STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

1971

CLUJ

ANUL XVI 1971

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

Cronică — Хроника — Chronique — Chronicle

PROFESORUL EMERIT DUMITRU V. IONESCU

— La aniversarea a 70 de ani —

La 27 mai 1971 profesorul emerit, doctor docent în științe, Dumitru V. Ionescu a împlinit vîrsta de 70 de ani. Activitatea didactică și științifică, care umple aproape o jumătate de veac, s-a remarcat încă de la început prin cursuri de o înaltă ținută științifică, predate cu un deosebit talent pedagogic și prin lucrări științifice din cele mai variate domenii ale matematicii. Ceea ce l-a făcut cunoscut pe profesorul D.V. Ionescu în lumea matematică internațională, sînt în special valoroasele sale contribuții din domeniul Ecuațiilor diferențiale și Analizei numerice. Astăzi numeroșii săi elevi și colaboratori aplică în mod consecvent în cercetările lor „metoda funcției φ", care se identifică cu însuși creatorul ei, omul de știință D.V. Ionescu.

Cu ocazia acestei aniversări, întregul colectiv al Facultății de Matematică-Mecanică dedică acest număr al revistei sale profesorului și omului de știință Dumitru V. Ionescu, ca semn al înaltei prețuiri față de unul dintre cei mai eminenți dascăli ai săi.

Prof. dr. PETRU MOCANU
Decanul Facultății de Matematică—Mecanică a Universității Babeș-Bolyai din Cluj.

QUELQUES REMARQUES SUR LA THÉORIE DU POINT FIXE (I)

IOAN A. RUS

§1. Définitions et exemples. Position du problème. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (voir par exemple, Barry Mitchell [10], Mac Lane-Birkhoff [9], Levy-Bruhl [12], I. Bucur [3], S. Lang [11] etc.) Désignons par $ob\mathcal{C}$, les objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Si $A,B \in ob\mathcal{C}$, notons par $Mor(A,B)$ l'ensemble des morphismes de source A et de but B. Dans ce qui suit nous considérons seulement des catégories dont les morphismes sont des applications.

DÉFINITION 1.1. Un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ a la propriété de point fixe, si tout morphisme $f \in Mor(A,A)$, a au moins un point fixe.

Exemple 1.1. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie *Top* , des espaces topologiques. Dans ce cas nous obtenons la notion connue de „propriété de point fixe d'un espace topologique par rapport à l'application continue". Tout objet de cette catégorie n'a pas la propriété de point fixe (voir, par exemple, Van der Walt [17], E. Fadell [6]).

Exemple 1.2. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie *Gr*, des groupes. Dans ce cas tout objet de cette catégorie a la propriété de point fixe (voir, D. Gorenstein [7]).

Exemple 1.3. Soit C la catégorie d'ensembles ordonnés. Dans ce cas nous obtenons la notion de „la propriété de point fixe d'un ensemble ordonné, par rapport à l'application isotone". Tout objet de cette catégorie n'a pas la propriété de point fixe (voir Van der Walt [17]).

DÉFINITION 1.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ a la propriété de point fixe si tout objet $A \in obC$, a la propriété de point fixe.

DÉFINITION 1.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont les objets sont des algèbres universelles (voir Levy-Bruhl [12]). De plus, nous considérons en chaque objet de $\mathcal{C}$ donnée un élément mis en évidence, fixe, noté par O (ou O_A și $O \in A$), et nous supposons que O_A est point fixe pour tout $f \in Mor(A,A)$. On dit, par définition, que $f \in Mor\ (A,A)$ est libre de point fixe si O_A est un point fixe unique pour f (voir dans le cas des groupes *D.* Gorenstein [7], dans le cas des anneaux E. Patterson [14] et K. Iseki [8] dans le cas des algèbres).

DÉFINITION 1.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un foncteur.

On dit qu'un morphisme f est fixe pour F si $F(f) = f$.

DÉFINITION 1.5. On dit, par définition, que le foncteur $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ conserve la propriété de point fixe s'il transforme un morphisme avec point fixe en un morphisme avec point fixe.

DÉFINITION 1.6. On dit que le foncteur $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est libre de point fixe s'il a comme point fixe au plus des morphismes neutres.

Le but principal de ces notes est l'étude des notions définies ci-dessus. Dans cette première note nous considérons le cas dans lequel la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie des ensembles, (notée par *Ens*.)

§ 2. Point fixe des morphismes. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'*Ens*, A, B deux objets de $\mathcal{C}$ et $f \in Mor(A,B)$, $A \cap B \neq \Phi$. Les points fixes d'un tel morphisme ont été étudiés par A. Abian [1], [2]. Le cas $f \in Mor(A,A)$ a été étudié par A. Makowski — K. Wisniewski [13].

A lieu aussi le

THÉORÈME 1.1. *Soit $f \in Mor(A,A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i). *f a au moins un point fixe.*

(ii). *Si $g \in Mor\ (A,A)$ est surjective et g_d^{-1} est une inverse à droite de g, alors l'application g_d^{-1} $ofog$ a au moins un point fixe.*

(iii). *Il existe une surjection $g \in Mor(A,A)$, telle que au moins une inverse à droite, g_d^{-1}, a la propriété que g_d^{-1} $ofog$ a au moins un point fixe.*

(iv). *Si $g \in Mor(A,A)$ est une injection et g_d^{-1} est une inverse à gauche de f, alors $gofo$ g_d^{-1} a au moins un point fixe.*

(v). *Il existe une injection $g \in Mor(A,A)$, telle que au moins une inverse à gauche de g, g_g^{-1} a la propriété que $gofo$ g_g^{-1} a au moins un point fixe.*

(vi). *Il existe $g \in Mor(A,A)$ qui a un point fixe unique et $gof = fog$.*

Démonstration. Voir S. C. Chu-Diaz [4], Diaz [5], A. I. Rus [16].

§ 3. Points fixes des foncteurs. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Si $f \in Mor(A,B)$ est un morphisme fixe pour F, il résulte que $F(A) = A$ et $F(B) = B$. C'est-à-dire que 1_A et 1_B sont des morphismes fixes pour F. Donc pour étudier les morphismes fixes d'un foncteur on étudie les objets fixes et ensuite, si A et B sont des objets fixes, on détermine les morphismes fixes de la forme $f: A \to B$.

Nous avons tout de suite le

THÉORÈME 1.2. Si F, $G: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *sont deux foncteurs covariants commutatifs et le foncteur G a un morphisme fixe unique, alors F a au moins un morphisme fixe.*

§ 4. Foncteurs qui conservent la propriété de point fixe. Nous commençons par:

Exemple 1.4. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'*Ens*. Le foncteur produit cartésien de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans Ens, conserve la propriété de point fixe. A lieu le

THÉORÈME 1.3. *Supposons que, F, $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont deux foncteurs covariants tels que*

(i) *Il existe un morphisme fonctoriel, $\tau: F \to G$.*

(ii) *F conserve la propriété de point fixe.*

Alors G conserve la propriété de point fixe.

Démonstration. Soit $f \in Mor\,(A,A)$ $A \in ob\,\mathcal{C}$, un morphisme avec point fixe et soit x_0 un point fixe de $F(f)$. Le théorème résulte de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd] & & & \tau_A(x_0) \arrow[ddd] \\
& F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] & \\
& F(A) \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) & \\
x_0 \arrow[rrr, mapsto] & & & \tau_A(x_0)
\end{tikzcd}$$

§ 5. **Remarques.** *Remarque* 1.1. On ne connaît pas de théorèmes d'unicité pour le point fixe d'une application d'un ensemble en lui-même.

Remarque 1.2. On ne connaît pas dans Ens des théorèmes de point fixe pour des applications multivoques ou, plus généralement, pour des relations binaires (voir J. Riguet [15]).

Remarque 1.3. Existe-t-il des exemples „naturels"

(i). de foncteurs qui conservent la propriété de point fixe?

(ii). de foncteurs libres de point fixe?

(Manuscrit reçu le 20 septembre 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Abian, A., *A fixed point theorem*, „Nieuw voor Wiskunde", 16 (1968), 184–185.
2. Abian, A., *A fixed point theorem for mapping*, „J. Math. Anal. Appl.", 24 (1968), 146–14.
3. Bucur, I., *Algebră omologică*, București, 1965.
4. Chu, S. C., Diaz, J. B., *On „in the large" applications of the contraction principle*, in „Differential equation and dynamical systems" Acad. Press 1967, 235–238.
5. Diaz, J. B., *Remarks on a generalization of Banach principle of contraction mapping*, in „Theory. of distributions", Lisboa, 1964, 123–131.
6. Fadell, E., *Recent results in the fixed point theory of continous maps*, „Bull. Amer. Math. Soc.," **76** (1970), 10–29.
7. Gorenstein, D., *Finite groups*, New York, 1968.
8. Iseki, *On endomorphism with fixed element on algebra*, „Proc. Japau Acad.", 40 (1964), 403.
9. Lane Mac-Birkhoff, G., *Algebra*, New York, 1967.
10. Mitchell, Barry, *Theory of categories*, Acad. Press, New York, 1965.
11. Lang, S., *Introduction aux variétés différentiables*, Paris, 1967.
12. Bruhl, J. Lévy, *Introduction aux structures algébriques*, Dunod, Paris, 1968.
13. Makowski, A., Wisniewski, K., *Generalization of Abian's fixed point theorem*, „Prace Mat.", $XIII_1$ (1969), 63–65.
14. Patterson, E. M., *On regular automophisms of certain classes of rings*, „Quart. J. Math.", 12, 46 (1961), 127–133.
15. Riguet, J., *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, „Bull. Soc. Math. Frace", **76** (1968), 1–4, 114–155.
16. Rus, A. I., *Asupra existenței punctelor fixe ale unei aplicații*. „Lucr. Şt. Inst. Pedag. Tîrgu-Mureș", 2, 1970.
17. Walt, T. Van der, *Fixed and almost fixed points*. Math. Centrum. Amsterdam, 1963.

CÎTEVA OBSERVAŢII ASUPRA TEORIEI PUNCTULUI FIX (I)

(Rezumat)

Se consideră categorii ale căror obiecte sint diferite tipuri de algebre universale iar morfismele sint aplicaţii ce satisfac la anumite condiţii. În asemenea categorii se definesc noţiunile: obiect cu proprietatea de punct fix, categorie cu proprietatea de punct fix, morfisme libere de punct fix, morfism fix al unui functor, functor ce conservă proprietatea de punct fix, functor liber de punct fix. În această primă notă se studiază noţiunile de mai sus în categoria Ens.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (I)

(Резюме)

Рассматриваются категории, объектами которых являются различные типы универсальных алгебр, а морфизмы являются преобразованиями, удовлетворяющими определённым условиям. В подобных категориях определяются понятия: объект со свойством неподвижной точки, категория со свойством неподвижной точки, морфизмы, свободные от неподвижной точки, неподвижный морфизм одного функтора, функтор сохраняющий свойство неподвижной точки, функтор свободный от неподвижной точки. В настоящей работе изучаются вышеупомянутые понятия в категории Ens.

SUR UN THÉORÈME DE POINCARÉ

I. PURDEA

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, $S(G)$ l'ensemble des sous-groupes du groupe $(G, \cdot)$ et $E(G)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur G. On considère les applications

$$F : S(G) \to E(G),\ F_d : S(G) \to E(G)$$

définies de la manière suivante: pour tout $H \in S(G)$ et $x,y \in G$

$$(x,y) \in F_s(H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H,$$
$$(x,y) \in F_d(H) \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$$

Les applications F_s et F_d sont injectives et conservent l'intersection. On sait que les ensembles quotient $G/F_s(H)$ et $G/F_d(H)$ ont la même puissance, et leur cardinal se nomme l'indice du sous-groupe H dans le groupe G.

On généralisera ici le théorème suivant de Poincaré. L'intersection d'une famille finie de sous-groupes d'indice fini est un sous-groupe d'indice fini.

Soit A un ensemble et ρ une relation d'équivalence sur A.

DÉFINITION Le cardinal de l'ensemble quotient $A|\rho$ se nomme l'indice de la relation d'équivalence ρ sur A et on le désignera par $|A : \rho|$.

THÉORÈME *Si ρ_i, $i \in I$ est une famille de relations d'équivalence sur l'ensemble A, on a pout tout $i \in I$.*

$$|A : \rho_i| \leqslant |A : \bigcap_{i\in I} \rho_i| \leqslant \prod_{i\in I} |A : \rho_i|. \tag{1}$$

Démonstration: Si $A/\rho_i = \{A_{ij}\}_{j\in J_i}$ alors $\rho_i = \bigcup_{j\in J_i} A_{ij} \times A_{ij}$. On prouvera que

$$\bigcap_{i\in I} \rho_i = \bigcup_{f\in \underset{i\in I}{\times} J_i} [(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})] \tag{2}$$

où $\underset{i\in I}{X} J_i$ est le produit cartésien des ensembles J_i, $i \in I$. Soit $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} \rho_i$, donc $(x, y) \in \rho_i$, pour tout $i \in I$. Il existe donc pour tout $i \in I$ un seul $j \in J_i$ tel que $x, y \in A_{ij}$. Par conséquent, si on définit l'application $f: I \to \bigcup_{i\in I} J_i f(i) = j$ on a $f \in \underset{i\in I}{X} J_i$ et $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_{if(i)}$. Il en résulte:

$$(x, y) \in \bigcup_{f\in \underset{i\in I}{\times} J_i} [(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})]$$

d'où l'on obtient:

$$\bigcap_{i\in I}\rho_i \subseteq \bigcup_{f\in \times_{i\in I} J_i} [(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})] \tag{3}$$

Soit

$$(x,y) \in \bigcup_{f\in \times_{i\in I} J_i} [(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})]$$

donc il existe un élément $f_0 \in \underset{i\in I}{X} J_i$ tel que

$$(x,\ y) \in (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})$$

donc $x,y \in A_{if_0(i)}$ pour tout $i \in I$, c'est à dire $(x,\ y) \in \rho_i$ pour tout $i \in I$. Il s'ensuit que $(x,\ y) \in \bigcap_{i\in I} \rho_i$, ce qui implique

$$\bigcup_{f\in \times_{i\in I} J_i} [(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \times (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)})] \subseteq \bigcap_{i\in I} \rho_i \tag{4}$$

La formule (2) s'obtient à partir des formules (3) et (4). On prouvera maintenant que si $f \neq g$, alors

$$(\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \cap (\bigcap_{i\in I} A_{ig(i)}) = \Phi \tag{5}$$

où Φ est l'ensemble vide.

Supposons que

$$x \in (\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}) \cap (\bigcap_{i\in I} A_{ig(i)})$$

donc $x \in A_{if(i)}$ et $x \in A_{(ig i)}$, pour tout $i \in I$ donc $A_{if(i)} = A_{ig(i)}$. D'autre part il résulte de $f \neq g$ l'existence d'un élément $i_0 \in I$ tel que $f(i_0) \neq g(i_0)$, donc $A_{i_0 f(i_0)} \neq$ $\neq A_{i_0 g(i_0)}$ ce qui este contradictoire.

Des formules (2) et (5) on obtient

$$A/(\bigcap_{i\in I} \rho_i) = \{\bigcap_{i\in I} A_{if(i)} \mid f \in \underset{i\in I}{\times} J_i \text{ et } \bigcap_{i\in I} A_{if(i)} \neq \Phi\}$$

D'où il résulte que le cardinal de l'ensemble $A/(\bigcap_{i\in I}\rho_i)$ est plus petit ou tout au plus égal au cardinal de l'ensemble $\underset{i\in I}{X} J_i$ donc,

$$|A : \bigcap_{i\in I} \rho_i| \leqslant \prod_{i\in I} |A : \rho_i|$$

L'inégalité

$$|A\ :\ \rho_i| \leqslant |A : \bigcap_{i\in I} \rho_i]$$

résulte des inclusions $\bigcap_{i\in I} \rho_i \subseteq \rho_i$, $i \in I$.

Conséquence. L'intersection d'une famille finie de relations d'équivalence d'indice fini est une relation d'équivalence d'indice fini.

Observations. 1. Si parmi les équivalences de la famille ρ_i, $i \in I$ il existe une équivalence ρ_{i_0} telle que $\rho_{i_0} \subseteq \rho_i$, $i \in I$ alors la première inégalité de (1) devient une égalité.

2. pour $f \in \underset{i \in I}{\times} I_i$ on a $\bigcap_{i \in I} A_{ig(i)} \neq \emptyset$ alors la deuxième inégalité de (1) devient une égalité.

(Manuscrit reçu le 16 août 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Kuroş, A. G., *Teoria grup*, Nauka, Moscva, 1967.
2. Ore, O., *Theory of equivalence relations*, „Duke Math. J.," **9**, 573–627, 1942.

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI POINCARÉ

(Rezumat)

Fie ρ_i, $i \in I$ o familie de relaţii de echivalenţă pe mulţimea A.

Teoremă. ***Numerele cardinale $|A : \rho_i|$ şi $|A : \bigcap_{i \in I} \rho_i|$ asociate mulţimilor factor A/ρ_i şi $A/(\bigcap_{i \in I} \rho_i)$ verifică inegalităţile:***

$$|A_i : \rho_i| \leqslant |A : \bigcap_{i \in I} \rho_i| \leqslant \prod_{i \in I} |A : \rho_i|.$$

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ

(Резюме)

Пусть ρ_i, $i \in I$ — семейство соотношений эквивалентности на множестве A.

Теорема.' Порядковые числа $|A : \rho_i|$ и $|A : \bigcap_{i \in I} \rho_i|$, присоединённые к фактор-множествам A/ρ_i и $A/\bigcap_{i \in I} \rho_i$ удовлетворяют неравенствам

$$|A_i : \rho_i| \leqslant |A : \bigcap_{i \in I} \rho_i| \leqslant \prod_{i \in I} |A : \rho_i|$$

SUR DEUX NOTIONS DE CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE DANS LA REPRÉSENTATION CONFORME

PETRU T. MOCANU

1. Dans une note antérieure [1] j'ai introduit une notion de convexité généralisée dans la théorie des représentations conformes, appelée α — convexité, qui pour un α compris entre 0 et 1 sera intermédiaire entre la propriété d'étoilement par rapport à l'origine et celle de convexité (les contenant comme deux cas limite pour $\alpha = 0$ respectivement $\alpha = 1$).

Soit f une fonction holomorphe et univalente dans un domaine D qui contient l'origine et $f(0) = 0$. Désignons par C une courbe de J o r d a n de classe C^2, entourant l'origine, qui est contenue avec son intérieur dans D et d'équation $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, $z(a) = z(b)$. Soit $\varphi = \varphi(t) = \arg f(z(t))$. L'angle ω fait par la normale extérieure à la courbe $\Gamma = f(C)$ au point $f(z(t))$ avec le vecteur de position de ce point est donné par

$$\omega = \arg \frac{\dot{z} f'(z)}{f(z)}, \quad z = z(t), \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

Soit un nombre α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. On dit que la courbe $\Gamma = f(C)$ est α — convexe si l'angle $\varphi + \alpha\omega$ fait avec l'axe réel positif par le vecteur dont l'origine est le point $f(z) \in \Gamma$, $z = z(t)$, et qui divise dans le rapport α l'angle fait avec le vecteur de position par la normale extérieure à Γ au point $f(z)$, croît avec t, $a \leqslant t \leqslant b$, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}(\varphi + \alpha\omega) \geqslant 0, \quad t \in [a, b].$$

On dit aussi, dans ce cas, que la fonction f est α — convexe sur C.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit α—convexe sur la courbe C est que pour tout $t \in [a, b]$ soit vérifiée l'inégalité

$$p = \operatorname{Im}\left[(1-\alpha)\frac{\dot{z} f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{\dot{z} f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)\right] \geqslant 0.$$

Pour $\alpha = 0$, respectivement $\alpha = 1$, on déduit la condition respective d'étoilement ou de convexité.

2. Supposons que f est α—convexe sur C (pour un α donné, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Pour $t \in [a, b]$ considérons la droite L_t qui passe par le point $f(z)$, $z = z(t)$, et qui fait l'angle $\varphi + \alpha\omega$ avec l'axe réel positif.

On pose le problème de déterminer l'enveloppe des droites $\{L_t\}$ $t \in [a, b]$. Désignons par $\mathfrak{L}$ cette enveloppe. Evidemment, pour $\alpha = 0$, $\mathfrak{L}$ se réduit à et pour $\alpha = 1$, $\mathfrak{L}$ est la développée de la courbe $\Gamma = f(C)$.

Soit $w = w(t)$, $t \in [a, b]$, l'équation de la courbe $\mathfrak{L}$.

On a pour $w \in \mathfrak{L}$

$$\arg[f(z) - w] = \arg \dot{w} = \arg f(z) + \alpha \arg \frac{\dot{z}f'(z)}{f(z)}$$

donc

$$\operatorname{Im} \frac{\dot{w}}{f(z) - w} = 0, \quad \frac{\dot{w}}{f(z) - w} \geqslant 0$$

où $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$.

En vertu de l'égalité

$$\frac{d}{dt} \arg \Phi = \operatorname{Im} \frac{d}{dt} \operatorname{Log} \Phi,$$

on déduit

$$\operatorname{Im} \frac{\dot{z}f'(z) - \dot{w}}{f(z) - w} = (1 - \alpha) \operatorname{Im} \frac{\dot{z}f'(z)}{f(z)} + \alpha \operatorname{Im} \left(\frac{\dot{z}f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) = p$$

donc

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \dfrac{\dot{w}}{f(z) - w} = 0 \\ \operatorname{Im} \dfrac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = p \end{cases} \tag{1}$$

En dérivant la dernière équation par rapport à t on a

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\ddot{z}f'(z) + \dot{z}^2 f''(z)}{f(z) - w} - \frac{\dot{z}f'(z)(\dot{z}f'(z) - \dot{w})}{(f(z) - w)^2} \right] = \dot{p}$$

En désignant

$$F = \frac{\dot{z}f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = P + iQ$$

on déduit, en tenant compte de (1),

$$p \frac{\dot{w}}{f(z) - w} - \operatorname{Im} \left(\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} \right)^2 + \operatorname{Im} F \frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = \dot{p}$$

d'où

$$p \frac{\dot{w}}{f(z) - w} - 2p \operatorname{Re} \frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} + Q \operatorname{Re} \frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} + Pp = \dot{p}$$

On a alors

$$(Q - 2p)\operatorname{Re}\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = \dot{p} - Pp - p\,\frac{\dot{w}}{f(z) - w}$$

$$(Q - 2p)\operatorname{Im}\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = p(Q - 2p)$$

donc

$$(Q - 2p)\,\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = -p\,\frac{\dot{w}}{f(z) - w} + \dot{p} - p\bar{F} - 2ip^2$$

$$(Q - 2p)\,\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - w} = -p\,\frac{\dot{w}}{f(z) - w} + \dot{p} - p\bar{F} - 2ip^2$$

On déduit que l'enveloppe $\mathfrak{L} : w = w(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire de premier ordre :

$$\dot{w} + Aw = B + Af(z)$$

où

$$A = \frac{\dot{p}}{p} - \bar{F} - 2ip$$

$$B = \left(2 - \frac{Q}{p}\right)\dot{z}f'(z).$$

3. On peut introduire une autre notion de convexité généralisée de la façon suivante :

Soit f une fonction holomorphe et univalente dans un domaine D qui contient le disque $\{z\,;\,|z| \leqslant r\}$ et $f(0) = 0$. Soit $0 < \alpha < 1$. On dit que f est α-étoilée sur le cercle $C_r = \{z\,;\,|z| = r\}$ si

$$\frac{d}{d\theta}\arg\,[f(z) - f(\alpha z)] \geqslant 0, \quad z = re^{i\theta}.$$

Cette condition s'exprime encore sous la forme équivalente :

$$p(\theta) = \operatorname{Re}\frac{zf'(z) - \zeta f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \geqslant 0 \tag{2}$$

où

$$z = re^{i\theta}, \quad \zeta = \alpha z.$$

Pour les cas limite respectifs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, on obtient respectivement la condition d'étoilement

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqslant 0$$

où la condition de convexité

$$\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \geqslant 0$$

4. Pour α donné, $0 < \alpha < 1$, on pose le problème de déterminer la borne supérieure r^* des nombres positifs r tels que f soit α-étoilé sur C .

Comme dans [2] on peut montrer que r^* est donné par $|z|$ où z vérifie le système :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z) - \alpha zf'(\alpha z)}{f(z) - f(\alpha z)} = 0 \\ &\mathrm{Re}\,\frac{zf''(z) - \alpha^2 zf''(\alpha z)}{f'(z) - \alpha f'(\alpha z)} + 1 = 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = z + az^n$$

Le système (3) s'écrit

$$\mathrm{Re}\,\frac{1 + na\beta z^{n-1}}{1 + a\beta z^{n-1}} = 0$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{n(n-1)a\beta z^{n-1}}{1 + na\beta z^{n-1}} + 1 = 0, \quad \beta = 1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-1},$$

ou bien

$$\mathrm{Re}\,\frac{1 + na\beta z^{n-1}}{1 + a\beta z^{n-1}} = 0$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{1 + n^2 a\beta z^{n-1}}{1 + na\beta z^{n-1}} = 0$$

Donc on a

$$2 + (n + 1\, a\beta z^{n-1} + (n + 1)\bar{a}\beta z^{n-1} + 2n|a|^2\beta^2 z^{2(n-1)} = 0$$

$$2 + n(n + 1)\, a\beta z^{n-1} + n(n + 1)\bar{a}\beta z^{n-1} + 2n^3|a|^2\beta^2|z|^{2(n-1)} = 0$$

d'où on obtient

$$r^* = \sqrt[n-1]{\frac{1-\alpha}{n|a|(1-\alpha^n)}}$$

5. Supposons que f est α-étoilé sur le cercle C_r. Soit E_θ la droite qui passe par les points $f(z)$ et $f(\alpha z)$, $z = re^{i\theta}$. On pose le problème de déterminer l'enveloppe des droites $\{E_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$. Désignons par $\mathcal{E}$ cette enveloppe. Pour $\alpha = 0$ $\mathcal{E}$ se réduit à 0 et pour $\alpha = 1$ $\mathcal{E}$ est la développée de la courbe $f(C_r)$.

Soit $w = w(\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, l'équation de la courbe $\mathcal{E}$. Pour $w \in \mathcal{E}$ on a

$$\arg \dot{w} = \arg\,[f(z) - f(\zeta)] = \arg\,[f(\zeta) - w] = \arg\,[f(z) - w]$$

où $\zeta = \alpha z$.

On déduit

$$\mathrm{Im}\,\frac{\dot{w}}{f(z) - w} = 0, \quad \mathrm{Im}\,\frac{w}{f(\zeta) - w} = 0, \quad \mathrm{Im}\,\frac{f(\zeta) - w}{f(z) - w} = 0.$$

En dérivant la dernière équation par rapport à θ on obtient

$$\operatorname{Im}\left[\frac{i\zeta f'(\zeta)-\dot{w}}{f(z)-w}-\frac{(izf'(z)-\dot{w})(f(\zeta)-w)}{(f(z)-w)^2}\right]=0,$$

ou bien

$$\operatorname{Im}\frac{i\zeta f'(\zeta)}{f(z)-w}-\frac{f(\zeta)-w}{f(z)-w}\operatorname{Im}\frac{izf'(z)}{f(z)-w}-\operatorname{Im}\frac{\dot{w}}{f(z)-w}+\frac{f(\zeta)-w}{f(z)-w}\operatorname{Im}\frac{\dot{w}}{f(z)-w}=0.$$

On obtient donc le système suivant:

$$\operatorname{Im}\frac{f(\zeta)-w}{f(z)-w}=0$$

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(z)-w}-\frac{f(\zeta)-w}{f(z)-w}\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}=0.$$

En désignant

$$f(z)=f,\ f(\zeta)=\varphi,\ f'(z)=f',\ f'(\zeta)=\varphi'$$

on a

$$\operatorname{Im}\frac{\varphi-w}{f-w}=0,\quad \operatorname{Re}\frac{\zeta\varphi'}{f-w}-\frac{\varphi-w}{f-w}\operatorname{Re}\frac{zf'}{f-w}=0$$

ou bien

$$\varphi\bar{f}-f\bar{\varphi}+(\bar{\varphi}-\bar{f})\,w-(\varphi-f)\,\bar{w}=0$$

$$\frac{\zeta\varphi'}{f-w}+\frac{\bar{\zeta}\,\bar{\varphi}'}{\bar{f}-\bar{w}}-\frac{\varphi-w}{f-w}\left(\frac{zf'}{f-w}+\frac{\bar{z}\bar{f}'}{\bar{f}-\bar{w}}\right)=0.$$

On a successivement

$$\bar{f}-\bar{w}=\frac{\bar{\varphi}-\bar{f}}{\varphi-f}(f-w)$$

$$\zeta\varphi'+\bar{\zeta}\bar{\varphi}'\frac{\varphi-f}{\bar{\varphi}-\bar{f}}=\left(zf'+\bar{z}\bar{f}'\frac{\varphi-f}{\bar{\varphi}-\bar{f}}\right)\frac{\varphi-w}{f-w}$$

$$\frac{\varphi-w}{f-w}\operatorname{Re}\frac{zf'}{f-\varphi}=\operatorname{Re}\frac{\zeta\varphi'}{f-\varphi'}$$

d'où on obtient

$$w=\lambda f(\zeta)+\mu f(z) \tag{4}$$

où

$$\lambda=\frac{1}{p}\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)},\quad \mu=-\frac{1}{p}\operatorname{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}$$

$$p=\operatorname{Re}\frac{zf'(z)-\zeta f'(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}$$

$$z=re^{i\theta},\ \zeta=\alpha z.$$

On a évidemment

$$\lambda + \mu = 1 \tag{5}$$

Pour vérifier que (4) est vraiment l'équation de l'enveloppe $\mathcal{E}$ on suppose que (4) a lieu. En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$\dot{w} = \dot{\lambda} f(\zeta) + \lambda i \zeta f'(\zeta) + \dot{\mu} f(z) + i\mu z f'(z)$$

Tenant compte de $\dot{\lambda} + \dot{\mu} = 0$, on a

$$\dot{w} = \dot{\lambda}[f(\zeta) - f(z)] + i[\lambda\zeta f'(\zeta) + \mu z f'(z)]$$

De (4) et (5) on déduit

$$f(z) - w = \lambda[f(\zeta) - f(z)]$$

Donc

$$\frac{\dot{w}}{f(z) - w} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i\frac{\lambda\zeta f'(\zeta) + \mu z f'(z)}{f(\zeta) - f(z)}$$

et on obtient

$$\mathrm{Im}\,\frac{\dot{w}}{f(z) - w} = \mathrm{Re}\,\frac{\lambda\zeta f'(\zeta) + \mu z f'(z)}{f(\zeta) - f(z)} = 0.$$

Remarquons que l'équation (4) de l'enveloppe $\mathcal{E}$ s'obtient sans aucune quadrature.

(Manuscrit reçu le 30 novembre 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Mocanu, P. T., *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, „Mathematica" **11** (34), 1, 1969, pp. 127–133.
2. Mocanu, P. T., *Sur le rayon d'étoilement et le rayon de convexité de fonctions holomorphes*, „Mathematica", 4 (27), 1, 1962, pp. 57–63.

ASUPRA A DOUĂ NOŢIUNI DE CONVEXITATE GENERALIZATĂ ÎN REPREZENTAREA CONFORMĂ

(Rezumat)

În prima parte a acestei note se fac cîteva consideraţii geometrice privind o noţiune de convexitate generalizată introdusă în [1].

În a doua parte se introduce o altă noţiune de convexitate generalizată (numită α-stelaritate) în felul următor: fie f o funcţie olomorfă şi univalentă într-un domeniu D, care conţine discul $\{z; |z| \leqslant r\}$ şi $f(0) = 0$. Fie $0 < \alpha < 1$. Zicem că f este α-stelată pe cercul $C_r = \{z; |z| = r\}$ dacă

$$\frac{d}{d\theta}\arg[f(z) - f(\alpha z)] \geqslant 0, \quad z = re^{i\theta}.$$

Această condiţie se exprimă sub forma echivalentă (2). Se notează cu $\mathcal{E}$ învelitoarea familiei de drepte $\{E_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$, unde E_θ este dreapta care trece prin punctele $f(z)$ şi $f(\alpha z)$. Se arată că ecuaţia curbei $\mathcal{E}$ este dată de (4).

О ДВУХ ПОНЯТИЯХ ОБОБЩЁННОЙ ВЫПУКЛОСТИ В КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

(Резюме)

В первой части статьи делаются некоторые геометрические соображения о понятии обобщённой выпуклости, введённом в [1].

Во второй части работы вводится другое понятие обобщённой выпуклости (называемое α-звёздообразностью) следующим образом: Пусть f-голоморфная и однозначная функция в области D, содержащей диск $\{z; |z| r\} \leqslant$ и $f(0) = 0$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Говорим, что f является α-звёздообразной на круге $C_r = \{z; |z| = r\}$ если

$$\frac{d}{d\theta} \arg [f(z) - f(\alpha z)] \geqslant 0, \quad z = re^{i\theta}.$$

Это условие выражается в эквивалентном виде (2). Обозначается через $\mathscr{E}$ огибающая прямых $\{E_\theta\}_{\theta \in [0,2\pi]}$, где E_0 прямая, проходящая через точки $f(z)$ и $f(\alpha z)$. Показывается, что уравнение кривой $\mathscr{E}$ дано (4).

REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE CU AJUTORUL UNEI CLASE DE FUNCŢII SPLINE

C. KALIK

1. Considerăm următoarea problemă diferenţială : fiind dată funcţia $f \in L_2(0, 1)$ să se găsească funcţia u, care satisface condiţiile:

$$u \in H_2^{(m)}(0, 1) \tag{1,1}$$

$$u^{(m)} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k u^{(k)} = f \tag{1,2}$$

$$\gamma_i(u) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1,3}$$

unde $H_2^{(m)}(0,1)$ este spaţiul Sobolev format din acele funcţii din $L_2(0, 1)$ care admit toate derivatele generalizate pînă la ordinul m inclusiv [1]. Funcţiile p_k sînt din $L_2(0, 1)$, iar γ_i sînt funcţionale date, liniare şi continue pe $H_2^{(m)}(0, 1)$.

Scopul nostru este de a construi o familie de funcţii spline cu ajutorul bazei Haar din $L_2(0, 1)$, şi de a aplica aceste funcţii spline la găsirea soluţiei aproximative a problemei diferenţiale (1, 1) — (1, 3), folosind în acest scop metoda proiecţiilor ortogonale.

Ipotezele de bază ale lucrării sînt următoarele:

I. Problema diferenţială (1, 1) — (1, 3) are soluţie unică pentru orice $f \in L_2(0, 1)$.

II. Dacă un polinom oarecare Q_{m-1} de grad mai mic sau egal cu $m - 1$ satisface egalităţile

$$\gamma_i(Q_{m-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

atunci $Q_{m-1}(x) \equiv 0$.

Observăm că ipoteza II este îndeplinită în cazul problemelor diferenţiale care apar mai des în practică, de exemplu la problema lui Cauchy, problema polilocală,etc.

2. Înlocuim problema diferenţială considerată cu o ecuaţie operaţională echivalentă. Pentru aceasta folosim subspaţiul

$$\overset{\circ}{H}{}^{m}(0, 1) = \{u \in H_2^{(m)}(0,1): \gamma_i(u) = 0,\ i = \overline{1, m}\}$$

și introducem următorii operatori

$$A : \overset{\circ}{H}{}_2^{m}(0,1) \to L_2(0,1) \text{ unde } Au = u^{(m}$$

$$K : H_2^{(m-1)}(0,1) \to L_2(0,1), \text{ unde } Ku = \sum_{k=0}^{m-1} p_k u^{(k}$$

$$S : \overset{\circ}{H}{}_2^{m}(0,1) \to H_2^{(m-1)}(0,1), \text{ unde } Su = u,$$

care ne permit să exprimăm problema diferențială (1,1)— (1,3) cu o singură ecuație operațională:

$$Au = Ku + f \tag{2,1}$$

Datorită ipotezei II există și este mărginită inversa operatorului A:

$$A^{-1} : L_2(0,1) \to \overset{\circ}{H}{}_2^{(m)}(0,1)$$

Notînd $v = Au$, este ușor de stabilit echivalența ecuației (2,1) cu ecuația

$$v = KSA^{-1}v + f$$

pe care o scriem într-o formă mai simplă:

$$v = Tv + f \tag{2,2}$$

unde $T = KSA^{-1}$.

Subliniem faptul că datorită complet-continuității operatorului de scufundare S, și datorită continuității operatorilor K și A^{-1}, rezultă complet-continuitatea operatorului T.

3. Construim funcțiile spline cu ajutorul bazei lui Haar. Cunoscutele funcții în scară ale lui Haar, formează o bază ortonormată în $L_2(0,1)$ și totodată o bază Schauder în $C[0,1]$, [2], [3]. Se poate verifica ușor, că funcțiile lui Haar pot fi exprimate cu ajutorul egalităților:

$$\chi_{kj}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} Y\left(x - \frac{j-1}{2^{k-1}}\right) - 2^{\frac{k+1}{2}} Y\left(x - \frac{2j-1}{2^k}\right) + 2^{\frac{k-1}{2}} Y\left(x - \frac{j}{2^{k-1}}\right) \tag{3,1}$$

unde Y este funcția lui Heaviside:

$$Y(x-t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x - t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } x - t < 0 \end{cases}$$

iar $k = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$

Notăm

$$s_{kj} = A^{-1}\chi_{kj}$$

Asta înseamnă că funcția s_{kj} este soluția următoarei probleme diferențiale:

$$U^{(m)}(x) = \chi_{kj}(x), \quad x \in (0,1)$$

$$\gamma_i(u) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Efectuînd calculele necesare găsim

$$s_{kj}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{\left(x - \frac{j-1}{2^{k-1}}\right)_+^m}{m!} - 2^{\frac{k+1}{2}} \frac{\left(x - \frac{2j-1}{2^k}\right)_+^m}{m!} + 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{\left(x - \frac{j}{2^{k-1}}\right)_+^m}{m!} + \sum_{\lambda=0}^{m-1} c_\lambda x^\lambda \quad (3,2)$$

unde

$$(x-\gamma)_+^m = \begin{cases} (x-\gamma)^m & \text{dacă } x-\gamma \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } x-\gamma < 0 \end{cases}$$

iar constantele c_λ sînt soluțiile următorului sistem de ecuații algebrice

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} c_\lambda \gamma_i(x^\lambda) = -\gamma_i(\varphi_{kj}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m \quad (3,3)$$

în care am notat

$$\varphi_{kj}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{\left(x - \frac{j-1}{2^{k-1}}\right)_+^m}{m!} - 2^{\frac{k+1}{2}} \frac{\left(x - \frac{2j-1}{2^k}\right)_+^m}{m!} + 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{\left(x - \frac{j}{2^{k-1}}\right)_+^m}{m!}$$

Menționăm că, datorită ipotezei II, sistemul (3,3) are soluție unică. Funcțiile s_{kj} date de formula (3,2) sînt niște funcții spline de gradul m, aparținînd mulțimii $C^{m-1}[a,b]$.

Simplificăm notațiile funcțiilor Haar și ale funcțiilor spline. Fie $n = 2^{k-1} + j$; atunci atît funcțiile lui Haar, cît și funcțiile spline s_{kj} se pot nota cu un singur indice:

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$$

respectiv

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

4. Determinăm soluția aproximativă a problemei diferențiale (1,1)—(1,3) În acest scop, la început vom înlocui ecuațiile (2,1) respectiv (2,2) cu niște ecuații aproximante.

Notăm cu $V_n = V_n(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ învelitoarea liniară a funcțiilor Haar $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Fie

$$\pi_n : L_2(0,1) \to V_n$$

proiectorul ortogonal al spațiului $\mathfrak{L}_2(0,1)$ pe V_n. Notăm

$$\pi^{(n)} = I - \pi_n$$

În mod analog, notăm cu $U_n = U_n(s_1, \ldots, s_n)$ învelitoarea liniară a funcțiilor $s_1, \ldots, s_n$ din $\mathring{H}_2^{(m)}(0,1)$.

Ecuația

$$\pi_n(Au_n - KSu_n - f) = 0 \quad (4,1)$$

cu necunoscuta u_n din U_n o vom numi ecuația aproximantă a lui (2,1).

Ecuația

$$v_n - \pi_n T v_n - \pi_n f = 0 \quad (4,2)$$

cu necunoscuta v_n din V_n o vom numi ecuația aproximantă a lui (2,2).

Observăm că relația $v_n = Au_n$ realizează o echivalență între ecuațiile (4,1) și (4,2).

Vom numi soluție aproximativă a problemei diferențiale (1,1) — (1,3) soluția u_n a ecuației (4.2). Deoarece soluția aproximativă $u_n \in U_n$, avem

$$U_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i s_i(x)$$

și sistemul (4,1) se mai poate scrie sub următoarea formă

$$\xi_j - \sum_{i=1}^{n} \xi_i(KSs_i\, \chi_j) = (f, \chi_j),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{4,1'}$$

deci ecuația aproximantă (4,1) este, de fapt, un sistem liniar de ecuații algebrice.

5. În acest ultim punct al lucrării vom arăta că sistemul aproximant (4,1) are soluție unică, iar șirul soluțiilor aproximative $\{u_n\}$ converge către soluția u a problemei diferențiale (1,1)—(1,3). Avînd în vedere echivalența ecuațiilor aproximante (4,1) și (4,2), este suficient să demonstrăm următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Există un număr n_0 astfel încît ecuația aproximantă* (4,2) *să aibă soluție unică pentru orice $n \geqslant n_0$. Șirul soluțiilor aproximative $\{u_n\}$ converge în* $H_2^{(m)}$ (0,1) *către soluția u a problemei diferențiale* (1,1) — (1,3), *și are loc următoarea delimitare pentru rest*

$$c_1||\pi^{(n)}Au|| \leqslant ||u - u_n||_m \leqslant c_2||\pi^{(n)}Au|| \tag{5,1}$$

unde c_1 și c_2 sînt niște constante pozitive, iar $||,||_m$ înseamnă norma din spațiul $H_2^{(m)}$ (0,1).

Demonstrare. Raționamentele care se aplică la demonstrarea acestei teoreme sînt cunoscute. Ele coincid, în esență, cu acelea de la teoria ecuațiilor integrale. Pentru acest motiv vom prezenta demonstrațiile pe scurt, în mod schematic.

Deoarece $\{\chi_n\}$ este un sistem ortonormat și total în $L_2(0,1)$, rezultă că avem

$$\lim_{n\to\infty} ||\pi^{(n)}Tf\,|| = 0$$

pentru orice $f \in L_2(0,1)$.

Folosind complet-continuitatea operatorului $\pi^{(n)}T$, se demonstrează în mod obișnuit că șirul de operatori $\{\pi^{(n)}T\}$ este chiar uniform convergent, adică $\lim\limits_{n\to\infty}||\pi^{(n)}T|| = 0$.

Demonstrarea existenței soluției unice a sistemului (4,2) revine la demonstrarea existenței inversei mărginite a operatorului $I - \pi_n T$.

Considerăm egalitatea evidentă

$$I - \pi_n T = I - T + \pi^{(n)}T$$

Ipoteza I ne asigură existența și mărginirea inversei operatorului.

Pe de altă parte, din $\lim\limits_{n\to\infty} ||\pi^{(n)}T|| = 0$, rezultă că există un număr n_0 astfel încît să avem

$$||\pi^{(n)}T|| < \frac{1}{||(I - T)^{-1}||}$$

ori de cîte ori $n \geqslant n_0$. În sfîrșit, această inegalitate atrage după sine existența și mărginirea inversei lui $I - \pi^{(n)}T$. Astfel s-a demonstrat existența și unicitatea soluției aproximative v_n a ecuației (4,2) pentru orice $n \geqslant n_0$, iar $u_n = A^{-1}v_n$ este soluția unică a sistemului (4,1).

Demonstrăm și inegalitățile (5,1). Din ecuațiile (2,2) și (4,2) deducem următoarea egalitate

$$(I - \pi^n T)(v - v_n) = \pi^{(n)}v$$

Deoarece $v = Au$ și $v_n = Au_n$, găsim pe de o parte

$$\|u - u_n\| = \|A^{-1}(v - v_n)\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|v - v_n\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|(I - \pi^{(n)}T)^{-1}\pi^{(n)}v\|$$
$$\|A^{-1}\| \cdot \|(I - \pi^{(n)}T)^{-1}\| \cdot \|\pi^{(n)}Au\|$$

iar pe de altă parte

$$\|\pi^{(n)}Au\| = \|\pi^{(n)}v\| \leqslant \|I - \pi_n T\| \cdot \|v - v_n\| \leqslant \|I - \pi_n T\| \cdot \|A\| \cdot \|u - u_n\|$$

Notînd $c_1 = 1/\|A\| \cdot \|I - \pi^{(n)}T\|$ și $C_2 = \|A^{-1}\| \cdot \|(I - \pi_n T)^{-1}\|$ am ajuns tocmai la inegalitățile (5,1). Astfel teorema este complet demonstrată.

În încheiere facem două observații. Deoarece convergența din spațiul $H_2^{(m)}(0,1)$ atrage după sine convergența uniformă a șirurilor derivatelor pînă la ordinul $m - 1$ inclusiv, rezultă că avem

$$\lim_{n \to \infty} u_n^{(j)}(x) = u^{(j)}(x) \qquad j = 0, 1, \ldots, m - 1$$

în sensul convergenței uniforme.

A doua observație se referă la sistemul algebric (4,1′) pe care trebuie să-l rezolvăm atunci cînd vrem să găsim în mod efectiv soluția aproximativă u_n. Folosirea funcțiilor spline s_i în locul unui alt sistem de funcții, cum ar fi de exemplu polinoamele, are avantajul mare, din punct de vedere calculativ, că un număr considerabil de coeficienți din (4,1′) sînt egali cu zero, iar calcularea efectivă a coeficienților acestui sistem este simplă.

(Intrat în redacție la 2 februarie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Sobolev, S. L., *Cîteva aplicații ale analizei funcționale în fizica matematică*, Leningrad 1950.
2. Kaczmarz, S., Steinhaus, H., *Teoria seriilor ortogonale*, Moscova 1958.
3. Sobol, J. M., *Formule de cubatură și funcțiile Haar*, Moscova 1969.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО КЛАССА „SPLINE" ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Рассматривается дифференциальная задача, представленная формулами (1,1), (1,2) и (1,3), со следующими предположениями:

I. Дифференциальная задача имеет единственное решение для любой $f \in L_2(0,1)$.

II. Если $\gamma_i(Q_{m-1}) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ для любого многочлена Q_{m-1}, степень которого меньше или равна $m - 1$, то $Q_{m-1}(x) \equiv 0$.

С помощью функций Хаара (3,1) строятся „spline" функции (3,2). Затем доказывается существование приближённого решения $u_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i s_i$ дифференциальной задачи, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ представляет решение системы (4,1'). Доказывается и сходимость $u_n \to u$ в $H_2^{(m)}(0, 1)$.

Преимущество метода состоит в простоте алгебраической системы (4, 1'), в которой большое число коэффициентов равняется нулю.

RÉSOLUTION APPROXIMATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À L'AIDE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS SPLINES

(Résumé)

On considère le problème différentiel représenté par les formules (1,1), (1,2) et (1,3) avec les hypothèses suivantes:

I. Le problème différentiel a une solution unique pour $f \in L_2(0,1)$.

II. Si $\gamma_i(Q_{m-1}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pour un polynome quelconque Q_{m-1} de degré inférieur ou égal à $m - 1$, alors $Q_{m-1}(x) = 0$.

A l'aide des fonctions de Haar (3,1) on construit les fonctions splines (3,2). On démontre ensuite l'existence de la solution approximative $u_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$ du problème différentiel, où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ représente la solution du système (4,1). On démontre aussi la convergence $u_n \to u$ dans $H_2^{(m)}(0, 1)$.

L'avantage de la méthode consiste dans la simplicité du système algébrique (4,1') dans lequel un grand nombre de coefficients sont nuls.

APPROXIMATE INTEGRATION OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY SPLINE FUNCTIONS

GH. MICULA

The purpose of this paper is to find approximate solutions for the Cauchy problem for first order systems, which are polynomial splines of degree m. Such solutions are effectively found by means of fixed-point theorems. The convergence of the approximate solutions to the exact one is also disscussed.

1. Introduction. Consider the interval $[a, b] \subset R$ and a mesh

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \text{ on } [a, b]$$

Definition (see [7], [8], [9]). A function $S_\Delta(x)$ is said to be a polynomial spline of degree m with reguard to Δ, if:

1°. $S_\Delta(x) \in C^{m-1}_{(a,b)}$

2°. $S_\Delta(x) \in \pi_m(x) \quad x \in (x_{j-1}, x_j) \quad j = \overline{1,n}$

Here π_m denotes the linear space of polynomials of degree $\leqslant m$.

For an extensive study of the properties of splines the reader is refered to [1], [7], [8], [9].

Following $I \cdot J$, Schoenberg [8], the analytical expression of a polynomial spline is

$$S_\Delta(x) = P_m(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x - x_i)^m_+$$

where P_m is an arbitrary polynomial of degree m, C_i is constant, and $u_+ = u$ if $u \geqslant 0$, and 0, if $u < 0$.

2. The setting of the problem and construction of an approximate spline. Consider the system

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

where $f_i : [0, B] \times R \times R \to R$, $i = 1, 2$, are continuous and satisfy the Lipschitz condition

$$\begin{gathered} |f_i(x, y, z) - f_i(x, Y, Z)| \leqslant A(|y - Y| + |z - Z|), \quad i = 1, 2 \\ (x, y, z), (X, Y, Z) \in [0, B] \times R \times R \end{gathered} \tag{2}$$

We attach to (1) the initial conditions

$$y(0) = y_0 \qquad z(0) = z_0 \tag{3}$$

The Cauchy problem (1), (3) has a unique solution $y = y(x)$, $z = z(x)$ on an interval $[0, b] \subseteq [0, B]$.

In the sequel we give a method of approximate solution of (1), (3) making use of the theory of polynomial splines and fixed point theorems.

The above problem was formulated and solved in the case of a single equation by L o s c a l z o R. F., and T a l b o t T.D. [4].

Now we construct a spline which globaly approximates the exact solution of (1), (3), having continuous derivatives up to a certain order. More exactly, we obtain approximating splines of degree $m \geqslant 2$, belonging to $C^{m-1}_{[0,b]}$.

Let $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [0, b]$ be the solution of problem (1), (3), $n > m$ an integer and $h = \frac{b}{n}$. Denote by $S_1(x)$, $S_2(x) \in C^{m-1}_{[0,b]}$ two splines of degree m, with regard to the knots $h, 2h, \ldots, (n-1)h$. On $[0, h]$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ is defined as follows:

$$\left.\begin{aligned} S_1(x) &= y(0) + y'(0)x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} y^{(m-1)}_{(0)} + \frac{x^m}{m!} a_0 \\ S_2(x) &= z(0) + z'(0)x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} z^{(m-1)}_{(0)} + \frac{x^m}{m!} b_0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant h \tag{4}$$

The coefficients a_0, b_0 remain to be determined so that S_1, S_2 satisfy (1) for $x = h$, i.e.

$$S_i'(h) = f_i(h, S_1(h), S_2(h)), \qquad i = 1, 2 \tag{5}$$

From this system a_0, b_0 may be uniquely determined (see Theorem 1).

On $[h, 2h]$, S_1, S_2 are defined in the same way.

Take

$$\left.\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} S_1^{(j)}(h)(x-h)^j + \frac{(x-h)^m}{m!} a_1 \\ S_2(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} S_2^{(j)}(h)(x-h)^j + \frac{(x-h)^m}{m!} b_1 \end{aligned}\right\} \quad h \leqslant x \leqslant 2h$$

Hence a_1, b_1 are determined so that (1) is satisfied in $x = 2h$, i.e.

$$S_i'(2h) = f_i(2h, S_1(2h), S_2(2h)), \qquad i = 1, 2.$$

In the same manner S_1, S_2 are defined on the intervals between the reamaining knots. So we have:

$$S_i'(kh) = f_i(kh, S_1(kh), S_2(kh)), \quad i = 1, 2, \quad k = \overline{0, n}$$

THEOREM 1. *If $h < \frac{m}{2A}$, where A is the constant in (2), then the spline approximations S_1, S_2, defined above exist and are unique.*

Proof. Take $[kh, (k+1)h] \subset [0, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, where S_1, S_2 have the expressions

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} S_1^{(j)}(kh)(x-kh)^j + \frac{(x-kh)^m}{m!} a_k \equiv A_k(x) + \frac{(x-kh)^m}{m!} a_k \\ S_2(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} S_2^{(j)}(kh)(x-hk)^j + \frac{(x-kh)^m}{m!} b_k \equiv B_k(x) + \frac{(x-kh)^m}{m!} b_k \end{aligned} \tag{6}$$

We have to show that a_k, b_k can be uniquely determined from

$$S_i'[(k+1)h] = f_i((k+1)h, S_1[(k+1)h],\ S_2[(k+1)h]), \qquad i = 1, 2. \tag{7}$$

Substituing (6) in (7) we get for a_k, b_k

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(m-1)!}{h^{m-1}} \left\{ f_1\left[(k+1)h, A_k[(k+1)h] + \frac{a_k}{m!} h^m,\ B_k[(k+1)h] + \frac{b_k}{m!} h^m\right] - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - A_k'[(k+1)h] \right\} \\ b_k &= \frac{(m-1)!}{h^{m-1}} \left\{ f_2\left[(k+1)h, A_k[(k+1)h] + \frac{a_k}{m!} h^m,\ B_k[(k+1)h] + \frac{b_k}{m!} h^m\right] - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - B_k'[(k+1)h] \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

To be short we write (8) under the form

$$a_k = g_1(a_k, b_k) \qquad b_k = g_2(a_k, b_k) \tag{9}$$

Denote by G the operator: $G: R^2 \to R^2$
defined

$$(a_k, b_k) \xrightarrow{G} (g_1(a_k, b_k), g_2(a_k, b_k)) \ \forall\ (a_k, b_k) \in R^2$$

We prove now that under the assumption of theorem 1, the operator G is of contraction, which implies the existence and unicity of the solution a_k, b_k of (9). For brevity, denote the pairs (a_k^1, b_k^1), (a_k^2, b_k^2) , by t_1, repsectively t_2.

As usual the distance is $\rho(t_1, t_2) = |a_k^1 - a_k^2| + |b_k^1 - b_k^2|$.

So that $\rho(G(t_1)\ G(t_2)) = |g_1(t_1) - g_1(t_2)| + |g_2(t_1) - g_2(t_2)|$

Let us calculate this distance taking into account (8) and (2), we find

$$\begin{aligned} |g_1(t_1) - g_1(t_2)| &= \frac{(m-1)!}{h^{m-1}} \left| f_1\left[(k+1)h, A_k[(k+1)h] + \frac{h^m}{m!} a_k^1, B_k[(k+1)h] + \frac{h^m}{m!} b_k^1\right] - \right. \\ &\quad \left. - f_1\left[(k+1)h, A_k[(k+1)h] + \frac{h^m}{m!} a_k^2, B_k[(k+1)h] + \frac{h^m}{m!} b_k^2\right] \right| \leqslant \frac{Ah}{m} \rho(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Analogously $|g_2(t_1) - g_2(t_2)| \leqslant \dfrac{Ah}{m} \rho(t_1, t_2)$

It follows that $\rho(G(t_1), G(t_2)) \leqslant \dfrac{2Ah}{m} \rho(t_1, t_2)$

In other words, if $\frac{2Ah}{m} < 1 \left(h < \frac{m}{2A}\right)$, the system (9) has a unique solution, which completes the proof.

3. Consistency relations for spline functions. Let $\mathcal{S}$ be the class of splines of degree m, defined on $[0, b]$, and belonging to $C^{m-1}_{[o,b]}$, which knots $x_k = kh$, $k = 1,2,\ldots n-1$. If $s \in \mathcal{S}$, on $[o, (m-1)h]$, it has the form

$$s(x) = P_m(x) + \sum_{k=1}^{m-2} C_k \, (x - kh)_+^m$$

so it depends on $m + 1 + m - 2 = 2m - 1$ linear parameters. Consequently $s(kh)$, $s'(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ cannot be independent, and the following theorem holds: (I. J. Schoenberg, 1966 [4], pp. 435).

THEOREM 2. *If $s(x) \in \mathcal{S}$, then there exists a unique linear consistency relation between the quantities $s(kh)$, $s'(kh)$, $k = 0, 1, \ldots m - 1$ namely*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} s(kh) = h \sum_{k=0}^{m-2} b_k^{(m)} s'(kh)$$

where

$$a_k^{(m)} = (m-1)!\,[Q_m(k) - Q_m(k+1)], \quad b_k^{(m)} = (m-1)!\,Q_{m+1}(k+1)$$

and $Q_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i C_{m+1}^i (x - i)_+^m$ is a *B-spline.*

Here is the table of coefficients of consistency relation, which we shall need in the sequel (see [4], pp. 436).

	$a_k^{(m)}$					$b_k^{(m)}$				
m \ k	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
2	−1	1				1/2	1/2			
3	−1	0	1			1/3	4/3	1/3		
4	−1	−3	3	1		1/4	11/4	11/4	1/5	
5	−1	−10	0	10	1	1/5	26/5	66/5	26/5	1 5

Next theorem enables us to give, on the basis of theorem 2, methods of numerical integration for (1), (3).

THEOREM 3. *The values $S_1(kh)$, $S_2(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, of the approximate spline coincide with the values y_k, z_k, yielded by the multistep method*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} y_{j-m+1+k} = h \sum_{k=0}^{m-1} b_k^{(m)} y'_{j-m+1+k} \; j = m-1, \ldots, n \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} z_{j-m+1+k} = h \sum_{k=0}^{m-1} b_k^{(m)} z'_{j-m+1+k}$$

with starting values

$$y_0 = S_1(0),\ y_1 = S_1(h),\ \ldots,\ y_{m-2} = S_1[(m-2)h] \tag{11}$$
$$z_0 = S_2(0).\ z_1 = S_2(h),\ \ldots,\ z_{m-2} = S_2[(m-2)h]$$

Proof. For $h < \frac{m}{2A}$, there is exactly one couple of sequences $\{y_k\}$, $\{z_k\}$, $k = m-1, \ldots, n$, to satisfy (10), (11). This implies that $S_1(kh)$, $S_2(kh)$, $k = m-1, \ldots, n$, have to coincide with y_k, z_k, given by (10), (11).

In what follows we deal with two important cases, namely $m = 2$ and $m = 3$.

4. Quadratic splines and trapezoidal rule. Theorem 3 for $m = 2$, leads to 1-step method

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}[y'_k + y'_{k-1}] = \frac{h}{2}[f_1(x_k, y_k, z_k) + f_1(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})]$$

$$z_k - z_{k-1} = \frac{h}{2}[z'_k + z'_{k-1}] = \frac{h}{2}[f_2(x_k, y_k, z_k) + f_2(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})]$$

This furnishes the same values as the quadratic splines S_1, S_2.

Since a spline $S \in \mathcal{S}$ has in the knots, derivatives up to the order $m-1$ only, we define its n^{th} derivative in the knots x_k, by

$$S^{(m)}(x_k) = \frac{1}{2}\left[S^{(m)}\left(x_k - \frac{1}{2}h\right) + S^{(m)}\left(x_k + \frac{1}{2}h\right)\right],\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{12}$$

Our purpose now is to disscuss the convergecne of splines approximation to the exact solutions as $h \to 0$.

Let $y(x)$, $z(x)$ be the solution of (1), (3) we know to be unique and put

$$y_k = y(x_k),\ y'_k = y'(x_k),\ z_k = z(x_k),\ z'_k = z'(x_k)$$
$$S_{ik} = S_i(x_k),\ S'_{ik} = S'_i(x_k),\quad i = 1,2;\ x_k = kh$$

LEMMA 1. *If* $|S_1(x_k) - y(x_k)_1| < kh^p$, $|S_2(x_k) - z(x_k) < kh^p$ *and* $S'_1(x_k) = f_1(x_k, S_{1k}, S_{2k})$, $S'_2(x_k) = f_2(x_k, S_{1k}, S_{2k})$, *then there exists a constant* K_1 *such that*

$$|S_1(x_k) - y(x_k)| < K_1h^p,\ |S'_1(x_k) - y'(x_k)| < K_1h^p$$
$$|S_2(x_j) - z(x_k)| < K_1h^p,\ |S'_2(x_k) - z'(x_k)| < K_1h^p$$

Proof. By Lipschitz condition (2), we have:

$$|S'_1(x_k) - y'(x_k)| = |f_1(x_k, S_1(x_k), S_2(x_k)) - f_2(x_k, S_1(x_k), S_2(x_k))| <$$
$$< A[|S_1(x_k) - y(x_k)| + |S_2(x_k) - z(x_k)]| < 2AKh^p$$

Similarily $|S'_2(x_k) - z'(x_k)| < 2AKh^p$

If take $K_1 = \max(K, 2AK)$, the proof is completed.

LEMMA 2. *Let* $y(x) \in C^{m+1}[o,b]$, $z(x) \in C^{m+1}[o,b]$, *and* $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ *with knots* x_k *such that the following conditions hold*

$$|S_1^{(r)}(x_k) - y^{(r)}(x_k)| = O(h^{p_r}),\ |S_2^{(r)}(x_k) - z^{(r)}(x_k)| = 0(h^{p_r}) \tag{13}$$
$$r = 0,1,\ \ldots,\ m-1,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

and

$$|S_1^{(m)}(x) - y^{(m)}(x)| = 0(h), |S_2^{(m)}(x) - z^{(m)}(x)| = 0(h) \tag{14}$$
$$x_k < x < x_{k-1},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

Under these assumptions

$$|S_1(x) - y(x)| = 0(h^p),\ |S_2(x) - z(x)| = 0(h^p),\ x \in [0,\ b] \tag{15}$$

where

$$p = \min_{r=0,1,\cdots,m} [r + p_r],\ p_m = 1 \tag{16}$$

so that

$$|S_1^{(m)}(x) - y^{(m)}(x)| = 0(h),\ |S^{(m)}(x) - z^{(m)}(x)| = O(h),\ x \in [0,\ b] \tag{17}$$

The proof is in the same way as the lemma 1, [4], pp. 438

THEOREM 4. *If* $f_1, f_2 \in C^2[(0,\ b) \times R \times R]$, *then there exists a constant* K, *such that for any* $h < \frac{1}{A}$, *and* $x \in [0,\ b]$, *the following inequalities hold:*

$$|S_1(x) - y(x)| < Kh^2,\ |S_1'(x) - y'(x)| < kh^2,\ |S_1''(x) - y''(x)| < Kh,$$
$$|S_2(x) - z(x)| < Kh^2,\ |S_2'(x) - z'(x)| < Kh^2,\ |S_2''(x) - z''(x)| < Kh$$

provided that $S_1''(x_k)$, $S_2''(x_k)$ *are calculated according to (12) for* $m = 2$.

Proof. By theorem 3, the values of the quadratic splines on the knots are the same as the values yielded by the trapezoidal rule, which is known to be a second order discrete method (see [2] pp. 199 and 248).

So a constant K_2 exists such that:

$$|S_1(x_k) - y(x_k)| < K_2h^2,\ |S_2(x_k) - z(x_k)| < K_2h^2$$

From lemma 1 we infer that

$$|S_1'(x_k) - y'(x_k)| < Kh^2,\ |S_2(x_k) - z'(x_k)]| < Kh^2$$

Therefore inequalities (13) are satisfied for $m = 2$, $p_0 = p_1 = 2$. By Taylor formula

$$S(x_{k+1}) = S_1'(x_k) + hS_1''(x),\ S_2'(x_{k+1}) = S_2(x_k) + hS_2''(x)\ x \in (x_k,\ x_{k+1})$$
$$y'(x_{k+1}) = y'(x_k) + hy''(\xi),\ z'(x_{k+1}) = z'(x_k) + hz''(\xi_1),\ \xi, \xi_1 \in (x_k,\ x_{k+1})$$

and substracting we get by Lemma 1.

$$h|S_1''(x) - y''(\xi)| \leqslant |S_1'(x_{k+1}) - y'(x_{k+1})| + |S_1'(x_k) - y'(x_k)| < K,\ h^4$$

Hence $S_1''(x) = y''(\xi) + O(h)$

Because $|x - \xi| < h$, we may write $S_1''(x) = y''(x) + O(h)$ and analogously
$$S_2'' = z''(x) + O(h)|$$
Thus, assumption (14) of Lemma 2 is fulfilled. Applying lemma 2, for S_1, S_2 it follows that
$$|S_1(x) - y(x)| < Kh^2,\ |S_2(x) - z(x)| < Kh^2,\ x \in [0,\ b]$$
and by the same Lemma applied to S_1', S_2' we have
$$|S_1'x) - y(x)| < Kh^2,\ |S_2'(x) - z'(x)| < Kh^2$$
The relations $|S_1''(x) - y''(x)| < Kh$, $|S_2''(x) - z''(x)| < Kh$, follow from (17) if we take into account that $f_1, f_2 \in C^2([0, b] \times R \times R)$ i.e. $y(x)$, $z(x) \in C^3[0, b]$.

5. Cubic splines and Simpsons rule. If $m = 3$, from Table 1, we derive the recurrence relations:
$$y_k - y_{k-2} = \frac{h}{3}\,[y'_{k-2} + 4y'_{k-1} + y'_k] = \frac{h}{3}\,[f_1(x_{k-2}, y_{k-2}, z_{k-2}) +$$
$$+ 4f_1(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) + f_1(x_k, y_k, z_k)]$$
$$z_k - z_{k-2} = \frac{h}{3}\,[z'_{k-2} + 4z'_{k-1} + z'_k] = \frac{h}{3}\,[f_2(x_{k-2}, y_{k-2}, z_{k-2}) +$$
$$+ 4f_2(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) + f_2(x_k, y_k, z_k)]$$
which coincide with Simpson's rule.

On the basis of theorem 3, Simpson's rule yields a discrete solution $S_1(kh)$, $S_2(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, coinciding with cubic splines, provided that y_0, $y_1 = S_1(h)$, and z_0, $z_1 = S_2(h)$ are taken as initial values.

The method based on Simpson's rule is of fourth order, provided that starting values have the same order. Following lemma shows that this is the case if the starting values are $S_1(h)$, $S_2(h)$.

LEMMA 3. Let $m = 3$. *Then there is a constant* K_3 *such that*
$$|S_1(h) - y(h)| < K_3h^4,\ |S_2(h) - z(h)| < K_3h^4$$
Proof. Consider the expressions:
$$S_1(h) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}a_0$$
$$S_2(h) = z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0'' + \frac{h^3}{6}b_0$$
$$y(h) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0 + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi) \qquad 0 < \xi < h$$
$$z(h) = z_0 + hz_0 + \frac{h^2}{2}z_0'' + \frac{h^3}{6}z_0' + \frac{h^4}{24}z^{(4)}(\xi_1) \qquad 0 < \xi_1 < h$$

By substraction we get

$$|S_1(h) - y(h)| = \frac{h^3}{6}\left|(a_0 - y_0) - \frac{1}{4}\,hy^{(4)}(\xi)\right|$$

$$|S_2(h) - z(h)| = \frac{h^3}{6}\left|(b_0 - z_0''') - \frac{1}{4}\,hz^{(4)}(\xi_1)\right| \tag{18}$$

It remains to be shown that $|a_0 - y_0| = O(h)$, $|b_0 - z_0| = O(h)$
First, we show that a_0, b_0 are uniformly bounded as functions of h.
Write (5) or (8) $a_0 = g_1(a_0, b_0)$, $b_0 = g_2(a_0, b_0)$ for $m = 3$, we get:

$$a_0 = \frac{2}{h^2}\left[f_1\left(h, y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}a_0,\ z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0'' + \frac{h^3}{6}b_0\right) - y_0' - hy_0''\right]$$

$$b_0 = \frac{2}{h^2}\left[f_2\left(h, y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}a_0,\ z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0'' + \frac{h^3}{6}b_0\right) - z_0' - hz_0''\right] \tag{19}$$

Operator $G: R^2 \to R^2$ (defined in theorem 1)

$$(a_0,\ b_0) \xrightarrow{G} (g_1(a_0,\ b_0),\ g_2(a_0,\ b_0))$$

is of contraction if $h < \frac{2h}{A}\cdot$

Consequently $\rho(G(t_1),\ G(t_2)) < \frac{2hA}{3}\ \rho(t_1,\ t_2)$

In particular for $h < \frac{1}{2A}$, we have

$$\rho\ (G(t_1),\ G(t_2)) < \frac{1}{3}\ \rho(t_1,\ t_2)$$

Hence

$$\rho(G(a_0,\ b_0),\ G(0,\ 0)) < \frac{1}{3}\ \rho((a_0,\ b_0),\ (0,\ 0)) \qquad \text{i.e.}$$

$$|g_1(a_0, b_0) - g_1(0, 0)| + |g_2(a_0, b_0) - g_2(0, 0)| < \frac{1}{3}\ (|a_0| + |b_0|)$$

But $g_1(a_0,\ b_0) = a_0 \cdot g_2(a_0,\ b_0) = b_0$, and previous relation becomes:

$$|a_0 - g_1(0, 0)| + |b_0 - g_2(0, 0)| < \frac{1}{3}\ |a_0| + \frac{1}{3}\ |b_0|$$

We may now write

$$|a_0| - |g_1(0,0)| + |b_0| - |g_2(0,0)| \leqslant |a_0 - g_1(0,0)| + |b_0 - g_2(0,0)| < \frac{1}{3}\ (|a_0| + |b_0|)$$

Thus $|a_0| + |b_0| < \frac{3}{2}\ (|g_1(0,\ 0)| + |g_2(0,\ 0)|)$.

Clearly we have

$$y(h) = y_0 + hy' + \frac{h^2}{2}y_0'' + O(h^3)$$

$$z(h) = z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0'' + O(h)^3$$

By (19)

$$g_1(0, 0) = \frac{2}{h^2}\left[f_1\left(h,\ y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'\ \ z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0''\right) - y_0' - hy_0''\right]$$

$$g_2(0, 0) = \frac{2}{h^2}\left[f_2\left(h,\ y_0 + hy_0 + \frac{h^2}{2}y_0'',\ z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0''\right) - z_0' - hz_0''\right]$$

Hence

$$|g_1(0,0)_1| = \frac{2}{h^2}\left[f_1(h,\ y(h) + O(h^3),\ z(h) + O(h^3)) - y_0 - hy_0''\right] =$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[y'(h) + O(h^3) - y_0' - hy_0''\right] =$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[y_0' + hy_0'' + O(h^3) - y_0' - hy_0''\right] < M_1$$

Similarly $|g_2(0,0)| < M_2$
If we denote $M = \max(M_1,\ M_2)$ it follows $|a_0| + |b_0| < 3M$
for any $h < \frac{1}{2A}$.
In the same way, one proves that $|a_0| + |b_0|$ is uniformly bounded for any $h < \frac{3}{2A}$.
Relations (18), give $|s_1(h) - y(h)| = O(h^3)$, $|s_2(h) - z(h)| = O(h^3)$
Making use of Lemma 1 for $p = 3$, we obtain:

$$S_1(h) = y'(h) + O(h^3) = y_0' + hy_0'' + \frac{h^2}{2}y_0''' + O(h^3)$$

$$S_2'(h) = z'(h) + O(h^3) = z_0' + hz_0'' + \frac{h^2}{2}z_0''' + O(h^3)$$

By the definition of S_1 and S_2 we have

$$\left.\begin{aligned} S_1(x) &= y_0 + y'(o)x + y''(o)\frac{x^2}{2} + \frac{a_0}{6}x^3 \\ S_2(x) &= z_0 + z'(o)x + z''(o)\frac{x^2}{2} + \frac{b_0}{6}x^3 \end{aligned}\right. \qquad x \in [0,\ h]$$

so that $S_1'(h) = y_0' + hy_0'' + \frac{a_0}{2}h^2$, $S_2'(h) = z_0' + hz_0'' + \frac{b_0}{2}h^2$

Comparing with the above relations, it follows

$$a_0\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2}y_0''' = O(h^3), \quad b_0\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2}z_0''' = O(h^3)$$

or: $a_0 - y_0''' = O(h)$, $b_0 - z_0''' = O(h)$
Substituting in (18) we obtain

$$|S_1(h) - y(h)| = O(h^4), \qquad |S_2(h) - z(h)| = O(h^4)$$

which completes the proof.

COROLLARY. Let $m = 3$. Then following relations hold:

$$S_1(x_k) = y(x_k) + O(h^4) \qquad S_2(x_k) = z(x_k) + O(h^4)$$
$$S_2'(x_k) = y'(x_k) + O(h^4) \qquad S_2'(x_k) = z'(x_k) + O(h^4)\,;\ k = \overline{0,\ n} \tag{20}$$

LEMMA 5. (Loscalzo, Talbot [4], pp. 442) *Let* $y(x) \in C^4[0,\ b]$ *and let* x *and* $x_{k+1} = x_k + h$ *belong to* $[0,\ b]$. *Suppose* $P(x)$ *be the unique polynomial of the third degree satisfying the Hermite interpolating conditions*:

$$P(x_k) = y(x_k) \qquad P'(x_k) = y'(x_k)$$
$$P(x_{k+1}) = y(x_{k+1}) \qquad P'(x_{k+1}) = y'(x_{k+1}) \tag{21}$$

Then there exists a constant K, *such that*

$$|P'''(x_k) - y'''(x_k)| < Kh$$

Proof: Consider the cubic poliynomial

$$P(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)_3 \tag{22}$$

which fulfills conditions (21). It is known that

$$d_k = [x_k,\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+1}\,;\ y]$$

where $[x_k,\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+1}\,;\ y]$ is the divided difference of y on the double knots $x_k,\ x_{k+1}$. This implies $P'''(x) = 6d_k = 6[x_k,\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+1}\,;\ y]$. But by a general property of these divided differences (see [3])

$$[x_k,\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+1}\,;\ y] = \frac{y'''(\xi)}{3!} \qquad x_k < \xi < x_{k+1}$$

Thus $P'''(x) = y'''(\xi)$ or $P'''(x_k) = y'''(\xi)$.
Hence $|P'''(x_k) - y'''(x_k)| = |y'''(\xi) - y'''(x_k)| = |\xi - x_k|\,|y^{(4)}(\eta)| < Kh,\ x_k < \eta < \xi$ and the proof is completed.

THEOREM 5. *If* $f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z) \in C^3([0,\ b] \times R \times R)$, *then there exists a constant* K, *such that for any* $h < \dfrac{3}{2A}$, *the following inequalities hold*:

$$|S_1^{(j)}(x) - y^{(j)}(x)| < Kh^{4-i}, \quad |S_2^{(j)}(x) - z^j(x)| < Kh^{4-j} \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

provided that $x \in [0,\ b]$ *and* $S_1'''(x_k),\ S_2'''(x_k)$ *are given by (12) for* $m = 3$.

Proof. Put for the approximate splines on $[x_k,\ x_{k+1}]$

$$S_1(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k^*(x - x_k)^3,$$
$$S_2(x) = \alpha_k + \beta_k(x - x_k) + \gamma_k(x - x_k)^2 + \delta_k(x - x_k)^3 \tag{23}$$

Coefficient d of (22), may be effectively found, from (21)

$$d_k = \frac{1}{h^3}\,[2y_k + hy_k' - 2y_{k+1} + hy_{k+1}']$$

In view of (20), d may be written as

$$d_k = \frac{1}{h^3}\left[2S_{1k} + hS'_{1k} - 2S_{1k+1} + hS'_{1k+1}\right] + O(h) = \frac{1}{6}P_3'''(x_k) + O(h)$$

where P_3 is the unique polynomial of the third degree interpolating the values $y_k, y'_k, y_{k+1}, y'_{k+1}$. Let $x_k' < x < x_{k+1}$. We have $S_1(x) = 6d_k$ and corollary implies

$$S_1''' = P_3'''(x_k) + O(h) = y'''(x_k) + O(h) =$$
$$y'''(x) + (x_k - x)y^{(4)}(\xi) + O(h)$$

Supposing $|x_k - x| < h$, we obtain:

$$S_1'''(x) = y'''(x) + O(h), \quad x_k < x < x_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{24}$$

and similarly

$$S_2'''(x) = z'''(x) + O(h), \quad x_k < x < x_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{25}$$

This means that (14) are fulfilled for $m = 3$. Note that S_1''', S_2''' are step function constants and the intervals (x_g, x_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

We may write

$$y(x_{k+1}) = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2}y''_k + \frac{h^3}{6}y'''(\xi_1), \ x_k < \xi_1 < x_{k+1}$$

$$z(x_{k+1}) = z_k + hz'_k + \frac{h^2}{2}z''_k + \frac{h^3}{6}z'''(\xi_2), \ x_k < \xi_2 < x_{k+2}$$

$$S_1(x_{k+1}) = S_{1k} + hS'_{1k} + \frac{h^2}{2}S_1'' + \frac{h^3}{6}S_1'''(\xi_1)$$

$$S_2(x_{k+1}) = S_{2k} + hS'_2 + \frac{h^2}{2}S_2'' + \frac{h^3}{6}S_2'''(\xi_2)$$

By substraction, we get:

$$|S_1(x_{k+1}) - y(x_{k+1})| = |S_{1k} - y_k + h(S'_1 - y'_k) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}(S''_{1k} - y''_k) + \frac{h^3}{6}(S_1'''(\xi_1) - y'''(\xi_1))|$$
$$|S_2(x_{k+1}) - z(x_{k+1})| = |S_{2k} - z_k + h(S'_{2k} - z'_k) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}(S''_{2k} - y''_k) + \frac{h^3}{6}(S_2'''(\xi_2) - z'''(\xi_2))|$$

Hence by (24), (25) and (20) we deduce:

$$S_1''(x_k) - y''(x_k) = O(h^2), \quad S_2''(x_k) - z''(x_k) = O(h^2) \tag{26}$$

It follows from (20), (26), that relations (13) from Lemma 2 are fulfilled for $m = 3$, $p_0 = p_1 = 4$, $p_2 = 2$. Note the $f_1, f_2 \in C^3([0,b] \times R \times R)$ implies $y, z \in C^4$. Applying Lemma 2 succesively to $S_1(x)$, $S_2(x)$, and then to $S_1'(x)$, $S_2'(x)$, and $S_1''(x)$, $S_2''(x)$, it follows:

$$|S_1(x) - y(x)| < Kh^4, \quad |S_1'(x) - y'(x)| < Kh^3, \quad |S_2''(x) - y''(x)| < Kh^2$$

$$|S_2(x) - z(x)| < Kh^4, \quad |S_2'(x) - z'(x)| < Kh^3, \quad |S_2''(x) - z''(x)| < Kh^2$$

By (17) it follows that $|S_1''(x) - y''(x)| < Kh$, $|S_2'''(x) - z'''(x)| < Kh$

and the theorem is proved.

Remarks 1. The method of approximate splines has the advantage over discrete methods, to yield global approximations for the solutions and its derivatives.

2. The approximate splines S_1, S_2 are identical to the Hermite splines of the same degree on the given knots.

6. Non-convergence of splines of higher degrees. The answer to the problem whether approximate splines of degree > 3, tend to the exact solution of (1), (3), is negative, as it results from:

THEOREM 6. ([4], pp. 444) *The aproximate solution* $S_1(x)$, $S_2(x)$ *does not converge to the exact solution of* (1), (3), *if* $m \geqslant 4$, *for* $h \to 0$.

Proof. We show that multistep methods given by Theorem 3, are instable and consequently nonconvergence for $m \geqslant 4$.

Consider the associate polynomial $P(z) = \sum_{k=0}^{m=1} a_k^{(m)} z^k$. By Dahlquist's theorem ([2], Theorem 5.5, pp. 218), the multistep method (10) is convergent if the zero's of $P(z)$ are in absolute value less than 1, and that of absolute value equal to 1 are simple.

By the expression of $a_k^{(m)}$ of theorem 2, it follows:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} z^k = \sum_{k=0}^{m-1} (m-1)!\,[Q_m(k) - Q_m(k+1)]\,z^k =$$

$$= (z-1)(m-1)! \sum_{k=1}^{m-1} Q_m(k) z^{k-1} = (z-1)\,[z^{m-2} + (2^{m-1}m)z^{m-3} + \ldots + 1] =$$

$$= (z-1)P_1(z)$$

where $P_1(z) = z^{m-2} + (2^{m-1} - m)z^{m-3} + \ldots + 1$

The sum of zero of $P_1(z)$ is

$$\sum_{k=2}^{m-1} z_k = m - 2^{m-1}$$

Hence

$$\sum_{k=2}^{m-1} |z_k| \geqslant \left| \sum_{k=2}^{m-1} z_k \right| = 2^{m-1} - m > m - 1 \quad \text{if} \quad m \geqslant 4$$

Let $Z = \max_k |z_k|$

Then $(m-1)\,Z > m - 1$ $\;Z > \dfrac{m-1}{m-2} > 1$ if $m \geqslant 4$. This implies that the approximate splines $S_1(x)$, $S_2(x)$ diverge for $m \geqslant 4$.

REFERENCES

1. Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., Walsh, J. L., *The Theory of Splines and Their Applications*, New York, Accademic Press, 1967.
2. Henrici, P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1962.
3. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, București, Editura Tehnică, 1957.
4. Loscalzo, F. R., Talbot, T. D., *Spline Functions Approximations for Solutions of Ordinary Differential Equations*, „Siam J. Num. Anal.", 4, nr. 3, 1967, 433–445.
5. Micula, Gh., *O formulă de cuadratură cu 5 noduri cu gradul de exactitate* 5, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Series Mathematica-Physica", Fasc. 2, 1967, 59–64.
6. Micula, M., Micula, Gh., *Sur la formule de quadrature de Tricomi*, „Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie", 12 (60), nr. 2|1968, 95–105.
7. Schoenberg, I. J., Curry, H. B., *On Plya Frequency Functions. IV. The Fundamental Spline Functions and Their Limits*, „J. Analyse Math.", 17 (1966), 71–107.
8. Schoenberg, I. J., *On Spline Functions*, „Tech. Summary Rep.", 625, M.R.S. Univ. of Wisconsin, Madison 1966.
9. Schoenberg, I. J., *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*, „Quart. Appl. Math.", 4 (1946), 45–99, and 112–141.
10. Schechter, E., *Error Baunds in the Numerical Integration of Differential Equations*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Series Mathematica-Mechanica", Fasc. 1, 1970, 47–53.

INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE PRIN FUNCŢIILE „SPLINE"

(Rezumat)

În această lucrare se dă o metodă de integrare aproximativă a unui sistem neliniar de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, construind aproximanta sub forma unei funcţii spline de grad m. Pentru determinarea efectivă a aproximantei spline se utilizează o teoremă de punct fix. Se studiază convergenţa soluţiei aproximative către soluţia exactă a sistemului.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ „SPLINE" ФУНКЦИЯМИ

(Резюме)

Автор даёт метод приближённого интегрирования нелинейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, построив аппроксимацию в виде „spline" функции степени m. Для эффективного определения „spline" аппроксимации используется теорема неподвижной точки. Изучается сходимость приближённого решения к точному решению системы.

DESPRE O ECUAŢIE FUNCŢIONALĂ

PARASCHIVA PAVEL

1. D. V. I o n e s c u [1] a dat o extensiune a ecuaţiei funcţionale a lui D. Pompeiu

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1}$$

deducînd noi ecuaţii funcţionale şi stabilind o legătură între aceste noi ecuaţii funcţionale şi formulele de cuadratură ale lui G a u s s şi P. T u r a n [6].

În cele ce urmează se reia ideea prof. D. V. I o n e s c u şi se vor studia alte ecuaţii funcţionale, legate de formulele de cuadratură de tip Gauss-Christoffel.

2. Se consideră ecuaţia funcţională:

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}A_i^{(j)}f^{(j+1)}(a_i)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_s-1}B_s^{(k)}f^{(k+1)}(x_s) \tag{2}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt numere reale, oarecare, date, astfel încît funcţia

$$S(x)=A\prod_{i=1}^{p}(x-a_i)^{\alpha_i},\ A \text{ const.} \tag{3}$$

să fie pozitivă pe intervalul (a, b), iar coeficienţii $A_i^{(j)}$, $B_s^{(k)} i=1, 2, \ldots, p$; $s=1, 2, \ldots, n$; $j=0, 1, \ldots, \alpha_i=-1$; $k=0, 1, \ldots, r_s-1$ şi nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt determinate, astfel încît ecuaţia (2) să fie verificată pentru $f=1, x, x^2, \ldots, x^N$, unde

$$N=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+r_1+r_2+\ldots+r_n+n \tag{4}$$

iar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt numere impare date.

Ecuaţia funcţională (2) poate fi scrisă sub forma

$$\int_a^b f'(x)\,dx=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}A_i^{(j)}f^{(j+1)}(a_i)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_s-1}B_s^{(k)}f^{(k+1)}(x_s) \tag{2}$$

şi problema pusă asupra acestei ecuaţii funcţionale este aceea de a determina nodurile şi coeficienţii formulei de cuadratură (2′) astfel ca ea să fie verificată de $f=x, \ldots, x^N$, N fiind dat de formula (4).

3. Se rezolvă ecuaţia funcţională (2) căutîndu-se soluţia ei în clasa $C^{N+1}[a, b]$. În [3] s-a demonstrat că se pot determina coeficienţii şi nodurile şi restul formulei de cuadratură

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} g^{(j)}(a_i) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_s-1} B_s^{(K)} g^{(k)}(x_s) \tag{5}$$

cu ajutorul unei probleme la limită, pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale.

S-a demonstrat că

$$R = (-1)^N \int_\beta^\alpha \varphi(x)\, g^{(N)}(x)\,dx$$

unde (α, β) este cel mai mic interval ce conţine toate nodurile $a_1, a_2, \ldots a_p, x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi că funcţia $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (α, β)

În general pentru o funcţie de clasa $C^{N+1}[\alpha, \beta]$ avem

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(a_i) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_s-1} B_s^{(k)} f^{(k+1)}(x_s) + (-1)^N \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\,dx$$

Dacă $f(x)$ este soluţia ecuaţiei funcţionale (2), atunci

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f^{(N+1)}(x)\,dx = 0$$

oricare ar fi α şi β.

Deoarece $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (α, β), vom avea oricare ar fi (α, β)

$$f^{(N+1)}(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că f este un polinom oarecare de grad cel mult N.

Deci, soluţia cea mai generală a ecuaţiei funcţionale (2) în clasa $C^{N+1}[\alpha, \beta]$. este un polinom oarecare de gradul N, cel mult, oricare ar fi α şi β.

(Intrat în redacţie la 20 septembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu, D. V., *Asupra cîtorva extensiuni ale ecuaţiei funcţionale a lui D. Pompeiu*, Comunicare prezentată la sesiunea de comunicări a Facultăţii de matematică-mecanică a Univ. „Babeş-Bolyai" Cluj.
2. Popoviciu, T., *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, „Studii şi cerc. şt. Iaşi", 6, 1955, 29–57.
3. Pavel, P., *Asupra unor ecuaţii funcţionale*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai" Cluj, f. 1, 1969, 69–71.
4. Stancu, D. D., *Sur quelques formules générales de quadrature du type Christoffel*, „Mathematica" 1, (24), (1959), 167–182.
5. Tschakaloff, L., *Obşci kvadraturni formuli ot Gaussov tip*, „Izvestia na mat. inst. Bulg. Akad." 1, 2 (1954), 67–81.
6. Turan, P., *On the Theory of the Mechanical Quadrature*, „Acta Sci. Math. (Szeged)", 12 (1950).

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(Резюме)

В статье рассматривается функциональное уравнение (2), в котором коэффициенты $A_i^{(j)}$, $B_s^{(k)}$ $i = 1,2, \ldots, p$; $s = 1,2, \ldots, n$; $j = 0,1, \ldots, \alpha_i - 1$; $k = 0,1, \ldots r_s - 1$ и узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определены так, чтобы ему удовлетворяли $f = 1, x, \ldots, x^N$, где $N = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p, + r_1 + r_2 + \ldots + r_n + n$, предполагая, что $r_1, r_2 \ldots, r_n$ — данные нечётные числа, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — некоторые действительные числа, данные так, чтобы функция (3) была положительной на интервале (a, b).

Автор устанавливает, делая связь с квадратурными формулами типа Гаусс-Кристоффеля, что наиболее общим решением функционального уравнения (2) в классе C^{N+1} $[\alpha, \beta]$ на интервале $[\alpha, \beta]$ является любой полином степени N, какими бы ни были α и β; (α, β) будучи наименьшим интервалом, содержащим все узлы $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

(Résumé)

On considère dans cet article l'équation fonctionnelle (2) dans laquelle les coefficients $A_i^{(j)}$, $B_s^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $s = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1$; $k = 0, 1, \ldots, r_s - 1$ et les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont déterminés de manière que l'équation soit vérifiée pour $f = 1, x, \ldots, x^N$ ou $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + r_1 + r_2 + \ldots + r_n + n$ en supposant que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont des nombres impairs donnés, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels quelconques, donnés de façon que la fonction (3) soit positive dans l'intervalle (a, b).

On établit, en mettant en relation avec les formules de quadrature du type Gauss-Christoffel, que la solution la plus générale de l'équation fonctionnelle (2) dans la classe C^{N+1} et dans l'intervalle (α, β) est un polynome quelconque de degré N, au plus, quels que soient α et β; (α, β) étant le plus petit intervalle contenant tous les noeuds $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

VALORILE PROPRII ALE OPERATORULUI BITZADZE

P. SZILÁGYI

1. Se ştie că problema omogenă a lui Dirichlet pentru ecuaţia lui A. V. Bitzadze

$$Bu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1}$$

în domenii de forma $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ are o infinitate de soluţii linear independente. Prin urmare $\lambda = 0$ este o valoare proprie de ordin infinit a operatorului B definit pe $D(B) = \{u \mid u \in W_2^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$, [1].

În această lucrare se studiază dacă operatorul B cu domeniul de definiţie $D(B)$ de mai sus are şi alte valori proprii. Pentru aceasta trebuie să determinăm valorile lui λ, pentru care problema Dirichlet

$$Bu - \lambda u = 0 \qquad \text{în } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{A}$$

are soluţie nebanală.

Pe lîngă aceasta se studiază o problemă analoagă şi anume: să se găsească valorile lui λ, pentru care problema Dirichlet

$$Bu - \lambda\Delta u = 0 \text{ în } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{B}$$

are soluţie diferită de funcţia $u \equiv 0$. În problema (B) Δ este operatorul lui Laplace în plan. Aici ne interesează numai acel caz, cînd operatorul $B - \lambda\Delta$ este eliptic. Se poate arăta uşor că pentru $|\lambda| \neq 1$ operatorul $B - \lambda\Delta$ este eliptic, pentru $|\lambda| = 1$ nu. Prin urmare, în continuare vom presupune că $|\lambda| \neq 1$.

În lucrarea de faţă se stabilesc următoarele rezultate:

TEOREMA 1. *Operatorul B cu domeniul de definiţie $D(B)$ are o singură valoare proprie,* $\lambda = 0$.

TEOREMA 2. *Dacă $\lambda \neq 0$ şi $|\lambda| \neq 1$, atunci problema (B) are numai soluţia* $u \equiv 0$.

În demonstraţie vom considera numai cazul $R = 1$, dacă $R \neq 1$ demonstraţia este aceeaşi.

2. Demonstraţia teoremei 1. Fie $\lambda \neq 0$ şi $u \in D(B)$ o soluţie a problemei (A). Arătăm că $u \equiv 0$. Ecuaţia $Bu - \lambda u = 0$ în coordonate polare are forma

$$e^{2i\varphi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2i}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) - \lambda u = 0. \tag{2}$$

Dezvoltînd pe u în serie Fourier după sistemul $\{e^{in\varphi}\}$ avem

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r)e^{in\varphi}. \tag{3}$$

Dacă înlocuim pe $u(r, \varphi)$ în ecuația (2) și în condiția la limită $u|_{\partial\Omega} = u\,(1, \varphi) = 0$ și dacă luăm în considerare faptul că $u \in W_2^2(\Omega)$, obținem condițiile

$$\frac{d^2u_n}{dr^2} - \frac{2n+1}{r}\frac{du_n}{dr} + \frac{n(n+2)}{r^2}u_n - \lambda u_{n+2} = 0 \qquad (r < 1) \tag{4}$$

$$u_n(1) = 0, \quad |u_n(0)| < \infty \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

Folosind ecuațiile (4) și condițiile (5), putem exprima linear pe orice $u_n(r)$ numai prin $u_0(r)$, sau $u_1(r)$. Vom arăta că condițiile (4) și (5) atrag după sine că $u_n(r) = 0$ pentru orice n întreg. Pentru aceasta vom folosi următoarele trei leme.

LEMA 1. *Dacă funcția* (3) *este soluție a problemei* (A), *atunci coeficienții* $u_n(r)$ *satisfac condițiile*

$$\int_0^1 u_n(r)(r^2 - 1)r^{1-n}\, dr = 0 \qquad n = -1, -2, \ldots . \tag{6}$$

Demonstrație. Dacă funcția u din (3) este soluție a problemei (A), atunci sistemul $\{u_n(r)\}$ trebuie să satisfacă condițiile (4) și (5). Considerînd pe u_{n+2} în (4) ca o funcție cunoscută, soluția generală a ecuației (4) pentru $n < 0$ poate fi scrisă sub forma

$$u_n(r) = A_n r^n + B_n r^{n+2} - \frac{\lambda}{2} r^n \int_0^r u_{n+2}(\rho)\, \rho^{-1-n}(\rho^2 - r^2)d\rho. \tag{7}$$

Pentru $r \to 0$ avem

$$\left| r^n \int_0^r \rho^{1-n} u_{n+2}(\rho)d\rho \right| \leqslant r^n\left(\int_0^r \rho^{2-2n}d\rho\right)^{1/2}\left(\int_0^r |u_{n+2}(\rho)|^2 d\rho\right)^{1/2} = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{3-2n}}\left(\int_0^r |u_{n+2}|^2\, d\rho\right)^{1/2} \to 0$$

$$\left| r^{n+2}\int_0^r \rho^{-1-n}u_{n+2}(\rho)d\rho\right| \leqslant r^{n+2}\left(\int_0^r \rho^{-2-2n}d\rho\right)^{1/2}\left(\int_0^r |u_{n+2}(\rho)|^2 d\rho\right)^{1/2} = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{-1-2n}}\left(\int_0^r |u_{n+2}|^2 d\rho\right)^{1/2} \to 0 \tag{8}$$

Astfel dacă $n < -2$ din condiția $|u_n(0)| < \infty$ rezultă că $A_n = 0$, $B_n = 0$. Impunînd condiția $u_n(1) = 0$ se obține

$$\int_0^1 u_{n+2}\,(r)r^{-1-n}(r^2 - 1)dr = 0,$$

ceea ce ne dă tocmai condiția (6).

LEMA 2. *Dacă funcția u este soluție a problemei (A), atunci funcțiile u_n din dezvoltarea* (3) *a lui u satisfac condițiile*

$$\int_0^1 u_n(r) r^{1-n} (r^2 - 1)^{2l+1} dr = 0 \quad n = -1, -2, \ldots, \quad l = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

Demonstrație. Am văzut că pentru $n < -2$ soluția problemei (4) — (5) este

$$u_n(r) = \frac{\lambda}{2} r^n \int_0^r u_{n+2}(\rho) \rho^{-1-n} (r^2 - \rho^2) d\rho. \tag{7'}$$

Dacă înlocuim aceste funcții în (6), după calcule simple obținem

$$\int_0^1 u_{n+2}(r)(r^2 - 1)^3 r^{-1-n} dr = 0 \qquad \text{dacă } n + 2 < 0.$$

Înlocuind în aceasta pe u_{n+2} obținut din (7′) se va găsi

$$\int_0^1 u_{n+4}(r)(r^2 - 1)^5 r^{-3-n} dr = 0 \qquad \text{dacă } n + 4 < 0,$$

și așa mai departe

$$\int_0^1 u_{n+2l}(r)(r^2 - 1)^{2l+1} r^{-n-2l+1} dr = 0 \qquad \text{dacă } n + 2l < 0.$$

Calculele de mai sus pot fi efectuate pentru orice $n < 0$ și $l \geqslant 0$ dacă $n + 2l < 0$. Punînd $k = n + 2l$ în ultima egalitate obținem

$$\int_0^1 u_k(r) r^{1-k} (r^2 - 1)^{2l+1} dr = 0 \quad k = -1, -2, \ldots; \; l = 0, 1, \ldots,$$

care demonstrează lema 2.

LEMA 3. *Din condițiile* (9) *rezultă că $u_n \equiv 0$ pentru $n = -1, -2, \ldots$.*

Demonstrație. Dacă în (9) efectuăm schimbarea de variabilă $t = 1 - r^2$ găsim

$$\int_0^1 u_n(t) (\sqrt{1-t})^{1-n} t^{2l+1} dt = 0 \quad n = -1, -2, \ldots; \; l = 0, 1, \ldots . \tag{9'}$$

Fie $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \ldots$ rădăcinile pozitive ale ecuației $J_0(t) = 0$, unde $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ este funcția lui Bessel de ordinul 0 de speța I. Înmulțind egalitățile (9′) cu $(-1)^l \frac{1}{(l!)^2} \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2l}$ și însumîndu-le de la 0 la ∞ în raport cu l obținem

$$\int_0^1 u_n(t) (\sqrt{1-t})^{-n} J_0(\mu_k t) t dt = 0 \quad n = -1, -2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Aceste egalități ne arată că coeficienții Fourier ai lui $u_n(t)(\sqrt{1-t})^{-n}$ în raport cu sistemul ortogonal și complet $\{\mathcal{J}_0(\mu_k t)\}$ în $\mathcal{L}_2^t(0,1)$ sînt egali cu O. De aici rezultă că $u_n(t)\equiv 0$ pentru $n=-1,\ -2,\ \ldots$.

Revenim acuma la demonstrarea teoremei 1. Din lema 3 se vede că $u_n(r)$ $(n=-1,\ -2,\ \ldots)$ din dezvoltarea (3) a soluției u sînt O. Folosind ecuația (4), succesiv se poate arăta că $u_n(r)\equiv 0$ și atunci dacă $n\geqslant O$. Astfel $u(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r)\,e^{in\varphi}\equiv$ $\equiv 0$, adică teorema 1 este demonstrată.

3. Demonstrarea teoremei 2. Fie $\lambda\neq 0$, $|\lambda|\neq 1$ și $u\in W_2^2(\Omega)$ o soluție a problemei (B). Arătăm că $u\equiv O$.

Dacă scriem — ca și la demonstrarea teoremei 1 — ecuația $Bu-\lambda\Delta u=O$ în coordonate polare, dezvoltăm soluția în serie de forma (3), înlocuim pe u în ecuația scrisă în coordonate polare, în condițiile la limită $u(1,\varphi)=O$ și luăm în considerare faptul că $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ vom găsi

$$\frac{d^2u_n}{dr^2}-\frac{2n+1}{r}\frac{du_n}{dr}+\frac{n(n+2)}{r^2}u_n-\lambda\left[\frac{d^2u_{n+2}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_{n+2}}{dr}-\frac{(n+2)^2}{r^2}u_{n+2}\right]=0, \tag{11}$$

$$u_n(1)=0,\quad |u_n(0)|<\infty\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots. \tag{12}$$

Trebuie să arătăm că din (11) și (12) rezultă $u_n(r)\equiv 0$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Pentru această folosim următoarea lemă:

LEMA 4. *Dacă funcția (3) este soluție a problemei (B), atunci funcțiile $u_n(r)$ satisfac condițiile*

$$\int_0^1 u_{-k}(r)r^{k+2l+1}dr=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots;\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{13}$$

Demonstrație. Dacă repetăm raționamentul făcut la demonstrarea lemei 1, găsim că u poate să fie soluție a problemei (B) numai atunci dacă

$$\int_0^1\left[u''_{-k}(r)+\frac{1}{r}u'_{-k}(r)-\frac{k^2}{r^2}u_{-k}(r)\right]r^{k+1}dr=0\qquad k=1,\ 2,\ \ldots..$$

De aici prin integrări prin părți se obține $\int_0^1 u_{-k}(r)r^{k+1}dr=0$, adică condiția (13) pentru $l=0$. În continuare scriem această condiție pentru u_{-k-2}, înlocuim pe u_{-k-2} prin expresia obținută după rezolvarea problemei (11) — (12) în funcție de u_{-k}, găsim $\int_0^1 u_{-k}(r)r^{k+3}dr=0$, ceea ce ne dă condiția pentru $l=1$. Continuînd acest procedeu, găsim condiția (13) pentru orice l.

Revenim acum la demonstrarea teoremei 2. Din condițiile (13) — ca și în lema 3 — rezultă că $u_n(r)\equiv 0$ pentru $n=-1,\ -2,\ \ldots$. Din ecuația (11) avem

$$u_0''+\frac{1}{r}u_0'=\frac{1}{\lambda}\left(u''_{-2}+\frac{3}{r}u'_{-2}\right);\quad u_1''+\frac{1}{r}u_1'-\frac{1}{r^2}u_1=\frac{1}{\lambda}\left(u''_{-1}+\frac{3}{r}u'_{-1}-\frac{1}{r^2}u_{-1}\right).$$

De aici şi din condiţiile (12) rezultă că $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$. Mergînd mai departe, din ecuaţiile (11) şi din condiţiile (12) succesiv se obţine $u_2 \equiv 0$, $u_3 \equiv 0$, ... Prin urmare $u_n(r) \equiv 0$ pentru orice număr întreg n, ceea ce atrage după sine $u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r)e^{in\varphi} \equiv 0$ şi cu aceasta teorema 2 este demonstrată.

Observaţie. Este uşor de văzut că pentru $|\lambda| > 1$ ecuaţia $Bu - \lambda\Delta u = 0$ este tare eliptică. În acest caz nu este necesar să efectuăm demonstraţia dată în această lucrare, afirmaţia teoremei 2 rezultă din [3]. Dacă $\lambda = \frac{k-1}{k+1}$, unde k este un număr real pozitiv şi diferit de 1, atunci teorema 2 rezultă din [2].

(Intrat în redacţie la 16 noiembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Bitzadze, A. V., *O jedinstvennosti zadači Dirichlet dlja elliptičeskich uravnenij s častnymi proizvodnymi*, „Uspechi Mat. Nauk." III. vyp. 6. (1948) p. 211—212.
2. Szilágyi, P., *Problèmes non-noethériens de Dirichlet*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Phys." Fasc. 2. (1969) p. 25—30.
3. Vişik, M. I., *O silno elliptičeskich sistemach differencialnych uravnenij.*, „Matem. sbornik", 29 (71), 3 (1951) p. 615—676.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА БИЦАДЗЕ

(Резюме)

В статье изучается граничная задача (A), когда λ проходит множество комплексных чисел и задача (B) для $|\lambda| \neq 1$. Показывается что кроме $\lambda = 0$ нет ни одного комплексного числа, для которого задачи (A) и (B) имеют ненулевое решение.

THE PROPER VALUES OF THE BITZADZE OPERATOR

(Summary)

The boundary-value problem (A) when λ describes the set of complex numbers and the problem (B) for $\lambda \neq 1$, are studied in the present paper. It is shown that except $\lambda = 0$ there is no complex number for which the problems (A) and (B) have a non-trivial solution.

POTENTIELS DONT TOUTES LES TRAJECTOIRES SONT FERMÉES*

A. HALANAY

Le but de cette note est de reprendre et de développer un résultat obtenu il y a presque un siècle par J. Bertrand [1]. Dans le problème des forces centrales, Bertrand a montré qu'il n'y a que les deux potentiels $-\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{2}r^2$ pour lesquels toutes les trajectoires sont fermées. Nous allons montrer qu'un résultat analogue est vrai pour un problème sur la sphère.

1. Forces centrales. Considérons le problème de mécanique défini par la variété $R^2\setminus\{0\}$, l'énergie cinétique $\frac{1}{2}(u^2+r^2v^2)$ (les coordonnées dans $R^2\setminus\{0\}$ sont (r, θ) et les coordonnées dans l'espace tangent sont (u, v) (et le potentiel $V(r)$; la fonction de Lagrange correspondante est $L(r, \theta, u, v) = \frac{1}{2}(u^2+r^2v^2) - V(r)$ et le système d'équations différentielles du problème est $\dot{r} = u$, $\dot{u} = rv^2 - V'(r)$, $\dot{\theta} = v$, $\dot{v} = -\frac{2u}{r}v$.

Ce système admet les deux intégrales premières globales $E(r, \theta, u, v) = \frac{1}{2}(u^2+r^2v^2) + V(r)$, $p = r^2v$.

Considérant la seconde de ces intégrales l'on obtient le système:

$$\dot{r} = u, \quad \dot{u} = \frac{p^2}{r^3} - V'(r), \quad \dot{\theta} = \frac{p}{r^2}$$

dont les deux premières équations ne contiennent pas θ, donc peuvent être étudiées indépendamment ; le système formé par ces deux équations admet l'intégrale première globale

$$F(r, u) = \frac{1}{2}\left(u^2+\frac{p^2}{r^2}\right) + V(r) = \frac{1}{2}u^2 + V_p(r), \quad V_p(r) = \frac{p^2}{2r^2} + V(r).$$

Les courbes intégrales dans le plan (r, u) sont données par les niveaux de la fonction F ; les points critiques de la fonction F correspondent aux points sin-

* L'auteur tient à remercier Andrei Iacob pour avoir signalé le résultat concernant les forces centrales et suggéré le problème pour le cas de la sphère, Th. Hangan pour bien des discussions stimulantes et St. Gheorghiţă pour les indications de bibliographie.

guliers du système et sont donnés par $u = 0$, $V'_p(r) = 0$. Nous allons supposer dans ce qui suit que la fonction V_p admet des points critiques nondégénérés.

Soit r_p un point critique de V_p ; si $V''_p(r_p) < 0$ alors $(r_p, 0)$ est un col et pour $h \neq h_p = V_p(r_p)$ les courbes intégrales $F(r, u) = h$ sont topologiquement des droites, donc la variété invariante $I_{h,p}$ générée par les courbes intégrales du système h, p fixés est le produit d'une droite et d'un cercle, donc un cylindre.

Si $V''_p(r) > 0$ alors $(r_p, 0)$ est un centre, les trajectoires correspondant à $h \lessgtr V_p(r_p) = h_p$ sont fermées et la variété invariante est le produit de deux cercles,

Pour étudier le système sur un tel tore, soit

$$r - r_p = \rho \cos \varphi, \qquad u = -\sqrt{V''_p(r_p)}\, \rho \sin \varphi \,; \qquad \text{on a}$$

$$\dot{\rho} = \frac{V^{\mathrm{I}}_p(r_p + \rho \cos \varphi)}{\sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)}} \sin \varphi - \sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)}\rho \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)} \sin^2\varphi + \frac{1}{\rho\sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)}} V^{\mathrm{I}}_p(r_p + \rho \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$\dot{\theta} = \frac{p}{(r_p + \rho \cos \varphi)^2}$$

Si l'on définit

$$f(\rho, \varphi) = \frac{V^{\mathrm{I}}_p(r_p + \rho \cos \varphi) \sin \varphi - V^{\mathrm{II}}_p(r_p)\rho \sin \varphi \cos \varphi}{V^{\mathrm{II}}_p(r_p) \sin^2 \varphi + \dfrac{1}{\rho} V^{\mathrm{I}}_p(r_p + \rho \cos \varphi) \cos \varphi}$$

pour $\rho \neq 0$, $f(0, \varphi) = 0$, les deux premières équations du système sont équivalentes à $\frac{d\rho}{d\varphi} = f(\rho, \varphi)$, f est continue, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{f(\rho, \varphi)}{\rho} = 0$ uniformément par rapport à φ, donc $\frac{\partial f}{\partial \rho}(0, \varphi) = 0$; en plus $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = 0$, uniformément par rapport à φ et f et on a encore $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{f(\rho, \varphi)}{\rho^2} = \frac{V^{\mathrm{III}}_p(r_p) \sin \varphi \cos^2 \varphi}{2V^{\mathrm{II}}_p(r_p)}$.

Il s'ensuit que pour ρ_0 suffisamment petit la solution de l'équation $\frac{d\rho}{d\varphi} = f(\rho, \varphi)$ avec $\rho_0 = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est définie globalement et cette solution est périodique si V est de classe $\mathcal{C}^k$, alors pour ρ dans un voisinage de l'origine f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et la solution périodique sera une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ par rapport à ρ_0.

Si dans l'équation

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{p}{(r_p + \rho \cos \varphi)^2 \left[\sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)} \sin^2 \varphi + \dfrac{1}{\rho\sqrt{V^{\mathrm{II}}_p(r_p)}} V^{\mathrm{I}}_p(r_p + \varphi \cos \varphi) \cos \varphi\right]}$$

l'on remplace ρ par la solution de l'équation $\frac{d\rho}{d\varphi} = f(\rho, \varphi)$ l'on obtient une équation de la forme $\frac{d\theta}{d\varphi} = \Theta(\varphi)$ où Θ est une fonction périodique de période 2π ; c'est cette équation qui définit les trajectoires sur le tore $I_{h,p}$.

Remarquons encore que l'équation des courbes intégrales dans le plan (φ, ρ) st $\frac{1}{2} V_p^{II}(r)\rho^2 \sin^2\varphi + V_p(r_p + \rho\cos\varphi) = h$; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on a $V_p^{II}(r)\rho_0^2 = 2(h - h_p)$, donc $\rho_0 = \sqrt{\frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)}}$.

Le système sur le tore est caractérisé par l'indice de rotation qui dans notre cas peut être exprimé immédiatement

$$\mu(h, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{p\,d\varphi}{(r_p + \rho\cos\varphi)^2\left[\sqrt{V_p^{II}(r_p)}\sin^2\varphi + \frac{1}{\rho\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} V_p^{I}(r_p + \rho\cos\varphi)\cos\varphi\right]}$$

Par un calcul direct on voit que $\mu(h, p)$ peut être exprimé aussi par l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\oint \frac{p\,dr}{r^2 u}$ le long de la courbe intégrale $\frac{1}{2}u^2 + V_p(r) = h$, avec une parmaétrisation équivalente $r = r_p + \rho\cos\varphi$, $u = -\sqrt{V_p^{II}(r_p)}\,\rho\sin\varphi$; aussi bien $\mu(h, p)$ peut être exprimé par $\frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{p\,dr}{r^2\sqrt{2(h - V_p(r))}}$, r_{min} et r_{max} étant les solutions de $h - V_p(r) = 0$ dans le voisinage de r_p pour h dans un voisinage de h_p.

2. Trajectoires fermées. Le problème qui nous intéresse est maintenant de trouver les potentiels V de classe $\mathcal{C}^2$ pour lesquels il existe des tores invariants sur toutes les trajectoires lesquels sont fermées; il faut donc trouver les potentiels V pour lesquels $\mu(h, p)$ est rationnel quel que soit p et pour tous les h dans un voisinage de h_p.

Pour résoudre ce problème remarquons d'abord que pour $h = h_p$ assez petit le système d'équations qui nous intéresse est de la forme

$$\dot\rho = o(\rho),\ \dot\varphi = \sqrt{V_p^{II}(r_p)} + O(\rho),\ \dot\theta = \frac{p}{(r_p + \rho\cos\varphi)^2},$$

$$\text{et l'on a } \rho = \rho_0 + o(\sqrt{h - h_p}),\ \dot\varphi = \sqrt{V_p^{II}(r_p)} + O(\sqrt{h - h_p}),$$

$$\dot\theta = \frac{p}{[r_p + O(\sqrt{h - h_p})]^2},\ \text{donc } \mu(h, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\,d\varphi}{[r_p + O(\sqrt{h-h_p})]^2[\sqrt{V_p^{II}(r_p)} + O(h - h_p)]};$$

on voit que $\mu(h, p)$ est continue par rapport à h et si μ doit être rationnel pour tous les h dans un voisinage de h_p alors μ est une costante; donc si le potentiel V admet la propriété qui nous intéresse, il existe un nombre rationnel q tel que $\mu(h, p) = \frac{1}{q}$ pour h dans un voisinage de h_p et pour $h \to h_p$ l'on obtient $\frac{p}{r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} = \frac{1}{q}$.

Soit $(r_1 - r_2)$ un intervalle dans lequel $V' \geqslant 0$, $r_0 \in (r_1, r_2)$, $p = r\sqrt{\frac{V'(r_0)}{r_0}}$; il s'ensuit que $V_p^{I}(r_0) = -\frac{p^2}{r_0^3} + V'(r_0) = 0$ donc $r_0 = r_p$, $V_p^{II}(r_0) = \frac{3V^{I}(r_0)}{r_0} + V''(r_0)$;

si le potentiel V appartient à la classe considérée il faut que $V_p^{II}(r_0) > 0$ (pour l'existence de tores invariants). La condition que nous avons obtenue est maintenant

$$\frac{p}{r_0^2\sqrt{\dfrac{3V^{I}(r_0)}{r_0} + V^{II}(r_0)}} = \frac{1}{q} \text{ donc } \sqrt{\frac{V^{I}(r_0)}{r_0}}\left(\sqrt{\frac{3V^{I}(r_0)}{r_0} + V^{II}(r_0)}\right)^{-1} = \frac{1}{q};$$

q doit ici dépendre de r_0 mais c'est une fonction continue qui doit prendre seulement des valeurs rationnelles, donc c'est une constante. Le potentiel considéré satisfait donc à l'équation

$$V^{II}(r_0) + (3 - q^2)\frac{V^{I}(r_0)}{r_0} = 0, \text{ donc } V(r) = Cr^{q^2-2}.$$

Pour montrer que les seules valeurs admises sont $q^2 = 1$ et $q^2 = 4$, nous allons pousser le calcul de $\mu(h, p)$ jusqu'à une approximation de second ordre. Soit donc $V(r) = \mathcal{C}r^{q^2-2}$; alors

$$V_p(r) = \frac{p}{2r^2} + \mathcal{C}r^{q^2-2}, \quad r_p = \left[\frac{p^2}{C(q^2-2)}\right]^{1/q^2},$$

$$V_p^{II}(r) = \frac{3p^2}{r^4} + \mathcal{C}(q^2-2)(q^2-3)r^{q^2-4}, \; V_p^{II}(r_p) = \frac{p^2q^2}{r_p^4},$$

$$V_p^{I\,I}(r) = -\frac{12p^2}{r^6} + C(q^2-2)(q^2-3)(q^2-4)r^{q^2-5}, \quad V_p^{III}(r_p) = \frac{p^2q^2(q^2-7)}{r_p^5}$$

$$V_p^{IV}(r_p) = \frac{60p^2}{r^6} + C(q^2-2)(q^2-3)(q^2-4)(q^2-5)r^{q^2-6},$$

$$V_p^{IV}(r_p) = \frac{p^2q^2(q^4-12q^2+47)}{r_p^6}$$

$$V_p^{I}(r_p + \rho\cos\varphi) = V_p^{II}(r_p)\rho\cos\varphi + \frac{1}{2}V_p^{III}(r_p)\rho^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3!}V_p^{IV}(r_p)\rho^3\cos^3\varphi + O(\rho^4)$$

$$\mu(h\cdot p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\,d\varphi}{(r_p+\rho\cos\varphi)^2\left[\sqrt{V_p^{II}(r_p)} + \dfrac{V_p^{III}(r_p)\rho\cos^3\varphi}{2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} + \dfrac{V_p^{IV}(r_p)\rho^2\cos^4\varphi}{6\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} + O(\rho^3)\right]} =$$

$$= \frac{p}{2\pi r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}}\int_0^{2\pi}\left\{1 - \frac{2}{r_p}\rho\cos\varphi - \frac{V_p^{III}(r_p)}{2V_p^{II}(r_p)}\rho\cos^3\varphi + \rho^2\left(\frac{3\cos^2\varphi}{r_p^2} + \frac{V_p^{III}(r_p)\cos^4\varphi}{r_p V_p^{II}(r_p)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{V_p^{III}(r_p)}{2V_p^{II}(r_p)}\right)^2\cos^6\varphi - \frac{V_p^{IV}(r_p)\cos^4\varphi}{6V_p^{II}(r_p)}\right) + O(\rho^3)\right\}d\varphi.$$

De l'équation

$$V_p^{II}(r_p)\rho^2 + \frac{1}{3}V_p^{II}(r_p)\rho^3\cos^3\varphi + \frac{1}{12}V_p^{IV}(r_p)\rho^4\cos^4\varphi + o(\rho^4) = 2(h - h_p)$$

l'on déduit maintenant

$$\rho^2 = \frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)} + o\,(h-h_p),\quad \rho = \sqrt{\frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)}} - \frac{V_p^{III}(r_p)(h-h_p)}{3[V_p^{II}(r_p)]^2}\cos^3\varphi + o\,(h-h_p).$$

Il s'ensuit que

$$\mu(h,\,p) = \frac{p}{2\pi r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}}\int_0^{2\pi}\left\{1 - \frac{2}{r_p}\sqrt{\frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)}}\cos\varphi + \frac{2V_p^{III}(r_p)(h-h_p)}{3r_p[V_p^{II}(r_p)]^2}\cos^4\varphi -\right.$$

$$- \frac{V_p^{III}(r_p)}{2V_p^{II}(r_p)}\sqrt{\frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)}}\cos^3\varphi + \frac{[V_p^{II}(r_p)]^2(h-h_p)}{6[V_p^{II}(r_p)]^3}\cos^6\varphi +$$

$$\left. + \frac{2(h-h_p)}{V_p^{II}(r_p)}\left[\frac{3\cos^2\varphi}{r_p^2} + \frac{V_p^{III}(r_p)\cos^4\varphi}{r_pV_p^{II}(r_p)} + \left(\frac{V_p^{III}(r_p)}{2V_p^{II}(r_p)}\right)^2\cos^6\varphi - \frac{V_p^{IV}(r_p)\cos^4\varphi}{6V_p^{II}(r_p)}\right] + o\,(h-h_p)\right\}d\varphi =$$

$$= \frac{p}{r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} + \left[\frac{V_p^{III}(r_p)}{r_p[V_p^{II}(r_p)]^2} + \frac{5[V_p^{III}(r_p)]^2}{24[V_p^{II}(r_p)]^3} + \frac{3}{r_p^2V_p^{II}(r_p)} -\right.$$

$$\left. - \frac{V_p^{IV}(r_p)}{8[V_p^{II}(r_p)]^2}\right]\frac{p(h-h_p)}{r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} + o\,(h-h_p).$$

Mais $r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)} = pq$,

$\dfrac{p}{r_p^2\sqrt{V_p^{II}(r_p)}} = \dfrac{1}{q} = \mu(h,\,p)$; l'on en déduit que

$$\frac{V_p^{III}(r_p)}{r_pV_p^{II}(r_p)} + \frac{5}{24}\left[\frac{V_p^{III}(r_p)}{V_p^{II}(r_p)}\right]^2 + \frac{3}{r_p^2} - \frac{V_p^{IV}(r_p)}{8V_p^{II}(r_p)} = 0.$$

L'équation que l'on obtient pour q^2 est

$$q^2 - 7 + \frac{5}{24}(q^2-7)^2 + 3 - \frac{q^4 - 12q^2 + 47}{8} = 0$$

avec les solutions $q^2 = 1$, $q^2 = 4$.

Donc seuls les potentiels de la forme Cr^{-1} et Cr^2 ont la propriété exigée ; la condition $V'(r) \geqslant 0$ que nous avons imposée implique $C < 0$ pour le premier potentiel et $C > 0$ pour le second ; donc l'on obtient bien les deux potentiels $-\dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{1}{2}r^2$.

L'on vérifie maintenant directement que ces deux potentiels satisfont effectivement au problème.

3. Cas de la sphère. Jusqu'à présent nous n'avons fait que de redémontrer le résultat de Bertrand. Mais nous sommes maintenant en état de développer ce résultat en considérant d'autres cas. On considère le problème de mécanique défini par la variété S^2 — {les deux pôles} avec les coordonnées, θ, φ, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi \leqslant 2\pi$

l'énergie cinétique $\frac{1}{2}(u^2 + V^2 \sin^2\theta)$ et le potentiel $V(\theta)$; le système d'équations du problème est

$$\dot\theta = u,\ \dot u = v^2 \sin\theta\cos\theta - V'(\theta),\ \dot\varphi = v,\ \dot v = -\frac{2\,uv\cos\theta}{\sin\theta},$$

l'on a les deux intégrales premières globales

$$E(A,\ \varphi,\ u,\ v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2\sin^2\theta) + V(\theta),\ p = v\sin^2\theta\,;$$

en utilisant la seconde des intégrales premières le système se réduit à

$$\dot\theta = u,\ \dot u = \frac{p^2\cos\theta}{\sin^3\theta} - V'(\theta),\ \dot\varphi = \frac{p}{\sin^2\theta}\,;$$

de nouveau on peut faire l'étude du système formé par les deux premières équations pour lequel l'on a l'intégrale première

$$F(\theta,\ u) = \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{p^2}{\sin^2\theta}\right) + V(\theta) = \frac{1}{2}u^2 + V_p(\theta),$$

$$V_p(\theta) = \frac{p^2}{2\sin^2\theta} + V(\theta).$$

Comme dans le problème des forces centrales le point singulier θ_p est un centre si $V_p^{II}(\theta_p) > 0$ et la variété invariante $I_{h,p}$ est un tore. Pour étudier le système sur un tel tore, soit

$$\theta - \theta_p = \rho\cos\tau,\ u = -\sqrt{V_p^{II}(\theta_p)}\ \rho\sin\tau.$$

Notre système est de la forme $\dot\theta = u,\ \dot u = -V_p^{I}(\theta)$, donc par le même calcul que dans le cas des forces centrales l'on a

$$\mu(h,\ p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\,d\tau}{\sin^2(\theta p + \rho\cos\tau)\left[\sqrt{V_p^{II}(\theta_p)}\sin^2\tau + \frac{1}{\rho\sqrt{V_p^{II}(\theta p)}}V_p^{I}(\theta p + \rho\cos\tau)\cos\tau\right]},$$

ρ étant défini par $\frac{1}{2}V_p^{II}(\theta p)\,\rho^2\sin^2\tau + V_p(\theta p + \rho\cos\tau) = h.$

Dans ce cas aussi l'on peut représenter $\mu(h,\ p)$ par l'intégrale $\frac{1}{2}\oint\frac{pd}{u\sin^2\theta}$ calculée le long de la courbe $\frac{1}{2}u^2 + V_p(\theta) = h$, ou bien par l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}}\frac{pd}{\sqrt{2(h - V_p(\theta))}\sin^2\theta},\quad \theta_{min}\ \text{et}\ \theta_{max}$$

les solutions étant dans le voisinage de θ_p de l'équation $h = V_p(\theta)$ pour h dans un voisinage de h_p. Si dans la dernière intégrale l'on prend cotg $=s$, l'on a

$$\mu(h, p) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{p ds}{\sqrt{2(h - \tilde{V}(s))}} \tilde{V}_p(s) = \frac{p^2}{2}(1 + s^2) + \tilde{V}(s), \ \tilde{V}(s) = V(\text{arc cotg } s),$$

s_{min} et s_{max} étant les solutions de l'équation $V_v(s) = h$ dans un voisinage de $s_p = \text{cotg } \theta_p$ et pour h dans un voisinage de h_p.

D'autre part, si dans la formule qui donne $\mu(h, p)$

$$\mu(h, p) = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{p ds}{r^2 \sqrt{2(h - V_p(r))}}$$

pour le problème des forces centrales on opère le changement de variables $s = \frac{1}{r}$, il s'ensuit que $\mu(h, p) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{nin}}^{s_{max}} \frac{p ds}{\sqrt{2(h - \tilde{V}_p(s))}}$ avec s_{min} et s_{max} solutions de l'équation $\tilde{V}_p(s) = h$; ici $\tilde{V}_p(s) = \frac{p^2}{2} s^2 + \tilde{V}(s) = \frac{p^2}{2} s^2 + V\left(\frac{1}{s}\right)$.

Les formules que nous avons obtenues montrent effectivement l'équivalence des deux problèmes; dans le cas de la sphère il faut prendre $\tilde{h} = h - \frac{p^2}{2}$. Dans le cas des forces centrales on a trouvé les potentiels $V(r) = -\frac{1}{r}$ et $V(r) = \frac{1}{2} r^2$, donc $\tilde{V}(s) = -s$, $\tilde{V}(s) = \frac{1}{2s^2}$, donc, dans le cas de la sphère l'on aura les potentiels

$$V(\theta) = -\text{cotg } \theta, \ V(\theta) = \frac{1}{2} \text{tg}^2 \theta,$$

comme les seuls pour lesquels toutes les trajectoires sont fermées au moins localement.

Remarquons que seulement le premier de ces deux potentiels est régulier sur toute la variété considérée.

(Manuscrit reçu le 1 décembre 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Bertrand, J., *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, „C.R.", **77** (1873), 849–853.

POTENȚIALE PENTRU CARE TOATE TRAIECTORIILE SÎNT ÎNCHISE

(R e z u m a t)

În problema forțelor centrale I. B e r t r a n d a arătat că nu există decît două potențiale $-\frac{1}{r}$ și $\frac{1}{2}r^2$ pentru care toate traiectoriile sînt închise. În lucrare se arată că un rezultat analog este adevărat pentru sferă.

ПОТЕНЦИАЛЫ, ДЛЯ КОТОРЫХ ВСЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАКРЫТЫ

(Р е з ю м е)

В вопросе центральных сил И. Б е р т р а н показал, что имеются лишь два потенциала $-\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{2}$, для которых все траектории закрыты. В статье показывается, что аналогичный результат верный для сферы.

ON THE REMAINDER OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY MEANS OF A PARAMETER-DEPENDENT LINEAR POLYNOMIAL OPERATOR

D. D. STANCU

1. In our previous paper [11], we introduced and investigated a new parameter dependent linear polynomial operator $P_m^{<\alpha>}(m = 1, 2, \ldots)$, of Bernstein-type, associated to a function f defined on $[0, 1]$, namely

$$(P_m^{<\alpha>}f)(x) = \sum_{k=0}^{m} w_{m,k}^{<\alpha>}(x)\, f\left(\frac{k}{m}\right),$$

where, with the aid of factorial powers, we have

$$w_{m,k}^{<\alpha>}(x) = \frac{1}{1^{(m,-\alpha)}}\binom{m}{k} x^{(k,-\alpha)}\,(1-x)^{(m-k,-\alpha)} =$$

$$= \binom{m}{k}\frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{k-1}\alpha)(1-x)(1-x+\alpha)\ldots(1-x+\overline{m-k-1}\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{m-1}\alpha)},$$

the parameter α, which may depend on m, fulfilling the stipulation that:

$$(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{m-1}\,\alpha) \neq 0.$$

In that paper we evaluated the remainder term of the approximation formula

$$f(x) = (P_m^{<\alpha>}f)(x) + (R_m^{<\alpha>}f)(x) \tag{1}$$

in terms of divided differences of first- and second-order of f.

In the present paper we first establish an expression of this remainder by using only divided differences of second-order, and then we give an integral representation of it.

2. We will now proceed to state and prove the main result of this paper.

THEOREM 1. *The remainder of the approximation formula (1) can be represented in the following form*

$$(R_m^{<\alpha>}f)(x) = -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{m-1-k}\alpha)}{m(1+\overline{m-1}\alpha)}\, w_{m-1,k}^{<\alpha>}(x)\left[x, \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}; f\right], \tag{2}$$

where the brackets represent the symbol for divided differences.

Proof. Observe that we can write successively

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \sum_{k=0}^{m} w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left\{f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\,(mx-k)\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right],$$

because we have identically

$$\sum_{k=0}^{m} w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) = 1.$$

If we use the identity: $mx - k = (m-k)x - (1-x)k$, then we obtain

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \frac{1}{m}\left\{x\sum_{k=0}^{m}(m-k)\,w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) - (1-x)\sum_{k=0}^{m} k w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\right\}\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right].$$

Since

$$(m-k)\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k},\ k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1},$$

we can write further

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \frac{1}{1^{(m,-\alpha)}}\left\{x\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k} x^{(k,-\alpha)}(1-x)^{(m-k,-\alpha)}\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right] - \right.$$

$$\left. - (1-x)\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1} x^{(k,-\alpha)}(1-x)^{(m-k,-\alpha)}\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right]\right\}.$$

Substituting $k = j + 1$ in the last sum and then denoting again the summation variable by k, we obtain

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \frac{1}{1^{(m,-\alpha)}}\left\{x\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k} x^{(k,-\alpha)}(1-x)^{(m-k,-\alpha)}\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right] - \right.$$

$$\left. - (1-x)\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k} x^{(k+1,-\alpha)}(1-x)^{(m-1-k,-\alpha)}\left[x, \frac{k+1}{m}\,; f\right]\right\}.$$

But

$$x^{(k+1,-\alpha)} = (x + k\alpha)\,x^{(k,-\alpha)}$$

$$(1-x)^{(m-k,-\alpha)} = (1 - x + \overline{m-k-1}\,\alpha)(1-x)^{(m-1-k,-\alpha)},$$

so that we have

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \frac{1}{1+\overline{m-1}\,\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{m-1} x(1 - x + \overline{m-k-1}\,\alpha)\,w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left[x, \frac{k}{m}\,; f\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1}(1-x)(x+k\alpha)\,w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left[x, \frac{k+1}{m}\,; f\right]\right\}.$$

By making use of the relationships

$$x(1-x+\overline{m-k-1}\alpha)=(x+k\alpha)(1-x+\overline{m-k-1}\alpha)-k\alpha\,(1-x+\overline{m-k-1}\alpha),$$

$$(1-x)(x+k\alpha)=(x+k\alpha)(1-x+\overline{m-k-1}\alpha)-\alpha\,(m-k-1)(x+k\alpha),$$

we get

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x)=\frac{1}{1+\overline{m-1}\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}(x+k\alpha)\,(1-x+\overline{m-1-k}\alpha)\,w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left\{\left[x,\frac{k}{m};f\right]-\right.$$

$$\left.-\left[x,\frac{k+1}{m};f\right]\right\}+(r_m^{\langle\alpha\rangle}f)\,(x), \tag{3}$$

where

$$(r_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x)=-\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}k(1-x+\overline{m-k-1}\,\alpha)\;w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left\{\left[x,\frac{k}{m};f\right]+\right.$$

$$+\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\,\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}(m-k-1)\,(x+k\alpha)\,w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left[x,\frac{k+1}{m};f\right]\cdot$$

Observing that the first term in the first sum and the last term in the second sum vanish, and that

$$k\binom{m-1}{k}=(m-1)\binom{m-2}{k-1},\quad (m-k-1)\binom{m-1}{k}=(m-1)\binom{m-2}{k},$$

we have

$$1^{(m-1,-\alpha)}\;(r_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x)=$$

$$=-\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\alpha}\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m-2}{k-1}(1-x+\overline{m-k-1}\,\alpha)x^{(k,-\alpha)}\;(1-x)^{(m-1-k,-\alpha)}\times$$

$$\times\left[x,\frac{k}{m};f\right]+\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\alpha}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}\;(x+k\alpha)\;x^{(k,-\alpha)}\;(1-x)^{(m-1-k,-\alpha)}\times$$

$$\times\left[x,\frac{k+1}{m};f\right]\cdot$$

If in the former sum we perform the change of index of summation: $k=j+1$, we can write further

$$1^{(m-1,-\alpha)}\;(r_m^{\langle\alpha\rangle}f)\;(x)=$$

$$=-\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\,\alpha}\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}(1-x+$$

$$+\overline{m-j-2}\,\alpha)x^{(j+1,-\alpha)}\;(1-x)^{(m-2-j,-\alpha)}\left[x,\frac{j+1}{m};f\right]$$

$$+\frac{\alpha}{1+\overline{m-1}\,\alpha}\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}\,(x+j\,\alpha)\;x^{(j,-\alpha)}\;\;(1-x)^{(m-1-j,-\alpha)}\left[x,\frac{j+1}{m};f\right]$$

and one observes that this is identically zero, since

$$(1 - x + \overline{m - j - 2}\,\alpha)x^{(j+1,-\alpha)}\,(1 - x)^{(m-2-j,-\alpha)} =$$
$$= (x + j\,\alpha)\,x^{(j,-\alpha)}\,(1 - x)^{(m-1-j,-\alpha)} = x^{(j+1,-\alpha)}\,(1 - x)^{(m-1-j,-\alpha)}.$$

Thus, as a consequence of this result and of the following relation between divided differences

$$\left[x, \frac{k}{m}; f\right] - \left[x, \frac{k+1}{m}; f\right] = -\frac{1}{m}\left[x, \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}; f\right],$$

formula (3) leads us just to the representation (2) of our remainder.

Finnaly, we remark that if $\alpha = 0$ then one obtains an expression, established by us in [10], for the remainder of approximation formula of f by the mth Bernstein polynomial.

3. Presupposing that the parameter α, which may depend on m, is non-negative, it is evident that $(P_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x) \geqq 0$ on $[0,1]$ whenever $f(x) \geqq 0$ on $[0,1]$.

Now we shall point out some important corollaries of Theorem 1, the first two of these being obvious.

COROLLARY 1. *We always have:* $(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(0) = 0$, $(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(1) = 0$, *and if* f *is linear then we have* $(R_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x) = 0$.

COROLLARY 2. *Let* $\alpha \geqq 0$ *and* $m = 1, 2, \ldots$. *If* f *is non-concave of first-order on (0,1) then we have* $P_m^{\langle\alpha\rangle} f \geqq f$ *on* $[0,1]$, *while if* f *is convex of first-order on* $[0,1]$, *without being linear, then* $P_m^{\langle\alpha\rangle} f > f$ *on* $(0,1)$.

COROLLARY 3. *If* $\alpha \geqq 0$ *and the divided differences of the second-order of* f *are all bounded on* $[0,1]$, *then we have on* $[0,1]$:

$$|(R_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x)| \leqq \frac{x(1-x)}{m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha} M_2(f),$$

where $M_2(f)$ *is the least upper bound of the absolute values of the second-order divided differences of* f *on* $[0,1]$.

For proving this, it is sufficient to note that we have identically

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{m-1-k}\,\alpha)}{m(1+\overline{m-1}\,\alpha)}\, w_{m-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) = \frac{x(1-x)}{m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha}.$$

COROLLARY 4. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $f \in C\,[0,1]$, *then for any fixed point* x *of* $[0,1]$ *we have on* $[0,1]$:

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = -\frac{x(1-x)}{m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha}\,[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f], \tag{4}$$

where ξ_1, ξ_2, ξ_3 *are certain distinct points of* $[0,1]$, *which might depend upon* f.

Proof. To prove this, we shall make use of the representation (2) and of a result due to T. Popoviciu [7]: *If we have a linear functional* $R(f)$ *which vanishes if* f *is any polynomial of the nth degree, but does not vanish if* f *is any convex* *function of the nth order on an interval I, then this functional can be written in the simple form*

$$R(f) = R(x^{n+1})[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f],$$

where ξ_i are distinct points of I, which, in general, might depend on f.

According to Theorem 1, it is clear that $R_m^{\langle\alpha\rangle} f$ vanishes if f is any polynomial of the first degree, but does not vanish if f is any first-order convex function (that is, a function for which any divided differences on three distinct points of $[0,1]$ is positive).

It follows that $R_m^{\langle\alpha\rangle} f$ is of simple form, i.e., for any fixed point x of $[0,1]$ we have

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = (R_m^{\langle\alpha\rangle} g_2)(x)[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

where $g_2(t) = t^2$ for all $t \in [0,1]$, and ξ_1, ξ_2, ξ_3 are distinct points of $[0,1]$.

Since

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} g_2)(x) = -\frac{x(1-x)}{m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha},$$

one infers the validity of the representation (4).

It should be mentioned that in the case $\alpha = 0$ formula (4) has been given by O. Aramă [1] and that this formula was mentioned in [5].

An immediate cosequence of Corollary 4 is

COROLLARY 5. *If $f \in C^2[0, 1]$ and $\alpha \geqq 0$; then we have on* $[0,1]$:

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = -\frac{x(1-x)}{2m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha} f''(\xi), \tag{5}$$

where $\xi \in (0, 1)$.

Remark. In [13] it has been noticed that if α is a non-positive parameter, depending on m, so that $-m\alpha \leqq \varepsilon$ $(m=1, 2, \ldots)$, where $0 \leqq \varepsilon < \frac{1}{2}$, then we also have $(P_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) \geqq 0$ on $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ whenever $f(x) \geqq 0$ on this interval. It should be remarked that in such a situation the assertions of corollaries 2—5 are valid on the interval $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

4. We turn now to the problem of determining an integral expression of the remainder of the approximation formula (1).

THEOREM 2. *If $f \in C^2$ $[0,1]$, then the remainder of approximation formula* (1) *can be represented as follows*

$$(R_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \int_0^1 K_m^{\langle\alpha\rangle}(t; x) f''(t)\,dt, \tag{6}$$

where

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t; x) = (R_m^{\langle\alpha\rangle} \varphi_x)(t), \quad \varphi_x(t) = (x-t)_+ = \frac{x - t + |x-t|}{2},$$

the subscript x indicating that $R_m^{\langle\alpha\rangle}$ is to be performed with respect to x, while t is held fixed.

Proof. Since the degree of exactness of approximation formula (1) is one, by virtue of Peano's theorem [6], we infer the validity of the representation (6). The function $K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x)$ represents the so called Peano kernel associated with $R_m^{\langle\alpha\rangle}$.

Employing a procedure similar to that shown in our paper [9], presented for publication on January 1962, where we have established an integral expression for the remainder in the approximation formula of a function f, twice continuously differentiable, by means of its mth Bernstein polynomial, we can give an explicit expression for the Peano kernel.

Presupposing that $\frac{s-1}{m} \leqq x \leqq \frac{s}{m}$ $(s = \overline{1, m})$, it can be readily shown that

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = x - t - \sum_{k=j}^{m}\left(\frac{k}{m} - t\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] (j = \overline{1, s-1}),$$

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = x - t - \sum_{k=s}^{m}\left(\frac{k}{m} - t\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[\frac{s-1}{m}, x\right],$$

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = -\sum_{k=s}^{m}\left(\frac{k}{m} - t\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[x, \frac{s}{m}\right],$$

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = -\sum_{k=j}^{m}\left(\frac{k}{m} - t\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] (j = \overline{s+1, m}).$$

Invoking the identities

$$\sum_{k=0}^{j-1} w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) + \sum_{k=j}^{m} w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^{j-1} k w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) + \sum_{k=j}^{m} k w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) = mx,$$

it is easily seen that

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = -\sum_{k=0}^{j-1}\left(t - \frac{k}{m}\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right],$$

where $j = \overline{1, s-1}$, while

$$K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) = -\sum_{k=0}^{s-1}\left(t - \frac{k}{m}\right) w_{m,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \;\; if\;\; t \in \left[\frac{s-1}{m}, x\right].$$

Now let us assume that x is a fixed point of [0, 1] and that $\alpha \geqq 0$. It follows that $K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x) \leqq 0$. Hence, $y = K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x)$ represents a continuous broken line which joins points (0,0) and (0,1) and is situated beneath the t-axis. In this case we may apply the mean value theorem to the integral (6) and we see that so we can obtain, in another way, formula (5), since it is readily seen that

$$\int_0^1 K_m^{\langle\alpha\rangle}(t\,;\,x)\,dt = \frac{1}{2}\left(R_m^{\langle\alpha\rangle} g_2\right)(x) = -\frac{x(1-x)}{2m} \cdot \frac{1+m\alpha}{1+\alpha}.$$

By using a method of D. V. Ionescu, exposed in [3], it may actually be shown that $K_m^{\langle\alpha\rangle}(t;x)$ represents the solution of a second-order differential system, under certain boundary conditions, so that $K_m^{\langle\alpha\rangle}(t;x)$ is the corresponding Green's function. As a matter of fact, for a fixed $x \in [0,1]$, $K_m^{\langle\alpha\rangle}(t;x)$ represents a *spline function*, of *degree one*, having the *knots* $\frac{j}{m}$ $(j=\overline{0,m})$.

It should also be remarked that the expressions of the remainders, given in [14] and [15], for the cases of the operators of Mirakyan-Favard and of Baskakov, can be obtained by considering the limiting cases (see: [11], [12]) of the formulas established in this paper for the remainder $R_m^{\langle\alpha\rangle}f$.

Finnaly, we mention that recently D. Leviatan contributed a paper [4] on evaluation of remainders in the case of approximation by some other Bernstein-type operators, and that S. Eisenberg and B. Wood devoted a paper [2] to the approximation of analytic functions by means of our operators $P_m^{\langle\alpha\rangle}$.

(Received February 4, 1971)

REFERENCES

1. Aramă, O., *Properties concerning the monotonicity of the sequence of polynomials of interpolation of S. N. Bernstein and their application to the study of approximation of functions*, „Studii Cercet. Mat., Acad. R.P.R., Fil. Cluj", **8** (1957), 195–210 (Romanian) or: „Mathematica, 2 **(25)** (1960), 25–40 (Russian).
2. Eisenberg, S., Wood, B., *Approximation of analytic functions by Bernstein-type operators* (to appear).
3. Ionescu, D. V., *Numerical quadraturae*, Edit. Tehnică, Buc., 1957.
4. Leviatan, D., *On the remainder in the approximation of functions by Bernstein-type operators*, „J. Approximation Theory", **2** (1969), 400–409.
5. Mühlbach, G., *Verallgemeinerungen der Bernstein — und der Lagrangepolynome. Bemerkungen zu einer Klasse linearer Polynomoperatoren von D. D. Stancu*, „Rev. Roumaine Math. Pures Appl.", **15** (1970), 1235–1252.
6. Peano G., *Resto nelle formule di quadratura espresso con un integrale definito*, „Rend. Accad. Lincei", **22** (1913), 562–569.
7. Popoviciu T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, „Mathematica", **1 (24)** (1959), 95–142.
8. Stancu D. D., *On the remainder in the approximation formulae by Bernstein's polynomials*, „Notices Amer. Math. Soc.", **9** (1962), 1, 26.
9. Stancu D. D., *Evaluation of the remainder term in approximation formulas by Bernstein polynomials*, „Mathematics of Computation" **17** (1963), 270–278.
10. Stancu D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, „J. SIAM Numer. Anal.", Ser. B, **1** (1964), 137–163.
11. Stancu, D. D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, „Rev. Roumaine Math. Pures Appl.", **13** (1968), 1173–1194.
12. Stancu, D. D., *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, „Rev. Roumaine Math. Pures Appl.", **14** (1969), 673–691.
13. Stancu, D. D., *Approximation properties of a class of linear positive operators*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai", **15** (1970), 33–38.
14. Stancu, F., *On the remainder in the approximation formulae by the Mirakyan operators of one and two variables*, „Analele Şt. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, Matem.", **14** (1968), 415–422 (Romanian).
15. Stancu, F., *On the approximation of functions of one and two variables by Baskakov's operators*, „Studii Cercet. Matematice", **22** (1970), 531–542 (Romanian).

ASUPRA RESTULUI APROXIMĂRII FUNCȚIILOR CU AJUTORUL UNUI OPERATOR LINEAR POLINOMIAL DEPINZÎND DE UN PARAMETRU

(R e z u m a t)

Această lucrare este consacrată studierii restului în formula de aproximare a unei funcții f, definită pe [0,1], cu ajutorul operatorului liniar polinomial, depinzînd de un parametru α, introdus şi studiat în lucrarea autorului [11]. La (2) s-a dat o expresie a acestui rest cu ajutorul diferențelor divizate de ordinul doi. Folosind acest rezultat şi o teoremă a lui T. P o p o v i c i u [7] s-a stabilit formula (4) şi apoi formula (5). În continuare s-a dat o reprezentare integrală (6) a restului, făcind uz de o teoremă a lui G. P e a n o [6].

ОБ ОСТАТКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ОДНОГО ПАРАМЕТРА

(Р е з ю м е)

Настоящая работа посвящена изучению остатка в формуле приближения функции f, определённой на [0,1], с помощью полиномиального линейного оператора, зависящего от параметра α, введённого и изученного в работе автора [11]. В (2) дано выражение этого остатка с помощью разделенных разностей второго порядка. Используя этот результат и одну теорему Т. П о п о в и ч у [7], автор устанавливает формулу (4) а затем формулу (5). В дальнейшем автор даёт интегральное представление (6) остатка, используя одну теорему Г. П е а н о [6].

A PIECEWISE LAGRANGE INTERPOLATION WITH APPLICATION TO ERROR ESTIMATES IN FINITE-DIFFERENCE METHODS

E. SCHECHTER

This paper is concerned with using interpolating spline functions in estimating errors in numerical integration of differential equations, extending some results of [3]. The estimates have the advantage of requiring information only about the differential problem and the computed numerical solution.

In § 1 we present a piecewise polynomial function given by R i a b e n k i i - F i l i p p o v [2]. It turns out that this function has some better convergence properties than that given by S c h u l t z [4]. In § 2 we consider the multivariate case and estimate the norm of the interpolating operator. In § 3 we apply results of § 1, § 2 to obtain interior estimates.

1. A piecewise-polynomial interpolating function. In what follows we shall use a piecewise-polynomial function defined on R, associated to the partition $R_h = hZ$ of R, [2].

Denote by $C^k(R)$ the space of k-times continuously differentiable real functions and by $c(R_h)$ the linear space of real sequences $u_h = (u_h^\alpha)_{\alpha\in R_h}$. The *extension* operator $p_h^k \in L(c(R\ ),\ C^k(R))$ is then defined by:

$$p_h^k u_h(x) = \sum_\alpha u_h^\alpha \sigma_k\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \qquad x \in R. \tag{1.1}$$

Here, if χ is the characteristic function of $[0,1)$

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k+1} \delta\,(-j) * (\Psi^j \chi) \tag{1.2}$$

and

$$\Psi^j = \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^{m-j} C_m^j q_m \qquad (C_m^j = 0 \text{ if } m < j) \tag{1.3}$$

$$q_m = \frac{1}{m!} \prod_{s=1}^{m} (x - (s-1)) \quad m = 1, 2, \ldots, k;\ q_0 = 1. \tag{1.4}$$

By q_{k+1} we denoted the Hermite interpolation polynomial of degree $2k + 1$, satisfying conditions:

$$q_{k+1}^{(j)}(0) = 0; \quad q_{k+1}^{(j)}(1) = D^j q_k(x-1)|_{x=1},\ j = 0, 1, \ldots, k. \tag{1.5}$$

i.e.:

$$q_{k+1}(x) = x^{k+1}\sum_{j=0}^{k} \frac{(x-1)^j}{j!}\, q_{k+1}^{(j)}(1) \quad x \in R.$$

Equality (1.1) may be written in the form:

$$p_h^k u_h(x) = \sum_{\alpha} \chi\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \sum_{m=0}^{k+1} (\Delta_m u_h)^\alpha q_m\left(\frac{x}{h} - \alpha\right), \tag{1.6}$$

where $(\Delta_m u_h)^\alpha = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j u_h^{\alpha+j}$.

Define now the *restriction* operator, $r_h : C(R) \to c(R_h)$, by

$$(r_h u)^\alpha = \delta(\alpha h) u,$$

δ being the Dirac function. Because $\left(\delta(\alpha h),\ \sigma_k\left(\frac{x}{h} - \beta\right)\right) = \delta_{\alpha\beta}$, it follows that p_h^k is an interpolation, i.e.:

$$(r_h p_h^k u_h)^\alpha = u_h^\alpha, \quad \alpha \in Z.$$

If we take into account that $supp\,\sigma_k = [-(k+1)h, h]$ this implies:

$$\sum_{\alpha} \sigma_k\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) = 1, \quad x \in R.$$

Moreover $p_h^k r_h$ is a projection from $C(R)$ onto the subspace spanned by $\{\sigma_{kh}^\alpha\}$, where $\sigma_{hk}^\alpha(x) = \sigma_k\left(\frac{x}{h} - \alpha\right)$. We also note that the subspace of polynomials of degree at most k is invariant for ^{k}.

Proceeding to the multivariate case w let

$$\sigma_k(x) = \sigma_{k_1}(x_1)\sigma_{k_2}(x_2) \ldots \sigma_{k_n}(x_n) \quad x \in R^n$$

where $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \ldots k_n)$, $h = h_1 h_2 \ldots h_n$, and define:

$$p_h^k : c(R_h) \to C^k(R^n), \quad R_h = hZ^n,$$

by

$$p_h^k u_h(x) = \sum_{\alpha} u_h^\alpha \sigma_h^\alpha(x) \quad x \in R^n, \tag{1.7}$$

where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ is a multi-integer. The restriction operator is defined as before by:

$$r_h : C(R^n) \to c(R_h); \quad (r_h u)^\alpha = \delta(\alpha h) u, \ \alpha \in Z^n.$$

Following theorem has been proved in [2, Anhang].

THEOREM 1.1. *Suppose $f \in C^k(R^n)$. Then for any multi-integer $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$; $0 \leq j < k$, there exists a constant C, such that*

$$|D^j(f - p_h^k r_n f)(x)| \leq C h^{k-j} \sup_x \sup_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x)|, \ x \in R^n, \tag{1.8}$$

C being independent of f and h, and $h^{k-j} = h^{k_1-j_1} h^{k_2-} \ldots h^{k_n-j_n}$.

Now consider $p_h^k \in (c_0(R_h), C_0^k(R^n))$, where $C_0^k(R^n)$ is the Banach space of functions of $C^k(R^n)$ vanishing at infinity with norm

$$||f||_k = \sup_{|\alpha|<|k|} \sup_x |D^\alpha f(x)|$$

and let $c_0(R_h)$ be the corresponding Banach space of sequences u_h (with *max* norm $|| \ ||_h$). In this case inequality (1.8) may be written as:

$$||D^j(f - p_h^k r_h f)|| \leq Ch^{k-j}||f||_k, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{1.9}$$

Remark 1.1. If in (1.2) σ_k are changed in the following way:

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{2k+1} \delta(-j) * (\Psi^j \chi),$$

$$\Psi^j = \sum_{m=0}^{2k+1} (-1)^{m-j} C_m^j q_m \qquad (C_m^j = 0, \text{ if } j < m), \tag{1.10}$$

and $f \in C^{2k+1}(R^n)$, then (1.8) becomes:

$$|D^j(f - p_h^k r_h f)(x)| \leq Ch^{2k-j+1} \sup_{|2k+1|} \sup_x |D^{2k+1} f(x)| \tag{1.11}$$

$x \in R^n \setminus R_h$, $j = 0, 1, \ldots, 2k$. Here

$$q_m(x) = \frac{1}{m!} \prod_{s=1}^m (x - (s-1)), \; m = 1, 2, \ldots, 2k; \; q_{2k+1} = \frac{1}{m!} \prod_{s=1}^{2k+1} (x - (s-1)) +$$
$+ r_{2k+1}$; r_{2k+1} being the Hermite interpolation polynomial satisfying conditions:

$$r_{2k+1}^{(j)}(0) = 0, \; r_{2k+1}^{(j)}(1) = \frac{j!}{(2k+1)!} \prod_{s=1}^{2k+1} (x - s)\Big|_{x=1}, \; j = 0, 1, \ldots, k.$$

This operator p_j^k preserves polynomials of degree less than $2k+1$, but $p_h^k u_h \in C^k(R^n)$ as before, so that (1.11) holds for the whole of R^n, only for $j < k$.

In thiy way we have a multivariate piecewise Lagrange interpolation which in some cases compares favourably with that of M. H. Schultz [4, Theorem 6.1] for two reasons: i) There is no need for a double partitioning, ii) Inequality (1.11) holds on R_h too, for $j < k$.

2. Uniform boundedness of interpolation. Consider the Banach space $C^k(\overline{\Omega})$ with norm

$$||f||_{k,\Omega} = \sup_{|\alpha|<|k|} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|; \quad ||f||_{0,\Omega} = ||f||_\Omega.$$

Suppose $\Omega \subset R^n$ to be regular enough (see e.g. [4, Theorem 4.9]) so there is a bounded linear extension mapping:

$$\pi : C^k(\overline{\Omega}) \to C_0^k(R^n) \tag{2.1}$$

$\pi f(x) = f(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ for all $u \in C^k(\overline{\Omega})$. We have:

THEOREM 2.1. *Suppose $f \in C^k(\overline{\Omega})$ and that Ω is regular, then*

$$||D^j(p_h^k r_h \pi f - f)||_\Omega \leq Ch^{k-j}||f||_{k,\Omega}, \quad |j| < |k|, \tag{2.2}$$

C being a constant independent of h and f.

This is imediately seen from:

$$||f||_\Omega \leq ||\pi f|| \quad \text{and} \quad ||\pi f||_k \leq C||f||_{k,\Omega}.$$

Notice that (2.1) is valid for any extension π.

Now let $K \subset R^n$ be a compact. Denote

$$Z_{hk}(K) = \{\alpha \in Z^n | K \cap \text{supp } \sigma_{kh}^\alpha \neq \emptyset\}.$$

$$K_{hk} = \bigcup_{\alpha \in Z_{hk}(K)} \text{supp } \sigma_{kh}^\alpha, \tag{2.3}$$

$$R_{hk}(K) = hZ_{hk}(K). \tag{2.4}$$

It is clear that if V is a neighbourhood of the origin, then there exists a compact $K_0 \subset R^n$ such that $K_{hk} \subset K_0$ for any $h \in V$. If now $c(K_{hk})$ denotes the subspace of functions of $c(R_h)$ with support in K_{hk}, it follows by (1.7) that *supp* $p_h^k u_h \subset K_0$, for any h sufficiently small and:

$$p_h^k : c(K_{hk}) \to C_{K_0}^k(R^n).$$

THEOREM 2.2. *If K is a compact of R^n, then there exists a constant C, independent of h, such that:*

$$||D^j p_h^k u_h||_K \leq Ch^{-j}||u_h||_h, \quad |j| < |k|, \tag{2.5}$$

for ll $u_h \in c(K_{hk})$.

Proof. Indeed if K_0 is defined as above,

$$\sup_K |D^j p_h^k u_n(x)| = \sup_K |\sum_\alpha u_h^\alpha D^j \sigma_{kh}^\alpha| \leq \sup_{R_h} |u_h^\alpha| \sup_{K_0} \sum_\alpha |D^j \sigma_{kh}^\alpha| \leq Ch^{-j}||u_h||_h,$$

$$\text{where } C = \max_j \sup_{K_0} \sum_\alpha |D^j \sigma_{kh}^\alpha|.$$

Here is now some notation used in next section:

$\Omega_h = \Omega \cap R_h$, *int* $\Omega_h = \Omega \setminus \Gamma_{hk}$, Γ being the boundary of Ω, and Γ_{hk} is defined by (2.3).

Remark 2.1. The values of u_h on $R_h \setminus R_{hk}(\overline{\Omega})$ have no influence on $r_\Omega p_h^k u_h$ (r_Ω the restriction to Ω). In particular if u_h is known on Ω_h only, then $p_h^k u_h$ is defined on *int* Ω_{hk}.

3. **Interior estimates.** In this section we apply results of § 2, § 3, to obtain error bounds on *int* Ω_h in the numerical integration of differential equations. The bounds have the following two properties: i) They need no information about the solution to be computed, ii) They preserve the convergence of the numerical method.

To begin with we recall some definitions related to discretely convergent numerical methods (see [1], I, § 1]).

Consider the differential problem:

$$Au = f \tag{3.1}$$

where $A: E \to F$; E, F are Banach spaces. Let the corresponding "finite-difference" problem be:

$$A_h u_h = f_h \tag{3.2}$$

where $A_h: E_h \to F_h$; E_h, F_h are finite-dimensional spaces. Denote the norm of E_h by $\|\ \|_h$.

A numerical method is said to be *(discretely) convergent* if

$$\|u_h - r_h u\|_h \to 0 \text{ as } h \to 0,$$

where r_h; $E \to E_h$. The maximal (multi-)integer m such that:

$$\|u_h - r_h u\|_h = 0(h^m)$$

is called the *order of convergence* of the method.

We admit that subsequent differential problems have a unique solution.

3.1. *Ordinary differential equations.*

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a \quad (x, y) \in D. \tag{3.3}$$

LEMMA 3.1. [5]. *Suppose that on a sufficiently large domain $D \subset R^2$, whose projection on Ox contains $[a, b]$ and f satisfies a Lipschitz condition (in y) with constant L.*

Assume that we are given a function $u: [a, b] \to R$, such that

$$|u'(x) - f(x, u(x))| \leq \varepsilon \quad x \in [a, b],$$

ε being a constant and $u(a) = y_a$.

Under these assumptions

$$|y(x) - u(x)| \leq \varepsilon e^{Lx}, \quad x \in [a, b], \tag{3.4}$$

where $y: [a, b] \to R$ is the unique solution o (3.3).

Now suppose we have computed by some numerical method P an approximate solution y on an equidistant mesh $\Omega_h = \Omega \cup R_h$, $\Omega = (a, b)$. Admit that $a \in R_h$ and that $y_h(a) = y_a$.

THEOREM 3.1. *Suppose that*

a) *f fulfils condition of Lemma* 3.1.

b) *The numerical method P has the order of convergence m.*

c) *$y \in C^k(\bar{\Omega})$ with $k > m$.*

Then

i) $|y(x) - p_h^k y_h(x)| \leq \varepsilon(h) e^{Lx}$, $\quad x \in \bar{\Omega}$ *and $\varepsilon(h)$ is such that*

$$|D p_h^k y_h(x) - f(x, p_h^k y_h(x))| \leq \varepsilon(h) \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{3.5}$$

ii) $|y(x) - p_h^k y_h(x)| = 0(h^{m-1})$ *for* $x \in$ *int* Ω_{hh}.

Proof. *i*) follows at once from Lemma 3.1. In order to show *ii*) we write for $x \in int\ \Omega_{hk}$:

$$|Dp_h^k y_h(x) - f(x, p_h^k y_h)x))| \leq |Dp_h^k(y_h - r_h y)(x)| + |D(p_h^k r_k y - y)(x)| +$$
$$+ L|p_h^k r_h y(x) - y(x)|.$$

The first term on the right is $O(h^{m-1})$ by (2.5), the other two have the desired order by (2.2).

Remark 3.1. If y_h is known on the points of $R_{hk}(\overline{\Omega})$ (see (2.4)), which do not belong to Ω_h and it is such that for an extension π

$$||y_h - r_h \pi y||_h = 0(h^m) \text{ on } R_{hk}$$

then (3.5) ii) holds for the whole of Ω.
This can be done in some cases by solving the problem in a larger domain.

3.2. *Parabolic equations.* We now give an estimate of the error for the first Fourier problem for

$$u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}) \text{ on } Q_T = [0, T) \times \Omega. \tag{3.6.}$$

Lemma 3.2. [5]. *Suppose that the solution u and the function v belong to* $C^{12}(Q_T) \cap C^{11}(\overline{Q}_T)$.

Assume that

$$|v_t - f(t, x, v, v_x, v_{xx})| \leq \eta \text{ on } Q_T; |u(0, x) - v(0, x)| \leq \varepsilon \text{ for } x \in \overline{\Omega},$$
$$|u(t, x) - v(t, x)| \leq \varepsilon \text{ for } t \in (0, T),\ x \in \partial\Omega.$$

Let f satisfy (on a large enough domain) a Lipschitz condition in u, with constant L.

Under these conditions

$$|u(t, x) - v(t, x)| \leq \frac{\eta}{L}(e^{Lt} - 1) + \varepsilon e^{Lt} \text{ on } Q_T;$$

Let again u be a numerical solution on a mesh placed on Q, yie ded by a numerical method P.

Theorem 3.2. *Suppose that*

a) *P has the order of convergence m.*
b) *f satisfies a Lipschitz condition with respect to* u, u_x, u_{xx}.
c) *Solution u belongs to* $C^k(\overline{\Omega})$.
d) $k_0 > m_0 + 1,\ k_1 > m_1$.

Then

i) $|u(t, x) - p_h^k u_h(t, x)| \leq \frac{\eta(h)}{L}(e^{Lt} - 1) + \varepsilon(h) e^{Lt}$ *on* Q_T.

where

$$|u(t, x)-p_h^k u_h(x)| \leq \gamma(t, h) \text{ on } \Omega; \ |u(0, x) - p_h^k u_h(0, x)| \leq \varepsilon(h), \ x \in \overline{\Omega}$$

$$|u(t, x) - p_h^k u(t, x)| \leq \varepsilon(h) \text{ for } t \in (0, T) \cdot x \in \partial\Omega.$$

ii) $|u(t, x) - p_h^k u_h(t, x)| \leq 0(h^{m-q})$, *for* $x \in \text{int } \Omega_{hk}$, $t \in [0, T]$ *and* $q_0=1$, $q_1=2$.

The proof parallels that of Theorem 3.1 (see also [3]).

Finally note that Remark 3.1 holds in this case too and that weakly connected sytems may also be considered.

(Received February 4, 1971)

REFERENCES

1. Aubin J. P., *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*, „Bull. Soc. Math. France", Mémoire 12, 1967.
2. Rjabenki V. S., A. F., Filippow *Über die Stabilität von Differenzengleichungen*, „Deutscher Verlag der Wissenschaften", Berlin, 1960.
3. Schechter E., *Error Bounds in the Numerical Integration of Differential Equations*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mec.", 1, 1970, pp. 47–53.
4. Schultz M. H., *L -multivariate Approximation Theory*, „SIAM Jour. Num. Anal." 6, 1, 1969, pp. 161–183.
5. Szarski J., *Differential Inequalities*, „Polish Scientific Publishers" Warszawa, 1965.

O INTERPOLARE SEGMENTARĂ LAGRANGE CU APLICAŢII LA EVALUAREA ERORILOR ÎN METODELE CU DIFERENŢE FINITE

(Rezumat)

În lucrare se studiază proprietăţi de convergenţă (§ 1) a unei funcţii spline dată de Riabenkii-Filippov [2] şi a unei variante a acesteia (1.10). Se arată că aceasta din urmă are anumite avantaje (vezi (1.11)) faţă de interpolarea dată de Schultz [4]. În § 3 se generalizează rezultatele din [3] pentru domenii arbitrare.

ОДНА СЕГМЕНТАРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА С ПРИМЕНЕНИЯМИ К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В МЕТОДАХ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

(Резюме)

В работе изучаются свойства сходимости (§1) одной „spline" функции, данной Рябеньким-Филипповым [2] и одной из её вариант (1.10). Показывается, что последняя имеет некоторые преимущества (см. (1.11)) по отношению к интерполяции, данной Шульцем [4]. В § 3 обобщаются результаты из [3] для произвольных областей.

DESPRE EFICIENȚA UNOR PROCEDEE MONTE-CARLO PENTRU CALCULUL INTEGRALELOR

ELENA FRĂȚILĂ

1. Se știe că eficiența unui procedeu Monte-Carlo de integrare a unei funcții f, [4] este dată de $\frac{1}{nD^2 I_1}$, n fiind volumul de selecție folosit, iar I_1 estimația obținută prin procedeul considerat pentru integrala

$$I = \int_a^b f(u)\, du. \tag{1}$$

Prin urmare eficiența unui procedeu crește prin micșorarea dispersiei sau a volumului de selecție. Ținînd cont de delimitarea erorii [1], rezultă că mărirea eficienței unei procedeu implică și mărirea preciziei acestuia.

În acest scop se cunosc o serie de procedee, ca: „importance sampling", procedee de selecție stratificată, procedeul variabilei de control, procedeul variabilelor antitetice, [1, 3, 4], schimbarea funcției integrant [2], procedeu bazat pe funcții ortogonale [1]. Unele din aceste procedee sînt însă formale (procedeul „importance sampling"); altele au o valoare practică numai în măsura unei potrivite alegeri a elementelor care intervin în scopul optimizării (procedeul selecției stratificate, procedeul variabilei de control, procedeul variabilelor antitetice, procedeul bazat pe schimbarea funcției integrant).

Lucrarea își propune să dea anumite indicații pentru mărirea eficienței în cazul procedeului „importance sampling" și procedeului variabilei de control.

2. Procedeul „importance sampling".

Se știe [1,4] că procedeul „importance sampling" introduce densitatea de probabilitate $g(x) > 0$ pentru $x \in [a, b]$ și din integrala (1) scrisă sub forma:

$$I = \int_a^b \frac{f(u)}{g(u)} g(u)\, du,$$

rezultă estimația

$$I_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g(x_i)},$$

x_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ fiind o selecție de volum n efectuată asupra variabilei aleatoare ξ cu densitate de probabilitate g.

a) Pentru valorificarea acestui procedeu vom da:

TEOREMA 1. *Procedeul „importance sampling" este mai eficient decît procedeul Monte-Carlo primitiv [1] dacă densitatea de probabilitate g verifică inegalitatea:*

$$g(x) > \frac{k}{2(x-a)}, \quad x \in (a, b), \tag{2}$$

și f mărginită pe [a, b]

Demonstrație. Se observă că eficiența acestui procedeu este mai mare decît a procedeului Monte-Carlo primitiv, dacă

$$D^2 I_1 > D^2 I_2 \tag{3}$$

unde

$$I_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{4}$$

$\{x_i\}$ fiind o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare uniforme pe $[a, b]$

Deoarece

$$D^2 I_1 = \frac{1}{n} \left[(b-a) \int_a^b f^2(u)\, du - I^2 \right].$$

iar

$$D^2 I_2 = \frac{1}{n} \left[\int_a^b \frac{f^2(u)}{g^2(u)} g(u)\, du - I^2 \right],$$

inegalitatea (3) devine:

$$(b-a) \int_a^b f^2(u)\, du > \int_a^b \frac{f^2(u)}{g(u)}\, du. \tag{5}$$

Să aplicăm celor două integrale din (5) formula mediei, f^2 fiind mărginită pe $[a, b]$:

$$(b-a) \int_a^b f^2(u)\, du = (b-a)^2 \gamma$$

$$\int_a^a f^2(u) \frac{1}{g(u)}\, du = \gamma \int_a^b \frac{1}{g(u)}\, du,$$

unde γ este un număr pozitiv care verifică inegalitățile $m \leqslant \gamma \leqslant M$, m, M fiind marginea inferioară, respectiv superioară a lui f^2 pe $[a, b]$. Cu acestea condiția (5) devine:

$$\mathrm{M}\, (b-a)^2 > \mathrm{m} \int_a^b \frac{1}{g(u)}\, du.$$

Dar

$$(b-a)^2 = 2\int_a^b (u-a)\,du$$

şi prin urmare:

$$M\int_a^b 2(u-a)\,du > m\int_a^b \frac{du}{g(u)}$$

sau

$$2M(u-a) > \frac{m}{g(u)}, \text{ pentru } u \in (a, b), \text{ unde } k = \frac{m}{M}.$$

b) Procedeul nou pe care-l propunem în continuare pentru mărirea eficienţei se bazează pe ideea de la procedeul „importance sampling" a introducerii unei noi densităţi de probabilitate, diferită de cea corespunzătoare distribuţiei uniforme. Procedeul este aplicabil şi în cazul integralelor multiple, prezentînd şi avantajul de a scurta timpul de calcul al estimaţiei corespunzătoare, faţă de cel al estimaţiei (4).

Presupunem că funcţia integrant din (1), are forma: $f(x) = h(x)\,g(x)$, cu $h(x) \geqslant 0$ (sau $h(x) \leqslant 0$) pentru $x \in [a, b]$ şi

$$\lambda\int_a^b h(u)\,du = 1, \quad \lambda > 0,$$

iar g mărginită pe [a, b]. În aceste condiţii avem

TEOREMA 2. *Estimaţia*

$$\overline{I}_1 = \frac{1}{\lambda n}\sum_{i=1}^{n} g(x),$$

unde x_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *reprezintă o selecţie de volum n efectuată asupra variabilei aleatoare* ζ *cu densitatea de probabilitate* λh, *este estimaţie mai eficientă decît estimaţia* I_1.

Demonstraţie. Să comparăm dispersiile

$$D^2 I_1 = \frac{1}{n}\left[(b-a)\int_a^b g^2(u)\,h^2(u)\,du - I^2\right],$$

$$D^2 \overline{I}_1 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda}\int_a^b g^2(u)\,h(u)\,du - I^2\right].$$

Pentru aceasta este suficient să ne ocupăm de expresiile

$$E_1 = (b-a)\int_a^b g^2(u)\,h^2(u)\,du. \tag{6}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda}\int_a^b g^2(u)\,h(u)\,du. \tag{7}$$

Aplicînd lui (6) prima formulă de medie avem:

$$(b-a)\int_a^b g^2(u)\,h^2(u)\,du=(b-a)\bar{\gamma}\int_a^b h^2(u)\,du, \tag{8}$$

unde $\bar{\gamma}$ este un număr pozitiv care satisface relaţia $\bar{m}\leqslant\bar{\gamma}\leqslant\bar{M}$, $\bar{m}$, $\bar{M}$ fiind marginea inferioară, respectiv superioară, a lui g^2 pe [a, b].
La fel, pentru (7), se obţine:

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^b g^2(u)\,h(u)\,du=\frac{\bar{\bar{\gamma}}}{\lambda}\int_a^b h(u)\,du,\ \bar{m}\leqslant\bar{\bar{\gamma}}\leqslant\bar{M}. \tag{9}$$

Aceasta se mai poate scrie

$$\frac{1}{\lambda}\int_a g^2(u)\,h(u)\,du=\bar{\bar{\gamma}}\left(\int h(u)\,du\right)^2.$$

În continuare, aplicînd inegalitatea lui Schwarz, din (8) şi (9) rezultă

$$(b-a)\bar{\gamma}\int_a^b h^2(u)\,du>\bar{\bar{\gamma}}\left(\int_a^b h(u)\,du\right)^2,\ \bar{\gamma}\geqslant\bar{\bar{\gamma}},$$

şi cu aceasta teorem este demonstrată. Pentru $\bar{\gamma}<\bar{\bar{\gamma}}$, de asemenea $E_1-E_2\geqslant 0$.

Observaţie. Cazul $h(x)\leqslant 0$ pentru $x\in[a, b]$ se tratează absolut analog, singura deosebire fiind că de data aceasta λ este un număr negativ.

TEOREMA 3. *În condiţiile teoremei 2, eroarea corespunzătoare estimaţiei $\bar{I}_1$ este mai mică decît eroarea dată de estimaţia I_1.*

Demonstraţie. În conformitate cu [1], probabilitatea ca eroarea δ_n pentru estimatorul I_1 să fie mai mică decît:

$$\frac{D(b-a)f(\xi)}{\sqrt{n\varepsilon}},$$

ζ fiind o variabilă aleatoare uniformă pe $[a, b]$, este mai mare decît $1-\varepsilon$, $\varepsilon<0$ şi arbitrar de mic. Pentru $\bar{I}_1$ eroarea este delimitată cu aceeaşi probabilitate, prin:

$$\bar{\delta}_n=\frac{Dg(\zeta)}{\lambda\sqrt{n\varepsilon}}.$$

Din calculul lui D^2I şi $D^2\bar{I}_1$, rezultă

$$D^2(b-a)f(\xi)>\frac{D^2g(\zeta)}{\lambda^2},$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Aplicaţii. 1. Dacă $f(x)=x^kg(x)$, unde k este orice număr întreg şi intervalul de integrare $[a, b]$ finit, atunci

$$\lambda=\frac{k+1}{b^{k+1}-a^{k+1}}.$$

În cazul k impar şi $a < b < 0$, λ are aceeaşi valoare ca mai sus, dar ea este negativă. Pentru cazul $a < 0 < b$, intervalul de integrare se descompune în $[a, 0]$ şi $[0, b]$.

Se vede că numărul operaţiilor necesare pentru calculul lui $\bar{I}_1$ scade cu $nk - 1$ faţă de cel al calculului lui I_1.

2. Dacă $f(x) = e^{\varepsilon x}g(x)$, iar $[a, b] \subset R$, se obţine

$$\lambda = \frac{1}{e^b - e^a} > 0,$$

respectiv

$$\lambda = \frac{1}{e^{-a} - e^{-b}} > 0,$$

după cum $\varepsilon = +1$, respectiv $\varepsilon = -1$.

Şi în acest caz numărul operaţiilor pentru calculul lui $\bar{I}_1$ scade prin dispariţia a n factori de forma e^{x_i} apărînd în plus numai o înmulţire cu $\frac{1}{\lambda}$, faţă de numărul operaţiilor necesare pentru calculul lui I_1.

3. Dacă $f(x) = g(x) \sin x$ şi

$$I = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(u)du,$$

pentru k par, se obţine $\lambda = \frac{1}{2}$, şi pentru k impar $\lambda = -\frac{1}{2}$. Iar în calculul estimaţiei

$$I_1 = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{2n}$$

dispar n factori $\sin x_i$, faţă de expresia lui I_1.

Cazul $f(x) = g(x) \cos x$ se prezintă analog.

3. Procedeul variabilei de control. Se ştie că procedeul variabilei de control [1], introduce o funcţie g care aproximează suficient de bine funcţia f pe $[a, b]$, şi consideră pentru integrala (1) estimaţia

$$I_3 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x)_i - g(x_i) + \tilde{I},$$

unde $\bar{I} = \int_b^a g(u)du$, iar x_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ este o selecţie de volum n asupra variabilei aleatoare ξ uniforme pe $[a, b]$.

În acest caz vom da:

TEOREMA 4. *Procedeul variabilei de control este mai eficient decît procedeul Monte Carlo primitiv, dacă:*

$$m_1 \int_a^{a_1} (g(u) - 2f(u))du + m_2 \int_{a_1}^{b} (g(u) - 2f(u))du \leqslant M \int_a^b (g(u) - 2f(u))du, \quad (10)$$

$g - 2f$ păstrînd un semn constant pe intervalele $[a, a_1]$, $[a_1, b]$, iar m_1, m_2 fiind marginea inferioară a lui g pe aceste intervale, şi M marginea superioară a lui g pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Se observă că

$$D^2I_1 = \frac{1}{n}\left[(b-a)\int_a^b f^2(u)du - I^2\right]$$

şi

$$D^2I_3 = \frac{1}{n}\left[(b-a)\int_a^b [f(u) - g(u)]^2 du - (I - \bar{I})^2\right].$$

Pentru ca I_3 să fie mai eficientă decît I_1 trebuie să avem

$$D^2[I_3 < D^2I_1.$$

adică

$$\frac{1}{n}\left[(b-a)\int_a^b (g^2(u) - 2f(u)g(u))du - \left(\int_a^b g(u)du\right)^2 + 2\int_a^b f(u)\,du\int_a^b g(u)\,du\right] < 0$$

sau

$$(b-a)\int_a^b g(u)\ (g(u) - 2f(u))du < \int_a^b g(u)\,du \int_a^b (g(u) - 2f(u))du. \quad (11)$$

Deoarece g este mărginită pe $[a, b]$ şi $g - 2f$ are semn constant pe $[a, a_1]$, $[a_1, b]$, avem:

$$\int_a^b g(u)(g(u) - 2f(u))du = \int_a^{a_1} g(u)(g(u) - 2f(u))\,du + \int_{a_1}^b g(u)(g(u) - 2f(u))du,$$

care după aplicarea formulei de medie în ambele integrale din membrul doi, devine:

$$\int_a^b g(u)(g(u) - 2f(u))du = \gamma_1 \int_a^{a_1} (g(u) - 2f(u))du + \gamma_2 \int_{a_1}^b (g(u) - 2f(u))du$$

$$m_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant M_1, \qquad m_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant M_2,$$

m_1, m_2, M_1, M_2 ,fiind marginea inferioară, respectiv superioară a lui g pe intervalele parţiale considerate.

Pe de altă parte, aplicînd integralei $\tilde{I}$ formula mediei, avem

$$\int_a^a g(u)\,du = (b-a)\gamma,$$

$$m \leqslant \gamma \leqslant M,$$

unde m, M sînt marginea inferioară, respectiv superioară a lui g pe $[a, b]$. Cu acestea inegalitatea (11) devine:

$$\gamma_1 \int_a^{a_1} (g(u) - 2f(u))\,du + \gamma_2 \int_{a_1}^{b} (g(u) - 2f(u))du < \gamma \int_a^a (g(u) - 2f(u))du.$$

Sau, prin înlocuirea lui γ_1, γ_2 respectiv cu valorile m_1, m_2 iar γ cu M, se obține:

$$m_1 \int_a^{a_1} (g(u) - 2f(u))du + m_2 \int_{a_1}^{b} (g(u) - 2f(u))du < M \int_a^b (g(u) - 2f(u))\,du$$

și teorema este demonstrată.

În cazul cînd $g - 2f$ are un semn constant pe $[a, b]$, inegalitatea (10) este îndeplinită oricare ar fi g mărginită pe $[a, b]$ și f oarecare.

(Intrat în redacție la 8 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Hammersley, J. M., Handscomb, D. C., *Monte Carlo Methods*, London, 1964.
2. Laurent, P. J., *Rémarque sur l'évaluation d'integrale par la méthode Monte Carlo.* C.R.Ac.Sci. Paris, **253**, 610–612, 1961.
3. Seymour, Haber, *A Modified Monte Carlo Quadrature I, II*, „Math. Comp.", **20**, 361–368, 1966; **21**, 388–397, 1967.
4. Stoka, M., Theodorescu, R., *Probabilitate și geometrie*, Ed. științifică, București, 1966.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

(Резюме)

Автор даёт некоторые указания для повышения эффективности метода „importance sampling", метода контрольной переменной и новый метод, тоже типа Монте-Карло, который прескедует ту же цель и может употребляться и в случае кратных интегралов.

SUR L'EFFICIENCE DE PROCEDÉS MONTE-CARLO POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES

(Résumé)

L'auteur donne quelques indications pour accroître l'efficience du procédé „importance sampling", du procédé de la variable de contrôle, ainsi que d'un procédé nouveau, toujours du type Monte-Carlo et qui tend au même but utilisable également dans le cas des intégrales multiples.

GEGENBAUER (ULTRASPHERICAL) POLYNOMIAL AND HEAT PRODUCTION IN A CYLINDER

MANILAL SHAH

Department of Mathematics, P. M. B. Science G. College,
Sanyogitaganj, Indore (M. P.), India.

1. Introduction. The object of this paper is to consider the diffusion of heat in a cylinder of radius a when there are sources of heat within it which lead to an axially symmetrical temperature distribution. The fundamental differential equation is then of the form [(4), p. 202]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \theta(r, t), \tag{1.1}$$

if we assume that the rate of generation of heat is independent of the temperature and that the cylinder is infinitely long, so the variation of z may be neglected. We shall, in addition, suppose that the surface $r = a$ is maintained at zero temperature and the initial distribution of temperature is also zero.

We further suppose that

$$\theta(r, t) = \frac{k}{K} f(r)\, g(t) \tag{1.2}$$

where k is the diffusivity and K the conductivity of the material.

In this paper we have considered the different sets of values for $f(r)$ and $g(t)$. It will be observed that the single function $f(r)$ can represent both sources and sinks embedded in the system. Whenever the product $f(r)\, g(t)$ gives a negative value, it should be treated as a sink.

We shall require the following integral [(6), (4.5)] in the present investigation.

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\gamma-\frac{1}{2}} C_{\mu}^{\gamma}(2x-1)\, G_{p,q}^{m,n}\left(zx^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)dx \tag{1.3}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)}{\mu!\,\Gamma(2\gamma)\,\partial^{\gamma+\frac{1}{2}}}\, G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,-\lambda),\ \Delta\left(\delta,-\lambda+\gamma-\frac{1}{2}\right),\ a_p\\ b_q,\ \Delta\left(\delta,-\lambda+\gamma+\mu-\frac{1}{2}\right),\ \Delta\left(\delta,-\lambda-\mu-\gamma-\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right)$$

where δ a positive integer, $C_\mu^\gamma(x)$ is the Gegenbauer polynomial, $G_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)$ is Meijer's G-function [(2), p. 434, (2)] and

$$\text{(i)}\begin{cases}2(m+n)>p+q,\ |\arg z|<\left[m+n-\frac{1}{2}(p+q)\right]\lambda,\\ \operatorname{Re}(\lambda+\delta b_j)>-1,\ j=1,2,\ldots,m;\ \operatorname{Re}(\gamma)>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

or

$$\text{(ii)}\begin{cases}p<q \text{ or else } p=q \text{ with } |z|<1,\\ \operatorname{Re}(\lambda+\delta b_j)>-1,\ j=1,2,\ldots,m;\ \operatorname{Re}(\gamma)>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

The symbol $\Delta(m, n)$ is taken to abbreviate the set of m-parametres:

$$\frac{n}{m},\ \frac{n+1}{m},\ \ldots,\ \frac{n+m-1}{m},$$

and a_p stands for $a_1, \ldots, a_p$ with similar notation for b_q.

2. Finite Hankel Transform. Let the finite Hankel transform of $f(r)$ be [(4) Snedden, p. 83]:

$$J[f(r)]=\int_0^a rf(r)\,J_0(r\xi_i)dr=\bar{f}_j(\xi_j),$$

then in (1.3), setting $m=1$, $n=p=0$, q 2, $b_1=b_2=\sigma$,

$\delta=1$, $z=\frac{\xi_j^2a^2}{4}$, $x=\frac{r^2}{a^2}$ and using [(2), p. 434 & 439, (3)], we get

$$J\left[r^{2\lambda+2\sigma}(a^2-r^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}C_\mu^\gamma\left(\frac{2r^2-a^2}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma+1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{2\mu!\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\partial+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)}$$

$${}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\\ 1,\ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};-\frac{\xi_j^2a^2}{4}\right)$$

where Re $(\lambda + \sigma) - > -1$, $\mathrm{Re}(\gamma) > -\frac{1}{2}$ and ξ_i is the root of the transcendental equation

$$J_0(a\xi_i) = 0. \tag{2.3}$$

In view of the inversion theorem [(4), Sneddon, p. 83] we obtain

$$r^{2\lambda+2\sigma}(a^2 - r^2)^{\gamma-\frac{1}{2}} C_\mu^\gamma\left(\frac{2r^2 - a^2}{a^2}\right) \tag{2.4}$$

$$= \frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1,\ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};\ -\frac{\xi_i^2 a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}$$

where the sum is taken over all the positive roots of the equation (2.3).

The result (2.4) will prove useful in the verification of the solution.

3. Solution of the Problem. On applying finite Hankel transform (2.2) to get the solution of (1.1), we have its solution obtained as [(4), Sneddon, p. 203]

$$u(r, t) = \frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.1}$$

$$\frac{k}{K}\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1,\ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};\ -\frac{\xi_i^2 a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}h(\xi_i, t)$$

where $\mathrm{Re}(\lambda+\sigma) > -1$, $\mathrm{Re}(\gamma) > -\frac{1}{2}$ and the sum is taken over all the positive roots of the equation

$$J_0(a\xi_i) = 0 \tag{3.2}$$

and

$$h(\xi_i, t) = \int_0^t g(\zeta)e^{-k\xi_i^2(t-\zeta)}\,d\zeta. \tag{3.3}$$

We shall evaluate (3.3) for some heat sources of general character.

4. Verification of the Solution. From (3.1) and [(3). Lebedev, p. 100, (5.2.4)& (5.2.5)], we obtain

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{{}^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu\,!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)} \tag{4.1}$$

$$\frac{k^2}{K}\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1,\ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};\ -\frac{\xi_i^2a^2}{4}\right)\frac{\xi_i^2\,J_0(r\,\xi_i)}{[J_1(a\,\xi_i)]^2}$$

$$\int_0^t g(\zeta)\,e^{-k\xi_i^2(t-\zeta)}\,d\zeta.$$

From (1.2) and (2.4) we have

$$\theta(r,\ t) = \frac{k}{K}\,\frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu\,!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)} \tag{4.2}$$

$$\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1,\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};\ -\frac{\xi_i^2a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\,\xi_i)]^2}\,g(t)$$

and from (3.1), we have

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\,\Gamma(1+\sigma+\lambda)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu\,!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)} \tag{4.3}$$

$$\frac{k}{K}\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda,\ \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1,\ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2},\ \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix};\ -\frac{\xi_i^2a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\,\xi_i)]^2}$$

$$\left(g(t) - k\,\xi_i^2\int_0^t g(\zeta)\,e^{-k\xi_i^2(t-\zeta)}\,d\zeta\right).$$

Setting the above values in (1.1), the equation is satisfied.

The boundary condition $u(a,\ t) = 0$ is satisfied, because $J_0(a\xi_i)$ which is present in every term of $u(a,\ t)$ is zero. The initial condition is satisffed because $h(\xi_i,\ 0) = 0$.

We see that (3.1) converges uniformly when $t > 0$ and so the function $u(r, t)$ represented by it is continuous when $0 \leqslant r \leqslant a$.

The term-by-term differentiations are justified because (4.1) and (4.3) are uniformly convergent, when $t > 0$ abd $0 \leqslant r \leqslant a$.

5. Heat Source of General Character. Let

$$g(\zeta) = g_0 e^{-\zeta s} \zeta^{\gamma-1} (t - \zeta)^{\rho-1} {}_2F_1\left({\alpha, \beta \atop \gamma} ; \frac{\zeta}{t}\right) \tag{5.1}$$

then using [(2), p. 400, (8)], we obtain

$$h(\xi_i, t) = g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma + \rho - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma + \rho - \alpha)\Gamma(\gamma + \rho - \beta)} e^{-st} t^{\gamma+\rho-1} \tag{5.2}$$

$$ {}_2F_2\left[{\rho, \gamma + \rho - \alpha - \beta \atop \gamma + \rho - \alpha, \gamma + \rho - \beta} ; (z - k\xi_i^2)t\right]$$

where $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\gamma + \rho - \alpha - \beta) > 0$.

Substituting the value of $h(\xi_i, t)$ from (5.2) in (3.1), we get

$$u(\gamma, t) = g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma + \rho - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma + \rho - \alpha)\Gamma(\gamma + \rho - \beta)} e^{-st} t^{\gamma+\rho-1} \tag{5.3}$$

$$\frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\gamma + \mu)\Gamma(1 + \sigma + \lambda)\, \Gamma\left(\sigma + \lambda - \gamma + \frac{3}{2}\right)}{\mu\,!\,\Gamma(2\gamma)\,\Gamma\left(\sigma + \lambda - \gamma - \mu + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\sigma + \lambda + \mu + \gamma + \frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{k}{K} \sum_i {}_2F_3\left({1 + \sigma + \lambda,\ \sigma + \lambda - \gamma + \frac{3}{2} \atop 1,\ \sigma + \lambda - \gamma - \mu + \frac{3}{2},\ \sigma + \lambda + \mu + \gamma + \frac{3}{2}} ; -\frac{\xi_i^2 a^2}{4}\right) \frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}$$

$${}_2F_2\left[{\beta\rho, \gamma + \rho - \alpha - \atop \gamma + \rho - \alpha, \gamma + \rho - \beta} ; (z - k\xi_i^2)t\right]$$

valid for $\mathrm{Re}\,(\lambda + \sigma) > -1$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, and $\mathrm{Re}(\gamma + \rho - \alpha - \beta) > 0$.

Obviously $u(r, 0) = 0$.

6. Heat Source of Polynomial Nature. In (5.1) and (5.2) replacing α by $-n$, β by $1 + \alpha + \beta + n$, γ by $1 + \alpha$, we obtain

$$g(\zeta) = g_0\, e^{-\zeta s} \zeta^{\alpha} (t - \zeta)^{\rho-1} \frac{n\,!}{(1 + \alpha)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{2\zeta}{t}\right) \tag{6.1}$$

where $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ is the Jacobi polynomial and

$$h(\xi_i, t) = g_0 \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\rho+n)\Gamma(\rho-\beta-n)} e^{-zt} t^{\alpha+\rho} \tag{6.2}$$

$${}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho, \rho-\beta \\ 1+\alpha+\rho+n, \rho-\beta-n\end{matrix}; (z-k\xi_i^2)t\right]$$

where $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho-\beta) > 0$.

Substituting (6.2) in (3.1), we get

$$u(r, t) = g_0 \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\rho+n)\Gamma(\rho-\beta-n)} e^{-zt} t^{\alpha+\rho}$$

$$\frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu!\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{k}{K}\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda, \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1, \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}, \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix}; -\frac{\xi_i^2 a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2} \tag{6.3}$$

$${}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho, \rho-\beta \\ 1+\alpha+\rho+n, \quad \rho-\beta-n\end{matrix}; (z-k\xi_i^2)t\right]$$

where $\mathrm{Re}(\lambda+\sigma) > -1$, $\mathrm{Re}(\gamma) > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho-\beta) > 0$.

Obviously $u(r, o) = 0$.

On account of the expansion-property of orthogonal polynomials [(5)], the heat source of this nature may yield several interesting cases.

7. Heat Source of Expotential Character. Setting $\alpha = \beta = 0$ in (5.1) and (5.2), we have

$$g(\zeta) = g_0 e^{-z\zeta}\zeta^{\gamma-1}(t-\zeta)^{\rho-1} \tag{7.1}$$

and

$$h(\xi_i, t) = g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} e^{-zt} t^{\gamma+\rho-1} {}_1F_1\left[\begin{matrix}\rho \\ \gamma+\rho\end{matrix}; (z-k\xi_i^2)t\right] \tag{7.2}$$

where $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$.

Particular cases of (7.1) **and** (7.2):

(i) Substituing $\rho = 1$, we get the heat source obtained by Dr. Bhonsle [(1)] on applying convolution theorem of Laplace transformation.

(ii) Setting $\rho = \gamma = 1$ and $z = 0$, using the known relation ${}_1F_1\left(\begin{matrix}1 \\ 2\end{matrix}; z\right) = \frac{e^z - 1}{z}$, we obtain the heat source acting for a finite interval of time given by Bhonsle [(1)]. Taking the value (7.2) in (3.1), we obtain

$$u(r, t) = g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} e^{-zt} t^{\gamma+\rho-1} \tag{7.3}$$

$$\frac{a^{2\lambda+2\sigma+2\gamma-1}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\gamma+\mu)\Gamma(1+\sigma+\lambda)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2}\right)}{\mu!\,\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\sigma+\lambda+\gamma+\mu+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{k}{K}\sum_i {}_2F_3\left(\begin{matrix}1+\sigma+\lambda, \quad \sigma+\lambda-\gamma+\frac{3}{2} \\ 1, \ \sigma+\lambda-\gamma-\mu+\frac{3}{2}, \quad \sigma+\lambda+\mu+\gamma+\frac{3}{2}\end{matrix}; -\frac{\xi_i^2 a^2}{4}\right)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}$$

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}\rho \\ \gamma+\rho\end{matrix}; (z-k\xi_i^2)t\right]$$

valid for $\mathrm{Re}(\lambda+\sigma) > -1$, $\mathrm{Re}(\gamma) > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$ and $\mathrm{Re}(\rho) > 0$. Obviously $u(r, 0) = 0$.

8. Behaviour of $f(r)$. From (2.2), we have

$$f(r) = r^{2\lambda+2\sigma}(a^2-r^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}\, C_\mu^\gamma\left(2\frac{r^2}{a^2}-1\right)$$

$$= r^{2\lambda+2\sigma}(a^2-r^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}\frac{(2\gamma)_\mu}{\mu!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu, \mu+2\gamma \\ \gamma+\frac{1}{2}\end{matrix}; 1-\frac{r^2}{a^2}\right]. \tag{8.1}$$

(i) With $\mu = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, then

$$f(r) = r^{2\lambda+2\sigma}\left(2\frac{r^2}{a^2}-1\right), \tag{8.2}$$

we have

$$f(r) = 0, \text{ when } r = 0 \text{ or } r = \frac{1}{\sqrt{2}}a.$$

(ii) Let $\mu = 0$, then

$$f(r) = r^{2\lambda+2\sigma}(a^2-r^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}, \tag{8.3}$$

we obtain

$$f(r) = 0, \text{ when } r = 0, \text{ or } r = a.$$

If $g(t) > 0$, then we shall interpret that inner circular cylinder will enclose sources, while the volume between two concentric cylinders will contain sinks. If $g(t) < 0$, then sources and sinks will interchange their roles.

(Received Jannuary 20, 1970)

REFERENCES

1. Bhousle, B. R., *Jacobi polynomials and heat production in a cylinder*, „Mathematica Jap.", **11** (1), (1966), 83—90.
2. Erdélyi, A., *Tables of Integral Transforms*, **II**, McGraw-Hill, New York, 1954.
3. Lebedev, N. N., *Special Functions and their Applications* Edited *by N. J. Englewood Cliffs*, Prentice Hall, International, INC., London, 1965.
4. Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1951.
5. Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Revised edition, American Mathematical Society, 1959.
6. Shah Manilal, *Some Results of Generalized Meijer Functions Associated with Gegenbauer — (Ultraspherical) Polynomials*, Indian Journal of Pure and Appliad Mathematics, vol. 2, no. 3, 1971

POLINOAME GEGENBAUER (ULTRASFERICE) ŞI PRODUCEREA CĂLDURII ÎNTR-UN CILINDRU

(Rezumat)

În această lucrare s-au calculat anumite integrale conţinînd polinoame Gegenbauer (ultrasferice) şi *G*-funcţii ale lui Meijer; de asemenea s-au folosit polinoame Gegenbauer pentru a rezolva ecuaţia diferenţială fundamentală a producerii căldurii într-un cilindru. Totodată s-a obţinut o formulă de dezvoltare pentru *G*-funcţia lui Meijer. Multe rezultate cunoscute se obţin particularizînd parametri, etc.

ПОЛИНОМЫ ГЕГЕНБАУЭРА (УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ) И ПРОИЗВОДСТВО ТЕПЛОТЫ В ЦИЛИНДРЕ

(Резюме)

Автор статьи вычисляет некоторые интегралы, содержащие полиномы Гегенбауэра (ультрасферические) и G-функции Мейера и использует полиномы Гегенбауэра для решения основного дифференциального уравнения производства теплоты в цилиндре. Одновременно получается формула разложения в ряд G-функции Мейера. Многие известные результаты получаются путём партикуляризации параметров и т. д.

CRONICĂ

UNE GÉNÉRALISATION DE L'INTÉGRALE

Résumé de la thèse de doctorat soutenue par MARCEL RĂDULESCU *à l'Université „Babeş-Bolyai" de Cluj le* 17 *janvier* 1970.

Dans ce travail l'auteur pose le problème de définir une intégrale constructive qui généralise l'intégrale Denjoy et telle que pour sa définition on n'utilise pas de nombres transfinis de deuxième espèce. L'auteur part de l'observation que si $f\colon [a, b] \to R$ est une fonction intégrable Denjoy sur $[a, b]$, $F\colon [a, b] \to R$ sa primitive correspondante et $\Phi\colon [a, b] \to R$ est l'intégrale de F, alors il existe l'ensemble $B \subset [a, b]$, $m(B) = b - a$ tel que Φ possède sur B la dérivée de deuxième ordre de De la Vallée Poussin qui coïncide avec f. Soient $x_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_i < x_{i+1}$, alors, on déduit de la définition de la dérivée de deuxième ordre de De la Vallée Poussin que

$$F(x_n) - F(x_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) + \sum_i 0(x_{i+1} - x_i).$$

Soit une fonction $f\colon B \to R$, où $B \subset [a, b]$ est une base de $[a, b]$; on considère des sommes de la forme $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$, $x_1 = a$, $x_1 = b$, $x_n \in B$. On définit à l'aide de ces sommes l'intégrale M_* ou, plus généralement, l'intégrale M, si ces intégrales existent. Pour la définition et les propriétés de l'intégrale M_* on peut voir les notes: Une définition de l'intégrale, Studia Univ. Babeş-Bolyai ser. Math.-Physica 1, 1969, 23–34 et L'intégrale M_*, Studia Univ. Babeş-Bolyai ser. Math.-Mech. 1, 1970, 23–34.

On définit la primitive M_* d'une fonction intégrable M_* sur B et on donne les propriétés correspondantes d'absolue continuité et de dérivabilité. Voir la note: La primitive M_* d'une fonction intégrable M_*. Studia Univ. Babeş-Bolyai ser. Math.-Mech. 1, 1971, 49–59.

Un chapitre est consacré à une définition axiomatique de l'intégrale. On donne six axiomes. Deux axiomes se réfèrent à la propriétée d'additivité de l'intégrale par rapport à la base et par rapport à la fonction. Un axiome donne la propriété d'homogénéité de l'intégrale. L'axiome 4 réprésente une norme pour l'intégrale. Les derniers axiomes sont spécifiques pour la définition axiomatique donnée.

On démontre que si une fonctionnelle vérifie les quatre premiers axiomes, alors la primitive correspondante d'une fonction intégrable dans le sens correspondant de la fonctionelle est uniquement déterminée. Si cette primitive est continue pour chaque fonction intégrable dans ce sens, alors l'axiome 5 est vérifié. De la vérification de l'axiome 6 on déduit une propriété d'absolue continuité locale pour la primitive correspondante. Les intégrales M_* et M et l'intégrale Denjoy vérifient ce système d'axiomes.

On donne, dans un chapitre, les propriétés de l'intégrale M et de la primitive M. Dans la dernière partie du travail on démontre que si une fonction $f\colon [a, b] \to R$ est intégrable dans le sens spécial de l'intégrale Denjoy, alors il existe une base $B \subset [a, b]$ telle que f est intégrable M_* sur B et $(M_*) \int_B f(x)dx = (\mathfrak{D}_*) \int_a^b f(x)dx$ On démontre aussi le théorème analogue qui se réfère aux fonctions intégrables Denjoy dans le sens général. Dans ce cas si $f: [a, b] \to R$ est intégrable Denjoy, il existe une base $B \subset [a, b]$ telle que f est intégrable M_* sur B et $(M_*) \int\limits_B f(x)dx = (\mathfrak{D}) \int\limits_a^b f(x)dx$.

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Il existe une base $B \subset [-1, 1]$ telle que f est intégrable M_* sur B. On en déduit que l'intégrale M_* est plus générale que l'intégrale Denjoy.

JURY DE DOCTORAT
Président: Prof. Dr. Doc. GH. CHIŞ
Membres: Acad. Prof. Dr. Doc. G. CĂLUGĂREANU directeur scientifique
Prof. Dr. Doc. D. V. IONESCU professeur émérite de la R.S. de Roumanie (Cluj)
Prof. Dr. Doc. E. DOBRESCU (Craiova)
Prof. Dr. P. MOCANU (Cluj)

SUME REGULARE DE GRUPURI CU MULTIOPERATORI

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 6 iunie 1970, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj,
de EMERIC VIRAG, pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.

În lucrare se dă o generalizare a produsului regular de grupuri. Generalizarea se face în două direcţii:

— în primul rînd rezultatele se referă la grupuri cu multioperatori;

— în al doilea rînd, o parte din teoria expusă în lucrare dă în cazul grupurilor obişnuite o generalizare a produsului regular.

Lucrarea conţine patru capitole.

În capitolul I se urmăreşte să se dezvolte acele noţiuni şi proprietăţi ale grupurilor cu multioperatori care vor fi folosite mai tîrziu.

În capitolul II se studiază problema descompunerilor grupurilor cu multioperatori. Se dau două forme de reprezentare a elementelor unui grup cu multioperatori generat de o familie de subgrupuri cu multioperatori.

Capitolul III este consacrat studierii sistemelor regulare de subgrupuri ale unui grup cu multioperatori. Ca un caz particular se obţine suma regulară. Se arată posibilitatea construirii sumelor regulare de anumite grupuri cu multioperatori date.

În ultimul capitol se urmăreşte să se dea o teorie generală în clasa grupurilor cu multioperatori a sumelor regulare şi a sumelor regulare complete obţinute printr-o operaţie regulară asociativă şi comutativă. Teoria expusă se bazează pe noţiunea de limită directă, respectiv limită inversă a unui sistem direct respectiv invers de grupuri cu multioperatori.

COMISIA DE DOCTORAT
Preşedinte: Prof. Dr. P. MOCANU, decanul Facultăţii de Matematică-Mecanică
Conducător ştiinţific: Prof. Dr. Doc. GHEORGHE PIC (Cluj)
Membri: Prof. Dr. Doc. GHEORGHE GALBURĂ (Bucureşti)
Conf. Dr. ION D. ION (Bucureşti)
Conf. Dr. IULIUS GY. MAURER (Cluj)

FORMULE DE CUADRATURĂ ŞI CUBATURĂ OPTIMALE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 1 iunie 1970, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj,
de GHEORGHE COMAN, pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.

În lucrare sînt aduse unele contribuţii la studiul unor probleme extremale din teoria formulelor de cuadratură şi cubatură şi anume: dacă se notează prin H clasa funcţiilor f definite pe intervalul $[a, b]$ şi integrabile în sensul lui Lebesgue pe acest interval şi dacă se consideră o formulă de cuadratură de forma $\int_a^b = f(x)\mathrm{d}x \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k) + R_m(f)$, unde $f \in H$, atunci se pune problema ca dintre toate formulele de tipul considerat să se stabilească aceea pentru care $\sup_{f \in H} |R_m(f)|$ ia valoarea minimă. Probleme analoage sînt studiate şi pentru formulele de cubatură.

Lucrarea conţine o introducere şi trei capitole. În cap. I sînt studiate formulele optimale de cuadratură de diferite tipuri; în § 1. se consideră formule de tip Sard, în § 2. se regăsesc cu ajutoru metodei folosite unele rezultate ale lui S. M. Nikolski, G. Ia. Doronin şi T. A. Saidaeva, iar în § 3. se construiesc formule de cuadratură de tip închis. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în „Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Mech.", fasc. 2, 1970. pp. 39–54. În cap. II sînt studiate formulele practice de cuadratură. Rezultatele acestui capitol sînt publicate în „Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Mech.", fasc. 1, 1971, pp. 73–79. Cap. III este consacrat studiului formulelor optimale de cubatură. O parte din rezultatele acestui capitol au fost publicate în „Studii şi Cercetări Matematice" 22, 4, 1970, pp. 551–561, restul aflîndu-se sub tipar la „Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.".

COMISIA DE DOCTORAT

Preşedinte: Prof. Dr. P. MOCANU, decanul Facultăţii de Matematică-Mecanică
Conducător ştiinţific: Prof. Dr. Doc. D. V. IONESCU (Cluj)
Membri: Prof. Dr. Doc. A. HAIMOVICI (Iaşi)
Prof. Dr. D. D. STANCU (Cluj)
Conf. Dr. E. SCHECHTER (Cluj).

Şedinţe de comunicări

La şedinţele de comunicări organizate în anul 1970 la Facultatea de Matematică-Mecanică s-au prezentat următoarele referate:

9 ianuarie 1970
Acad. Prof. Gh. Călugăreanu, Impresii dintr-o călătorie la Bologna.
Prof. dr. doc. Gh. Pic, Despre o teoremă a lui Iwazawa.
Lect. dr. M. Rădulescu. Proprietăţi ale integralei N în spaţii liniare.

6 februarie 1970
Lect. dr. Rădulescu Marcel, Cvasi-măsuri algebrice.
— Lect. dr. Virag Emeric, Sisteme regulare de Ω — subgrupuri.
— Asist. dr. Coman Gheorghe, Formule optimale de cuadratură.

27 martie 1970
— Prof. dr. Mocanu Petru, Asupra produsului omomorf de măsuri Haar.
— Asist. Moldovan Grigor, Convoluţii discrete şi operatori liniari pozitivi.

6 noiembrie 1970
— Lector dr. Rus A. Ioan, Asupra unor probleme de teoria punctului fix.
— Lector dr. Coman Gheorghe, Monospline şi formule optimale de quadratură.

4 Decembrie 1970
— Lector dr. Rădulescu Marcel, Variabile aleatoare de tip mixt.
— Asist. Micula Gheorghe, Funcţii spline de aproximare a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale

Participări la manifestări ştiinţifice internaţionale

1. *17–24 martie*, Simpozionul internaţional „Atmosfera înaltă şi Ionosfera", organizat în cadrul colaborării *Interkosmos*, sub auspiciile C.N.C.S. şi Universităţii din Cluj, de către Observatorul Astronomic Cluj. Au participat 20 specialişti din 6 ţări socialiste plus 25 invitaţi din ţară.
2. *19–25 mai*. Conferinţa internaţională de teoria constructivă a funcţiilor, Varna (Bulgaria). Prof. dr. D. D. Stancu, On the approximation of functions of two variables by means of a class of linear operators.
3. *iunie*. Lucrările Colocviului de tratarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale, Oberwolfach (RFG). Au participat: Acad. prof. T. Popoviciu şi Prof. dr. E. Popoviciu.
4. *iunie*. Acad. prof. T. Popoviciu a vizitat Universitatea din Stuttgart (RFG) unde a prezentat lucrarea „Über die Konvergenz der Folgen Positiver Operatoren".
5. *7–14 iunie*, Conferinţa internaţională pentru cercetări ştiinţifice cu ajutorul sateliţilor, Bucureşti. G. Chiş, A. Pal, L. Burs: „Consideraţii asupra metodei lu King-Hele de determinare a densităţii atmosferei la înălţimea perigeului orbitei satelitului artificial al Pămîntului". A. Pal, Orbita intermediară nekepleriană a satelitului obţinută prin metoda medierii ecuaţiilor diferenţiale". T. Oproiu, „Influenţa rezistenţei atmosferei înalte asupra perioadei draconice a sateliţilor artificiali ai Pămîntului".

6. *18—21 august*. Cursurile internaţionale postunivesitatare de la Gent (Belgia). A participat Conf. dr. I. M a r u ş c i a c.
7. *24—30 august*, Conferinţa internaţională de structuri algebrice, Posdam (RDG). G h. P i c, „Despre o teoremă a lui R. Boer."
8. *17—28 august*, A XIV-a Adunare Generală a Uniunii Astronomice Internaţionale U.A.I de la Brighton (Anglia). A participat Lect. dr. V. U r e c h e, şi a fost ales ca membru al U.A.I.
9. *1—10 septembrie*, Congresul Internaţional al Matematicienilor de la Nisa (Franţa). Au participat: Prof. emerit D. V. I o n e s c u cu conferinţa „Extension de la formule de quadrature de Gauss à une classe de formule de cubature".
10. *11 septembrie*, Prof. emerit D. V. I o n e s c u a vizitat Facultatea de Ştiinţe „Valrose" de la Nisa unde a ţinut conferinţele: „Difference divisée d'une fonction et sa représentation par une integral define: aplication pur determinée le reste de formules de quadrature de Gauss et de Turan şi „Extension de la difference divisée d'une fonction à des fonction de troix variables et sa répresentation par une integrale triple".
11. *14 septembrie*, Prof. emerit D. V. I o n e s c u a vizitat Facultatea de Ştiinţe din Neuchâtel (Elveţia) unde a ţinut conferinţa: „Applications de méthode de Green en analyse numerique".
12. *5—25 octombrie*, Conf. dr. A. P a l a efectuat un schimb de experienţă in R.S. Cehoslovacă.
13. *24 octombrie — 5 noiembrie*: Conf. dr. I. M u n t e a n a fost în R.S. Cehoslovacă unde a vizitat instituţiile de invăţămînt superior din Praga şi Brno. La Facultatea de Ştiinţe din Brno a ţinut conferinţa: „Probleme de teoria oscilaţiilor neliniare".
14. *15—21 noiembrie*, Colocviul „Funktionalanalysis und numerische Mathematik" W. W. B r e c k n e r, „Zur Charakterisierung von Minimallösungen".
15. *23 decembrie 1970—6 ianuarie 1971*, Conf. dr. I. M a r u ş c i a c a fost în U.R.S.S., unde a vizitat instituţiile de învăţămînt şi de cercetare din Moscova şi Leningrad. La Inst. de Matematică „Steklov" al Acad. U.R.S.S. a ţinut conferinţa „Infrapolinoame generalizate".

Participări la manifestări ştiinţifice din ţară

1. *23—24 mai* A VI-A SESIUNE DE COMUNICĂRI ŞTIINŢIFICE A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN ORADEA

1. Conf. dr. M a r i a n Ţ a r i n ă, „Corespondenţe parţial proiective".
2. Lector dr. I o a n A. R u s, „Existenţa şi unicitatea soluţiei unor probleme de limită corespunzătoare unei ecuaţii funcţional diferenţiale."
3. Lector P a v e l E n g h i ş, „Asupra unor spaţii A cu torsiune".

2. *29—30 mai* SESIUNEA DE COMUNICĂRI A UNIVERSITĂŢII „BABEŞ-BOLYAI" CLUJ

1. Acad. prof. dr. doc. G h. C ă l u g ă r e a n u, „Invarianţi de contracţie în grupuri cu relaţii."
2. Asist. Gr. C ă l u g ă r e a n u, asist. H e r w a r t W i e s l e r, „Citeva observaţii asupra V-triplelor".
3. Lect. dr. G h e o r g h e C o m a n, „Aplicaţiile funcţiilor „Spline" la construire formulelor optimale de cuadratură".
4. Asist. M i l i t o n F r e n ţ i u, „Asupra aspectului asimptotic al aproximării funcţiilor printr-o clasă de operatori iniari pozitivi."
5. Lector dr. V i c t o r i a G r o z e, „Asupra structurilor de incidenţă de translaţie."
6. Lect. dr. V i c t o r i a G r o z e, asist. A n g e l a V a s i u, „Extinderea condiţiilor lui Winternitz pentru spaţii n-dimensionale".
7. Conf. dr. I o a n M a r u s c i a c, „Polinoame de preinterpolare de abatere minimă de la zero în domeniul complex."
8. Prof. dr. P e t r u M o c a n u, „Formula lui Darboux relativă la funcţiile univalente".
9. Asist. G r i g o r M o l d o v a n, „Operatori convolutivi pozitivi in teoria aproximării".
10. Lect. B é l a O r b a n, „Despre prelungirea coliniaţiilor definite pe mulţimi."
11. Prof. dr. doc. şt. G h. P i c, lec. dr. I o a n P u r d e a „Inele nare".
12. Lector dr. M a r c e l R ă d u l e s c u, „Proprietăţi ale primitivei K in spaţii liniare."
13. Prof. dr. D i m i t r i e D. S t a n c u, „Asupra unei clase de repartiţii multidimensionale discrete de probabilităţi."
14. Asist. M a r i a F. S c h e c h t e r, „Observaţii asupra structurilor relaţionale".
15. Conf. dr. M a r i a n Ţ a r i n ă „O clasă de suprafeţe algebrice reale."
16. Lector dr. E m e r i c V i r á g, „Operaţii regulare în n-grupuri".
17. Lector dr. M a r t i n B a l a z s, asist. Gavrilă Goldner, „Asupra rezolvării aproximative a ecuaţiilor funcţionale în spaţii Banach."
18. Lect. dr. E l e n a F r ă ţ i l ă, „Metoda Monte Carlo în evaluarea funcţiei densitate de probabilitate."
19. Asist. N i c o l a e B o t h, „Predicate generalizate."
20. Asist. F e l i c i a S t a n c u, „Asupra aproximării funcţiilor derivabile cu ajutorul operatorilor liniari pozitivi."
21. Asist. E l e n a R u s, „Asupra polinoamelor prime între ele".
22. Asist. W o l f g a n g B r e c k n e r, „Teoreme de dualitate pentru probleme de optimizare în spaţii local convexe."

23. Psof. dr. doc. D u m i t r u V. I o n e s c u, Restul unei formule de cuadratură de tip Ga us."
24. Conf. dr. C a r o l K a l i k, „Aplicaţii ale spaţiilor H_2 (K)."
25. Lector dr. I o s i f K o l u m b á n, „Asupra unei Teoreme de tip Korovkin."
26. Asist. L u c i a n a L u p a ş, „Asupra conservării scalarităţii printr-o clasă de operatori liniari şi pozitivi."
27. Asist. G h e o r g h e M i c u l a, „Integrarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul funcţiilor spline."
28. Conf. dr. I o a n M u n t e a n, „Asupra convergenţei soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare."
29. Conf. dr. A n d r e i N e y „O formă generalizată a criteriului lui Leibniz în spaţii liniare σ-reticulate."
30. Conf. dr. A n d r e i N e y, „Despre convergenţa seriilor de mulţimi în P(E)."
31. Lector dr. P a r a s c h i v a P a v e l, „Extinderea unei formule de derivare numerică de tip V. N. Fadeeva."
32. Prof. dr. E l e n a P o p o v i c i u, „Teoreme de separaţie pentru mulţimi interpolatoare."
33. Acad. prof. dr. doc. şt. T i b e r i u P o p o v i c i u, „Restul în anumite procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale".
34. Lect. dr. I o a n A. R u s, „Teoria punctului fix pentru aplicaţiile definite pe un produs cartezian de spaţii".
35. Conf. dr. E r w i n S c h e c h t e r, „Ordinul de convergenţă în integrarea numerică a ecuaţiilor de tip parabolic".
36. Prof. dr. doc. şt. G h e o r g h e C h i ş, „Pierderea de masă în sistemele binare."
37. Cercet. D o r i n C h i ş, „Determinarea noilor elemente fotometrice ale stelei MY Draconis."
38. Cercet. G h e o r g h e H o r e d t, „Asupra preciziei de determinare a punctelor subsatelit din observaţii simultane şi nesimultane."
39. Cercet. T i b e r i u O p r o i u, Influenţa rotaţiei atmosferei asupra perioadei draconitice a unui satelit artificial al Pămîntului."
40. Conf. dr. A r p a d P a l, „Orbita intermediară a satelitului artificial al Pămîntului construită cu ajutorul medierii ecuaţiilor mişcării."
41. Cercet. V a s i l e P o p, „Curba de lumină şi elementele fotometrice ale variabilei scurt periodice Rt Gomae."
42. Lect. I o a n S t a n, „Efectul barodifuziei în strat limită incompresibil."
43. Cercet. princ. dr. I o a n T o d o r a n, „Determinarea lungimilor de undă ale sistemului fotometric UBV."
44. Lector dr. V a s i l e U r e c h e, „Asupra modelului sferă-elipsoid pentru calculul orbitelor fotometrice".

3. *20—25 august* SESIUNEA JUBILIARĂ „A. MYLLER" DE LA UNIV. „AL. I. CUZA", IAŞI

1. Lector dr. I. P u r d e a, „O generalizare a unei teoreme a lui Poincaré."
2. Lect. dr. E. V i r a g, „Sume regulate de grupuri cu multioperatori."
3. Lect. dr. M. B a l a z s, asist. G. G o l d n e r, „On certain iterative methods for solving the functional equations".
4. Prof. emerit D. V. I o n e s c u, „Difference divisée d'ordre *n* d'une fonction de *p* variable et sa représentation par une intégrale multiple."
5. Asist. Gh. M i c u l a, Integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu ajutorul funcţiilor „spline".
6. Prof. dr. E l e n a P o p o v i c i u, „Observaţii asupra problemei celei mai bune aproximaţii.".
7. Acad. prof. T i b e r i u P o p o v i c i u, „Despre convergenţa şirurilor de operatori pozitivi."
8. Lect. dr. A. I. R u s, „On the fixed-point theory for mappings defined on a Cartesian product of space."
9. Prof. dr. D i m i t r i e S t a n c u, „Metode probabilistice în teoria aproximării funcţiilor."
10. Asist. F e l i c i a S t a n c u, „Asupra aproximării funcţiilor de două variabile cu ajutorul operatorilor liniari pozitivi."
11. Conf. dr. M a r i a n Ţ a r i n ă, „Corespondenţe parţial proiective şi conexiuni asociate."
12. Lect. dr. E. F r ă ţ i l ă, „Asupra eficienţei unor procedee Monte-Carlo pentru calculul integralelor".
13. Lect. dr. I o a n P o p, „Asupra stratului limită nestaţionar din jurul unui corp de rotaţie."
14. Lector I o a n S t a n, „Strat limită de difuzie."

4. *22—23 septembrie* SEMINARUL DE „TEORIA ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE" CLUJ

Prof. emerit D. V. I o n e s c u, „O legătură între analiza numerică şi ecuaţiile funcţionale: extinderea ecuaţiei funcţionale a lui D. Pompeiu cu ajutorul formulelor de cuadratură ale lui Gauss şi Turan".

5. *28—29 octombrie* SEMINARUL DE „TEORIA ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE" IAŞI

Conf. dr. A. N e y, „Ecuaţia funcţională a sumabilităţii simple şi a integrabilităţii improprii"

6. *14—15 decembrie* SEMINARUL DE „TEORIA ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE" TIMIŞOARA

Conf. dr. I. M u n t e a n, „Asupra netrivialităţii dualului unui grup vectorial topologic."

Conf. dr. I. Maruşciac, „Operatori liniari care conservă proprietatea (T) cu aplicaţii".

Conf. dr. A. Ney, „Ecuaţii ale funcţiilor simple sumabile (respectiv nesumabile) şi ale celor impropriu integrabile (respectiv neintegrabile)".

Lect. dr. I. Kolumbán, „Ecuaţii funcţionale în teoria optimizării".

7. *11—13 decembrie* CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE ASTRONOMIE, TIMIŞOARA

1. Prof. dr. doc. Gh. Chiş, „Rezultate in cercetarea atmosferei înalte."

2. Prof. dr. doc. Gh. Chiş, „Invăţămîntul astronomiei în licee şi universităţi."

3. Conf. dr. A. Pal, „Probleme noi ale mecanicii cereşti."

4. Cercet. princ. dr. I. Todoran, „Consideraţii asupra lungimilor de undă specifice ale unui sistem fotometric"

5. Lect. dr. V. Ureche, „Asupra reflexiei luminii în stelele binare strînse."

6. Lect. dr. V. Ureche, „Despre practica astronomică în universităţi."

7. Cercet. princ. dr. I. Todoran, V. Pop, „Elemente preliminarii ale cefeidei BE Eridani".

8. Cercet. T. Oproiu, Asupra unor evaluări ale diferenţei dintre perioada draconitică şi cea siderală a sateliţilor artificiali cauzată de rezistenţa atmosferei".

9. Cercet. D. Chiş, „Asupra determinării elementelor fotometrice la patru variabile: RU, SV, WW şi XX Bootis."

Vizite

1. Prof. E. Dobrescu, Universitatea din Craiova.
2. Prof. R. A. Rankin, University of Glasgow (Anglia).
3. Prof. V. P. Marcenko, Universitatea din Odessa (U.R.S.S.).
4. Prof. E. Saibel, University „Carnegie-Mellon", Pittsburg (S.U.A.).
5. Prof. Gh. Galbură, Universitatea din Bucureşti.
6. Prof. Ion D. Ion, Universitatea din Bucureşti.
7. Prof. W. Maier, Universitatea din Jena (R.D.G.).
8. Prof. R. Wiegandt, Inst. Mat. Acad. Budapesta (R.P.U.).
9. Prof. V. Topencharov, Universitatea din Sofia (R.P.B.)
10. Prof. A. Kufner, Inst. Mat. Acad. Praga (R.S.C.).
11. Prof. W. F. Ames, Universitatea din Jowa (S.U.A.).
12. Prof. M. O. Reade, Universitatea „Ann Arbor," Michigan (S.U.A.).
13. Prof. L. F. Günther, Inst. de Arhitectură şi Construcţii, Weimar (R.D.G.).
14. Prof. D. Bernard, Universitatea din Strasbourg (Franţa).
15. Prof. Weber, Universitatea din Rostock (R.D.G.).
16. Prof. L. Koslov, Inst. Mat. Acad. Kiev (U.R.S.S.).
17. Prof. A. Mihalev, Universitatea din Moscova (U.R.S.S.).
18. Prof D. B. Scott, Universitatea din Susex (Anglia).

Intreprinderea Poligrafică Cluj cd. 292 1971

În cel de al XVI-lea an de apariție (1971) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie-mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
științe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XVI году издания (1971) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:
математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XVI-me année de publication (1971) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai comportent* les séries suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

43875

Preţ 6 lei