gamma^d)$ atunci avem $a, a^d \in P(\gamma)$ deci $D(a, a^d) I P(\gamma)$. Avem $D(a, a^d)^d = D(a^d, a)$ ceea ce conform teoremei 1.1 şi teoremei 1.2 înseamnă că $D(a, a^d)^d$ este sau fixă element cu element, ceea ce nu se poate deoarece $a \perp d$, sau $d \in D(a^d, a)$. Avem $a^d, a \in P(\gamma)$ şi $d \in D(a^d, a)$; rezultă conform teoremei 3 din [6] că $d \in P(\gamma)$ contrar ipotezei.

TEOREMA 1.4. *Dacă* b $\in$ P(α) *atunci* b^a $\in$ P(α) *este echivalent cu* a $\in$ P(α) *sau* a $\perp$ b.

Demonstraţie. Dacă $a, b \in P(\alpha)$ atunci din $a, b, a \in P(\alpha)$ conform teoremei 2.5 din [5] rezultă $aba \in P(\alpha)$ şi deci $b^a \in P(\alpha)$. Să arătăm acum că din $b \in P(\alpha)$ şi $ab = ba$ rezultă $b^a \in P(\alpha)$. Avem $\alpha b \in S^2$ şi $ab = ba$ atunci $\alpha b^a = \alpha aba = \alpha baa = \alpha b \in S^2$ şi deci $\alpha b^a \in S^2$.

Invers, dacă $b, b^a \in P(\alpha)$ atunci trebuie să arătăm că $a \in P(\alpha)$ sau $a \perp b$. Presupunem contrariul că $a \overline{\in} P(\alpha)$ şi $b \neq b^a$. Din $b \neq b^a$ rezultă conform teoremei 1.1 că $D(b, b^a) \in a$ ceea ce împreună cu $b, b^a \in P(\alpha)$ implică pe baza teoremei 3 din [6] $a \in P(\alpha)$ contrar ipotezei.

2. Teoreme de existență asupra punctelor și dreptelor spațiului metric $\mathcal{S}$ (G, S, $\perp$).

LEMA 2.1. *Oricare ar fi* x *un plan, există un punct* P(α) *astfel ca* x $\bar{\in}$ P(α).

Demonstrație. Conform axiomei B din [5] pentru planul x și un plan y există două puncte distincte P_1 și P_2 astfel ca $x, y \in P_1 \cap P_2$. Cele două puncte fiind distincte există un plan $a \in P_1$ și $a \bar{\in} P_2$.

Planele a și y, conform axiomei B, aparțin unui snop $P_3 \neq P_1$. Planul $x \bar{\in} P_3$. Într-adevăr presupunînd contrariul avem:

$$x, y \in P_1 \cap P_2 \cap P_3; \; a \in P_1 \cap P_3$$

și conform teoremei 4 din [6] a $\in P_2$, contrar ipotezei.

TEOREMA 2.1. *În orice plan* x *există trei puncte necoliniare.*

Demonstrație. Fie x un plan oarecare atunci conform lemei precedente există un punct $P(\alpha)$ astfel ca $x \bar{\in} P(\alpha)$. Fie $\alpha = abc \bar{\in} S$ atunci $abx \bar{\in} S$ deoarece în caz contrar $abxc \in S^2$ de unde $x \in P(\alpha)$ contrar ipotezei, rezultă că există un punct $P(a, b, x) \ni x$. În mod analog obținem punctul $P(a, c, x) \ni x$ și $P(b, c, x) \ni x$.

Presupunem $P(b, c, x) = P(a, c, x)$ atunci am avea $a \in P(b, c, x)$ și deci $abcx \in S^2$ contrar ipotezei. Deci cele trei puncte sînt distincte.

Să arătăm că cele trei puncte sînt necoliniare. Presupunem contrariu, că există x, y cu $x \neq y$ astfel că $x, y \in P(a, b, x) \cap P(a, c, x) \cap P(b, c, x)$ atunci din $c \in P(a, c, x) \cap P(b, c, x)$ conform teoremei 4 din [6] am avea $c \in P(abx)$ deci $cabx \in S^2$ ceea ce conduce la o contradicție.

Conform definiției sale un punct propriu este jonctibil cu oricare alte două puncte necoliniare cu el, printr-un plan. Vom demonstra acum că un punct propriu este jonctibil cu un punct oarecare, adică printr-un punct propriu și un punct oarecare există o dreaptă.

TEOREMA 2.2. *Dacă* P(α) *este un punct propriu atunci oricare ar fi* P(β) *un punct există* x, y $\in$ P(α) $\cap$ P(β).

Demonstrație. Fie $P(\alpha)$ un punct propriu și a un plan astfel ca $a \bar{\in} P(\alpha)$ atunci dacă $P(\beta)$, $P(\gamma)$, $P(\gamma)$ sînt trei puncte necoliniare incidente cu a, există planul $x \in P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\gamma)$ și planul $y \in P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\delta)$ și deci există $x, y \in P(\alpha) \cap P(\beta)$.

DEFINIȚIA 2.1. Un punct $P(\alpha)$ se numește un pol pentru un plan a dacă oricare ar fi $x \in P(\alpha)$ avem $ax = xa$.

TEOREMA 2.3. *Există patru puncte proprii necoplanare.*

Demonstrație. Conform axiomei C [5] există un punct propriu $P(\gamma)$ și $u \bar{\in} P(\gamma)$ astfel că $P(\gamma)$ nu este un pol pentru planul u, atunci conform teoremei 1.3 punctul $P(\gamma^u) \neq P(\gamma)$ și conform teoremei 4.5 din [5] $P(\gamma^u)$ este de asemenea un punct propriu. Conform teoremei precedente un punct propriu $P(\gamma)$ este jonctibil cu orice punct şi deci există două plane $b, c \in P(\gamma) \cap P(\gamma^u)$. Fie a planul neperpendicular pe b prin $P(\gamma)$ care conform axiomei C din [5] există, astfel că $abc \in S$. Deoarece $b \in P(\gamma^u)$ şi $b \not\perp a$ rezultă conform teoremei 1.3 că $P(\gamma^{ua}) \neq P(\gamma^u)$. Punctele $P(\gamma)$, $P(\gamma^u)$ şi $P(\gamma^{ua})$ sînt necoliniare deoarece în caz contrar conform teoremei 4 din [6] orice plan incident cu două ar fi incident şi cu al treilea. Planul $b \in P(\gamma) \cap P(\gamma^u)$ dar $b \overline{\in} P(\gamma^{ua})$ deoarece $a \in P(\gamma^u)$ şi $b \not\perp a$ deci cele trei puncte sînt necoliniare. Fie d planul incident cu aceste trei puncte (care există deoarece $P(\gamma)$ este un punct propriu). Notăm cu e planul prin $P(\gamma)$ neperpendicular pe planul d. Acest plan este incident cu cel mult unul din punctele $P(\gamma^u)$ şi $P(\gamma^{ua})$. Presupunem $e \overline{\in} P(\gamma^{ua})$ atunci conform teoremei 3.1, $P(\gamma^{uae}) \neq P(\gamma^{ua})$ deoarece $e \overline{\in} P(\gamma^{ua})$ şi $e \not\perp d$.

Punctul $P(\gamma^{uae}) \overline{\ni} d$ deoarece $d \overline{\in} P(\gamma^{ua})$ deci punctele $P(\gamma)$, $P(\gamma^u)$, $P(\gamma^{ua})$ şi $P(\gamma^{uae})$ sînt patru puncte proprii necoplanare.

Putem acum demonstra că două puncte oarecare $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ distincte sînt jonctibile.

TEOREMA 2.4 *Dacă* $P(\alpha) \neq P(\beta)$ *există* $x, y \in P(\alpha) \cap P(\beta)$.

Demonstraţie. Fie $P(\gamma)$ un punct propriu, atunci oricare ar fi $P(\alpha) \neq P(\beta)$ există un plan $x \in P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\gamma)$. Dacă cele trei puncte sînt coliniare atunci există $a, b \in P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\gamma)$ şi teorema este demonstrată. În caz contrar conform teoremei 2.3 există un punct propriu $P(\delta)$ astfel că $P(\delta) \overline{\ni} x$. Atunci există un plan $y \in P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\delta)$ şi $y \neq x$ deci există $x, y \ni P(\alpha) \cap P(\beta)$.

3. O alta definiţie a dreptei $D(x, y)$. În paragraful precedent ca o consecinţă a existenţei a patru puncte necoplanare am văzut că două puncte oarecare $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ sînt unibile printr-o dreaptă D. Vom demonstra acum că singurele plane incidente cu cele două puncte sînt planele incidente cu dreapta D.

TEOREMA 3.1. *Pentru două puncte distincte* $P(\alpha) \neq P(\beta)$ cu $x, y \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ *avem următoarea relaţie:*

$$\{z | xyz \in S\} = \{z | z \in P(\alpha) \cap P(\beta)\}.$$

Demonstraţie. Fie z astfel ca $xyz \in S$, conform teoremei 3 din [6] rezultă $z \in P(\alpha)$ deoarece $x, y \in P(\alpha)$ şi la fel $z \in P(\beta)$ deci $z \in P(\alpha) \cap P(\beta)$.

Invers fie $z \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ atunci avem $x, y, z \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ şi conform axiomei A din [5] $xyz \in S$.

Deci dreapta prin două puncte există şi este unică deoarece şi dreapta prin două plane x, y există şi conform teoremei 2.8 din [5] este unică.

Vom nota $D(x, y) = D(P(\alpha), P(\beta))$ dacă vrem să numim dreapta prin punctele $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$.

Consecinţa 1. Conform teoremei demonstrate oricare ar fi $P(\gamma)$ şi $P(\delta)$ două puncte incidente cu x, y

$D(x, y) = D(P(\gamma), P(\delta))$ deci această definiție a dreptei prin mulțimea planelor incidente cu două puncte nu depind de alegerea punctelor pe dreapta respectivă. Putem spune deci că din $P_1, P_2 I D_1, D_2$ rezultă $D_1 = D_2$ sau $P_1 = P_2$.

Consecința 2. O altă consecință este că dacă $P_1, P_2 I a$, și $P_1, P_2 I D$ atunci $a I D$.

Consecința 3. Din $D, P I a, b$ rezultă $a = b$ sau $D I P$.

(Intrat în redacție la 8 ianuarie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Ahrens, J., *Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbergriff*, Math. Zeitschr, **71** (1959).
2. Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbergriff*, Grundlehren d. Math. Wiss., Bd. **96** (1959).
3. Dicuonzo, V. *Sulla construzione gruppale di una geometria metrica a debole struttura d'incidenzo*, Rend. di Mat. e delle sue appl., XXV, pp. 593–603.
4. Lingenberg, R., *Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt*, I, II, III, IV, „Math. Ann.," **137** (1959), 26–41, 83–106; **142** (1961), 184–224; **158** (1965), 297–325.
5. Vasiu, A., *Grupuri (G.S) cu sistem de generatori involutivi (I)*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai ser. Math-Mech.", f. 2, 1973, 13–20.
6. Vasiu, A., *Grupuri (G.S) cu sistem de generatori involutivi (II)*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai ser. Math-Mech.," f. 1, 1974, 33–36.
7. Vasiu, A., *Fundamentarea geometriei absolute metrice a spațiului în baza proprietăților grupale*, Teză de doctorat, Cluj (1972).

ESPACES MÉTRIQUES $\mathfrak{S}$ (G., S, $\perp$) (I)

(Résumé)

Dans cette note on étudie les propriétés métriques des espaces $\mathfrak{S}$ $(G.S)$ introduits en [5], associés à un groupe G, qui admet un système de générateurs S formé d'éléments involutifs. La seconde partie est consacrée à la déduction des théorèmes d'existence pour l'espace associé $\mathfrak{S}$ $(G.,S)$.

ASUPRA NOŢIUNII DE O-LIMITĂ A UNEI APLICAŢII ÎNTR-UN PUNCT

D. BORŞAN

1. În cele ce urmează, se consideră aplicaţii definite pe un spaţiu topologic X şi cu valori într-o mulţime Y dotată cu o structură de latice completă, în raport cu o relaţie de ordonare parţială „$\leq$". În lucrare se introduce şi se studiază noţiunea de 0-limită (limită în raport cu ordonarea din Y) a unei aplicaţii $f: X \to Y$, într-un punct $x_0 \in X$. Se compară apoi această 0-limită cu noţiunea uzuală de limită a aplicaţiei f în x_0, relativ la anumite topologii de tip special, definite pe Y cu ajutorul relaţiei de ordonare.

2. Fie X un spaţiu topologic, Y o latice completă relativ la ordonarea parţială „$\leq$" şi $f: X \to Y$. Pentru $x_0 \in X$ notăm cu $\mathcal{V}_{x_0}$ filtrul vecinătăţilor punctului x_0 şi cu $\dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ familia vecinătăţilor stricte nevide ale lui x_0. 0-limitele extreme ale aplicaţiei f în x_0 (0-limita superioară notată $0\text{-}L_f(x_0)$ şi 0-limita inferioară, $0 - l_f(x_0)$) se definesc în modul următor ([3]):

$$0 - L_f(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{dacă } x_0 \text{ este punct izolat în } X \\ \inf\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} & \text{dacă } x_0 \text{ este punct de acumulare în } X \end{cases}$$

$$0 - l_f(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{dacă } x_0 \text{ este punct izolat în } X \\ \sup\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\inf\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} & \text{dacă } x_0 \text{ este punct de acumulare în } X \end{cases}$$

DEFINIŢIE (2.1). Fie X un spaţiu topologic, Y o latice completă, $f: X \to Y$ şi x_0 un element din X. Un element $h \in Y$, este prin definiţie, 0-limita aplicaţiei f în punctul x_0, dacă $h = 0 - L_f(x_0) = 0 - l_f(x_0)$.

Evident 0-limita unei aplicaţii într-un punct este unică. Vom folosi notaţia $h = 0 - \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

TEOREMA (2.1). *Fie* X *un spaţiu topologic,* Y *o latice completă* $f: X \to Y$ *şi* x_0 *un punct de acumulare din* X. *Dacă* $h = 0\text{-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *atunci oricare ar fi şirul generalizat* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, *strict convergent către* x_0, *în spaţiul* X, *şirul generalizat* $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ *0-converge, în laticea* Y, *către* h.

Demonstraţie. Fie $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ un şir generalizat din X, strict convergent [6] către x_0. Urmează că oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ există $\alpha_V \in A$ astfel ca $\alpha_V \leq_A \alpha$ să implice $x_\alpha \in \dot{V}$ (am notat cu „$\leq_A$" ordonarea parţială din A). Folosind notaţiile $y_{\dot{V}} = \sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}$ şi $y'_{\dot{V}} = \inf\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}$ avem atunci $y'_{\dot{V}} \leq \leq f(x_\alpha) \leq y_{\dot{V}}$ pentru $\alpha \geq_A \alpha_V$. Cum $\dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ este superior filtrantă faţă de ordonarea „$\dashv$" definită prin $\dot{V} \dashv \dot{U} \Leftrightarrow \dot{U} \subseteq \dot{V}$, unde $\dot{V}, \dot{U} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}$, ([3]), putem vorbi despre şirurile generalizate $(y_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}}$ şi $(y'_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}}$.

Aceste şiruri generalizate se bucură de următoarele proprietăţi:

1. $(y'_{\dot V})_{\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}}$ este nedescrescător şi $(y_{\dot V})_{\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}}$ este necrescător;

2. $\sup\limits_{\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{y'_{\dot V}\} = 0 - l_f(x_0)$ iar $\inf\limits_{\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{y_{\dot V}\} = 0 - L_f(x_0)$;

3. pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $\alpha_V \in A$, astfel ca $y'_{\dot V} \le f(x_\alpha) \le y_{\dot V}$, pentru $\alpha \ge_A \alpha_V$. Cum, prin ipoteză $0 - l_f(x_0) = 0 - L_f(x_0) = h$, cum se cunoaşte din teoria 0-convergenţei ([8], [1]) proprietăţile 1—3 arată că $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} h$.

În ipoteza că Y este un lanţ complet, dens în sine ([1]) este valabilă şi reciproca acestei teoreme:

TEOREMA (2.2). *Fie* X *un spaţiu topologic,* Y *un lanţ complet, dens în sine,* $f: X \to Y$ *şi* x_0 *un punct de acumulare din* X. *Dacă pentru orice şir generalizat din* X, *strict convergent către* x_0, *şirul generalizat al valorilor corespunzătoare ale funcţiei* 0-*converge către* $h \in Y$, *atunci* h *este* 0-*limita funcţiei în punctul* x_0.

Demonstraţie. Vom demonstra că $0 - L_f(x_0) = h$. În mod analog se arată că şi $0 - l_f(x_0) = h$. Raţionînd prin contradicţie, presupunem $h \ne 0 - L_f(x_0)$. Atunci $h < 0 - L_f(x_0)$ (vezi teorema (2.3) din [3]). Ordonarea din Y fiind densă, există $h_1 \in Y$, astfel ca $h < h_1 < 0 - L_f(x_0)$. Conform teoremei (1.2) din [3] pentru orice $\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ există $x_{\dot V} \in \dot V$, astfel încît $f(x_{\dot V}) > h_1$. Şirul generalizat $(x_{\dot V})_{\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}}$ converge strict către x_0, deoarece dacă $\dot U \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}$, $x_{\dot V} \in \dot U$ pentru orice $\dot V \subseteq \dot U$, deci pentru $\dot U \dashv \dot V$. Prin ipoteză, avem atunci $0\text{-}\lim f(x_{\dot V}) = h$. Cum însă $f(x_{\dot V}) > h_1$ pentru orice $\dot V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ urmează că $0\text{-}\lim f(x_{\dot V_i}) = h \ge h_1$. Contradicţia la care am ajuns dovedeşte că $0 - L_f(x_0) = h$.

3. În laticea completă Y ordonarea parţială permite introducerea unor topologii de tip special, cum sînt: interval-topologia, topologia ordonării. Ne întrebăm dacă există vreo legătură între 0-limita unei aplicaţii $f: X \to Y$, într-un punct $x_0 \in X$ şi limita în x_0 (în sens uzual) a aplicaţiei f, privită ca aplicaţie a spaţiului topologic X, în spaţiul topologic Y. Întrebarea este legitimă deoarece avem în vedere topologii pe Y, definite cu ajutorul ordonării.

DEFINIŢIA (3.1). Y fiind o latice completă, topologia care are ca subbază a mulţimilor închise familia tuturor intervalelor închise $[a, b] = \{y \in Y | a \le y \le b\}$ din Y, se numeşte interval-topologia pe Y. O vom nota cu τ_i([4]).

DEFINIŢIA (3.2). Topologia pe Y, relativ la care o mulţime $M \subseteq Y$ este închisă dacă şi numai dacă 0-limita oricărui şir generalizat 0-convergent de elemente din M, aparţine de asemenea lui M, se numeşte topologia ordonării pe Y. O vom nota cu τ_0 ([8]).

Pentru o aplicaţie $f: X \to Y$, unde X este un spaţiu topologic, iar Y o latice completă putem vorbi despre 0-limita aplicaţiei f într-un punct

$x_0 \in X$; τ_i-limita aplicaţiei f în x_0 (dacă dotăm mulţimea Y cu topologia τ_i) şi τ_0-limita lui f în x_0 (limita în raport cu topologia τ_0 pe Y).

TEOREMA (3.1). *Fie* $f : X \to Y$, *unde* X *este un spaţiu topologic, iar* Y *o latice completă. Dacă* $h \in Y$ *este* 0*-limita aplicaţiei* f *în* $x_0 \in X$, *atunci* h *este şi* τ_i*-limita şi* τ_0*-limita aplicaţiei* f *în* x_0.

Demonstraţie. Dacă x_0 este punct izolat din X avem $0 - L_f(x_0) = 0 - l_f(x_0) = h = f(x_0)$ şi de asemenea $\tau_i - \lim_{x\to x_0} f(x) = \tau_0 - \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = h$.

Dacă x_0 este un punct de acumulare în X, atunci, conform teoremei (2.1), oricare ar fi şirul generalizat $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ din X, strict convergent către x_0, avem $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} h$.

Se cunoaşte însă ([8]) că convergenţa în raport cu topologia ordonării (τ_0-convergenţa) este mai generală decît 0-convergenţa. Avem deci $f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} h$. În ipotezele teoremei putem deci afirma că oricare ar fi şirul generalizat $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, strict convergent către x_0, şirul generalizat $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ τ_o-converge către h. Se cunoaşte atunci că $h = \tau_o - \lim_{x\to x_0} f(x)$. Cum topologia ordonării este mai fină decît interval-topologia ([7]) urmează imediat că $h = \tau_i - \lim_{x\to x_0} f(x)$ şi teorema este complet demonstrată.

TEOREMA (3.2.) *Fie* X *un spaţiu topologic,* Y *un lanţ complet dens în sine şi* $f : X \to Y$. *Dacă* (Y, τ_0) *este spaţiu* T_2, *atunci* $h = \tau_o - \lim_{x\to x_0} f(x)$ *dacă şi numai dacă* $h = 0 - \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Demonstraţie. Ţinînd seama de teorema (3.1), rămîne să demonstrăm că $h = \tau_o - \lim_{x\to x_0} f(x)$ implică $h = 0 - \lim_{x\to x_0} f(x)$. Cazul cînd x_0 este punct izolat în X este banal.

Fie x_0 punct de acumulare în X. Să presupunem că $h = \tau_o - \lim_{x\to x_0} f(x)$. Se cunoaşte atunci că oricare ar fi un şir generalizat din X, strict convergent către x_0, şirul generalizat al valorilor corespunzătoare ale funcţiei τ_o-converge către h. În [3] am arătat însă (teorema (2.2) din [3]) că există un şir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, convergent strict către x_0, astfel ca $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} 0 - L_f(x_0)$.

0-convergenţa fiind mai restrictivă decît τ_o-convergenţa, putem scrie în definitiv că $f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} 0 - L_f(x_0)$. Avem însă, în baza ipotezei, şi $f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} h$. Spaţiul (Y, τ_o) fiind presupus T_2, τ_o-limită oricărui şir generalizat convergent din Y este unică, deci $h = 0 - L_f(x_0)$. Un raţionament analog arată că avem de asemenea $h = 0 - l_f(x_0)$.

4. Unei aplicaţii f, definită pe un spaţiu topologic X şi cu valori într-o latice completă Y, i se asociază ([2]) aplicaţiile $\bar{f}$ şi $\underline{f}$, definite în modul următor:

$$\bar{f}(x_0) = \inf_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\sup_{x\in V} \{f(x)\}\} \text{ şi } \underline{f}(x_0) = \sup_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\inf_{x\in V} \{f(x)\}\}$$

pentru $x_0 \in X$.

TEOREMA (4.1.) *Pentru o aplicaţie* f *definită pe spaţiul topologic* X *şi cu valori în laticea completă* Y, *avem* $\underline{f}(x_0) \leq 0 - l_f(x_0) \leq 0 - L_f(x_0) \leq \leq \bar{f}(x_0)$ *pentru orice* $x_0 \in X$.

Demonstraţie. Deoarece oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\dot{V} \subseteq V$, avem $\sup\limits_{x \in \dot{V}}\{f(x)\} \leq \leq \sup\limits_{x \in V}\{f(x)\}$ şi $\inf\limits_{x \in \dot{V}}\{f(x)\} \geq \inf\limits_{x \in V}\{f(x)\}$. Urmează că $\underline{f}(x_0) \leq 0 - l_f(x_0)$ şi $\bar{f}(x_0) \geq 0 - L_f(x_0)$. Dacă ţineam seama că $0 - l_f(x_0) \leq 0 - L(x_0)$ ([3]), teorema este demonstrată.

TEOREMA (4.2.) *Dacă aplicaţia* f, *definită pe spaţiul topologic* X *şi cu valori în laticea completă* Y *este* 0-*continuă în* $x_0 \in X$ ([2]), *atunci* f *este şi* τ_0-*continuă în* x_0.

Demonstraţie. Presupunem că f este 0-continuă, deci $\bar{f}(x_0) = \underline{f}(x_0) = = f(x_0)$. Conform teoremei (4.1) avem atunci $0 - l_f(x_0) = 0 - L_f(x_0) = = f(x_0)$; prin urmare, $0 - \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Urmează (teorema 2.1) că τ_o-$\lim f(x) = f(x_0)$, deci f este τ_o-continuă în x_0.

(Intrat în redacţie la 21 septembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. **XXV.** 1967.
2. D. Borşan, *Aplicaţii O-semicontinue*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech.," 2, 1972, pp. 21–29.
3. D. Borşan, *O-limite extreme ale unei aplicaţii într-un punct*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech.", 2, 1974, pp. 26–31.
4. O. Frink, *Topology in lattices*, Trans. of. the „Amer. Math. Soc.," **51,** 1942, pp. 569–582.
5. J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, **1955.**
6. M. Nicolescu, *Analiză matematică*, t II, Bucureşti, 1958.
7. A. Ward, *On relation between certain intrinsec topologies in partially ordered sets*, „Proc. Cambridge Philos. Soc.," **51,** 1955, pp. 254–61.
8. C. Vulih, *Vvedenie v teoriu poluuporiadocinîh, prostranstv*, Moskva, 1961.

ABOUT THE *O*-LIMIT IN A POINT

(Summary)

The paper defines and discusses the concept of O-limit in a point, for mappings defined on a topological space X with values in a complete lattice Y. Then a comparison between the usual limit of an application and its O-limit in a point is done, in some special types of topologies.

ALPHA-CONVEX FUNCTIONS AND DERIVATIVES IN THE NEVANLINNA CLASS

SANFORD S. MILLER[1] **and PETRU T. MOCANU**

1. **Introduction.** In this paper we determine whether or not the n^{th}-derivative of an α-convex function belongs to some Hardy class or the Nevanlinna class.

DEFINITION. Let α be real and suppose that $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$ is regular in the unit disc D with $f(z)\, f'(z) \neq 0$ in $0 < |z| < 1$. If $Re[(1 - \alpha) zf'(z)/f(z) + \alpha(zf''(z)/f'(z) + 1)] > 0$ for $z \in D$, then $f(z)$ is said to be an alpha-convex function. We denote the class of these functions by $\mathfrak{M}_\alpha$.

It is known that if $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ then $f(z)$ is univalent, starlike [7]. Moreover if $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ and $|\alpha| > 2$ then $f(z)$ is bounded [4, 6].

In what follows we denote by $K_\tau(z)$ the Koebe function $z/(1 - e^{i\tau}z)^2$, where τ is a real constant. In addition we define the function $f_\tau(\alpha, z)$ as

$$f_\tau(\alpha, z) = \begin{cases} K_\tau(z) & \text{for } -2 \leq \alpha \leq 0, \text{ and} \\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z K_\tau(\zeta)^{1/\alpha}\zeta^{-1}\, d\zeta\right]^\alpha & \text{for } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

If $f(z)$ is regular in D and the integrals $\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ are bounded for $r < 1$ then $f(z)$ is of bounded characteristic and $f(z)$ is in the Nevanlinna class N. If $p > 0$ and $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta$ remains bounded as $r \to 1$, then $f(z)$ belongs to the Hardy class $H^p \cdot H^\infty$ is the class of bounded regular functions in D. Note that $H^\infty \subset H^p \subset N$.

If $f(z)$ is univalent then it is known [1, Theorem 3.16] that $f(z) \in H^p$ for $p < 1/2$. Moreover, the n^{th}-derivative of the Koebe function $K_\tau(z)$, which is the extremal function for so many problems in the theory of univalent functions, has the property that $K_\tau^{(n)}(z) \in H^p$ when $p < 1/(2+n)$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$ In [5] an example is given of a univalent function $f(z)$ for which $f'(z) \notin N$. In this paper we will show that if $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ then $f'(z)$ for any α and $f''(z)$ for $\alpha \neq 0$ are in some Hardy classes. We will also show that there exist functions $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ for which higher derivatives are not even in the Nevanlinna class.

---

[1] The first author acknowledges support received from the National Academy of Sciences through its exchange program with the Academy of the Socialist Republic of Romania

2. Preliminary Lemmas. LEMMA 1. *If* $f(z) \in H^\lambda$ *for* $\lambda < p$ *and* $g \in H^\lambda$ *for* $\lambda < q$ *then* $f(z)g(z) \in H^\lambda$ *for* $\lambda < pq/(p+q)$.

Proof. By Hölder's inequality we have

$$\int_0^{2\pi} |f(z)g(z)|^\lambda d\theta \leq \left[\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\lambda s} d\theta\right]^{1/s} \left[\int_0^{2\pi} |g(z)|^{\lambda t} d\theta\right]^{1/t} \equiv I_1(r) \cdot I_2(r)$$

where $z = re^{i\theta}$, $1/s + 1/t = 1$ and $s > 1$. The first term $I_1(r)$ will be bounded as $r \to 1$ if $\lambda s < p$ and $I_2(r)$ will be bounded as $r \to 1$ if $\lambda t < q$. These inequalities will hold if $\lambda < pq/(p+q)$.

Note that the inequalities in Lemma 1 can be replaced by other combinations of inequalities and equalities. For example, $f \in H^p$ and $g \in H^q$ imply that $fg \in H^{pq/(p+q)}$.

As an immediate extension of Lemma 1 we obtain:

LEMMA 2. *If* $f_i(z) \in H^\lambda$ *for* $\lambda < p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $\prod_{i=1}^n f_i(z) \in H^\lambda$ *for* $\lambda < \prod_{i=1}^n p_i / \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \ldots \hat{p}_i \ldots p_n$, *where* $\hat{p}_i$ *indicates that the term* p_i *is omitted.*

LEMMA 3. *If* $P(z)$ *is regular in* D *and* $\operatorname{Re} P(z) > 0$ *then* $P(z) \in H^\lambda$ *for* $\lambda < 1$.

LEMMA 4. *If* $f'(z) \in H^p (0 < p < 1)$ *then* $f(z) \in H^{p/(1-p)}$.

LEMMA 5. (*i*) *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ *and* $|\alpha| > 2$ *then* $f(z) \in H^\infty$. (*ii*) *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $|\alpha| \leq 2$ *and* $f(z) \neq f_\tau(\alpha, z)$ *then* $f(z) \in H^p$ *where*

$$p = \begin{cases} \infty & \text{if } \alpha = 2, \\ 1/(2-\alpha) + \varepsilon & \text{if } 0 \leq \alpha < 2, \\ 1/2 + \varepsilon & \text{if } -2 < \alpha \leq 0, \\ \infty & \text{if } \alpha = -2, \end{cases}$$

and $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$.

(iii) If $f(z) = f(\alpha, z)$ then $f(z) \in H^p$ for all

$$\begin{array}{ll} p > 0 & \text{if } \alpha = 2, \\ p < 1/(2-\alpha) & \text{if } 0 \leq \alpha < 2, \\ p < 1/2 & \text{if } -2 \leq \alpha \leq 0. \end{array}$$

Lemma 3 is well known, Lemma 4 is in [1, Theorem 5.12] and the various parts of Lemma 5 are in [2, 3, 4, 6].

3. Main Results. THEOREM 1. (i) *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ *and* $\alpha < -2$ or $2 \leq \alpha$ *then* $f'(z) \in H^p$ *for all* $p < 1$.

(ii) *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $-2 \leq \alpha < 2$ *and* $f(z) \neq f_\tau(\alpha, z)$ *then* $f'(z) \in H^p$ *for all* $p < 1$ *when* $\alpha = -2$, *and* $f'(z) \in H^p$ *where*

$$p = \begin{cases} 1/(3-\alpha) + \varepsilon & \text{if} \quad 0 \leq \alpha < 2, \\ 1/3 + \varepsilon & \text{if} \quad -2 < \alpha \leq 0 \end{cases}$$

and $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$.

(iii) *If* $f(z) = f_\tau(\alpha, z)$ *then* $f(z) \in H^p$ *for all*

$$p < 1/(3-\alpha) \quad \text{if} \quad 0 \leq \alpha < 2,$$

$$p < 1/3 \quad \text{if} \quad -2 \leq \alpha \leq 0.$$

Proof. Since $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ implies that $f(z)$ is starlike we can write $f'(z) = f(z)P(z)/z$ where $P(z)$ is regular in D and $Re\ P(z) > 0$. By applying Lemmas 1, 3 and 5 we obtain our result. Note that the ε of the theorem need not be the same ε as in Lemma 5.

THEOREM 2. *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, *then* $f''(z)/f'(z) \in H^p$ *for all* $p < 1$ *and* $\ln f'(z) \in H^p$ *for all* $p > 0$, *where* $\ln w$ *represents some single-valued branch of the logarithmic function.*

Proof. If we set $J(\alpha, f(z)) = (1-\alpha)zf'(z)/f(z) + \alpha(zf''(z)/f'(z) + 1)$ then $J(\alpha, f(z))$ is regular in D, $Re\ J(\alpha, f(z)) > 0$ and hence by Lemma 3 $J(\alpha\ f(z)) \in H^p$ for all $p < 1$.

Since $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ implies that $f(z)$ is starlike we must have $zf'(z)/f(z) = P(z)$ where $P(z) \in H^p$ for all $p < 1$.

If $\alpha \neq 0$ then

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{\alpha} J(\alpha, f(z)) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} P(z) - 1$$

and

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|^p d\theta \leq \frac{1}{|\alpha|^p} \int_0^{2\pi} |J(\alpha, f(z))|^p\, d\theta + \left| \frac{1-\alpha}{\alpha} \right| \int_0^{2\pi} |P(z)|^p\, d\theta + 2\pi$$

for $0 < p < 1$ and $z = re^{i\theta}$. From the H^p properties of $J(\alpha, f(z))$ and $P(z)$ we obtain $f''(z)/f'(z) \in H^p$ for all $p < 1$.

If we set $g(z) = \ln f'(z)$ then $g'(z) = f''(z)/f'(z)$. Applying Lemma 4 to $g(z)$ we obtain the desired result.

THEOREM 3. (i) *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ *and* $\alpha < -2$ *or* $2 \leq \alpha$ *then* $f''(z) \in H^p$ *for all* $p < 1/2$.

(ii) *If* $f(z) \in \mathcal{M}_\alpha$, $-2 \leq \alpha < 0$ *or* $0 < \alpha < 2$, *and* $(f(z) \neq f_\tau(\alpha, z))$ *then* $f''(z) \in H^p$ *for all* $p < 1/2$ *when* $\alpha = -2$, *and* $f''(z) \in H^p$ *where*

$$p = \begin{cases} 1/(4 - \alpha) + \varepsilon & \text{if} \quad 0 < \alpha < 2, \\ 1/4 + \varepsilon & \text{if} \quad -2 < \alpha < 0, \end{cases}$$

and $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$.

(iii) *If* $f(z) = f_\tau(\alpha, z)$ *then* $f''(z) \in H^p$ *for all*

$$\begin{aligned} p &< 1/(4 - \alpha) \quad \text{if} \quad 0 < \alpha < 2, \\ p &< 1/4 \qquad\quad\ \ \text{if} \quad -2 < \alpha < 0. \end{aligned}$$

Proof. Write $f''(z) = f'(z) \cdot [f''(z)/f'(z)]$ and use Lemma 1 and Theorems I and 2.

Note that if $f(z) \in \mathcal{M}_\alpha$ and $\alpha \neq 0$ then $f''(z)$ belongs to some Hardy class. The value $\alpha = 0$ is critical as we shall now give an example of a function $f(z) \in \mathcal{M}_0$ for which $f''(z) \notin H^p$ for any p.

THEOREM 4. *There exists a function* $f(z) \in \mathcal{M}_0$ *such that* $f''(z) \notin N$.

Proof. In [5] an example is given of a regular function $g(z)$ which is bounded ($|g(z)| < b$) with $g(0) = 0$ and such that $\lim_{r\to1} g'(re^{i\theta})$ fails to exist almost everywhere. If we let $P(z) = (b + g(z))/b$ then $P(z)$ is regular, $Re\, P(z) > 0$, and hence by Lemma 2 $P(z) \in H^\lambda$ for $\lambda < 1$. Since $P'(z) = g'(z)/b$ we see that $\lim_{r\to1} P'(re^{i\theta})$ fails to exist almost everywhere.

Consider the function $f(z)$ defined by

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = P(z)$$

Clearly $f(z) \in \mathcal{M}_0$ and suppose $f''(z) \in N$. By differentiation we obtain

$$\frac{zf''(z) + f'(z) - P(z)f'(z)}{f(z)} = P'(z)$$

Since $f(z), f'(z), f''(z), P(z) \in N$ and $f(z) \not\equiv 0$ $\lim_{r\to1} P'(re^{i\theta})$ exists almost everywhere [1, Theorem 2.2]. This is a contradiction and hence $f''(z) \notin N$.

Remarks. (i) Because of Theorem 3 we see that the function $f(z)$ constructed in the last theorem is in $\mathcal{M}_\alpha$ only for $\alpha = 0$. This function is unusual in being „purely starlike" and having no form of convexity.

(ii) Since $\mathcal{M}_0 = S^*$, the class of starlike functions, and $H^p \subset N$, by considering Lemma 4 we see that there exists $f(z) \in S^*$ such that $f^{(n)}(z) \notin H^p$ for any $p > 0$, for $n = 2, 3, 4 \ldots$

If $P(z)$ is a regular function with $Re\, P(z) > 0$ then in general $P'(z) \notin H^\lambda$ for any λ (see Theorem 4). However, if $f(z) \in \mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, and $P(z) \equiv zf'(z)/f(z)$ we can show that $P'(z) \in H^\lambda$ for $\lambda < 1/2$.

LEMMA 6. *If* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, *then* $zf''(z)/f(z)$ *and* $(zf'(z)/f(z))'$ *are in* H^λ for $\lambda < 1/2$.

Proof. We can set

$$\frac{zf''(z)}{f(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

and use Theorem 2, Lemma 1 and Lemma 3 to obtain the first result.

Since

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)' = \frac{zf''(z)}{f(z)} + \frac{f'(z)}{f(z)} - z\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$$

our second result follows from the H^p properties of $f''(z)/f(z)$ and $f'(z)/f(z)$.

THEOREM 5. *There exists a function* $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, *such that* $f'''(z) \notin N$.

Proof. Because of Remark (ii) we need not consider the case $\alpha = 0$. If we take $P(z)$ as defined in Theorem 4, and define $f(z)$ as the solution of

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) = P(z),$$

with $\alpha \geqslant 0$, $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$, then $f(z)$ is well defined and $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$ [8].

Suppose that $f'''(z) \in N$. By differentiation we obtain

$$(1-\alpha)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)' + \alpha\frac{f'(z)[zf'''(z) + f''(z)] - z(f''(z))^2}{(f'(z))^2} = P'(z)$$

Since $(zf'(z)/f(z))'$, $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z) \in N$ and $f'(z) \neq 0$, $\lim_{r\to 1} P'(re^{i\theta})$ exists almost everywhere [1, Theorem 2.2]. This is a contradiction and hence $f'''(z) \notin N$.

Remarks. (i) The problem of proving the theorem for $\alpha < 0$ remains an open question.

(ii) In light of Lemma 4 we see that there exists a function $f(z) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, such that $f^{(n)}(z) \notin H^p$ for any $p > 0$, for $n = 3, 4, 5, \ldots$

(Received July 27, 1974)

REFERENCES

1. Duren, Peter L., *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, and London (1970.)
2. Eenigenburg, P. J., *On α-convex functions*, „Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.", **19**, 3 (1974), 305–310.
3. Eenigenburg, P. J. and Keogh, F. R., *The Hardy class of some univalent functions and their derivatives*, „Michigan Math. J.," **17** (1970), 335–346.
4. Eenigenburg, P. J. and Miller, S. S., *The H^p classes for α-convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973), 558–562.

5. Lohwater, A. J., Piranian, G. and Rudin, W., *The derivative of a schlicht function*, „Math. Scand.," **3** (1955), 103–106.
6. Miller, Sanford S., *Distortion Properties of Alpha-Starlike Functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973), 311–318.
7. Miller, S. S., Mocanu, P. T. and Reade, M. O., *All α-convex functions are univalent and starlike*, Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973) 553–554.
8. Miller, S. S., Mocanu, P. T. and Reade, M. O., *Bazilevič functions and generalized convexity*, „Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.," **19**, 2 (1974), 213–224.

FUNCŢII ALFA-CONVEXE ŞI DERIVATELE LOR ÎN CLASA NEVANLINNA

(Rezumat)

În această lucrare autorii studiază posibilitatea de scufundare a funcţiilor alfa-convexe şi derivatelor în anumite clase Hardy sau în clasa lui Nevanlinna.

ON THE CONTROLLABILITY OF CERTAIN NONLINEAR EQUATIONS

IOAN MUNTEAN

1. Introduction. Consider a control system governed by the nonlinear ordinary differential equation

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is the state vector, $u \in R^m$ is the control vector, f: $[t_0, +\infty[\times R^n \times R^m \to R^n$ is a continuous function and $t_0 \in R^1$. Here R^p is the real Euclidean space of dimension p of all vectors $z = (z^1, \ldots, z^p)$ endowed with the norm $|z| = [(z^1)^2 + \ldots + (z^p)^2]^{1/2}$. Let $T > t_0$ be a given number. The equation (1) is said to be *T-controllable* if for every $x_0 \in R^n$ there exist a continuous function $u: [t_0, T] \to R^m$ and a solution $x(t)$ of the equation $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ defined on $[t_0, T]$ such that $x(t_0) = x_0$ and $x(T) = 0$. The equation (1) is said to be *controllable* if it is T-controllable for each $T > t_0$. It is easy to see that the T-controllability implies the global controllability in the sense of K. B. Mirza and B. F. Womack [9], and that the controllability is implied by the periodic controllability in the sense of D. L. Lukes [8] and by the controllability in the sense of A. G. Kartsatos [6].

In this paper we investigate the influence of the controllability or T-controllability of the linear differential equation

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{2}$$

over the controllability or T-controllability of the nonlinear differential equations

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t, x) \tag{3}$$

and

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + h(t, x, u) \tag{4}$$

obtained by a perturbation of linear equation (2). This investigation is motivated by the following example.

Example 1. The scalar linear equation $\dot{x} = u$ is controllable since for each $T > t_0$ and each $x_0 \in R^1$ the constant control $u(t) = -\frac{1}{T - t_0} x_0$ produces the solution $x(t) = x_0 - \frac{t - t_0}{T - t_0} x_0$ with $x(t_0) = x_0$ and $x(T) = 0$. However, the perturbed nonlinear equation $\dot{x} = u + |u|$ is not T-controllable for any $T > t_0$ since for $x_0 > 0$ and any continuous function $u: [t_0, T] \to R^1$ we have

$$x(T) = x_0 + \int_{t_0}^{T} [u(t) + |u(t)|]dt \geqslant x_0 > 0.$$

In § 2 we state a variant of the Kalman's criterion for the controllability of linear equations. In § 3 we give some sufficient conditions for

T-controlability and for controllability of nonlinear equations with the perturbing nonlinear term not depending upon the control vector. More general equations with the perturbing nonlinear term depending upon t, x and u are investigated in § 4. We end with a simple example to illustrate the connection between our results with those recently obtained by G. Aronsson [1] and A. G. Kartsatos [6]. In deriving our results the controllability problem is transformed into one of showing the existence of a fixed point for a suitable mapping, which is then solved by using the Schauder's fixed point theorem and the Banach's contraction principle. Earlier, the controllability problems were studied by means of the fixed point technique by E. B. Lee and L. Markus [7], p. 392, V. A. Čeprasov [2], E. J. Davison and E. G. Kunze [3], K. B. Mirza and B. F. Womack [9], D. L. Lukes [8] and many other authors.

2. **Controllability of linear equations.** In the sequel we are in need of a variant of the well-known criterion of R. E. Kalman [5] for controllability of linear equation (2), in which the matrices $A(t)$ and $B(t)$ are of dimensions $n \times n$ and $n \times m$, respectively, and their entries are real continuous functions on $[t_0, +\infty[$. When a vector $x_0 \in R^n$, a number $T > t_0$ and a continuous function $u: [t_0, T] \to R^m$ are given, the solution $x(t)$ of $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$ with $x(t_0) = x_0$ is defined on $[t_0, T]$ by

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)B(s)u(s)ds,$$

where $\varphi(t, s)$ is the transition matrix of dimensions $n \times n$ defined for $t, s \in [t_0, T]$, that is, $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, s) = A(t)\varphi(t, s)$ and $\varphi(s, s)$ is the identity matrix in R^n. For $T > t_0$ we define the Gramian matrix

$$W(T) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, t)B(t)B^*(t)\varphi^*(t_0, t)dt,$$

where M^* denotes the transpose matrix of M. The matrix $W(T)$ is symmetric and nonnegative definite, and it is positive definite if and only if it is nonsingular.

THEOREM 1. a) *Let $T > t_0$. The equation* (2) *is T-controllable if and only if the matrix $W(T)$ is positive definite.*

b) *The equation* (2) *is controllable if and only if the matrix $W(T)$ is positive definite for all $T > t_0$.*

The proof of this theorem is based upon the same argument as in [7], p. 186 – 188, by observing that the control function

$$u(t) = -B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T)x_0$$

is continuous and steers the initial state vector into the origin.

3. Controllability of nonlinear equation (3). In this section we give sufficient conditions for T-controllability and for controllability of nonlinear equation (3) with the perturbing nonlinear term not depending upon the control vector. We suppose that the matrices $A(t)$ and $B(t)$ in (3) satisfy the assumptions in § 2 and the function $g:[t_0, +\infty[\times R^n \to R^n$ is continuous. When a vector $x_0 \in R^n$, a number $T > t_0$, and a continuous function $u:[t_0, T] \to R^m$ are given, then every continuous solution $x(t)$ on $[t_0, T]$ of the integral equation

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)[B(s)u(s) + g(s, x(s))]ds \tag{5}$$

is a solution of $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + g(t, x)$ with $x(t_0) = x_0$.

THEOREM 2. a) *If there exists a number $T > t_0$ such that* (2) *is T-controllable and $g(t, x)$ is bounded on $[t_0, T] \times R^n$, then* (3) *is T-controllable.*

b) *If* (2) *is controllable and $g(t, x)$ is bounded on $[t_0, T] \times R^n$ for all $T > t_0$, then* (3) *is controllable.*

Proof. To prove our theorem the following well-known Schauder's fixed point theorem will be used: *If X is a nonempty compact convex set in a normed space and $P: X \to X$ is a continuous mapping, then P has a fixed point in X.*

Let $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in R^n$ be a given vector and let X be the set of all functions $x:[t_0, T] \to R^n$ having the following properties:

a) $x(t_0) = x_0$, b) $x(T) = 0$, c) $|x(t)| \leq K_1$ for all $t \in [t_0, T]$,
d) $|x(t) - x(\bar{t})| \leq K_2|t - \bar{t}|$ for all $t, \bar{t} \in [t_0, T]$.

We regard X as a subset of the Banach space $C_n[t_0, T]$ of all continuous functions $x: [t_0, T] \to R^n$ endowed with the uniform norm $||x|| = \max\{|x(t)|: t \in [t_0, T]\}$. Here the numbers K_1 and K_2 are given by

$$K_1 = \max\{|x_0|, \alpha(1+\rho)[|x_0| + \alpha_0 M(T - t_0)]\},$$

$$K_2 = \max\left\{\frac{|x_0|}{T - t_0}, \quad \psi|x_0| + (\alpha_0 M + \beta N)[\alpha + \psi(T - t_0)]\right\},$$

where

$$M = \sup\{|g(t, x)| : t \in [t_0, T]\}, \quad N = \sigma[|x_0| + \alpha_0 M(T - t_0)],$$

$$\alpha = \max\{|\varphi(t, t_0)| : t \in [t_0, T]\}, \qquad \beta = \max\{|\varphi(t_0, t)B(t)| : t \in [t_0, T]\},$$

$$\psi = n. \max\left\{\max\left\{\left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{ij}(t, t_0)\right| : t \in [t_0, T]\right\} : i, j \in \{1, \ldots, n\}\right\},$$

$$\rho = \max\{|W(t)W^{-1}(T) : t \in [t_0, T]\},$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \max\{|\varphi(t_0, t)| : t \in [t_0, T]\}, \\ \sigma &= \max\{|B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T)| : t \in [t_0, T]\}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

and

$$|C(t)| = \{\sum_{j=1}^{q} [c_{1j}(t)]^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{q} [c_{pj}(t)]^2\}^{1/2}$$

is the norm of a matrix $C(t) = (c_{ij}(t))$ of dimensions $p \times q$. Since the transition matrix $\varphi(t, s) = (\varphi_{ij}(t, s))$ is continuous together with the partial derivative $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, t_0)$, we derive from Theorem 1 that all the above numbers are finite.

The function $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, given by $x^i(t) = \frac{t-T}{t_0-T}x_0^i$, $t \in [t_0, T]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, belongs to X, so that X is nonempty. In view of the properties c) and d), the set X is uniformly bounded and uniformly equicontinuous hence, by the Ascoli's theorem, X is compact in $C_n[t_0, T]$.

We define the mapping $P: X \to X$ as follows: for $x \in X$ and $t \in [t_0, T]$ we put

$$(P(x))(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)[B(s)u(s) + g(s, x(s))]ds, \tag{7}$$

where the continuous function $u: [t_0, T] \to R^m$ is given by

$$u(t) = - B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T)\left[x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, s)g(s, x(s))ds\right]. \tag{8}$$

From (7), (8) and $\varphi(t, t_0)\ \varphi(t_0, s) = \varphi(t, s)$ we derive

$$(P(x))(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \varphi(t, t_0)\int_{t_0}^{t} \varphi(t_0,s)\ [B(s)u(s) + g(s, x(s))]ds =$$

$$= \varphi(t, t_0)\Big[x_0 - W(t)W^{-1}(T)x_0 - W(t)W^{-1}(T)\int_{t_0}^{T}\varphi(t_0, t)g(t, x(t))dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \varphi(t_0, s)g(s, x(s))ds\Big]. \tag{9}$$

To prove the continuity of P, let $\tilde{x}(t)$ be a given function in X and let $\varepsilon > 0$. Since $g(t, x)$ is uniformly continuous on the compact set $[t_0, T] \times Q$, where $Q = \{x \in R^n : |x| \leq K_1\}$, there exists a $\delta > 0$ such that $|g(t, x') - g(t, x'')| < \varepsilon[1 + \alpha\alpha_0(1 + \rho)(T - t_0)]^{-1}$ for all $t \in [t_0, T]$ and all x', $x'' \in Q$ with

$|x' - x''| < \delta$. Then, according to (9), for all functions $x(t)$ in X with $|x(t) - \bar{x}(t)| < \delta$ we get

$$|(P(x))(t) - (P(\bar{x}))(t)| \leq |\varphi(t, t_0)| \, |W(t)W^{-1}(T)| \times$$
$$\times \left| \int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, t)[g(t, x(t)) - g(t, \bar{x}(t))]dt \right| +$$
$$+ |\varphi(t, t_0)| \int_{t_0}^{t} |\varphi(t_0, s)| \, |g(s, x(s)) - g(s, \bar{x}(s))|ds \leq$$
$$\leq [\rho\alpha\alpha_0(T - t_0) + \alpha\alpha_0(t - t_0)]\varepsilon[(1 + \alpha\alpha_0 \ (1 + \rho)(T - t_0)]^{-1} < \varepsilon.$$

In order to prove that $P[X] \subset X$ we have to show that $P(x)$ satisfies the above properties a), b), c) and d) for all $x \in X$. The first three properties are immediate since (7) and (9) imply $(P(x))(t_0) = x_0$, $(P(x))(T) = 0$ and $||P(x)|| \leq \alpha[|x_0| + \rho|x_0| + \rho\alpha_0 M(T - t_0) + \alpha_0 M(T - t_0)] \leq K_1$. If we set $a(s) = \varphi(t_0, s)B(s) \ u(s)$ and $b(s) = \varphi(t_0, s)g(s, x(s))$, the property d) can be derived from the first equality (9) as follows (see [10]):

$$|(P(x))(t) - (P(x))(\bar{t})| = \left| [\varphi(t, t_0) - \varphi(\bar{t}, t_0)]x_0 + \varphi(t, t_0) \int_{t_0}^{t} a(s)ds - \right.$$
$$\left. -\varphi(\bar{t}, t_0) \int_{t_0}^{\bar{t}} a(s)ds + \varphi(t, t_0) \int_{t_0}^{t} b(s)ds - \varphi(\bar{t}, t_0) \int_{t_0}^{\bar{t}} b(s)ds \right| =$$
$$= \left| [\varphi(t, t_0) - \varphi(\bar{t}, t_0)] \left[x_0 + \int_{t_0}^{\bar{t}} a(s)ds + \int_{t_0}^{\bar{t}} b(s)ds\right] + \right.$$
$$+ \varphi(t, t_0)\left[\int_{\bar{t}}^{t} a(s) \, ds + \int_{\bar{t}}^{t} b(s)ds\right] \leq |\varphi(t, t_0) - \varphi(\bar{t}, t_0)| \, [|x_0| +$$
$$+ \beta N(T - t_0) + \alpha_0 M(T - t_0)] + \alpha[\beta N|t - \bar{t}| + \alpha_0 M|t - \bar{t}|] \leq K_2|t - \bar{t}|,$$

because $|\varphi(t, t_0) - \varphi(\bar{t}, t_0)| \leq n. \max \{|\varphi_{ij}(t, t_0) - \varphi_{ij}(\bar{t}, t_0)| : i, j \in$

$$\in \{1, \ldots, n\}\} = n. \ \max \left\{\left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ij}(t + (\bar{t} - t)\theta_{ij}, \ t_0) \right| |t - \bar{t}| : i, j \in \right.$$
$$\left. \in \{1, \ldots, n\}\right\} \leq \psi|t - \bar{t}|, \text{ where } 0 < \theta_{ij} < 1, \text{ and because (8)}$$

yield $|u(t)| \leq \sigma[|x_0| + \alpha_0 M(T - t_0)] = N$.

Now, the Schauder's fixed point theorem is applicable, hence there is a function $x_* \in X$ with $x_* = P(x_*)$, that is,

$$x_*(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)[B(s)u_*(s) + g(s, x_*(s))]ds,$$

where the function $u_*(t)$ corresponds to $x_*(t)$ by (8). Consequently, $x_*(t)$ is a continuous solution of (5) with $x_*(t_0) = x_0$, $x_*(T) = 0$, and the proof of the first part of the theorem is achieved. To prove the second part of the theorem, take an arbitrary $T > t_0$ and repeat the proof of the first part with this T.

Remark 1. Theorem 2 includes a criterion of H. G. Hermes[4] for the controllability of the equation $\dot{x} = B(t)u + g(t, x)$, where the continuous function $g(t, x)$ is bounded and satisfies a Lipschitz condition in x.

4. **Controllability of nonlinear equation** (4). Now we present sufficient conditions for T-controllability of nonlinear equation (4) with the perturbing nonlinear term depending upon t, x and u. We suppose that the matrices $A(t)$ and $B(t)$ in (4) satisfy the assumptions in § 2 and that the function $h : [t_0, +\infty[\times R^n \times R^m \to R^n$ in continuous.

THEOREM 3. *If there exists a number $T > t_0$ such that*

(i) *the equation* (2) *is T-controllable,*

(ii) *$h(t, x, u)$ is bounded on $[t_0, T] \times R^n \times R^m$,*

(iii) *for every compact set Q in R^n there are $L > 0$ and $K > 0$ with $|h(t, x, u) - h(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq L|x - \bar{x}| + K|u - \bar{u}|$ for all $t \in [t_0, T]$, $x, \bar{x} \in Q$ and $u, \bar{u} \in R^m$,*

(iv) *$\alpha_0 \sigma K(T - t_0) < 1$ with α_0 and σ given by* (6), *then* (4) *is T-controllable.*

Proof. We make use of the same argument as in the proof of the first part of Theorem 2 with the following changes.

The number M is replaced by $M = \sup \{|h(t, x, u)| : (t, x, u) \in [t_0, T] \times R^n \times R^m\}$. To define the mapping $P : X \to X$ with X as in the proof of Theorem 2 we begin by constructing an adequate control function. Given an $x \in X$ we define the mapping $S_x : C_m[t_0, T] \to C_m[t_0, T]$ by letting

$$(S_x(u))(t) = -B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T)\left[x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, s)h(s, x(s), u(s))ds\right]$$

for $u \in C_m[t_0, T]$ and $t \in [t_0, T]$. It is easy to see that S_x is a contraction mapping with the contraction coefficient $q = \alpha_0 \sigma K(T - t_0) < 1$. Indeed, for any $u, \bar{u} \in C_m[t_0, T]$ we obtain

$$\|S_x(u) - S_x(\bar{u})\| \leq \max \{|B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T)| : t \in [t_0, T]\}$$
$$\times \int_{t_0}^{T} |\varphi(t_0, t)|h(t, x(t), u(t)) - h(t, x(t), \bar{u}(t))|dt \leq$$
$$\leq \sigma\alpha_0(T - t_0)K. \max \{|u(t) - \bar{u}(t)| : t \in [t_0, T]\} = q\|u - \bar{u}\|. \tag{10}$$

By the Banach's contraction principle there is a single function $u_x \in C_m[t_0, T]$ with $S_x(u_x) = u_x$.

Now, the mapping P can be defined by

$$(P(x))(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)\,[B(s)u_x(s) + h(s, x(s), u_x(s))]ds \tag{11}$$

for $x \in X$ and $t \in [t_0, T]$, where

$$u_x(t) = (S_x(u_x))(t) = -B^*(t)\varphi^*(t_0, t)W^{-1}(T) \times$$
$$\times \left[x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, s)h(s, x(s), u_x(s))ds\right]. \tag{12}$$

Substitute (12) into (11) to obtain

$$(P(x))(t) = \varphi(t, t_0)\left\{x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t_0, s)[B(s)u_x(s) + h(s, x(s), u_x(s))]ds\right\} =$$
$$= \varphi(t, t_0)\left[x_0 - W(t)W^{-1}(T)x_0 - W(t)W^{-1}(T)\int_{t_0}^{T} \varphi(t_0, t)h(t, x(t), u_x(t))dt + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} \varphi(t_0, s)h(s, x(s), u_x(s))ds\right]. \tag{13}$$

In order to verify the continuity of P we associate to the compact set $Q = \{x \in R^n : |x| \leq K_1\}$ the numbers L and K in our condition (iii). Then for every pair of functions x, $\bar{x}$ in X we have

$$||u_x - u_{\bar{x}}|| = ||S_x(u_x) - S_{\bar{x}}(u_{\bar{x}})|| \leq$$
$$\leq \sigma \int_{t_0}^{T} |\varphi(t_0, t)||h(t, x(t), u_x(t)) - h(t, \bar{x}(t), u_{\bar{x}}(t))|dt \leq$$
$$\leq \sigma\alpha_0(T - t_0)(L\,||x - \bar{x}|| + K||u_x - u_{\bar{x}}||),$$

whence $||u_x - u_{\bar{x}}|| \leq \frac{qL}{K(1-q)}||x - \bar{x}||$. But the first equality in (13), we get

$$|(P(x))(t) - (P(\bar{x}))(t)| \leq \alpha[\beta(T - t_0)||u_x - u_{\bar{x}}|| +$$
$$+ \alpha_0(T - t_0)(L||x - \bar{x}|| + K||u_x - u_{\bar{x}}||) \leq \frac{\alpha L(\beta q + \alpha_0 K)(T - t_0)}{K(1-q)}||x - \bar{x}||.$$

and now the continuity of P is immediate.

We conclude the proof by performing the obvious changes in notations and repeating the argument at the end of the proof fo the first part of Theorem 2.

Remark 2. When $h(t, 0, 0) = 0$ and the derivatives $\frac{d}{dt}B(t)$, $\frac{\partial}{\partial x}h(t, x, u)$ and $\frac{\partial}{\partial u}h(t, x, u)$ are continuous, an incomplete proof of a variant of Theorem 3 was given by K. B. Mirza and B. F. Womack [9], 1972, Theorem 1. See also [10].

Remark 3. Recently, G. Aronsson [1] obtained some criteria of controllability (by measurable and bounded controls) of (4), in which no Lipschitz condition with respect to u is required for $h(t, x, u)$. However, as the following example shows, the Aronsson 's results do not include those in Theorem 3.

Example 2. Consider the scalar nonlinear equation

$$\dot{x} = u + \frac{k\,|u|}{1 + |u|},\ 0 < k < 1. \tag{14}$$

Here $m = n = 1$, $A(t) = 0$, $B(t) = 1$ and $h(t, x, u) = \frac{k\,|u|}{1 + |u|}$. We have $W(T) = T - t_0 > 0$ for every $T > t_0$, hence, by Theorem 1, a), the equation $\dot{x} = u$ is T-controllable. Since $\alpha_0 = 1$, $\sigma = \frac{1}{T - t_0}$, $K = k$ and $\alpha_0 \sigma K(T - t_0) = k < 1$, Theorem 3 is applicable, hence (14) is T-controllable for every $T > t_0$. Therefore, (14) is controllable.

Remark 4. The same example shows that the recent results of A. G. Kartsatos [6] do not include those of Theorem 3, since $\liminf_{p\to\infty} \int_0^T \sup \{|h(t, x, u)| : |x| + |u| \leq p\}\, dt = \lim_{p\to\infty} \frac{Tkp}{1+p} = Tk > 0$ when $T > 0$ and condition 3.1 in [6] is not fulfilled.

Remark 5. Example 1 in § 1 points out that the boundedness hypothesis of $h(t, x, u)$ in Theorem 3 cannot be dropped.

Acknowledgment. I would like to acknowledge the stimulating discussions about this paper with Professors I. A. Rus and N. Vornicescu.

(Received May 6, 1974)

REFERENCES

1. Aronsson, G., *Global controllability and bang-bang steering of certain nonlinear systems* SIAM J. Control **11**, 1973, 607—619.
2. Čeprasov, V. A., *On controllability of nonlinear systems*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I mat.-meh., **23**, 1968, no. 4, 55—64.
3. Davison, E. J. and Kunze, E. G., *Some sufficient conditions for the global and local controllability of nonlinear time-varying systems*, SIAM J. Control, **8**, 1970, 489—497.
4. Hermes, H. G., *Controllability and singular problems*, SIAM J. Control, **2**, 1964, 241—260.
5. Kalman, R. E., *Contributions to the theory of optimal control*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **5**, 1960, 102—119.
6. Kartsatos, A. G., *Global controllability of perturbed quasilinear systems*, Problems of Control and Information Theory, **3**, 1974, 137—145.
7. Lee, E. B. and Markus, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, 1967.

8. L u k e s, D. L., *Global controllability of nonlinear systems*, SIAM J. Control. **10**, 1972, 112–126; Erratum, *ibid.*, **11**, 1973, 186.
9. M i r z a, K. B. and W o m a c k, B. F., *On the controllability of a class of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automatic Control, **16**, 1971, 497–498; *ibid.*, **17**, 1972, 531–535.
10. M u n t e a n, I., *Comments on "On the controllability of a class of nonlinear systems"*, IEEE Trans. Automatic Control, **19**, 1974, 459–460.

ASUPRA CONTROLABILITĂŢII UNOR ECUAŢII NELINIARE

(R e z u m a t)

Se studiază influenţa controlabilităţii ecuaţiei liniare $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ asupra controlabilităţii ecuaţiilor neliniare perturbate $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t, x)$ şi $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + h(t, x, u)$. Cînd $g(t, x)$ şi $h(t, x, u)$ sînt mărginite iar $h(t, x, u)$ satisface condiţia lui Lipschitz în raport cu x şi u, se stabilesc cîteva criterii de controlabilitate, a căror demonstraţie utilizează tehnica teoremelor de punct fix.

PRINCIPIUL MAJORANTEI ŞI METODA COARDEI

SEVER GROZE

1. Fie ecuaţia opraţională

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde operatorul $P(x)$, neliniar şi continuu, transformă spaţiul supermetric X, [3], în spaţiul de acelaşi tip, Y.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) vom folosi algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x) \tag{2}$$

unde $\Lambda_n = [P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ cunoscut sub denumirea de „metoda nemodificată a coardei".

Considerăm de asemenea ecuaţia reală

$$Q(z) = 0, \tag{3}$$

unde $Q(z)$ este o funcţie monotonă definită pe un interval I, ecuaţie majorantă [1] a ecuaţiei (2), pentru rezolvarea căreia folosim algoritmul

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n - z_{n-1}}{Q(z_n) - Q(z_{n-1})} Q(z_n), \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Privitor la existenţa soluţiei ecuaţiei operaţionale (3) se poate demonstra

TEOREMA 1. *Dacă ecuaţia* (1) *admite ca majorantă ecuaţia* (3) *şi dacă pentru aproximaţiile iniţiale* z_{-1}, $z_0 \in I$, $z_{-1} \leq z_0$, *respectiv* x_{-1}, x_0 *au loc relaţiile:*

1° *Există operatorul invers* $\Lambda_0 = -[P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$

2° *Normele generalizate ale elementelor* $\Lambda_0 P(x_0)$ *şi* $\Lambda_0 P(x_{-1})$ *verifică relaţiile* $\rho_X(\Lambda_0 P(x_0)) \leqslant B_0 Q(z_0)$; $\rho_X(\Lambda_0 P(z_{-1})) \leqslant B_0 Q(z_{-1})$ *unde* $B_0 = - \frac{z_0 - z_{-1}}{Q(z_0) - Q(z_{-1})} > 0$.

3° *Pentru orice triplet* x^1, x^2, x^3, *respectiv* z^1, z^2, z^3, *avem* $\rho_{X^2}, {}_X(\Lambda_0 P_{x^1, x^2, x^3}) \leqslant B_0 Q_{z^1, z^2, z^3}$, *unde* $\rho_X(x^i - x_k) \leqslant z^i - z_0 \leqslant z' - z_0 \subset I$, $i = 1, 2, 3$, $k = -1, 0$

P_{x^1, x^2, x^3} *fiind diferenţa divizată de ordinul II, atunci, ecuaţia majorantă* (3) *avînd o rădăcină în intervalul I, rezultă că şi ecuaţia operaţională* (1) *admite cel puţin o soluţie* x^*, *soluţie către care converge şirul dat de* (2), *aproximaţia fiind dată de*

$$\rho_X(x^* - x_0) \leqslant z' - z_0 \subset I.$$

Demonstraţie. În baza algoritmelor (2) şi (4) şi ţinînd seama de condiţiile 1° şi 2° ale teoremei se deduce

$$\rho_X(x_1 - x_0) \leqslant B_0 Q(z_0) = z_1 - z_0. \tag{5}$$

Tot din (2) se deduce că $x_1 - x_{-1} = -\Lambda_0 P(x_{-1})$ şi deci putem scrie

$$\rho_X(x_1 - x_{-1}) \leqslant B_0 Q(z_{-1}) = z_1 - z_{-1}. \tag{5'}$$

Să arătăm că trecînd de la aproximaţiile x_0, x_{-1} la x_1, x_0, condiţiile teoremei rămîn valabile. Pentru aceasta considerăm operatorul

$$I + \Lambda_0 P_{x_1, x_0} = \Lambda_0 (P_{x_1, x_0} - P_{x_0, x_{-1}}) = \Lambda_0 P_{x_1, x_0, x_{-1}} (x_1 - x_{-1})$$

pentru care avem, adoptînd aceeaşi notaţie şi pentru diferenţele divizate ale funcţiei reale $Q(z)$ ca şi pentru operatori,

$$\rho_{X,X}(I + \Lambda_0 P_{x_1, x_0}) \leqslant B_0 Q_{z_1, z_0, z_{-1}}(z_1 - z_{-1}) = B_0 (Q_{z_1, z_0} - Q_{z_0, z_{-1}} = $$
$$= 1 - \frac{Q_{z_0, z_1}}{Q_{z_0, z_{-1}}} = q.$$

Din condiţia 3° avem $Q_{z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}} > 0$, iar $Q(z)$ fiind presupusă monotonă rezultă $Q_{z_0, z_{-1}} < 0$ şi deci $q < 1$.

Atunci, în baza teoremei lui B a n a c h, [2], [3], este asigurată existenţa operatorului invers $H_1^{-1} = [I - (I + \Lambda_0 P_{x_1, x_0})]^{-1}$ a cărui normă generalizată verifică relaţia

$$\rho_{X,X}(H_1^{-1}) = \rho_{X,X}[(\Lambda_0 P_{x_1, x_0})]^{-1} \leqslant \frac{1}{1-q} = \frac{Q_{z_0, z_{-1}}}{Q_{z_0, z_1}}.$$

Deoarece $H_1^{-1}\Lambda_0 = \Lambda_1$, rezultă $\Lambda_1 = [-\Lambda_0 P_{x_1, x_0}]^{-1}\Lambda_0 = -[P_{x_1, x_0}]^{-1}$. Înmulţind relaţia $P_{x_0, x_{-1}} - P_{x_1, x_{-1}} = P_{x_0, x_1, x_{-1}}(x_1 - x_0)$ cu $x_{-1} - x_1$ şi ţinînd seama că în baza algortimului (2) avem $x_1 = x_{-1} - [P_{x_0, x_{-1}}]^{-1} P(x_{-1})$ se găseşte

$$P(x_1) = P_{x_0, x_1, x_{-1}}(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1}) \tag{6}$$

şi avem atunci

$$\rho_X(\Lambda_0 P(x_1)) \leqslant B_0 Q_{z_0, z_1, z_{-1}}(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1}) \tag{7}$$

relaţie care, ţinînd seama de algoritmul (4), ne conduce la $\rho_X(\Lambda_0 P(x_1)) \leqslant \leqslant B_0 Q(z_1)$. Rezultă atunci că

$$\rho_X(\Lambda_1 P(x_{11})) = \rho_X(\Lambda_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_0 P(x_1)) = \rho_X((\Lambda_0 \Lambda_1^{-1})^{-1} \Lambda_0 P(x_1)) \leqslant$$
$$\leqslant B_0 Q(z_1) \frac{Q_{z_0, z_{-1}}}{Q_{z_0, z_1}} = - B_0 Q(z_1)$$

unde $B_1 = -\dfrac{z_1 - z_0}{Q(z_1) - Q(z_0)}$, deci şi condiţia 2° din enunţul teoremei 1 este verificată.

Pentru verificarea condiţiei 3°, avem relaţia

$$\rho_{X^2,X}(\Lambda_1 P_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}}) = \rho_{X^2,X}(\Lambda_1 \Lambda_0^{-1} \Lambda_0 P_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}}) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{X^2,X}((\Lambda_0 \Lambda_1^{-1})^{-1} \Lambda_0 P_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}}) \leqslant B_1 Q_{z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}}$$

pentru $\rho_X(x^{(i)} - x_0) \leqslant z^{(i)} - z_1 \leqslant z' - z_0$, $i = 1, 2, 3$ unde

$$\rho_X(x^{(i)} - x_0) \leqslant z^{(i)} - z_0 \leqslant z' - z_0, \ i = 1, 2, 3.$$

Continuînd aceste evaluări, prin inducţie completă, obţinem $\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leq z_{n+p} - z_n$. Deoarece $\{z_n\}$ este monoton mărginit, converge spre o soluţie $z^* \leqslant z'$ a ecuaţiei majorante (3) şi deci rezultă existenţa $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x^*$, iar $\rho_X(x^* - x_0) \leqslant z^* - z_0 \leqslant z' - z_0$.

Pentru a arăta că x^* este o soluţie a ecuaţiei (1), ţinînd seama de (2), din relaţia $P_{x_{n+1}, x_n} - P_{x_n, x_{n-1}} = P_{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}}(x_{n+1} - x_{n-1}$ se deduce $P(x_{n+1}) = P_{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}\,(x_{n+1}-x_{n-1})}(x_{n+1} - x_{n-1})$ şi avem atunci $\rho_X(\Lambda_0 P(x_{n+1})) \leqslant B_0 Q_{z_{n+1}, z_n, z_{n-1}}(z_{n+1} - z_{n-1})(z_{n+1} - z_n)$.
Deoarece $z_{n+1} - z_{n-1}$ şi $z_{n+1} - z_n$ tinde spre zero pentru $n \to \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(\Lambda_0 P(x_{n+1})) = 0$. Pe de altă parte $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(\Lambda_0 P(x_{n+1})) = \rho_X(\Lambda_0 P(x^*)$ de unde rezultă $\rho_X(\Lambda_0 P(x^*)) = 0$ adică $\Lambda_0 P(x^*) = 0$ fapt ce dovedeşte că x^* este o soluţie a ecuaţiei $P(x) = \theta$.

Observaţii. 1. În demonstrarea teoremei 1 s-a stabilit inegalitatea $\rho_X(x_n - x^*) \leqslant z^* - z_n$. Ea caracterizează rapiditatea convergenţei procedeului.

2. O teoremă analogă a fost demonstrată de către L. V. Kantorovici [1] şi B. Jankó [4] în cazul operatorilor $P(x)$ definiţi într-un spaţiu liniar normat. În ambele cazuri, spre deosebire de noi, pentru rezolvarea problemei se foloseşte noţiunea de derivată în sens Fréchet.

2. În demonstrarea teoremei 1 am utilizat diferenţele divizate de ordinul doi pentru operatorul neliniar $P(x)$. Acest lucru poate fi evitat folosind pentru demonstrarea existenţei soluţiilor ecuaţiei date numai diferenţe divizate de ordinul întîi.

TEOREMA 2. *Dacă pentru aproximaţiile iniţiale x_0, x_{-1} ale ecuaţiei* (1), *respectiv z_0, z_{-1} ale ecuaţiei majorante* (3) *sînt verificate condiţiile:*

1°. *Există operatorul* $\Lambda_0 = -[P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$ *şi* $\rho_{X,X}(\Lambda_0) \leqslant B_0$ *unde* $B_0 = -\dfrac{1}{Q_{z_0, z_{-1}}} > 0$

2° $\rho_X(P(x_i)) \leq Q(z_i)$, $i = -1, 0$.

3° $\rho_{X,X}(P_{x^{(1)}, x^{(2)}} - P_{x^{(2)}, x^{(3)}}) \leqslant Q_{z^{(1)}, z^{(2)}} - Q_{z^{(2)}, z^{(3)}}$

oricare ar fi $x^{(i)} \leqslant S$, unde S este definită de

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0, \textit{ pentru } i = 1, 2, 3,$$

atunci, din existenţa soluţiei $z^* \in [z_0, z']$ a ecuaţiei reale (3), *rezultă existenţa cel puţin a unei soluţii $x^* \in S$ a ecuaţiei* (1), *soluţie ce se poate obţine folosind procedeul convergent* (2), *rapiditatea convergenţei fiind dată de* $\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n$.

Demonstraţie. Ţinînd seama de condiţiile teoremei precum şi de algoritmul (4) deducem că $\{z_n\}$ este un şir crescător.

De asemenea, în baza algoritmului (2) şi a condiţiilor 1° şi 2° din enunţul teoremei 2, rezultă posibilitatea construirii aproximaţiei x_1 şi apartenenţa ei la S.

Ca şi în cazul precedent, arătăm că trecînd de la perechea de elemente x_0, x_{-1} la perechea x_0, x_1, condiţiile teoremei rămîn valabile.

Pentru aceasta considerăm operatorul $I + \Lambda_0 P_{x_1,x_0} = \Lambda_0(P_{x_1,x_0} - P_{x_0,x_{-1}})$ pentru care, în baza ipotezelor, avem

$$\rho_X(\Lambda_0 (P_{x_1,x_0} - P_{x_0,x_{-1}})) \leqslant B_0(Q_{z_0,z_1} - Q_{z_{-1},z_0}) = 1 - \frac{Q_{z_0,z_1}}{Q_{z_0,z_{-1}}} = q_1.$$

Deoarece, conform condiţiei 3°, avem $Q_{z_0,z_1} - Q_{z_0,z_{-1}} > 0$, rezultă $q_1 < 1$, fapt ce dovedeşte existenţa operatorului

$$H_1^{-1} = [I - (I + \Lambda_0 P_{x_0,x_{-1}})]^{-1} = [-\Lambda_0 P_{x_0,x_{-1}}]^{-1}$$

şi, deoarece $\Lambda_1 = H_1^{-1}\Lambda_0$, rezultă existenţa lui Λ_1 şi că

$$\rho_{X,X}(\Lambda_1) = \rho_{X,X}(H_1^{-1}\Lambda_0) = -\frac{1}{Q_{z_0,z_1}} = B_1, \text{ deoarece, } \rho_{X,X}(H_1^{-1}) = \frac{Q_{z_0,z_{-1}}}{Q_{z_0,z_1}}.$$

Pentru verificarea condiţiei 2°, considerăm relaţia $P(x_1) = (P_{x_1,x_0} - P_{x_0,x_{-1}})(x_1 - x_0)$ care, în baza ipotezelor, ne conduce la

$$\rho_X(P(x_1)) \leqslant (Q_{z_1,z_0} - Q_{z_0,z_{-1}})(z_1 - z_0) = Q(z_1) \qquad (8)$$

Condiţia 3° este evident verificată.

Din cele de mai sus rezultă că folosind algoritmul (2) putem construi şi aproximaţia $x_2 \in S$. Urmînd aceeaşi ideie, se poate arăta că şi pentru perechea x_2, x_1 condiţiile teoremei rămîn valabile.

Folosind inducţia completă se demonstrează posibilitatea obţinerii aproximaţiei x_n cu ajutorul metodei iterative (2), oricare ar fi n, iar pentru perechea x_n, x_{n-1} condiţiile teoremei sînt verificate.

Putem stabili atunci relaţia $\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant z_{n+p} - z_n$. $z^* \leqslant z'$ fiind limita şirului monoton mărginit $\{z_n\}$ obţinut cu ajutorul lui (4), rădăcină a ecuaţiei majorante, rezultă că există şi $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ pentru care avem $\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_0 < z' - z_0$.

Că x^* este o soluţie a ecuaţiei operaţionale (1) se arată considerînd relaţia $\rho_X P(x_n)) \leqslant Q(x_n)$, care se stabileşte în mod analog cu (8) şi din care se deduce, pe baza continuităţii lui $P(x)$ şi $Q(z)$, că $\rho_X(P(x^*)) \leqslant Q(z^*) = 0$.

Rămîne să arătăm că oricare ar fi n, $x_n \in S$. Considerăm pentru aceasta relaţia

$$\rho_X(x_n - x_0) \leq \rho_X(x_n - x_{n-1}) + \dots + \rho_X(x_1 - x_0) \leq z_n - z_{n-1} + \dots +$$
$$+ z_1 - z_0 = z_n - z_0 \leq z' - z_0.$$

Astfel teorema 2 este complet demonstrată.

(Intrat în redacţie la 6 martie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Kantorovici, L. V., *Prinţip majorant i metoda N'iutona*, D.A.N., **74**, 1, 17—20, 1951.
2. Banach, S., *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea Publishing, New-York, 1955.
3. Collatz, L., *Funktionalanalyse und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, VBerlin, 1964.
4. Jankó, B., *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii Banach*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1961.
5. Tamme, E., *O principe majorant dlia iteraţionnîh metodov*, Uci. Zap. Tartusk. Gosud. U., **73**, 84—118, 1959.

THE PRINCIPLE OF THE MAJORANT AND THE METHOD OF CHORDS

(Summary)

In the paper the sufficient conditions for the existence of solutions of an operator equations (1) are given, by using the iterative method (2). The results of the papers [1], [4], and [5] are generalized by improving the hypothesis of the theorems and extension of the spaces.

ON k-THIN SETS AND THEIR RELATION TO GENERALISED RAMSEY NUMBER

ZOLTÁN KÁSA

In this article we generalize a result of Š. Z n á m [4] concerning k-thin sets and n-extensive graphs.

1. Let $n, p, k, k_1, k_2, \ldots, k_p$ be naturals with $k, k_i \geqslant 3$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$

DEFINITION 1. We call a natural number set M k-thin if from the condition

$$a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in M$$

it follows that $a_1 + a_2 + \ldots. + a_{k-1} \notin M$.
(The elements a_i may also be equal.)
Denote by $f(n; k_1, k_2, \ldots, k_p)$ the greatest natural number for which there are p disjoint sets $S_1, S_2, \ldots, S_p$, so that S_i is k_i-thin $(i = 1, 2, \ldots, p)$ and $\{n, n+1, \ldots, f(n; k_1, k_2, \ldots, k_p)\} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} S_i$.

Remarks: 1. The existence of $f(n; k_1, k_2, \ldots, k_p)$ for arbitrary $k_i \geqslant 3$ $(i = 1, 2, \ldots., p)$, n and p follows from (7) and (8).
2. For $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = k$ $f(n; k_1, k_2, \ldots, k_p)$ is identical to $f(k, n, p)$ introduced in [4].

It is difficult to find the precise value of $f(n; k_1, k_2, \ldots., k_p)$. We give here a lower estimation of it.

THEOREM 1. *Let $n, p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ be naturals with $3 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_p$, then we have*:

$$f(n; k_1, k_2, \ldots, k_p) \geqslant k_p f(n; k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}) + k_p - n - 1 \qquad (1)$$

Outline of proof. The proof of the theorem 1 is analogical to the proof given by Z n á m [3] in the case $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$ that is why we outline it only. Put $f(n; k_1, k_2, \ldots k_{p-1}) = N$. Suppose $S = \{n, n+1, \ldots, N\} = \bigcup\limits_{i=1}^{p-1} S_i$, and S_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ is k_i-thin. The set denoted by $S_p = \{N+1, N+2, \ldots, (k_p - 1)N + k_p - 2\}$ is k_p-thin. It is enough to show that the numbers

$$(k_p - 1)N + k_p - 1, \ (k_p - 1)N + k_p, \ldots, k_p N + k_p - n - 1 \qquad (2)$$

can be splitted into sets $S_1, S_2, \ldots., S_{p-1}$ in such a way that each S_i remains k_i-thin set $(i = 1, 2, \ldots., p-1)$.

Put $(k_p - 1)N + k_p - 2 = a$. Each number x from (2) is equal to $a + r$, with $1 \leq r \leq N - n + 1$. We put the number $x = a + r$ from (2) in the set S_i if $r + n - 1 \in S_i$ $(i = 1, 2, \ldots., p-1)$. The proof that these new sets are k-thin is completely analogical to this in [3].

THEOREM 2. *Let $n, p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ be naturals with $3 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_p$. We have*

$$f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{p} k_i - \sum_{i=1}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} k_j - 1\right) n - 1 \tag{3}$$

Proof. Applying succesively (1) we have.

$$f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) \geqslant k_p f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}) + k_p - n - 1 \geqslant$$

$$k_p[k_{p-1} f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{p-2}) + k_{p-1} - n - 1] + k_p - n - 1 =$$

$$= k_p k_{p-1} f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{p-2}) + k_p k_{p-1} - k_p n - n - 1 \geqslant \ldots$$

$$\ldots \geqslant k_p k_{p-1} \ldots k_r f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}) + k_p k_{p-1} \ldots k_r - k_p k_{p-1} \ldots k_{r+1} n -$$

$$- \ldots - k_p k_{p-1} n - k_p n - n - 1 = \left(\prod_{i=r}^{p} k_i\right) f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}) +$$

$$+ \prod_{i=r}^{p} k_i - n \sum_{i=r}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} k_j - n - 1.$$

Since $f(n\,;\,k) = (k - 1)n - 1$, in the case $r = 2$ we have:

$$f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots k_p) \geqslant \left(\prod_{i=2}^{p} k_i\right) f(n\,;\,k_1) + \prod_{i=2}^{p} k_i - n \sum_{i=2}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} k_j - n - 1 =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{p} k_i - \sum_{i=1}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} k_j - 1\right) n - 1 \quad \text{qu.e.d.}$$

Remark: If $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = k$ we have

$$f(n\,;\,\underbrace{k, k, \ldots, k}_{p}) = f(k, p, n) \geqslant \left(k^p - \sum_{i=1}^{p-1} k^i - 1\right) n - 1 = \frac{k-2}{k-1}(k^p - 1)n +$$

$+ n - 1$. Hence we get in this case a result given by Z n á m [4].

In the following we give the exact value of $f(1\,;\,3, k)$ and of $f(2n\,;\,3, k)$.

THEOREM 3. *Let $k \geqslant 3$ be natural. We have:*

$$f(1\,;\,3, k) = \begin{cases} 3k - 5 & \text{if } k \text{ is odd} \\ 3k - 6 & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases} \tag{4}$$

Proof. From (3) it follows: $f(1\,;\,3, k) \geqslant 2k - 2$. Let be $\{1, 2, \ldots, 2k - 2\} = S_1 \cup S_2$, where $S_1 = \{1, 2k - 2\}$ is 3-thin and $S_2 = \{2, 3, \ldots, 2(k - 1) - 1\}$ is k-thin. The next natural number after $2k - 2$ may be written $2k - 1 = (k - 2) \cdot 3 + 1 \cdot 3$. Therefore, if we move the number 3 from S_2 into S_1, and $2k - 1$ give to S_2, $2k$ to S_1, both sets keep the 3-thin respectively k-thin property. We proceed similarly with all odd naturals $2s - 1$, until

$$2s - 1 < k - 1 \tag{5}$$

(It is for keeping the 3-thin property of S_1). We move the numbers $2s-1$ into S_1, give the numbers $2k+2s-5=(k-2)\cdot 2+1\cdot(2s-1)$ to S_2, and $2k-2s-4$ to S_1. The condition (5) is identical to $2s-1\leq k-2$ if k is odd, and to $2s-1\leq k-3$ if k is even. Whence it follows that:

$$2k+2s-4\leq\begin{cases}3k-5 \text{ if } k \text{ is odd}\\ 3k-6 \text{ if } k \text{ is even.}\end{cases}$$

Therefore we have:

$$f(1;3,k)\geqslant\begin{cases}3k-5 \text{ if } k \text{ is odd.}\\ 3k-6 \text{ if } k \text{ is even.}\end{cases}$$

Now we demonstrate the contrary inequality, i.e. that the set $\{1, 2, \ldots, 3k-4\}$ for k odd, and $\{1, 2, \ldots, 3k-5\}$ for k even resp. cannot be splitted into two sets, one 3-thin, the another k-thin.

a) Let k be odd. Suppose that $S=\{1, 2, \ldots, 3k-4\}=S_1\cup S_2$ with S_1 3-thin and S_2 k-thin. We distinguish two cases: a1) $1\in S_1$ and a2) $1\in S_2$.

a1) Let be $1\in S_1$. Because S_1 is 3-thin it follows $2\in S_2$. $2k-2\in S_1$ since S_2 is k-thin. $1\in S_1$, $2k-2\in S_1\Rightarrow 2k-1\in S_2$. Because of $(k-2)\cdot 2+1\cdot 3=2k-1$ we have $3\in S_1$. $2k-2\in S_1$, $3\in S_1\Rightarrow 2k+1\in S_2$. Since $(k-2)\cdot 2+1\cdot 5=2k+1$, we have $5\in S_1$. Suppose that all odd naturals smaller than $(k-2)$ belong to S_1. Hence $k-4\in S_1$, but $2k-2\in S_1$ and then $3k-6\in S_2$. From $(k-2)\cdot 2+1\cdot(k-2)=3k-6$ there results that $k-2\in S_1$. From this and from $2k-2\in S_1$ there follows that $3k-4\in S_2$. Likewise $k\in S_1$, because $(k-2)\cdot 2+1\cdot k=3k-4$. But $k+(k-2)=2k-2$, with $k\in S_1$, $k-2\in S_1$ and $2k-2\in S_1$, which is a contradiction because S_1 is a 3-thin set.

a2) Let be now $1\in S_2$. Since S_2 is k-thin $k-1\in S_1$. S_1 is 3-thin $\Rightarrow 2k-2\in S_2$. Because S_2 is k-thin and $(k-1)\cdot 2\in S_2$ we have $2\in S_1$. $k-1\in S_1$ and $2\in S_2\Rightarrow k+1\in S_2$. But $(k-2)\cdot 1+1\cdot(k+1)=2k-1$, hence $2k-1\in S_1$. From $(k-2)\cdot 1+1\cdot k=2k-2$, $1\in S_2$, $2k-2\in S_2$ we obtain $k\in S_1$. Since $k\in S_1$, $k-1\in S_1$, S_1 is 3-thin, and $k+(k-1)=2k-1\in S_1$, we have a contradiction. Because $2k-1\leq 3k-4$, S cannot be splitted into two sets, so that one would be 3-thin and the another k-thin.

b) Let k be even and $S=\{1, 2, \ldots, 3k-5\}=S_1\cup S_2$, S_1 3-thin, S_2 k-thin. We distinguish two cases.

b1) Let be $1\in S_1$. Then, because S_1 is 3-thin, $2\in S_2$. S_2 is k-thin set, therefore $(k-1)\cdot 2\in S_1$. This and $1\in S_1\Rightarrow 2k-1\in S_2$. $(k-2)\cdot 2+1\cdot 3=2k-1\Rightarrow 3\in S_1$. As in the case a, we suppose that all odd naturals smaller than $k-1$ belong to S_1. Therefore $k-3\in S_1$. This and $2k-2\in S_1\Rightarrow 3k-5\in S_2$. But $(k-2)\cdot 2+1\cdot(k-1)=3k-5$, $2\in S_2$, $3k-5\in S_2$, we have $k-1\in S_1$. Since S_1 is 3-thin set, from $(k-1)+(k-1)=2k-2$ it follows $2k-2\notin S_1$, which is a contradiction.

b2) Let be $1\in S_2$. The proof is identical to the proof of the case a2) Thus the Theorem 3 is proved.

THEOREM 4. *For n even and $k \geqslant 3$ we have*

$$f(n\,;\,3,\,k) = (2k-1)n - 1. \tag{6}$$

Proof. Suppose that $S = \{n,\ n+1,\ \ldots,\ (2k-1)n\} = S_1 \cup S_2$, S_1 is 3-thin and S_2 k-thin.

a) Let be $n \in S_2$. S_2 is k-thin, then $kn - n \in S_1$. S_1 being 3-thin we have $2kn - 2n \in S_2$. $2kn - 2n = 2n \cdot (k-1) \Rightarrow 2n \in S_1 \Rightarrow 4n \in S_2$. From $(k-2) \cdot n + 1 \cdot 3n = kn + n$ there follows $3n \in S_1$. $kn - n \in S_1$ and $3n \in S_1 \Rightarrow kn + 2n \in S_2$. But $(k-2) \cdot n + 1 \cdot 4n = kn + 2n$ and n, $4n$, $kn + 2n$ are in S_2; this is a contradiction.

b) Let be $n \in S_1$. Then we have $2n \in S_2$. S_2 being k-thin we have $(k-1) \cdot 2n \in S_1$. $(2nk - 2n) + n = 2nk - n$, hence $2nk - n \in S_2$. From $(k-2) \cdot 2n + 1 \cdot 3n = 2nk - n$ we have $3n \in S_1$. But $n + (2nk - 3n) = 2nk - 2n \Rightarrow 2nk - 3n \in S_2$. We have $(k-3) \cdot 2n + 2 \cdot \frac{3n}{2} = 2nk - 3n$ with $2n$, $2nk - 3n$ in S_2, then $\frac{3n}{2} \in S_1$. S_1 is 3-thin, hence $3n \in S_2$. This is a contradiction. For n odd and $n > 3$ we can prove that (6) is true only for $k \leqslant (n+1)/2$. But it is probably that (6) is true for all $k \geqslant 3$ and $n \geqslant 2$.

2. In this part we give an application of the above theorems in the graph theory.

DEFINITION 2. We call a graph of N vertices n-extensive, for arbitrary naturals N and n, if we can denote all vertices of this graph with numbers $0, 1, \ldots, N-1$ so that two vertices denoted by i and j resp. $(i, j = 0, 1, \ldots, N-1)$, are connected by an edge if and only if $|i - j| \geqslant n$.

We shall denote by K_s the complete graph of s vertices. A graph is called monochromatic if all its edges are coloured in the same colour.

Let N, n, p, $k_i \geqslant 2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ be naturals. We shall denote by $r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p)$ the least natural number for which any n-extensive graph of N $(\geqslant n)$ vertices in arbitrary edge-colouring with p colours, contains at least one monochromatic K_{k_i} for some $i = 1, 2, \ldots, p$.

The existence of $r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p)$ follows from the paper [4] (Theorem III).

Remarks: 1. The 1-extensive graph is a complete graph; $r(1\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p)$ is identical to $n(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ (the generalised Ramsey number) introduced in [1], while $r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p)$ to $g(n\,;\,p\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) + 1$ introduced in [4].

2. In [4] (Theorem III) Š. Znám proved that

$$r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) \leqslant \sum_{i=1}^{p} r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_p) + n - p + 1 \tag{7}$$

THEOREM 5. *Let k, p and k_i $(k_i \geqslant 3,\ i = 1, 2, \ldots, p)$ be naturals. We have*

$$r(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) \geqslant f(n\,;\,k_1, k_2, \ldots, k_p) + 2 \tag{8}$$

The proof is completely analogical to the proof given by Z n á m [4] in the case $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$.
From (3) and (8) the following theorem gives a lower bound for $r(n; k_1, k_2, \ldots, k_p)$.

THEOREM 6. *Let* $n, p, 3 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_p$ *be naturals. We have*

$$r(n; k_1, k_2, \ldots, k_p) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{p} k_i - \sum_{i=1}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} k_j - 1\right) n + 1$$

Certainly, this is not a good lower bound.
From theorems 3 and 5 there results a better lower bound for $r(1; 3, k)$.

The author expresses his thanks to Dr Š. Z n á m for his useful suggestions.

(Received January 30, 1974)

REFERENCES

1. G r e e n w o o d, R. E., G l e a s o n, A. M., *Combinatorial relations and chromatic graphs*, „Canad. J. Math.", **7** (1955), 1–7.
2. Z n á m, Š., *Megjegyzések Turán Pál egy publikálatlan eredményéhez*, „Mat. lapok", **16** (1963), 307–310.
3. Z n á m, Š., *Generalisation of a number theoretical result*, „Mat-fyz. časop.", **16** (1966), 357–361.
4. Z n á m, Š., *On k-thin sets and n-extensive graphs*, „Mat. časop.", **17** (1967), 297–307.

DESPRE MULȚIMILE *k*-THIN ȘI LEGĂTURA LOR CU NUMĂRUL GENERALIZAT AL LUI RAMSEY

(R e z u m a t)

Se generalizează un rezultat al lui Š. Z n á m [4] privind mulțimile *k*-thin și se face legătura lor cu numărul generalizat al lui Ramsey din teoria grafelor. Se dă o delimitare inferioară pentru acest număr.

PREINTERPOLATORY BEST L_p-APPROXIMATION GENERALIZED POLYNOMIALS

I. MARUŞCIAC

1. **Introduction.** Let $\varphi = (\varphi_j)_0^n$ be a Tchebycheff system on $[-1, 1]$. We design by $\mathfrak{L}(\varphi)$ the class of generalized polynomials with respect to φ, i.e. the set of linear combinations of the form:

$$p(\varphi\,;\, a\,;\, x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x),\ a \in R^{n+1}. \tag{1}$$

Let $f \in C[-1, 1]$ and let $\rho : [-1, 1] \to R_+$ be a continuous weight-function. Then the problem we will deal with is the following: given a system of points $x_i \in [-1, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, and a system of real numbers y_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ $(0 \leq m \leq n)$, find a polynomial $p(\varphi\,;\, a^*;\ \cdot) \in \mathfrak{L}(\varphi)$ such that

(i) $$p(\varphi\,;\, a\,;\, x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, m;$$

(ii) $$\int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x) - p(\varphi\,;\ a^*;\ x)|^p\, dx =$$

$$= \inf_{a \in R^{n+1}} \int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x) - p(\varphi\,;\, a\,;\, x)|^p dx.$$

The polynomial $p(\varphi\,;\, a^*;\cdot)$ satisfying (i) — (ii) will be called *preinterpolatory best L_p-approximation* (*or $L_{p,\rho}$-approximation*) *to the function f on* $[-1, 1]$.

If $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ and $m = n$, then $p(\varphi\,;\, a^*;\ \cdot)$ coincide with Lagrange's interpolatory generalized polynomial. If (*i*) is missing then $p(\varphi\,;\, a^*;\ \cdot)$ is the classical best L_p-approximation generalized polynomial to the function f on $[-1, 1]$.

In this note we describe a new algorithm for determining the preinterpolatory best L_p-approximation polynomial to a given continuous on $[-1, 1]$ function f in the case when $p \geqslant 2$. It is an adaptation of the well-known Newton-Raphson's method. In the classical case of the best L_p-approximation such an algorithm has been given recently by Kahng, S. W. [2].

2. **Best $L_{p,\rho}$-approximation.** We complete the system $x_0, x_1, \ldots, x_m$ by other arbitrary different points $x_i \in [-1, 1]$, $i = m + 1, \ldots, n$, and let $y_{m+1}, \ldots, y_n$ be arbitrary real numbers. Then

$$L(\varphi\,;\, y\,;\, x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(\varphi\,;\ x),$$

where

$$l_i(\varphi;\ x) = \frac{D\begin{pmatrix}\varphi_0, & \dots, & \varphi_{i-1}, & \varphi_i, & \varphi_{i+1}, & \dots, & \varphi_n \\ x_0, & \dots, & x_{i-1}, & x, & x_{i+1}, & \dots, & x_n\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, & \dots, & \varphi_n \\ x_0, & x_1, & \dots, & x_n\end{pmatrix}}$$

is the generalized interpolatory polynomial with respect to the system $\varphi = (\varphi_j)_0^n$. Here

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, & \dots, & \varphi_n \\ x_0, & x_1, & \dots, & x_n\end{pmatrix} = \det(\varphi_i(x_j)),\ i, j = 0, 1, \dots, n.$$

First we consider $p = 2$, i.e. we have to minimize the function

$$F(y) = \int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x) - L(\varphi\,;y\,;\ x)|^2\,dx.$$

From the system

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -2\int_{-1}^{1} \rho(x)\,[f(x) - L(\varphi\,;y\,;\,x)]\,l_i(\varphi\,;\,x)dx = 0,\ i = m+1,\dots,n, \tag{2}$$

we have

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)L(\rho\,;y\,;\ x)l_i(\varphi\,;\,x)dx = \int_{-1}^{1} \rho(x)f(x)l_i(\varphi\,;\,x)dx,\quad i = m+1,\dots, n,$$

or

$$\sum_{j=m+1}^{n} y_j \int_{-1}^{1} \rho(x)l_i(\varphi\,;\,x)l_j(\varphi\,;\,x)dx = \int_{-1}^{1} \rho(x)\,[f(x) - \sum_{j=0}^{m} y_j l_j(\varphi\,;\,x)]\,l_i(\varphi\,;\,x)dx,$$
$$i = m+1, \dots, n.$$

If we denote: $A = (a_{ij}),\ b = (b_{m+1}, \dots, b_n)^T$, where

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{-1}^{1} \rho(x)l_i(\varphi\,;\,x)l_j(\varphi\,;\,x)dx,\ i, j = m+1, \dots, n, \\ b_i &= \int_{-1}^{1} \rho(x)\,[f(x) - \sum_{j=0}^{m} y_j l_j(\varphi\,;\,x)]\,l_i(\varphi\,;\,x)dx,\ i = m+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3}$$

then the solution $y^*\ (y^*_{m+1}, \dots, y^*_n)$ of the system (2) is the solution of the linear system

$$Ay = b.$$

Now let $p > 2$. Then we have to minimize the function:

$$F(y) = \int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x) - L(\varphi\,;y\,;\ x)|^p\,dx.$$

To minimize F it is necessary to find the solution of the system:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -p \int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x)-L(\varphi\,;y;x)|^{p-1}\, l_i(\varphi;\,x)\, sgn\,[f(x)-L(\varphi;y;x)]dx=0 \quad (4)$$

$$i = m+1,\ \ldots,\ n.$$

We will solve the system (4) by the Newton-Raphson's method. So the system (4) will be solved interatively by finding the solution of the system:

$$\frac{\partial F(y^{k-1})}{\partial y_i} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 F(y^{k-1})}{\partial y_j\,\partial y_i}\Delta y_j^k = 0,\ i = m+1,\ \ldots,\ n, \quad (5)$$

where $\Delta y^k = y^k - y^{k-1}$, $y^k = (y_{m+1}^k, \ldots, y_n^k)$.

From (4) we find that

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\,\partial y_i} = p(p-1)\int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x) - L(\varphi\,;y\,;x)|^{p-2}\, l_i(\varphi\,;x)l_j(\varphi\,;x)dx. \quad (6)$$

If we put

$$w_k(x) = \rho(x)|f(x) - L(\varphi\,;y^{k-1}\,;x)|^{p-2}$$

where $L(\varphi\,;y^{k-1}\,;\cdot) \in \mathfrak{L}(\varphi)$ is the preinterpolatory best weighted $L_{p,\,w_{k-1}}$ — approximation to the function f on $[-1,1]$, then (4) and (6) can be written under the form:

$$\frac{\partial F(y^{k-1})}{\partial y_i} = -p\int_{-1}^{1} w_k(x)[f(x) - L(\varphi\,;y^{k-1};\,x)]l_i(\varphi\,;\,x)dx$$

$$\frac{\partial^2 F(y^{k-1})}{\partial y_j\,\partial y_i} = p(p-1)\int_{-1}^{1} w_k(x)l_i(\varphi\,;x)l_j(\varphi\,;x)dx. \quad (7)$$

Substituting (7) in (5) we obtain the system:

$$(p-1)\sum_{j=m+1}^{n}\left[\int_{-1}^{1} w_k(x)l_i(\varphi\,;x)l_j(\varphi\,;x)dx\right]\Delta y_j^k =$$

$$= \int_{-1}^{1} w_k(x)\ [f(x) - L(\varphi\,;y^{k-1}\,;x)]l_i(\varphi\,;x)dx,\ \ i = m+1,\ \ldots,\ n,$$

or the equivalent system:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\int_{-1}^{1} w_k(x)l_i\,(\varphi\,;x)l_j\,(\varphi\,;x)\,dx\,[(p-1)\Delta y_j^k + y_j^{k-1}] =$$

$$= \int_{-1}^{1} w_k(x)\left[f(x) - \sum_{j=0}^{m} y_j\, l_j\,(\varphi\,;x)\right]l_i\,(\varphi\,;x)dx,\quad i = m+1,\ \ldots,\ n, \quad (8)$$

If we denote:

$$A^k = (a_{ij}^k) = \left(\int_{-1}^{1} w_k\,(x) l_i(\varphi\,;\; x)\; l_j(\varphi\,; x) \right) \qquad i, j = m+1, \ldots, n;$$

$$b^k = (b_{m+1}^k, \ldots, b_n^k)^T,$$

where

$$b_i^k = \int_{-1}^{1} w_k\,(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^{m} y_j\, l_j\,(\varphi\,;\; x) \right] l_i\,(\varphi\,; x) dx,$$

then the system (8) can be written under the form:

$$A^k\,[(p-1)\Delta y^k + y^{k-1}] = b^k. \tag{9}$$

Now, if $L(\varphi\,; z^k\,;\; \cdot\,) \in \mathfrak{L}(\varphi)$ is the preinterpolatory best weighted L_{2, w_k} — approximation polynominal to f on $[-1,\; 1]$, then it follows that

$$\frac{\partial F(z^k)}{\partial y} = -2 \int_{-1}^{1} w_k(x) [f(x) - L(\varphi\,; z^k\,;\; x)]\; l_i(\varphi\,; x) dx = 0, \quad i = m+1, \ldots, n,$$

hence $b^k = A^k z^k$. Therefore, system (9) can be put under the form:

$$A^k\,[(p-1)\Delta y^k + y^{k-1}] = A^k\, z^k. \tag{10}$$

If the matrix A^k is nonsingular (as we will show), then from (10) we obtain $(p-1)\Delta y^k + y^{k-1} = z^k$, or

$$y^k = \frac{1}{p-1}\,[z^k + (p-2) y^{k-1}]. \tag{11}$$

3. **Description of the algorithm.** From above we have the following algorithm for the preinterpolatory best weighted L_p — approximation to a continuous on $[-1,\; 1]$ function.

Starting from the initial vector $y^0 = (y_{m+1}^0, \ldots, y_n^0) \in R^{n-m}$

Step 1. Set $w_k\,(x) = \rho(x) |f(x) - L(\varphi\,; y^{k-1}\,;\; x)|^{p-2}$.

Step 2. Find the preinterpolatory best weighted L_{2, w_k} — approximation to f on $[-1,\; 1]$, $L(\varphi\,; z^k,\; \cdot\,) \in \mathfrak{L}(\varphi)$.

Step 3. Set

$$y^k = \frac{1}{p-1}\,[z^k + (p-2) y^{k-1}]$$

and go to Step 1.

4. **Convergence of the algorithm.** First we will show that A^k is nonsingular for each $k = 0, 1, \ldots$ Indeed, because, clearly $l_i\,(\varphi\,;\; \cdot\,)$, $i = 0,\; 1, \ldots, n$, are linearly independent on $[-1,\; 1]$, if $f \notin \mathfrak{L}(\varphi)$, the weight function w_k is continuous and $w_k\,(x) \not\equiv 0$, $x \in [-1,\; 1]$. But then it is known (see for instance, [5], pag. 32) that

$$A^k = \left(\int_{-1}^{1} w_k(x)\; l_i(\varphi; x)\; l_j(\varphi; x)\; dx \right), \qquad i, j = m+1, \ldots, n$$

is nonsingular.

Because

$$\left(\int_{-1}^{1} w_k(x)\,|f(x) - L(\varphi ; y ; x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

is strictly convex for $p > 1$, the convergence conditions of Newton-Raphson method are satisfied, and so we have

THEOREM. *If the initial weight function is continuous and* $\rho(x) > 0$, $x \in [-1, 1]$, *then the algorithm described at 3 is always convergent and the convergence of the iterations is quadratic.*

Remark 1. Because our algorithm is valid for each $p > 2$, when p tends to infinity we obtain Lawson's like algorithm, which gives us the preinterpolatory best uniform approximation (L_∞-approximation) to a continuous function on $[-1, 1]$.

Remark 2. This algorithm can be extended to the discrete case, when instead of the interval $[-1, 1]$ we take a finite point set, replacing the operator „integration on $[-1, 1]$" by the operator „summation over a a discrete set".

(Received September 15, 1974)

REFERENCES

1. Andriancik, A. N., Rusak, V. N., *Resenie odnoi ekstremal'noi zadaci*, Vestzi Akad. Nauk, Beloruskai SSR, **3**, 1973, pp. 25–29.
2. Kahng, S. W., *Best L_p-Approximation*, Math. Comp., **28**, no. 118, 1972, pp. 505–508.
3. Lawson, C. L., *Contribution to the Theory of Linear Least Maximum Approximation*, Ph.D. Thesis, UCLA, 1961, pp. 55–61.
4. Natanson, I. P., *Konstruktivnaia teoria funkcii*, Moskva, 1949.
5. Rice, I. R., *The Approximation of functions*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1964.

POLINOAME GENERALIZATE PREINTERPOLATOARE DE CEA MAI BUNĂ L_p-APROXIMAŢIE

(Rezumat)

Fie f o funcţie continuă pe intervalul $[-1, 1]$, $\varphi = \{\varphi_j\}_0^n$ un sistem Cebîşev pe $[-1, 1]$ şi $x_i \in [-1, 1]$, $y_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ date. Un polinom generalizat

$$p(\varphi ; a ; x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

se numeşte preinterpolator de cea mai bună L_p-aproximaţie a funcţiei f pe $[-1, 1]$ dacă

$$p(\varphi ; a ; x_i) = y_i, \; i = 0, 1, \ldots, m$$

şi el este de cea mai bună aproximaţie a funcţiei f pe $[-1, 1]$.

În această lucrare se dă un nou algoritm pentru calculul polinomului generalizat de cea mai bună L_p-aproximaţie a funcţiei f pe un interval dat. Algoritmul este bazat pe cunoscuta metodă a lui Newton-Raphson pentru rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor operaţionale.

UN ALGORITM PENTRU DETERMINAREA p-STABILITĂŢII UNOR METODE DE INTEGRARE NUMERICĂ

S. FĂGĂRAŞ

John J. H. Miller [2, 3] dă un algoritm pentru determinarea tipului unui polinom în raport cu cercul unitate (teorema 2). Am adaptat (teorema 3, 4) rezultatul lui Miller la teoria generală a p-stabilităţii metodelor pas cu pas de integrare numerică a problemelor cu valori iniţiale (teorema 1), dată de M. N. Spijker [1], dînd un algoritm pentru determinarea p-stabilităţii unor metode de integrare numerică.

În spaţiul vectorial real normat V, considerăm problema:

$$\begin{aligned} &X^{(p)} = F[X] \\ &X(a) = c_0,\ X^{(1)}(a) = c_1,\ \ldots,\ X^{(p-1)}(a) = c_{p-1} \end{aligned} \tag{1}$$

unde $X:[a, b] \to V$; $a, b \in R$, $a < b$; $p \in Z$, $p \geqslant 0$, $c_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p-1$, $X^{(q)}$ fiind a q— a derivată a lui X ($q = 0, 1, \ldots, p$); F fiind o funcţională neliniară din V în V (pentru definiţia derivatelor funcţiilor abstracte vezi [4], pp. 261). În (1) intră ecuaţii diferenţiale ordinare, ecuaţii integrale şi integro-diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale, etc. De exemplu, ecuaţia cu derivate parţiale cu condiţii iniţiale:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),\ t \geqslant 0 \\ &u(x, 0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

e de tipul (1) dacă considerăm $V = \{u/u \in C^\circ[0, 1],\ ||u|| = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} /u(x)/\}$.

Notăm cu x_n aproximaţia lui X la $t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ unde $0 < h \leq h_0$, $h_0 \in R$, $h_0 > 0$ şi considerăm pentru rezolvarea problemei (1) metoda:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x_{n+i} = h^p \Psi_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, h), \tag{2}$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $a + (n + k)h \leq b$, $k \in Z$, $k \geqslant 0$, $h \in [0, h_0]$, $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ($a_k = 1$) şi Ψ_n satisface nişte condiţii de tip Lipschitz (vezi [1], condiţiile (7a), (7b)), condiţii în care stabilitatea metodei(2) depinde numai de membru stîng, ([1], pp. 164).

DEFINIŢIA 1. Metoda (2) e p-stabilă dacă există numerele $\alpha > 0$, h_1, $0 < h_1 \leqslant h_0$, astfel că dacă:

$$y_0 = w_0 + u_0, \ldots, y_{k-1} = w_{k-1} + u_{k-1},\ y_{n+k} = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i y_i + h^p \Psi_n(y_0, \ldots$$
$$\ldots y_{n+k}, h) + u_{n+k}$$

$$\tilde{y}_0 = w_0 + \tilde{u}_0, \ldots, \tilde{y}_{k-1} = w_{k-1} + \tilde{u}_{k-1},\ \tilde{y}_{n+k} = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i \tilde{y}_i + h^p \Psi_n(\tilde{y}_0, \ldots,$$
$$\ldots, \tilde{y}_{n+k}, h) + \tilde{u}_{n+k}$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots,$ şi $a + (n + k)h \leqslant b$, unde $0 < h \leqslant h_1$, atunci

$$\|y_N - \tilde{y}_N\| \leqslant \alpha \cdot \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \|\tilde{u}_i - u_i\|, \text{ dacă } p = 0,$$

sau

$$\|y_N - \tilde{y}_N\| \leqslant \alpha \cdot (N + 1)^{p-1} \sum_{i=0}^{N} \|u_i - \tilde{u}_i\|, \text{ dacă } p \geqslant 1,$$

pentru fiecare N, cu $0 \leqslant N \leqslant (b - a)/h$ ($\|\cdot\|$ notînd norma lui V).

Metodei (2) îi ataşăm polinomul caracteristic

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i z^i, \quad (a_k = 1, \ a_0 = f(0)). \tag{3}$$

Definiţia 2. Rădăcinile polinomului $f(z)$ satisfac condiţia p-stabilităţii dacă:

a) au modulul ≤ 1,

b) multiplicitatea rădăcinilor de modul 1, nu depăşeşte p.

Teorema 1. *Metoda (2) este p-stabilă dacă şi numai dacă rădăcinile polinomului $f(z)$ satisfac condiţia p-stabilităţii.* (vezi [1], pp. 168–170).

Corespunzător polinomului $f(z)$ ataşăm polinoamele:

$$f^*(z) = z^k \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = a_k + a_{k-1} z + \ldots + a_1 z^{k-1} + a_0 z^k, \ (a_k = f^*(0)),$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + (k - 1)a_{k-1} z^{k-2} + k a_k z^{k-1},$$

$$\check{f}(z) = \frac{1}{z} [f^*(0)\, f(z) - f(0)\, f^*(z)] =$$

$$= (a_k a_1 - a_0 a_{k-1}) + (a_k a_2 - a_0 a_{k-2}) z + \ldots + (a_k^2 - a_0^2) z^{k-1}.$$

După gradul lui $f(z)$ şi semnul lui $|a_k| - |a_0| = |f^*(0)| - |f(0)|$ distingem următoarele patru situaţii:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \ |a_k| - |a_0| > 0, \ (\check{f}(z) \text{ de gradul maxim } k - 1),\\
&\text{(ii)} \ |a_k| - |a_0| < 0, \ (\check{f}(z) \text{ de grad maxim } k - 1),\\
&\text{(iii)} \ |a_k| - |a_0| = 0 \text{ şi } \check{f}(z) = z^q g(z), \ \left(0 \leq q \leq \left[\frac{n-2}{2}\right], \ g(0) \neq 0\right),\\
&\text{(iv)} \ |a_k| - |a_0| = 0 \text{ şi } \check{f}(z) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Observaţia 1. În situaţia (iv) f are acelaşi număr de zerouri în interiorul şi înafara cercului unitate, iar $\check{f}(z) \equiv 0$, dacă şi numai dacă $a_j a_k = a_0 a_{k-j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Începînd cu $f_k = f$ introducem şirul de polinoame de grad descrescător $\{f_i\}_{i=0}^{k}$, prin:

$$f_{i-1} = \begin{cases} \check{f}_i, & \text{în situaţia (i) şi (ii)}, \\ \check{h}_i, & \text{în situaţia (iii)}, \\ f_i', & \text{în situaţia (iv)}, \end{cases} \tag{5}$$

unde $h(z)$ e definit ca în [2].

DEFINIŢIA 3. Polinomul $f(z)$ are tipul $(s, (q_1, \ldots, q_m), r)$ dacă şi numai dacă are s rădăcini în cercul unitate şi r rădăcini înafară (numărînd şi multiplicităţile) şi m rădăcini de ordinul $q_1, \ldots, q_m$ pe cercul unitate $\left(s + r + \sum_{i=1}^{m} q_i = k\right)$.

Algoritmul pentru determinarea tipului unui polinom are la bază următoarea teoremă (vezi [2, 3]):

TEOREMA 2. *Polinomul* $\check{f}_i$ *are tipul* $(s, (q_1, \ldots, q_m), r)$, *unde* $s + r + \sum_{j=1}^{m} q_j = i$, *dacă şi numai dacă* f_{i-1} *are tipul*

$(s - 1, (q_1, \ldots, q_m), r)$, *în situaţia (i)*,

$(r - 1, (q_1, \ldots, q_m), s)$, *în situaţia (ii) şi (iii)*,

$(s + m - 1, (q_1', \ldots q_{m'}'), r)$, *în situaţia* (iv), *unde* $q_i' = q_i - 1$ *şi* m' *este numărul zerourilor care rămîn pe cercul unitate* ($s = r$ *în cazul* (iv)).

Observaţia 2. Un polinom care verifică condiţia p-stabilităţii ($p \geqslant 1$) are tipul $(s, (q_1, \ldots, q_m), 0)$ unde $q_i \leq p$, $i = 1, 2, \ldots, m$, iar în cazul 0-stabilităţii tipul $(s, (0), 0)$.

TEOREMA 3. *Fie* $p \geqslant 1$. *Polinomul* $f(z)$ *verifică condiţia* p*-stabilităţii dacă şi numai dacă*:

(a) $|a_k| > |a_0|$ $(|f^*(0)| > |f(0)|)$,

(b) $\check{f}$ *verifică condiţia* p*-stabilităţii*, sau

(c) $a_k a_j = a_0 a_{k-j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $(\check{f} \equiv 0)$,

(d) f' *verifică condiţia* $(p - 1)$*-stabilităţii*.

Demonstraţie. Necesitatea: Dacă polinomul f verifică condiţia p-stabilităţii rezultă că rădăcinile lui notate z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, verifică relaţia $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Avem $f(z) = a_k (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k)$, de unde $f(0) = a_k (-1)^k z_1 \ldots z_k$,

$$f^*(z) = z^k a_k \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_1\right)\left(\frac{1}{z} - \bar{z}_2\right) \ldots \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_k\right) =$$

$$= a_k (1 - z\bar{z}_1)(1 - z\bar{z}_2) \ldots (1 - z\bar{z}_k), \text{ de unde } f^*(0) = a_k.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} |a_k| - |a_0| = |f^*(0)| - |f(0)| = |a_k| - |a_k| \cdot |(-1)^k z_1 z_2 \dots z_k| = \\ = |a_k|(1 - |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_k|) \end{aligned} \tag{6}$$

Cum $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, şi $a_k \neq 0$, din (6) rezultă $|a_k| - |a_0| \geqslant 0$, adică, $|a_k| > |a_0|$ sau $|a_k| = |a_0|$.

1°. Dacă $|a_k| > |a_0|$ (situaţia (i)), adică avem (*a*), în baza relaţiei (5), a teoremei 2 şi a observaţiei 2, rezultă (*b*).

2°. Sau dacă $|a_k| = |a_0|$, şi aceasta are loc în baza relaţiei (6) şi a faptului că $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots k$, numai dacă $|z_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, atunci avem:

$$\check{f}(z) = \frac{1}{z}\,[f^*(0)\,f(z) - f(0)\,f^*(z)] =$$

$$= \frac{1}{z}\,[a_k^2(z - z_1)\dots(z - z_k) - a_k^2(-1)^k z_1 \dots z_k\,(1 - z\bar{z}_1)\dots(1 - z\bar{z}_k)] =$$

$$= \frac{a_k^2}{z}\,[(z - z_1)\dots(z - z_k) - (-1)^k (z_1 - z)\dots(z_k - z)] = 0,$$

adică am obţinut (c). Cum $|a_k| = |a_0|$ şi $\check{f}(z) \equiv 0$, (situaţia (iv)) în baza relaţiei (5), a teoremei 2 şi a observaţiei 2, rezultă (d).

Suficienţa: Fie verificate condiţiile (*a*) — (*b*) sau (*c*) — (*d*).

1°. Din condiţiile (*a*) — (*b*) rezultă uşor că f verifică condiţia p-stabilităţii.

2°. Sau din condiţiile (*c*) — (*d*) rezultă că f are tipul $(s, (q_1, \dots, q_m), 0)$ unde $q_i \leq p - 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, şi că sîntem în situaţia (iv). Atunci în baza teoremei 2 şi a observaţiei 1, rezultă că f are tipul $(0, (q_1', \dots, q_{m'}'), 0)$, unde $q_i' = q_i + 1 \leq p$, $i = 1, 2, \dots, m'$. pentru că $p \geqslant 1$ (presupunînd $q_i = 0$, pentru $i > m$, aceasta avînd loc cînd $s > m - 1$), şi deci f verifică condiţia p-stabilităţii.

TEOREMA 4. *Polinomul f verifică condiţia 0-stabilităţii dacă şi numai dacă*: (α) $|a_k| > |a_0|$,

(β) $\check{f}$ *verifică condiţia 0-stabilităţi.*

Demonstraţie. Condiţia (α) rezultă din relaţia (6) datorită faptului că $a_k \neq 0$, şi rădăcinile lui f satisfac în baza 0-stabilităţii condiţia $|z_i| < 1$ $i = 1, 2, \dots, k$. Din (α) în baza relaţiei (5), a teoremei 2 şi a observaţiei 2, rezultă (β).

Invers, din (α) şi (β) în baza teoremei 2 (situaţia (i)), relaţiei (5), şi a observaţiei 2, rezultă uşor că f verifică condiţia 0-stabilităţii.

Observaţia 3. În baza teoremei 1, teoremele 3 şi 4 dau o condiţie necesară şi suficientă pentru p-stabilitatea ($p \geqslant 0$) metodei (2), a cărei verificare se face în următoarele etape:

1. se verifică (*a*) (privitor la f),
2. dacă se verifică (*a*) trecem la (*b*),
3. dacă (*a*) nu e verificată trecem la (*c*),

4. dacă se verifică (c) trecem la (d),

5. dacă (c) nu e verificată metoda nu este p-stabilă. Verificarea lui (b) sau (d) se face după etapele indicate mai sus referitor la $\check{f}$ respectiv la f'.

Observaţia 4. Programînd algoritmul la calculator am arătat, de exemplu, că metoda de tip (2) cu polinomul caracteristic

$$f(z) = 4z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 4z - 1$$

este 1-stabilă.

(Intrat în redacţie la 30 mai 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Spikjer, M. N., *Convergence and Stability of Step-by-step Methods for the Numerical Solution of initial-value Problems*, „Num. Math.", **8**, pp. 161–177 (1966).
2. Mc Carty, D. P., Miller, John J. H., *The refinement and implementation of an algorithm for finding the type of a polynominal.* Preprint, School of Matematics, Trinity College, Dublin. No TCD 1972–9. (Va apare în J. Assoc. Coput. Mach.)
3. Miller, John J. H., *On weat Stability, and the type of a polinomial*, Conference on Applications of Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag **228** (1971), pp. 316–320.
4. Kalik, C., *Ecuaţiile fizicii matematice* (curs litografiat), Cluj, 1973.

AN ALGORITHM ESTABLISHING p-STABILITY OF SOME NUMERICAL INTEGRATION METHOD

(Summary)

The algorithm concerns the verification of the root condition for the stability of initial value problems.

ASUPRA UNUI MODEL DE SORTARE

ELENA OANCEA FRĂŢILĂ

Lucrarea prezintă un model de sortare a unei mulţimi E de m elemente care pot fi caracterizate de n atribute, fiecare putînd avea anumite ponderi. Se consideră cazul cînd toate atributele pot avea aceleaşi ponderi, exprimate prin numere întregi, nenegative, finite.

Se introduce o măsură de proximitate pentru două atribute, definită cu ajutorul unei variabile aleatoare Poisson sau aproximativ de tip normal redus. Folosind această măsură se dă o clasificare a atributelor, în ordinea crescătoare a valorii medii a proximităţilor unui atribut cu celelalte.

Se indică, de asemenea, anumite teste pentru testarea ordonării fixate.

1. **Generalităţi.** Se consideră o mulţime E cu m elemente: obiecte, indivizi, care pot fi descrise prin o mulţime A de n caractere sau atribute; fiecare atribut avînd o anumită pondere relativ la prioritatea atributului respectiv[1] sau la gradul-măsura în care atributul respectiv este prezent la un anumit element. Se presupune că toate atributele pot apare la orice element din E cu aceleaşi ponderi. Se presupune că ponderile atributelor sînt exprimate prin numere întregi nenegative[2], finite. Atunci mulţimea E poate fi descrisă prin atributele mulţimii A printr-o matrice de incidenţă:

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n,\\ j=1,\ldots,m,}}$$

unde b_{ij} este ponderea atributului i pentru elementul j. În cazul $b_{ij} = 0$, elementul j nu prezintă atributul i, deci ponderea este nulă.

În această descriere a mulţimii E se face ipoteza că, dacă există două linii identice în matricea B, atunci una din ele se suprimă.

Se observă că fiecare coloană din matricea B descrie un element din mulţimea E, iar fiecare linie a matricii B reprezintă modul de repartizare a unei caracteristici la elementele din E. Deci fiecărui element din E îi corespunde un vector coloană $b'(b_{1j}, \ldots, b_{nj})$, $j = 1, \ldots, m$, şi fiecărui atribut-caracteristici un vector linie $b_h(b_{h1}, \ldots, b_{hm})$, $h = 1, \ldots, n$.

Două atribute se zic *pozitiv asociate (negativ asociate)* [2], relativ la obiectul j, dacă sînt prezente, respectiv absente simultan la acest obiect, adică dacă ponderile corespunzătoare sînt ambele pozitive, (respectiv nule).

Obiectele mulţimii E se pot clasifica în funcţie de atributele mulţimii A, după diferite criterii (vezi [1]).

Să considerăm o primă clasificare a mulţimii E în submulţimile E_{oh} şi E_h, $h = 1, \ldots, n$, unde:

— submulţimea E_{oh} este formată din acele elemente $e \in E$, care nu posedă atributul h, adică pentru care $b_{hi} = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$,

— submulţimea E_h este formată din acele elemente $e \in E$, care posedă atributul h, adică pentru care $b_{hi} \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

---

[1] În ceea ce priveşte prioritatea unui atribut, se pot considera diverse criterii pentru aprecierea acesteia. (vezi [3]).

[2] Evident se poate considera cazul cînd ponderile sînt date de numere nenegative, subunitare.

În anumite condiţii, matricea de incidenţă B poate fi adusă la o formă specială, astfel încît orice submulţime E_h, $h = 1, \ldots, n$, să constitue un interval în mulţimea E. În acest caz matricea B se prezintă sub forma (σ):

$$\begin{pmatrix} 0\ 0\ \text{////////}\ 0 \ldots 0 \\ \text{//////////////}\ 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0\ \text{////////}\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \ldots 0\ \text{////////} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{pmatrix}$$

unde porţiunile haşurate sînt formate cu valori $b_{ij} \neq 0$.

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca matricea B să poată fi adusă la forma (σ) este să existe o permutare a tuturor coloanelor lui B, astfel ca pentru orice $h = 1, \ldots, n$, submulţimea E_h să fie un interval din mulţimea E.* [2].

Pentru matricea B adusă la forma (σ), se poate defini funcţia $c(h)$, respectiv $r(h)$, şi anume:

$$b_{hj} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } j < c(h), \text{ sau } j > c(h) + r(h), \\ \neq 0, \text{ dacă } c(h) \leqslant j \leqslant c(h) + r(h), \end{cases}$$

unde $r(h)$ este numărul elementelor $b_{hj} \neq 0$, din linia h.

Se observă că $c(h)$, $r(h)$, $h = 1, \ldots, n$, determină intervalul $[c(h), c(h) + r(h)]$ care formează submulţimea E_h din forma (σ) a matricii B.

Ordonînd acum liniile matricii B adusă la forma (σ), astfel încît $r(1) \leqslant \leqslant r(2) \leqslant \ldots \leqslant r(n)$, se obţine forma (σ') a lui B.

2. Măsura proximităţii. Pentru definirea proximităţii relativ la atributele elementelor lui E, se presupune că numai o asociaţie pozitivă între două atribute contribuie la proximitatea-asemănarea lor.

Fie

$$s(h, k) = \sum_{j=1}^{m} b_{hj} b_{kj} \tag{1}$$

şi

$$\mu_h = \sum_{j=1}^{m} b_{hj}/T,$$

unde $T = \sum_{j=1}^{m} b_{hj} + p_h + n_h$, p_h fiind numărul elementelor nule din linia h a matricii B, iar n_h un număr întreg nenegativ astfel încît valoarea lui T să fie aceeaşi pentru orice $h = 1, \ldots, n$.

Fie ipoteza (I) care presupune că mulţimea E este

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E^i,$$

unde $E^i \subset E$ este acea submulţime a lui E care conţine elementele $e \in E$, ce posedă i atribute, $i = 1, \ldots, k$, $k \leqslant n$, şi $n_i = card\ (E^i)$, iar $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, N număr natural fix. Se atribuie lui E^i probabilitatea n_i/N. Atunci ipoteza (I) constă în aceea că aceste probabilităţi sînt uniform repartizate pe mulţimea părţilor lui E.

În această ipoteză, dacă $\mu_h\mu_k T =$ constant, pentru orice T număr natural, variabila aleatoare-statistica $s(h, k)$ este de tip Poisson, de parametru $\mu_h\mu_k T$.[3]

Statistica

$$S(h, k) = \frac{s(h, k) - \mu_h\mu_k T}{\sqrt{\mu_h\mu_k T}}, \tag{2}$$

pentru T suficient de mare, în special pentru $\mu_h\mu_k T \to \infty$, este de tip normal $N(0, 1)$.

Se observă că dacă în matricea B se face schimbarea de măsură

$$b'_{hi} = \frac{b_{hi} - \mu_h}{\sqrt{\mu_h \sqrt{T}}},$$

statistica (1) devine

$$S(h, k) = \sum_{i=1}^{T} b'_{hi} b'_{ki}.$$

Într-adevăr :

$$\sum_{i=1}^{T} b'_{hi} \cdot b'_{ki} = \frac{\sum_{i=1}^{T} (b_{hi} - \mu_h)(b_{ki} - \mu)_k}{\sqrt{\mu_g \mu_k} T} = \sum_{i=1}^{T} \frac{b_{hi} b_{kj} - \mu_h \mu_k T}{\mu_h \mu_k T},$$

deoarece $\sum_{i=1}^{T} b_{hi} = \mu_h T$, $\sum_{i=1}^{T} b_{ki} = \mu_k T$, $\sum_{i=1}^{T} b_{hi} \cdot b_{ki} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}\, b_{ki}$, ţinînd cont că vectorul cu m componente $(b_{h1}, \ldots, b_{hm})$ s-a înlocuit cu vectorul cu T componente $(b_{h1}, \ldots, b_{hm}, 0, \ldots, 0)$, ultimele $T-m$ componente fiind nule.

După cum se vede T este în general un număr natural destul de mare, deci statistica S poate fi considerată de tip normal $N(0, 1)$.

În cazul particular cînd b_{ij} ia numai valoarea 0 sau 1, se vede că $S(h, k)$ se reduce la statistica corespunzătoare din [2].

Observaţie. Statisticile s, S permit definirea unei măsuri a proximităţii corespunzătoare atributelor h şi k. Evident problema poate fi pusă şi relativ la elementele mulţimii E, folosind în măsura proximităţii vectorii coloană din matricea B.

3. **Ordonarea matricii B după gradul de proximitate al liniilor.** a) *Preordine bazată pe funcţia r.* O ordonare a mulţimii E după atributele din A, se poate face prin aducerea matricii B la forma (σ').

Această preordine a matricii B în forma (σ') ne dă o imagine asupra proximităţii între două atribute h, k, deoarece $r(h)$, $h = 1, \ldots, n$, în ordonarea (σ') este o funcţie crescătoare de h, cu care se poate construi o măsură

[3] Într-adevăr produsul $\mu_h\mu_k T$ extinde în mod identic produsul $\mu_h\mu_k p$ din [2] pentru o matrice de nxT dimensiuni, în care se vor considera pe linia h : $\sum_{i=}^{m}$ elemente de unu, iar $p_h + n_h$ elemente nule. Deci în condiţiile ipotezei (I) enunţate, şi $\mu_h\mu_k T =$ const., pentru orice T natural, s este de tip Poisson.

de proximitate pentru două atribute h, k. Dar această ordonare nu este suficient de concludentă, pe de o parte pentru că, dacă h, k, corespund aceleiași valori a lui r, între ele nu se mai face o altă clasificare, pe de altă parte, și în cazul cînd h, k corespund unor valori diferite ale lui r, în această ordonare nu se ține cont de ponderile asociate diferitelor elemente pentru atributele respective.

b. *Preordine bazată pe o măsură de proximitate*. Fie măsura de proximitate pentru atributele $h, k, h, k = 1, \ldots, n, h \neq k$, dată de:

$$m(h, k) = \frac{s(h, k)}{T} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} b_{hi} \cdot b_{ki}, \tag{3}$$

care satisface axiomele măsurii de proximitate [1]. Se observă că $s(h, k)/T$ este o funcție crescătoare în raport cu *card* $(E_h \cap E_k)$ și cu ponderile atributelor h, k. Atunci luînd media proximităților lui h:

$$\bar{s}_h = \frac{1}{(n-1)T} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} s(h, k), \quad h = 1, \ldots, n,$$

se poate ordona matricea B relativ la linii, după valorile crescătoare ale lui $\bar{s}_h$. Să notăm această preordine cu (π), adică pentru care avem: $\bar{s}_1 \leqslant \bar{s}_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n$.

Analog, considerînd măsura de proximitate

$$m'(h, k) = \frac{s(h, k)}{\sqrt{s(h, h) s(k, k)}} \quad \text{și} \quad \bar{s}_h = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m'(h, k),$$

se obține o preordine (π).

Această preordine (π) este mai eficientă decît cea dată de (σ'), ordonarea după valorile $\bar{s}_h$, incluzînd în expresia lui $\bar{s}_h$ atît numărul elementelor care posedă atributul h, cît și ponderile respective.

Preordinea (π) se poate considera și folosind în relația (4) statistica S, în locul lui s. Relativ la această preordine (π) avem:

TEOREMA 1. *Dacă matricea B are forma (π), atunci există o reprezentare a ordinei liniilor prin punctele $\bar{s}_h$, $h = 1, \ldots, n$, aparținînd unui interval finit al axei reale și ale căror distanțe sînt date de $\bar{s}_h - \bar{s}_k$, $h, k = 1, \ldots, n$.*

TEOREMA 2. *În condițiile teoremei 1, aceea dintre liniile matricii B a cărei medie a distanțelor la toate celelalte linii, respectiv a cărei dispersie a proximităților la toate celelalte linii, este maximă este o linie extremă a lui B.*

Demonstrația este analogă lemei 1 din [2], relativ la funcția $c(i)$. Într-adevăr

(5) $M(1) - M(h) > 0$, pentru $h = 1, \ldots, n/2$, dacă n este par, și pentru $h = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}$, dacă n este impar, unde

$$M(1) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{s}_i - n\bar{s}_1 \right),$$

$$M(h) = \frac{1}{n} \left[\bar{s}_h (2h - n) - \sum_{i=1}^{h} \bar{s}_i + \sum_{i=h+1}^{n} \bar{s}_i \right].$$

Se obţin rezultate analoge şi pentru dispersie dată de

$$D^2(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2, \quad d_i = \bar{s}_i - s_1,$$

şi corespunzător pentru $D^2(h)$.

Cu alte cuvinte teorema spune că atributul corespunzător liniei extreme este de cea mai slabă proximitate faţă de celelalte de rang pînă la $n/2$, $(n+1)/2$.

4. **Analiza dispersiei globale** Fie $\bar{s} = 1/n \sum_{1}^{n} \bar{s}_i$, media globală a proximităţilor. Diferenţa $s'_{hk} - \bar{s}$, unde $s'_{hk} = 1/T\ s(h, k)$, se poate scrie

$$s'_{hk} - \bar{s} = s'_{hk} - \bar{s}_h + \bar{s}_h - \bar{s}.$$

Atunci dispersia globală D^2 este:

$$D^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{h,k=1 \\ h\neq k}}^{n} (s'_{hk} - \bar{s})^2 = 1/n \sum_{h=1}^{n} 1/(n-1) \sum_{\substack{h,k=1 \\ h\neq k}}^{n} (s'_{hk} - \bar{s}_h)^2 \tag{6}$$

$$+ 1/n \sum_{h=1}^{n} (\bar{s}_h - \bar{s})^2,$$

şi exprimă dispersia atributelor în mulţimea părţilor lui E.

Observaţie. Dispersia D^2 se poate considera şi în cazul cînd în locul statisticii $s(h, k)$ se pune $S(h, k)$.

Formula (6) se utilizează în anumite testări relativ la structura matricii B faţă de ordonarea (π) sau faţă de ordonarea $\bar{s}_1 - \bar{s} \leqslant \ldots \leqslant \bar{s}_n - \bar{s}$, analoge celor din [2; 3.1].

(Intrat în redacţie la 5 ianuarie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Lerman, I. C., *Les bases de la classification automatique*, coll. Programation, Paris, Gauthier-Villars, 1970.
2. Lerman, I. VC., *Analyse du phénomen de la sériation à partir d'un tableau d'incidence*, „Math. Sci. hum.," **38**, 1972, p. 39–57.
3. Onicescu, O., *Procedee de estimare comparativă a unor obiecte purtătoare de mai multe caracteristici*, „Rev. de Statistică", 4, 1970, p. 3–10.

SUR UN MODÈLE DE SÉRIATION

(Résumé)

Le travail présente un modèle de sériation d'un ensemble de m éléments E, qui peuvent présenter n caractéristiques, chacune pouvant avoir certains poids. On considère le cas où toutes les caractéristiques peuvent avoir les mêmes poids qui sont exprimés par des nombres entiers, nonnégatifs, finis.

On introduit une mesure de proximité pour deux caractéristiques à l'aide d'une variable aléatoire. On donne un ordre des caractéristiques d'après la valeur moyenne croissante des proximités d'une caractéristique avec les autres.

Enfin on indique des tests pour tester l'ordre fixé.

STUDIUL A PATRU VARIABILE TIP RR LYRAE. (II) XX ŞI WW BOOTIS

GH. CHIŞ, D. CHIŞ şi I. MIHOC

1. XX Bootis. Steaua variabilă XX Bootis a fost găsită de P. T s e s e v i c h [1] pe plăcile fotografice obţinute la Observatorul Astronomic din Moscova în anii 1926, 1939—1940 şi pe plăcile obţinute la Observatorul Astronomic din Odessa în anul 1952. P. Tsesevich a adăugat la aceste observaţii observaţiile sale vizuale din 1957, deducînd din toate acestea patru maxime şi elementele fotometrice:

$$\text{Max.hel} = \text{JD } 2429366.646 + 0.5814016 \text{ E} \qquad (1)$$

date în catalogul general de stele variabile [2].

Atlasul stelelor RR Lyrae [3] dă harta regiunii variabilei.

La Cluj, steaua XX Bootis a fost urmărită în anii 1959—1962, 1964—1966 fotografic la telescopul Newton, obţinîndu-se 535 poze de cîte 4 minute. Observaţiile au fost efectuate de colectivul de stele variabile (25.8% — I. Popa; 18% — I. Todoran; 17.2% — I. Mihoc; 17% — Gh. Chiş; 9% — V. Ureche; 7% — S. Radu; 3.5% — E. Botez; 2.5% — N. Lungu).

Pentru stelele de comparaţie au fost alese 5 stele din vecinătatea variabilei, presupuse constante ca strălucire, pentru care am obţinut magnitudinile (cu ajutorul secvenţei polare nord) (v. tabelul 1, fig. 1). Din totalitatea observaţiilor efectuate la Cluj, am dedus momentele a 17 maxime ale strălucirii, indicate în tabelul 2.

Grupînd observaţiile după fază, cîte 3—4, am obţinut curbele de lumină şi anume:

Tabel 1

Stelele de comparaţie	Magnitudinile m	ε
A	11,35±	0,07
a	11,67±	5
b	12,06±	3
c	12,31±	3
d	12,73±	5

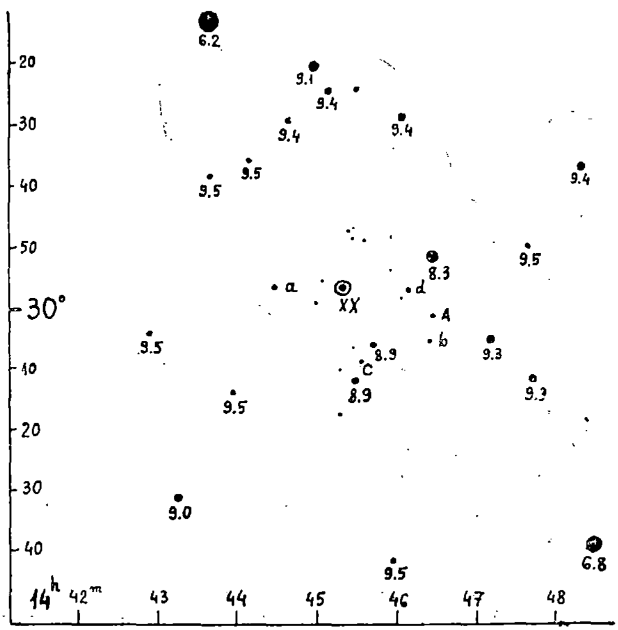


Fig. 1

Tabel 2

Nr. crt.	Max. hel. J.D.24...	P	E	$0-C_1$	$0-C_2$	$0-C_3$	Obs.
1	24609,6100	1	−8189	−0,0081	−0,0161	−0,0027	Tsesevich
2	29366,6570	1	0	+0,0110	+0,0023	+0,0090	,,
3	29725,3770	1	+613	+0,0062	−0,0025	+0,0037	,,
4	34118,4330	1	+8173	−0,0083	−0,0178	−0,0176	,,
5	36714,4090	2	12638	+0,0096	−0,0004	−0,0057	G. Chiş pv
6	36803,3660	2	12791	+0,0121	+0,0022	−0,0013	,, pg
7	37132,4450	2	13357	+0,0178	+0,0078	+0,0039	,, ,,
8	37160,3550	1	13405	+0,0206	+0,0105	+0,0066	,, pv
9	37174,3040	3	13429	+0,0159	+0,0059	+0,0019	,, ,,
10	37732,4600	1½	14389	+0,0264	+0,0162	+0,0115	Mihoc-D. Chiş pv
11	37839,4204	2	14573	+0,0089	−0,0013	−0,0061	,, ,,
12	37843,4809	2	14580	−0,0004	−0,0106	−0,0155	,, ,,
13	37867,3418	1	14621	+0,0230	+0,0128	+0,0079	,, ,,
14	37871,3909	1½	14628	+0,0023	−0,0079	−0,0128	,, ,,
15	38596,4165	1	15875	+0,0201	+0,0098	+0,0039	,, ,,
16	38624,3178	½	15923	+0,0141	+0,0038	−0,0021	,, ,,
17	38635,3880	½	15942	+0,0377	+0,0274	+0,0214	,, ,,
18	38642,3195	½	15954	−0,0076	−0,0179	−0,0239	,, ,,
19	38953,4300	2	16489	+0,0336	+0,0427	+0,0363	D. Chiş pg
20	39321,4280	1½	17122	+0,0238	+0,0134	+0,0065	,, ,,
21	39353,3930	2	17177	+0,0107	+0,0013	−0,0057	,, ,,

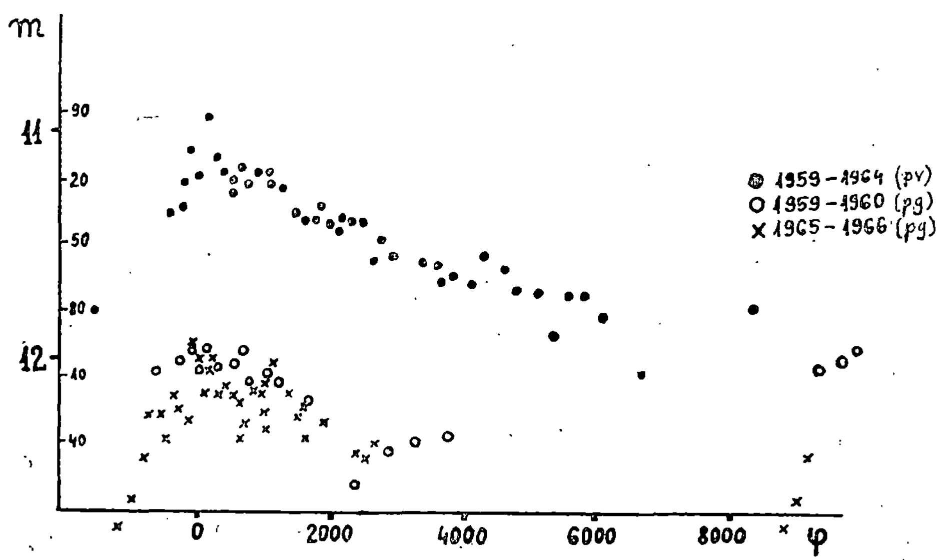


Fig. 2

— o curbă de lumină fotovizuală din pozele pe plăci Isopan ISS (1959—1964) (fig. 2);
— o curbă de lumină fotografică din pozele pe plăci Agfa Astro (1959—1960) (fig. 2);
— o curbă de lumină fotografică din pozele pe plăci Guilleminot (1965—1966) (fig. 2).

Gh. Chiş a dedus noi elemente din cele patru maxime ale lui P. Tsesevich şi primele cinci maxime obţinute la Cluj:

$$\text{Max. hel} = \text{JD } \underset{\pm 87}{2429366.6547} + \underset{\pm 11}{0.5814017}\ E \qquad (2)$$

D. Chiş, din toate maximele obţinute, 21, a dedus noi elemente:

$$\text{Max.hel} = \text{JD } \underset{\pm 273}{2429366.6480} + \underset{\pm 18}{0.5814025}\ E \qquad (3)$$

Pentru a observa tipul acestei stele, am căutat asimetriile şi amplitudinile în curbele medii obţinute pentru anii 1959—1960, 1962 şi 1964 în magnitudini fotovizuale (tabelul 3) şi în anii 1959—1960, 1965 şi 1966 în magnitudini fotografice (tabelul 4).

Din aceste date rezultă că steaua ar fi de tipul RR_{ab}.

2. **WW Bootis.** Steaua WW Bootis a fost observată de C. M. Hanley şi H. Shapley [4], care dau poziţia stelei, indicaţia că este de tipul R R Lyrae şi amplitudinea variaţiei de lumină între 12.8—14.0 magnitudini fotografice.

P. Tsesevich [5], din pozele obţinute la Moscova în anii 1912—1913 şi 1937 deduce prin evaluări 4 maxime, iar din observaţiile vizuale din 1957—1958 stabileşte momentele a încă 7 maxime, pe baza acestora deducînd elementele variaţiei de lumină:

$$\text{Max.hel} = \text{JD } 2419483.529 + 0.47926659\ E \qquad (1)$$

Tabel 3

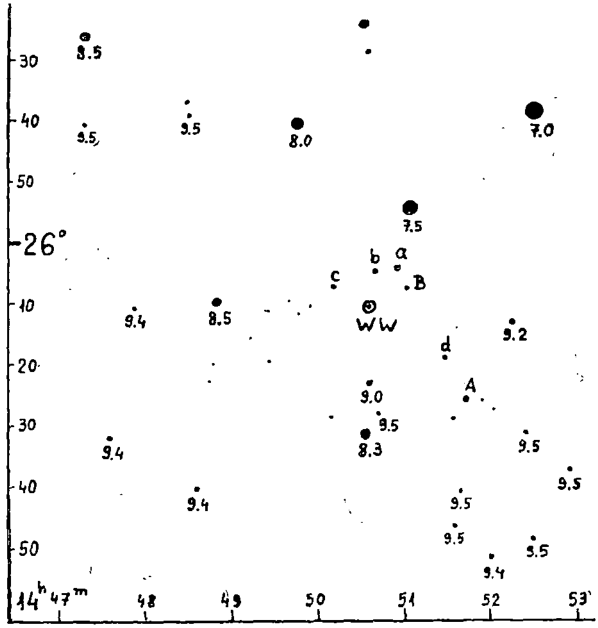
Perioada efect. obs.	M_{pv}	m_{pv}	A	ξ
1959—60	10,93	11,68	0,75	—
1962	10,95	12,11	1,16	0,092
1964	10,94	11,49	0,55	—

Tabel 4

Perioada efect. obs.	M_{pg}	m_{pg}	A	ξ
O.K.	12,30	13,00	0,70	0,380
1959—60	11,96	12,45	0,49	0,109
1965	11,87	12,68	0,81	—
1966	11,55	—	—	—

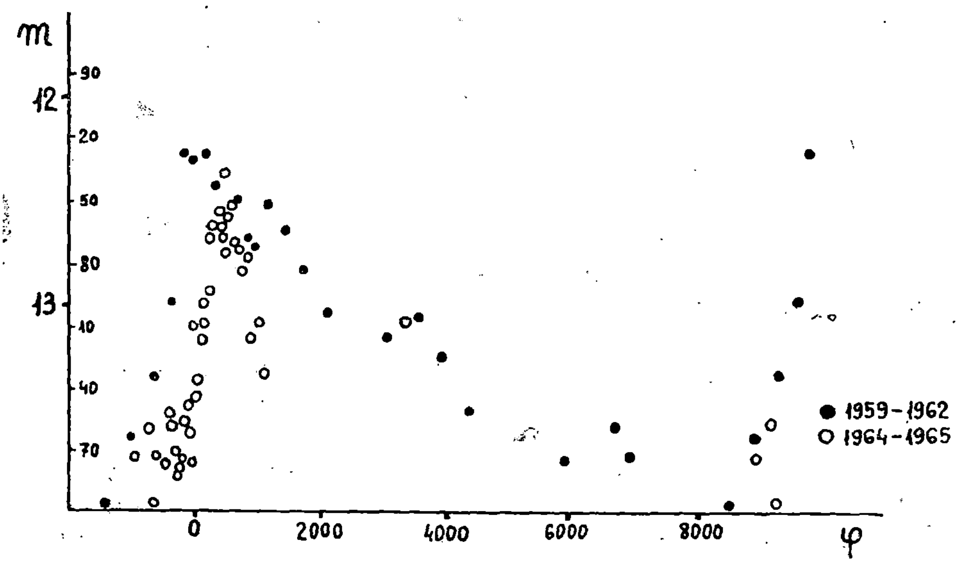
Tabel 5

Stelele de comparaţie	Magnitudinile m_{pg} ε
A	12,29±0,09
B	12,47±0,10
a	13,25±0,05
b	13,64±0,05
c	13,88±0,06
d	13,88±0,05



-26°
30
40
50
10
20
30
40
50
14^h47^m
48
49
50
51
52
53
8.5
9.5
9.5
8.0
7.0
7.5
b
a
c
B
9.4
8.5
WW
9.2
d
A
9.0
9.5
8.3
9.4
9.5
9.5
9.4
9.5
9.5
9.5
9.5
9.4

Fig. 3



m
12
13
90
20
50
80
10
40
70
0
2000
4000
6000
8000
φ
1959-1962
1964-1965

Fig. 4

Tabel 6

Nr. crt.	Max. hel. J.D. 24...	P	E	O−C₁	O−C₂	Obs.
1	19483,4900	1	0	−0,0390	−0,1831	Tsesevich
2	19858,3900	1	782	+0,0745	−0,1068	,,
3	19913,4000	1	897	−0,0310	−0,1835	,,
4	28660,3700	1	19148	−0,1557	+0,0022	,,
5	36050,3330	1	34567	−0,0042	+0,0109	,,
6	36347,4720	1	35187	−0,0105	−0,0011	,,
7	36362,3890	1	35218	+0,0492	+0,0583	,,
8	36372,3970	1	35239	−0,0074	+0,0015	,,
9	36373,3540	1	35241	−0,0089	+0,0000	,,
10	36395,3910	1	35289	−0,0182	−0,0097	,,
11	36396,3610	1	35289	−0,0067	+0,0017	,,
12	36741,4319	1	36009	−0,0077	−0,0060	G. Chiş
13	36751,4961	2	36030	−0,0081	−0,0066	,,
14	36765,3944	2	36059	−0,0086	−0,0073	,,
15	36788,3953	½	36107	−0,0125	−0,0116	,,
16	*36789,3558*	*2*	*36109*	*−0,0105*	*−0,0097*	,,
17	36790,3162	2	36111	−0,0086	−0,0078	,,
18	37134,4315	½	36829	−0,0067	−0,0126	,,
19	37781,4715	1	38179	+0,0234	+0,0050	D. Chiş
20	37803,4997	½	38225	+0,0153	−0,0135	,,
21	37816,4580	2	38252	+0,0234	+0,0044	,,
22	38591,4495	1	39868	+0,0404	+0,0068	,,
23	38605,3243	1½	39898	+0,0169	−0,0174	,,
24	38616,3690	½	39921	+0,0385	+0,0040	,,
25	38949,4700	1	40616	+0,0492	+0,0083	,,
26	38972,4645	2	40664	+0,0389	−0,0025	,,

Atlasul stelelor RR Lyrae dă harta regiunii variabilei.

La Cluj, această variabilă a fost urmărită în anii 1959—1962, 1964—1966 fotografic la telescopul Newton, obţinîndu-se 220 poze de cîte 4 minute. Observaţiile au fost efectuate de colectivul de stele variabile (25% — I. *Mihoc*; 20% — V. *Ureche*; 19% — Gh. *Chiş*; 15% — I. *Popa*; 9% — S. Radu; 7% — I. Todoran; 5% — E. Botez). Stelele de comparaţie utilizate sînt cele din fig. 3, iar magnitudinile lor au fost determinate cu ajutorul a 20 stele din secvenţa polară nord şi sînt date în tabelul 5.

Grupînd observaţiile în puncte normale (în medie 6 observaţii), am obţinut curbele de lumină pentru cele două perioade de observaţie: 1959—1962 (fig. 4) şi 1964—1965 (fig. 4). Din totalul observaţiilor am dedus momentele a 15 maxime de strălucire (vezi tabelul 6). Din acestea şi ultimele 8 maxime obţinute de Tsesevich în anii 1937—1958, am obţinut elementele variaţiei de strălucire:

$$\text{Max.hel} = \text{JD } \underset{\pm 44}{2437816.4536} + \underset{\pm 92}{0.4792758}\ E \qquad (2)$$

Tipul RR_a al variabilei rezultă din amplitudinea variaţiei de strălucire (vezi tabelul 7).

Tabel 7

Perioada efect. obs.	M_{pg}	m_{pg}	A	A	Tip
O.K.	12,80	14,00	1,20	RR	—
1959—60	12,29	13,97	1,68	—	0,130
1962	12,34	13,72	1,34	—	0,117
1964	12,64	13,87	1,23	—	0,154
1965	12,85	14,30	1,45	RRa	0,093

Datorită valorilor mici ale diferenţelor O—C (aproape de limita preciziei de determinare), nu s-a putut pune în evidenţă o variaţie sistematică a lor.

(Intrat în redacţie la 28 septembrie 1974)

BIBLIOGRAFIE

1. Tsesevich, P. V., „A.N.", **188,** 24 (1958).
2. Kukarkin, B. V. et al., *General Catalogue of Variable Stars*, 3rd ed., Vol. I, Moscow, „Nauka", (1968), pp. 90—91.
3. Tsesevich, P. V., Kazansmas, M. S., *Atlas poiskovîh kart dlia peremennîh zvezd tipa RR Lirî i drugich*, Odessa, (1963), 12.
4. Hanley, C. M., Shapley, H., „H.B.", 913 (1940).
5. Tsesevich, P. V., „A.N.", **196,** 11 (1958).

THE STUDY OF 4 RR LYRAE TYPE VARIABLES. (II) XX AND WW BOOTIS

(Summary)

In this second paper are reported results of the photographic observations of the XX and WW Bootis variable stars. The observations have been carried out at the Astronomical Observatory of the Cluj-Napoca University, during the 1959—66 period.

The photometric elements are as follows:

$$\text{Max. hel} = \text{JD } 2429366.648 + 0.5814\ 025\ E \text{ (XX Bootis)}$$
$$\pm 27 \qquad \pm 18$$

$$\text{Max. hel} = \text{JD } 2437816.4536 + 0.47927585\ E \text{ (WW Bootis)}$$
$$\pm 44 \qquad \pm 92$$

The XX Bootis star seems to be of RR_{ab} type and WW Bootis star seems to be of RR_a type.

I. P. Cluj Municipiul Cluj-Napoca — 439/1975

În cel de al XX-lea an de apariție (1975) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde fasciculele:

matematică
fizică
chimie
geologie—geografie
biologie
filozofie
științe economice
științe juridice
istorie
filologie

На XX году издания (1975) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими выпусками:

математика
физика
химия
геология—география
биология
философия
экономические науки
юридические науки
история
филология

Dans leur XX-e année de publication (1975) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les fascicules suivants:

mathématiques
physique
chimie
géologie—géographie
biologie
philosophie
sciences économiques
sciences juridiques
histoire
philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă

Lei 10