STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

1974

CLUJ

ANUL XIX 1974

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — CONTENTS — INHALT — SOMMAIRE

ASPECTE ALE CERCETĂRII MATEMATICE LA UNIVERSITATEA CLUJEANĂ ÎN ANII PUTERII POPULARE

Școala clujeană de matematică este o componentă importantă a școlii matematice românești care de-a lungul vremii, și mai ales în anii puterii populare, s-a afirmat pe plan mondial ca una dintre școlile noastre științifice cele mai reprezentative. Desigur, s-ar putea scrie mult despre învățămîntul matematic superior la Cluj, despre marile personalități și profesorii entuziaști care l-au slujit, pregătind atîtea generații de matematicieni. Este suficient să amintim pe D. Pompeiu, A. Angelescu, Gh. Bratu, N. Abramescu, Th. Angheluță, care după primul război mondial au pus bazele învățămîntului matematic românesc la Cluj.

Instaurarea puterii populare în țara noastră a permis o dezvoltare rapidă și dirijată — în scopul perfecționării continue a societății — atît a învățămîntului matematic cît și a cercetării matematice. Astăzi în centrul universitar clujean activează o pleiadă de tineri matematicieni care, alături de profesorii lor mai în vîrstă, aduc o contribuție de seamă la progresul matematicii românești. Majoritatea acestora își desfășoară activitatea în cadrul Facultății de Matematică-Mecanică a Universității clujene.

Orientarea tematicii științifice la facultatea noastră se face prin îmbinarea armonioasă a unor cercetări cu frumoase tradiții la Cluj (ca cele de Analiză numerică, Teoria funcțiilor, Topologie și Ecuații diferențiale) cu preocupări mai recente din alte capitole importante ale matematicii moderne (ca cele de Algebră, Geometrie, Analiză funcțională și Informatică). Deși cu un alt specific, menționăm și valoroasele tradiții de cercetări din domeniul mecanicii și astronomiei. Dintre problemele reprezentative ce țin de domeniul cercetării fundamentale cităm: teoria nodurilor, teoria geometrică a funcțiilor analitice, structuri algebrice și geometrice, noțiunea de convexitate cu aplicații la teoria celei mai bune aproximații, teoria interpolării, teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, operatori diferențiali, formule de derivare și integrare numerică, teoria algoritmelor, teoria controlului optimal, probleme de mecanica fluidelor, probleme de astronomie și astrofizică cu aplicații la studiul mișcării sateliților artificiali. În ultimul timp la facultatea noastră se acordă o atenție din ce în ce mai mare studiului unor probleme cu caracter aplicativ prin colaborări, contracte și convenții cu o serie de întreprinderi productive.

Legătura între învățămînt și cercetare se realizează în primul rînd prin conținutul cursurilor speciale, strîns legat de tematica de cercetare de la catedre. Un mare număr de studenți sînt antrenați în activitatea cercurilor științifice studențești, care funcționează pe lîngă fiecare catedră, precum și prin pregătirea lucrărilor de diplomă. În urma acestor activități susținute mulți studenți au obținut rezultate originale valoroase.

În cadrul fiecărei catedre funcționează seminarii speciale în care se dezbat aspecte actuale ale creației matematice mondiale.

Pe lîngă participările la manifestările științifice proprii, multe cadre didactice de la facultatea noastră participă activ la o serie de alte manifestări ca cele organizate de Institutul de Calcul din Cluj și Societatea de

Ştiinţe Matematice. Se cuvine să menţionăm de asemenea participările matematicienilor noştri la diferite congrese şi colocvii internaţionale.

Un aport deosebit în valorificarea cercetării ştiinţifice îl aduce Seria Matematică-Mecanică a revistei *Studia Universitatis Babeş-Bolyai,* prin care se fac cunoscute multe din realizările proprii şi se întreţine un larg schimb internaţional de publicaţii.

Condiţiile create după Eliberarea ţării noastre au permis ca rezultatele valoroase ale matematicienilor noştri să pătrundă tot mai mult în fluxul general al ideilor matematice contemporane, contribuind la creşterea prestigiului şcolii româneşti de matematică.

CONJUGATION RELATIONS IN γ-CATEGORIES

GR. CĂLUGĂREANU

Introduction. Considering the theory of abelian categories as "the" natural generalization of the category of abelian groups, one can ask himself which is "a" corresponding generalization of the category of non-necessary abelian groups.

More precisely, such a generalization is required to have some "canonic" properties: to be a conormal but not a normal category (in this way we have to distinguish exact and coexact sequences), to be complete, cocomplete, etc.

In such a generalization one would expect to prove and use Noether, Schreier, Jordan-Hölder theorems and "5", "9", and Zassenhaus lemmas.

There are plenty of such generalizations in the literature, two of these being the "hofmanian" and the "γ-categories", the last ones being introduced by Burgin and Calenko.

In such categories, having about all the "working" theorems, one can expect to give some kind of theory of formations in the Gaschütz sense. A difficulty which appears at once is the fact that conjugation cannot be defined globally (without elements); the author uses an abstract conjugation relation proposed by Schunck which permits an easy approach to the subject.

Let $\mathcal{C}$ be an arbitrary γ-category in Burgin-Calenko's sense [1, 2] (for a more didactical exposition of these categories see [4]).

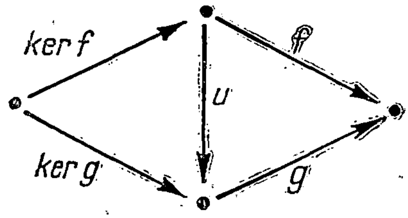
First, let us recall that a γ-category is a locally small, conormal category with zero and epi-mono factorizations, satisfying the following three conditions:

γ1. $\mathcal{C}$ has pullbacks of two morphisms, provided that at least one of them, f_1 is mono and if f_2 is epi then so is g_1.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\ \bullet \arrow[r, "f_2"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

γ2. If f is a normal mono and g is epi then $im(gf)$ is a normal mono.

γ3. In the following commutative diagram if f, g are epis and u is mono then u is iso.



One shows that a γ-category has kernels, cokernels for normal monos, images, coimages, inverse images, finite intersections, that any morphism f factors through *coker* $(ker(f))$ ans $im(f)$ and that a γ-category is balanced.

Essentially for what follows is that a γ-category has unions of two subobjects provided that at least one of them is normal and that in a γ-category the 5-lemma, the 9-lemma and the N o e t h e r isomorphism theorems hold, the two last ones in the following form:

N1. If $u : M \to A$ and $v : N \to A$ are normal monos and $v \leqslant u$ then $A/N/M/N \cong A/M$.

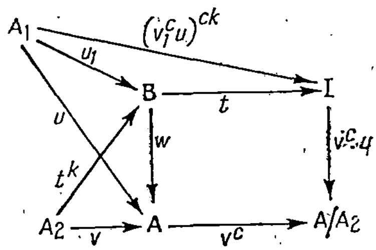
N2. If $u : A_1 \to A$ and $v : A_2 \to A$ are monos, the second being normal, then $A_1/A_1 \cap A_2 \cong A_2 \cup A_1/A_2$.

We shall simplify the exposition using, from now on, equalities instead of isomorphisms, which means in fact that we shall work in a skeletal category $\mathfrak{A}$.

Finally, let us recall also from [4] (for instance) the following two lemmas:

L1. If $vu = ker(\mathrm{w})$ and v is mono then $u = ker(wv)$.

L2. In the conditions of N2, the pullback of $coker(v)$ and $im(coker(v).u)$ over A/A_2 is the union $A_1 \cup A_2$.



Using the diagram describing this last lemma, where $I = im(coker(v).u)$, one easily shows that (as objects!) $im(v^c \cdot w) = (v^c \cdot w)^I = v^{ck} = I$ where the obvious notations are taken also from [4]. Consequently, we have $im(A_1 \cup A_2 \to A \to A/A_2) = im(A_1 \to A_1 \cup A_2 \to A \to A/A_2)$.

Following H. S c h u n c k [6] we shall use the following definitions:

Definition 1. A binary relation on obj $\mathfrak{A}$, h is called a *conjugation relation* if

(0) A_1hA implies $A_1 \subseteq A$
(1) A_1hA and AhA implies $A_1 = A$
(2) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ and A_1hA implies A_1hA_2
(3) A_1hA implies $(f/A_1)h(f/A)$ for every morphism f of domain A.
In this case A_1 is called *h-subobject of A*.

DEFINITION 2. A full subcategory $\mathfrak{X}$ of $\mathcal{A}$ is called *homomorph* if $\mathfrak{X}$ is closed under (epimorphic) images of morphisms of $\mathcal{A}$ with domain in $\mathfrak{X}$.

DEFINITION 3. A subobject $m_1 : A_1 \to A$ is called a *$\mathfrak{X}$-covering subobject* if

(i) $A_1 \in \mathrm{obj}\, \mathfrak{X}$.
(ii) For each subobject $m_2 : A_2 \to A$ such that $m_1 \leqslant m_2$ and each normal subobject $A' \to A_2$, if $A_2/A' \in \mathfrak{X}$ then $A' \bigcup A_1 = A_2$.

First of all, it is trivial that

THEOREM 1. *If A_1 is a $\mathfrak{X}$-covering subobject of $\mathcal{A}$ and $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$, then A_1 is $\mathfrak{X}$-covering for A_2.*

THEOREM 2. *If h is a conjugation relation in $\mathcal{A}$, then there is a homomorph $\mathfrak{X}$ in $\mathcal{A}$ such that each h-subobject of A is $\mathfrak{X}$-covering for A.*

Proof. Let $\mathfrak{X}$ be the full subcategory of $\mathcal{A}$, consisting of all objects A such that AhA. Letting $A_1 = A$ in (3), it is readily seen that $\mathfrak{X}$ is a homomorph.

Now let A_1 be a h-subobject of A. Letting $A_2 = A_1$ in (2) we have $A_1 \in \mathfrak{X}$. Next, in order to verify (ii) for A_1, suppose $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$, A' normal subobject of A_2 and $A_2/A' \in \mathfrak{X}$. The following diagram describes our situation where $u' = ker((u')^c)$ and $(u')^c = coker(u')$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "v_1"] \arrow[ddr, "u_1"'] & & \\
 & A_1 \cup A' \arrow[d, "u"] & \\
A' \arrow[ur, "v'"] \arrow[r, "u'"'] & A_2 \arrow[r, "(u')^c"'] & A_2/A'
\end{tikzcd}$$

Using L1 we have $v' = ker((u')^c \cdot u) = im((u')^c \cdot u_1) = (u')^c/A_1$, where the middle equality uses L2.

Since from (2) we already have A_1hA_2, letting $A = A_2$ and $f = (u')^c$ in (3), we obtain $((u')^c/A_1)h((u')^c(A_2))$ so that $(A' \bigcup A_1/A')h(A_2/A')$. But by assumption $A_2/A' \in \mathfrak{X}$, hence $(A_2/A')h(A_2/A')$. A final application of (1) gives us $A' \bigcup A_1/A' = A_2/A'$ and then using for instance the 5-lemma we obtain $A' \bigcup A_1 = A_2$.

For the proof of the the third and last theorem we need the following two lemmas:

LEMMA 3. *If the following diagram has exact rows then there is a subobject $m_2 : A_2 \to A_3$ with $m_1 \leqslant m_2$ such that $X = A_2/A$; of course A being normal subobject of A_3, so will be A in A_2 too.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dd, equal] & A_1 \arrow[r] \arrow[dd] & A_1/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & X \arrow[d, "x"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "p"'] & A_3/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. A_2 is the pullback of p and x so that $m_1 \leqslant m_2$ is then immediat. It is also easy to show that $A \to A_1 \to A_2 = ker(A_2 \to X)$ and hence, $A_2 \to X$ being epi, it follows by $\gamma 1$ that $X = A_2/A$.

LEMMA 4. *If $X \to B/A'$ is a normal subobject then there is a normal subobject $B' \to B$ such that $X = B'/A'$.*

Proof. If $C = coker(X \to B/A')$, we have the following diagram with exact rows and columns

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d] & & X \arrow[d, dash, "u"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "p"'] \arrow[d] & B/A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Hence, if B' is the pullback of p and u, it is easy to show that $B' \to B = ker(B \to C)$. Using the 9-lemma it follows that $X = B'/A'$.

THEOREM 5. *If A_1 is $\mathfrak{X}$-covering for A and $A' \to A$ is a normal subobject, then $A' \bigcup A_1/A'$ is $\mathfrak{X}$-covering for A/A'.*

Proof. Using U2 we have $A' \bigcup A_1/A' = A_1/A' \bigcap A_1 \in \mathfrak{X}$, because $\mathfrak{X}$ is homomorph and $A_1/A' \bigcap A_1$ is an epimorphic image of $A_1 \in \mathfrak{X}$, and so (i) is verified.

Using the two previous lemmas, in order to verify the condition (ii), we suppose $A_1 \cup A'/A' \subseteq B/A' \subseteq A/A'$ and B'/A' normal subobject of B/A' such that $B/A'/B'/A' \in \mathfrak{X}$, and we have to show that $(B'/A')_{,} \cup \cup (A_1 \cup A'/A') = B/A'$.

In these conditions we have $A_1 \subseteq B \subseteq A$ and B' normal subobject of B. Using N1, $B/B' = B/A'/B'/A' \in \mathfrak{X}$ and hence $B' \cup A_1 = B$, because A_1 is $\mathfrak{X}$-covering for A. Further, we have $B' \cup (A_1 \cup A') = B$, because A' is a normal subobject of B'.

Now let $f: B/A' \to X$ be a morphism and $x: X \to Y$ be a mono in $\mathfrak{A}$ such that squares 1,2 in the following diagrams are commutative.

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d] & B'/A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & Y \arrow[d, "x"] \\ B \arrow[r] & B/A' \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \cup A' \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \cup A'/A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & Y \arrow[d, "x"] \\ B \arrow[r] & B/A' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Using the commutativity of the outer rectangles (filled up in a canonic way) and equality $B = B' \cup (A_1 \cup A')$ we get a morphism $\beta: B \to Y$ which makes the following diagram commutative.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, equal] & & Y \arrow[d] \\ B \arrow[r, "p"'] & B/A' \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

If finally $k: A' \to B$ is the kernel of p, then p is the cokernel of k and from $fpk = x\beta k = 0$ or $\beta k = 0$, we get a morphism $\delta: B/A' \to Y$ such that $\beta = \delta p$. Hence, p being epi, the following diagram is commutative which proves that $B/A' = (B'A') \cup (A_1 \cup A'/A')$, q.e.d.

$$\begin{tikzcd} B/A' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "x"] \\ B/A' \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

(Received December 15, 1973)

REFERENCES

1. Burgin, M., *γ-categories and categories with involution*, Uspehi Mat. Nauk, **24**, no. 2(146), p. 221—222 (1969).
2. Calenko, M. S., *Semigruppi con involuzione e categorie con involuzione*, Instituto nazionale di alta matematica, **IV**, Academic Press (1970).
3. Gaschütz, W., *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z., **80** (1963), p. 300—305.
4. Lorenzo Muniz, R., *Lemas Clásicos en γ-categorias*, Algebra, **10**, Universidad de Santiago de Compostela, 1972.
5. Mitchell, B., *Theory of categories*, Academic Press, 1965.
6. Schunck, H., *H-Untergruppen auflösbarer Gruppen*, Math. Z., **97** (1967), p. 326—330.

RELAŢII DE CONJUGARE ÎN γ-CATEGORII

(Rezumat)

Inspirîndu-se din teoria formaţiilor (în sensul lui Gaschütz) a grupurilor resolubile finite şi utilizînd ideea mai generală (datorită lui H. Schunck) de a considera relaţii de conjugare în locul relaţiilor de $\mathfrak{X}$-maximalitate sau $\mathfrak{X}$-proiector, autorul dă un punct de plecare posibil în teoria formaţiilor într-o γ-categorie.

Se scoate în acelaşi timp în evidenţă asemănarea dintre γ-categorii şi *Gr*, categoria grupurilor (non-necesar abeliene).

СООТНОШЕНИЯ СОПРЯЖЕНИЯ В γ-КАТЕГОРИЯХ

(Резюме)

Исходя из теории формаций (в смысле Гашюца) конечных разрешаемых групп и используя более общую идею (принадлежащую Германну Шунку) рассматривать соотношения сопряжения вместо соотношений $\mathfrak{X}$-максимальности или $\mathfrak{X}$-проектора, автор дает возможную исходную точку в теории формаций в γ-гатегории.

Выявляется одновременно сходство между γ-категориями и Gr, категорией групп (не необходимо абелевых).

ÜBER EINE KATEGORIE VON HALBMODULN

ELEMÉR KISS

Der Begriff des Halbmoduls wurde von K. Iizuka im Jahre 1959 eingeführt [4]. Sein Ziel war die Verallgemeinerung des Jacobsonschen Radikals für Halbringe. Dieser Begriff war in dem letzten Jahren von mehreren Verfassern wie I. Hajj [3], F. Poyatos [7], J. Johnson-E. Manes [5], M. P. Grillet [1] untersucht worden. In dieser Arbeit wollen wir eine spezielle Kategorie von Halbmoduln untersuchen, ihre charakteristischen Eigenschaften studieren, und zwar, mit Hilfe des von uns eingeführten Begriffe des zulässiges Coideals und des normalen Homomorphismus, die im laufe der Arbeit definiert werden.

Sei S eine nichtleere Menge in der zwei Verknüpfungen, „$+$" und „$\cdot$", erklärt sind. Das System $(S, +, \cdot)$ ist ein Halbring, wenn

1. $(S, +)$ eine abelsche Halbgruppe mit dem neutralen Element „o" ist,
2. $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element „1" ist,
3. die Multiplikation „$\cdot$" ist gegenüber der Addition „$+$" distributiv,
4. für alle $s \in S$ haben wir $s \cdot o = o \cdot s = o$.

$(S, +, \cdot)$ sei ein Halbring und $(X, +)$ eine abelsche Halbgruppe mit dem neutralen Element o_X. X wird ein linksseitiger S-Halbmodul (kurz ein S-Halbmodul) genannt, wenn eine Kompositionsregel $\psi: S\times X \to X$ (die mit $\psi(s, x) = sx$ bezeichnet wird) definiert ist, so dass für alle $x, y \in X$ und alle $s, s_1, s_2 \in S$ folgende Axiome: 1. $s(x+y) = sx + sy$; 2. $(s_1 + s_2)x = s_1x + s_2x$; 3. $s_1(s_2x) = (s_1 \cdot s_2)x$; 4 $1x = x$; 5. $ox = o_X$ erfüllt sind.

Für alle $s \in S$ ist $so_X = o_X$ [7]. Die Unterhalbgruppe X_1 des S-Halbmoduls X ist ein S-Unterhalbmodul des S-Halbmoduls, X, wenn für beliebige Elemente $s \in S$ und $x_1 \in X_1$, $sx_1 \in X_1$ ist.

Es seien X und Y zwei S-Halbmoduln. Die Abbildung $f: X \to Y$ heisst ein S-Homomorphismus von Halbmoduln (kurz ein S-Homomorphismus) wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $s \in S$

1° $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

2° $f(sx_1) = sf(x_1)$.

Wir haben $f(o_X) = o_Y$ [7]. Das Unterhalbmodul $f(X)$ von Y wird das Bild von f genannt, und das Unterhalbmodul $f^{-1}(o_Y)$ von X heisst der Kern von f und wird mit $\mathrm{Ker} f$ bezeichnet. Das Ideal I der Halbgruppe X heisst ein zulässiges Ideal des S-Halbmoduls X, wenn für alle $s \in S (s \neq o)$ und $i \in I$, $s \cdot i \in I$ ist.

Die Klasse aller S-Halbmoduln als Objekte und die Klasse aller S-Homomorphismen als Morphismen bilden eine Kategorie, die mit $\mathcal{C}_s$ bezeichnet wird. In dieser Kategorie ist die Entwicklung einer Theorie der exakten Folgen nicht möglich, so wie dieses in der Kategorie der R-Moduln der Fall ist. Darum müssen wir eine Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{C}_s$ bilden in welcher die Existenz der exakten Folgen gültig ist. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff des zulässiges Coideals ein.

Definition 1. X sei ein S-Halbmodul. Eine nichtleere Untermenge C des S-Halbmoduls X heisst zulässiges Coideal von X, wenn $X \setminus C$ ein zulässiges Ideal von X, oder wenn $X = C$ ist.

Man kann leicht beobachten, dass der folgende Satz gültig ist.

Satz 1. Es sei X ein S-Halbmodul und C sei eine nichtleere Untermenge von X. C ist genau dann ein zulässiges Coideal von X, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in X$ aus $x_1 + x_2 \in C$, $x_1 \in C$ und $x_2 \in C$ folgt, und weiter aus $x \in X \setminus C$ und $s \in S$, $sx \in X \setminus C$ folgt.

Satz 2. Es sei X ein S-Halbmodul und $X_1 \subset X_2 \subset X$. Dann ist

a) Wenn X_1 ein zulässiges Coideal von X_2 und X_2 ein solches von X ist, dann ist X_1 ein zulässiges Coideal von X.

b) Ist X_1 ein zulässiges Coideal von X und ist weiter X_2 ein Unterhalbmodul von X so ist X_1 ein zulässiges Coideal im X_2.

Beweis. In dem Beweise dieses Satzes werden wir den Satz 1. mehrmals benützen. Nehmen wir an, dass für alle $x_1', x_2' \in X$, $x_1' + x_2' \in X_1$ ist, also auch $x_1' + x_2' \in X_2$ ist. Aus der Tatsache, dass X_2 ein Coideal in X ist, folgt, dass $x_1' \in X_2$ und $x_2' \in X_2$. Des weiteren, da X_1 ein Coideal in X_2 ist, folgt aus $x_1' + x_2' \in X_1$ und aus $x_1', x_2' \in X_2$, $x_2' \in X_1$ und $x_2' \in X_1$. Andererseits folgt aus $x \in X \setminus X_1$ und aus $s \in S$, dass entweder $x \in X / X_2$ oder $x \in X_2 \setminus X_1$. Ist $x \in X / X_2$ so ist auch $sx \in X \setminus X_2 \subset \subset X \setminus X_1$ und weiter folgt aus $x \in X_2 \setminus X_1$, $sx \in X \setminus X_2 \subset X \setminus X_1$. Folglich X_1 ist ein zulässiges Coideal in X.

Die zweite Aussage kann man ähnlich beweisen.

Definition 2. Es seien X und Y zwei S-Halbmoduln. Ein S-Homomorphismus $f: X \to Y$ heisst ein normaler S-Homomorphismus wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:

3° $f(X)$ ist ein zulässiges Coideal von Y,

4° ist das Unterhalbmodul K von X auch ein zulässiges Coideal von X, so ist $f(K)$ ein zulässiges Coideal von $f(X)$.

Wir bemerken, dass unsere Definition mit der, in der Arbeit [7] gegebenen Definition des normalen Homomorphismus nicht identisch ist. Ein Homomorphismus $f: X \to Y$ von Halbgruppen, für welchen $Y \setminus f(X)$ ein Ideal in Y ist, oder $f(X) = Y$ ist, wurde bei P. A. Grillet ein „consistent" Homomorphismus genannt [2].

Man kann durch Beispiele zeigen, dass die Bedingungen 3° und 4° wesentlich sind im Sinne, dass nicht jeder S-Homomorphismus normal ist, und dass auch diese Bedingungen voneinander unabhängig sind. Wir bemerken ferner, dass wenn X und Y R-Moduln sind, der Homomorphismus $f: X \to Y$ genau dann normal ist, wenn f eine Surjektion ist.

Satz 3. Es seien X, Y und Z S-Halbmoduln. Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwei normale S-Homomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein normaler S-Homomorphismus.

Beweis. Man sieht leicht ein dass $g \circ f$ ein S-Homomorphismus ist, also genügt es zu zeigen, dass die Bedingungen 3° und 4° durch $g \circ f$ erfüllt sind.

3° Weil f ein normaler S-Homomorphismus ist, ist $f(X)$ ein zulässiges Coideal, sowie auch ein Unterhalbmodul in Y. Die Bedingung 4° für g benützend, erhält man dass $g[f(X)] = (g \circ f)(X)$ ein zulässiges Coideal in $g(Y)$ ist; aber $g(Y)$ ist auch ein zulässiges Coideal in Z, also ist $(g \circ f)(X)$ ein zulässiges Coideal in Z.

4° Beweist man ähnlich wie die Bedingung 3°.

Aus diesem Satze und aus der Tatsache, dass für ein beliebiges S-Halbmodul X, 1_X ein normaler S-Homomorphismus ist, folgt der

Satz 4. Die Klasse aller S-Halbmoduln als Objekte und die Klasse aller normalen S-Homomorphismen als Morphismen bilden eine Kategorie: $\mathcal{C}_{s_n}$.

Es sei X ein S-Halbmodul und $E(X) = \{x \in X \mid \exists x', x + x' = 0_X\}$.

Die Abbildung $f: 0 \to X$, definiert durch $f(0) = 0_X$, wo 0 der Nullhalbmodul und X ein beliebiger S-Halbmodul ist, ist ein normaler S-Homomorphismus, wenn $f(0)$ ein zulässiges Coideal in X ist. Dieses trifft genau dann zu, wenn X ein S-Halbmodul mit $E(X) = 0_X$ ist. Ähnlicherweise die Abbildung $g: X \to Y$ definiert durch $g(x) = 0_Y$ für beliebige $x \in X$, ist ein normaler S-Homomorphismus, wenn $g(X)$ ein zulässiges Coideal in Y ist, was nur in dem Falle geschiet, wenn Y ein S-Halbmodul mit $E(Y) = 0_Y$ ist. Von diesen Bemerkungen ausgehend folgt, dass es im Folgenden genügt sich nur auf die Untersuchung der S-Halbmoduln X mit $E(X) = 0_X$ zu beschränken.

Satz 5. Die Klasse aller S-Halbmoduln X mit $E(X) = 0_X$ und die Klasse aller normalen S-Homomorphismen bilden eine Kategorie, die wird mit $\mathcal{C}_{s_0}$ bezeichnet.

Es ist bekannt, dass in der Kategorie $\mathcal{C}_s$ der Halbmoduln, ein Epimorphismus nicht notwendigerweise eine Surjektion ist (Johnson-Manes [5]). In unserem Falle aber gilt der folgende Satz:

Satz 6. In der Kategorie $\mathcal{C}_{s_0}$ ist ein normaler S-Homomorphismus genau dann ein Epimorphismus, wenn er eine Surjektion ist.

Beweis. Nehmen wir an, dass der normaler S-Homomorphismus $\varphi: X \to Y$ nicht eine Surjektion ist. Es ist klar dass $\varphi(X)$ ein zulässiges Coideal in Y ist. Nun sei S ein Halbring und $(Z, +)$ sei eine Halbgruppe wo $Z = \{0_Z, z\}$ ist und dessen Strukturtafeln (T_1) ist. In bezug auf die Operation definiert durch die Strukturtafeln (T_2) ist Z

$$(T_1)\quad \begin{array}{c|cc} + & 0_Z & z \\ \hline 0_Z & 0_Z & z \\ z & z & z \end{array} \qquad\qquad (T_2)\quad \begin{array}{c|cc} & 0_Z & z \\ \hline 0 & 0_Z & 0_Z \\ s & 0_Z & z \end{array}$$

für alle $s \in S$ ein S-Halbmodul. Wenn man die Abbildungen $f: Y \to Z$ durch $f(y) = 0_Z$ für alle $y \in Y$, und $g: Y \to Z$ durch

$$g(y) = \begin{cases} 0_Z & \text{wenn } y \in \varphi(X) \\ z & \text{,, } \quad y \in Y \setminus \varphi(X) \end{cases}$$

ausdrückt, bemerkt man dass f und g normale S-Homomorphismen sind, für welche $f \circ \varphi = g \circ \varphi$ ist, und doch $f \neq g$ ist. Folglich ist φ kein Epimorphismus. Wir haben also bewiesen, dass, wenn φ ein Epimorphismus ist, φ eine Surjektion ist. Die entgegengesetzte Implikation ist klar.

Bemerkung. Die Kategorie $\mathcal{C}_{s_0}$ ist nicht conormal.

Folgender Satz ist bekannt: wenn in einer conormalen Kategorie der Morphismus $\alpha : X \to Y$ ein Epimorphismus mit $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ ist, dann ist α ein Isomorphismus [6]. Wir werden zeigen, dass es möglich ist in $\mathcal{C}_{s_0}$ einen Epimorphismus α mit $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ zu bilden, welches kein Isomorphismus ist. Zu diesem Zwecke bilden wir den Halbring S und die Halbgruppe $(M, +)$ wo $M = \{\check{o}, x, e\}$ und die Operation in M durch die

$$(T_3) \quad \begin{array}{c|ccc} + & \check{o} & x & e \\ \hline \check{o} & \check{o} & x & e \\ x & x & x & x \\ e & e & x & e \end{array} \qquad\qquad (T_4) \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \check{o} & x & e \\ \hline \check{o} & \check{o} & \check{o} & \check{o} \\ s & \check{o} & x & e \end{array} \text{ für alle } s \in S$$

in bezug auf die Operation gegeben mit (T_4). Andererseits sollen wir den S-Halbmodul Z aus dem Satz 6 betrachten. Die Abbildung $h : M \to Z$, definiert durch $h(\check{o}) = 0_Z$ und $h(x) = h(e) = z$ ist ein Epimorphismus, für welcher $\operatorname{Ker} h = 0$ gilt, aber sie ist kein Isomorphismus.

Auf Grund dieser Bemerkung haben wir den folgenden Satz:

SATZ 7. Die Kategorie $\mathcal{C}_{s_0}$ ist nicht exakt, also ist sie nicht abelsch.

DEFINITION 3. Es sei

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

eine Folge von S-Halbmoduln und normalen S-Homomorphismen. Wir sagen, dass diese Folge eine exakte Folge ist, wenn $f(X) = \operatorname{Ker} g$ ist.

SATZ 8. In der Kategorie $\mathcal{C}_{s_0}$ gibt es exakte Folgen.

Beweis. Wir werden zeigen, wenn X und Y S-Halbmoduln sind und wenn $f : X \to Y$ ein beliebiger normaler S-Homomorphismus ist, dann gibt es ein S-Halbmodul Z und ein normaler S-Homomorphismus $g : Y \to Z$ so dass die Bedingung $f(X) = \operatorname{Ker} g$ erfüllt ist. In der Tat, weil f ein normaler S-Homomorphismus ist, ist $f(X)$ ein zulässiges Coideal in Y. Andererseits haben wir $0_Y \in f(X)$. Sei Z das in dem Satz 6 betrachtete Halbmodul, und $g : Y \to Z$ der oben betrachtete normalen S-Homomorphismus. Man sieht, dass g die Forderungen unseres Satzes erfüllt.

Die folgende Aussage ist evident.

SATZ 9. Wenn X und Y beliebige S-Halbmoduln aus der Kategorie $\mathcal{C}_{s_0}$ sind, dann sind die folgenden Aussagen gültig:

a) Die Folge $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ ist exakt, wenn f ein Monomorphismus ist.

b) Die Folge $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn f ein Epimorphismus ist.

c) Die Folge $O \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow O$ ist exakt, wenn f ein Isomorphismus ist.

Bemerkung. Im Gegenteil zur Theorie der R-Moduln sind in unserem Falle die Umkehrungen der Aussagen a) und b) im allgemeinen nicht gültig. In der Tat, sei M der oben betrachtete S-Halbmodul. Die Abbildung $f: M \to M$, welche durch die Gleichungen $f(\check{o}) = \check{o}$ und $f(x) = f(e) = e$ definiert ist, ist ein normaler S-Homomorphismus, für welche $\operatorname{Ker} f = 0_M$ ist, aber doch ist er kein Monomorphismus.

(Eingegangen am 28. Dezember 1973)

LITERATUR

1. Grillet, M. P., *Semisimple A-semigroups and semirings*, Fund. Math., **76** (1972) nr. 2, 109–116.
2. Grillet, P. A., *The Tensor Product of Semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 267–280.
3. Hajj, I., *Essai d'une théorie des demi-anneaux et des demi-modules*, Thèse, Clermont-Ferrand, 1969.
4. Iizuka, K., *On the Jacobson Radical of a Semiring*, Tôhoku Math. J., **11** (1959), 409–421.
5. Johnson, J. S. - E. G. Manes, *On Modules Over a Semiring*, J. of. Algebra, **15** (1970), 57–67.
6. Mitchell, B., *Theory of Categories*, Academic Press, New-York, 1965.
7. Poyatos, F., *Introduccion a la teoria de semimodulos*, Doctoral thesis, Madrid, 1967.

ASUPRA UNEI CATEGORII DE SEMIMODULE

(Rezumat)

Se construieşte o categorie specială de semimodule şi se studiază unele proprietăţi ale acestei categorii. Dintre acestea subliniem următoarele: un morfism al acestei categorii este epimorfism dacă şi numai dacă este o surjecţie; în această categorie există şiruri exacte; condiţia Ker $f = 0$ nu caracterizează monomorfismele.

ОБ ОДНОЙ КАТЕГОРИИ ПОЛУМОДУЛЕЙ

(Резюме)

Строится особая категория полумодулей и изучаются некоторые свойства этой категории. Из этих свойств автор выделяет следующие: морфизм этой категории является эпиморфизмом если и только если является сюръекцией; в этой категории имеются точные последовательности; условие Ker $f = 0$ не характеризует мономорфизмы.

Ω-SEMIGROUPES DES FRACTIONS D'UN Ω-SEMIGROUPE

I. PURDEA

Dans la note suivante on introduit les Ω-semigroupes des fractions d'un Ω-semigroupe, qui généralisent les anneaux des fractions d'un anneau.

1. Les résultats suivants sont connus (voir par ex. [1]) :

THÉORÈME. *Si* $(A\ ,\ \cdot)$ *est un semigroupe commutatif avec unité et* S *un sous-semigroupe de* A *qui contient l'unité de* A, *alors la relation „*$\sim$*" définie sur* $A \times S$ *de la manière suivante*:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S,\ a_1 s_2 s = a_2 s_1 s$$

est une congruence du semigroupe $(A \times S), \cdot)$.

DÉFINITION. Le semigroupe avec unité $(A \times S/\sim, \cdot)$ s'appelle semigroupe des fractions de A avec des dénominateurs dans S ; il se note A_S.

Si $(a, s) \in A \times S$, alors $\overline{(a, s)}$ est la classe d'équivalence de $A \times S/\sim$ qui contient (a, s). L'homomorphisme :

$$f: A \to A_S,\ f(a) = \overline{(a, 1)}$$

est l'homomorphisme canonique.

THÉORÈME. 1. *Les éléments de* $f(S)$ *sont inversibles et pour* $\forall \overline{(a, s)} \in$ $\in A_S$ *on a*

$$\overline{(a, s)} = f(a) \cdot f(s)^{-1} \tag{1}$$

2. *L'homomorphisme canonique est injectif si et seulement si* $a_1 s = a_2 s$; $a_1, a_2 \in A$; $s \in S \Rightarrow a_1 = a_2$.

3. *L'homomorphisme canonique est bijectif si et seulement si chaque élément de* S *est inversible.*

4. *Pour chaque semigroupe avec unité* B *et chaque homomorphisme* $\alpha: A \to B$ *pour lequel les éléments de* $\alpha(S)$ *sont inversibles il existe un homomorphisme unitaire unique* $\bar{\alpha}: A_S \to B$ *tel que*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \\ A_S \arrow[ur, dashed, "\bar{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \qquad \alpha = \bar{\alpha} \circ f$$

5. *Pour* $\forall \overline{(a, s)} \in A_S$ *on a* $\bar{\alpha}(\overline{(a, s)}) = \alpha(a) \cdot \alpha(s)^{-1}$.

2. DÉFINITION. Une algèbre universelle $(A, \cdot, \Omega)$ où „$\cdot$" est une opération binaire associative et commutative et Ω un ensemble d'opérations dans A dont le type (arité) est < 1 s'appelle Ω-semigroupe distributif si pour $\forall \omega \in \Omega$ et $\forall a_1, \ldots, a_n, a \in A$ on a

$$a \cdot \omega(a_1, \ldots, a_n) = \omega(aa_1, \ldots, aa_n) \tag{2}$$

n étant le type de ω.

THÉORÈME. *Soit $(A, \cdot, \Omega)$ un Ω-semigroupe distributif. Si le semigroupe $(A, \cdot)$ a une unité et si $S \subseteq A$ est un sous-semigroupe de $(A, \cdot)$ qui contient l'unité, alors il existe sur le semigroupe $(A_S, \cdot)$ une seule structure de Ω-semigroupe distributif avec unité, tel que l'application canonique $f: A \to A_S$, $f(a) = \overline{(a, 1)}$ est un homomorphisme de l'algèbre $(A, \cdot, \Omega)$ dans $(A_S, \cdot, \Omega)$.*

Démonstration. 1. Unicité. Supposons que sur A_S il existe une structure de Ω-semigroupe telle que l'application canonique $f: A \to A_S$ soit un homomorphisme de Ω-semigroupes. Soit $\omega \in \Omega$ une opération n-aire et $\overline{(a_i, s_i)} \in A_S$; $i = 1, \ldots, n$. De (1) il résulte: $\overline{(a_i, s_i)} = f(a_i) \cdot f(s_i)^{-1} = f(a_i s_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_n) \cdot f(a_1 \ldots s_n)^{-1}$

Donc $\omega(\overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a_n, s_n)}) = \omega(f(a_1 s_2 \ldots s_n) f(s_1 \ldots s_n)^{-1}, \ldots, f(a_n s_1 \ldots s_{n-1}) \cdot f(s_1 \ldots s_n)^{-1}) = \omega(f(a_1 s_2 \ldots s_n), \ldots, f(a_n s_1 \ldots s_{n-1})) \cdot f(s_1 \ldots s_n)^{-1} = f(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1})) \cdot f(s_1 \ldots s_n)^{-1} =$

$$= \overline{(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s_1 \ldots s_n)}$$

et cela signifie qu'il existe une seule possibilité de définir ω dans A_S tel que f soit un homomorphisme.

2. L'existence. Soit $\omega \in \Omega$ une opération n-aire et $\overline{(a_i, s_i)} \in A_S$; $i = 1, \ldots, n$. Soit

$$\omega(\overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a_n, s_n)}) = \overline{(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s_1 \ldots s_n)} \tag{3}$$

Tout d'abord nous démontrerons l'indépendance de (3) du choix des représentants des classes. Si $(a_i', s_i') \in \overline{(a_i, s_i)}$; $i = 1, \ldots, n$, alors $\exists u_i \in S$ tel que $a_i' s_i u_i = a_i s_i' u_i$.

Donc $a_1 s_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_n s_1' \ldots s_n' u_1 \ldots u_n = a_i' s_1' \ldots s_{i-1}' s_{i+1}' \ldots s_n' s_1 \ldots s_n' u_1 \ldots u_n$.
En utilisant (2), il résulte $\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}) s_1' \ldots s_n' u_1 \ldots u_n = \omega(a_1' s_2' \ldots s_n', \ldots, a_n' s_1' \ldots s_{n-1}') s_1 \ldots s_n u_1 \ldots u_n$.

Par suite $\overline{(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s_1 \ldots s_n)} =$

$$= \overline{(\omega(a_1' s_2' \ldots s_n', \ldots, a_n' s_1' \ldots s_{n-1}'), s_1' \ldots s_n')}$$

Donc la rélation (3) est indépendante du choix des représentants.

Démontrons que le Ω-semigroupe A est distributif. Pour chaque opération n-aire $\omega \in \Omega$ et $\overline{(a, s)}, \overline{(a_i, s_i)} \in A_S$; $i = 1, \ldots, n$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\overline{(a, s)} \cdot \omega(\overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a_n, s_n)}) = \\
&= \overline{(a, s)} \cdot \overline{(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s_1 \ldots s_n)} = \\
&= \overline{(a\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s s_1 \ldots s_n)} = \\
&= \overline{(\omega(a a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s s_1 \ldots s_n)} = \\
&= \omega(\overline{(a a_1, s s_1)}, \ldots, \overline{(a a_n, s s_n)}) = \\
&= \omega(\overline{(a, s)} \cdot \overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a, s)} \cdot \overline{(a_n, s_n)}).
\end{aligned}$$

Maintenant nous montrerons que l'application canonique $f: A \to A_S$ est un homomorphisme de Ω-semigroupes. Pour l'opération „·" l'application f est un homomorphisme. Si $\omega \in \Omega$ est une opération n-aire, alors pour $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ on a

$$f(\omega(a_1, \ldots, a_n)) = \overline{(\omega(a_1, \ldots, a_n), 1)} = \omega(\overline{(a_1, 1)}, \ldots, \overline{(a_n, 1)}) = \\ = \omega(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Donc f est un homomorphisme.

DÉFINITION. L'Ω-semigroupe $(A_S, \cdot, \Omega)$ s'appelle l'Ω-semigroupe des fractions du Ω-semigroupe $(A, \cdot, \Omega)$ avec dénominateurs en S.

THÉORÈME. *Pour chaque Ω-semigroupe B distributif et avec unité et chaque homomorphisme de Ω-semigroupes $\alpha : A \to B$ pour lequel les éléments de $\alpha(S)$ sont inversibles dans $(B, \cdot)$, il existe un homomorphisme unitaire unique de Ω-semigroupes $\overline{\alpha} : A_S \to B$ tel que $\overline{\alpha} = \alpha \circ$ f.*

Démonstration. $(A_S, \cdot)$ étant le semigroupe des fractions du semigroupe $(A, \cdot)$ avec des dénominateurs dans S, il résulte qu'il existe un homomorphisme unitaire unique de semigroupes $\overline{\alpha} : A_S \to B$ tel que $\alpha = \overline{\alpha} \circ f$. Pour chaque opération n-aire $\omega \in \Omega$ et chaque $\overline{(a_i, s_i)} \in A_S$; $i = 1, \ldots, n$ on a

$$\overline{\alpha}(\omega(\overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a_n, s_n)})) = \overline{\alpha}(\overline{(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}), s_1 \ldots s_n)}) = \\ = \overline{\alpha}[f(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1}))f(s_1 \ldots s_n)^{-1}] = \\ = [(\overline{\alpha} \circ f)(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1})] \cdot [(\overline{\alpha} \circ f)(s_1 \ldots s_n)]^{-1} = \\ = [\alpha(\omega(a_1 s_2 \ldots s_n, \ldots, a_n s_1 \ldots s_{n-1})] \cdot [\alpha(s_1 \ldots s_n)]^{-1} = \\ = \omega[(\alpha(a_1 s_2 \ldots s_n), \ldots \alpha(a_n s_1 \ldots s_{n-1})] \cdot \alpha(s_1)^{-1} \ldots \alpha(s_n)^{-1} = \\ = \omega[\alpha(a_1)\alpha(s_2) \ldots \alpha(s_n), \ldots, \alpha(a_n)\alpha(s_1) \ldots \alpha(s_{n-1})]\alpha(s_1)^{-1} \ldots \alpha(s_n)^{-1} = \\ = \omega[\alpha(a_1)\alpha(s_1)^{-1}, \ldots, \alpha(a_n)\alpha(s_n)^{-1}] = \omega[(\overline{\alpha} \circ f)(a_1) \cdot (\overline{\alpha} \circ f)(s_1)^{-1}, \ldots, \\ \ldots, (\overline{\alpha} \circ f)(a_n) \cdot (\overline{\alpha} \circ f)(s_n)^{-1}] = \overline{\alpha}[\omega(f(a_1) \cdot f(s_1)^{-1}, \ldots, f(a_n) \cdot f(s_n)^{-1})] = \\ = \overline{\alpha}[\omega(\overline{(a_1, s_1)}, \ldots, \overline{(a_n, s_n)})].$$

Donc $\overline{\alpha}$ est un homomorphisme de Ω-semigroupes.

Observation. Si $\Omega = \{+\}$ et $(A, +)$ est un groupe abélien, alors $(A_S, \cdot, +)$ est l'anneau des fractions de l'anneau $(A, +, \cdot)$ avec des dénominateurs dans S.

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1973)

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N., *Algèbre*, chap. 1—3, Herman, 1970.
2. Maurer, I. Gy., *Quelques problèmes d'algèbre pure et d'algèbre topologique*, Rendiconti di Matematica (4), Vol. 3, 1970, 593—655.
3. Uskov, A. I., *Sur les anneaux des quotients des anneaux commutatifs* (en russe), Mat. Sbornik, 22 (64), 1, 439—441, 1948.

Ω-SEMIGRUPURI DE FRACŢII ALE UNUI Ω-SEMIGRUP
(Rezumat)

Se introduc Ω-semigrupurile de fracţii care generalizează inelele de fracţii.

Ω-ПОЛУГРУППЫ ДРОБЕЙ ОДНОЙ Ω-ПОЛУГРУППЫ
(Резюме)

Вводятся Ω-полугруппы дробей, обобщающие кольца дробей.

SUR LES HOMOMORPHISMES DES STRUCTURES RELATIONNELLES. (I)

MICHELINE FRODA-SCHECHTER

Soient Γ un ensemble de symboles relationnels, $\mu : \Gamma \to \mathbf{N}$ une application donnée dans l'ensemble des nombres naturels et pour $\rho \in \Gamma$, $\mu(\rho)$ le *rang* de ρ.

DÉFINITION 1. On dira que $\mathfrak{A} = (A, \Gamma)$, $A \neq \emptyset$, est une *structure relationnelle de type* μ, de *support* A et ayant Γ comme *domaine des prédicats* si une application est donnée qui à chaque $\rho \in \Gamma$ fait correspondre une relation ρ_A de rang $\mu(\rho)$ (c'est-à-dire $\rho_A \subseteq A^{\mu(\rho)}$).

On peut considérer les structures relationnelles comme étant des généralisations des algèbres universelles à opérations finies, peut-être partielles, des structures algébriques ordonnées ainsi que des systèmes algébriques, ([13]), éventuellement partiels (c'est-à-dire un ensemble doté d'opérations partielles et de relations finies). En effet on peut faire correspondre à toute opération n-aire une relation $(n + 1)$-aire. On se propose d'étudier ici divers types d'homomorphismes des structures relationnelles, les résultats obtenus pouvant sans difficulté s'étendre aux systèmes algébriques partiels, non pas en regardant les opérations comme des relations, mais plutôt en les juxtaposant aux résultats bien connus sur les algèbres partielles (cf. par exemple [9]). Cette étude se justifie par le fait que les homomorphismes considérés ici sont connus et interviennent aussi bien pour les structures ordonnées que dans divers travaux de théorie des modèles. Ainsi l'homomorphisme faible introduit dans [18] est une factorisation de l'ordre strict (et homomorphisme de groupe) et, ce qu'on appelle, dans [8], O-épimorphisme est la même notion pour l'ordre dans un groupe. Le B-homomorphisme ([4], [17]) est une factorisation forte de la relation d'ordre strict. Enfin, on retrouve l'homomorphisme relationnel dans [15] ou [16], [11], [9], [2], [13] etc., la factorisation dans [19], [10], [12] et [13] (où on l'appelle homomorphisme fort) et aussi dans [14] et [3] et enfin la factorisation forte dans [11], par exemple. Mais ces notions n'avaient pas été systématiquement envisagées et les propriétés des factorisations, surtout fortes, ne sont presque pas connues. Remarquons aussi qu'on considère souvent uniquement des surjections, mais le cas des applications quelconques n'est pas dépourvu d'intérêt aussi bien pour les groupes ordonnés, que pour les factorisations.

DÉFINITION 2. Soit $\mathfrak{A} = (A, \Gamma)$ une structure relationnelle et $A_1 \subseteq A$, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. On dit que $\mathfrak{A}_1 = (A, \Gamma_1)$ est une *sous-structure partielle* de $\mathfrak{A}$, si pour tout $\rho \in \Gamma_1(n)$, $\rho_{A1} = \rho_A \bigcup A_1^n$. Si $\Gamma = \Gamma_1$, $\mathfrak{A}_1$ est une *sous-structure* et si $A = A_1$, alors $\mathfrak{A}_1$ est une *partie* de $\mathfrak{A}$.

On utilise dans ce qui suit les notations suivantes: $\mathfrak{A} = (A, \Gamma)$, $\mathfrak{B} = (B, \Gamma)$ sont des structures relationnelles ayant le même domaine des prédicats, $\rho \in \Gamma$ est un prédicat (symbole relationnel) quelconque de rang n, ρ_A et ρ_B les relations n-aires données correspondantes sur $\mathfrak{A}$, respectivement $\mathfrak{B}$. Si $\varphi : A \to B$, on note par φ également l'application de A^n à B^n qu'elle induit, par $\varphi\rho_A$ l'image de ρ_A dans B^n, $\rho_{\varphi A} = \rho_B \cap \cap (\varphi A)^n$ et $\overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A}$ et $\overset{-1}{\varphi}\rho_B$ désignent respectivement les images réciproques de ces relations par φ. Mais on voit que $\overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A} = \overset{-1}{\varphi}\rho_B$. Enfin $\varphi\mathfrak{A}$ est la structure sur B determinée par les relations $\varphi\rho_A$ quand $\rho \in \Gamma$, à distinguer de $\mathfrak{B}_\varphi = (\varphi A, \Gamma)$, sous-structure de $\mathfrak{B}$, donc determinée par les relations $\rho_{\varphi A}$. Enfin on pose $\Gamma(n) = \{\rho \in \Gamma \mid \mu(\rho) = n\}$.

DÉFINITION 3. Soient $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ deux structures de même support et même domaine, les relations correspondant à $\rho \in \Gamma$ étant notées ρ_1 respectivement ρ_2. Si pour tout $\rho \in \Gamma$ on a $\rho_1 \subseteq \rho_2$ on dit que $\mathfrak{A}_1$ est plus *petite* que $\mathfrak{A}_2$, noté $\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A}_2$.

DÉFINITION 4. L'application φ est un ρ-*homomorphisme* si $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ implique $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \rho_{\varphi A}$, et φ est un homomorphisme si cette propriété est valable pour tout $\rho \in \Gamma$.

DÉFINITION 5. L'application φ est une ρ-*factorisation dans* $\mathfrak{B}_\varphi$ (*dans la structure*) respectivement *dans* $\mathfrak{B}$ (*sur la structure*) si φ est un ρ-homomorphisme et si $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$ respectivement $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_B$ impliquent l'existence d'éléments $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ et $\varphi a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Une *factorisation dans la structure*, respectivement *sur la structure* est une ρ-factorisation dans (respectivement sur) la structure pour tout $\rho \in \Gamma$.

Toute (ρ—) factorisation surjective dans la structure est une (ρ—) factorisation sur la structure, mais une (ρ—) factorisation sur la structure peut ne pas être une surjection. Ainsi :

Exemple 1 : $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\varphi : A \to B$, $\varphi a_1 = b_1$, $\varphi a_2 = \varphi a_3 = b_2$ $\Gamma = \{\rho\} = \Gamma(2)$, $\rho_A = \{(a_1, a_2)\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_2)\}$. φ est une factorisation sur la structure qui n'est pas surjection.

Toute factorisation est un homomorphisme mais la réciproque est fausse. Considérons en effet l'exemple suivant d'un homomorphisme surjectif qui n'est pas une factorisation :

Exemple 2 : $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\Gamma = \{\rho\} = \Gamma(2)$, $\rho_A = \{(a_1, a_2)\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_2), (b_2, b_3)\}$, $\varphi : A \to B$, $\varphi a_1 = b_1$, $\varphi a_2 = \varphi a_4 = b_2$ $\varphi a_3 = b_3$. On voit que φ n'est pas factorisation car $(b_2, b_3) \in \rho_{\varphi A} = \rho_B$ mais $(a_2, a_3) \notin \rho_A$ et aussi $(a_4, a_3) \notin \rho_A$.

DÉFINITION 6. L'application φ est une ρ-*factorisation forte dans* $\mathfrak{B}_\varphi$ (*dans la structure*) si φ est un ρ-homomorphisme et si de $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$ et de $\varphi a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ il résulte que $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$. Si de plus, $\rho_{\varphi A} = \rho_B$ on dit que φ est une ρ-*factorisation forte dans* $\mathfrak{B}$ (*sur la structure*). Si $\rho_{\varphi A} = \rho_B = \emptyset$ on dit que φ est une ρ-*factorisation forte triviale*. Une *factorisation forte* (*dans* ou *sur la structure*) est une ρ-factorisation forte (du même type) pour tout $\rho \in \Gamma$.

Abréviations. On écrira φ est ρ-h., φ est ρ-f. $\mathfrak{B}_\varphi$, φ est ρ-f. $\mathfrak{B}$, φ est ρ-f.f. $\mathfrak{B}_\varphi$ etc., au lieu de φ est ρ-homomorphisme, φ est ρ-factorisation dans $\mathfrak{B}_\varphi$, etc.

Une f. injective est un f.f. et une f.f. est aussi une f. Mais ces notions sont bien distinctes[1] ainsi qu'il résulte de l'exemple ci-dessus :

Exemple 3 : $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $\Gamma = \{\rho\} = \Gamma(2)$, $\rho_A = \{(a_1, a_2)\}$, $\rho_B = \{(b_1, b_2)\}$, $\varphi : A \to B$, $\varphi a_1 = b_1$ $\varphi a_2 = \varphi a_3 = b_3$. Cette application est une f.surjective qui n'est pas forte car $(a_1, a_3) \notin \rho_A$.

Une f.f. surjective est f.f. sur la structure mais une f.f. sur la structure peut ne pas être surjection. En effet :

Exemple 4. On choisit A, B, φ et ρ_B comme dans l'exemple 1 et $\rho_A = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3)\}$; alors φ est une f.f. sur la structure.

Théorème 1. *L'application* φ *est*

1.1. ρ-*homomorphisme* $\Leftrightarrow \varphi\rho_A \subseteq \rho_{\varphi A} \Leftrightarrow \varphi_A \subseteq \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A}$

1.2. *homomorphisme* $\Leftrightarrow \varphi\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}_\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \leqslant \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}_\varphi$

1.3. ρ-*factorisation dans* (*sur*) *la structure* $\Leftrightarrow \varphi\rho_A = \rho_{\varphi A}$ $(\varphi\rho_A = \rho_B)$

1.4. *factorisation dans* (*sur*) *la structure* $\Leftrightarrow \varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\varphi$ $(\varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{B})$

1.5. ρ-*factorisation forte dans* (*sur*) *la structure* $\Leftrightarrow \rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A}$ $(\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_B)$

1.6. *factorisation forte dans* (*sur*) *la structure* $\Leftrightarrow \mathfrak{A} = \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}_\varphi$ $(\mathfrak{A} = \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B})$.

Démonstration. On voit que 1.2, 1.4 et 1.6 résultent respectivement de 1.1, 1.3 et 1.5.

1.1. La deuxième équivalence est immédiate et s'obtient de $\rho_A \subseteq \overset{-1}{\varphi}\varphi\rho_A$ et de $\varphi\overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A} = \rho_{\varphi A}$ (cette dernière est conséquence de $\rho_{\varphi A} \subseteq (\varphi A)^n$). Pour la première équivalence, supposons d'abord que φ est ρ-h et que $(b_1, \ldots, b_n) \in \varphi\rho_A$; ils existent donc pour $i = 1, \ldots, n$ des $a_i \in A$ tels que $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ et $b_i = \varphi a_i$, d'où par hypothèse, $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \rho_{\varphi A}$ et par suite $\varphi\rho_A \subseteq \rho_{\varphi A}$. Réciproquement si $\varphi\rho_A \subseteq \rho_{\varphi A}$, de $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ on a $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \varphi\rho_A$ donc aussi $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \rho_{\varphi A}$ et φ est un ρ-h.

1.3. Si φ est ρ-f. $\mathfrak{B}_\varphi$ on a par 1.1, $\varphi\rho_A = \rho_{\varphi A}$. Si $\rho_{\varphi A} = \emptyset$, on a aussi $\rho_A = \emptyset$ et donc $\varphi\rho_A = \rho_{\varphi A} = \emptyset$. Soit $\rho_{\varphi A} \neq \emptyset$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$; par hypothèse il existent des $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $\varphi a_i = b_i (i = 1, \ldots, n)$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$ donc $(b_1, \ldots, b_n) \in \varphi\rho_A$, d'où $\rho_{\varphi A} \subseteq \varphi\rho_A$. Réciproquement si $\varphi\rho_A = \rho_{\varphi A}$ alors φ est $\rho - $h. Si $\rho_{\varphi A} = \emptyset$ on a aussi $\rho_A = \emptyset$ et φ est $\rho - $f. Si $\rho_{\varphi A} \neq \emptyset$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$ alors $(b_1, \ldots, b_n) \in \varphi\rho_A$ et φ est donc $\rho - $f.

Si φ est $\rho - $f. $\mathfrak{B}$ on a $\rho_B \subseteq \varphi\rho_A$ et comme φ est aussi $\rho - $f. $\mathfrak{B}_\varphi$ il résulte $\varphi\rho_A = \rho_{\varphi A}$; mais $\rho_{\varphi A} \subseteq \rho_B$ donc $\varphi\rho_A = \rho_B$. Réciproquement soit $\varphi\rho_A = \rho_B$ donc, $\varphi\rho_A \subseteq \rho_{\varphi A}$, c'est-à-dire φ est $\rho - $h. Si $\rho_B \neq \emptyset$, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_B$ on a $(b_1, \ldots, b_n) \in \varphi\rho_A$ donc φ est $\rho - $f. $\mathfrak{B}$, ce qui reste vrai si $\rho_B = \emptyset$.

---

[1] On affirme, par erreur, dans [11], leur équivalence. L'auteur ne s'occupe en réalité que des factorisations fortes sinon les résultats ne seraient plus valables (cf. [6] et [7]).

1.5. Soit φ ρ — f.f. $\mathfrak{B}_\varphi$, donc aussi ρ — f. $\mathfrak{B}_\varphi$. On a vu que, ou bien $\rho_A = \rho_{\varphi A} = \emptyset$, ou bien les deux relations sont non vides. Il reste à prouver que l'égalité $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\, \rho_{\varphi A}$ est vraie aussi dans le deuxième cas. Comme φ est ρ — h. on a $\rho_A \subseteq \overset{-1}{\varphi}\, \rho_{\varphi A}$ et $\overset{-1}{\varphi}\, \rho_{\varphi A}$ n'est donc pas vide. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \overset{-1}{\varphi} \rho_{\varphi A}$ donc $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \rho_{\varphi A}$ et, φ étant ρ — f.f, on obtient $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$. Supposons maintenant $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\, \rho_{\varphi A}$. Si $\rho_{\varphi A} = \emptyset$ alors $\rho_A = \emptyset$ et φ est ρ — f.f. triviale. Si $\rho_{\varphi A} \neq \emptyset$, φ est, selon 1.1 ρ — h. Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A}$, on a donc $(b_1, \ldots, b_n) \in (\varphi A)^n$ et il existe des $a_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $\varphi a_i = b_i$ et on peut écrire $(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \in \rho_{\varphi A}$ c'est-à-dire $(a_1, \ldots, a_n) \in \overset{-1}{\varphi}\, \rho_{\varphi A}$, d'où, par hypothèse $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A$.

Si φ est ρ — f.f. $\mathfrak{B}$, on a par définition $\varphi_{\varphi A} = \rho_B$, d'où, d'après ce qui vient d'être prouvé, $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\, \rho_B$. La réciproque est aussi évidente.

Corollaire 1. (i) *Si $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont deux structures relationnelles de même type et même support A, on a $\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A}_2$ si et seulement si l'application identique de A est un homomorphisme de $\mathfrak{A}_1$ dans $\mathfrak{A}_2$. (ii) Si $\mathfrak{A}_2 \leqslant \mathfrak{A}_1$ et $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}_1$ dans $\mathfrak{B}_\varphi$ alors φ est aussi un homomorphisme de $\mathfrak{A}_2$ dans $\mathfrak{B}_\varphi$. (iii) Si $\mathfrak{B}_1 \leqslant \mathfrak{B}_2$ et $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_{1\varphi}$ alors φ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_{2\varphi}$.*

Démonstration. (ii) $\mathfrak{A}_2 \leqslant \mathfrak{A}_1$ implique $\varphi\mathfrak{A}_2 \leqslant \varphi\mathfrak{A}_1$ et comme $\varphi\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{B}_\varphi$ on a $\varphi\mathfrak{A}_2 \leqslant \mathfrak{B}_\varphi$. (iii) $\mathfrak{B}_1 \leqslant \mathfrak{B}_2$ implique $\mathfrak{B}_{1\varphi} \leqslant \mathfrak{B}_{2\varphi}$ et comme $\varphi\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}_{1\varphi}$ on obtient $\varphi\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}_{2\varphi}$.

Remarques: 1. Si φ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}_1$ dans $\mathfrak{B}_\varphi$ et $\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A}_2$ il ne résulte pas en géneral que φ est homomorphisme de $\mathfrak{A}_2$ dans $\mathfrak{B}_\varphi$; ainsi dans l'exemple 2 si $\mathfrak{A}_1$ est la structure donnée sur A et $\mathfrak{A}_2$ celle qu'on obtient en posant $\rho_A^2 = \rho_A \cup \{(a_2, a_4)\}$, φ n'est pas homomorphisme de $\mathfrak{A}_2$ dans $\mathfrak{B}$ car $(\varphi a_2, \varphi a_4) = (b_2, b_2) \notin \rho_B$.

2. Si φ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_{1\varphi}$ et $\mathfrak{B}_2 \leqslant \mathfrak{B}_1$ il ne résulte pas toujours que φ est aussi un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_2$; en effet si dans le même exemple 2, $\mathfrak{B}_1$ est la structure donnée sur B et $\mathfrak{B}_2$ celle qu'on obtient en posant $\rho_B^2 = \{(b_2, b_3)\}$, φ n'est plus un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_2$, car $(\varphi a_1, \varphi a_2) = (b_1, b_2) \notin \rho_B^2$.

Corollaire 2. (*i*) *Si φ est une ρ-factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}_\varphi$ (respectivement $\mathfrak{B}$) on a $\rho_A = \rho_{\varphi A} = \emptyset$ (respectivement $\rho_A = \rho_B = \emptyset$) ou bien ces relations sont non-vides dans les deux structures. (ii) Si φ est une ρ-factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ on a $\rho_{\varphi A} = \rho_B$. (iii) Soit $\varphi : A \to B$ une surjection, $\mathfrak{A}$ une structure relationnelle sur A* et *$\mathcal{M}$ l'ensemble de structures de même type sur B telles que φ soit un homomorphisme quand $\mathfrak{A}$ est fixée; on peut alors définir sur B une seule structure relationnelle $\mathfrak{B}$ telle que φ soit une factorisation, à savoir $\mathfrak{B} = \varphi\mathfrak{A}$; cette structure este la plus petite de $\mathcal{M}$. (iv) Soient φ, $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{M}$ comme pour (iii); si $\mathfrak{B}^*$ est une structure minimale dans $\mathcal{M}$ alors φ est une factorisation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}^*$ et $\mathfrak{B}^*$ est donc la plus petite structure de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. (i) et (ii) résultent de la démonstration de 1.5. (iii) 1.4 montre que φ est une factorisation, mais, quel que soit $\mathfrak{B}_i \in \mathcal{M}$ on a $\varphi\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}_i$, donc, comme $\varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}_i$. (iv) Il suffit de montrer que la structure $\mathfrak{B} = \varphi\mathfrak{A}$ pour laquelle φ est une factorisation coïncide avec $\mathfrak{B}^*$; en effet $\mathfrak{B}^* \in \mathcal{M}$ donc $\mathfrak{B} = \varphi\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}^*$ d'où $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ car $\mathfrak{B}^*$ est minimale.

COROLLAIRE 3. (*i*) *Si* φ *est une* (ρ—) *factorisation forte dans* $\mathfrak{B}_\varphi$ *et une* (ρ—) *factorisation dans* $\mathfrak{B}$ *alors elle est aussi une* (ρ—) *factorisation forte dans* $\mathfrak{B}$. (*ii*) *Soit* $\varphi : A \to B$ *une surjection,* $\mathfrak{B}$ *une structure relationnelle sur* B *et* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des structures sur* A *telles que* φ *soit un homomorphisme quand* $\mathfrak{B}$ *est fixée; on peut alors définir sur* A *une seule structure relationnelle* $\mathfrak{A}$ *telle que* φ *soit une factorisation forte, à savoir* $\mathfrak{A} = \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}$, *cette structure est la plus grande de* $\mathcal{N}$. (iii) *Soient* φ, $\mathfrak{B}$ *et* $\mathcal{N}$ *comme pour (ii); si* $\mathfrak{A}^\circ$ *est une structure maximale dans* $\mathcal{N}$ *alors* φ *est une factorisation forte de* $\mathfrak{A}^\circ$ *dans* $\mathfrak{B}$ *et donc* $\mathfrak{A}^\circ$ *est la plus grande structure de* $\mathcal{N}$.

Démonstration. (i) De 1.5 et de (ii) du Corollaire 2 on obtient $\rho_A = \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A} = \overset{-1}{\varphi}\rho_B$. (ii) Selon 1.6, φ est en effet une f.f., donc, comme pour tout $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{N}$ on a $\mathfrak{A}_i \leqslant \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} = \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}$, on obtient $\mathfrak{A}_i \leqslant \mathfrak{A}$. (iii) Il suffit de montrer que la structure $\mathfrak{A} = \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B}$ pour laquelle φ est une factorisation forte coïncide avec $\mathfrak{A}^\circ$; en effet $\mathfrak{A}^\circ \in \mathcal{N}$ donc $\mathfrak{A}^\circ \leqslant \overset{-1}{\varphi}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, mais $\mathfrak{A}^\circ$ étant maximale on a $\mathfrak{A}^\circ = \mathfrak{A}$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\varphi : A \to B$ *et* φ_1 *sa restriction à* $A_1 \subseteq A$. (*i*) *Si* φ *est un* ρ*-homomorphisme de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$, φ_1 *est un* ρ*-homomorphisme de* (A_1, Γ) *dans* $(\varphi_1 A_1, \Gamma)$ *et l'on a* $\varphi\rho_{A_1} \subseteq \rho_{\varphi A_1}$ *et* $\rho_{A_1} \subseteq \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A_1}$. (*ii*) *Si* φ *est une* ρ*-factorisation forte dans* $\mathfrak{B}_\varphi$, φ_1 *est une* ρ*-factorisation forte* (*peut-être triviale*) *dans* $(\varphi_1 A_1, \Gamma)$.

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que $\varphi\rho_{A_1} \subseteq \rho_{\varphi A_1}$ car $\varphi_1\rho_{A_1} = \varphi\rho_{A_1}$ et $\rho_{\varphi_1 A_1} = \rho_{\varphi A_1}$ d'où on obtient par 1.1 que φ_1 est un ρ-h. Mais on a $\varphi\rho_{A_1} = \varphi(\rho_A \cap (A_1)^n) \subseteq \varphi\rho_A \cap (\varphi A_1)^n \subseteq \rho_{\varphi A} \cap (\varphi A_1)^n = \rho_{A_1}$. (ii) Il résulte du point précédent que φ est un ρ-h. et que $\rho_{A_1} \subseteq \overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A_1}$. Si $\rho_{\varphi A_1} = \emptyset$, φ est f.f. triviale car $\overset{-1}{\varphi}\rho_{\varphi A_1} = \emptyset$ et donc aussi $\rho_{A_1} = \emptyset$. Supposons maintenant que $\rho_{\varphi A_1} \neq \emptyset$ et que $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_{\varphi A_1}$ donc que $b_i \in \varphi A_1$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \rho_B$; il en résulte $\varphi a_i = b_i$ où $a_i \in A_1$ $(i = 1, \ldots, n)$ et, comme φ est une ρ-f.f., $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho_A \cap (A_1)^n = \rho_{A_1}$, c'est-à-dire φ_1 est une ρ-f.f.

Remarque. La restriction d'une factorisation n'est pas toujours une factorisation. Considérons en effet dans l'exemple 1 la restriction de la factorisation φ à l'ensemble $A_1 = \{a_1, a_3\}$; celle-ci n'est pas une factorisation car $(b_1, b_2) = (\varphi a_1, \varphi a_3) \in \rho_{\varphi A_1}$ mais $(a_1, a_3) \notin \rho_{A_1}$.

(*Manuscrit reçu le 12 décembre 1973*)

BIBLIOGRAPHIE

1. Birkhoff, G., *Lattice Theory*, New York, 1948.
2. Bell, J. L., A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*, Amsterdam, 1969.
3. Cohn, P. M., *Universal Algebra*, New-York, 1965.
4. Culik, K., *Über die Homomorphismen des teilweise geordneten Mengen*, Czech. mat. journ., 9 (84), 1959, 496—518.
5. Froda-Schechter, M., *Quelques propriétés des homomorphismes des structures relationnelles*, Résumés des communications au IV-ème Congrès des Mathématiciens d'Expression latine, septembre 1969, 37—39.
6. Froda-Schechter, M., *Contributions à l'étude algèbrico-logique des structures relationnelles*, Thèse de doctorat (en roumain), Bucarest, 1972.
7. Froda-Schechter, M., Kwatinetz M., *On a paper of Lyndon*, Mathematica, (à paraître).
8. Fuchs, L., *Partially Ordered Algebraic Systems*, Budapest, 1963.
9. Grätzer, G., *Universal Algebra*, Toronto, 1968.
10. Los, J., J. Slominski, R. Suszko. *On extending of models (V)*, Fund. Math., 48 (1960), 113—121.
11. Lyndon, R. C., *Properties preserved under homomorphism*, Pacific J. Math., 9 (1959), 143—154.
12. Malcev, A. I., *Certaines questions dans la théorie des classes de modèles* (en russe), 4-ème Congrès des Mathématiciens soviétiques, 1961, Leningrade, 1963, (1), 169—198.
13. Malcev, A. I., *Systèmes algébriques* (en russe), Moscou, 1970.
14. Pickert, G., *Bemerkungen zur Homomorphiebegriff*, Math. Zeit., 53 (1950), 375—386.
15. Robinson, A., *On the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam, 1952.
16. Robinson, A., *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam, 1965.
17. Sekanina, M., *Categories of Ordered Sets*, Archivum mathematicum, Brno, 4 (1968), 25—59.
18. Shimbireva, E. P., *Sur la théorie des groupes partiellement ordonnés* (en russe), Mat. zbornik, 20 (1947), 145—178.
19. Tarski, A., *Contributions to the theory of models, I*, Indag. Math., 16 (1954), 572—581.

ASUPRA OMOMORFISMELOR STRUCTURILOR RELAȚIONALE. (I)

(Rezumat)

Se dau proprietăți ale omomorfismelor relaționale și ale unor particularizări ale acestora, factorizările și factorizările tari. Acestea se folosesc mai ales în teoria modelelor.

О ГОМОМОРФИЗМАХ РЕЛЯЦИОННЫХ СТРУКТУР. (I)

(Резюме)

Даются свойства релационных гомоморфизмов и некоторых их партикуляризаций — факторизаций и твердых факторизаций, которые применяются главным образом в теории моделей.

0-LIMITE EXTREME ALE UNEI APLICAȚII ÎNTR-UN PUNCT

D. BORȘAN

1. Fie X un spațiu topologic, Y o latice completă în raport cu ordonarea parțială „$\leqslant$" și $f: X \to Y$. Pentru $x_0 \in X$ notăm cu $\mathcal{V}_{x_0}$ familia vecinătăților punctului x_0 și cu $\dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ familia vecinătăților reduse (stricte) nevide ale punctului x_0 [4].

Definiția (1.1). Se numește 0-limită superioară a aplicației f în punctul $x_0 \in X$, elementul $0 - L_f(x_0)$ din Y, definit prin: $0 - L_f(x_0) =$

$$= \begin{cases} f(x_0) \text{ dacă } x_0 \text{ este punct izolat în } X \\ \inf\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} \text{ dacă } x_0 \text{ este punct de acumulare în } X. \end{cases}$$

Definiția (1.2). Se numește 0-limită inferioară a aplicației f în punctul $x_0 \in X$, elementul $0 - l_f(x_0)$ din Y, definit prin:

$$0 - l_f(x_0) = \begin{cases} f(x_0) \text{ dacă } x_0 \text{ este punct izolat în } X \\ \sup\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\inf\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} \text{ dacă } x \text{ este punct de acumulare în } X \end{cases}$$

Y fiind o latice completă, pentru fiecare punct $x_0 \in X$ există $0 - L_f(x_0)$ și $0 - l_f(x_0)$. Putem deci vorbi despre aplicațiile $0 - L_f: X \to Y$ și $0 - l_f: X \to Y$, asociate aplicației f.

Observația (1.1). Se arată cu ușurință că în definițiile (1.1) și (1.2) în locul familiei $\dot{\mathcal{V}}_{x_0}$ a tuturor vecinătăților reduse nevide ale punctului x_0, putem folosi o subfamilie $\mathcal{U}_{x_0} \subseteq \dot{\mathcal{V}}_{x_0}$, care provine dintr-un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului x_0, $\mathcal{U}_{x_0}$.

În cele ce urmează vom folosi notațiile [2]:

$$[\alpha, \to] = \{y \in Y \mid \alpha \leqslant y\}; \ [\leftarrow, \alpha] = \{y \in Y \mid y \leqslant \alpha\}$$

$$(\alpha, \to] = \{y \in Y \mid \alpha < y\}; \ (\leftarrow, \alpha] = \{y \in Y \mid y < \alpha\}.$$

Teorema (1.1). *Fie X un spațiu topologic, Y o latice completă, $f: X \to Y$ și $x_0 \in X$, un punct de acumulare al spațiului X. Avem*:

(1) $\text{non}(\alpha \leqslant 0 - L_f(x_0)) \Rightarrow \exists V_\alpha \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}: f(V_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset$

(2) $\text{non}(\beta \geqslant 0 - L_f(x_0)) \Rightarrow \forall V \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}: f(V) \cap (Y - [\leftarrow, \beta]) \neq \emptyset$.

Demonstrație. 1. Notăm cu (a) condiția $\text{non}(\alpha \leqslant 0 - L_f(x_0))$ și cu (b) proprietatea $\exists V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0}: f(\dot{V}_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset$. Vom arăta că non(b) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ non(a). Presupunem că în orice vecinătate redusă a punctului x_0 există cel puțin un punct a cărui imagine prin f este mai mare sau egală cu α. Urmează că, oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\} \geqslant \alpha$, deci $\inf\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} =$ $= 0 - L_f(x_0) \geqslant \alpha$, adică condiția (a) nu are loc.

2. Notînd cu (c) condiția $\text{non}(\beta \geqslant 0 - L_f(x_0))$ și cu (d) proprietatea $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}: f(\dot{V}) \cap (Y - [\leftarrow, \beta] \neq \emptyset$, vom arăta că non(d) $\Rightarrow$ non(c). Pre-

supunem deci că pentru $\beta \in Y$, există $V_\beta \in \mathcal{V}_{x_0}$, astfel ca $f(\dot{V}_\beta) \cap (Y - [\leftarrow, \beta]) = \emptyset$. Urmează că, oricare ar fi $x \in \dot{V}_\beta$, $f(x) \leqslant \beta$, deci $\sup\limits_{x \in \dot{V}_\beta} \{f(x)\} \leqslant \beta$ și, prin urmare, $\inf\limits_{\dot{V} \in \dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\sup\limits_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}\} = 0 - L_f(x_0) \leqslant \beta$, deci condiția (c) nu este satisfăcută.

Observația (1.2). Proprietățile (1) și (2) (teorema (1.1)) nu caracterizează 0-limita superioară a aplicației f în punctul x_0. Exemplu: Fie X axa reală dotată cu topologia naturală, și Y format din partea vidă a axei reale și din intervalele (închise, deschise și semiînchise, mărginite sau nu) de lungime cel puțin 2 de pe axa reală. Y este o latice completă în raport cu relația de incluziune. Definim aplicația $f: X \to Y$, prin $f(x) = (x-1, x+1)$ pentru orice $x \in X$. Atunci $0 - L_f(x_0) = [x_0 - 1, x_0 + 1]$ pentru $x_0 \in X$. Se observă însă că elementul $y = (x_0 - 1, x_0 + 1) \in Y$ se bucură de proprietățile (1) și (2) din teorema (1.1). Aceste proprietăți nu caracterizează deci pe $0 - L_f(x_0)$.

TEOREMA (1.2). *Fie X un spațiu topologic, Y un lanț complet, dens în sine, $f: X \to Y$, și x_0 un punct de acumulare al spațiului X. Atunci:*

$$y = 0 - L_f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \alpha > y \Rightarrow \exists V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset \\ (2)\ \beta < y \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}) \cap (\beta, \to] \neq \emptyset. \end{cases}$$

Demonstrație. Ținînd seama de teorema (1.1), este suficient să arătăm că, dacă pentru un $y \in Y$, sînt satisfăcute cerințele (1) și (2) din enunț, atunci $y = 0 - L_f(x_0)$. Raționăm prin contradicție. Presupunem că $y \in Y$ satisface condițiile (1) și (2) și că $y \neq 0 - L_f(x_0)$. Y fiind lanț, sînt posibile două cazuri: (a) $0 - L_f(x_0) < y$ și (b) $y < 0 - L_f(x_0)$. Vom face raționamentul pentru cazul (a), pentru (b) procedîndu-se în mod analog. Fie deci $0 - L_f(x_0) < y$. Cum Y este densă în sensul ordonării [1] urmează că există $z \in Y$, astfel ca $0 - L_f(x_0) < z < y$. Folosind (1), din $z < 0 - L_f(x_0)$ rezultă existența unei vecinătăți V a punctului x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in \dot{V}$, să avem $f(x) < z$. În baza condiției (2) în $\dot{V}$ există puncte în care funcția ia valori mai mari decît z, în contradicție cu faptul că $f(x) < z$ pentru orice $x \in \dot{V}$.

Teoremele (1.1) și (1.2) privesc 0-limita superioară a unei aplicații într-un punct. Relativ la 0-limita inferioară dăm doar enunțul teoremelor, demonstrațiile fiind întru totul analoge.

TEOREMA (1.1′). *Fie X un spațiu topologic, Y o latice completă $f: X \to Y$ și x_0 un punct de acumulare din X.*

Avem: (1) $\text{non}(\alpha \geqslant 0 - l_f(x_0)) \Rightarrow \exists V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}_\alpha) \cap [\leftarrow, \alpha] = \emptyset$

(2) $\text{non}(\beta \leqslant 0 - l_f(x_0)) \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}) \cap (Y - [\beta, \to)] \neq \emptyset$.

TEOREMA (1.2′). *Fie X un spațiu topologic, Y un lanț complet dens în sine, $f: X \to Y$ și x_0 un punct de acumulare din X.*

Atunci:

$$y = 0 - l_f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \alpha < y \Rightarrow \exists \dot{V}_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}_\alpha) \cap [\leftarrow, \alpha] = \emptyset \\ (2) & \beta > y \Rightarrow \forall \dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0} : f(\dot{V}) \cap [\leftarrow, \beta) \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. În continuare vom avea mereu în vedere aplicaţii definite pe un spaţiu topologic X şi cu valori într-o latice completă Y. În Y, ordonarea permite introducerea unei noţiuni de convergenţă, aşa-numita 0-convergenţă (vezi [1], [5]).

TEOREMA (2.1). *f fiind o aplicaţie definită pe spaţiul topologic X şi cu valori în laticea completă Y, 0-limitele extreme ale aplicaţiei f într-un punct $x_0 \in X(0 - L_f(x_0)$ şi $0 - l_f(x_0))$ pot fi reprezentate ca limite, relativ la 0-convergenţă, ale unor şiruri generalizate din Y.*

Demonstraţie. Dacă x_0 este un punct izolat din X, afirmaţia este banală. Fie x_0 un punct de acumulare al spaţiului X. Mulţimea $\mathcal{V}_{x_0}$, se arată cu uşurinţă, este superior filtrantă relativ la ordonarea parţială „$\dashv$" definită prin $\dot{V} \dashv \dot{U} \Leftrightarrow \dot{U} \subseteq \dot{V}$ unde $\dot{U}, \dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}$. Notînd $y_{\dot{V}} = \sup_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}$ şi $y'_{\dot{V}} = \inf_{x \in \dot{V}} \{f(x)\}$ aplicaţiile $\dot{V} \mapsto y_{\dot{V}}$ şi $\dot{V} \mapsto y'_{\dot{V}}$, definite pe $\mathcal{V}_{x_0}$ şi cu valori în Y, sînt şiruri generalizate din Y, pe care le notăm, cum se obişnuieşte, $(y_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}}$ şi $(y'_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}}$. Se vede imediat că $\dot{V} \dashv \dot{U} \Rightarrow y_{\dot{U}} \leqslant \leqslant y_{\dot{V}}$ şi $y'_{\dot{U}} \geqslant y'_{\dot{V}}$ ceea ce arată că şirurile generalizate $(y_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}}$ şi $(y'_{\dot{V}})_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}}$ sînt monotone; mai precis, primul este necrescător, iar al doilea nedescrescător. Se cunoaşte atunci, în teoria 0-convergenţei, că $0 - \lim y_{\dot{V}} = \inf_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}} \{y_{\dot{V}}\} = 0 - L_f(x_0)$ şi $0 - \lim_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}} y'_{\dot{V}} = \sup_{\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}} \{y'_{\dot{V}}\} = 0 - l_f(x_0)$.

COROLAR. *Pentru o aplicaţie f, definită pe spaţiul topologic X şi cu valori în laticea completă Y, avem $0 - l_f(x_0) \leqslant 0 - L_f(x_0)$, oricare ar fi $x_0 \in X$.*

Demonstraţia este imediată. Cu notaţiile de mai sus, este suficient să observăm că $y'_{\dot{V}} \leqslant y_{\dot{V}}$ oricare ar fi $\dot{V} \in \mathcal{V}_{x_0}$, ceea ce implică, cum se cunoaşte în teoria 0-convergenţei, $0 - \lim y'_{\dot{V}} \leqslant 0 - \lim y_{\dot{V}}$.

TEOREMA (2.2). *Fie X un spaţiu topologic, Y un lanţ complet dens în sine, $f: X \to Y$ şi x_0 un punct de acumulare din X. Există atunci două şiruri generalizate de elemente din X, $(x_\delta)_{\delta \in D}$ şi $(x^*_{\delta^*})_{\delta^* \in D^*}$, ambele tinzînd către x_0 (în sensul topologiei din X [3]), astfel încît $f(x_\delta) \xrightarrow{0} 0 - L_f(x_0)$ şi $f(x^*_{\delta^*}) \xrightarrow{0} 0 - l_f(x_0)$.*

Demonstraţie. Ne mărginim să dăm demonstraţia pentru $0 - L_f(x_0)$.

a) Presupunem, pentru început, că $0 - L_f(x_0)$ nu este nici cel mai mare, nici cel mai mic element din Y. Urmează că $A = (0 - L_f(x_0), \to] \neq \emptyset$ şi $B = [\leftarrow, 0 - L_f(x_0)) \neq \emptyset$. Pentru mulţimea A considerăm ordonarea „$\leqslant_A$", definită prin: $\alpha_1 \leqslant_A \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \leqslant \alpha_1$ pentru $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, unde $\leqslant$ reprezintă, ca şi pînă acum, ordonarea din Y. Pentru B considerăm ordonarea indusă de ordonarea din Y. Mulţimile A şi B sînt superior filtrante. Într-adevăr, fie $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$; pentru fixarea ideilor, presupunem $\alpha_1 < \alpha_2$, deci $\alpha_2 <_A \alpha_1$. Ordonarea din Y fiind densă, şi $0 - L_f(x_0) < < \alpha_1 < \alpha_2$ există $\alpha \in Y$, astfel ca $0 - L_f(x_0) < \alpha < \alpha_1 < \alpha_2$. Avem deci $\alpha \in A$ şi $\alpha_1 \leqslant_A \alpha$, $\alpha_2 \leqslant_A \alpha$. A este deci superior filtrantă faţă de „$\leqslant_A$". În acelaşi mod se arată că B este superior filtrantă.

În laticea completă Y, $\inf A = \sup B = 0 - L_f(x_0)$. Într-adevăr, pentru orice $\alpha \in A$, avem $0 - L_f(x_0) < \alpha$, deci $0 - L_f(x_0)$ este minorantă pentru mulţimea A. Arătăm că $0 - L_f(x_0)$ este cea mai mare minorantă pentru A. Fie $y \in Y$, $y > 0 - L_f(x_0)$ şi y minorantă pentru A. Există $y^* \in Y$, astfel ca $0 - L_f(x_0) < y^* < y$; urmează că $y^* \in A$ şi $y^* < y$, în contradicţie cu faptul că y este minorantă pentru A. Avem deci $0 - L_f(x_0) = \inf. A$. Un raţionament analog stabileşte că $0 - L_f(x_0) = = \sup B$.

Conform teoremei (1.2), pentru orice $\alpha \in A$, există $V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel ca $f(\dot{V}_\alpha) \cap [\alpha, \rightarrow] = \emptyset$. Să notăm cu $\mathbf{V}_\alpha$ cea mai mare dintre vecinătăţile punctului x_0, cu această proprietate (adică reuniunea vecinătăţilor lui x_0 cu proprietatea indicată). Dacă $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ avem $U \cap \mathbf{V}_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0}$. Folosim notaţia $W_{(U\alpha)} = U \cap \mathbf{V}_\alpha$. Evident $x \in \dot{W}_{(U,\alpha)}$ implică $f(x) < \alpha$. Fie $C = = \mathcal{V}_{x_0} \times A$. Pentru fiecare $\gamma = (U, \alpha) \in C$, corespunde, conform celor de mai sus, o vecinătate W_γ a punctului x_0. Ca produs cartesian a două mulţimi filtrante superior, mulţimea C este şi ea superior filtrantă, relativ la ordonarea „$\leqslant_C$", definită prin: $\gamma_1 = (U_1, \alpha_1) \leqslant_C \gamma_2 = (U_2, \alpha_2) \Leftrightarrow U_1 \dashv U_2$ şi $\alpha_1 \leqslant_A \alpha_2 \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$ şi $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Să observăm că $\gamma_1 \leqslant_C \gamma_2 \Rightarrow W_{\gamma_1} \supseteq W_{\gamma_2}$. Într-adevăr $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ implică $\mathbf{V}_{\alpha_1} \supseteq \mathbf{V}_{\alpha_2}$ deoarece $\mathbf{V}_{\alpha_1} = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_{x_0} \mid f(\dot{V}) \cap \cap [\alpha_1, \rightarrow] = \emptyset\}$. Urmează că, dacă $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ şi $U_1 \supseteq U_2$, avem $W_{\gamma_1} \supseteq W_{\gamma_2}$. Fie acum $D = B \times C$. B şi C fiind superior filtrante, D este de asemenea, în raport cu ordonarea „$\leqslant_D$" definită prin $\delta_1 \leqslant_D \delta_2 \Leftrightarrow \beta_1 \leqslant \beta_2$ şi $\gamma_1 \leqslant_C \gamma_2$, unde $\delta_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ şi $\delta_2 = (\beta_2, \gamma_2)$ sînt elemente din D. Conform teoremei (1.2), pentru fiecare $\beta \in B$ şi $\gamma \in C$, deci oricare ar fi $\delta = (\beta, \gamma) \in D$, există $x_\delta \in \dot{W}_\gamma$, astfel ca $f(x_\delta) > \beta$. Asociind fiecărui $\delta \in D$, un element x_δ, în acest mod, obţinem şirul generalizat $(x_\delta)_{\delta \in D}$. Vom arăta că este tocmai şirul căutat. Să arătăm, în primul rînd, că în spaţiul topologic X, $x_\delta \rightarrow x_0$. Pie $V \in \mathcal{V}_{x_0}$. Considerăm $\alpha_0 \in A$ şi $\beta_0 \in B$. Notăm $\gamma_0 = (V, \alpha_0) \in C$ şi $\delta_0 = (\beta_0, \gamma_0) \in D$. Fie $\delta = (\beta, \gamma) \in D$, unde $\gamma = (U, \alpha) \in C$ şi presupunem $\delta \geqslant_D \delta_0$. Avem $\delta_0 \leqslant_D \delta \Leftrightarrow \beta_0 \leqslant \beta$ şi $\gamma_0 \leqslant_C \gamma \Rightarrow \beta_0 \leqslant \beta$ şi $W_\gamma \subseteq W_{\gamma_0} = V \cap \mathbf{V}_{\alpha_0}$. Urmează că $x_\delta = x_{(\beta,\gamma)} \in \dot{W}_\gamma \subseteq \dot{W}_{\gamma_0} \subseteq \dot{V}$. Am arătat deci că pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $\delta_0 \in D$, astfel încît $x_\delta \in \dot{V}$ pentru $\delta \geqslant_D \delta_0$, ceea ce demonstrează că $x_\delta \rightarrow x_0$. A rămas să arătăm că $f(x_\delta) \xrightarrow{o} \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$. Pentru aceasta, considerăm şirurile generalizate $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$, unde $y_\alpha = \alpha$ şi $(z_\beta)_{\beta \in B}$, unde $z_\beta = \beta$. Avem $\inf\limits_{\alpha \in A} \{y_\alpha\} = \sup\limits_{\beta \in B} \{z_\beta\} = 0 - L_f(x_0)$.

Cele două şiruri de elemente din Y sînt monotone: primul necrescător, al doilea nedescrescător, pentru că $\alpha_1 \leqslant_A \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \Leftrightarrow y_{\alpha_1} \geqslant y_{\alpha_2}$ şi $\beta_1 \leqslant \beta_2 \Leftrightarrow z_{\beta_1} \leqslant z_{\beta_2}$. Fie acum $(\alpha, \beta) \in A \times B$. Alegem în mod arbitrar o vecinătate $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ şi notăm $\gamma = (U, \alpha) \in C$ şi $\delta = (\beta, \gamma) \in D$. În acest mod, perechii (α, β) i-am asociat un element $\delta \in D$. Fie $\delta' = (\beta', \gamma') \in D$ şi $\delta' \geqslant_D \delta$. Punem $\gamma' = (U', \alpha')$. $\delta' \geqslant_D \delta \Leftrightarrow \beta' \geqslant \beta$ şi $\gamma' \geqslant_C \gamma \Leftrightarrow \beta' \geqslant \beta$ şi $U \dashv U'$ şi $\alpha' \geqslant_A \alpha \Leftrightarrow \beta' \geqslant \beta$ şi $U' \subseteq U$ şi $\alpha' \leqslant \alpha$. Avem $x_{\delta'} \in \dot{W}_{\delta'}$, şi $\beta' < f(x_{\delta'}) < \alpha'$; cum însă $\beta \leqslant \beta'$ şi $\alpha' \leqslant \alpha$, putem în definitiv scrie $\beta < f(x_{\delta'}) < \alpha$ deci $z_\beta < f(x_{\delta'}) < y_\alpha$. Am demonstrat deci că oricare ar fi $\alpha \in A$ şi $\beta \in B$ există $\delta \in D$, astfel încît pentru $\delta' \geqslant_D \delta$ să avem $z_\beta < f(x_{\delta_0}) < y_\alpha$. În definitiv, am arătat că $f(x_\delta) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$.

b) Să trecem acum la cazul cînd $0 - L_f(x_0)$ este cel mai mare element din Y. În acest caz, mulţimea $B = [\leftarrow, 0 - L_f(x_0)) = Y - \{0 - L_f(x_0)\}$. Notăm $C = \mathcal{V}_{x_0} \times B$. Mulţimea C este superior filtrantă, în raport cu ordonarea „$\leqslant_C$", definită prin: $\gamma_1 = (V_1, \beta_1) \leqslant_C \gamma_2 = (V_2, \beta_2) \Leftrightarrow V_1 \dashv V_2$ şi $\beta_1 \leqslant \beta_2 \Leftrightarrow V_2 \subseteq V_1$ şi $\beta_1 \leqslant \beta_2$. Conform teoremei (1.2), pentru fiecare $\gamma = (V, \beta) \in C$ există $x_\gamma \in \dot{V}$, astfel ca $\beta < f(x_\gamma)$. Alegînd pentru fiecare $\gamma \in C$ cîte un astfel de element x_γ, obţinem şirul generalizat $(x_\gamma)_{\gamma \in C}$. Acest şir tinde către x_0. Într-adevăr, fie $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$. Notăm $\gamma_0 = (V_0, \beta_0)$, unde $\beta_0 \in B$. $\gamma = (V, \beta) \geqslant_C \gamma_0 \Leftrightarrow V_0 \dashv V$ şi $\beta \geqslant \beta_0 \Leftrightarrow V \subseteq V_0$ şi $\beta \geqslant \beta_0$. Cum $x_\gamma \in \dot{V}$, urmează că $x_{\gamma_0} \in V_0$. Am arătat că pentru orice $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ există $\gamma_0 \in C$ astfel ca $\gamma \geqslant_C \gamma_0$ să implice $x_\gamma \in \dot{V}_0$, deci $x_\gamma \to x_0$. Să arătăm că $f(x_\gamma) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$. Considerăm şirul generalizat $(z_\beta)_{\beta \in B}$ cu $z_\beta = \beta$ nedescrescător, şi şirul constant $(y_\beta)_{\beta \in B}$ cu $y_\beta = 0 - L_f(x_0)$. Avem $\sup\limits_{\beta \in B} \{z_\beta\} = \inf\limits_{\beta \in B} \{y_\beta\} = 0 - L_f(x_0)$. Fie acum $\beta_0 \in B$; considerăm $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ şi notăm $\gamma_0 = (V_0, \beta_0)$. Pentru $\gamma \geqslant_C \gamma_0$, unde $\gamma = (V, \beta)$, avem $\beta_0 \leqslant \beta < f(x_\gamma) \leqslant 0 - L_f(x_0)$ deci $z_{\beta_0} < f(x_\gamma) \leqslant y_{\beta_0}$. Am arătat deci că pentru orice $\beta_0 \in B$ există $\gamma_0 \in C$ cu proprietatea că $z_{\beta_0} \leqslant f(x_\gamma) \leqslant y_{\beta_0}$ pentru $\gamma \geqslant_C \gamma_0$. Deci $f(x_\gamma) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$.

c) Pentru ca teorema să fie complet demonstrată, a mai rămas de considerat cazul cînd $0 - L_f(x_0)$ este cel mai mic element din Y. În acest caz $A = (0 - L_f(x_0), \rightarrow] = Y - \{0 - L_f(x_0)\}$. A este, cum s-a văzut, superior filtrantă faţă de „$\leqslant_A$". Fie $C = \mathcal{V}_{x_0} \times A$. C este superior filtrantă relativ la ordonarea „$\leqslant_C$", definită prin $\gamma_1 = (V_1, \alpha_1) \leqslant_C \gamma_2 = (V_2, \alpha_2) \Leftrightarrow V_1 \dashv V_2$ şi $\alpha_1 \leqslant_A \alpha_2 \Leftrightarrow V_2 \subseteq V_1$ şi $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$. Conform teoremei (1.2), pentru fiecare $\gamma = (V, \alpha) \in C$, există $x_\gamma \in \dot{V}$, astfel ca $f(x_\gamma) < \alpha$. Alegînd pentru fiecare $\gamma \in C$ cîte un astfel de element x_γ, obţinem şirul generalizat $(x_\gamma)_{\gamma \in C}$. $x_\gamma \to x_0$. Într-adevăr, fie $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$; notăm $\gamma_0 = (V_0, \alpha_0)$, unde $\alpha_0 \in A$. $\gamma = (V, \alpha) \geqslant_C \gamma_0 \Leftrightarrow V \subseteq V_0$ şi $\alpha \leqslant \alpha_0$. Cum $x_\gamma \in \dot{V}$, urmează că $x_\gamma \in V_0$. Rămîne să arătăm că $f(x_\gamma) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$. Considerăm şirul generalizat necrescător $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ cu $y_\alpha = \alpha$ şi şirul constant $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ cu $z_\alpha = 0 - L_f(x_0)$.

Avem $\inf\limits_{\alpha \in A} \{y_\alpha\} = \sup\limits_{\alpha \in A} \{z_\alpha\} = 0 - L_f(x_0)$. Fie acum $\alpha_0 \in A$. Considerăm $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ şi punem $\gamma_0 = (V_0, \alpha_0) \in C$. Pentru $\gamma = (V, \alpha) \geqslant_C \gamma_0$ avem $0 - L_f(x_0) \leqslant f(x_\gamma) < \alpha \leqslant \alpha_0$, deci $z_{\alpha_0} \leqslant f(x_\gamma) < y_{\alpha_0}$; prin urmare, pentru orice $\alpha_0 \in A$, există $\gamma_0 \in C$, astfel ca $\gamma \geqslant_C \gamma_0$ să implice $z_{\alpha_0} \leqslant f(x_\gamma) \leqslant y_{\alpha_0}$. Deci $f(x_\gamma) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$.

Observaţia (2.1). Un şir generalizat $(x_\delta)_{\delta\in D}$ se zice strict convergent către x_0 dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ există $\delta_0 \in D$, astfel ca $\delta \geqslant_D \delta_0$ să implice $x_\delta \in \dot{V}$ ([4]). Demonstraţia dată mai sus, pentru cazul cînd x_0 este punct de acumulare în X, stabileşte existenţa unui şir generalizat $(x_\delta)_{\delta\in D}$ convergent strict către x_0, astfel că $f(x_\delta) \xrightarrow{o} 0 - L_f(x_0)$.

TEOREMA (2. 3). *Fie X un spaţiu topologic, Y o latice completă, $f: X \to Y$ şi x_0 un punct de acumulare din X. Dacă pentru un şir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ din X, strict convergent către x_0, $f(x_\alpha) \xrightarrow{o} h \in Y$, atunci* $0 - l_f(x_0) \leqslant h \leqslant 0 - L_f(x_0)$.

Demonstraţie. Prin ipoteză, dacă $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ există $\alpha_0 \in A$ astfel că $x_\alpha \in \dot{V}$, pentru $\alpha \geqslant_A \alpha_0$ („$\leqslant_A$" fiind ordonarea din A). Notînd $y_\alpha = f(x_\alpha)$ pentru $\alpha \in A$, avem $h = 0 - \lim y_\alpha = \inf\limits_{\alpha\in A} \{\sup\limits_{\alpha' \geqslant_A \alpha} \{y_{\alpha'}\}\}$.

Urmează că $h \leqslant \sup\limits_{\alpha' \geqslant_A \alpha} \{y_{\alpha'}\}$, pentru orice $\alpha \in A$, deci şi pentru $\alpha = \alpha_0$.

Avem: $\{f(x_{\alpha'}) \mid \alpha' \geqslant_A \alpha_0\} \subseteq \{f(x) \mid x \in \dot{V}\}$ deoarece $\alpha' \geqslant_A \alpha_0$ implică $x_{\alpha'} \in \dot{V}$. Prin urmare $\sup\limits_{x\in\dot{V}} \{f(x)\} \geqslant \sup\limits_{\alpha' \geqslant_A \alpha_0} \{y_{\alpha'}\} \geqslant h$. Urmează că $\inf\limits_{\dot{V}\in\dot{\mathcal{V}}_{x_0}} \{\sup\limits_{x\in\dot{V}} \{f(x)\}\} = 0 - L_f(x_0) \geqslant h$. Un raţionament analog demonstrează că $0 - l_f(x_0) \leqslant h$.

(Intrat în redacţie la 21 septembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XXV**, 1967.
2. Cartan, S. D., *Separation axioms for the topological ordered spaces*, Proced. of the Cambridge Philos. Soc., **64**, 4, 1968, p. 965–973.
3. Kelley, G., *General Topology*, Van Nostrand, 1955.
4. Nicolescu, M., *Analiză matematică*, II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
5. Vulih, C., *Vvedenie v teoriu poluuporiadocinîh prostranstv*, Moskva, 1961.

КРАЙНИЕ О-ГРАНИЦЫ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

(Резюмé)

В статье рассматриваются отображения, определенные на топологическом пространстве X и со значениями в полной структуре Y. Для такого отображения вводятся понятия верхней О-границы и нижней О-границы в одной точке. Изучаются затем свойства этих крайних О-границ отображения в одной точке.

EXTREME O-LIMITS OF AN APPLICATION IN A POINT

(Summary)

In the present paper definite — applications on a topological space X and with complete Y lattice values are dealt with. For such an application the notions of upper O-limit, lower O-limit, respectively, in a point are introduced. Then the properties of the extreme O-limits of an application in a point are studied.

INVOLUTORY FUNCTIONS INDUCED BY ABELIAN GROUPS

J. ACZÉL* and F. RADÓ

1. A function $f: Q \to Q$ is said to be *involutory* if $f \circ f = 1_Q$. In this case f^{-1} exists and $f^{-1} = f$.

In [1] and [4] the following way is indicated to get (possibly multi-valued) involutory functions on a set of real numbers. Take a symmetric function $(x, y) \mapsto F(x, y)$ and solve the equation

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

with respect to y. Note that a single "branch" of the solution may not be involutory. In [1] it is pointed out that every real involutory function can be obtained in this way. Indeed, in order to get f, take the equation

$$f(x) - x + f(y) - y = 0. \tag{2}$$

The aim of the present paper is to produce involutory functions on an arbitrary set Q. Also we want them to be functions in the proper sense, so we must look for equations (1) with unique solution y for all $x \in Q$. In order to generalize equation (2) in a certain sense, we require the function F to be derived from a commutative group operation. In this fashion we get the following problem.

For a given involutory function $f: Q \to Q$, find an abelian group $(Q, *)$ and an element $a \in Q$ such that

$$x * y = a \Leftrightarrow y = f(x). \tag{3}$$

If a is replaced by the identity of the group Q, then our problem can be restated as follows: *determine a group on Q in such a way that the map $x \to x^{-1}$ coincide with a given involutory function on Q.*

Geometric interpretation also suggests this problem. On the coordinate axes and the graph of a real involutory function we may construct closed Thomsen — configurations, as shown on Fig. 1 ([2], [3]). It seems natural

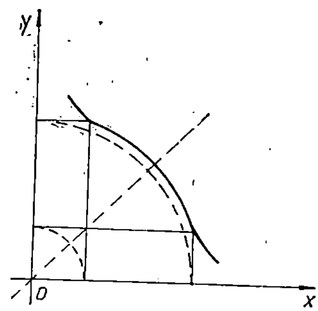


Fig. 1

* Waterloo, Ont., Canada.

to look for a regular net having two families of lines parallel to the coordinate axes and the third family containing the given graph. (A classical net is called "regular" when all of its Thomsen-configurations are closed, cf. [3].) Since a regular net can be described algebraically by an abelian group, and this is true for both geometric and abstract nets, the question about imbedding a graph in a regular net amounts to the problem formulated above.

Prior to solve the problem in general, we shall consider the case of a continuous real involutory function. After solving the general problem a net-theoretical application will be given.

2. Let I be a real interval and $f: I \to I$ a continuous involutory function. Then f is (strictly) decreasing on I, unless $f = 1_I$. Indeed, since f is continuous and f^{-1} does exist, f must be strictly monotonic. Suppose there exists $a \in I$, $a \neq b = f(a)$; since $a = f(b)$, in case $a < b$ we have $f(a) = b > a = f(b)$ and in case $a > b$, $f(a) < f(b)$. Consequently, f is decreasing or $f = 1_I$.

Since the function $x \mapsto f(x) - x$ is decreasing if $f \neq 1_I$ is involutory, equation (2) has the unique solution $y = f(x)$ for all $x \in I$. Thus every continuous involutory function on a real interval is the solution of an equation of the form (1) where F belongs to the class F defined as follows.

Let F be the class of functions $F: I \times I \to I$ such that (a) I is any real interval, (b) $x \mapsto F(x, y_0)$ is a continuous and strictly monotonic function on I for all $y_0 \in I$, and (c), $F(y, x) = F(x, y)$ for all $x, y \in I$.

Conversely, consider the equation (1) with $F \in$ F. The set $F^{-1}(0) = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ contains at most one (x, y) for given x (or given y). Since $F^{-1}(0)$ is also connected or empty, the set $\{x \mid \exists y,\ F(x, y) = 0\}$ is an interval or a single point or empty. Hence for the solution of an equation (1) with $F \in$ F we have only the following possibilities. (i) It is a function on an interval which by (b) and (c) is involutory and continuous, (ii) it reduces to a single point, (iii) it is void. In the case (i) we shall speak of a *proper solution*. Thus we have proved the following

THEOREM 1. *The set of the continuous involutory functions on real intervals consists of the proper solutions of equations* (1) *with* $F \in$ F.

The same argument shows also that the following is true.

THEOREM 1'. *The set of the continuous involutory functions on real intervals consists of the proper solutions of the equations*

$$\Phi(x) + \Phi(y) = 0, \tag{4}$$

where Φ *is a continuous stricly monotonic function on a real interval.*

Next we turn to the problem formulated in paragraph 1. Let f be a continuous involutory function on all of $\mathbf{R}$. We have $y = f(x)$ if and only if (2) holds. The bijective mapping $x \to g(x) = f(x) - x$ maps $\mathbf{R}$ onto $\mathbf{R}$, hence we can define a group $(\mathbf{R}, *)$ by putting $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x * y = g^{-1}[g(x) + g(y)]$. Now equation (2) takes on the form $g(x * y) = 0$, consequently $x * y = g^{-1}(0) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Thus one can define a continuous group $(\mathbf{R}, *)$ *in such a way that* (3) *holds.*

For an open interval I one can obtain the same result by use of a topological mapping from I to $\mathbf{R}$. If I is not open, clearly no continuous group can be a solution to our problem.

3. Let $(G, *)$ be an arbitrary group with identity $e = e_*$ and denote by $i_* : G \to G$ the map $x \to x^{-1}$. It is obvious that i_* is an involutory function on G. Put

$$\operatorname{Inv}(G, *) = \{x \mid x \in G,\ x * x = e\};$$

sometimes we shall write for short $\operatorname{Inv} G$. If $(G, *)$ is abelian, $\operatorname{Inv}(G, *)$ is a subgroup.

For a function $f : Q \to Q$ we denote the set of fixed points by

$$\operatorname{Fix} f = \{x \mid x \in Q,\ f(x) = x\}.$$

We shall first establish four lemmas which might be of interest on their own right.

LEMMA 1. *Let $f : Q \to Q$ be an involutory function and $(Q, \cdot)$ an abelian group. For the existence of a group $(Q, *)$, isomorphic to $(Q, \cdot)$ with $i_* = f$, it is necessary and sufficient that*

$$|\operatorname{Fix} f| = |\operatorname{Inv} Q|. \tag{5}$$

Proof. Suppose that $(Q, *)$ has the required properties, i.e. we have a bijective map $\Phi : Q \to Q$ with

$$\forall x \in Q,\ \Phi[f(x)] = [\Phi(x)]^{-1}, \tag{6}$$

where the exponent -1 stands for the inverse in $(Q, \cdot)$. If $x \in \operatorname{Fix} f$, it follows from (6) that $\Phi(x) = [\Phi(x)]^{-1}$, that is $\Phi(x) \in \operatorname{Inv} Q$. If $\Phi(x) \in \operatorname{Inv} Q$, then by (6) $\Phi[f(x)] = \Phi(x)$, hence, by the injectivity, $f(x) = x$, i.e. $x \in \operatorname{Fix} f$. Thus we see that the bijective Φ maps $\operatorname{Fix} f$ onto $\operatorname{Inv} Q$, consequently (5) is **valid.**

Suppose now (5) and put $Q_1 = \operatorname{Fix} f$, $\bar{Q}_1 = \operatorname{Inv} Q$. The set $Q \setminus Q_1$ splits into subsets $\{x, f(x)\}$ of just two elements. Select exactly one element from each such pair to form the set Q_2 and set $Q_3 = f(Q_2)$. Then $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ if $i \neq j$ and $x \in Q_2 \Leftrightarrow f(x) \in Q_3$. Analogously, we decompose $Q \setminus \bar{Q}_1$ into $\bar{Q}_2 \cup \bar{Q}_3$ such that $\bar{Q}_2 \cap \bar{Q}_3 = \emptyset$ and $x \in \bar{Q}_2 \Leftrightarrow x^{-1} \in \bar{Q}_3$. By (5) $|Q_1| = |\bar{Q}_1|$, hence $|Q_2| = |Q_3| = |\bar{Q}_2| = |\bar{Q}_3|$; therefore there exist bijections $\Phi_i : Q_i \to \bar{Q}_i$, $i = 1, 2$. Define $\Phi_3 : Q_3 \to \bar{Q}_3$ by

$$\forall x \in Q_2,\ \Phi_3[f(x)] = [\Phi_2(x)]^{-1} \tag{7}$$

and define $\Phi : Q \to Q$ by

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) & \text{if } x \in Q_1 \\ \Phi_2(x) & \text{if } x \in Q_2 \\ \Phi_3(x) & \text{if } x \in Q_3. \end{cases}$$

It is easy to see that Φ is a bijection. Also Φ satisfies (6). Indeed, (i) if $x \in Q_1$, we have $f(x) = x$, $\Phi(x) = [\Phi(x)]^{-1}$; (ii) if $x \in Q_2$, relation (7) implies (6); (iii) if $x \in Q_3$, then $f(x) \in Q_2$ and we may substitute in (7) $f(x)$ for x to get $\Phi_3(x) = \{\Phi_2[f(x)]\}^{-1}$; but this can be written as $[\Phi(x)]^{-1} = \Phi[f(x)]$. Defining on Q $x * y = \Phi^{-1}[\Phi(x) \cdot \Phi(y)]$ we get a group $(Q, *)$ with $x * f(x) = \Phi^{-1}\{\Phi(x) \cdot \Phi[f(x)]\} = \Phi^{-1}(e_\cdot) = e_*$, that is $f = i_*$.

LEMMA 2. *Let $f : Q \to Q$ be an involutory function and $(Q, \cdot)$ an abelian group. For the existence of a group $(Q, *)$ and an element $a \in Q$ such that $(Q, *)$ is isomorphic to $(Q, \cdot)$ and*

$$\forall x, y \in Q,\ x * y = a \Leftrightarrow y = f(x) \tag{8}$$

it is necessary and sufficient that either

1) $|\operatorname{Fix} f| = |\operatorname{Inv} Q|$, *or*

2) $\operatorname{Fix} f = \varnothing$, $Q' = \{x \cdot x \mid x \in Q\} \neq Q$.

Proof. Suppose that $(Q, *)$ is isomorphic to $(Q, \cdot)$ and (8) holds. We distinguish two cases.

(i) There exists $b \in Q$ with $b * b = a$. Let (Q, o) be a group, isomorphic to $(Q, *)$ defined by $x\, o\, y = x * y * b^*$, where b^* stands for the inverse of b in $(Q, *)$. The identity in (Q, o) is $e_o = b$ and (8) becomes $x\, o\, y = e_o \Leftrightarrow y = f(x)$, i.e. $i_o = f$. Lemma 1 yields condition 1).

(ii) For all $b \in Q$, $b * b \neq a$. Then $Q' \neq Q$. We have also $\operatorname{Fix} f = \varnothing$; in fact, suppose instead $f(x_1) = x_1$ for some $x_1 \in Q$; then we get by (8) $x_1 * x_1 = x_1 * f(x_1) = a$, a contradiction.

Suppose now that condition 1) holds. Then lemma 2 follows from lemma 1.

Finally suppose condition 2). Again decompose Q into $Q_2 \cup Q_3$ like in the proof of lemma 2 (Q_1 is now empty), i.e. $Q_2 \cap Q_3 = \varnothing$ and

$$x \in Q_2 \Leftrightarrow f(x) \in Q_3,\ x \in Q_3 \Leftrightarrow f(x) \in Q_2.$$

Pick a fixed $k \in Q \setminus Q'$. Since $k \cdot (k \cdot x^{-1})^{-1} = x$ and $kx^{-1} \neq x$ for all $x \in Q$, the set Q can be partitioned into pairs $\{x, kx^{-1}\}$. Select just one element from each pair to form a set Q' and denote $Q \setminus Q'$ by Q''. Then $x \in Q' \Leftrightarrow k \cdot x^{-1} \in Q''$. Since $|Q_2| = |Q_3| = |Q'| = |Q''|$, we can take a bijection $\psi:\ Q_2 \to Q'$ and define $\Phi : Q \to Q$ by

$$\Phi(x) = \begin{cases} \psi(x) \text{ if } x \in Q_2 \\ k \cdot (\psi[f(x)])^{-1} \text{ if } x \in Q_3. \end{cases}$$

Clearly Φ is a bijection. If $x \in Q_3$, then $f(x) \in Q_2$ and therefore $\Phi[f(x)] = \psi[f(x)]$ and $\Phi(x) = k \cdot (\Phi[f(x)])^{-1}$; but this can be written as

$$y = f(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \cdot \Phi(y) = k. \tag{9}$$

If $x \in Q_2$, then $f(x) \in Q_3$, hence $\Phi[f(x)] = k \cdot [\psi(x)]^{-1} = k \cdot [\Phi(x)]^{-1}$ and we again have (9). But (9) yields lemma 2.

LEMMA 3. *If G is a finite abelian group of order n, then $|\operatorname{Inv} G| = 2^m$, where m is a non-negative integer and n is divisible by 2^m. Conversely, if*

$n = 2^m \cdot q$, *where* $m \in N \cup \{0\}$, $q \in N$, *then there exists an abelian group* G *with* $|G| = n$, $|\mathrm{Inv}\, G| = 2^m$.

Proof. The group G may be written as a direct product of cyclic groups. Let Z_r be a cyclic group of order r; $|\mathrm{Inv}\, Z_r| = 2$ if r is even and $|\mathrm{Inv}\, Z_r| = 1$ if r is odd. Since $\mathrm{Inv}\,(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathrm{Inv}\, G_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Inv}\, G$ has order 2^m, $m \in N \cup \{0\}$ and, by Lagrange's theorem, this order divides $|G|$. The second part of the lemma is easily proved by constructing a suitable direct product of cyclic groups.

LEMMA 4. *For an infinite* n *and* r *equal to* 2^m, $m \in N \cup \{0\}$, *or infinite but* $\leqslant n$, *there exists an abelian group* G *with* $|G| = n$, $|\mathrm{Inv}\, G| = r$, $\mathrm{Inv}\, G \neq G$.

Proof. Let G_1 be the direct product of m copies of $(Z_2, +)$ in case $r = 2^m$ and let G_1 be equal to direct sum of r copies of $(Z_2, +)$ in case r is infinite. In both instances $|G_1| = |\mathrm{Inv}\, G_1| = r$. Let G_2 be the direct sum of n copies of $(Z, +)$. Clearly $|G_2| = n$, $|\mathrm{Inv}\, G_2| = 1$. The group $G = G_1 \times G_2$ fulfills the requirements.

THEOREM 2. *Let* $f: Q \to Q$ *be an involutory function. An abelian group* $(Q, *)$ *with* $i_* = f$ *can be defined if and only if either*

1) $|Fix\, f| = 2^m$, $m \in N \cup \{0\}$, $|Q|$ *is divisible by* 2^m *or is infinite, or*
2) $|Fix\, f|$ *is infinite and* $|Q \setminus Fix\, f| = |Q|$ *or* 0.

Proof. Suppose that $(Q, *)$ is an abelian group and $i_* = f$. Then $\mathrm{Fix}\, f = \mathrm{Inv}\, Q$. If Q is finite we have 1) by lemma 3. Let Q be infinite. In case $\mathrm{Inv}\, Q$ is finite, we may apply lemma 3 to the group $\mathrm{Inv}\, Q$ to get 1). If $\mathrm{Inv}\, Q$ is infinite, either $\mathrm{Inv}\, Q = Q$ and then $|Q \setminus \mathrm{Fix}\, f| = 0$, or else $\mathrm{Inv}\, Q$ is a proper subgroup in Q and then $Q \setminus \mathrm{Inv}\, Q$ contains at least one coset of $\mathrm{Inv}\, Q$, hence $|Q \setminus \mathrm{Fix}\, f| = |Q \setminus \mathrm{Inv}\, Q| = |Q|$.

Suppose 1) or 2) holds. Using lemma 3 or 4, respectively, we construct an abelian group $(G, \cdot)$ such that $|G| = |Q|$ and $|\mathrm{Inv}\, G| = |\mathrm{Fix}\, f|$. If $Q = \mathrm{Fix}\, f$, we take for G the direct sum of an appropriate number of copies of $(Z_2, +)$. It is easy to define a bijection $\psi: G \to Q$ with $\psi(\mathrm{Inv}\, G) = \mathrm{Fix}\, f$. The group $(G, \cdot)$ is now being transported by ψ onto a group $(Q, \cdot)$. Since $|\mathrm{Fix}\, f| = |\mathrm{Inv}\,(Q, \cdot)|$, lemma 1 yields theorem 1.

THEOREM 3. *Let* $f: Q \to Q$ *be an involutory function. There exists an abelian group* $(Q, *)$ *and an element* $a \in Q$ *such that*

$$x, y \in Q, \; x * y = a \Leftrightarrow y = f(x) \tag{10}$$

if and only if either

1) $|\mathrm{Fix}\, f| = 2^m$, $m \in N \cup \}0\}$, $|Q|$ *is divisible by* 2^m *or is infinite, or*
2) $|\mathrm{Fix}\, f|$ *is infinite,* $|Q \setminus \mathrm{Fix}\, f| = |Q|$ *or* 0, *or*
3) $\mathrm{Fix}\, f = \emptyset$.

Proof. First we suppose (10) for the abelian group $(Q, *)$. Lemma 2 applies (both groups in the lemma are now $(Q, *)$), hence either i) $|\mathrm{Fix}\, f| = |\mathrm{Inv}\, Q|$ or ii) $\mathrm{Fix}\, f = \emptyset$ which is 3). In the case i) we deduce 1) or 2) just as in the proof of theorem 2.

If 1) or 2) is true, then theorem 3 (with $a = e_*$) follows by theorem 2. If 3) is valid, suppose first Q to be finite. Since $\mathrm{Fix}\, f = \emptyset$, the set Q

can be partitioned into the pairs $\{x, f(x)\}$ of distinct elements; hence $|Q|$ is even. We construct, by lemma 3, an abelian group $(G, \cdot)$ with $|G| = |Q|$ and $|\operatorname{Inv} G| = 2$. Then the map $x \to x \cdot x$ surely fails to be injective on G; therefore it can't be surjective, hence $\{x \cdot x \mid x \in G\} \neq G$. Map the group G onto the set Q by a bijection in order to get an abelian group $(Q, \cdot)$, to which lemma 2 applies. This yields (10). Suppose now that Q is infinite. Consider an abelian group $(G_1, \cdot)$ with $|G_1| = |Q|$ and put $G_2 = (Z, +)$. For the direct product $G = G_1 \times G_2$ we have again $|G| = |Q|$. Also $\{x \cdot x \mid x \in G\} \neq G$, for among the products $(x, k) \cdot (x, k) = (x \cdot x, 2k)$ no element $(x, 1)$ can occur. One completes the proof as in the case where Q is finite.

4. Consider a set W together with three partitions of it, L_1, L_2, L_3, and call the elements of W *points* and those of L_i *i-lines*, $i = 1, 2, 3$. The system (W, L_1, L_2, L_3) is called a *halfnet* (or *halfweb*) provided two arbitrary lines of different sort have at most one common point. If they have exactly one point in common, (W, L_1, L_2, L_3) is a *net*. A halfnet is called a *T-halfnet* if the Thomsen-configurations close, i.e. for all $i = 1, 2, 3$ and all $l_1, l_2, l_3 \in L_i$, $m_1, m_2, m_3 \in L_{i+1}$, $n_1, n_2, n_3 \in L_{i+2}$ (taken with subscripts modulo 3) the following is true: if the five intersections

$$l_2 \cap m_3 \cap n_1,\ l_3 \cap m_2 \cap n_1,\ l_3 \cap m_1 \cap n_2,\ l_1 \cap m_3 \cap n_2,\ l_1 \cap m_2 \cap n_3 \quad (T)$$

are non-void then $l_2 \cap m_1 \cap n_3$ is also non-void (fig. 2). The five points in (T) and $l_2 \cap m_1 \cap n_3$ are called the *vertices* of the closed Thomsen-configuration. If in a closed Thomsen-configuration $l_2 = l_3$, $m_2 = m_3$, $n_2 = n_3$, we speak of a *singular T-configuration* (fig. 3).

Consider a halfnet (W, L_1, L_2, L_3) and suppose there exist bijections $k_i : L_i \to Q$ onto the same set Q for $i = 1, 2, 3$. For $x, y \in Q$ we put

$$x * y = k_3(l), \qquad (11)$$

whenever $p = k_1^{-1}(x) \cap k_2^{-1}(y)$ is non-empty and $p \in l \in L_3$. In this way one associates to a halfnet a family of halfgroupoids $(Q, *)$, which become quasigroups in case of a net. It is well known that a net is a T-net if and only if its associated quasigroups are isotopic to an abelian group [2].

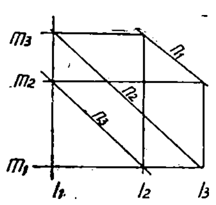


Fig. 2.

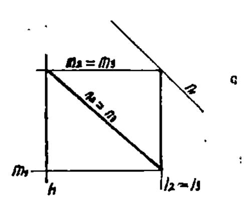


Fig. 3.

We say that the halfnet (W, L_1, L_2, L_3) is *imbedded* in the halfnet (W', L'_1, L'_2, L'_3) when $W \subset W'$ and for each $l \in L_i$ there exists $l' \in L_i$ with $l' \supset l$, $i = 1, 2, 3$.

We shall call the halfnet (W, L_1, L_2, L_3) *triangular* if there exist pairwise disjoint sets W_1, W_2, W_3 and bijections $h_i : W_{i+1} \to W_{i+2}$ such that $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ and

$$L_i = \{W_i\} \cup \{\{x, h_i(x)\} \mid x \in W_{i+1}\}. \tag{12}$$

Suppose that the triangular halfnet (W, L_1, L_2, L_3) is imbedded in the *net* (W', L'_1, L'_2, L'_3). We say that the first is *fully imbedded* in the second provided there are points $A_1, A_2, A_3 \in W'$ such that $W_1 \cup \{A_2, A_3\} \in L'_1$, $W_2 \cup \{A_3, A_1\} \in L'_2$, $W_3 \cup \{A_1, A_2\} \in L'_3$.

For a triangular halfnet define

$$f = h_2 \circ h_1 \circ h_3. \tag{13}$$

Clearly, *the triangular halfnet is a T-halfnet if and only if f is involutory.* We call a point in a triangular halfnet *singular* if it is a vertex of a singular T-configuration and denote by S_i the singular points of W_i, $i = 1, 2, 3$. It is easily seen that *there is a bijection from* Fix f *onto S_i for each $i = 1, 2, 3$*. Now Theorem 3 reads in net-theoretical language as follows.

THEOREM 4. *Let (W, L_1, L_2, L_3) be a triangular T-halfnet, suppose that the line-sets are given by* (12) *and let S_1 be the set of singular points in W_1. The halfnet is fully imbeddable in a T-net if and only if either*

1) $|S_1| = 2^m$, $m \in N \cup \{0\}$, *$|W_1| + 2$ is divisible by 2^m or is infinite; or*

2) *$|S_1|$ is infinite, $|W_1 \setminus S_1| = |W_1|$ or 0; or*

3) $S_1 = \emptyset$.

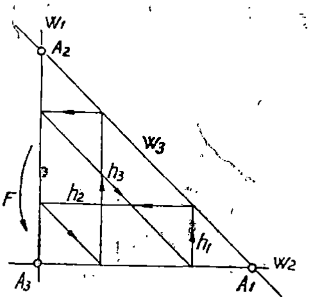


Fig. 4.

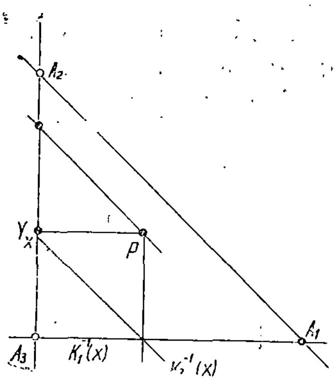


Fig. 5.

Proof. Suppose (W, L_1, L_2, L_3) is imbeddable in the T-net (W', L_1', L_2', L_3'). Let $W_i' = W_i \cup \{A_{i+1}, A_{i+2}\}$, $i = 1, 2, 3$. Associate to the T-net the quasigroup $(Q; *)$ defined by formula (11) with $Q = W_1'$ and

$$k_1 : L_1' \to Q,\ k_1(l) = \begin{cases} h_3^{-1}(l \cap W_2') & \text{if } l \in L_1', \\ A_2 & \text{if } A_1 \in l, \\ A_3 & \text{if } A_3 \in l, \end{cases}$$

$$k_2 : L_2' \to Q,\ k_2(l) = l \cap Q, \qquad k_3 : L_3' \to Q,\ k_3(l) = l \cap Q.$$

Since $x * A_3 = A_3 * x = x$, $(Q, *)$ is a loop. Being isotopic to an abelian group, it is itself an abelian group. Now, $x * y = A_2$ means $h_2 h_1 h_3(x) = y$, hence $y = f(x) \Leftrightarrow x * y = A_2$. Consequently one of the conditions 1)—3) in theorem 3 is valid and that clearly yields the first part of theorem 4. The second part is obtained again by a rather obvious construction.

5. We have seen that the Thomsen-condition for a triangular halfnet is expressed with aid of the function (13) in very simple form: $f \circ f = 1_{W_1}$. This suggests to consider for nets and halfnets iterated configuration conditions corresponding to

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ times}} = 1_{W_1}.$$

If these conditions hold in a net, we call it an *I_n-net.*

It is easily seen that *a net is an I_3-net if and only if any associated loop $(Q, *)$ satisfies*

$$x, y, z \in Q,\ x * y = y * z \Rightarrow y * z = z * x \tag{14}$$

and it is an I_4-net if and only if

$$x, y, z, u \in Q,\ x * y = y * z = z * u \Rightarrow x * y = u * x. \tag{15}$$

If Q is not reduced to the identity e, condition (14) is contradictory (e.g. $x = z = e$, $y \neq e$ yield a contradiction). However condition (15) can be satisfied. We have the following

THEOREM 5. *For a group $(Q, *)$ condition (15) is equivalent to*

$$x, y \in Q,\ (x * y)^2 = (y * x)^2. \tag{16}$$

Proof. Suppose (15) and let x, y be arbitrary elements in Q. Set $u = y^{-1} * x^{-1} * y * x * y$. From $x * y = y * (y^{-1} * x * y) = (y^{-1} * x * y) * u$ we deduce, by (15), $x * y = u * x$. Hence $x * y = y^{-1} * x^{-1} * y * x * y * x$, which yields (16).

Suppose (16) and take $x, y, z, u \in Q$ such that $x * y = y * z = z * u$. We have $(y * x) * (y * x) = (x * y) * (x * y) = (y * z) * (x * y)$, hence $(x * y) * * x = z * x * y$, that is, $z * u * x = z * x * y$. By cancellation we get $u * x = = x * y$.

COROLLARY. *Each T-net. is an I_4-net. There exist I_4-nets which are not T-nets.*

The first assertion is obvious. For the second consider the quaternion group (it is a group with 8 elements having a, b as generators and $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ as defining relations) in which (16) holds, as easily checked, and which is not commutative.

Now, the following questions seem to be interesting.

1) Is every I_4-net necessarily a Reidemeister-net (that is, does it have groups as associated quasigroups)?

2) Characterize algebraically the quasigroups associated to I_n-nets and the halfgroupoids associated to I_n-halfnets.

(Received July 1, 1973)

REFERENCES

1. Aczél, J., *A remark on involutory functions*, Amer. Math. Monthly, 55 (1948), 638–639.
2. Aczél, J., *Quasigroups, nets and nomograms*, Advances in Mathematics, 1 (1965), 383–450.
3. Blaschke, W. - Bol, G., *Geometrie der Gewebe*, Grundl. d. math. Wiss., 49, Springer, Berlin, 1938.
4. Călugăreanu, G., *Determinarea unei clase speciale de funcţiuni*, Ştiinţă şi progres, 1 (1934), 95–97.

FUNCŢII INVOLUTIVE INDUSE DE GRUPURI ABELIENE

(Rezumat)

Se studiază procedee de a genera funcţii involutive plecînd de la grupuri abeliene.

Rezultatul obţinut se aplică la teoria ţesuturilor pentru a stabili condiţiile în care un semiţesut triunghiular poate fi scufundat într-un T-ţesut (în care condiţia lui Thomsan are loc).

ИНВОЛЮТИВНЫЕ ФУНКЦИИ, ИНДУКТИРОВАННЫЕ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

(Резюме)

Изучаются методы составления инволютивных функций, исходя из абелевых групп.

Полученный результат применяется к теории тканей для установления условий, в которых треугольная полуткань может быть вложена в Т-ткань (в которой имеет место условие Томсена).

DESPRE CONDIŢII DE TRANZITIVITATE ÎN STRUCTURI DE INCIDENŢĂ

VICTORIA GROZE

În lucrarea [1] s-a studiat comportarea structurilor algebrice asociate prestructurilor de incidenţă în cazul tranzitivităţilor $O_i - O_1O_2$, $i = 1, 2$. Astfel s-a demonstrat că:

— O prestructură de incidenţă $\mathcal{S}$ este $0_2 - 0_10_2$ tranzitivă dacă şi numai dacă ternarul (Q, T) asociat prestructurii se liniarizează şi $(Q, +)$ este un grup.

— O prestructură de incidenţă $\mathcal{S}$ $0_2 - 0_10_2$ tranzitivă este şi $0_1 - 0_10_2$ tranzitivă dacă $(Q, +, \cdot)$ este distributivă la dreapta.

În această lucrare ne propunem să studiem comportarea structurii algebrice asociate prestructurii de incidenţă avînd în vedere alte tranzitivităţi.

Demonstrăm următoarele teoreme:

Teorema 1. *O prestructură de incidenţă* $\mathcal{S}$ $0_2 - 0_10_2$ *tranzitivă este şi* $0_2 - 0_20_3$ *tranzitivă dacă şi numai dacă* $(Q, +, \cdot)$ *este distributiv la stînga.*

Demonstraţie. Presupunem că $\mathcal{S}$ este $0_2 - 0_20_3$ tranzitivă, atunci

$$x = a \to x = a \ (0, b) \to (0, b) \ (0) \to (m)$$

şi deci ecuaţiile unei omologii cu centrul 0_2 şi axa 0_20_3 sînt

$$f: \begin{cases} x' = x \\ y' = f(x, y) \end{cases} \qquad \begin{cases} m' = \varphi(m) \\ b' = b \end{cases}$$

În baza definiţiei omologiei [1], putem scrie

$$y = xm + b \Rightarrow f(x, y) = x\varphi(m) + b$$

sau

$$f(x, xm + b) = x\varphi(m) + b \ \forall x, m, b \in Q. \tag{1}$$

Pentru $m=0$ şi $\varphi(0) = c$, relaţia (1) devine

$$f(x, b) = x \cdot c + b$$

şi putem scrie

$$f(x, x \cdot m + b) = x \cdot c \cdot + x \cdot m + b = \\ = x\varphi(m) + b. \tag{2}$$

Pentru $x = 1$ avem $c + m = \varphi(m)$ şi relaţia (2) devine

$$x \cdot c + x \cdot m = x(c + m). \tag{3}$$

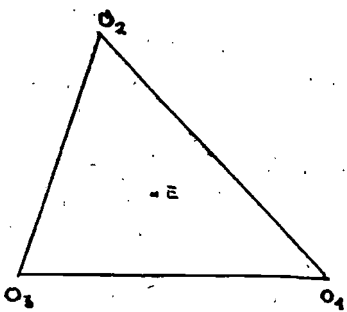


Fig. 1.

Reciproc, dacă relația (3) are loc $\mathcal{S}$ este $0_2 - 0_20_3$ tranzitivă. Într-adevăr, considerînd aplicația

$$f: \begin{cases} x' = x & m' = c + m \\ y' = xc + y & b' = b, \end{cases}$$

avem $y = x \cdot m \cdot + b \to - x \cdot c + y' = x \cdot (- c + m') + b$ sau $- x \cdot c + + y' = - x \cdot c + x \cdot m' + b$ adică $y' = x \cdot m' + b$ deci f este o omologie cu centrul 0_2 și axa 0_20_3.

TEOREMA 2. *Dacă o prestructură de incidență este $0_2 - 0_20_i$ $i = 1, 3$ tranzitivă, atunci oricare două drepte au exact un punct comun.*

Demonstrație. Fie dreptele

$$y = x \cdot m_1 + b_1, \quad y = x \cdot m_2 + b_2, \quad m_1 \neq m_2$$

atunci

$$x \cdot m_1 + b_1 = x \cdot m_2 + b_2 \text{ sau } x \cdot (- m_2 + m_1) = b_2 - b_1$$

admite soluție unică în raport cu x.

COROLAR. *Dacă o prestructură de incidență este $0_2 - 0_20_i$, $i = 1, 3$ tranzitivă, atunci ea este o structură de incidență.*

TEOREMA 3. *Intr-o structură de incidență $0_2 - 0_20_i$ $(i = 1, 3)$ tranzitivă expresia analitică a unei 0_2-d omologii cu axa $d \neq 0_20_i$ $(i = 1, 3)$ este*

$$f: \begin{cases} x' = x \\ y' = x \cdot a + y - c \cdot a \end{cases}$$

unde $a = f(0_1)$.

Demonstrație. Fie $A(x, y)$ și $A'(x', y')$ două puncte corespondente într-o omologie $O_2 - d$. Atunci ecuațiile ei sînt

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = f(x, y) \end{cases} \qquad \begin{cases} m' = \varphi(m) \\ b' = g(b). \end{cases}$$

Întrucît prin omologie incidența se păstrează, putem scrie $y = x \cdot m + b \Rightarrow y' = x' \cdot m' + b'$ sau $f(x, y) = x \cdot \varphi(m) + g(b)$ și deci

$$f(x, x \cdot m + b) = x \cdot \varphi(m) + g(b), \ \forall x, m, b \in Q \tag{4}$$

Pentru $m = 0$ (4) devine

$$f(x, b) = x \cdot a + g(b) \tag{5}$$

unde $a = \varphi(0)$.

Substituind (5) în (4) avem

$$x \cdot a + g(x \cdot m + b) = x \cdot \varphi(m) + g(b). \tag{6}$$

Punînd $x = 1$ vom avea

$$a + g(m + b) = \varphi(m) + g(b) \tag{7}$$

care pentru $b = 0$ devine $a + g(m) = \varphi(m) + a_1$ unde $a_1 = g(0)$, de unde se deduce

$$\varphi(m) = a + g(m) - a_1. \tag{8}$$

Substituind (8) în (7) obţinem $a + g(m + b) = a + g(m) - a_1 + g(b)$ sau $g(m + b) = g(m) - a_1 + g(b)$.

Înlocuind pe $g(m + b)$ în (6) găsim $x \cdot a + g(x \cdot m) - a_1 - g(b) = x \cdot \varphi(m) + g(b)$ sau, avînd în vedere relaţia (8)

$$\begin{gathered} x \cdot a + g(x \cdot m) - a_1 = x \cdot a + x \cdot g(m) - x \cdot a_1 \text{ sau} \\ g(x \cdot m) = x \cdot g(m) - x \cdot a_1 + a_1. \end{gathered} \tag{9}$$

Această relaţie pentru $m = 1$ devine

$$g(x) = x \cdot a'_2 - x \cdot a_1 + a_1 \text{ sau } g(x) = x \cdot a_2 + a_1 \tag{10}$$

unde $a'_2 = g(1)$, $a_2 = a'_2 - a_1$.

Substituind relaţia (10) în (8) rezultă

$$\varphi(m) = a + m \cdot a_2, \tag{11}$$

iar substituită în (5) conduce la $f(x, y) = x \cdot a + y \cdot a_2 + a_1$.

Deci ecuaţiile omologiei sînt

$$x' = x,\ y' = x \cdot a + y \cdot a_2 + a_1. \tag{12}$$

Considerînd acum tranzitivitatea $0_2 - d$, unde $d: x = c$, dreapta $y = 0$ se transformă în dreapta $y' = x \cdot a + a_1$. Punctul $(c, 0)$ rămînînd fix rezultă $0 = c \cdot a + a_1$ de unde se deduce $a_1 = - c \cdot a$. Ecuaţiile (12) devin

$$x' = x,\ y' = x \cdot a + y \cdot a_2 - c \cdot a. \tag{13}$$

Substituind (10) în (9) obţinem $(x \cdot m)a_2 + a_1 = x \cdot (m \cdot a_2 + a_1) - x \cdot a_1 + a_1$ sau $(x \cdot m) \cdot a_2 = x \cdot (m \cdot a_2)$ o relaţie de asociativitate faţă de constanta a_2.

Prin relaţiile (13) punctul $(c, c \cdot m)$ devine $(c, c \cdot a + (c \cdot m)a_2 - c \cdot a)$, care fiind pe axa omologiei $x = c$, trebuie să fie fix, deci $c \cdot m = c \cdot a + (c \cdot m) \cdot a_2 - c \cdot a$ sau $c \cdot m = c \cdot a + c \cdot (m \cdot a_2) - c \cdot a = c \cdot (a + m \cdot a_2 - a)$ de unde $m = a + m \cdot a_2 - a$.

Avînd în vedere (11) putem scrie

$$m' = m + a. \tag{14}$$

Din (11) şi (14) rezultă

$$a + m \cdot a_2 = m + a,\ \forall m \in Q \tag{15}$$

care pentru $m = 1$ conduce la

$$a_2 = - a + 1 + a. \tag{16}$$

şi atunci (15) devine $a + m \cdot (- a + 1 + a) = m + a$, $\forall m, a \in Q$ deoarece $\mathcal{S}$ este 0_2 tranzitivă.

Punînd în ultima relaţie $a = 1$ avem $1 + m = m + 1$, $\forall m \in Q$. Atunci putem scrie $a + m \cdot (-a + a + 1) = m + a$ sau $a + m = m + a$, $\forall m, a \in Q$, deci $(Q, +)$ este grup abelian.

Ţinînd seama de această proprietate relaţia (16) devine $a_2 = 1$ şi teorema este complet demonstrată.

Introducem în continuare noţiunea de tranzitivitate în raport cu un punct prin

DEFINIŢIA: O structură de incidenţă se numeşte 0_2 tranzitivă dacă ea este $0_2 - d$ tranzitivă pentru orice $d \mathrm{I} 0_2$, $d \in \mathfrak{D}$.

Demonstrăm atunci

TEOREMA 4. *O structură de incidenţă* $0_2 - 0_2 0_i$ $(i = 1, 3)$ *tranzitivă este* 0_2 *tranzitivă dacă şi numai dacă mai admite o tranzitivitate* $0_2 - d$ *cu* $d \mathrm{I} 0_2$.

Demonstraţie. Presupunem că structura de incidenţă este $0_2 - d$ tranzitivă unde $d: x = c$. Atunci pe baza teoremei 3 avem

$$x' = x, \ y' = x \cdot a + y - c \cdot a,$$

iar dreapta $y = x \cdot m + b$ se transformă în $y' = x' \cdot (a + m) + b - c \cdot a$. deci o dreaptă se transformă într-o dreaptă. Punctul (c, y) se transformă în $(c, c \cdot a + y - c \cdot a)$, dar el fiind pe axă trebuie să fie fix, deci $y = c \cdot a + y - c \cdot a$ ceea ce rezultă din proprietatea de comutativitate.

COROLAR. *O prestructură de incidenţă este* 0_2*-tranzitivă dacă şi numai dacă au loc proprietăţile*

1°. (Q, T) *este liniar*

2°. $(Q, +)$ *este grup comutativ*

3°. $(Q, +, \cdot)$ *este distributiv la stînga.*

TEOREMA 5. *Dacă o structură de incidenţă* 0_2*-tranzitivă admite şi tranzitivitatea* $0_1 - 0_1 0_2$, *atunci ea este plan proiectiv.*

Demonstraţie. Arătăm că oricare ar fi două puncte distincte ele sînt incidente exact cu o dreaptă.

Fie (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) două puncte distincte, deci $x_1 \neq x_2$ şi dreapta $[m, b]$. Punînd condiţia de incidenţă dintre dreaptă şi puncte obţinem

$$y_1 = x_1 \cdot m + b, \quad y_2 = x_2 \cdot m + b$$

care conduce la $x_2 \cdot m - x_1 \cdot m = y_2 - y_1$ sau $(x_2 - x_1) \cdot m = y_2 - y_1$ care are soluţie unică în raport cu m, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 6. *Dacă o structură de incidenţă* $0_1 0_2$ *tranzitivă admite şi tranzitivitatea* $0_2 - 0_2 0_3$, *atunci ea este plan proiectiv.*

Demonstraţie. Din $0_2 - 0_2 0_3$ tranzitivitate rezultă proprietatea de distributivitate la stînga a operaţiei de înmulţire faţă de adunare. Pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că oricare două drepte distincte au exact un punct comun.

Fie $[m_1, b_1]$, $[m_2, b_2]$ două drepte distincte, $m_1 \neq m_2$, şi (x, y) un punct. Punînd condiţia de incidenţă, avem $y = xm_1 + b_1$, $y = xm_2 + b_2$ sau $xm_1 + b_1 = xm_2 + b_2$ de unde $x(-m_2 + m_1) = b_2 - b_1$ care are soluţia unică x.

(Intrat în redacţie la 15 decembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Groze, V., *Asupra coordonatizării şi scufundării structurilor de incidenţă*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 1, 1971, 37—47.

ОБ УСЛОВИЯХ ТРАНЗИТИВНОСТИ В СТРУКТУРАХ ИНЦИДЕНТНОСТИ

(Резюме)

В работе изучается поведение алгебраической структуры, присоединенной к преструктуре инцидентности [1], имея в виду несколько транзитивностей. Таким образом доказывается, что транзитивная преструктура инцидентности O_2-O_2O_i ($i = 1,2$) является структурой инцидентности; вводится O_2—транзитивность и показывается, что O_2-транзитивная структура инцидентности является проективной плоскостью, если допускает и транзитивность O_1-O_1O_2.

SUR LES CONDITIONS DE TRANSITIVITÉ DANS DES STRUCTURES D'INCIDENCE

(Résumé)

On étudie le comportement de la structure algébrique associée à une prestructure d'incidence [1] ayant en vue quelques transitivités. On démontre qu'une prestructure d'incidence $O_2 - O_2O_i$ ($i = 1, 2$) transitive est une structure d'incidence; on introduit la O_2-transitivité et l'on montre qu'une structure d'incidence O_2-transitive est un plan projectif si elle admet la transitivité $O_1 - O_1O_2$.

CONEXIUNI η-COPARALELE

P. STAVRE

„Se definește noțiunea de conexiune η-semi-simetrică pe o structură A_2 și se obțin rezultatele cuprinse în cele două teoreme și cinci propoziții".

Fie V_{2n+1} o varietate diferențiabilă cu o structură A_2 metrică aproape de contact (J, η, E, g) ([1]) și D o conexiune cu torsiune,

$$D_X : Y \to D_X Y \tag{1}$$

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] \tag{2}$$

Avem,

$$\eta(E) = 1 \tag{3}$$

$$\eta(JX) = 0 \tag{4}$$

$$J^2 = -I + \eta \otimes E \tag{5}$$

$$g(JX, JY) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{6}$$

$$F(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} g(X, JY) \tag{7}$$

DEFINIȚIA 1. Conexiunea $\overline{D}$ definită prin

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + g(V, Y)X + g(V, JY)JX \tag{8}$$

unde $V \in \Delta$; Δ fiind distribuția definită de (dat altfel arbitrar)

$$\eta = 0 \tag{9}$$

o vom numi η-coparalelă cu D.

Avem din (8)(2);

$$\overline{T}(X, Y) = T(X, Y) + g(V, Y)X + g(V, JY)JX - g(VX)Y - g(V, JX)JY \tag{10}$$

unde T, $\overline{T}$ sînt tensori de torsiune corespunzători.

Dacă vom nota cu t, $\bar{t}$ cîmpurile de vectori de torsiune, vom obține;

$$-\bar{t}(Y) + t(Y) = (2n + 1)g(V, Y) \tag{11}$$

deoarece avem,

$$\eta(V) = 0 \tag{12}$$

Înlocuind (11) în (10), dacă notăm,

$$I(X, Y) = T(X, Y) + \frac{1}{2n+1}(t(Y)X - t(X)Y + t(JY)JX - t(JX)JY) \tag{13}$$

vom obține relația;

$$\bar{I}(X, Y) = I(X, Y) \tag{14}$$

care constituie un invariant, al transformărilor de conexiune (8). De unde,

TEOREMA 1. *Dacă pe V_{2n+1} avem o structură A_2, atunci $I(X, Y)$ este un invariant al transformărilor de conexiune* (8).

DEFINIȚIA 2. Dacă există o conexiune $\bar{D}$ simetrică astfel încît să avem (8), atunci vom spune că D este η-semi-simetrică.

Vom obține,

$$T(X, Y) = \frac{1}{2n+1}(t(X)Y - t(Y)X + t(JX)JY) - t(JY)JX) \tag{15}$$

$$\bar{I}(X, Y) = 0 \tag{16}$$

Dacă D este η-semi-simetrică din (11), dacă vom scrie

$$U \xrightarrow{g} t \tag{17}$$

prin izomorfismul indus de g ([2]), obținem;

$$V = \frac{1}{2n+1} U \tag{18}$$

Cum X era arbitrar, avem:

$$g(U, X) = (2n+1)\, g(VX); \tag{19}$$

Rezultă,

$$U \in \Delta \tag{20}$$

PROPOZIŢIA 1. Dacă U este cîmpul de vectori la care corespunde t prin izomorfismul indus de $g_x (x \in V_{2n+1})$ atunci U aparţine distribuţiei. Avem deci $\eta(U) = 0$.

Dacă ţinem seama de (8), rezultă,

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \frac{1}{2n+1} (t(Y)X + t(JY)JX) \tag{21}$$

Avem

PROPOZIŢIA 2. Dacă D este η-semi-simetrică pe o structură A_2 atunci avem relaţia (21).

Reciproc, dacă avem (15) cu (17), definim V prin (19) şi $\overline{D}$ prin (21). Avem

$$g(U, Y) = (2n + 1) g(V, Y) \tag{22}$$

care înlocuită în (21) duce la relaţia (8), adică D este η-semi-simetrică, deoarece $\overline{D}$ este simetrică.

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca D să fie η-semi-simetrică este ca T să satisfacă* (15) *cu* $t \overset{g}{\leftarrow} U$.

Dacă D are şi proprietatea,

$$\underset{XYZ}{S} (D_X F)(Y, Z) = 0 \tag{23}$$

atunci obţinem,

$$(3dF)(XYZ) = \underset{XYZ}{S} F(T(XY), Z) \tag{24}$$

unde dF reprezintă diferenţiala exterioară a lui F.

Înlocuind (T) din (15) în (24) obţinem,

$$(3dF)(XYZ) = \frac{2}{2n+1} \underset{XYZ}{S} t(X)F(Y, Z) \tag{25}$$

Fie tensorul A definit prin,

$$A(X, Y) = -\frac{2}{2n+1} (t(Y)JX + t(X)JY - F(XY)K) \tag{26}$$

Obţinem

$$g(A(XY), Z) = (3dF)(XYZ) \tag{27}$$

PROPOZIŢIA 3. Dacă pe o structură A_2 conexiunea D este η-semi-simetrică şi are proprietatea (23) atunci avem relaţia (27) unde A este definit prin (26).

Dacă pe structura A_2 conexiunea D este metrică, avem:

$$2g(D_XY, Z) = 2g(\nabla_XY, Z) + g(T(XY), Z) + g(T(Z, X), Y) - g(T(YZ), X) \tag{28}$$

unde ∇ este conexiunea riemanniană asociată lui g. Relaţia (28) constituie o condiţie necesară şi suficientă ca D să fie metrică

$$Dg = 0 \tag{29}$$

Rezultă relaţiile

$$\begin{aligned} 2g(Y, (D_XJ)Z) &= 2g(Y, (\nabla_XJ)Z) + g(T(X, Z), JY) - \\ &- g(T(Z, JY), X) + g(T(JY, X), Z) - g(T(X, Y), JZ) + \\ &+ g(T(Y, JZ), X) - g(T(JZ, X), Y) \end{aligned} \tag{30}$$

PROPOZIŢIA 4. Dacă D este metrică pe o structură A_2, atunci avem relaţiile (30).

Dacă punem condiţia ca D să fie η-semi-simetrică, înlocuind T din (15) în (30) vom obţine

$$\begin{aligned} (D_XF)(Y, Z) &= (\nabla_XF)(Y, Z) + \frac{1}{2n+1}(t(Z)g(JY, X) - t(Y)g(JZ, X) + \\ &+ t(JZ)g(XY) - t(JY)g(Z, X)) \end{aligned} \tag{31}$$

PROPOZIŢIA 5. Dacă D este metrică şi η-semi-simetrică pe o structură A_2, atunci avem relaţia (31).

(Intrat în redacţie la 1 februarie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Sasaki, S., *On diff. manif. with certain structures*, Tohoky Math. J., **12** (1960), 459–476.
2. Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of diff. geometry*, Int. Publ., **I**, 1963.
3. Masafumi Okumura, *Some remark on space with a certain contact structure*, Tohoky Math. J., (1962), 135–145.
4. Mishra, R. S., *On a Hermit space*, Tensor, **19**, nr. 1 (1968).

η-КОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ

(Резюме)

Пусть V_{2n+1} дифференцируемое многообразие с метрической почтиконтактной структурой $A_2 = (J, \eta, E, g)$ (1).

Автор определяет η-копараллельную связность (определение 1), η-полусимметричную связность (определение 2) на метрической почтиконтактной структуре и изучает их свойства. Получаются предложения 1—5 и теоремы 1—2.

η CONNEXIONS-COPARALLÈLES

(Résumé)

Soit V_{2n+1} une variété différentiable à une structure métrique presque de contact $A_2 = (J, \eta, E, g)$ (1).

Le but de ce travail est de définir la connexion η-coparallèle (déf. 1), la connexion η-semi-symétrique (déf. 2) sur une structure métrique presque de contact et de définir leurs propriétés. On obtient les propositions 1—5 et les théorèmes 1—2.

CLOSURE CONDITIONS DERIVED FROM ITERATED FUNCTIONS

M. A. TAYLOR*

As part of their work on involutory functions, Aczél and Radó [2] have described a family of closure conditions derived by considering the geometric properties of the functions. This opens up the possibility of characterizing iterative operations on sets algebraically in terms of the structure induced on the sets by the iteration.

In this paper some of the questions raised by Aczél and Radó in [2] are answered, at least partially.

1. Consider a set S partitioned into three subsets X, Y, Z which we will call line sets and their members X-, Y- and Z-lines respectively. A ternary relation $|\ \ |$, defined on S, is called a *concurrency relation* if $|\, l_1, l_2, l_3\, |$ implies $|\, l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}\, |$ where σ is any permutation of $\{1, 2, 3\}$, and no two of the lines l_1, l_2, l_3 are from the same line set. The notation defined by

$$L(l_1, l_2) = \{l_3 : |\, l_1, l_2, l_3\, |\}$$

is read as „the lines through the intersection of l_1 and l_2".

The quadruplet $(X, Y, Z, |\ \ |)$ consisting of the line sets and the concurrency relation is called a *net* when

a) For all $x \in X$, $y \in Y$ there exists a unique $z \in Z$ such that $L(x, y) = z$. (For convenience we identify singleton sets with their elements.)

b) There exist lines x_0, y_0 with the property that $y \xrightarrow{f_1} L(x_0, y)$, $x \xrightarrow{f_2} L(x, y_0)$ define bijections $f_1 : Y \to Z$, $f_2 : X \to Z$.

A net is said to be *triangular* if there exists $z_0 \in Z$ such that $x \xrightarrow{f_3} L(z_0, x)$ and $y \xrightarrow{f_4} L(z_0, y)$ are bijections $f_3 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$, $f_4 = f_3^{-1}$.

The lines x_0, y_0, z_0 are called the *axes* of the net, and nets will be denoted by triples (X, Y, Z), without the concurrency relation.

A real-plane prototype for a net is the cartesian coordinate lines (with axes $x = 0$, $y = 0$) together with a third family of lines such that one and only one member of the third family passes through a point of intersection of two coordinate lines and every line of the third family cuts the axes $x = 0$, $y = 0$ in exactly one point. If there is a member of the third family which cuts each coordinate line once and only once then this line can be taken as the third axis and the net is triangular.

We are now in a position to define the iterative closure condition I_n.

Let (X, Y, Z) be a triangular net, then the I_n *closure condition* (or I_n) is said to hold in a net if for all $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$, $L(x_1, y_0) = L(x_0, y_1)$, $L(z_0, y_1) = x_2, \ldots, L(x_k, y_0) = L(x_0, y_k)$, $L(z_0, y_k) = x_{k+1}, \ldots, L(x_n, y_0) = L(x_0, y_n)$ together imply that $L(z_0, y_n) = x_1$.

The function f composed with itself n times will be denoted by f^n.

* Wolfville, Nova Scotia, Canada.

THEOREM 1. *I_n holds in a triangular net if and only if $F^n = i_x$ where $F = f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2$ and i_x is the identity map on X.*

Proof. The hypothesis of I_n may be written $f_2(x_1) = f_1(y_1)$, $f_4(y_1) = x_2$, $\ldots, f_2(x_k) = f_1(y_k)$, $f_4(y_k) = x_{k+1}, \ldots, f_2(x_n) = f_1(y_n)$ or, as all the functions are bijections
$f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2(x_1) = x_2, \ldots, f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2(x_k) = x_{k+1}, \ldots, f_1^{-1} \circ f_2(x_n) = y_n$.
Writing $F = f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2$, the hypothesis then becomes $f_1^{-1} \circ f_2 \circ F^{n-1}(x_1) = y_n$. If I_n holds in the net then $f_4(y_n) = x_1$, which gives

$$f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2 \circ F^{n-1}(x_1) = x_1 \text{ i.e. } F^n(x_1) = x_1.$$

Clearly the argument may be reversed to complete the theorem.

For any net (X, Y, Z) with axes x_0, y_0, it is possible to define a groupoid $(Z, \cdot)$ by $z_1 z_2 = L(L(z_1, y_0), L(x_0, z_2))$ [4].

This groupoid has a unit $e = L(x_0, y_0)$.

THEOREM 2. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a triangular net with axes x_0, y_0, z_0. Then I_n holds in N if and only if for all $z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$*

$$\left.\begin{array}{r} z_2 z_1 = z_0 \\ \cdots \\ z_{k+1} z_k = z_0 \\ \cdots \\ z_n z_{n-1} = z_0 \end{array}\right\} \textit{imply } z_1 z_n = z_0$$

Proof. Suppose I_n holds in N. Define $L(x_i, y_0) = L(x_0, y_i) = z_i$, $i = 1, \ldots n$, then $z_{k+1} z_k = L(L(z_{k+1}, y_0), L(z_k, x_0)) = L(x_{k+1}, y_k)$. As $L(z_0, y_k) = x_{k+1}$, it then follows that $z_{k+1} z_k = z_0$. So the hypothesis of I_n may be written $z_{k+1} z_k = z_0$, $k = 1, \ldots n - 1$. The implication of I_n is $L(z_0, y_n) = x_1$. Consider $z_1 z_n = L(L(z_1, y_0), L(z_n, x_0)) = L(x_1, y_n) = z_0$, which is the required result.

The converse is easily established by defining

$$x_k = L(z_k, y_0),\ y_k = L(z_k, x_0)\ k = 1, \ldots, n.$$

The *Thomsen condition* (or T) is said to hold in a net (X, Y, Z) if for all $x_i \in X$, $y_i \in Y$ $(i = 1, 2, 3)$

$$L(x_1, y_2) = L(x_2, y_1) \text{ and } L(x_3, y_1) = L(x_1, y_3) \text{ imply } L(x_2, y_3) = L(x_3, y_2).$$

Aczél and Radó recognized the similarity between the I_2 condition and T [2].

THEOREM 3. *If T holds in a triangular net (X, Y, Z) then I_2 also holds.*

Proof. Assume, $L(x_1, y_0) = L(x_0, y_1)$, $L(z_0, y_1) = x_2$, $L(x_2, y_0) = L(x_0, y_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, then, $L(x_1, y_2) = L(x_2, y_1)$, as T holds. However, $L(x_2, y_1) = z_0$ so $L(x_1, y_2) = z_0$. Consequently, $L(z_0, y_2) = x_1$, and I_2 holds in the net.

The Thomsen condition is of special significance in net theory as the following theorem shows. A proof of this theorem is essentially contained in [4].

THEOREM 4. *A necessary and sufficient condition for T to hold in a triangular net is that $(Z, \cdot)$ be an abelian group.*

Thus we see that I_2 holds in those nets for which $(Z, \cdot)$ is an abelian group.

THEOREM 5. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a triangular net for which $(Z, \cdot)$ is a commutative groupoid, then I_2 holds in N.*

Proof. That I_2 holds in N is equivalent to

$$z_2 z_1 = z_0 \text{ implies } z_1 z_2 = z_0, \ z_1, z_2 \in Z$$

Commutativity of $(Z, \cdot)$ is sufficient to ensure the condition.

Even the commutativity of $(Z, \cdot)$ is stronger than required for the above theorem as only those members of Z whose product is equal to z_0 need commute. If we require every z-line to be an axis (in which case $(Z, \cdot)$ will be a quasigroup) and I_2 to hold for all these axes, then $(Z, \cdot)$ will have to commute, but even then it need not be an abelian group. (See the remarks following the next theorem.)

THEOREM 6. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a triangular net for which $(Z, \cdot)$ is a groupid with the properties*

a) *Every $z \in Z$ has a unique inverse z^{-1}.*

b) *For all $z, w \in Z$, $z^{-1}(zw) = w = (wz)z^{-1}$.*

c) *For all $z, w \in Z$, $(zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1}$.*

Then I_4 holds in N if and only if $(z_0{}^{-1}z_1)z_0 = z_0(z_1 z_0^{-1})$, for all $z_1 \in Z$.

Proof. Suppose $z_2 z_1 = z_3 z_2 = z_4 z_3 = z_0$, $z_i \in Z (i = 1, 2, 3, 4)$. Then, $z_2 = z_0 z_1^{-1}$, $z_3 = z_0(z_1 z_0^{-1})$ and $z_4 = z_0[(z_0 z_1^{-1})z_0^{-1})]$. If $(z_0^{-1}z_1)z_0 = z_0(z_1 z_0^{-1})$, then $z_0^{-1}(z_1^{-1}z_0) = (z_0^{-1}z_1^{-1})z_0^{-1}$, by *c*). Consequently, $z_4 = z_0[z_0^{-1}(z_1^{-1}z_0)] = z_1^{-1}z_0$. Hence, $z_1 z_4 = z_0$,

Conversely, if $z_4 = z_0[(z_0 z_1^{-1})z_0^{-1}]$ and $z_1 z_4 = z_0$ then $z_0[(z_0 z_1^{-1})z_0^{-1}] = z_1^{-1}z_0$ and $(z_0 z_1^{-1})z_0^{-1} = z_0^{-1}(z_1^{-1}z_0)$ which gives the required result.

If $N = (X, Y, Z)$ is a net with axes x_0, y_0 in which I_n holds whatever z-line is taken as the third axis, then we say that I^n holds in N. We then have the following corollary to Theorem 6.

COROLLARY 1. *If $N = (X, Y, Z)$ is a net for which $(Z, \cdot)$ is a Moufang loop with the property that $xy^2 = y^2x$ for all $x, y \in Z$, then I_4 holds in N.*

Proof. Suppose $(Z, \cdot)$ is a Moufang loop which satisfies $xy^2 = y^2x$ for all $x, y \in Z$. As $(Z, \cdot)$ is a Moufang loop it follows that $(xy)y = y(yx)$ for all $x, y \in Z$. Putting $x = y^{-1}t$, $t \in Z$, gives $[(y^{-1}t)y]y = y(y(y^{-1}t)]$ so $[(y^{-1}t)y]y = yt$ and $(y^{-1}t)y = (yt)y^{-1}$. Any Moufang loop satisfies a), b) and c) of Theorem 6, hence it now follows that I holds in N.

Theorem 6 and its corollary answer one of the questions posed by Aczél and Radó in [2], which is (in our terminology) „If I^4 holds in a net is $(Z, \cdot)$ necessarily a group?" There exist commutative Moufang loops which are not groups [3, p. 130], and consequently nets fulfilling the conditions of Theorem 6 can be constructed by methods given in [1] or [4].

We do not know examples of non-commutative Moufang loops which are not groups that satisfy the identity $xy^2 = y^2x$; nor do we know of any reason why such loops should not exist.

2. We have mentioned the conditions I_2 and I_4 but not I_3. The reason why is explained by the next theorem.

THEOREM 7. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a net with axes x_0, y_0, z_0 such that $L(x_0, y_0) \neq z_0$. Then I_n cannot hold in N if $n = 2p + 1$, $p = 1, 2, \ldots$.*

Proof. Let $x_1 = L(y_0, z_0)$, $y_1 = L(x_0, z_0)$; then we have a sequence of equations in which, the $(2k + 1)^{\text{th}}$ pair of equations is $L(x_0, y_0) = L(x_0, y_0)$, $L(z_0, y_0) = x_1$ and the $2\,k^{\text{th}}$ pair of equations is $L(x_1, y_0) = L(x_0, y_1)$, $L(z_0, y_1) = x_0$. If I_n holds in the net then the system of equations imply $L(y_n, z_0) = x_0$, where $y_n = y_1$ if $n = 2p$, $y_n = y_0$ if $n = 2p + 1$, $p = 1, 2, 3 \ldots$ In the latter case $L(y_0, z_0) = x_0$ leads to the contradiction that $L(x_0, y_0) = z_0$.

COROLLARY 2. *If I^{2p+1} holds in a triangular net then each line set contains one and only one line.*

THEOREM 8. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a net with axes x_0, y_0, z_0 and for which $(Z, \cdot)$ is a group. I_{2p} will hold in N if and only if $z_0^p z = z z_0^p$ for all $z \in Z$.*

Proof. Consider the hypothesis of I_{2p}, that is, $z_{k+1}z_k = z_0$, $z_{k+1}, z_k \in Z$, $k = 1, 2, \ldots z_{p-1}$.

We first show by induction that $z_{2i} = z_0^i z_1^{-1} z_0^{-i+1}$, $i = 1, 2, \ldots p$. Assume $z_{2k} = z_0^k z_1^{-1} z_0^{-k+1}$; then $z_{2k+1}z_{2k} = z_0$ implies $z_{2k+1} = z_0(z_0^k z_1^{-1} z_0^{-k+1})^{-1} = z_0^k z_1 z_0^{-k}$. However, $z_{2(k+1)}z_{2k+1} = z_0$. Therefore, $z_{2(k+1)} = z_0^{k+1} z_1^{-1} z_0^{-(k+1)+1}$. Initially, $z_2 = z_0 z_1^{-1} = z_0^{0+1} z_1^{-1} z^{-1+1}$, as $z_0^0 = e$. So $z_{2k} = z_0^k z_1^{-1} z_0^{-k+1}$ follows from the hypothesis of I_{2p}.

Suppose that I_{2p} holds in the net, then, $z_{2p} = z_0^p z_1^{-1} z_0^{-p+1}$ and $z_1 z_{2p} = z_0$, $z_1 \in Z$. Hence, $z_1 z_0^p z_1^{-1} z_0^{-p+1} = z_0$, i.e. $z_1 z_0^p = z_0^p z_1$.

Conversely, if we presume the hypothesis of I_{2p} and $z_1 z_0^p = z_0^p z_1$ for all $z_1 \in Z$, then $z_{2p} = z_0^p z_1^{-1} z_0^{-p+1}$ and, $z_1 z_{2p} = z_1(z_0^p z_1^{-1}) z_0^{-p+1} = z_1(z_1^{-1} z_0^p) z_0^{-p+1} = z_0$.

COROLLARY 3. *Let $N = (X, Y, Z)$ be a net for which $(Z, \cdot)$ is a group, then I^{2p} holds in N if and only if $xy^p = y^p x$ for all $x, y \in Z$.*

COROLLARY 4. (Aczél and Radó). *Let $N = (X, Y, Z)$ be a net for which $(Z, \cdot)$ is a group, then I^4 holds in N if and only if $(xy)^2 = (yx)^2$ for all $x, y \in Z$.*

Proof. Suppose $(xy)^2 = (yx)^2$, for all $x, y \in Z$. Put $xy = t$ in the identity to give $t^2 = ytx$, hence $t^2 y = ytxy = yt^2$, for all $y, t \in Z$. Thus I^4 holds in N.

The converse is obtained by reversing the argument.

(Received September 27, 1973)

REFERENCES

1. Aczél, J., *Quasigroups, Nets and Nomograms*, Advances in Math., 1 (1965), 383—450.
2. Aczél, J. and Radó, F., *Involutory Functions Induced by Abelian Groups*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2, 1974, 32—40.
3. Bruck, R. H., *A Survey of Binary Systems*, Springer-Verlag, 1958.
4. Taylor, M. A., *Cartesian Nets and Groupoids*. Canad. Math. Bull. 16 (1973), 347—362.

CONDIŢII DE ÎNCHIDERE REZULTATE DIN FUNCŢII ITERATE

(Rezumat)

Se studiază ţesuturile triunghiulare care verifică iterarea condiţiei de închidere Thomsen. Se caracterizează operaţiile iterative corespunzătoare în structura algebrică indusă de ţesut.

УСЛОВИЯ ЗАМЫКАНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ ОТ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Изучаются треугольные ткани, удовлетворяющие итерации условия замыкания Томсена. Характеризуются соответствующие итеративные операции в алгебраической структуре, индуктированной тканью.

O PROPRIETATE A PRODUSULUI OMOMORF DE MĂSURI HAAR

CONSTANȚA MOCANU

Fie G şi K două grupuri topologice local compacte şi $\varphi : G \to K$ un epimorfism continuu deschis. Să notăm $H = \text{Ker}\ (\varphi)$. Vom mai nota cu x, y, z elementele generice ale grupurilor G, H, K. Fie dy şi dz măsuri Haar invariante la stînga, respectiv pe grupurile H şi K. Fiind date aplicaţia φ şi măsurile dy, dz, se construieşte pe grupul G o măsură Haar invariantă la stînga, numită produs omomorf al măsurilor dy şi dz, notată $dx = dy \otimes dz$, în felul următor [1]:

Fie $f \in \mathcal{K}(G)$, unde prin $\mathcal{K}(E)$ se notează spaţiul vectorial al funcţiilor continue cu suport compact definite pe spaţiul topologic local compact E. Se arată că funcţiei f îi corespunde o funcţie unică $\bar{f} \in \mathcal{K}(K)$, ce verifică condiţia

$$\forall x \in G, \quad \bar{f}[\varphi(x)] = \int_H f(xy)\, dy. \tag{1}$$

Se defineşte măsura dx prin formula

$$\forall x \in \mathcal{K}(G), \ \int_G f(x) dx = \int_K \bar{f}(z)\, dz \tag{2}$$

Evident că măsura dx depinde de epimorfismul φ. Este natural de a vedea ce efect asupra produsului omomorf îl poate avea schimbarea epimorfismului φ, cu condiţia ca nucleul H să rămînă neschimbat.

Anume, pentru orice $s \in G$ vom considera epimorfismul $\varphi_s : G \to K$, dat de formula

$$\forall x \in G, \quad \varphi_s(x) = \varphi(s^{-1}\, x\, s).$$

În acest caz, avem $H = \text{Ker}\ \varphi_s$, întrucît $\varphi_s(x) = \varphi(s)^{-1}\varphi(x)\,\varphi(s)$. Pentru un $s \in G$ fixat, vom nota $\bar{f}^s$ funcţia din $\mathcal{K}(K)$, ce verifică condiţia

$$\forall x \in G, \quad \bar{f}^s[\varphi_s(x)] = \int_H f(xy)\, dy. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) deducem

$$\bar{f}^s \circ \varphi_s = \bar{f} \circ \varphi, \qquad \forall s \in G. \tag{4}$$

Vom nota $d^s x$ măsura Haar corespunzătoare epimorfismului φ_s. Avem

$$\int f(x)\, d^s x = \int \bar{f}^s(z)\, dz.$$

Întrucît $d^s x$ este o măsură invariantă la stînga, rezultă că ea este proporţională cu dx, deci

$$\int f(x)\, d^s x = \lambda(s) \int f(x)\, dx, \tag{5}$$

unde λ este o funcţie pozitivă definită pe G.

Vom arăta că avem

$$\lambda(s) = \Delta_r^K [\varphi(s)], \tag{6}$$

unde Δ_r^K este funcţia modulară la dreapta a grupului K:

$$f \in \mathcal{K}(K), \quad \int (ft)(z)\, dz = \int f(zt^{-1}) dz = \Delta_r^K(t) \int f(z)\, dz.$$

Pentru a demonstra formula (6), vom stabili mai întîi formula

$$\bar{f}^s = \varphi(s)^{-1} \bar{f} \varphi(s). \tag{7}$$

În adevăr, avem

$$\bar{f}^s [\varphi_s(x)] = \bar{f}^s [\varphi(s)^{-1} \varphi(x)\, \varphi(s)] = (\varphi(s)\, \bar{f}^s)\, (\varphi(x)\, \varphi(s)) = (\varphi(s)\, \bar{f}^s \varphi(s)^{-1})\, (\varphi(x)),$$

deci

$$\bar{f}^s \circ \varphi_s = [\varphi(s)\, \bar{f}^s \varphi(s)^{-1}] \circ \varphi. \tag{8}$$

Din (4) şi (8) se deduce

$$\varphi(s)\, \bar{f}^s \varphi(s)^{-1} = \bar{f},$$

de unde se obţine formula (7).

Ţinînd seama de formula (7), avem succesiv

$$\int f(x)\, d^s x = \int \bar{f}^s(z) dz = \int [\varphi(s)^{-1} \bar{f} \varphi(s)]\, (z)\, dz = \int (\bar{f} \varphi(s))\, (z)\, dz =$$

$$= \Delta_r^K [\varphi(s)] \int \bar{f}(z)\, dz = \Delta_r^K [\varphi(s)] \int f(x)\, dx,$$

de unde rezultă formula (6).

Notînd

$$d^s x = dy \otimes_s dz,$$

formula (6) se mai scrie

$$dy \otimes_s dz = \Delta_r^K [\varphi(s)]\, dy \otimes dz.$$

Din acest rezultat, se deduce următoarea proprietate:

Pentru ca produsul omomorf $dy \otimes_s dz$ să nu depindă de epimorfismul φ_s este necesar şi suficient ca grupul K să fie unimodular.

(Intrat în redacţie la 15 noiembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Leopoldo Nachbin, *The Haar Integral*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J. (1965).

ОДНО СВОЙСТВО ГОМОМОРФНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МЕР ХААРА

(Резюме)

Пусть G и K — две локально компактные группы и $\varphi: G \to K$-открытый непрерывный эпиморфизм с ядром $H = \ker(\varphi)$. Пусть dy и dz — инвариантные меры Хаара слева на группах H, соответственно K. На группе G строится инвариантная мера Хаара слева $dx = dy \otimes dz$, названная гомоморфным произведением мер dy и dz [1], соответствующим эпиморфизму φ. Для любого $s \in G$ рассматривается эпиморфизм $\varphi_s: G \to K$, данный соотношением $\varphi_s(x) = \varphi(s^{-1}xs)$, $x \in G$. Очевидно имеется $H = \ker(\varphi_s)$. Обозначается через $dy \otimes_s dz$ гомоморфное произведение мер dy и dz, которое соответствует φ_s. Показано, что $dy \otimes_s dz = \Delta_r^K(s)\, dy \otimes dz$, где Δ_r^K является модулярной функцией справа группы K. В частности, для того, чтобы произведение $dy \otimes_s dz$ не зависело от φ_s, необходимо и достаточно, чтобы группа K была унимодулярной.

UNE PROPRIÉTÉ DU PRODUIT HOMOMORPHE DE MESURES HAAR

(Résumé)

Soient G et K deux groupes locaux compacts et $\varphi: G \to K$ un épimorphisme continu ouvert à noyau $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Soient dy et dz des mesures Haar invariantes à gauche sur les groupes H respectivement K. Sur le groupe G on construit une mesure Haar invariante à gauche $dx = dy \otimes dz$, nommée produit homomorphe des mesures dy et dz [1] correspondant à l'épimorphisme φ. Pour tout $s \in G$ on considère l'épimorphisme $\varphi_s: G \to K$ donné par $\varphi_s(x) = \varphi(s^{-1}xs)$, $x \in G$. On a évidemment $H = \ker(\varphi_s)$. On note avec $dy \otimes_s dz$ le produit homomorphe des mesures dy et dz correspondant à φ_s. On montre que $dy \otimes_s dz = \Delta_r^K(s) dy \otimes dz$, où Δ_r^K est la fonction modulaire à droite du groupe K. En particulier, pour que le produit $dy \otimes_s dz$ ne dépende pas de φ_s, il est nécessaire et suffisant que le groupe K soit unimodulaire.

NOTE SUR LES ENSEMBLES H-LISSES

IOAN MUNTEAN

Les ensembles H-lisses (ou bien H-convexes) ont été introduites par T. Precupanu [2] pour la recherche des espaces vectoriels topologiques dont la topologie est donnée par une famille de produits scalaires. Dans cette note on donne des conditions suffisantes de convexité et de convexité stricte des ensembles H-lisses. Comme application des ces résultats, on obtient une caractérisation des normes engendrées par un produit scalaire.

1. Soit X un espace vectoriel sur le corps K des nombres réels ou complexes.

On dit qu'une partie Y de X est *H-lisse* si pour tous les $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ et $y \in \beta Y$ il existe $\alpha_1 \geqslant 0$ et $\beta_1 \geqslant 0$ tels que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $x + y \in \alpha_1 \cdot Y$ et $x - y \in \beta_1 \cdot Y$. On voit bien que l'ensemble Y des points rationnels de l'intervalle $[-1, 1]$ de l'axe réel n'est pas convexe. Néanmoins, Y est H-lisse car, si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ et $y \in \beta Y$, on peut prendre $\alpha_1 = |x + y|$ et $\beta_1 = |x - y|$. Il est donc intéressant de chercher des conditions assurant la convexité ou même la convexité stricte des ensembles H-lisses.

On dit qu'une partie Y de X est *absorbante* si pour tout $x \in X$ il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda Y$. Une partie Y de X est dite *équilibrée* si pour tout $\lambda \in K$, avec $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\lambda Y \subset Y$. La fonctionnelle $p_Y : X \to R$, associée à une partie absorbante Y de X et donnée par l'égalité $p_Y(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda Y\}$, est la *fonctionnelle de Minkowski* à support Y.

La proposition qui suit a été établie par T. Precupanu [2], pag. 85—88:

PROPOSITION A. Si Y est une partie absorbante, équilibrée et H-lisse de X, alors la fonctionnelle de Minkowski p_Y à support Y possède les propriétés suivantes:

$$p_Y(\lambda x) = |\lambda| p_Y(x) \text{ pour tous } \lambda \in K \text{ et } x \in X; \tag{1}$$

$$\{x \in X : p_Y(x) < 1\} \subset Y \subset \{x \in X : p_Y(x) \leqslant 1\}, \tag{2}$$

$$p_Y^2(x) + p_Y^2(y) = \frac{1}{2}[p_Y^2(x + y) + p_Y^2(x - y)] \text{ pour tous } x, y \in X, \tag{3}$$

$$p_Y(x + y) \leqslant p_Y(x) + p_Y(y) \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{4}$$

2. On dit qu'une partie Y de X est *radiairement bornée* si pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, on peut trouver un $y \in X$, $y \neq 0$, tel que $Y \cap R_+ x \subset [0, y]$, où $R_+ x = \{\alpha x : \alpha \geqslant 0\}$ et $[0, y] = \{\alpha y : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

PROPOSITION B. Si Y est une partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée de X, alors la fonctionnelle de Minkowski p_Y à support Y est une norme sur X.

Démonstration. Les relations (1) et (4) montrent que p_Y est une semi-norme sur X. S'il existait un $x \in X$, $x \neq 0$, tel que $p_Y(x) = 0$, alors on aurait

$$R_+x \subset Y \text{ et } R_+x \not\subset [0, y] \text{ pour tout } y \in X,\ y \neq 0. \tag{5}$$

En effet, pour établir la première relation de (5), soit $z = \alpha x \in R_+x$, $\alpha \geqslant 0$; alors $p_Y(z) = \alpha p_Y(x) = 0$ et de (2) on tire $z \in Y$. Pour établir la deuxième relation de (5) on suppose le contraire: il existe un $y \in X$, $y \neq 0$, tel que $R_+x \subset [0, y]$; alors $x = \alpha y$, $0 < \alpha \leqslant 1$, d'où on arrive à la contradiction $2y = \frac{2}{\alpha} x \in R_+x \setminus [0, y]$. Maintenant de (5) il vient que $Y \cap R_+x = R_+x \not\subset [0, y]$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Y d'être radiairement borné. Par conséquent, p_Y est une norme sur X.

Une partie absorbante et équilibrée Y de X est dite *strictement convexe* si pour tous $x, y \in Y$, $x \neq y$, et $t \in \,]0, 1[$, on a $p_Y[tx + (1 - t)y] < 1$.

PROPOSITION C. Toute partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée Y de X est strictement convexe.

Démonstration. a) Montrons d'abord que pour tous $x, y \in X$, avec $p_Y(x) \leqslant 1$, $p_Y(y) \leqslant 1$ et $x \neq y$, on a $p_Y\left[\frac{1}{2}(x + y)\right] < 1$. En effet, compte tenu de Proposition B, on trouve $p_Y(x - y) > 0$ et de (3) on peut conclure que

$$p_Y^2\left[\frac{1}{2}(x + y)\right] = \frac{1}{2}\left[p_Y^2(x) + p_Y^2(y)\right] - p_Y^2\left[\frac{1}{2}(x - y)\right] <$$
$$< \frac{1}{2}\left[p_Y^2(x) + p_Y^2(y)\right] \leqslant 1.$$

b) Ensuite on va prouver que pour tous $x, y \in X$, avec $p_Y(x + y) = p_Y(x) + p_Y(y)$, il existe $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha x = \beta y$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $x \neq 0$ et que $p_Y(x) \leqslant p_Y(y)$. Alors

$$p_Y\left[\frac{x}{p_Y(x)} + \frac{y}{p_Y(y)}\right] \geqslant p_Y\left[\frac{x}{p_Y(x)} + \frac{y}{p_Y(x)}\right] -$$
$$- p_Y\left[\frac{y}{p_Y(x)} - \frac{y}{p_Y(y)}\right] = \frac{p_Y(x) + p_Y(y)}{p_Y(x)} - p_Y(y)\left[\frac{1}{p_Y(x)} - \frac{1}{p_Y(y)}\right] = 2. \tag{6}$$

Pour les éléments $x' = \frac{x}{p_Y(x)}$ et $y' = \frac{y}{p_Y(y)}$ on a $p_Y(x') = p_Y(y') = 1$ donc $x' = y'$ car, autrement, de a) on tire $p_Y\left[\frac{1}{2}(x' + y')\right] < 1$ ce qui contredit (6).

c) Enfin, nous allons montrer que Y est strictement convexe. Pour cela, soient $x, y \in Y$, $x \neq y$, et $t \in \,]0, 1[$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $p_Y(x) = p_Y(y) = 1$. Si l'on avait $p_Y(tx + (1 - t)y) \geqslant 1$, les relations (1), (2) et (4), impliqueraient $p_Y(tx + (1 - t)y) = 1$. Pour

$x' = tx$ et $y' = (1-t)y$ on a donc $p_Y(x') + p_Y(y') \geqslant p_Y(x' + y') = p_Y(tx + (1-t)y) = 1 = t + (1-t) \geqslant tp_Y(x) + (1-t)p_Y(y) = p_Y(x') + p_Y(y')$ et, par conséquent, $p_Y(x' + y') = p_Y(x') + p_Y(y')$. En vertu de l'étape b) de la démonstration, il existe $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$, tels que $\alpha x' = \beta y'$. Par suite, $\alpha t p_Y(x) = \beta(1-t)p_Y(y)$ et $\alpha = \frac{1-t}{t}\beta$, donc $x = y$; mais ceci est impossible puisque $x \neq y$.

Remarques. a) Comme la convexité est impliquée par la convexité stricte, tout ensemble Y vérifiant les hypothèses de la Proposition C est convexe.

b) Considérons le plan réel R^2 muni de la norme $||\cdot||_p$, donnée par $||x||_p = (|x^1|^p + |x^2|^p)^{1/p}$, où $x = (x^1, x^2) \in R^2$, $1 \leqslant p < 2$. L'ensemble $Y_p = \{x \in R^2 : ||x||_p \leqslant 1\}$ est une partie absorbante, équilibrée et radiairement bornée de R^2. Cet ensemble n'est pas H-lisse car, pour $\alpha = \beta = 1$, $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$, les relations $x + y \in \alpha_1 Y_p$ et $x - y \in \beta_1 Y_p$ impliquent $\alpha_1 \geqslant 2^{1/p}$ et $\beta_1 \geqslant 2^{1/p}$, ce qui conduit à la contradiction $4 < 2 \cdot 2^{2/p} \leqslant \alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2 \cdot 2$. Néanmoins, pour $1 < p < 2$ l'ensemble Y_p est strictement convexe. En effet, comme il est bien connu, l'égalité $||x + y||_p = ||x||_p + ||y||_p$ entraîne $\alpha x = \beta y$, avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta > 0$, et il suffit d'appliquer l'étape c) de la démonstration précédente.

3. Une norme p sur X est nommée *norme hilbertienne* s'il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ en X tel que $p(x) = \sqrt{(x|x)}$ pour tout $x \in X$.

PROPOSITION D. Pour qu'une fonctionnelle $p : X \to R$ soit une norme hilbertienne, il faut et il suffit que p coïncide avec la fonctionnelle de Minkowski dont le support est une partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée Y de X. Dans ce cas on peut prendre $Y = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$.

Démonstration. Soit p une norme hilbertienne et $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire en X tel que $p(x) = \sqrt{(x|x)}$. On sait que l'ensemble $Y = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\} = \{x \in X : \sqrt{(x|x)} \leqslant 1\}$ est absorbant, convexe, équilibré et radiairement borné et que $p = p_Y$ (cf. [3], pag. 118—120). Pour vérifier que Y est H-lisse, soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ et $y \in \beta Y$. En prenant $\alpha_1 = p(x + y) \geqslant 0$ et $\beta_1 = p(x - y) \geqslant 0$, il est facile à voir que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $x + y \in \alpha_1 Y$ et $x - y \in \beta_1 Y$.

Réciproquement, si p coïncide avec la fonctionnelle de Minkowski associée à une partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée Y de X alors, en tenant compte de la Remarque a), l'ensemble Y est convexe et $p = p_Y$ est une norme sur X (cf. [3], pag. 120). Si l'on pose

$$(x|y) = \frac{1}{4}\,[p^2(x + y) - p^2(x - y)] \text{ pour } K = R$$

et

$$(x|y) = \frac{1}{4}\,[p^2(x + y) - p^2(x - y) + ip^2(x + iy) - ip^2(x - iy)] \text{ pour } K = C,$$

alors on vérifie que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire [1] et que $p(x) = \sqrt{(x|x)}$, $x \in X$.

Remarque. De nouvelles contributions à l'étude des ensembles H-lisses seront publiées par T. Precupanu et l'auteur de cette note.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1973)

BIBLIOGRAPHIE

1. Jordan P. and J. von Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math., **36** (1935), 719–723.
2. Precupanu T., *Sur les produits scalaires dans des espaces vectoriels topologiques*, Revue Roumaine de Math. pures et appl., **13** (1968), 85–90.
3. Raikov, D. A., *Vektornye prostranstva*, Gosizdat. Fizmatlit., Moskva, 1962.

NOTĂ ASUPRA MULŢIMILOR H-NETEDE

(Rezumat)

O parte Y a unui spaţiu vectorial real sau complex se numeşte H-netedă dacă pentru orice $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ şi $y \in \beta Y$ există $\alpha_1 \geqslant 0$ şi $\beta_1 \geqslant 0$ astfel ca $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $x + y \in \alpha_1 Y$ şi $x - y \in \beta_1 Y$. În această notă se dau condiţii suficiente de convexitate şi de convexitate strictă a mulţimilor H-netede. Ca aplicaţie, se obţine o caracterizare a normelor generate de un produs scalar.

ЗАМЕТКА О H-ГЛАДКИХ МНОЖЕСТВАХ

(Резюме)

Говорят, что часть Y некоторого вещественного или комплексного векторного пространства является H-гладкой, если для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ и $y \in \beta Y$ существуют $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\beta_1 \geqslant 0$ такие, что $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $x + y \in \alpha_1 Y$ и $x - y \in \beta_1 Y$. В этой заметке даются достаточные условия выпуклости и строгой выпуклости H-гладких множеств. В качестве применения получается характеризация норм, происходящих из скалярного произведения.

L'APPROXIMATION DE LA FONCTION DE RÉPARTITION AVEC DES FONCTIONS SPLINE

ELENA OANCEA FRĂŢILĂ

Soit $\bar{X}$ une variable aléatoire discrète avec la distribution

$$\bar{X}\begin{Bmatrix} x_i \\ p_i \end{Bmatrix}_{i=0,\ldots,n}, \tag{1}$$

$x_i \in [a, b]$, $i = 0, \ldots, n$, $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, $p_i \geqslant 0$, $\Sigma p_i = 1$. Le schéma (1) représente en fait aussi une distribution d'échantillon, d'une variable aléatoire X_n, x_i étant les valeurs d'échantillon, et p_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, les fréquences relatives correspondantes.

La fonction de répartition de $\bar{X}$, respectivement la fonction des fréquences cumulées de X_n, est :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum\limits_0^{k-1} p_i, & x_{k-1} < x \leqslant x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum\limits_0^{n} p_i = 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{2}$$

On construit la fonction $\tilde{F}(x)$, $x \in [a, b]$ par le spline d'interpolation d'ordre deux sur la division $\Delta : x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, où $x_{n+1} > b$ et appartient à un voisinage de b, et $\tilde{F}(x_{n+1}) = 1$. Alors la fonction $\tilde{F}$ sur l'intervalle $[a, b]$, dans certaines conditions, approxime la fonction de répartition de la variable aléatoire $\bar{X}$, respectivement X_n. C'est à dire :

THÉORÈME 1. *Si* (1) *est une distribution d'une variable aléatoire discrète $\bar{X}$ où la distribution d'échantillon d'une variable aléatoire X_n, avec la fonction de répartition* (2), *alors il existe dans certaines conditions, le spline S_Δ, d'ordre deux :*

$$S_\Delta(x) = m_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - m_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \frac{y_j + y_{j-1}}{2} - \frac{h_j}{4}(m_j - m_{j-1}),$$

$x \in [x_{j-1}, x_j]$, où $\Delta : a = x_0, \ldots, x_n = b, \; x_{n+1}$; $m_j = S'_\Delta(x_j)$, $h_j = x_j - x_{j-1}$, $y_j = F_n(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n + 1$, et

$$\tilde{F}(x) = S_\Delta(x), \quad x \in [a, b],$$

qui est continue et nondécroissante sur $[a, b]$, en verifiant les conditions

$$S_\Delta(x_0) = \tilde{F}(x_0) = 0, \quad S_\Delta(x_{n+1}) = \tilde{F}(x_{n+1}) = 1.$$

Donc $S_\Delta(x)$, $x \in [a, b]$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire continue (théorique) X, associée à $\overline{X}$, vers laquelle $\overline{X}$ et X_n convergent en répartition, pour $n \to \infty$. Et par conséquent S'_Δ est la densité de probabilité.

Démonstration. 1. *La construction de la fonction F*. On considère la fonction

$$S'_\Delta(x) = m_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} + m_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \tag{3}$$

ou

$$S'_\Delta(x) = \frac{1}{h_j} [(m_j - m_{j-1})x + m_{j-1} x_j - m_j x_{j-1}].$$

Supposons $m_j \neq m_{j-1}$, et $m_j - m_{j-1} > 0$. Alors $(m_j - m_{j-1})/h_j$ est la pente de la droite définie par (3), donc $S'_\Delta(x)$ est croissante sur $[x_{j-1}, x_j]$. Pour que S'_Δ soit aussi nonnégative sur $[x_{j-1}, x_j]$ il faut que la racine d'équation

$$(m_j - m_{j-1})x + m_{j-1} x_j - m_j x_{j-1} = 0,$$

c'est à dire

$$x_{0j} = \frac{m_j x_{j-1} - m_{j-1} x_j}{m_j - m_{j-1}}$$

satisfasse l'une des conditions :

$$\text{I} \quad x_{0j} \leqslant x_{j-1} \qquad \text{ou} \qquad \text{II} \quad x_{0j} \geqslant x_j.$$

On observe que la condition I devient $m_{j-1}(x_j - x_{j-1}) \geqslant 0$ est satisfaite, si $m_{j-1} \geqslant 0$.
Dans le cas $m_j - m_{j-1} < 0$, la pente de la droite (3) est négative, S'_Δ est décroissante sur $[x_{j-1}, x_j]$ et la II-e condition est satisfaite : $m_j(x_j - x_{j-1}) \geqslant 0$ si $m_j \geqslant 0$.

Dans le cas $m = m_{j-1}$, $S'_\Delta(x) = const.$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$, c'est à dire la fonction $y = S'_\Delta$ ne change pas le signe sur $[x_{j-1}, x_j]$. Et l'on observe que $y = m_j$, donc y est nonnégative si $m_j \geqslant 0$.

Par conséquent, *la première condition* du Théorème 1 est : Pour que S'_Δ soit nonnégative sur $[x_{j-1}, x_j]$, m_j doit être nonnégatif $m_j \geqslant 0$, $j = 0, \ldots, n + 1$.

De (3) on obtient

$$S_\Delta(x) = m_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - m_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + C.$$

Mais $S_\Delta(x_j - o) = y_j$ $S_\Delta(x_{j-1} - o) = y_{j-1}$, c'est à dire :

$$y_j = \frac{m_j h_j}{2} + C, \qquad y_j = \frac{-m_{j-1} h_j}{2} + C, \tag{4}$$

d'où l'on peut déterminer la constante C, si

$$2(y_j - y_{j-1}) = h_j(m_j + m_{j-1}). \tag{5}$$

Dans ces conditions on a :

$$S_\Delta(x) = m_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - m_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} - \frac{h_j}{4}(m_j - m_{j-1}),$$

pour $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n + 1$. On observe que S_Δ est nondécroissante sur chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n + 1$, et parce que les valeurs y_j, $j = 0, 1, \ldots, n + 1$, sont aussi nondécroissantes, il résulte que S_Δ est nondécroissante sur $[a, b]$. Évidemment S_Δ est aussi continue sur $[a, b]$.

Aussi S'_Δ est continue sur (x_{j-1}, x_j) et dans les points x_j, $j = 1, \ldots$ $\ldots, n + 1$, car : $S'_\Delta(x_j - 0) = S'_\Delta(x_j + 0) = m_j$, ce qui résulte de (3).

Par conséquent, posant $S_\Delta(x) = \tilde{F}(x)$, $x \in [a, b]$ la fonction $\tilde{F}$ est continue et nondécroissante sur $[a, b]$, et la dérivation $S'_\Delta = \rho$, est aussi continue et nonnégative sur $[a, b]$, et

$$\int_a^{b+0} S'_\Delta(x)dx = 1.$$

Donc $S_\Delta(x)$, $x \in [a, b]$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X, associée à $\overline{X}$, respectivement à X_n, vers laquelle $\overline{X}$ et X_n convergent en répartition, pour $n \to \infty$ (voir [2]), et $S'_\Delta(x)$ est la densité de probabilité correspondante.

2. *L'existence et le calcul des valeurs m_j.* Le système d'équations pour déterminer les valeurs m_j obtenu de (5) est :

$$\begin{aligned}
m_0 + m_1 &= \frac{2}{h_1} y_1 (= p_0) \\
m_1 + m_2 &= \frac{2}{h_2}(y_2 - y_1)\ (= p_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_n + m_{n+1} &= \frac{2}{h_{n+1}}(y_{n+1} - y_n)(= p_n),\ (y_{n+1} = 1),
\end{aligned} \tag{6}$$

avec $n + 1$ équations et $n + 2$ inconnues.

D'où

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{2}{h_1} p_0 - m_0 \\
m_2 &= \frac{2}{h_2} p_1 - \frac{2}{h_1} p_0 + m_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_N &= \frac{2}{h_N} p_{N-1} - \frac{2}{h_{N-1}} p_{N-2} + \ldots + (-1)^{N-1} \frac{2}{h_1} p_0 + (-1)^N m_0,
\end{aligned}$$

où $N = n + 2$.

Le système d'équations (6) admet une infinité de solutions d'entre lesquelles correspondent au problème celles pour lesquelles $m_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, N$; ce qu'on montre au point 1. Et pour que $m_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, N$, on doit avoir:

$$2p_0 \geqslant m_0 h_1,\ m_0 \geqslant 0,\ p_1 h_1 \geqslant p_0 h_2,\ p_2 h_2 \geqslant p_1 h_3,$$
$$p_3 h_3 \geqslant p_2 h_4,\ \ldots\ p_{N-1} h_{N-1} \geqslant p_{N-2} h_N.$$

Par conséquent

$$p_k h_k \geqslant p_{k-1} h_{k+1},\ k = 1, \ldots, N-1, \qquad 2p_0 \geqslant h_1 m_0, \tag{7}$$

qui constituent des conditions suffisantes pour l'existence de la solution du problème posé. (Et ces conditions représentent la deuxième série de conditions du *Théoreme* 1.)

Particulièrement pour $h_j = h$, $j = 1, \ldots, N$, elles deviennent $p_{k-1} \leqslant p_k$. Par conséquent si les conditions (7) sont satisfaites, il existe la fonction de répartition $S_\Delta(x, m_0)$, $x \in [a, b]$, respectivement la densité $\rho = S'_\Delta$, et le Théorème 1 est démontré.

Remarques. 1. De la famille de densités $\rho(\cdot, m_0)$ on peut choisir celle pour laquelle $m_0 = 0$.

2. Pour le choix de ρ on peut donner encore une condition, tenant éventuellement compte des données du problème, ainsi que la fonction de densité passe par un point fixé α, c'est à dire: $S'(\alpha, m_0) = K$, où K est une constante, et cela détermine m_0.

3. Où la famille de densités $S'_\Delta(\cdot, m_0)$ contient le paramètre inconnu m_0, qui peut être déterminé, suivant les circonstances, par les méthodes connues d'estimation.

Le problème de la convergence. On désigne par Δ_k une division de l'intervalle $[a, b]$: $x_{0k}, x_{1k}, \ldots, x_{nk}$, et $x_{n+1k} > b$, x_{n+1k} appartenant à un voisinage de b. Et soit

$$||\Delta_k|| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n-1} h_{jk},\quad h_{jk} = x_{jk} - x_{j-1k}.$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire continue X, c'est à dire $F \in C^1[a, b]$, vers laquelle F_n converge pour $n \to \infty$. Alors:

THÉORÈME 2. *Si* $\{\Delta_k\}_{k \in N}$ *est une suite de divisions sur* $[a, b]$, *pour laquelle*

$$\lim_{k \to \infty} ||\Delta_k|| = 0,$$

et $x_{n+1k} \searrow b$, $k \to \infty$, *alors il existe dans les conditions du Théorème* 1, *la fonction* $S_{\Delta_k}(x, \lambda)$, $\lambda = m_0$, *définie par*:

$$S_{\Delta_k}(x, \lambda) = m_j(\lambda) \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - m_{j-1}(\lambda) \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \frac{y_j + y_{j-1}}{2} -$$
$$- \frac{h_j}{4} [m_j(\lambda) - m_{j-1}(\lambda)], \qquad x \in [x_{j-1}, x_j]$$

qui converge pour $k \to \infty$, uniformément relatif à $x \in [a, b]$, vers F et :

$$|F(x) - S_{\Delta_k}(x, \lambda)| \leqslant 0(||\Delta_k||), \quad x \in [a, b],$$

où θ est une fonction qui admet comme facteur Δ_k.

Démonstration. Puisque F est continue et dérivable sur $[a, b]$, pour $x \in (x_{j-1}, x_j)$, on a :

$$F(x) = F(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{1!} F'(\zeta), \; \zeta \in (x_{j-1}, x_j),$$

où $F(x_{j-1}) = F_n(x_{j-1}) = y_{j-1}$. Alors

$$|F(x) - S_{\Delta_k}(x, \lambda)| = |y_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{1!} F'(\zeta) - S_{\Delta_k}(x, \lambda)|.$$

Mais $S_{\Delta_k}(x, \lambda)$ est nondécroissante pour $x \in [a, b]$, donc

$$S_{\Delta}(x, \lambda) \geqslant S_{\Delta_k}(x_{j-1}, \lambda) = y_{j-1},$$

$x > x_{j-1}$, et $x - x_{j-1} \leqslant h_j$. Par conséquent

$$|F(x) - S_{\Delta_k}(x, \lambda)| \leqslant 0(||\Delta_k||)$$

et le théorème est démontré.

THÉORÈME 3. *Si $F(x) \in C^2[a, b]$, dans les conditions du théorème 1, la dérivation $S'_{\Delta_k}(x, \lambda)$ converge pour $k \to \infty$, uniformément relatif à $x \in [a, b]$, vers la densité de probabilité $\rho(x) = F'(x)$ de la variable aléatoire X, c'est à dire :*

$$|F'(x) - S'_{\Delta_k}(x, \lambda)| \leqslant 0(||\Delta_k||).$$

Démonstration. En appliquant la formule de Taylor, on a :

$$|F'(x) - S'_{\Delta_k}(x, \lambda) = |F'(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{1!} F''(z) - m_{j-1} - \frac{x - x_{j-1}}{1!} S''_{\Delta}(x_{j-1}, \lambda)$$

où $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $z \in (x_{j-1}, x_j)$.

Mais

$$|F'(x_{j-1}) - m_{j-1}| = q < \infty,$$

(q peut être aussi nul), par conséquent, il existe un nombre réel $r > 0$, tel que :

$$|F'(x_{j-1}) - m_{j-1}| \leqslant rh_j.$$

Alors

$$|F'(x) - S'_{\Delta_k}(x, \lambda)| \leqslant h_j(r + |F''(z) - S''_{\Delta_k}(x_{j-1}, \lambda)|)$$

ou

$$|F'(x) - S'_{\Delta_k}(x, \lambda)| \leqslant 0(||\Delta_k||),$$

et le théorème est démontré.

(Manuscrit reçu le 12 septembre 1973)

BIBLIOGRAPHIE

1. Ahlberg, J. H., E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The Theory of splines and their applications*, New-York and London, Academic Press, 1967.
2. Frăţilă, E., *Evaluarea măsurii de informaţie pe baza unei selecţii*, Stud. şi cerc. mat., Acad. R.S.R., Bucureşti, 1972, **24**, 4, 519—527.

APROXIMAREA FUNCŢIILOR DE REPARTIŢIE PRIN FUNCŢII SPLINE

(Rezumat)

Se construieşte, folosind o selecţie asupra unei variabile aleatoare continue X, sau distribuţia unei variabile aleatoare discrete, cu ajutorul funcţiilor spline, de ordinul doi, o funcţie care aproximează funcţia de repartiţie, respectiv densitatea de probabilitate, a lui X.

Se dau condiţii suficiente pentru existenţa funcţiei de repartiţie şi se studiază existenţa şi convergenţa funcţiei construite către funcţia de repartiţie teoretică a lui X.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ „SPLINE" ФУНКЦИЯМИ

(Резюме)

Автор строит, — используя селекцию от непрерывной случайной переменной X, или распределение дискретной случайной переменной, при помощи „spline" функций второго порядка, — одну функцию, которая приближает функцию распределения, соответственно плотность вероятности для X.

Даются достаточные условия для существования функции распределения и изучаются существование и сходимость построенной функции к теоретической функции распределения для X.

REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMEI STRATULUI LIMITĂ ÎN FORMA LUI MISES PRIN METODA DIFERENȚELOR FINITE. APLICAȚIE LA CILINDRUL CIRCULAR

DOINA BRĂDEANU

TEORIA PROBLEMEI

Introducere. Pentru studiul mișcării fluidului vîscos incompresibil în domeniul închis D al stratului limită laminar folosim ecuația lui Mises și condițiile la limită:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{du_1^2}{dx} + \nu\, u\, \frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{\psi}^2}, \quad x_0 < x \leqslant x_{\mathrm{I}},\ 0 < \overline{\psi} < \infty,\ \overline{\psi}_\infty \tag{0.1}$$

$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ \overline{\psi}_\infty) = u_1(x), \quad 0 \leqslant x_0 < x \leqslant x_{\mathrm{J}} \tag{0.2}$$

$$u(x_0,\ \overline{\psi}) = u^\circ(\overline{\psi}),\ 0 \leqslant \overline{\psi} \leqslant \infty,\ \overline{\psi}_\infty \tag{0.3}$$

$$\overline{D} \equiv \{x,\ \overline{\psi}|\ 0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant x_{\mathrm{I}},\ 0 \leqslant \overline{\psi} \leqslant \infty,\ \overline{\psi}_\infty\} \tag{0.4}$$

unde: x și $\overline{\psi}$ sînt variabilele lui Mises, u — viteza în direcția x în puncte din interiorul stratului limită, u_1 — viteza pe frontiera exterioară, $\nu = \mu/\rho$ — vîscozitatea cinematică, ρ — densitatea, $\overline{\psi}_\infty$ — valoarea funcției de curent $\overline{\psi}$ pe frontierea exterioară, u° — soluția inițială dată în secțiunea inițială $x = x_0$. Domeniul D al mișcării, din planul lui Mises $(x,\ \overline{\psi})$, se împarte în trei subdomenii: D^i — interiorul stratului limită, D^s — vecinătatea suprafeței corpului în jurul căruia se mișcă fluidul și D^∞ — regiunea punctului de la infinit.

1. **Mișcarea din domeniul interior $\mathbf{D}^i$. Metoda diferențelor finite.** În subdomeniul sau regiunea D^i problema se rezolvă numeric printr-o schemă explicită cu diferențe finite cu 4 puncte de forma [1], [4]:

$$g_{i+1,\,j} = g_{i,\,j} + r\,\sqrt{V_i - g_{i,j}}\,(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \tag{1}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ I-1;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ J-1)$$

$$g_{i,o} = V_i,\ g_{i,J} = 0,\ g_{0,j} = G_{0,j}\ \text{(valori date)} \tag{2}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I-1,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ J)$$

unde ($u_\infty =$ const., δ — grosimea stratului, D_Δ — rețeaua; I, J — numere întregi):

$$x = LX,\ \overline{\psi} = \psi\,\sqrt{\nu L u_\infty},\ \psi_\infty = \psi(X,\ y = \delta),\ u_1 = u_\infty U_1,\ U_1^2 = V(x)$$

$$X_i = X_0 + i\Delta X,\ \psi_j = j\Delta\psi,\ \Delta X = \frac{X_{\mathrm{I}} - X_0}{I},\ \Delta\psi = \frac{\psi_\infty}{J},\ r = \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2} = \text{const.}$$

$$u = u_\infty U = u_\infty\,\sqrt{U_1^2 - G(X,\ \psi)},\ G(X_i,\ \psi_j) \approx g(X_i,\ \psi_j) \equiv g_{i,j} \tag{3}$$

$$D_\Delta \equiv \{X_i,\ \psi_j\ |\ 0 \leqslant X_0 \leqslant X_i \leqslant X_{\mathrm{I}},\ 0 \leqslant \psi_j \leqslant \psi_\infty\}$$

Convergența și stabilitatea acestei scheme sînt studiate în lucrările [4], respectiv [1]. Condițiile de stabilitate și convergență sînt:

$$r \leqslant \frac{4U_{i,j}}{10\,U_{i,j}^2 - U_{i,j+1}^2 - U_{i,j-1}^2} \tag{4}$$

$$g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1} \geqslant 0 \tag{5}$$

iar eroarea de aproximație a soluției ecuației diferențiale este delimitată prin inegalitatea

$$\|z_i\| \leqslant k(X_{\mathrm{I}} - x_0)[\Delta X + (\Delta\psi)^2],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I;\ (0 \leqslant X_0 < X_{\mathrm{I}}) \tag{6}$$

$$(\|z_i\| = \max_{(j=0,1,\ldots,J)} |G(X_i,\ \psi_j) - g_{i,j}|;\ k = k(G_{X^2},\ G_{\psi^4}))$$

2. Mișcarea în domeniul D^s. Singularitatea ecuației lui Mises. În vecinătatea suprafeței corpului ($\partial^2 G/\partial\psi^2 \to \infty,\ \psi \to 0$) se caută pentru viteaz adimensională $U(X,\ \psi)$ o serie de forma

$$U(X,\ \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(X)\psi^{n/2} \tag{7}$$

$$(D^s \equiv \{X,\ \psi | X_0 \leqslant X \leqslant X_{\mathrm{I}},\ 0 \leqslant \psi \leqslant 2\Delta\psi\})$$

unde coeficienții $a_n(X)$ sînt funcții necunoscute care se determină cu condiții suplimentare:

— Condiția de compatibilitate (pentru ecuație)

$$\left(U \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right)_{\psi=0} = -2U_1 \frac{dU_1}{dX} \tag{7'}$$

— Condiții pe suprafața corpului care cer să fie nuli coeficienții $\lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$ din dezvoltările (compatibilitate)

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi} U\right)^{(i)} \frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2} = \lambda_{i+1}\ \psi^{-1/2} + \ldots \tag{8}$$

unde, de exemplu,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi} U\right)^{(2)} \frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2} = \frac{\partial}{\partial\psi}\left(U \frac{\partial}{\partial\psi}\left(U \frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2}\right)\right).$$

Pentru a determina coeficientul a_{i+1} rezolvăm ecuația

$$\lambda_{i+1}(a_1,\ \ldots,\ a_i;\ a_{i+1}) = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Se observă că în cazul de față avem

$$U^2 = a_1^2\psi + 2a_1a_2\psi^{3/2} + (2a_1a_3 + a_2^2)\psi^2 \ldots \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \lim_{\psi\to 0} \frac{\partial U^2}{\partial\psi}, \quad A \equiv U_1 \frac{dU_1}{dX} \\ a_2 &= -\frac{4A}{3a_1^2}, \quad a_3 = -\frac{14A^2}{9a_1^5}, \quad a_4 = -\frac{80A^3}{27a_1^8} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

În D^s, reprezentăm funcția $G(X, \psi)$ în forma aproximativă

$$G(X, \psi) = U_1^2(X) - a_1^2\psi + \frac{8}{3}\frac{A}{a_1}\psi^{3/2} + \frac{4}{3}\frac{A^2}{a_1^4}\psi^2 \tag{11}$$

Pentru rezolvarea completă a problemei va trebui să aflăm și coeficientul a_1 rămas nedeterminat în aplicarea condițiilor de compatibilitate de pe suprafața corpului. În acest scop folosim un procedeu de aproximații succesive considerînd că soluția dată de metoda diferențelor finite reprezintă o aproximație (inițială) pentru funcția G în D^s. Se găsește relația

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} + 2\left(\frac{\partial G}{\partial\psi}\right)_{i,0}\Delta\psi = 3g_{i,0} - 2a_1^2\Delta\psi \tag{12}$$

și, în consecință, formula aproximației de ordinul zero

$$(a_1^2)^0 = \frac{3g_{i,0} - 4g_{i,1} + g_{i,2}}{2\Delta\psi} \tag{13}$$

Pentru aproximația de ordinul întîi folosim relația

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} - 2a_1^2\Delta\psi + \frac{2}{3}\frac{A}{a_1}(\Delta\psi/\theta)^{3/2}; \quad 0 < \theta < 1, \tag{14}$$

care conduce la ecuația de gradul trei

$$z^3 - z_0^2 z - \bar{c} = 0 \tag{15}$$

$$(z \equiv a_1, \ z_0 \equiv a_1^0, \ \bar{c} = 2{,}2228A\sqrt{\Delta\psi}, \ \theta^{-3/2} = 6{,}6683). \tag{15'}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații se poate aplica metoda iterativă a lui Newton sau un procedeu de relaxare. Cu valoarea a_1 astfel determinată revenim la formula (11) care ne va da valorile funcției G și, deci, ale vitezei U în domeniul D^s.

Tensiunea de frecare locală pe suprafața corpului $\tau_w(X)$ se va calcula, aplicînd legea lui Newton, cu formula

$$\tau_w(X) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu u_\infty^2}{2\sqrt{\nu L u_\infty}}\left(\frac{\partial U^2}{\partial\psi}\right)_w = \frac{\rho u_\infty^2}{2}\frac{a_1^2}{\sqrt{R_e}} \tag{16}$$

Pentru coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii de frecare locală avem formula

$$\sqrt{R_e}\, c_{\tau w} = a_1^2 \tag{17}$$

$$\left(R_e = \rho u_\infty L/\mu, \quad c_{\tau w} = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2}\right) \tag{17'}$$

3. **Regiunea punctului de la infinit** D^∞. Pentru calculul valorilor funcției $G(X_i, \psi_j) \approx g_{i,j}$, în secțiunea $X = X_i$ în puncte unde $\psi_{J+1} = (J+1)\Delta\psi$ J fiind un număr folosit în mașina de calcul (program), se pot aplica formulele [3]

$$g_{i,J+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}(9g_{i,J} - 6g_{i,J-1} + g_{i,J-2}), & \text{dacă } g_{i,J+1}(g_{i,J+1} - g_{i,J}) < 0 \\ \frac{1}{2} g_{i,J}, & \text{dacă } g_{i,J+1}(g_{i,J+1} - g_{i,J}) > 0 \end{cases} \tag{18}$$

4. **Soluție inițială.** Soluția inițială, de pornire, în procesul numeric de rezolvare a problemei scurgerii plane peste un corp cilindric este dată de soluția automodelată (de similitudine) din vecinătatea punctului critic reprezentată în variabilele (Illingworth-Stewartson)

$$\xi = \mu\rho \int_0^x u_1(x)\mathrm{d}x = \frac{\mu\rho c_1}{2} x^2, \quad \eta = \frac{u_1}{\sqrt{2\xi}} \rho y = y\sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}}$$

$$(u_1 = c_1 x, \ c_1 = \text{const.}, \ y = \text{coordonata normală}; \ \mu, \ \rho = \text{const.})$$

Dacă se introduce funcția vitezei $f(\eta)$ se obțin formulele

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_1 \frac{df}{d\eta} = \frac{d\psi}{d\eta}\sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}}, \quad \left(\frac{u}{u_1} = \frac{df}{d\eta}\right)$$

de unde rezultă următoarea relație între funcțiile f și ψ

$$\psi = \frac{u_1}{\sqrt{L c_1 u_\infty}} (\eta) f \tag{19}$$

Funcția $f(\eta)$ și primele sale două derivate, pentru mișcări plane și axial-simetrice, sînt date în tabele [2].

Se obține imediat formula

$$G_{0,j} = U_1^2 - U^2 = V_i\left[1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2_{\eta=\eta_j}\right] \tag{20}$$

$$(G_{0,0} = (U_1^2)_0, \ f'(\eta_0 = 0) = 0), \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Cunoscînd soluția inițială $G_{0,j}$, schema cu diferențe finite (1) poate fi programată, în domeniul de convergență și stabilitate, la o mașină electronică de calcul.

STRAT LIMITĂ PE UN CILINDRU CIRCULAR (APLICAȚIE)

5. **Calculul vitezei și tensiunii de frecare.** Se consideră un cilindru circular atacat perpendicular pe generatoarele sale de un curent vîscos incompresibil care la infinit este în translație uniformă cu viteza u_∞ (fig. 1). În acest caz avem formulele (R = raza cilindrului):

$$L = R,\ X = x/R = \alpha \text{ rad},\ u_1 = 2u_\infty \sin\frac{x}{R},\ U_1 = 2\sin X$$

$$X_0 = 0{,}1745 \rightarrow 10°;\ r = 0{,}33;\ \Delta\psi = 0{,}1;\ \Delta X = 0{,}0033$$

Pentru $\psi = \psi_\infty$ avem $\partial G/\partial X = 0$ iar pentru $\psi = 0$ avem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = 2U_1U_1' \begin{cases} \geqslant 0 \text{ dacă } X_0 \leqslant X \leqslant \pi/2 \\ \leqslant 0 \text{ dacă } \frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \pi \end{cases} \tag{21}$$

În consecință, în imediata vecinătate a suprafeței corpului obținem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\sqrt{U_1^2 - G}}{(\Delta\psi)^2}(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \leqslant 0 \text{ pentru } \frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \pi \tag{22}$$

Deci, condițiile de convergență și stabilitate nu sînt verificate în apropierea cilindrului în secțiuni $X > \pi/2$. Pe de altă parte trebuie exclusă vecinătatea imediată a suprafeței cilindrului din cauza singularității ecuației lui Mises de pe cilindru. În consecință, domeniul de stabilitate și convergență al schemei (1) pentru cilindrul circular va fi: $X_0 \leqslant X \leqslant \pi/2$; $2\Delta\psi < \psi < \infty$.

Calculul stratului limită incompresibil de pe un cilindru circular se va face după următorul algoritm:

— Calculul mărimii V_i se va face cu formula

$$V_i = U_1^2 = 4\sin^2(0{,}1745 + 0{,}0033i),\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

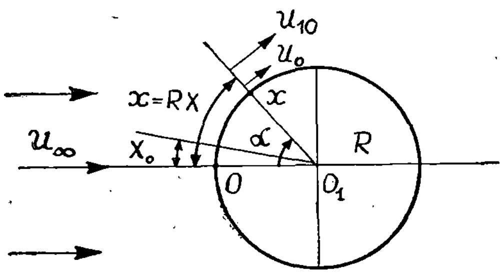


Fig. 1

— Valorile inițiale $G_{0,j}$ se determină cu formula

$$G_{0,j} = 0{,}1208\left[1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\right]_j, \quad \left(f_j = \frac{\psi_j}{0{,}2467}\right) \tag{24}$$

unde se folosește soluția dată de Howarth pentru mișcarea plană din vecinătatea punctului critic. Valorile $G_{0,j}$ sînt date în tabelul 1.

— Schema cu diferențe finite (1)—(3) se programează în limbaj FORTRAN IV la mașina electronică de calcul FELIX—C 256 pentru

$$0{,}1745 \leqslant X \leqslant 1{,}0490$$

În tabelul 2 sînt date valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ calculate cu mașina pentru $j \leqslant J = 15$. Pentru $j < J = 15$ se aplică formulele (18).

— În vecinătatea suprafeței corpului se rezolvă ecuații de forma

$$f_e \equiv z^3 - z_0^2 z - 0{,}7028A = 0 \quad (A = 2 \sin 2X) \tag{25}$$

care se deduc imediat din (15). Soluțiile ecuațiilor (25) sînt calculate printr-un procedeu de relaxare și sînt date în tabelul 3 (unde este indicat și reziduul $\widetilde{R}$). În tabelul 3 este dată și funcția necunoscută $\psi_\infty(X)$ care apare ca soluție a ecuației $g(X, \psi) = 0$. Avînd valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ se poate calcula cu formulele corespunzătoare și viteza u a fluidului în cele trei subdomenii D^s, D^i și D^∞ (pentru $\psi \leqslant 2\Delta\psi$, $\psi < 2\Delta\psi$, $\psi \to \to \psi_\infty$).

— Coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii locale de frecare pe suprafața corpului se va calcula, acum, folosind formula (17). Valorile coeficientului $c_{\tau w}$ sînt date în tabelul 3. Valorile obținute pentru $c_{\tau w}$ coincid cu cele date de alte metode [2]. Funcțiile G, a_1^2 și ψ_∞ sînt reprezentate grafic în fig. 2 și 3, după tabelele 2 și 3.

Tabel 1

Nr. nod	ψ_j	f_j	$(df/d\eta)_j$	$g_{0,j} = G_{0,j}$
0	0	0	0	0,1208
1	0,1	0,4053	0,7350	0,0555
2	0,2	0,8106	0,8997	0,0230
3	0,3	1,2160	0,9613	0,0091
4	0,4	1,6212	0,9861	0,0033
5	0,5	2,0265	09955	0,0009
6	0,6	2,4318	0,9988	0,0002
7	0,7	2,8371	0,9996	0,0000
8	0,8	3,2424	0,9999	,,

Tabel 2

Valorile funcției $g_{i,j}$

ψ \ X	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	0,9599	1,0490
0,0	0,1208	0,4688	1,0602	1,7221	1,9984	2,2223	2,6839	3,0062
0,1	0,0555	0,3132	0,8134	1,4089	1,6648	1,8750	2,3180	2,6333
0,2	0,0230	0,2103	0,6292	1,1607	1,3958	1,5913	2,0112	2,3155
0,3	0,0091	0,1396	0,4861	0,9570	1,1713	1,3519	1,7465	2,0374
0,4	0,0033	0,0910	0,3737	0,7876	0,9817	1,1474	1,5156	1,7916
0,5	0,0009	0,0581	0,2854	0,6462	0,8209	0,9719	1,3134	1,5736
0,6	0,0002	0,0362	0,2162	0,5281	0,6842	0,8211	1,1359	1,3798
0,7	0,0000	0,0219	0,1622	0,4296	0,5682	0,6915	0,9801	1,2075
0,8	,,	0,0129	0,1205	0,3477	0,4700	0,5803	0,8435	1,0543
0,9	,,	0,0074	0,0886	0,2798	0,3870	0,4852	0,7238	0,9184
1,0		0,0041	0,0644	0,2239	0,3171	0,4040	0,6193	0,7980
1,1		0,0022	0,0462	0,1781	0,2586	0,3349	0,5281	0,6915
1,2		0,0011	0,0328	0,1407	0,2098	0,2765	0,4489	0,5975
1,3		0,0006	0,0230	0,1104	0,1692	0,2271	0,3802	0,5148
1,4		0,0003	0,0158	0,0860	0,1357	0,1857	0,3208	0,4422
1,5		0,0001	0,0108	0,0666	0,1082	0,1510	0,2697	0,3787
1,6		0,0000	0,0062	0,0485	0,0822	0,1180	0,2206	0,3232
1,7		,,	0,0017	0,0307	0,0566	0,0854	0,1720	0,2750
1,8		,,	0,0008	0,0130	0,0311	0,0529	0,1235	0,2286
1,9			0,0008	0,0065	0,0056	0,0204	0,0750	0,1827
2,0			0,0004	0,0028	0,0028	0,0102	0,0266	0,1369
2,1			0,0002	0,0014	0,0014	0,0056	0,0133	0,0912
2,2			0,0000	0,0005	0,00035	0,0024	0,0088	0,0456
2,3			,,	0,0001	0,00015	0,0012	0,0064	0,0228
2,4			,,	0,0000	0,00007	0,0005	0,0046	0,0057
2,5				,,	0,0000	0,0002	0,0029	0,0029
2,6					,,	0,0000	0,0014	0,0015
2,7							0,0007	0,0003

Tabel 3

X	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	0,9599	1,0490
$z =$								
a_1	1,1170	1,5500	1,8572	2,0350	2,0818	2,1101	2,1384	2,1386
$\tilde{R} =$								
$f_e(z)$	0,0002	−0,0003	−0,0004	0,0003	−0,0007	−0,0009	−0,0002	0,0005
a_1^2	1,2477	2,4025	3,4492	4,1412	4,3339	4,4525	4,5728	4,5736
ψ_∞	0,7	1,6	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8

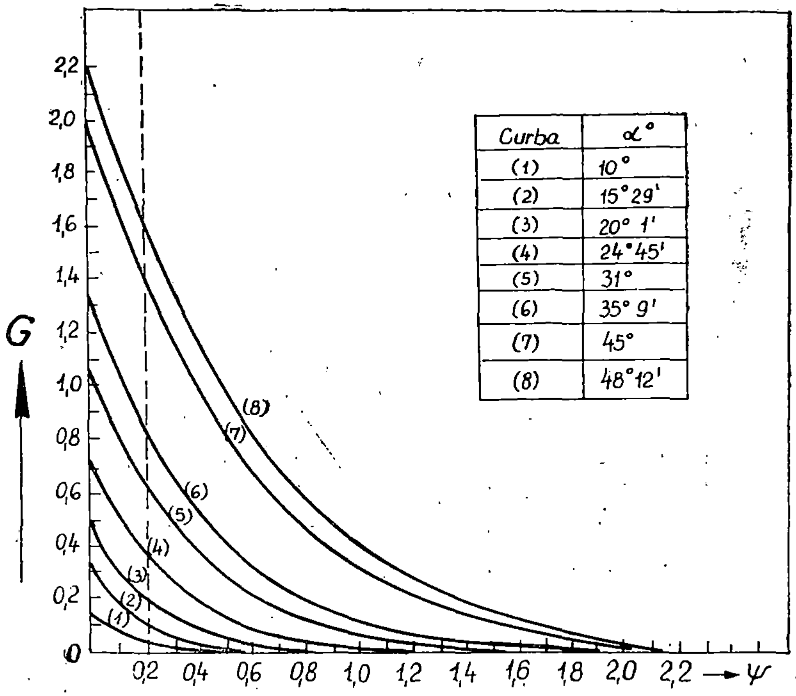


Fig. 2

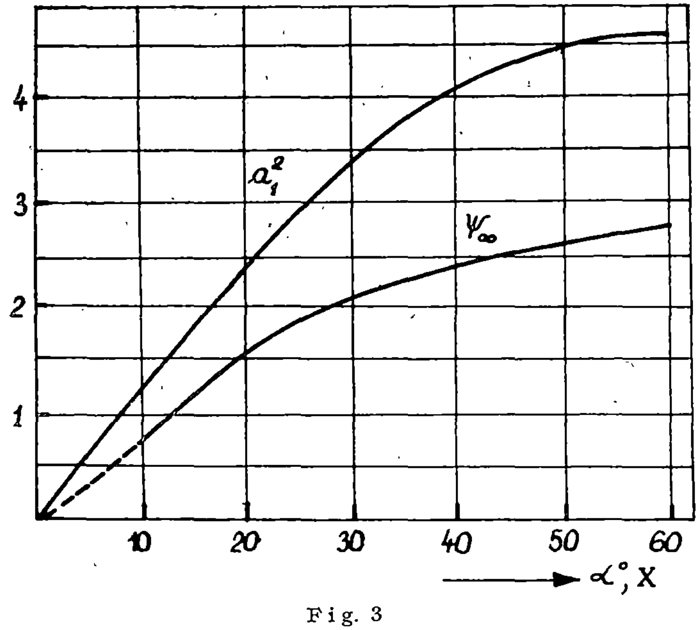


Fig. 3

(Intrat în redacție la 15 noiembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Mitchell, A. R. and Thomson, J. Y., *Finite Difference Meth. of the von Mises Equation* ..., ZAMP, v. 9, 1958, sau Mehanika, v. 4, 1959 p. 45—53.
2. Schlichting, H., *Teoria pograničinogo sloia*, IIL, Moskva, 1956, p. 142—148.
3. Faiza, Nabi, *Operation Instr. and Descrip. Computer Program for Finite Diff. Eq.*, ..., Office of Aerospace Research, United States Air Force (ARL). 67—0093, May, 1967.
4. Brădeanu Doina, *Convergența soluției ecuației cu diferențe finite a stratului limită în forma lui Mises.* Studia Univ. Babeș-Bolyai, Ser. Math.—Mech., f. 1, 1974, p. 81.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ФОРМЕ МИСЕСА ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ПРИМЕНЕНИЕ К ЦИРКУЛЯРНОМУ ЦИЛИНДРУ

(Резюме)

В работе изучается движение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое при помощи численного интегрирования уравнения Мисеса. Автор считает, что область движения, в плоскости Мисеса (x, ψ), делится на три области, в которых применяется метод конечных разностей, интегрирование посредством рядов и экстраполяция. Результаты этой теории применяются затем к вычислению скорости, напряжения и толщины пограничного слоя для обтекания циркулярного цилиндра. Вычисления, приведенные в таблицах, были программированы в языке FORTRAN IV на электронной вычислительной машине FELIX—C 256.

NUMERICAL SOLVING OF THE BOUNDARY LAYER PROBLEM OF MISES FORM BY THE FINITE-DIFFERENCES METHOD. APPLICATION TO THE CIRCULAR CYLINDER

(Summary)

In the paper, the movement of the viscous incompressible liquid in the boundary layer, by means of numerical integration of Mises equation is studied. We consider that the motion field in Mises's plan (x, ψ) is divided into three subdomains in which the finite differences method, the series integration, and extrapolation are applied. The results of this theory are then applied to calculate the speed, skinfriction, and thickness of the boundary layer reckoning the motion of the fluid round the circular cylinder. The results, presented in tables, have been programmed in FORTRAN IV language by the electronic machine FELIX—C 256.

DISPERSION OF A SOLUTE IN A NON-NEWTONIAN FLUID WITH SIMULTANEOUS CHEMICAL REACTION

B. K. DUTTA*, N. C. ROY*, A. S. GUPTA*

Introduction. The dispersion of a soluble matter in an incompressible viscous fluid flowing in a circular pipe under laminar conditions was discussed by Taylor ([1], [2], [3]). It is found that relative to a plane moving with the mean speed of the flow, the solute is dispersed with an apparent diffusion coefficient $R^2\overline{V}_x^2/48\ D$, where R, $\overline{V}_x$ and D are the radius of the pipe, the average velocity and molecular diffusion coefficient respectively. Taylor's analysis is valid for $4L/R \gg \overline{V}_x R/D \gg 6.9$, where L is a characteristic length along flow direction. This restriction was later removed by Aris [4]. The work was later extended to include dispersion in a non-Newtonian fluid by Fan and Hwang [5], the fluid being of the power-law type due to Ostwald-de Waele. Fan and Wang [6] discussed a similar problem by assuming the fluid to be (i) Bingham plastic and (ii) that due to Ellis model. Recently Ghoshal [7] extended the analysis to investigate dispersion of a solute in Eyrind and Reiner-Philoppoff fluids.

Although a good deal of work has been done on dispersion of solute in Newtonian and non-Newtonian fluids, the study of the effect of chemical reaction on it has not received due attention. Only recently Gupta and Gupta [8] studied the case of dispersion of a solute in a Newtonian fluid in the presence of a first order irreversible chemical reaction. The object of the present investigation is to study the dispersion of a solute in a power-law fluid in the presence of an irreversible first order chemical reaction. While the study of non-Newtonian fluids is motivated by the growing importance of such fluids in chemical engineering and commercial applications and the desire to understand the effects of fluids which exhibit strong effective viscosity changes with changes in rate of shear, little work seems to have been done to study the effect of chemical reaction in such fluids. The problem of chemical reaction in non-Newtonian fludis is encountered in such industrial processes as the hydrogenation of unsaturated macromolecules as pointed out by Mihail [9].

Mathematical formulation and solution. Consider the dispersion of a solute in the laminar flow of a power-law fluid between two parallel plates $y = \pm\delta$ under a uniform pressure gradient, x — axis being taken along the flow direction. The constitutive equation of a power-law fluid is (see Bird, Stewart and Lightfoot [10])

$$\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

where for $n > 1$, the fluid is dilatant (shear-thickening) and for $n < 1$, it is known as pseudo-plastic while $n = 1$ corresponds to an ordinary

* Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.

viscous fluid. Using equation (1), the velocity distribution satisfying the no-slip conditions at the walls and maintaining symmetry about $y = 0$ is

$$u = \bar{u} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left[1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^{n+1}\right], \tag{2}$$

where $\bar{u}$ is the average velocity.

If a solute diffuses in the fully developed flow mentioned above and simultaneously undergoes a first-order irreversible chemical reaction under isothermal conditions, then the concentration of the solute satisfies

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) - K'C, \tag{3}$$

where the last term accounts for a first-order chemical reaction and the molecular diffusion coefficient D is assumed constant. The concentration of the solute is taken to be small otherwise it will be necessary to include the heat of reaction and the temperature dependence of K', which is the reaction rate constant.

We now consider convection across a plane moving with the mean speed of the flow. The velocity of the fluid relative to this plane is given by

$$v = u - \bar{u} = \bar{u}\left[\frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left|\frac{y}{\delta}\right|^{\frac{n+1}{n}}\right]. \tag{4}$$

We introduce the following dimensionless quantities

$$\theta = \frac{t}{\bar{t}}, \quad \bar{t} = \frac{2\delta}{\bar{u}}, \quad \xi = \frac{x - \bar{u}t}{2\delta}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}. \tag{5}$$

Equation (3) then reduces to

$$\frac{1}{\bar{t}}\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{v}{2\delta}\frac{\partial C}{\partial \zeta} = \frac{D}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - K'C, \tag{6}$$

where we assume that $\partial^2 C/\partial x^2 \ll \partial^2 C/\partial y^2$.

If Taylor's limiting condition is valid in the present problem then partial equilibrium may be assumed in any cross-section of the channel. In this case equation (6) reduces to

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \alpha^2 C = \frac{v\delta}{2D} \cdot \frac{\partial C}{\partial \zeta} \tag{7}$$

where

$$\alpha^2 = \frac{K'\delta^2}{D}. \tag{8}$$

Assuming $\partial C/\partial \xi$ to be independent of η at any cross-section, equation (7) may be integrated to obtain variation of C with η. The boundary conditions are

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{at } \eta = 1; \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{at } \eta = 0. \tag{9}$$

The first boundary condition expresses zero mass transport at the walls while the second follows from the symmetry of the concentration profile about the central line of the channel.

The volumetric rate at which the solute is transported across a section of the channel of unit breadth is

$$Q = \int_{-\delta}^{\delta} Cv\,dy = 2\delta \int_{0}^{1} Cv\,d\eta. \tag{10}$$

Integrations of the equations (7) and (10) with v given by (4) in closed analytic form does not seem to be possible for general values of n. However analytical integration is feasible for integral values of $(n+1)/n$ viz. 2, 3, 4, ... which correspond to $n = 1$, 1/2, 1/3, ... While the case $n = 1$ corresponds to a Newtonian fluid, the other values with $n < 1$ refer to pseudoplastic fluids for which apparent viscosity decreases with increasing strain rates. However, for a large class of fluids at room temperature, $n < 1$ e.g., for 23.3% Illinois yellow clay in water $n \approx 1/4$ and for 1.5% CMC (carboxymethylcellulose) in water $n \approx 1/2$ to mention only a few (see Bird, Stewart and Lightfoot [10]). On the other hand dilatant fluids for which $n > 1$ are very seldom found. Thus it would be useful to carry out explicit integration of (7) and (10) for $n = 1$, 1/2, 1/3, ... We append below the expressions for several values of n.

For $n = 1$,

$$Q = \frac{\delta^2 \bar{u}^2}{\alpha^2 D} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{9}{\alpha^3} \coth \alpha - \frac{9}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}. \tag{11}$$

For $n = 1/2$,

$$Q = \frac{\delta^2 \bar{u}^2}{3\alpha^2 D} \cdot \left[\left(\frac{3}{7} + \frac{12}{5\alpha^2} \right) + \frac{48 \coth \alpha}{\alpha^5} \left(1 + \frac{4}{\alpha^2} + \frac{8}{\alpha^4} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{16}{\alpha^2} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(1 + \frac{6}{\alpha^2} + \frac{12}{\alpha^5 \sinh \alpha} \right) \right] \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}. \tag{12}$$

For $n = 1/3$,

$$Q = \frac{5\delta^2 \bar{u}^2}{8\alpha^2 D} \cdot \left[\frac{4}{45} + \frac{15}{7\alpha^2} + \frac{6}{\alpha^4} - \frac{5}{\alpha^2} \left(1 + \frac{6}{\alpha^2} \right) \left(1 - \frac{4}{\alpha} \coth \alpha - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{24}{\alpha^3} \coth \alpha + \frac{12}{\alpha^2} + \frac{24}{\alpha^4} \right) \right] \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}. \tag{13}$$

For $n = 1/4$,

$$Q = \frac{6\delta^2 \bar{u}^2}{5\alpha^2 D} \cdot \left[\frac{5}{66} + \frac{102}{7\alpha^4} - \frac{10}{3\alpha^2} - \frac{108}{\alpha^4} \left(10 + \frac{128}{\alpha^2} + \frac{480}{\alpha^4} + \frac{960}{\alpha^6} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1440}{\alpha^7 \sinh \alpha} \cdot \left(1 + \frac{12}{\alpha^2} + \frac{24}{\alpha^4} \right) + \frac{30}{\alpha^3} \coth \alpha \cdot \left(1 + \frac{24}{\alpha^2} + \frac{192}{\alpha^4} + \frac{576}{\alpha^6} + \frac{1152}{\alpha^8} \right) \right] \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}. \tag{14}$$

Comparing the above expressions for Q with Fick's law of diffusion, we find that the solute is dispersed relative to a plane moving with the mean speed of the flow with an effective dispersion coefficient D^* given by

$$D^* = \frac{\delta^2\bar{u}^2}{\alpha^2 D}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{9}{\alpha^3}\coth\alpha-\frac{9}{\alpha^4}-\frac{3}{\alpha^2}\right) \text{ for } n=1; \tag{15}$$

$$D^* = \frac{\delta^2\bar{u}^2}{3\alpha^2 D}\cdot\left[\frac{3}{7}+\frac{12}{5\alpha^2}+\frac{48\coth\alpha}{\alpha^5}\cdot\left(1+\frac{4}{\alpha^2}+\frac{8}{\alpha^4}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{16}{\alpha^2}\left(1+\frac{2}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{6}{\alpha^2}+\frac{12}{\alpha^5\sinh\alpha}\right)\right] \text{ for } n=\frac{1}{2}; \tag{16}$$

$$D^* = \frac{5\delta^2\bar{u}^2}{4\alpha^2 D}\left[\frac{4}{45}+\frac{15}{7\alpha^2}+\frac{6}{\alpha^4}-\frac{5}{\alpha^2}\left(1+\frac{6}{\alpha^2}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{\alpha}\coth\alpha-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{24}{\alpha^3}\coth\alpha+\frac{12}{\alpha^2}+\frac{24}{\alpha^4}\right)\right] \text{ for } n=\frac{1}{3}; \tag{17}$$

$$D^* = \frac{6\delta^2\bar{u}^2}{5\alpha^2 D}\cdot\left[\frac{5}{66}+\frac{102}{7\alpha^4}-\frac{10}{3\alpha^2}-\frac{108}{\alpha^4}\left(10+\frac{128}{\alpha^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{480}{\alpha^4}+\frac{960}{\alpha^6}\right)-\frac{1440}{\alpha^7\sinh\alpha}\left(1+\frac{12}{\alpha^2}+\frac{24}{\alpha^4}\right)+$$
$$\left.+\frac{30}{\alpha^3}\coth\alpha\cdot\left(1+\frac{24}{\alpha^2}+\frac{192}{\alpha^4}+\frac{576}{\alpha^6}+\frac{1152}{\alpha^8}\right)\right] \text{ for } n=\frac{1}{4}. \tag{18}$$

We now introduce the dimensionless dispersion coefficient $D^{**} = D^*\cdot D/\delta^2\bar{u}^2$ so that D^{**} can be computed as function of α from the equations (15)—(18). The values of D^{**} versus α are plotted in Fig. 1. It can be seen that for fixed n, the effective dispersion coefficient decreases rapidly with increase in reaction rate parameter α. This is due to the fact that as the reaction rate increases, more and more amount of solute undergoes chemical reaction. Again the figure shows that for fixed reaction rate, D^{**} increases as the power-law index n increases.

It is interesting to note that for large values of the reaction rate parameter α, the dispersion coefficient is asymptotically given by the following expression

$$D^* = \frac{n\bar{u}^2}{k'(2+3n)} \tag{19}$$

as can be seen from (15)—(18).

Discussion. It should be recognized that the power law model of Ostwald-de Waele given by (1) is valid over a limited range of strain rates and almost all non-Newtonian fluids tend to Newtonian fluids when the strain rates are small say of order .01 $\sec^{-1}$. Although the present

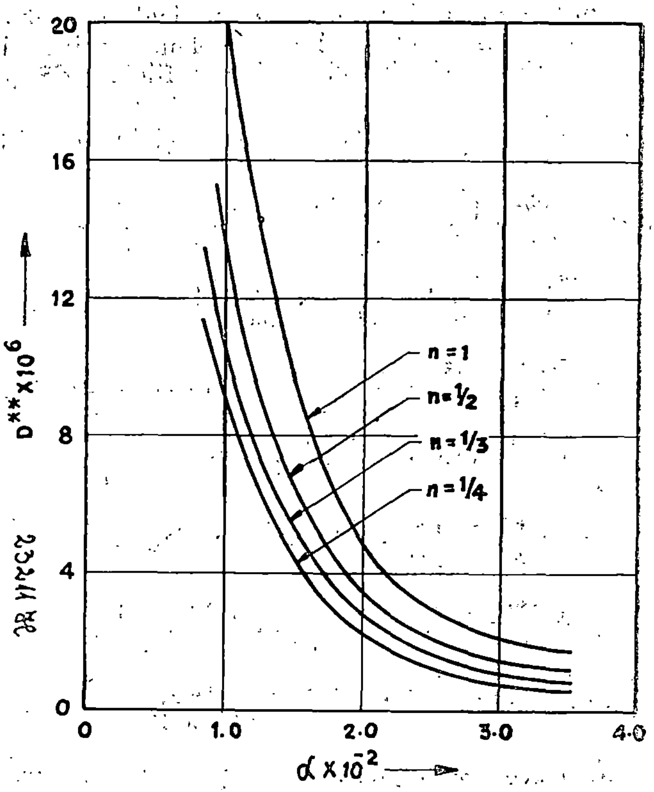


Fig. 1. Dimensionless Taylor diffusion coefficient versus reaction rate parameter.

analysis is confined to chemical reaction in the bulk of the fluid, there is no difficulty in extending the analysis to the case when the walls of the channel are catalytic.

(Received December 18, 1972)

REFERENCES

1. Taylor, G. I., Proc. Roy. Soc. London, **A219**, 186, 1953.
2. Taylor, G. I., Proc. Roy. Soc. London, **A223**, 446, 1954.
3. Taylor, G. I., Proc. Roy. Soc. London, **A225**, 473, 1954.
4. Aris, R., Proc. Roy. Soc. London, **A235**, 67, 1956.
5. Fan, L. T. and Hwang, W. S., Proc. Roy. Soc. London, **A283**, 576, 1965.
6. Fan, L. T. and Wang, C. B., Proc. Roy. Soc. London, **A292**, 203, 1966.
7. Ghoshal, S., Chem. Eng. Science, **26**, 185, 1971.
8. Gupta, P. S. and Gupta, A. S., Proc. Roy. Soc. London, **A330**, 59, 1972.
9. Mihail, R., Chem. Eng. Science, **26**, 2117, 1971.
10. Bird, R. B., Steward, W. E. and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*. John Wiley Sons, Inc., 1960.

DISPERSIA UNEI SOLUŢII ÎNTR-UN FLUID NENEWTONIAN CU REACŢIE CHIMICĂ SIMULTANĂ

(Rezumat)

Se studiază dispersia de tranziţie a unei soluţii într-un fluid cu reacţie chimică de ordinul întîi ireversibilă. Se arată că coeficientul de dispersie efectivă descreşte rapid cu creşterea parametrului de reacţie, pentru o valoare fixă a indicelui de solubilitate.

ДИСПЕРСИЯ ОДНОГО РАСТВОРА В НЕНЬЮТОНОВОЙ ЖИДКОСТИ С ОДНОВРЕМЕННОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИЕЙ

(Резюме)

Изучается переходная дисперсия одного раствора в жидкости с необратимой химической реакцией первого порядка. Установлено, что коэффициент эффективной дисперсии быстро убывает с повышением реакционного параметра для постоянного значения показателя растворимости.

ASUPRA EXTINDERII INTEGRALEI LUI CROCCO LA CAZUL JETULUI VÎSCOS DISIPATIV

ŞTEFAN I. MAKSAY

1. **Introducere.** Se consideră o placă plană cu una dintre muchii trecînd prin originea axelor de coordonate şi întinzîndu-se pînă la infinit în lungul părţii pozitive a axei Ox. Spaţiul înconjurător se presupune umplut cu un fluid compresibil în repaus. În vîrful plăcii este situată o sursă punctuală din care ţîşneşte un fluid de aceeaşi natură cu cel din spaţiul înconjurător, care se mişcă sub formă de jet pe una din feţele plăci (de exemplu $y > 0$).

Admitem că mişcarea jetului satisface ecuaţiile stratului limită termic, care în raport cu variabilele lui Mises (x, ψ) au următoarea formă [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu_\infty \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u \frac{\partial u}{\partial \psi}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{\nu_\infty} \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\sigma} u \frac{\partial i}{\partial \psi}\right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ p &= \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho \cdot i \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{i}{i_\infty} \tag{4}$$

la care se adaugă condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} &u(x, \psi) = 0 && \text{pentru } \psi = 0 \\ &u(x, \psi) = 0 && \text{pentru } \psi = \psi_\infty \neq \infty \\ &i(x, \psi) = i_W \text{ (const.)} && \text{pentru } \psi = 0 \\ &i(x, \psi) = i_\infty \text{ (const.)} && \text{pentru } \psi = \psi_\infty \end{aligned} \tag{5}$$

Notaţii:

x şi ψ	— variabilele lui Mises din stratul limită.
ψ	— funcţia de curent.
u	— viteza locală a jetului în direcţia plăcii.
η	— variabilă de automodelare dată de (8).
μ, ν, ρ, c_p	— coeficienţii de vîscozitate dinamică şi cinematică, densitatea şi căldura specifică.
λ	— coeficientul de conductibilitate termică.
$\sigma = \mu c_p/\lambda$	— numărul lui Prandtl.
T	— temperatura absolută în fluid.
$i = c_p T$	— entalpia unităţii de masă a fluidului.
E_0, χ_0	— constante date (condiţii integrale de conservare)
w, ∞	— (indici) indică valori pe placă şi respectiv pe frontiera exterioară a stratului limită.

şi condiţia integrală:

$$\int_0^{\psi_\infty} u\psi d\psi = E_0 \tag{6}$$

Soluţia ecuaţiei (1) este dată de:

$$u = \frac{\eta_\infty^2}{6}\sqrt{\frac{E_0}{\nu_\infty x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\eta}{\eta_\infty}} - \frac{\eta^2}{\eta_\infty^2}\right) \tag{7}$$

unde:

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{1}{E_0\nu_\infty x}}\cdot\psi \tag{8}$$

iar $\eta_\infty = 2{,}515$.

2. **Ecuaţia energiei totale.** Vom studia cazul în care placa are temperatura egală cu a fluidului exterior.

Înmulţind ecuaţia (1) cu u şi adunînd-o la (2) obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(i + \frac{u^2}{2}\right) = \nu_\infty \frac{\partial}{\partial\psi}\left[u\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{1}{\sigma}u\frac{\partial i}{\partial\psi}\right] \tag{9}$$

Luînd $\sigma = 1$, rezultă integrala particulară (Crocco):

$$i + \frac{u^2}{2} = au + b \tag{10}$$

unde a şi b sînt constante.

Prin aplicarea relaţiei (10) o dată pe suprafaţa plăcii şi o dată în exteriorul jetului, rezultă:

$$b = i_W = i_\infty \tag{11}$$

Constanta a se determină cu ajutorul unei condiţii integrale de conservare, care se obţine din ecuaţia (9) pentru $\sigma = 1$, prin înmulţire cu $\psi d\psi$, integrare după ψ de la 0 la ψ_∞ şi printr-o nouă integrare după x de la 0 la x.

Condiţia integrală de conservare are forma:

$$\int_0^{\psi_\infty}\left(i + \frac{u^2}{2}\right)\psi d\psi = \chi_0$$

De aici obţinem:

$$a = \frac{1}{E_0}\left[\chi_0 - i_W\frac{\psi_\infty^2}{2}\right] \tag{12}$$

Cu a şi b astfel calculaţi, din relaţia (10) se determină distribuţia temperaturii în jet, cîmpul vitezelor fiind dat de (7).

3. Caracteristicile schimbului de căldură. Între placă şi fluidul din jet are loc un schimb de căldură. Sensul transferului de căldură este dat de semnul gradientului de temperatură pe perete.

Avem:

$$T = \frac{1}{c_p} i = \frac{1}{c_p}\left[-\frac{u^2}{2} + au + i_W\right]$$

unde a are expresia dată de (12).

Deci:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{dT}{du}\right)_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{1}{c_p} a \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$$

Presupunem scurgerea fără desprindere, adică $(\partial u/\partial y)_w < 0$. Semnul lui $(\partial T/\partial y)_w$ este dat prin urmare de semnul lui a.

Avem următorul criteriu pentru stabilirea sensului transferului de căldură:

a) dacă $\chi_0 < i_w \frac{\psi_\infty^2}{2}$ avem $(\partial T/\partial y)_w < 0$ şi căldura se scurge de la placă spre fluid;

b) dacă $\chi_0 > i_w \frac{\psi_\infty^2}{2}$ avem $(\partial T/\partial y)_w > 0$ şi căldura se scurge de la fluid spre placă.

În cazul a) are loc o răcire a suprafeţei plăcii, iar în cazul b) nu se poate afirma încă dacă are loc o răcire sau o încălzire a jetului din cauza fenomenului de frecare.

Fie:

$$q_w = -\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w$$

debitul caloric de la placă la fluid şi fie:

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$$

tensiunea de frecare pe placă. Între aceste mărimi, prin împărţire, obţinem relaţia:

$$\frac{q_w}{\tau_w} = -\frac{\lambda_w}{\mu_w}\left(\frac{dT}{du}\right)_w = -a$$

Observaţie. În cazul în care ecuaţia energiei totale admite integrala primă (10), prin peretele plăcii are loc un flux termic, dat de:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{a}{c_p}\,\frac{\eta_\infty^2}{72}\,\frac{1}{\nu_\infty x}\sqrt[4]{\frac{E_0^3}{\nu_\infty x}}.$$

Placa este izolată termic dacă $a = 0$, adică dacă se realizează:

$$\chi_0 = i_w \frac{\psi_\infty^2}{2}. \tag{13}$$

(Intrat în redacție la 18 aprilie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Akatnov, N. I., PMM, XX V, 1, Moskva, 1960.
2. Vulis, L. A., Kașkarov, V. P., *Teoria strui veazkoi jidkosti*, Moskva, 1965.
3. Iacob, Caius, *Mecanica teoretică*, Ed. did. și ped., București, 1971.
4. Pai, S. I., *Teoria strui*, Moskva, 1960.
5. Brădeanu, P., Maksay, Șt., *Asupra determinării temperaturii în jeturi vîscoase semimărginite*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2, 1972.
6. Brădeanu, P., *Mecanica fluidelor*, Ed. tehnică, București, 1973.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИНТЕГРАЛА КРОККО НА СЛУЧАЙ ВЯЗКОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СТРУИ

(Резюме)

Автор изучал при помощи переменных Мисеса теории пограничного слоя распределение температуры в струе, распространяющейся вдоль плоской пластинки. Это распределение получено в зависимости от поля скоростей после определения решения уравнения общей энергии. Предполагается, что струя является жидкой и что окружающая жидкость находится в состоянии покоя при постоянной температуре.

SUR L'EXTENSION DE L'INTÉGRALE DE CROCCO AU CAS DU JET VISQUEUX DISSIPATIF

(Résumé)

Dans cet article on étudie, à l'aide des variables de Mises dans la théorie de la couche limite, la distribution de la température dans un jet qui se propage le long d'une plaque plane. Cette distribution a été obtenue en fonction du champ des vitesses après l'établissement de la solution de l'équation de l'énergie totale. On suppose que le jet est visqueux et compressible et que le fluide environnant est en repos à une température constante.

RECENZII

R. Schassberger, **Warteschlangen**, Springer-Verlag, Wien—New-York, 1973.

Diese monographische Arbeit ist eine umfassende Darstellung der allgemeinsten Modelle und Probleme der Theorie der Warteschlangen, sowie auch der wichtigsten der in der Praxisangetroffenen Modelle, und ist eine der ersten Arbeiten dieser Art in diesem Gebiet.

Die Arbeit wendet sich an Studenten und Spezialisten, welche eine entsprechende mathematische Ausbildung besitzen, sowie auch an Personen, welche in Anwendungsgebiete interessiert sind und das dazu nötige mathematische Rüstzeug besitzen. Es wird eine Darstellung und eine Analysis einer Reihe von umfassenden Resultaten verfolgt für die allgemeinsten Modelle durch eine Anwendung der allgemeinsten Methoden, welche sich auf eine klare mathematische Argumentation stützen.

Im ersten Teil behandelt der Verfasser ausführlich das allgemeinste Modell der Wartesysteme ($G \mid G \mid 1$ und $G \mid G \mid s$ bezeichnet) mit einem oder mit s Bedienungsschaltern, in welchem die Verteilung der Ankünfte bzw. der Bedienungen ein allgemeines Gesetz ist.

Anschliessend werden spezielle Fälle behandelt, in welchen die Ankünfte einem exponentiellen oder einem beliebigen Gesetz gehorchen und die Bedienungen nach einem entarteten Gesetz ausgeführt werden.

Ein Kapitel der Arbeit ist den Prioritäten-Modellen gewidmet.

Ein anderes Kapitel von grosser Aktualität ist den mit Computern in Verbindung stehenden Problemen der Wartesysteme gewidmet, und zwar werden darin insbesondere Modelle mit exponentieller Ankunft und Bedienung mit einem einzigen Schalter studiert.

Das letzte Kapitel behandelt Grenzwertprobleme der stochastischen Prozesse, welche bei einem Modell der Wartesysteme allgemeinsten Typus mit einem einzigen Schalter auftreten. Es werden in dieser Richtung Resultate erhalten, welche vergleichbar sind mit dem starken Gesetz der grossen Zahlen und dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Arbeit wird durch ein einführendes Kapitel mit den Grundbegriffen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und aus anderen erforderlichen Gebieten der Mathematik vervollständigt.

Die Darstellung des Materials ist gut organisiert, in einer klaren und vom mathematischen Standpunkt aus korrekten Formulierung.

Die Arbeit hat den Verdienst, dass es ihr durch die Darstellung der allgemeinsten Modelle der Wartesysteme gelungen ist die umfassende Problematik dieser Theorie zu systematisieren. Sie ist besonders wertvoll einerseits dank der Tatsache, dass Probleme der Wartesysteme auch für Computer behandelt wurden und ebenfalls durch die Darstellung einer Reihe von konkreten Modellen und andererseits weil sie eine der wenigen zur Zeit in der Spezialitätsliteratur existierenden umfassenden Arbeiten über Wartesysteme ist.

M. RĂDULESCU
E. OANCEA FRĂȚILĂ

CRONICĂ

1973

Şedinţe de comunicări ale Facultăţii de matematică-mecanică

12 ianuarie

Cerc. M. Jalobeanu, *Aspecte topologice şi categoriale ale sistemelor iterative.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, lect. dr. Gr. Moldovan, prof. dr. M. O. Reade, *Calculul numeric al funcţiei α-convexe a lui Koeble.*

9 februarie

Lect. dr. Gh. Coman, asist. M. Frenţiu, *Spline de aproximare a funcţiilor de două variabile.*

Lect. C. Tarţia, *În legătură cu complexitatea unor scheme.*

9 martie

Conf. dr. I. A. Rus, *Teoreme de punct fix.*

Lect. dr. Gh. Micula, *Integrarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale liniare.*

Stud. Z. Majdik, *Despre conexitatea matricelor.*

9 noiembrie

Lect. dr. I. Purdea, *Ω-semigrupuri de fracţii.*

Lect. dr. I. Kolumbán, *Probleme de optimizare nenetede.*

Participări la manifestări ştiinţifice internaţionale

25 — 28 ianuarie

Sesiunea de la Dallas, Texas, S.U.A.

Prof. dr. P. T. Mocanu, prof. dr. M. O. Reade, *The radius* of α *convexity for the class of starlike functions.*

25 februarie—3 martie

Colocviul de ecuaţii cu derivate parţiale, Oberwolfach, R.F.G.

Lect. dr. P. Szilágyi, *Die Eigenwerte des Operators von A. V. Bitzadze.*

15—21 aprilie

Colocviul de teoria distribuţiilor şi ecuaţii cu derivate parţiale, Oberwolfach, R.F.G.

Prof. dr. C. Kalik, *Die Lösung einiger Randwertaufgaben mit der semidiskreten Methode.*

Conf. dr. I. A. Rus, *Teoreme de punct fix în spaţii local convexe.*

6—10 mai

Colocviul de teoria modulelor şi de metode omologice, Oberwolfach, R.F.G.

Conf. dr. I. Gy. Maurer, *Originea comună a unor topologii definite peste module şi inele.*

3—9 iunie

Colocviul de metode numerice în teoria aproximării, Oberwolfach, R.F.G.

Lect. dr. I. Kolumbán, *Despre aproximarea trigonometrică neliniară.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Rechenaufgaben in der Theorie der besten Approximation.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Über die Verwendung der Tabellen spezieller Funktionen.*

Prof. dr. D. D. Stancu, *Evaluation of the remainders in certain approximation procedures by Meyer-König and Zeller-type operators.*

26 iunie—2 iulie

Conferinţa anuală a grupei de fizică cosmică din cadrul colaborării între ţările socialiste după programul INTERKOSMOS, Belogradcik, Bulgaria.

Prof. dr. doc. Gh. Chiş, (delegat C.N.S.T.), *Raport de activitate.*

13—24 august
Sesiunea de la Missoula, Montana, S.U.A.
Prof. dr. P. T. Mocanu, prof. dr. M. O. Reade, *The radius of α-convexity of certain classes of starlike functions.*

13—18 august
Seminarul româno-finlandez de analiză, Jyväskylä, Finlanda.
Prof. dr. P. T. Mocanu, *Generalized convexity in Geometric Function Theory.*

20—27 august
Balcaniada tineretului, Atena, Grecia.
Lect. dr. Gh. Micula,

29 august—2 septembrie
Lect. dr. Gh. Micula şi conf. dr. E. Schechter au participat la Conferinţa de analiză numerică din Keszthely (R.P. Ungară).

3—12 septembrie
Prof. dr. doc. Gh. Chiş, prof. dr. A. Pál, lect. dr. V. Ureche au participat la Adunarea generală extraordinară a U.A.I. din Varşovia (R.P. Polonă).

13—15 septembrie
Lect. dr. V. Ureche a participat la Sesiunea ştiinţifică dedicată aniversării a 500 de ani de la naşterea lui Copernic, Univ. Jagellone, Cracovia, R.P. Polonă.

septembrie
Congresul Matematicienilor austrieci, Wien, Austria.
Acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu, *Topological circles on closed orientable surfaces.*

15—19 octombrie
Colocviul ştiinţific al Institutului Politehnic din Ilmenau, R.D.G.
Lect. dr. W. Breckner, *Eine Verallgemeinerung des Dualitätssatzes aus der linearen Optimierung.*

12—20 decembrie
Colocviul de ecuaţii funcţionale, Oberwolfach, R.F.G.
Prof. dr. F. Radó, *Extinderea noţiunii de spaţiu vectorial valuat.*

Vizite, specializări, documentări în străinătate

Între 1 aprilie 1972—30 iunie 1973 lect. dr. I. Kolumbán a fost la specializare ca bursier al Fundaţiei A. v. Humboldt la Institut für angewandte Mathematik din Hamburg şi la Universitatea din München (R.F.G.).

Între 25 aprilie 1972—30 iunie 1973 lect. dr. P. Szilágyi a fost la specializare ca bursier al Fundaţiei A. v. Humboldt la Universitatea din Kiel (R.F.G.).

Între 20 ianuarie—10 februarie 1973 conf. dr. M. Rădulescu a fost la documentare la Universitatea din Moscova.

În luna mai 1973 conf. dr. I. Gy. Maurer a vizitat Academia de ştiinţe din R.P. Ungară (Budapesta) şi Universitatea din Padova (Italia) şi a ţinut conferinţele: *Originea comună a unor topologii definite peste diferite structuri algebrice*, respectiv *Diferite generalizări ale noţiunii de produs direct.*

În luna iunie 1973 prof. dr. D. D. Stancu a vizitat Universităţile din Stuttgart, Göttingen şi Hannover (R.F.G.), unde a ţinut următoarele conferinţe: *Representations of remainders in the approximation procedures by some new operators*; *Approximation of continuous functions by means of some new classes of linear positive operators*; *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators.*

În luna iulie prof. dr. E. Popoviciu şi acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu au vizitat Universitatea din Stuttgart (R.F.G.) şi au ţinut conferinţele: E. Popoviciu, *Über den Begriff des Verhaltens einer Function*; T. Popoviciu, *Über die Mittelwertsätze der Differentialrechnung.*

În 4 septembrie 1973 conf. dr. I. Gy. Maurer a vizitat Societatea de Ştiinţe Matematice Bolyai din Budapesta, unde a ţinut conferinţa: *Despre unele ecuaţii definite peste algebre universale.*

Între 3—12 septembrie 1973 prof. dr. A. Pál a vizitat Universitatea N. Copernic din Torun (R.P. Polonă).

Între 17 septembrie—17 decembrie 1973 asist. Z. Kása a fost la specializare la Universitatea din Bratislava (Cehoslovacia).

În luna octombrie 1973 prof. dr. doc. D. V. Ionescu a vizitat Universitatea Paris VI, Facultăţile de ştiinţe din Rennes, Strasbourg, Nancy şi Dijon, unde a ţinut următoarele conferinţe: *Sur les méthodes d'évaluation d'intégrales simples et multiples*; *Formules de cubature pour les fonctions de trois variables*; *Formules de cubature*; *Formules d'analyse nummérique pour les fonctions de plusieurs variables*; *Méthodes d'approximation d'intégrales simples et multiples.*

Între 12 noiembrie—19 decembrie 1973 prof. dr. P. T. Mocanu a efectuat o deplasare de documentare în S.U.A. vizitînd 9 universități și ținînd 6 conferințe: *Rezultate recente în teoria funcțiilor alfa convexe* (Univ. din Maryland); *Raze de alfa-convexitate pentru diferite clase de funcții univalente* (Univ. din Delaware); *Clasele Hardy pentru diferite spații de funcții analitice* (Univ. Michigan); *Generalizarea noțiunii de convexitate în teoria funcțiilor* (Univ. Stanford); *Funcții alfa-convexe* (Univ. South Florida); *Clase de funcții univalente* (Univ. Kentucky).

În luna decembrie 1973 prof. dr. F. Radó a vizitat Universitățile din Bochum și din Giessen (R.F.G.), unde a ținut conferințele: *Omomorfismele unui spațiu proiectiv*, respectiv *Despre geometriile Hjelmslev*.

Participări la manifestări științifice din țară

9—10 aprilie

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A OBSERVATORULUI BUCUREȘTI

Prof. dr. doc. Gh. Chiș, *Geneza ideilor copernicane.*

Lect. dr. V. Ureche, *Despre momentele de rotație ale stelelor componente ale sistemelor binare strînse.*

aprilie

VIZITĂ LA UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Asupra lucrărilor lui D. Pompeiu cu privire la formulele de medie ale calculului diferențial.*

mai

CONSFĂTUIREA CU CADRELE DIDACTICE, CU TEMA „PREDAREA ELEMENTELOR DE CALCUL ȘI PROGRAMARE ÎN LICEU", SATU-MARE

Asist. L. Lupșa, *Lecție de laborator de programare în Fortran.*

Prof. dr. I. Marușciac, *Unele aplicații ale teoriei grafelor.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Reprezentarea numerelor reale.*

Au mai participat: asist. dr. W. Breckner, conf. dr. A. Ney, prof. dr. E. Popoviciu.

25—26 mai

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI"

Conf. dr. M. Balázs, asist. G. Goldner, *Asupra simetriei și unicității diferențelor divizate în spații lineare.*

Lect. D. Borșan, *Asupra unei quasi-metrici generalizate.*

Asist. N. Both, *Corectitudine.*

Conf. dr. P. Brădeanu, *Transferul de căldură în mișcarea unui fluid vîscos pe un plan înclinat.*

Acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu, *Despre problema cuvîntului în grupuri.*

Asist. Gr. Călugăreanu, *Obiecte de automorfisme în toposuri în sens Lawvere.*

Cercet. D. Chiș, *Studiul efectului Blajko la steaua WY Draconis.*

Prof. dr. doc. Gh. Chiș, *Asupra evoluției binarelor fotometrice.*

Lect. dr. Gh. Coman, *Monospline cu două variabile și formule optimale de cubatură.*

Lect. dr. P. Enghiș, *Hipersuprafețe într-un spațiu Riemann recurent.*

Lect. dr. P. Enghiș, lect. P. Sandovici, conf. dr. M. Țarină, *Spații* A_2 *de curbură și torsiune recurentă.*

Asist. M. Frențiu, *O metodă de generare de numere pseudoaleatoare.*

Conf. dr. S. Groze, *Asupra principiului majorantei în rezolvarea ecuațiilor operaționale ce depind de un parametru.*

Lect. dr. V. Groze, *Generalizări ale planului proiectiv.*

Prof. dr. D. V. Ionescu, *O extensiune a formulei de cuadratură a lui P. Turán.*

Prof. dr. C. Kalik, *Convergența soluțiilor aproximative ale unor probleme de limită.*

Asist. L. Lupaș, *Elemente extremale ale unor conuri de funcții.*

Asist. L. Lupșa, *Despre parametrizarea unei probleme de programare hiperbolică.*

Prof. dr. I. Maruscia c, *Asupra unei programări hiperbolice.*

Lect. dr. Gh. Micula, *Produse tensoriale de sisteme spline.*

Asist. C. Mocanu, *Asupra produsului omomorf de măsuri invariante.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, *O proprietate optico-geometrică în teoria reprezentării conforme.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, prof. dr M. O. Reade, prof. dr. E. Zlotkiewicz, *Asupra funcțiilor lui Bazilevici.*

Asist. dr. Gr. Moldovan, *Noi proprietăți de aproximare ale unei clase de operatori de tip convolutiv.*

Conf. dr. I. Muntean, lect. dr. T. Precupanu, *Asupra mulțimilor H-netede în spații vectoriale reale sau complexe.*

Asist. stag. R. Neagoe, *Unele proprietăți ale omomorfelor de grupuri rezolubile.*

Conf. dr. A. Ney, *Despre clanuri secvențial complete.*

Lect. dr. E. Oancea-Frățilă, *O evoluare a densității de probabilitate cu ajutorul funcțiilor spline.*

Asist. D. Oprean, *Modelul dinamic al balanței legăturilor dintre ramuri și decizia de plan în contextul utilizării sale.*

Cercet. T. Oproiu, astronom V. Mioc, *Influența armonicii* y_4 *din dezvoltarea potențialului gravitațional terestru asupra perioadei modale a sateliților artificiali.*

Lect. dr. B. Orbán, *Ancore în planul proiectiv desarguesian.*

Prof. dr. A. Pál, *Influența efectului diurn din distribuția densității atmosferei înalte asupra mișcării sateliților artificiali.*

Prof. dr. doc. Gh. Pic, *Subgrupurile Carter ale grupurilor* π*-rezolubile.*

Cercet. V. Pop, *Determinarea parametrilor fizici la stelele de tip RR Lyrae.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra noțiunii de alură a unei funcții.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Cîteva observații asupra unei ecuații cu derivate parțiale verificate de clase speciale de funcții.*

Lect. dr. I. Purdea, Ω*-semigrupuri de fracții.*

Prof. dr. F. Radó, *Despre perechi perpendiculare de sisteme Steiner.*

Conf. dr. M. Rădulescu, *O proprietate duală a unei probleme de programare neliniară.*

Conf. dr. I. A. Rus, *Cîteva observații asupra teoriei punctului fix.*

Conf. dr. E. Schechter, *Convergența soluției numerice a unei ecuații parabolice neliniare.*

Asist. M. Schechter, *Omomorfisme de relații induse prin cuantificare.*

Lect. dr. I. Stan, *Unele probleme ale difuziei convective.*

Prof. dr. D. Stancu, *Studiul proprietăților de aproximare ale unei noi clase de operatori de tip Meyer-König și Zeller.*

Lect. C. Tarția, *Asupra unor proprietăți ale complexității în sensul lui Kolmogorov.*

Asist. D. Trif, *Asupra teoremei graficului închis și a teoremei mărginirii uniforme.*

Cercet. pr. dr. I. Tudoran, *Considerații asupra mișcării apsidale la două stele duble fotometrice.*

Lect. dr. V. Ureche, *Sisteme binare strînse cu orbite eliptice.*

Asist. dr. A. Vasiu, *Asupra unei clase de plane metrice.*

Asist. dr. A. Vasiu, *Incercări biostatice de apreciere a erorii determinate de calitatea solului de ogor în interpretarea antibiogramelor.*

Lect. dr. E. Virág, *Extinderi regulate de grupuri.*

Asist. H. Wiesler, *Asupra unor categorii închise.*

1—3 iunie

SESIUNEA INSTITUTULUI PEDAGOGIC ORADEA.

Conf. dr. I. A. Rus, *Teoreme de punct fix.*

20 iunie

CONFERINȚA ÎN CADRUL SECȚIEI I A ACADEMIEI R. S. R.

Acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu, *Noduri și suprafețe închise orientabile.*

6—12 septembrie

COLOCVIUL DE TEORIA CONSTRUCTIVĂ A FUNCȚIILOR, CLUJ

Conf. dr. M. Balázs, asist. G. Goldner, *On divided differences and Fréchet derivates.*

Lect. dr. W. Breckner, *Probleme de optimizare în spații vectoriale topologice ordonate*

Prof. dr. D. V. Ionescu, lect. dr. P. Pavel, *Sur une formule de quadrature de type Newton-Turán.*

Prof. dr. D. V. Ionescu, *Sur quelques formules de cubature.*

Lect. dr. I. Kolumbán, *Condiții de optim de ordinul doi.*

Asist. L. Lupaș, *Asupra unor inegalități și utilizarea lor în teoreme de aproximare.*

Asist. L. Lupșa, *Asupra unei probleme de programare în variabilele 0 și 1.*

Asist. N. Lupșa, *Alegerea codificării alfabetului unui limbaj în vederea optimizării compilatorului.*

Prof. dr. I. Maruşciac, *An Algorithm for the best* L_p *approximation in the complex plane.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, *Convexitate generalizată în teoria geometrică a funcțiilor.*

Conf. dr. A. Ney, *La point de vue constructif dans la théorie de séries.*

Conf. dr. A. Ney, *Séries et suites d'ensemble.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Noțiunea de funcție convexă și ideea de alură.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Problema restului în formulele de aproximare ale analizei.*

Prof. dr. D. D. Stancu, *Aproximarea funcțiilor continue cu ajutorul unei noi clase de operatori liniari pozitivi.*

octombrie

SEMINARUL DE ECUAȚII FUNCȚIONALE, IAȘI

Asist. G. Goldner, *Asupra problemei lui Darboux.*

Lect. dr. I. Kolumbán, *Probleme de optimizare cu restricții.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Asupra unui sistem de ecuații funcționale.*

Conf. dr. I. A. Rus, *Principii de maxim pentru soluțiile unui sistem de ecuații diferențiale.*

octombrie

SESIUNEA JUBILIARĂ ȚIȚEICA-POMPEIU A ACADEMIEI, BUCUREȘTI

Prof. dr. D. V. Ionescu, *Relațiile lui D. Pompeiu cu Universitatea din Cluj; Diferența divizată la funcțiile de trei variabile.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Cercetări ale lui D. Pompeiu legate de teoria interpolării.*

Acad. prof. dr. doc. T. Popoviciu, *Teoremele de medie ale calculului diferențial; Despre liniile poligonale înscrise și circumscrise unui arc convex.*

Întreprinderea Poligrafică Cluj 338/1974.

În cel de al XIX-lea an de apariţie (1974), *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică-mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
ştiinţe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIX году издания (1974) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XIX-e année de publication (1974) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les series suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).