

491307

STUDIA  
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1 9 6 9

C L U J

**REDACTOR ȘEF:** Prof. ȘT. PASCU, membru corespondent al Academiei

**REDACTORI ȘEFI ADJUNCTI:** Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. GH. MARCU,  
conf. A. NEGUCIOIU

**COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ-FIZICĂ:** Acad. prof.  
G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. Z. GÁBOS, prof. V. MERCEA,  
membru corespondent al Academiei, conf. P. MOCANU, conf. I. POP (secretar de redacție)

# STUDIA

## UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

Redacția: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

I. BENKŐ, Asupra punctelor extremale ale sferelor-unitate în spațiile $C^*(X)$ și $L^1(\mu)$ ● Об экстремальных точках единичных сфер в пространствах $C^*(X)$ и $L^1(\mu)$ ● Sur les points extrémaux des sphères unité dans les espaces $C^*(X)$ et $L^1(\mu)$ . . . . .	3
F. RADÓ, V. GROZE, Determinarea transformărilor optime ale unor nomograme cu puncte aliniate ● Определение оптимальных преобразований некоторых номограмм с выравненными точками ● Détermination des transformations optima de certains nomogrammes à points alignés . . . . .	9
P. PURI, S. P. BHATTACHARYYA, A Note on Solution of Certain Partial Differential Equation by Integral Transform (Notă asupra rezolvării anumitor ecuații cu derivate parțiale cu ajutorul transformărilor integrale) ● О решении некоторых уравнений с частными производными с помощью интегральных преобразований . . . . .	15
E. KOLOZSI, Despre ecuații diferențiale de tip variațional ● О дифференциальных уравнениях вариационного типа ● Sur les équations différentielles de type variationnel . . . . .	19
P. SZILÁGYI, Problèmes non-noethériens de Dirichlet (Probleme Dirichlet nenoetheriene) ● Ненётеровы задачи Дирихле . . . . .	25
D. D. STANCU, Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein ● Об одном обобщении многочленов Бернштейна ● On a Generalization of Bernstein Polynomials . . . . .	31
M. BALÁZS, On Solving Operational Equations by an Iterative Method (Asupra rezolvării unor ecuații operaționale prin metoda iterației) ● О решении некоторых операциональных уравнений методом итерации . . . . .	47
GH. COMAN, O generalizare a formulei de cuadratură a trapezelor și a formulei lui Simpson ● Одно обобщение квадратурной формулы трапеций и формулы Симпсона ● Une généralisation de la formule de quadrature des trapèzes et de la formule de Simpson . . . . .	53
GR. MOLDOVAN, Asupra unor operatori de tip Bernstein ● Об операторах типа Бернштейна ● Sur certains opérateurs de type Bernstein . . . . .	59
I. TORSAN, Asupra unor inegalități de tip Bernstein ● О некоторых неравенствах типа Бернштейна ● Sur les inégalités de type Bernstein . . . . .	65
T. PETRILĂ, Asupra mișcării generale a unui profil în prezența a doi pereți de formă oarecare. Ecuațiile integrale ale mișcării ● Об общем движении одного профиля в присутствии двух произвольных стен. Интегральные уравнения движения ● Sur le mouvement général d'un profil en présence de deux parois arbitraires. Equations intégrales du mouvement . . . . .	71

Z. GÁBOS, S. HOLAN, H. RUCK, Streuung von Spin-1 Teilchen in einem Zentralfeld (Împrăscierea particulelor cu spinul unu într-un câmp central) ● Рассеяние частиц с единичным спином в центральном поле . . . . .	75
I. STĂNESCU, S. GOCAN, I. ARDELEAN, ȘT. MAN, Spectrele de absorbție în infraroșu. Analiza termogravimetrică și conductibilitatea electrică a sistemului $V_2O_5-As_2O_3$ ● Спектры поглощения в инфракрасной области, термогравиметрический анализ и электропроводность системы $V_2O_5-As_2O_3$ ● Infra-red Absorption Spectra, Thermogravimetric Analysis and Electrical Conductivity Power of the $V_2O_5-As_2O_3$ . . . . .	81
GH. CRISTEA, A. DARABONT, E.S.R. Spectrum of $Mn^{2+}$ in $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$ (Spectrul RES al $Mn^{2+}$ în $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$ ) ● ЭПР спектр иона $Mn^{2+}$ в $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$ . . . . .	87
M. CRIȘAN, Electrical Resistivity of Binary Alloys with Transition Metals (I). Classical Theory (Rezistivitatea electrică a aliajelor binare cu metale de tranziție (I). Teoria clasică) ● Удельное электрическое сопротивление двойных сплавов переходных металлов (I). Классическая теория . . . . .	91
AL. NICULA, S. I. FĂRCAȘ, M. PALADI, The Explicit Form of the Euler Rotation for the Equivalent Operators (Forma explicită a rotațiilor Euler a operatorilor echivalenți) ● Явная форма эйлеровых вращений эквивалентных операторов . . . . .	95
D. AUSLÄNDER, E. CONSTANTIN, A. CIUPE, Modificarea permitivității dielectrice a unor acizi organici în câmp ultrasonic ● Изменение диэлектрической проницаемости некоторых органических кислот в ультразвуковом поле ● Modification de la permittivité diélectrique de certains acides organiques dans le champ des ultrasons . . . . .	103
I. POP, E. BURZO, V. I. TCHETCHERNIKOV, Proprietățile magnetice ale compusului intermetalic $Gd_2Co_{17}$ ● Магнитные свойства интерметаллического соединения $Gd_2Co_{17}$ ● Magnetic Properties of the $Gd_2Co_{17}$ Intermetallic Compound . . . . .	111
E. TĂTARU, NMR Autodyne with Backward Diode (Autodină R.M.N. cu dioda Backward) ● Автодин ЯМР с обращённым диодом . . . . .	117
E. FODOR, V. MERCEA, Dependența de concentrație a factorului de separare a unei coloane de termodifuzie ● Концентрационная зависимость разделяющего фактора в термодифузионной колонне ● Dependence of the Separation Factor of a Thermal-diffusion Column on Concentration . . . . .	119
V. ZNAMIROVŠCHI, Studiul R. M. N. al echilibrului izotopic în sistemul apă — ion de hidroniu ● Исследование изотопного равновесия в системе вода — ион гидрония с помощью ЯМР ● The N.M.R. Study of the Isotopic Equilibrium in Water-Hydronium Ion System . . . . .	123
F. PUSKÁS, I. ARDELEAN, Studiul unor stabilizatori de tensiune cu varistori din oxid de zinc ● Исследование некоторых стабилизаторов напряжения с варисторами из окиси цинка ● Investigation of Some Tension Stabilizers with Zinc Oxide Varistors . . . . .	127
S. CODREANU, Considerații asupra tensorilor de dublă și triplă corelație a vitezelor din două puncte ale unui fluid turbulent ● О тензорах двойной и тройной корреляции скоростей в двух точках турбулентной жидкости ● Considerations on Tensors of Double and Triple Speed Correlation from Two Points of a Turbulent Fluid . . . . .	131
T. I. LÁSZLÓ, Cîteva observații referitoare la modul de scriere și de interpretare a unor constante fizice universale ● Некоторые замечания относительно способа написания и интерпретации универсальных физических постоянных ● Some Observations Referring to the Way of Writing and Interpreting some Universal Physical Constants . . . . .	135

Recenzii — Рецензии — Livres parus — Books — Bücherbesprechung

G. Alexits et E. Fenyő, Les méthodes mathématiques en chimie (I. MARUȘCIAC) . . . . .	139
Andras Ádám, Truth Functions and the Problem of their Realization by Two-terminal Graphs (I. VIRÁG) . . . . .	139

Cronică — Хроника — Chronique — Chronicle — Chronik

Étude des séries dans les espaces linéaires (A. NEY) . . . . .	141
Formule de cuadratură de tip Gauss (P. PAVEL) . . . . .	142
Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour les systèmes fortement elliptiques du second ordre (I. A. RUS) . . . . .	143
Contribuții la interpretarea curbelor de lumină ale sistemelor binare strinse (V. URECHE) . . . . .	144
Principiul dualității la o clasă de probleme de optimizare (I. KOLUMBÁN) . . . . .	146
Ședințe de comunicări . . . . .	147

ASUPRA PUNCTELOR EXTREMALE ALE SFERELOR-UNITATE  
ÎN SPAȚIILE  $C^*(X)$  ȘI  $L^1(\mu)$

de  
**I. BENKŐ**

§ 1. În nota de față deducem teorema lui Arens - Kelley asupra punctelor extreme ale sferei-unitate din  $C^*(X)$  din rezultatele corespunzătoare relative la sfera-unitate a spațiului  $L^1(\mu)$ . Existența punctelor extreme în al doilea caz este legată de atomicitatea măsurii  $\mu$ , (vezi § 2 pentru terminologie și notații). Proprietatea apare în literatură, însă autorul nu a întâlnit demonstrația decât în cazul măsurii neatomice Lebesgue pe  $[0,1]$ , ([2]). Demonstrația care urmează se bazează pe observația simplă formulată în Lema 2 cu ajutorul căreia se pot construi efectiv punctele extreme ale sferei-unitate din  $L^1(\mu)$ , în cazul când  $\mu$  are atomi. Partea esențială a notei rezidă în legarea celor două rezultate.

§ 2. Fie  $(X, \Sigma, \mu)$  un spațiu cu măsură,  $X$  fiind o mulțime abstractă,  $\Sigma$  o  $\sigma$ -algebră de părți ale lui  $X$ , iar  $\mu$  o funcție reală, finită, numărabil aditivă pe  $\Sigma$ .

I. Un atom pentru măsura  $\mu$  este o mulțime  $E \in \Sigma$  cu proprietatea că  $\mu(E) \neq 0$  și oricare ar fi  $F \in \Sigma$ ,  $F \subset E$  sau  $\mu(F) = 0$  sau  $\mu(E - F) = 0$ . Măsura se numește atomică dacă are cel puțin un atom.

LEMMA 1. Dacă  $E$  este un atom pentru măsura  $\mu$ , atunci  $E$  conține un atom pentru  $\mu^+$  sau  $\mu^-$ , unde  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  este descompunerea Hahn a măsurii  $\mu$  în componente pozitive.

În demonstrație (ca și în cazul Lemei 3) ne vom servi de teorema lui Liapunov asupra convexității domeniului valorilor unei măsuri vectoriale:

(a) Fiind dat spațiul de măsură  $(X, \Sigma, \mu)$  și  $E \in \Sigma$ . Dacă  $E$  nu conține nici un atom, atunci ea se bucură de proprietatea lui Darboux, adică oricare ar fi  $\xi \in [0,1]$ , există  $F \in \Sigma$ ,  $F \subset E$  și  $\mu(F) = \xi\mu(E)$ . (cf [3]).

Demonstrația lemei: Fie  $X = X^+ \cup X^-$  descompunerea după Hahn a lui  $X$  în raport cu măsura  $\mu$ . Se știe că  $\mu^+$  respectiv  $\mu^-$  sînt restricțiile lui  $\mu$  la  $X^+$  respectiv  $X^-$ . Descompunerea aceasta induce o descompunere a fiecărui element  $E \in \Sigma$  astfel, încît  $E = E^+ \cup E^-$  ( $E^+ = E \cap X^+$ ,  $E^- = E \cap X^-$ ) și  $\mu^+(E) = \mu(E^+)$  iar  $\mu^-(E) = \mu(E^-)$ . Dacă presupunem că  $E$  nu conține nici un atom pentru  $\mu^+$  și  $\mu^-$ , atunci  $\mu^+$  pe  $E^+$  respectiv  $\mu^-$  pe  $E^-$  se bucură de proprietatea lui Darboux. Deoarece  $E$  este atom,  $\mu(E) \neq 0$ , deci  $\mu^+(E) \neq \mu^-(E)$ . Rezultă că pentru orice alegere  $\xi^+, \xi^- \in [0,1]$  există mulțimile  $F^+ \subset E^+$  respectiv  $F^- \subset E^-$  pentru ca e  $\mu^+(F^+) = \xi^+\mu^+(E^+)$  și  $\mu^-(F^-) = \xi^-\mu^-(E^-)$ . Deoarece  $E^+ \cap E^- = \emptyset$ , rezultă că  $F^+ \cup F^- = F \in \Sigma$ ,  $F \subset E$  și, alegînd convenabil scalarii  $\xi^+, \xi^-$ , putem realiza  $\mu(F) \neq 0$  și  $\mu(F) \neq \mu(E)$ . Aceasta însă contrazice faptul că  $E$  este atom pentru  $\mu$ .

*Remarcă.* Definiția atomului este exact aceeași în cazul unei măsuri complexe  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , și în acest caz, dacă  $E$  este atom pentru  $\mu$ , atunci  $E$  conține atom pentru  $\mu_1$  sau  $\mu_2$ .

II. De acum încolo  $X$  va fi un spațiu compact Hausdorff,  $\Sigma = \mathfrak{B}$   $\sigma$ -algebra mulțimilor boreliene din  $X$ , adică  $\sigma$ -algebra minimală generată de familia  $\mathfrak{F}$  a mulțimilor deschise din  $X$ , iar  $\mu$  o măsură boreliană regulată (mai pe scurt măsură), adică o funcție reală, finită, definită pe  $\mathfrak{B}$ , numărabil aditivă, regulată în sensul aproximației interioare în măsură cu mulțimi închise.

III. Un exemplu tipic de măsură regulată boreliană pozitivă și atomică este „masa punctuală”  $\delta_x$ ,  $x \in X$ . În adevăr are loc proprietatea:

(b) Dacă  $\mu$  este măsură regulată boreliană pozitivă și  $E$  este un atom al său, atunci există un punct  $x \in E$  cu  $\mu(\{x\}) = \mu(E)$ , (esențial se folosește în demonstrație compactitatea lui  $X$  și regularitatea lui  $\mu$ ). Deoarece  $\mu(X) < \infty$  și dacă  $E_1, E_2$  sînt atomi, atunci sau  $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$  sau  $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ , rezultă că  $\mu$  poate avea cel mult un număr numărabil de atomi diferiți. Fie  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  atomii lui  $\mu$  iar punctele  $x_i \in E_i$  cu proprietatea  $\mu(\{x_i\}) = \mu(E_i)$  și  $\alpha_i = \mu(E_i)$ . Considerăm măsura regulată boreliană pozitivă

$$(*) \mu_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}.$$

Evident  $\mu_2 = \mu - \mu_1$  este difuză, adică oricare ar fi  $x \in X$   $\mu_2(\{x\}) = 0$ . Pe baza lui (b) și datorită regularității lui  $\mu$ , rezultă că  $\mu_2$  nu are nici un atom. Astfel am descompus măsura pozitivă  $\mu$  într-o componentă difuză și una de formă (\*).

*Remarcă.* Uneori ([1]) (\*) este chiar definiția măsurii atomice și atunci descompunerea dedusă mai sus este imediată. De aici încolo factorul (\*) îl vom numi partea atomică a lui  $\mu$ .

Se știe că orice măsură atomică de forma (\*) este singulară în raport cu orice măsură difuză. Vom numi măsuri atomice măsurile de forma (\*).

Evident, orice măsură absolut continuă față de o măsură difuză este difuză.

IV. Într-un spațiu normat  $N$  vom nota cu  $S_N$  sfera unitate închisă, iar pentru o mulțime  $M \subset N$  mulțimea punctelor extremale o notăm cu  $M^e$ . În mai multe rînduri ne vom servi de următoarea leamnă simplă:

LEMMA 2. Fie  $(N, \|\cdot\|)$  un spațiu normat,  $N_1$  și  $N_2$  două subspații închise în așa fel încît  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ ,  $N = N_1 \oplus N_2$  și oricare ar fi  $x \in N$ ,  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in N_1$  și  $x_2 \in N_2$  avem  $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ . Atunci are loc

$$S_N^e = S_{N_1}^e \cup S_{N_2}^e.$$

*Demonstrație.* Fie  $x = x_1 + x_2 \in S_N^e$ . Dacă  $x_1 = 0$  sau  $x_2 = 0$  atunci evident  $x \in S_{N_1}^e$  sau  $x \in S_{N_2}^e$ . Dacă  $x_1 \neq 0 \neq x_2$  atunci  $x = \|x_1\| \frac{x_1}{\|x_1\|} + \|x_2\| \frac{x_2}{\|x_2\|}$ , cum  $\|x_1\| + \|x_2\| = 1$  și  $\|x_1\| \neq 0 \neq \|x_2\|$  rezultă contradicția.

Invers, fie  $x = x_1 \in S_{N_1}^e$  și  $y_i \in N_i$  arbitrari ( $i = 1, 2$ ), iar  $y = y_1 + y_2$ . Dacă (\*\*) $\|x \pm y\| \leq 1$  atunci echivalent  $\|x_1 \pm y_1\| + \|\pm y_2\| \leq 1$ . Datorită extremității lui  $x_1$  rezultă  $y_1 = 0$ , de unde  $\|x_1\| + \|y_2\| \leq 1$ . Însă un punct extremal se află pe suprafața sferei unitate, deci  $\|x_1\| = 1$ , de unde  $\|y_2\| = 0$ . Astfel  $y = y_1 + y_2$  arbitrar cu (\*\*) rezultă  $y = 0$ , ceea ce înseamnă că  $x \in S_N^e$ .

§ 3. Trecem la studiul punctelor extremale ale sferei  $S_{L^1(\mu)}$ .

LEMMA 3. Dacă  $\mu$  este o măsură regulată boreliană pozitivă și difuză atunci  $L^1(\mu) = \emptyset$ .

*Demonstrație.* Fie  $f \in S_{L^1(\mu)}$  arbitrar,  $f = f^+ - f^-$  descompunerea sa în partea pozitivă, respectiv negativă. Avem  $\|f\|_1 = \int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu$ . Presupunem că  $\lambda = \int f^+ d\mu \in (0, 1)$ . Fie  $X = X^+ \cup X^-$  descompunerea lui Hahn în raport cu măsura  $f d\mu$ . Considerăm funcțiile  $f_1 = \lambda^{-1} f$  pe  $X^+$  și 0 pe  $X^-$ , iar  $f_2 = 0$  pe  $X^+$  și  $(1 - \lambda)^{-1}$  pe  $X^-$ . Evident  $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ ;  $f = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$  și  $\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$  ceea ce înseamnă că  $f$  nu este punct extremal în  $S_{L^1(\mu)}$ .

Dacă  $\lambda = \int f^+ d\mu = 1$  atunci  $\int f^- d\mu = 0$ , de unde  $f \geq 0$   $\mu$ -aproape pretutindeni. Măsura  $f d\mu$  este tot difuză, regulată, boreliană și nenegativă. Neavînd nici un atom,  $X$  este o mulțime cu proprietatea Darboux în raport cu  $f d\mu$  (a). Există deci  $A \in \mathfrak{B}$  cu  $\int_A f d\mu = \frac{1}{2} = \int_{X-A} f d\mu$ . Considerăm  $f_1 = 2f$  pe  $A$  și 0 pe  $X - A$ , iar  $f_2 = 0$  pe  $A$  și  $2f$  pe  $X - A$ , de unde deducem că  $f = \frac{1}{2} (f_1 + f_2)$ ,  $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$  și  $\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$ , deci  $f$  nu este punct extremal.

LEMMA 4. Dacă  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ , ( $x_i \in X$ ) este o măsură atomică pozitivă (deci  $\alpha_i > 0$ ) atunci  $S_{L^1(\mu)}^e$  este format din elementele  $\pm f_i$ , unde  $f_i(x_j) = \alpha_i^{-1} \delta_{ij}$  (Simbolul lui Kronecker).

*Demonstrație.* Clasa de echivalență  $f \in L^1(\mu)$  depinde numai de valorile unui reprezentant în punctele  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , fiind supusă la unica restricție  $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \alpha_i < \infty$ . Considerăm transformarea  $T$  din  $L^1(\mu)$  în  $\mathbb{R}^{\infty}$  definită prin

$$f \rightarrow \{\alpha_i f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}.$$

Evident  $T$  este o transformare biunivocă, liniară și izometrică. Dacă  $a = \{a_i\} \in S_{\mathbb{R}^{\infty}}$ , atunci definim  $f_a(x_i) = \alpha_i^{-1} a_i$  obținînd funcția  $f_a \in L^1(\mu)$  care se transformă în  $a$  prin intermediul lui  $T$ . Prin urmare  $T : S_{L^1(\mu)} \rightarrow S_{\mathbb{R}^{\infty}}$  este surjectivă, deci  $T$  păstrează punctele extremale. Se știe că  $S_{\mathbb{R}^{\infty}}^e = \{\pm \varepsilon_i : \varepsilon_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}\}$ , de unde  $S_{L^1(\mu)}^e = \{\pm f_i : f_i \in L^1(\mu), f_i(x_j) = \alpha_i^{-1} \delta_{ij}\}$ .

Fie  $\mu$  și  $\nu$  măsuri regulate boreliene, pozitive și singulare ( $\mu \perp \nu$ ). Atunci există două mulțimi boreliene  $M_\mu$  și  $N_\nu$  în așa fel, încît  $\mu$  este concentrată pe  $M_\mu$  iar  $\nu$  pe  $M_\nu$ . Funcția  $f$  numai atunci este  $(\mu + \nu)$ -măsurabilă [integrabilă] dacă  $f|_{M_\mu}$  este  $\mu$ -măsurabilă [integrabilă] iar  $f|_{M_\nu}$  este  $\nu$ -măsurabilă [integrabilă]. În cazul integrabilității lui  $f$  avem  $\int f d(\mu + \nu) = \int f|_{M_\mu} d\mu + \int f|_{M_\nu} d\nu$ . Am arătat deci că  $L^1(\nu + \mu) = L^1(\nu) \oplus L^1(\mu)$ , unde suma directă satisface condițiile lemei 2.

Fie acum o măsură reală boreliană regulată  $\mu$ ;  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  descompunerea sa Hahn,  $\mu^+ = \mu_1^+ + \mu_2^+$  respectiv  $\mu^- = \mu_1^- + \mu_2^-$  descompunerea părții pozitive  $\mu^+$ , respectiv părții negative  $\mu^-$  în componente difuză respectiv atomică (ambele

pozitive). Termenii acestor descompuneri sînt singulari, adică  $\mu^+ \perp \mu^-$ ,  $\mu_1^+ \perp \mu_2^+$  și  $\mu_1^- \perp \mu_2^-$ . Aplicînd de două ori lema 2 obținem

$$S_{L^1(\mu)}^e = S_{L^1(\mu_1^+)}^e \cup S_{L^1(\mu_2^+)}^e \cup S_{L^1(\mu_1^-)}^e \cup S_{L^1(\mu_2^-)}^e = S_{L^1(\mu_1^+)}^e \cup S_{L^1(\mu_2^-)}^e$$

ultima egalizare pe baza lemei 3. În § 2 am observat că  $\mu$  atunci și numai atunci are atomi cînd una din componentele sale  $\mu^+$  sau  $\mu^-$  are atomi. Deci  $S_{L^1(\mu)}^e \neq \emptyset$  atunci și numai atunci cînd  $\mu$  are atomi. Astfel am demonstrat:

**TEOREMA 1.** *Fie  $\mu$  o măsură regulată boreliană.  $S_{L^1(\mu)}^e$  atunci și numai atunci nu este vidă cînd  $\mu$  are atomi.*

*Remarcă.* Formula pentru  $S_{L^1(\mu)}^e$  permite descrierea punctelor extremale. Deoarece  $\mu_2^+ \perp \mu_2^-$  și ambele măsuri sînt atomice, ele sînt concentrate pe două șiruri disjuncte de puncte  $x_i^+$ ,  $x_i^- \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Punctele extremale în  $S_{L^1(\mu)}^e$  sînt de forma  $\pm f_i^+$  respectiv  $\pm f_i^-$  unde  $f_i^+(x_j^+) = \mu(x_j^+)^{-1} \cdot \delta_{ij}$  iar  $f_i^-(x_j^-) = \mu(x_j^-)^{-1} \delta_{ij}$  și  $f_j^\pm(x) = 0$  dacă  $x \neq x_j^\pm$ .

Trecem la teorema lui Arens-Kelley.

**TEOREMA 2.** *Dacă  $X$  este un spațiu compact Hausdorff și  $C(X)$  spațiul funcțiilor reale și continue pe  $X$ , atunci  $S_{C^*(X)}^e$  este format din  $\pm \delta_x$ , cu  $x \in X$ .*

*Demonstrație.* Pe baza teoremei de reprezentare a lui F. Riesz  $C^+(X)$  este format din măsuri reale boreliene regulate pe  $X$ . Fie  $\mu \in S_{C^*(X)}^e$  atunci  $\|\mu\| = 1$  (norma variației totale). Pe baza teoremei lui Radon-Nikodym  $L^1(|\mu|)$  este izometric izomorf cu subspațiul din  $C^*(X)$  format din măsurile absolut continue în raport cu  $|\mu|$  (variația măsurii  $\mu$ ). Izomorfismul izometric se realizează prin transformarea  $T: f \rightarrow f d|\mu|$ . Deci imaginea lui  $\mu$  în  $L^1(|\mu|)$  va fi un element din  $S_{L^1(|\mu|)}^e$  de formă  $f$  (sau  $-f$ ), unde  $f$  este funcție nulă, cu excepția unui punct  $x_\mu$  pentru care  $\mu(\{x_\mu\}) \neq 0$  și  $f(x_\mu) = \mu^{-1}(\{x_\mu\})$ . Dar pe baza biunivocității aplicației  $T$ ,  $\mu = f d|\mu|$  adică  $\mu = \delta_{x_\mu}$ .

*Remarcă.* Toate rezultatele se extind fără dificultate la cazul în care considerăm măsuri și funcții cu valori complexe.

(Intrai în redacție la 8 octombrie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Intégration*, Chap. 1-4 (Paris, 1967).
2. G. Köthe, *Topologische lineare Räume, I.* (Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960).
3. S. Marcus, *Atomic measures and Darboux property*, „Revue Roum. Math. Pures et Appliquées” 7(1962), p. 327-332.

#### ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТОЧКАХ ЕДИНИЧНЫХ СФЕР В ПРОСТРАНСТВАХ $C^*(X)$ И $L^1(\mu)$ (Резюме)

В статье выводится теорема Аренса-Келли об экстремальных точках единичной сферы в  $C^*(X)$  из соответствующих результатов относительно единичной сферы пространства  $L^1(\mu)$ . Существование экстремальных точек во втором случае связано с атомичностью меры  $\mu$ . Данное свойство известно в литературе, однако автор встретил доказательство лишь в случае неатомической меры Лебега на  $[0,1]$  (2,3). Доказательство основано на простом замечании, сформулированном в Лемме 2, с помощью которого можно эффективно построить экстремальные точки единичной сферы из  $L^1(\mu)$ , в случае если  $\mu$  имеет атомы. В основной части связываются два полученных результата.



SUR LES POINTS EXTRÊMAUX DES SPHÈRES UNITÉ DANS LES ESPACES  $C^*(X)$  ET  $L^1(\mu)$ 

(R é s u m é)

Dans la note présente on déduit le théorème d'Arens-Kelley sur les points extrémaux de la sphère unité de  $C(X)$  des résultats correspondants relatifs à la sphère unité de l'espace  $L^1(\mu)$ . L'existence des points extrémaux dans le second cas est liée à l'atomicité de la mesure  $\mu$ . Cette propriété apparaît dans la littérature, mais l'auteur n'en a rencontré la démonstration que dans le cas de la mesure non-atomique Lebesgue sur  $[0,1]$  ([2,3]). La démonstration se fonde sur l'observation simple formulée par le Lemme 2, à l'aide duquel on peut construire effectivement les points extrémaux de la sphère unité de  $L^1(\mu)$ , pour le cas où  $\mu$  a des atomes. La partie essentielle de la note réside dans le lien établi entre les deux résultats.



# DETERMINAREA TRANSFORMĂRILOR OPTIME ALE UNOR NOMOGRAMĂ CU PUNCTE ALINIATE

de

F. RADÓ și V. GROZE

În lucrările [1], [2], [4] s-au dat criterii necesare și suficiente pentru ca o nomogramă să aibă eroare minimă în familia de nomograme dedusă dintr-o nomogramă dată printr-o familie de transformări proiective. Dar în ceea ce privește determinarea transformării optime din familia de transformări considerate, nu sînt tratate în aceste lucrări decît metode aproximative. În lucrarea [3] este rezolvată această problemă pentru o singură scară rectilinie.

În lucrarea de față vom da metode concrete pentru determinarea transformării optime pentru anumite familii de transformări proiective în cazul a două tipuri de nomograme cu puncte aliniate.

1. Considerăm o nomogramă avînd trei scări rectilinii concurente  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OA_3$  (fig. 1).

Vom aplica transformări proiective asupra acestei nomograme, care să păstreze fixe segmentele  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OA_3$ . Astfel de proiectivități nu pot fi decît omologii  $\Omega$ , avînd centrul în punctul  $O$ , iar axa fiind dreapta care conține punctele  $A_i$ .

Putem extinde pentru acest caz metoda folosită în lucrarea [3].

Într-un reper cartezian ortogonal cu originea în punctul  $O$  și cu axa  $Ox$  paralelă cu dreapta  $A_1A_2$ , ecuațiile scărilor nomogramei sînt:

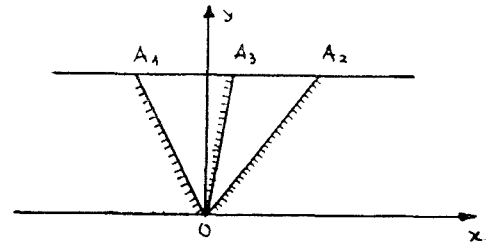


Fig. 1.

$$\begin{cases} x_i = c_i f_i(z_i) & z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3. \\ y_i = f_i(z_i) \end{cases}$$

Alegînd distanța punctului  $O$  la dreapta  $A_1A_2$  egală cu unitatea avem  $f_i(z'_i) = 0$  și  $f_i(z''_i) = 1$ . (Cazul în care gradațiile scărilor nu se întind pînă la punctul  $O$ , poate fi încadrat în cazul de mai sus.)

Omologiile  $\Omega$  transformă punctele  $M_i(x_i, y_i)$  ale scării  $SA_i$  în punctul  $M'_i(x'_i, y'_i)$  după următoarele relații

$$y'_i = \frac{(\mu + 1)y_i}{\mu y_i + 1}, \quad x'_i = c_i y'_i,$$

unde  $\mu > -1$ , pentru ca segmentele  $OA'_i$  să se transforme în ele însele. Avem

$$OM_i = s_i = \sqrt{1 + c_i^2} f_i(z_i) \\ OM'_i = s'_i = \sqrt{1 + c_i^2} \frac{(\mu + 1) f_i(z_i)}{\mu f_i(z_i) + 1}$$

Eroarea absolută a nomogramei transformate este

$$E_\mu = \max_i E_\mu^i = \max_i \max_{z'_i \leq z_i \leq z''_i} \frac{h}{\frac{ds'_i}{dz_i}} \quad (1)$$

sau

$$E_\mu = \max_i \max_{z'_i \leq z_i \leq z''_i} \frac{h}{\frac{(\mu + 1) \sqrt{1 + c_i^2} f'_i(z_i)}{[\mu f_i(z_i) + 1]^2}}, \quad (2)$$

unde  $h$  este eroarea geometrică. Scopul nostru este de a determina pe  $\mu$  astfel încît eroarea  $E_\mu$  să fie minimă.

Din formula (2) rezultă că avem :

$$\frac{(\mu + 1) \sqrt{1 + c_i^2}}{h [\mu f_i(z_i) + 1]^2} f'_i(z_i) \geq \frac{1}{E_\mu}, \text{ pentru } z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

și există cel puțin un  $i$  și o valoare  $z_i$  astfel ca egalitatea să fie atinsă.

Folosind notațiile :

$$\sqrt[4]{1 + c_i^2} \sqrt{\frac{f'_i[f_i^{-1}(y)]}{h}} = \psi_i(y), \quad \frac{1}{\sqrt{E_\mu}} = k_\mu$$

avem

$$\psi_i(y) \geq \frac{(\mu y + 1) k_\mu}{\sqrt{\mu + 1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

relație valabilă pentru  $0 \leq y \leq 1$ .

Să reprezentăm grafic în planul axelor rectangulare  $x O y$  arcele  $C_i$  ale curbelor definite prin ecuația

$$x = \psi_i(y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Din (3) rezultă că dreapta  $\Delta_\mu$  de ecuație

$$x = \frac{k_\mu}{\sqrt{\mu + 1}} (\mu y + 1)$$

care trece prin punctul  $\left(0, -\frac{1}{\mu}\right)$ , se află la stînga arcelor  $C_i$  și este de sprijin pentru cel puțin un arc  $C_i$  (fig. 2). Vom obține toate pozițiile dreptei  $\Delta_\mu$ , dacă considerăm tangentele la înfășurătoarea convexă comună a arcelor  $C_i$ , notată cu  $H$ , situate la stînga acesteia, care intersectează axa  $oy$  în afara segmentului  $[0,1]$  (am ținut seamă că  $\mu$  ia valori  $> -1$ ). Cunoscînd o poziție a dreptei  $\Delta_\mu$ , interpretarea geometrică a lui  $k_\mu$  este următoarea (vezi [3]): se consideră elipsa tangentă la  $\Delta_\mu$  din familia de elipse avînd ca una din axe segmentul  $[0,1]$  al axei  $oy$ ; cealaltă semi-axă a ei este egală cu  $k_\mu$ . Pentru a găsi valoarea lui  $\mu$ , care conduce la cel mai mare  $k_\mu$  posibil, ajunge să ducem elipsa din familie, tangentă la  $H$  (fig. 3), iar în punctul de contact tangenta comună a acestei elipse și a curbei  $H$ . Dacă  $y_0$  este ordonata

punctului de intersecție a tangentei comune cu axa  $oy$ , avem  $y_0 > 1$  sau  $y_0 < 0$  și valoarea optimă a parametrului  $\mu$  se calculează astfel:

$$\mu_0 = -\frac{1}{y_0}.$$

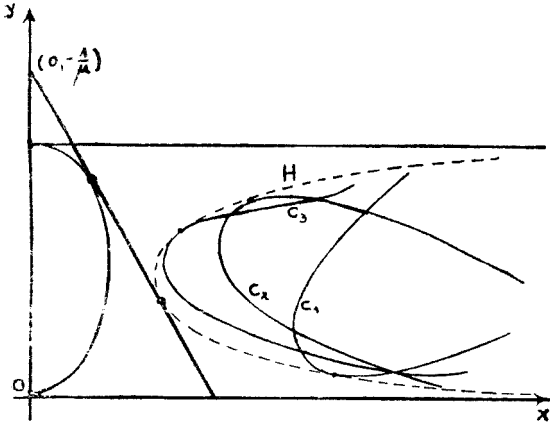


Fig. 2.

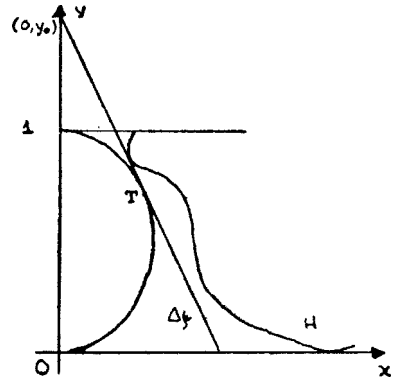


Fig. 3.

2. Considerăm nomograma  $N$  formată din trei scări  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  rectilinii și presupunem că punctele  $A_i$  aparțin unei drepte  $d_1$ , iar punctele  $B_i$  unei drepte paralele  $d_2$  (fig. 4).

Alegînd dreapta  $d_1$  ca axă  $Ox$  a unui reper cartezian rectangular și distanța dintre  $d_1$  și  $d_2$  ca unitate de măsură, ecuațiile scărilor sînt:

$$x = c_i y + a_i, \quad y = f_i(z), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

unde presupunem că  $c_1 > 0$ , iar  $c_2 < 0$ .

Pentru îmbunătățirea nomogrammei vom face transformări proiective considerînd punctele  $A_1$  și  $A_2$  și dreapta  $d_2$  fixe. Astfel de colineații pot fi numai omologiile avînd axa pe una din dreptele  $d_1, d_2$ , iar centrul pe cealaltă. Dintre aceste omologii, care depind de doi parametri, vom considera aici numai o familie cu un singur parametru și anume cele ce au centrul la infinit, adică afinitățile omologice speciale cu axa  $d_1$ .  $M(x, y)$  și  $M'(x', y')$  fiind două puncte corespondente într-o afinitate considerată, avem următoarele relații:

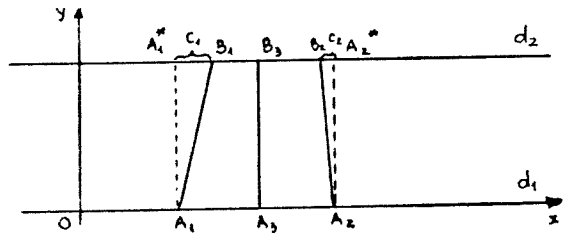


Fig. 4.

$$\begin{cases} x' = x + py \\ y' = y \end{cases}$$

$p$  fiind parametrul transformării, care trebuie limitat pentru a nu ieși din dreptunghiul  $A_1 A_2 A_2^* A_1^*$ :  $-c_1 \leq p \leq -c_2$ .

Punctele scării  $A_i B_i$  se transformă după formulele :

$$\begin{aligned} x' &= (c_i + p)y + a_i \\ y' &= y \end{aligned}$$

și avem :

$$A_i M_i = s'_i = y \sqrt{(c_i + p)^2 + 1}.$$

Pentru eroarea  $E_p$  a nomogramei vom calcula expresia

$$\frac{ds'_i}{dz} = \sqrt{(c_i + p)^2 + 1} f'_i(z).$$

Folosind formula (1) a erorii unei nomograme, putem scrie :

$$\frac{\sqrt{(c_i + p)^2 + 1} f'_i(z)}{h} \geq \frac{1}{E_p} \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Notînd

$$\min_{0 \leq y \leq 1} \left( \frac{f_i[f_i^{-1}(y)]}{h} \right)^2 = m_i^2, \quad \frac{1}{E_p^2} = k_p,$$

avem

$$k_p \leq m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1], \quad i = 1, 2, 3;$$

deci valoarea optimă a parametrului  $p$  se obține calculînd

$$k_p^\circ = \max_{-c_1 \leq p \leq -c_3} \{ \min_{i=1,2,3} m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1] \}.$$

Pentru aceasta e suficient să reprezentăm în planul axelor  $p, k$  porțiunile parabolilor  $k = m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1]$  cuprinse între  $p = -C_1$  și  $p = -C_2$ , să luăm curba formată de arcele inferioare și să determinăm ordonata ei maximă. Cîteva exemple de cazuri posibile sînt reprezentate în fig. 5.

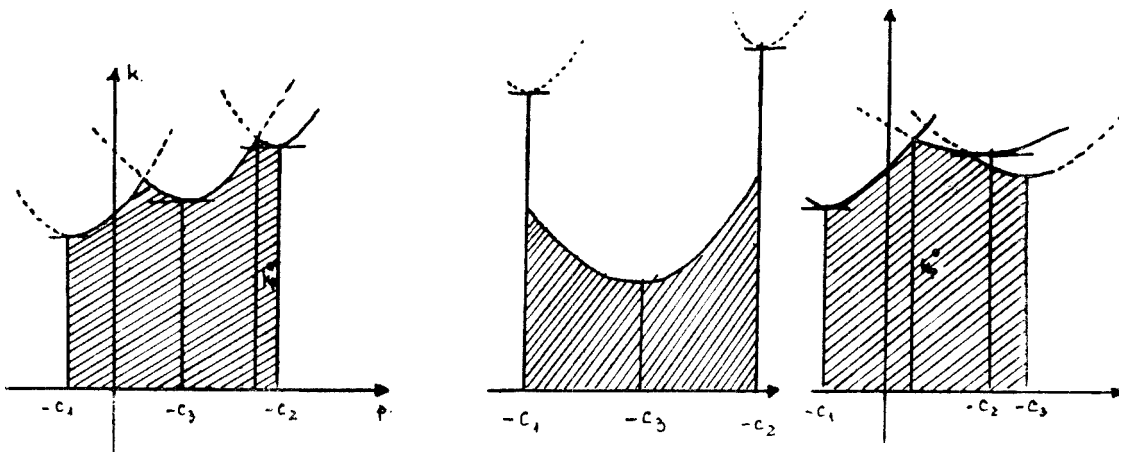


Fig. 5.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Orbán, V. Groze și Gh. Coman, *Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu scări rectilinii*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai”, seria Mat. fiz., fasc. 1, pg. 16–23 (1967).
2. S. Groze și B. Orbán, *Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu două scări pe un cerc și una pe o curbă oarecare* (sub tipar).
3. F. Radó, *Über die beste projektive Transformation von geradlinigen Leitern*. „Z.A.M.M.” 45, 356–359 (1965).
4. F. Radó, V. Groze, B. Orbán, *Propriétés extrémales dans une classe de fonctions et applications à la transformation des nomogrammes*, „Mathematica” 6(29), 2. pg. 307–326 (1964).  
(Intrat în redacție la 8 noiembrie 1968)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕКОТОРЫХ НОМОГРАММ С ВЫРАВНЕННЫМИ ТОЧКАМИ

(Резюме)

Одна из изученных задач - следующая: рассматривается номограмма с тремя конкурентными прямолинейными шкалами  $OA_1, OA_2, OA_3$ , данными уравнениями

$$x_i = c_i f_i(z_i), \quad y_i = f_i(z_i), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$f_i(z'_i) = 0, \quad f_i(z''_i) = 1, \quad f'_i(z_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Номограмма подчиняется преобразованиям одной группы гомологий с центром в 0 и с осью  $A_1A_2$ :

$$x' = \frac{(\mu + 1)x}{\mu y + 1}, \quad y' = \frac{(\mu + 1)y}{\mu y + 1} \quad (\mu > -1)$$

Значение  $\mu_0$  параметра  $\mu$ , приводящее к номограмме с минимальной ошибкой, определяется следующим образом: строится выпуклая огибающая кривая дуг кривой

$$x = \sqrt[4]{1 + c_i^2 \sqrt{f'_i[f_i^{-1}(y)]}}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

и обозначается через  $H$  часть её границы между прямыми  $y = 0, y = 1$ , расположенная ближе к оси  $O$ . Пусть  $T$  — точка касания дуги  $H$  с эллипсом, имеющим ось промежуток  $[0, 1]$  на  $Oy$ , и  $y_0$  — ордината точки пересечения  $Oy$  с касательной в  $T$  к  $H$ . Значение  $\mu_0$  определено соотношением

$$\mu_0 = - \frac{1}{y_0}$$

DÉTERMINATION DES TRANSFORMATIONS OPTIMA DE CERTAINS NOMOGRAMMES A POINTS ALIGNÉS

(Résumé)

L'un des problèmes étudiés est le suivant : on considère un nomogramme à trois échelles rectilignes concurrentes  $OA_1, OA_2, OA_3$ , données par les équations

$$x_i = c_i f_i(z_i), \quad y_i = f_i(z_i), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

où

$$f_i(z'_i) = 0, \quad f_i(z''_i) = 1, \quad f'_i(z_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

On soumet le nomogramme aux transformations d'un groupe d'homologies avec le centre en 0 et l'axe  $A_1A_2$ :

$$x' = \frac{(\mu + 1)x}{\mu y + 1}, \quad y' = \frac{(\mu + 1)y}{\mu y + 1} \quad (\mu > -1)$$

La valeur  $\mu_0$  du paramètre  $\mu$  qui conduit à un nomogramme à l'erreur minima, se détermine de la manière suivante: on construit l'enveloppe convexe des arcs de la courbe

$$x = \sqrt[4]{1 - C_i^2} \sqrt{f'_i[f_i^{-1}(y)]}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

et l'on désigne par H la portion de sa frontière située entre les droites  $y = 0$ ,  $y = 1$ , la plus rapprochée de l'axe  $Oy$ . Soit T le point de contact de l'arc H avec une ellipse ayant comme axe le segment  $[0, 1]$  sur  $Oy$ , et  $y_0$  l'ordonnée du point d'intersection entre  $Oy$  et la tangente en T à H. La valeur  $\mu_0$  est déterminée par la relation

$$\mu_0 = -\frac{1}{y_0}.$$



A NOTE ON SOLUTION OF CERTAIN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION  
BY INTEGRAL TRANSFORM

by

P. PURI and S. P. BHATTACHARYYA (Bombay, India)

In recent papers by D u t t a and D e b n a t h [1, 2] they have developed a solution of the partial differential equation of the type

$$P(L_x)Y(x, t) = B_t Y(x, t)$$

where

$$L_x = a_2(x, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x}$$

and

$$B_t = \sum_0^p b_r(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

Though it is mentioned in [2] that the solution of the more general partial differential equation of the type

$$Q(L_x, B_t)Y(x, t) = 0$$

can be derived from their earlier results, but it was not actually done. It is felt that the solution of the differential equation of this type will be quite useful for the solution of problem in Applied Mathematics, we propose to give its solution in an explicit form. Moreover there are a few slips in the above papers [1, 2]. Attention has been drawn to these slips in this note. Using the same notations and definitions as in [1] and [2] we first point out that in Art 1.4. of (1) the final differential equation for  $I_\lambda(n, t)$  should be,

$$\left[ b_p(t) \frac{d^p}{dt^p} + b_{p-1} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} + (\lambda_n + b_0) \right] I_\lambda(n, t) = 0$$

In Art 1.4 of [2], the solution for  $Y_\lambda(n, t)$  is given by

$$Y_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^p \frac{\Delta^m}{\Delta} U_m(t, \lambda, n)$$

and therefore the solution for  $Y(x, t)$  is

$$Y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^p \frac{\Delta_m}{\Delta} (\delta_{n,\lambda})^{-1} K_n^\lambda(x) U_m(t, \lambda, n)$$

we now proceed to solve the partial differential equation

$$Q(L_x, B_t)Y(x, t) = 0 \quad (1)$$

Where  $Q(u, v)$  is an expression of degree  $r$  in  $u$  and  $v$ .

We can write the equation (1) in matrix form as

$$(1, B_t, \dots, B_t^r) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,r+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x^r \\ L_x^{r-1} \\ \vdots \\ L_x \\ 1 \end{pmatrix} Y(x, t) = 0 \quad (2)$$

where  $B_t$  is a differential operator of the type

$$B_t = \sum_0^p b_q \frac{\partial^q}{\partial t^q} \quad (3)$$

Applying the integral transform (1) to equation (2) we obtain

$$(1, B_t, B_t^2, \dots, B_t^r) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,r+1} \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{r+1,r+1} & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^r \lambda_n^r \\ (-1)^{r-1} \lambda_n^{r-1} \\ \vdots \\ \lambda_n \\ 1 \end{pmatrix} Y_\lambda(n, t) = 0 \quad (4)$$

Now the equation (4) is a differential equation of order  $pr$  and has  $pr = S$  solutions  $U_m(\lambda, n, t)$ ,  $Y_\lambda(n, t)$  is then given by

$$Y_\lambda(n, t) = \sum_1^S C_m U_m(\lambda, n, t) \quad (5)$$

If the initial conditions are given by

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} Y(x, t) = G^l(x) \quad (l = 1, 2, \dots, s) \quad (6)$$

then these conditions in the transform domain will reduce to

$$\frac{d^l}{dt^l} Y_\lambda(n, t) = g_\lambda^l(n) \quad (7)$$

and we obtain a set of  $s$  simultaneous equations in  $C_m$ 's, which on solving yield

$$C_m = \frac{\Delta_m}{\Delta} \quad (8)$$

where

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\lambda, n, 0) & U_2(\lambda, n, 0) & \dots & U_s(\lambda, n, 0) \\ U_1^{(1)}(\lambda, n, 0) & U_2^{(1)}(\lambda, n, 0) & \dots & U_s^{(1)}(\lambda, n, 0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_1^{(s-1)}(\lambda, n, 0) & U_2^{(s-1)}(\lambda, n, 0) & \dots & U_s^{(s-1)}(\lambda, n, 0) \end{vmatrix}$$

and  $\Delta_m$  is the determinant obtained by replacing the  $m$ -th column in  $\Delta$  by  $g_\lambda^i(n)s$ . Thus (5) becomes.

$$Y_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^s \frac{\Delta}{\Delta_m} U_m(\lambda, n, t)$$

from which we get the solution as

$$Y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^s \frac{\Delta_m}{\Delta} (\delta_{n,\lambda})^{-1} K_n^\lambda(x) U_m(\lambda, n, t).$$

**Acknowledgement.** The authors wish to express their sincere thanks to Professor M. D u t t a for suggesting this field of investigation.

(Received September 16, 1968)

#### REFERENCES

1. M. D u t t a and L. D e b n a t h, Studia Univ. Babeş-Bolyai, s. Math. Phys., 2, 37-46 (1965).
2. M. D u t t a and L. D e b n a t h, Studia Univ. Babeş-Bolyai, s. Math. Phys., 1, 33-38 (1967).

#### NOTĂ ASUPRA REZOLVĂRII ANUMITOR ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE CU AJUTORUL TRANSFORMĂRIILOR INTEGRALE

(R e z u m a t)

În lucrările [1] și [2] s-a menționat că metoda dată se aplică și ecuațiilor de forma (1). În prezenta lucrare se fac calculele efective în această direcție și se dă explicit soluția.

#### О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Р е з ю м е)

В работах [1] и [2] упоминалось, что данный метод применяется и к уравнениям вида (1). В настоящей работе производятся эффективные вычисления в этом направлении и дается явное решение.



## DESPRE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE TIP VARIAȚIONAL

de  
**E. KOLOZSI**

În această lucrare se studiază clasa ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de tip variațional.

Considerăm operatorul diferențial liniar

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u \quad (1)$$

unde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \quad \alpha_i \geq 0 \text{ întregi, } i = \overline{1, n}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}; \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}; \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$a_\alpha$  — constante reale.

Operatorul  $p(D)u = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u$  în mod obișnuit se numește partea principală a operatorului  $P(D)$ .

Operatorului considerat i se atașează polinomul caracteristic  $P(\xi)$  înlocuind operatorii elementari  $D_j$  cu variabilele reale  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ),

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \quad (2)$$

unde  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ .

În mod analog  $p(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$  este partea principală a polinomului  $P(\xi)$ .

Considerăm mai departe mulțimea  $\mathcal{S}$  a elementelor  $k = (k_1, \dots, k_n)$  cu componente numere întregi nenegative, introdusă de S. M. Nikol'ski [2], care satisface următoarele condiții:

1. Este convexă în sensul că, submulțimea elementelor cu componente întregi și nenegative ale celui mai mic corp convex, care conține pe  $\mathcal{S}$ , coincide cu  $\mathcal{S}$ .

2. Împreună cu  $k$  conține și proiecțiile acestuia pe toate subspațiile de coordonate. Conține elementul  $k^0 > 0$  ( $k_j^0 > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ).

În această mulțime se poate determina o bază  $B$  a elementelor

$$0, k^1, k^2, \dots, k^N \quad (3)$$

care au proprietatea că, oricare ar fi  $k \in \mathcal{S}$

$$k = \sum_0^N \lambda_s k^s; \quad \lambda_s \geq 0; \quad \sum_0^N \lambda_s \leq 1$$

Cu ajutorul mulțimii introducem funcționala

$$E(f) = \sum_{a_{k,l} \in \mathcal{S}} \int_G a_{k,l} f^{(k)} \cdot f^{(l)} dg \quad (4)$$

definită pe clasa funcțiilor pentru care  $E(f) < \infty$ ,  $G$  fiind un domeniu din  $Rn$ :  $a_{k,l} = a_{l,k}$  constante reale.

DEFINIȚIE: Funcționala  $F(z)$  cu domeniul de definiție  $D$  se numește convexă dacă

$$F\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [F(u) + F(v)], \quad u, v \in D_F$$

LEMA 1. Condiția necesară și suficientă pentru ca  $E(f) \geq 0$ , este ca ea să fie convexă. Într-adevăr

$$\begin{aligned} E\left(\frac{u+v}{2}\right) + E\left(\frac{u-v}{2}\right) &= \sum_{l,k \in \mathcal{S}} \int_G a_{k,l} \left[ \left(\frac{u+v}{2}\right)^{(k)} \cdot \left(\frac{u+v}{2}\right)^{(l)} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^{(k)} \left(\frac{u-v}{2}\right)^{(l)} \right] dg = \\ &= \frac{1}{2} [E(u) + E(v)] \end{aligned}$$

dacă  $E(f) \geq 0$  rezultă că  $E\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq 0$ , prin urmare

$$E\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [E(u) + E(v)]$$

Invers: fie  $E$  convexă, alegem  $u = u$ ,  $v = -u$ , atunci

$$0 = E(0) = E\left(\frac{u-u}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [E(u) + E(-u)] = E(u)$$

deci

$$E(u) \geq 0$$

Funcționala  $E$  se poate scrie  $E(f) = \sum_{k=1 \in B} \int_G a_{k,l} f^{(k)} \cdot f^{(l)} dg + E_1(f)$ .

DEFINIȚIE: Funcționala  $E$  se numește convexă relativ la  $\mathcal{S}$ , dacă funcționala  $E_1(f)$  este convexă.

Problema principală cu care ne vom ocupa în prezenta lucrare este găsirea condițiilor în care ecuația  $P(D)u = 0$  este de tip variațional, în sensul că i se poate atașa o funcțională definită pe o clasă de funcții cu valori bine pre-

cizate pe frontieră, iar problema de extremum relativă la această funcțională are o soluție unică.

În acest sens considerăm la început următoarea problemă: în ce condiții polinomului  $P(\xi)$  i se poate atașa o mulțime convexă de tipul lui  $\mathfrak{S}$  în așa fel ca

$$P(\xi) = \sum_{k,l \in \mathfrak{S}} (-1)^{|l|} a_{k,l} \xi^{(k+l)} \tag{5}$$

unde  $a_{k,l} = a_{l,k}$ ;  $\xi^{(k+l)} = \xi_1^{k_1+l_1} \dots \xi_n^{k_n+l_n}$ .

Avem următoarea

LEMA 2. Condiția necesară și suficientă ca polinomului  $P(\xi)$  să i se poată atașa o mulțime convexă de tipul lui  $\mathfrak{S}$  în așa fel ca să aibă loc relația (5), este ca  $P(\xi)$  să fie de forma

$$P(\xi) = \sum_{|x| \leq m} a_x \xi^{2x} \tag{6}$$

DEMONSTRAȚIA. Necesitatea condiției este evidentă, deoarece  $|k+l|$  trebuie să fie neapărat un număr par, fiindcă în caz contrar termenii expresiei (5) se anulează doi câte doi.

Condiția este și suficientă, mulțimea atașată fiind  $\mathfrak{S} = \{k \mid |k| \leq m\}$  iar determinarea coeficienților pentru a avea relația (5) se face în felul următor:

—  $k$  și  $l$  se determină cu ajutorul sistemului

$$k_i + l_i = 2\alpha_i \quad i = 1, \dots, n \quad |\alpha| \leq m \tag{7}$$

— iar coeficienții prin

$$a_{k,l} = (-1)^{|l|} \frac{a_x}{N_{k,l}^x} \tag{8}$$

unde  $N_{k,l}^x$  este numărul perechilor posibile care satisfac relațiile (7).

*Observație.* Mulțimea  $\mathfrak{S}$  astfel atașată este mulțimea „cea mai largă”, care poate fi atașată. În cazul cînd unii coeficienți  $a_x$  sînt nuli, mulțimea  $\mathfrak{S} = \{k, |k| \leq m\}$  poate fi mai restrînsă în funcție de elementele care figurează în mod efectiv în  $P(\xi)$  cu păstrarea proprietăților de definiție. De exemplu dacă

$$P(\xi) = a_{(3,0)} \xi_1^6 + a_{(2,1)} \xi_1^4 \xi_2^2 + a_{(1,2)} \xi_1^2 \xi_2^4 + a_{(0,3)} \xi_2^6 + a_{(2,0)} \xi_1^4 + a_{(1,1)} \xi_1^2 \xi_2^2 + a_{(0,2)} \xi_2^4 + a_{(1,0)} \xi_1^2 + a_{(0,1)} \xi_2^2 + a_{(0,0)}$$

mulțimea  $\varepsilon$  atașată este  $\{k; |k| \leq 3\}$ .

$$\text{Dacă } a_{(3,0)} = a_{(0,3)} = 0, \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S} - \{(3,0), (0,3)\},$$

iar dacă în plus  $a_{(2,1)} = a_{(1,2)} = a_{(2,0)} = 0$ ,  $\mathfrak{S}'' = \{(0,0), (1,0), (0,2), (0,1)\}$ .

Pe baza lemei 2, operatorul  $P(D)u$  care verifică condiția lemei se poate scrie în forma

$$P(D)u = \sum'_{k,l \in \mathfrak{S}} (-1)^{|l|} a_{k,l} u^{(k+l)}; \quad a_{k,l} = (-1)^{|l|} \frac{a_x}{N_{k,l}^x}.$$

Operatorului  $P(D)u$  îi corespunde funcționala

$$E(u) = \sum'_{k,l \in \mathfrak{S}} \int_G a_{k,l} u^{(k)} \cdot u^{(l)} dg$$

care se poate scrie

$$E(u) = \sum_{k=l \in B} \int_G a_{k,l} u^{(k)} u^{(l)} dg + E_1(u) = \sum'_{k \in B} \int_G a_{k,k} (u^{(k)})^2 dg + E_1(u)$$

dacă  $a_{k,k} > 0$ ,  $k \in \beta$  iar  $E(u)$  este convexă relativ la  $\mathfrak{S}$ , atunci

$$E(u) \geq \gamma \sum'_{s=0}^N \int_G |u^{(k^s)}|^2 dg = \gamma B(u)$$

unde  $\gamma = \min_{k \in B} a_{k,k}$ , iar  $k^s$  sînt elementele bazei  $B$ .

În aceste condiții, după cum a arătat S. M. Nikolski [3], problema variațională

$$\min_{u \in m(\varphi)} E(u)$$

unde  $m(\Phi)$  este mulțimea funcțiilor pentru care  $E(u) < \infty$  și care au aceeași varietate admisă pe frontieră ca și  $\Phi: B$  ( $\Phi < \infty$ , are soluție unică care satisface în sensul teoriei distribuțiilor ecuația  $P(D)u = 0$ ).

Prin urmare avem următoarea

TEOREMĂ. Dacă operatorul diferențial liniar cu coeficienți constanți

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^{2\alpha} u$$

satisface condițiile

1.  $(-1)^{|\alpha|} a_\alpha > 0$  pentru  $\alpha = 2l$ ,  $l \in B$
2. funcționala  $E(u)$  generată de operator

$$E(u) = \sum_{k,l \in \mathfrak{S}} \int_G (-1)^{|l|} \frac{a_\alpha}{N_{k,l}^2} u^{(k)} u^{(l)} dg$$

este convexă relativ la  $\mathfrak{S}$ , atunci i se poate atașa o problemă variațională relativă la  $E(u)$ , care să admită soluția unică  $u_0$ , care satisface în sensul teoriei distribuțiilor ecuația  $P(D)u = 0$ , cu valori pe frontiera dată de varietatea admisă amintită.

În cele ce urmează vom da un model de construire a operațiilor care verifică condițiile teoremei. Considerăm operatorii

$$1 \equiv D_0^2, D_1^2, \dots, D_n^2; \quad D_i^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (i = \overline{1, n})$$



și algebra polinomială  $\Delta$  generată de acest sistem, operațiile fiind definite în mod obișnuit

$$(D_i^2 + D_j^2)u = D_i^2u + D_j^2u \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

$$D_i^2 D_j^2 u = D_i^2 (D_j^2 u)$$

și înmulțirea cu scalar real. Elementele acestei algebre pot fi scrise

$$\delta_m = \sum_{|d| < m} \lambda_x D^{2x} u$$

Considerăm mai departe subalgebrele  $\Delta_i$  generate de operatorii  $D_i^2$  ( $i = \overline{1, n}$ ) în mod analog, și submulțimea  $V \subset \Delta$  a elementelor  $\delta_m$  care se sprijină pe fiecare subalgebră  $\Delta_i$  în sensul că  $\delta_m$  conține cel puțin un element din fiecare  $\Delta_i$ , și care verifică condiția  $\alpha_i \leq \alpha_i^s$ , pentru fiecare  $i$ , unde indicele  $s$  pune în evidență elementele de sprijin din  $\Delta_i$ . (Dacă  $\delta_m \in V$  conține mai multe elemente din  $\Delta_i$ , se consideră element de sprijin cel de ordin maxim).

Dacă

- $(-1)^{|\alpha|} \lambda_x > 0$  pentru  $\alpha = \alpha^s$  și  $|\alpha| \geq \max_{i, s} |\alpha_i^s|$

- $\lambda_x \geq 0$  pentru restul termenilor,

atunci  $\delta_m$  este un operator de tip variațional.

*Observație.* Condiția 1 poate fi încă slăbită, dacă luăm în considerare baza minimală a mulțimii  $\mathfrak{S}$  atașată operatorului  $\delta_m$ . Astfel coeficienții de la condiția 1, pentru care există un  $\alpha'$  în așa fel ca

$|\alpha'| > |\alpha|$  și există cel puțin un indice  $i$  pentru care  $\alpha'_i = \alpha_i$ , nu trebuie să fie neapărat strict pozitivi, este suficient să fie nenegativi.

Pentru clasa determinată a operatorilor se poate aplica criteriul suficient de hipoeipticitate al lui N i k o l s k i [3] valabilă pentru ecuații generate de funcționale de tip (4). Astfel  $P(D)u$  care verifică condițiile teoremei, este de tip hipoeiptic, dacă mulțimea atașată este strict convexă, în sensul că suprafața celui mai mic corp convex  $\overline{\mathfrak{S}}$  care conține pe  $\mathfrak{S}$  nu are nicicum un segment perpendicular pe  $x_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Analitic exprimat, dacă  $0, k^1, \dots, k^N$  este baza lui  $\varepsilon$ , atunci condiția este ca pentru orice  $k \in \mathfrak{S}$  să avem  $k_i < k_i^s$  pentru toți indicii  $s$  ( $k_i^s \neq 0$ ) afară de cazul  $k = k^s$ .

Exemple :

- Ecuția  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

studiată de K. S. N a u r i z b a e v [1] este de tip variațional, hipoeiptică.

- Ecuția  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$

studiată de N i k o l s k i [3] este o ecuație de tip variațional, care nu este hipoeiptică.

Mulțimile atașate sînt  $\mathfrak{S} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1)\}$  în primul caz, și  $\mathfrak{S} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$  în al doilea caz.

(Intrat în redacție la 16 septembrie 1968)

## BIBLIOGRAFIE

1. K. S. Naurizbaev, *Ob odnom dostatočnom kriterii ustoicivosti*. Izvestia AN Kazahskoi SSR, **10** (14) 1962.
2. S. M. Nikolski, *Ob ustoicivih granicnih znaceniiah diferenciruemoi funkcii mnogih peremennih*. Mat. zbornik **61** (103), v. 2 (1963).
3. — *Variacionnaia zadacia*. Mat. zbornik, **62**: 1 (1963).

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА

(Резюме)

В работе изучается вопрос о нахождении условий, в которых линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами может быть решено вариационным методом, в том смысле, что существует функционал, для которого вариационная задача имеет единственное решение в определённом классе функций, и это решение удовлетворяет в смысле теории распределений данному дифференциальному уравнению.

## SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE TYPE VARIATIONNEL

(Résumé)

L'auteur se pose le problème de déterminer les conditions pour lesquelles une équation différentielle linéaire à coefficients constants peut être résolue par la méthode variationnelle, dans le sens qu'il existe une fonctionnelle pour laquelle le problème variationnel a une solution unique dans une classe de fonctions précisée et que cette solution satisfait, selon la théorie des distributions, l'équation différentielle donnée.

## PROBLÈMES NON-NOETHÉRIENS DE DIRICHLET

par  
P. SZILÁGYI

Nous nous proposons d'étudier le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations à dérivées partielles de la forme (1) pour lesquels le problème de Dirichlet n'est pas de type noethérien. Nous démontrons que pour chaque système de cette classe il y a un domaine dans lequel le problème homogène de Dirichlet a une infinité de solutions. Dans le cas du domaine  $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$  nous étudierons aussi le problème non-homogène de Dirichlet.

Considérons les systèmes de la forme

$$Lu \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = F(x_1, x_2) \quad (1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

sont des matrices à éléments réels et constants,  $u$  et  $F$  sont des fonctions vectorielles aux composantes respectives  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$  et  $F_1(x_1, x_2)$ ,  $F_2(x_1, x_2)$ . Nous supposons que  $u_i \in W_2^2(\Omega)$  et  $F_i \in L_2(\Omega)$ . Ici nous avons noté par  $W_2^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de carrés sommables admettant toutes dérivées partielles d'ordres premier et deuxième de carrés sommables. Nous notons par  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ .

Soit  $N_L = \{u \in W_2^2(\Omega); Lu = 0 \text{ dans } \Omega, u|_{\Gamma} = 0\}$ ,  $R_L = \{Lu; u \in W_2^2(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$ ,  $N_{L^*} = \{u \in W_2^2(\Omega); L^*u = 0 \text{ dans } \Omega, u|_{\Gamma} = 0\}$  où nous avons noté par  $L^*$  l'opérateur formel conjugué de  $L$ .

Le problème de Dirichlet  $Lu = h$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$ ,  $h \in L_2(\Omega)$  est de type noethérien si  $N_L$  et  $N_{L^*}$  ont des dimensions finies et  $R_L \subset L_2(\Omega)$  est fermé dans  $L_2(\Omega)$ .

On sait que le problème de Dirichlet pour les systèmes de la forme (1) n'est pas toujours du type noethérien. Le premier exemple d'un système elliptique pour lequel  $N_L$  n'est pas de dimension finie a été construit par A. V. Bitsadze [1]. Dans [2] il a été démontré que tout système elliptique de la forme (1) pour lequel le problème de Dirichlet n'est pas de type noethérien, peut être transformé à l'aide d'opérations simples en un système de la forme

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + i(k+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = F \quad (2)$$

où  $u = u_1 + iu_2$ ,  $F = F_1 + iF_2$  et  $k$  est une constante positive. Pour  $k = 1$  l'on obtient le système de Bitzadze [1], auquel cas dans le domaine  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  les espaces nuls  $N_L$  et  $N_{L^*}$  sont à dimensions infinies. Nguyen Thía Hop [3] a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que  $N_L$  ne soit pas vide pour le système de Bitzadze au cas d'un domaine  $\Omega$  simple connexe et à frontière analytique, est qu'il existe une transformation conforme rationnelle transformant le domaine  $\Omega$  en disque  $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$ . Nous considérons seulement le système

$$Lu = k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + i(k + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = F \quad (3)$$

car pour le système

$$Lv \equiv k \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - i(k + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = G \quad (4)$$

l'étude du problème peut être faite de manière analogue à l'exception près qu'aux variables  $z$  et  $z_1$  — qui sont introduites plus tard — leurs conjuguées complexes seront substituées. Il est aisé d'observer que  $L^*$  est l'opérateur formel conjugué de  $L$ .

Les résultats obtenus sont les suivants :

**THÉORÈME 1.** *Pour tout  $k > 0$  il existe une famille d'ellipse, à savoir les ellipses  $x_1^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$  ( $a$  est un nombre arbitraire réel), où le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  admet une infinité de solutions.*

**THÉORÈME 2.** *En dehors des ellipses  $x_1^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$  dans toute autre ellipse de la forme  $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2 < 0$  le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  n'admet que la solution banale.*

*Conséquence.* *Si  $k \neq 1$ , alors dans le disque  $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$  le problème homogène n'a que la solution banale.*

**THÉORÈME 3.** *Si  $\Omega$  est le disque  $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$ , alors le problème non-homogène  $Lu = h$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  a une solution unique pour toute fonction holomorphe  $h(z)$ , de carré sommable dans  $\Omega$ .*

*Démonstration du théorème 1.* Le théorème est démontré pour  $k = 1$  dans [1]. Nous supposons que  $k \neq 1$  et nous démontrerons que dans le cas du domaine  $\Omega = \{(x_1, x_2); x_1^2 + kx_2^2 - 1 < 0\}$  le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  a une infinité de solutions. En introduisant les variables complexes  $z = x_1 + ix_2$ ,  $z_1 = x_1 + ikx_2$  et les opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{k}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = -\frac{1}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{1}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

l'équation homogène  $Lu = 0$  se transformera en  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z_1} = 0$ , dont la solution générale est

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + ix_2) + \psi(x_1 + ikx_2) \quad (5)$$

où  $\varphi(z)$  et  $\psi(z_1)$  sont des fonctions holomorphes arbitraires dans  $\Omega$  selon les variables respectives  $z$  et  $z_1$ . La condition  $u|_{\Gamma} = 0$  veut dire que

$$\varphi(x_1 + ix_2)|_{\Gamma} = -\psi(x_1 + ikx_2)|_{\Gamma}$$

où  $\Gamma$  est l'ellipse  $x_1^2 + kx_2^2 - 1 = 0$ . La dernière condition ne peut être satisfaite pour une fonction holomorphe  $\varphi(z)$  que si

$$\int_{\Gamma} z_1^m \varphi(z) dz_1 = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Nous déterminons par la suite celles des fonctions holomorphes  $\varphi(z)$  pour lesquelles (6) est satisfaite.

Nous introduisons

$$z = \frac{\sqrt{k^-} - 1}{2\sqrt{k^-}} \zeta + \frac{\sqrt{k^-} + 1}{2\sqrt{k^-}} \frac{1}{\zeta} \tag{7}$$

transformant l'ellipse  $x_1^2 + kx_2^2 - 1 < 0$  en  $|\zeta| < 1$ . Pour  $|\zeta| = 1$  nous avons  $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ , par conséquent

$$z_1 = \frac{k+1}{2} z + \frac{1-k}{2} \bar{z} = \frac{1-\sqrt{k^-}}{2} \zeta + \frac{1+\sqrt{k^-}}{2} \frac{1}{\zeta} \text{ si } |\zeta| = 1. \tag{8}$$

Si nous effectuons la transformation (7), alors la couronne  $\rho_0 < |\zeta| < 1$  se transformera en  $\Omega$ , où  $\rho_0^2 = \frac{|1-\sqrt{k^-}|}{1+\sqrt{k^-}}$ . Quand  $\zeta$  décrit le cercle  $|\zeta| = \rho_0$  et  $k < 1$ , un segment de l'axe  $Ox_2$  symétrique par rapport à l'origine des coordonnées sera décrit par  $z$  deux fois. Si au contraire  $k > 1$ , alors c'est un segment de l'axe  $Ox_1$ , symétrique par rapport à l'origine, qui sera décrit par  $z$  deux fois. Par (7)  $\varphi(z)$  sera transformé en une fonction holomorphe  $\Phi(\zeta)$  pour  $\zeta \neq 0$ . Nous avons donc

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n. \tag{9}$$

De la propriété spécifiée après (8) il résulte que

$$\Phi(\rho_0 e^{i\vartheta}) = \Phi(\rho_0 e^{i(\pi-\vartheta)}) = \Phi(-\rho_0 e^{-i\vartheta}) \text{ quand } k < 1$$

et

$$\Phi(\rho_0 e^{i\vartheta}) = \Phi(\rho_0 e^{-i\vartheta}) \text{ quand } k > 1$$

pour tout  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Il s'ensuit que

$$a_{-n} = (-1)^n \rho_0^{2n} a_n \text{ pour } k < 1 \text{ et } a_{-n} = \rho_0^{2n} a_n \text{ pour } k > 1 \tag{10}$$

Pour déterminer les coefficients  $a_n$ , nous utiliserons les égalités (6). En utilisant la formule (8) et le théorème des résidus, par l'induction complète on démontre que

$$a_{-n} = \left( \frac{1-\sqrt{k^-}}{1+\sqrt{k^-}} \right)^n a_n \quad n = 1, 2, \dots$$

En comparant ces résultats avec (10), nous obtenons  $a_{2l+1} = 0$ ,  $a_{-(2l+1)} = 0$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Les coefficients  $a_{2l}$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) restent arbitraires et

$$a_{-2l} = \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^{2l} a_{2l} \quad l = 1, 2, \dots$$

Ainsi pour  $\Phi(\zeta)$  nous pouvons choisir les fonctions

$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = \zeta^{2l} + \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^{2l} \frac{1}{\zeta^{2l}} \quad l = 1, 2, \dots,$$

leurs combinaisons linéaires finies, ainsi que les séries convergentes de la forme  $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \Phi_l$ . En effectuant successivement la transformation inverse pour les fonctions  $\Phi_0, \Phi_1, \dots$ , nous obtenons  $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots$ . A l'aide de certains calculs élémentaires nous pouvons trouver pour chaque  $\varphi_\varepsilon(z)$  sa paire  $\psi_\varepsilon(z_1)$ , pour laquelle la condition  $\varphi_\varepsilon(z)|_\Gamma + \psi_\varepsilon(z_1)|_\Gamma = 0$  est remplie.

Les fonctions

$$u(x_1, x_2) = \varphi_\varepsilon(x_1 + ix_2) + \psi_\varepsilon(x_1 + ikx_2) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

sont des solutions linéairement indépendantes du problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_\Gamma = 0$ , ce qui démontre le théorème 1. (Nous faisons remarquer que pour les ellipses  $x_1^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$   $a \neq 1$  la démonstration a lieu de façon analogue.)

*Démonstration du théorème 2.* Ici aussi nous pouvons supposer que  $k \neq 1$ , car pour  $k = 1$  le théorème résulte de [3]. Nous prouvons que dans le cas des ellipses  $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2 < 0$  qui diffèrent des ellipses  $x_1^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$ , le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_\Gamma = 0$  n'a que la solution  $u = 0$ .

Nous transformons l'ellipse  $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2 < 0$  en disque  $|\zeta| < 1$  par

$$z = \frac{a+b}{2} \zeta + \frac{a-b}{2} \frac{1}{\zeta}, \quad (7')$$

Ainsi  $\varphi(z)$  se transforme en une fonction de la forme (9). Sur le cercle  $|\zeta| = 1$  nous avons

$$z_1 = \frac{a+bk}{2} \zeta + \frac{a-bk}{2} \frac{1}{\zeta} \quad |\zeta| = 1. \quad (8')$$

Comme dans le cas précédent il existe un nombre positif  $\rho_0^2 = \frac{|a-b|}{a+b}$  de façon que la couronne  $\rho_0 \leq |\zeta| < 1$  se transforme en notre ellipse. Nous rencontrons des propriétés analogues à celles de la démonstration du théorème 1 et il en résulte que

$$\Phi(\rho_0 e^{i\theta}) = \Phi(-\rho_0 e^{-i\theta}) \text{ si } a < b \text{ et } \Phi(\rho_0 e^{-i\theta}) = \Phi(\rho_0 e^{i\theta}) \text{ si } a > b.$$

Nous en obtenons pour les coefficients de  $\Phi(\zeta)$  les égalités suivantes

$$a_{-n} = (-1)^n \rho_0^{2n} a_n \text{ si } a < b \text{ et } a_{-n} = \rho_0^{2n} a_n \text{ si } a > b. \quad (10')$$

En développant  $\Phi(\zeta)$  en série ainsi que des égalités (6) il s'ensuit par induction complète

$$a_{-n} = \left( \frac{a-bk}{a+bk} \right)^n a_n.$$

En comparant ces résultats avec (10') nous obtenons

$$\left(\frac{a-bk}{a+bk}\right)^n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \text{ si } a < b \text{ et } \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{a-bk}{a+bk}\right)^n \text{ si } a < b,$$

où  $a_n = 0, a_{-n} = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Nous considérons le cas  $a > b$ . Si  $n$  est impair, les égalités ci-dessus se remplissent alors et seulement alors si

$$\frac{a-bk}{a+bk} = \frac{a-b}{a+b},$$

et  $n$  étant pair, alors et seulement alors, si

$$\left(\frac{a-bk}{a+bk}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

La première égalité n'est pas vraie si  $k \neq 1$ , c'est-à-dire  $a_{2n-1} = 0, a_{-2n-1} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Il résulte de la seconde égalité que  $a^2 = kb^2$  et l'ellipse  $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2 < 0$  se réduit à  $x_1^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$ . Or nous avons exclu ce cas, donc  $a_{2n} = 0, a_{-2n} = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ainsi seul  $a_0$  reste arbitraire. Si  $\varphi(z) = a_0$ , l'on obtient facilement que  $\psi(z_1) = -a_0$  et  $u(x_1, x_2) = 0$ , ce qui démontre le théorème 2 au cas  $a > b$ .

Le cas  $a < b$  est traité de manière analogue et si  $a = b$ , alors nous obtenons le même résultat sans transformer le cercle.

*Démonstration du théorème 3.* Nous voulons résoudre le problème

$$Lu = h(z) \text{ dans } \Omega, \quad u|_{\Gamma} = 0 \tag{11}$$

quand  $\Omega$  est l'intérieur du cercle  $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  et  $h(z)$  est une fonction holomorphe, de carré sommable dans  $\Omega$ .  $h(z)$  étant holomorphe, le développement

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad |z| < 1$$

aura lieu. Pour  $h(z) = z^n$  la solution du problème (11) sera

$$u_n(x_1, x_2) = \frac{1}{2(k+1)(n+1)} (x_1^2 + x_2^2 - 1)z^n$$

(il n'y a pas d'autre solution, car le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega, u|_{\Gamma} = 0$  n'a que la solution banale). Nous construisons la fonction

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^n. \tag{12}$$

Il est évident que dans le disque  $|z| < 1$   $u(x_1, x_2)$  satisfait à l'équation  $Lu = h(z)$  et que  $u|_{\Gamma} = 0$ . Ainsi le théorème 3 est démontré.

*Observation 1.* Comme il a été indiqué au début, le problème de Dirichlet pour les systèmes de la forme (4) n'est pas de type noethérien. Toutefois dans le cas du disque  $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$  les espaces nuls  $N_L$  et  $N_{L^*}$  ne contiennent que  $u = 0$ . Ceci veut dire que  $R_L$  n'est pas fermé dans  $L_2(\Omega)$ , mais que la fermeture de  $R_L$  dans  $L_2(\Omega)$  coïncide avec  $L_2(\Omega)$ . La question se pose de savoir quelles sont les fonctions de  $L_2(\Omega)$  appartenant à  $R_L$  et quelles sont celles qui ne lui appartiennent pas. Nous n'avons pas réussi à répondre à cette question, mais nous savons que

les fonctions holomorphes de  $L_2(\Omega)$  appartiennent à  $R_L$  (Théorème 3) et qu'il existe des fonctions  $f(x_1, x_2) \in C^\infty(\Gamma)$  pour lesquelles le problème à la limite  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_\Gamma = f(x_1, x_2)$  n'a point de solution.

*Observation 2.* Si nous voulons déterminer les domaines  $\Omega$  pour lesquels le problème homogène  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_\Gamma = 0$  a au moins une solution non-banale, alors nous aboutissons au problème suivant :

Quels sont les domaines  $\Omega$  du plan  $x_1Ox_2$  dans lesquels il y a des fonctions holomorphes  $\varphi(z)$  et  $\psi(z_1)$ , respectivement selon les variables  $z = x_1 + ix_2$  et  $z_1 = x_1 + ikx_2$  ( $k = 0, k = 1$ ), fonctions différant d'une constante, continues dans  $\Omega$ , de sorte que  $\varphi(z)|_\Gamma = -\psi(z_1)|_\Gamma$ , où  $\Gamma$  représente la frontière  $d'\Omega$ . Nous savons seulement que les ellipses  $x^2 + kx_2^2 - a^2 < 0$  sont de pareils domaines.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1968)

#### BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. Bitzadze, *O jedinstvennosti zadači Dirichlet dlja elliptičeskich uravnenij s častnymi proizvodnymi*. „Uspechi Mat. Nauk”, III, vyp. 6. (1948), p. 211—212.
2. P. Szilágyi, *Sur les formes canoniques pour systèmes elliptiques de deuxième ordre à coefficients constants*. „Studia Univ. Babeş-Bolyai” Cluj, XIII (1968), Ser. Math. Phys., fasc. 2, p. 35—44.
3. Nguyen Thía Hơp, *O normalnoj razrešimosti zadači Dirichlet dlja odnoj elliptičeskoj sistemy. Differencialnyje uravnenija*, II, no. 2, (1966), p. 214—225.

#### PROBLEME DIRICHLET NENOETHERIENE

(Rezumat)

În lucrarea [1] s-a arătat că orice sistem de forma (1) cu coeficienți constanți pentru care problema lui Dirichlet nu este de tip Noether poate fi transformat prin transformări simple în sisteme de forma (3) sau (4) cu constanta  $k$  pozitivă. În lucrarea de față se studiază problema lui Dirichlet pentru sistemele de forma (3) și (4). Rezultatele lucrării sînt conținute în teoremele 1—3.

#### НЕНЁТЕРОВЫЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(Резюме)

В работе [2] автор показал, что любая система вида (1) с постоянными коэффициентами, для которой задача Дирихле не является типа Нётера, можно преобразовать посредством простых трансформаций в системы вида (3) или (4) с положительной постоянной  $k$ . В настоящей статье изучается задача Дирихле для систем вида (3) и (4). Результаты работы содержатся в теоремах 1—3.



# ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A POLINOAMELOR LUI BERNSTEIN

de

D. D. STANCU

1. Se știe că polinoamele lui Bernstein, care în cazul unei funcții  $f(x)$  și a intervalului  $[0, 1]$  se scriu

$$B_m(f; x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right), \quad (1)$$

cu

$$p_{m,k}(x) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \quad (2)$$

au o importanță deosebit de mare în teoria aproximării funcțiilor, deoarece cu ajutorul lor se poate da o demonstrație simplă și constructivă faimoasei teoreme a lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcțiilor continue prin polinoame algebrice. Afară de aceasta, ele se bucură de proprietăți remarcabile, care au fost studiate cu mult interes de o mulțime de matematicieni.

După cum se observă imediat, polinomul (1) coincide cu funcția  $f(x)$  la capetele intervalului  $I = [0, 1]$ , pe care se află distribuite nodurile  $\frac{k}{m}$ . Deci avem

$$B_m(f; 0) = f(0), \quad B_m(f; 1) = f(1). \quad (3)$$

Din această cauză restul în formula de aproximare

$$f(x) = B_m(f; x) + R_m(f; x), \quad (4)$$

care se știe că se exprimă (a se vedea [7]) sub forma

$$R_m(f; x) = -\frac{x(1-x)}{m} \sum_{k=0}^{m-1} p_{m-1,k}(x) \left[ x, \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}; f(t) \right], \quad (5)$$

unde prin [...] s-a indicat diferența divizată, pe punctele puse în evidență, a funcției  $f$ , conține ca factor produsul  $x(1-x)$ .

Dacă, în particular, avem  $f \in C^2 [0, 1]$ , atunci are loc formula simplă

$$R_m(f; x) = -\frac{x(1-x)}{2m} f''(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \quad (5')$$

2. Avînd în vedere că, spre deosebire de cazul polinomului de interpolare al lui Lagrange, nodurile  $\frac{k}{m}$  nu contribuie la obținerea expresiilor polinoamelor  $p_{m,k}(x)$  și că inițial Bernstein [1] a obținut aceste polinoame plecînd de la distribuția binomială, presupunînd că avem o variabilă aleatoare discretă care ia valoarea  $f\left(\frac{k}{m}\right)$  cu probabilitatea  $p_{m,k}(x)$ , pentru care a calculat apoi valoarea medie, ne-am gîndit să alegem într-un alt mod — mai flexibil — nodurile, astfel ca atunci cînd  $m$  tinde la infinit distanța dintre două noduri consecutive și distanțele de la 0 la primul nod, precum și de la ultimul nod la 1, să tindă toate la zero.

Polinoamele pe care le considerăm în această lucrare sînt următoarele

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right), \quad (6)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sînt numere reale, independente de  $m$ , supuse condiției  $0 \leq \alpha \leq \beta$ .

Se observă că polinoamele lui Bernstein se obțin de aici pentru  $\alpha = \beta = 0$ . Polinomul (6) folosește nodurile echidistante

$$x_0 = \frac{\alpha}{m+\beta}, \quad x_1 = x_0 + h, \quad \dots, \quad x_{m-1} = x_0 + (m-1)h, \quad x_m = x_0 + mh = 1 - \frac{\beta-\alpha}{m+\beta}, \quad (7)$$

unde  $h = 1/(m+\beta)$ .

De remarcat că polinoamele (6) se pot obține prin aceleași considerente probabilistice care l-au condus pe Bernstein în anul 1912 [1] la polinoamele (1).

3. Dacă parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  se aleg astfel încît să avem  $\alpha \neq 0$  și  $\beta \neq \alpha$  atunci polinomul (6) nu va coincide cu funcția  $f(x)$  pe nici unul dintre nodurile (7). Un exemplu de acest fel este polinomul

$$P_m^{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}(f; x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{2k+1}{2m+2}\right) \quad (8)$$

În acest caz, desigur, restul formulei de aproximare corespunzătoare lui (4) va avea o altă structură decît cea de la (5).

Dacă  $\alpha=0$  și  $\beta \neq 0$  atunci primul nod de la (7) va fi  $x_0=0$ , iar ultimul va fi  $x_m = \frac{m}{m+\beta}$  și polinomul (6) va coincide cu funcția  $f$  doar la extremitatea stîngă a intervalului  $I$ . Un exemplu de acest fel este

$$P_m^{(0,1)}(f; x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m+1}\right). \quad (9)$$

Dacă  $\alpha = \beta \neq 0$  atunci avem  $x_0 = \frac{\alpha}{m+\alpha}$ ,  $x_m = 1$  și polinomul (6) coincide cu funcția  $f$  doar la extremitatea dreaptă a intervalului  $I$ .

Este evident că pentru ca polinomul (7) să coincidă cu  $f$  la ambele extremități ale lui  $I$  trebuie să luăm  $\alpha = \beta = 0$ .

În consecință parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  se pot alege astfel ca în formula de aproximație

$$f(x) = P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) + R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) \quad (10)$$

restul să se anuleze pe intervalul  $I$  numai în cazul cînd pe acest interval avem  $f(x) \equiv 0$ , sau cînd  $f(x)$  este o constantă oarecare, sau cînd  $f(x)$  este un polinom oarecare de gradul întîi (cazul operatorului de la (1)).

4. În continuare vom studia unele proprietăți importante ale polinoamelor (6). Mai întîi vom demonstra

TEOREMA 1. Polinomul  $P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)$  se poate reprezenta sub forma

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \Delta_h^j f(x_0) x^j, \quad (11)$$

unde

$$h = \frac{1}{m + \beta}, \quad x_0 = \frac{\alpha}{m + \beta}, \quad (12)$$

iar  $\Delta_h^j f(x_0)$  este diferența finită de ordinul  $j$ , cu pasul  $h$  și cu punctul de plecare  $x_0$ .

Demonstrație. Ținînd seama de (6) și (2) putem scrie

$$\begin{aligned} P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k f\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} x^i = \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} x^{k+i} = \sum_{j=0}^m A_{m,j}(f) x^j. \end{aligned}$$

Rămîne să găsim pe  $A_{m,j}(f)$ . Se observă că termenii care conțin ca factor pe  $x^j$  se obțin dînd perechii de indici  $(k, i)$  următorul șir de valori:  $(j, 0)$ ,  $(j-1, 1)$ , ...,  $(j-v, v)$ , ...,  $(1, j-1)$ ,  $(0, j)$ . Făcînd apoi pe  $j$  să ia valorile  $0, 1, \dots, m$ , obținem

$$\begin{aligned} P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \sum_{j=0}^m \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{m}{j-v} \binom{m-j+v}{v} x^j f\left(\frac{j-v+\alpha}{m+\beta}\right) = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{m}{j} \binom{j}{v} x^j f\left(\frac{j-v+\alpha}{m+\beta}\right), \end{aligned}$$

deoarece

$$\binom{m}{j-v} \binom{m-j+v}{v} = \binom{m}{j} \binom{j}{v}.$$

Deci am găsit că

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left[ \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{j}{v} f\left(\frac{j-v+\alpha}{m+\beta}\right) \right] x^j.$$

Dar

$$A_{m,j}(f) = \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{j}{v} f\left(\frac{j-v+\alpha}{m+\beta}\right) = \Delta_{\frac{1}{m+\beta}}^j f\left(\frac{\alpha}{m+\beta}\right)$$

și am ajuns la formula (11) pe care ne-am propus s-o demonstrăm.

În cazul particular  $\alpha = \beta = 0$  (11) se reduce la formula cunoscută

$$B_m(f; x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \Delta_{\frac{1}{m}}^j f(0) x^j.$$

Formula (11) este utilă la determinarea polinomului (6) când  $f(x) = x^r$  ( $r = 0, 1, \dots$ ). Astfel dacă  $f(x) = 1$ ,  $x$ ,  $x^2$  se obține imediat

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(1; x) = 1, \quad P_m^{(\alpha, \beta)}(t; x) = x + \frac{\alpha - \beta x}{m + \beta},$$

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(t^2; x) = x^2 + \frac{mx(1-x) + (x - \beta x)(2mx + \beta x + \alpha)}{(m + \beta)^2}. \quad (13)$$

5. Dacă se ține seama că între diferența divizată relativă la o funcție  $f(x)$  și la nodurile echidistante  $a + jh$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) și diferența finită corespunzătoare există relația

$$[a, a + h, \dots, a + nh; f] = \frac{\Delta_h^n f(a)}{n! h^n},$$

putem scrie

$$\Delta_h^j f(x_0) = \frac{j!}{(m + \beta)^j} \left[ \frac{\alpha}{m + \beta}, \frac{\alpha + 1}{m + \beta}, \dots, \frac{\alpha + j}{m + \beta}; f \right].$$

În consecință are loc

**COROLARIU 1.** Polinomul (6) se poate exprima cu ajutorul diferențelor divizate prin formula

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = f\left(\frac{\alpha}{m + \beta}\right) + \sum_{j=1}^m m^{[j]} \left[ \frac{\alpha}{m + \beta}, \frac{\alpha + 1}{m + \beta}, \dots, \frac{\alpha + j}{m + \beta}; f \right] \left(\frac{x}{m + \beta}\right)^j, \quad (14)$$

unde  $m^{[j]} = m(m - 1) \dots (m - j + 1)$ .

6. Având în vedere că  $P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)$ , care este un operator liniar și pozitiv pe intervalul  $[0, 1]$  se bucură, în conformitate cu formulele (13), de proprietatea că atunci când  $m \rightarrow \infty$  el tinde uniform, pe intervalul  $[0, 1]$ , către 1 dacă  $f(t) = 1$ , către  $x$  dacă  $f(t) = t$  și către  $x^2$  dacă  $f(t) = t^2$ , putem aplica teorema cunoscută a lui Bohman Korovkin și se ajunge la

**TEOREMA 2.** Dacă  $f \in C[0, 1]$  atunci șirul de polinoame  $\{P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)\}$  converge uniform către funcția  $f(x)$  pe intervalul  $[0, 1]$ .

7. În continuare să ne ocupăm de evaluarea ordinului de aproximație a funcției  $f(x)$  prin polinomul (6). Vom utiliza în acest scop modulul de continuitate

$$\omega(\delta) = \omega(f; \delta) = \sup |f(x'') - f(x')|,$$

unde  $\delta$  este un număr pozitiv, iar  $x'$  și  $x''$  sînt puncte din  $[0, 1]$  astfel ca  $|x'' - x'| \leq \delta$ .

Se știe că deoarece  $f \in C[0, 1]$  avem

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$$

și

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta) \quad (\lambda > 0). \quad (15)$$

Din definiția lui  $\omega(\delta)$  rezultă că avem

$$|f(x'') - f(x')| \leq \omega(|x'' - x'|). \quad (16)$$

Vom demonstra acum că are loc

**TEOREMA 3.** Fie  $f \in C[0, 1]$ , iar  $\alpha$  și  $\beta$  două numere reale astfel încât  $0 \leq \alpha \leq \beta$ .  
Dacă

$$\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ și } \beta \in [\alpha, 2\alpha] \text{ sau } \alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ și } \beta \in [4\alpha^2, 2\alpha] \quad (17)$$

atunci are loc inegalitatea

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+4\alpha^2}}\right). \quad (18)$$

Dacă însă

$$\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ și } \beta \in [\alpha, 4\alpha^2] \text{ sau } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ și } \beta \in [\alpha, 2\alpha] \quad (19)$$

atunci avem

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \left(1 + \frac{4\alpha^2 + 1}{2\beta + 2}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+4\alpha^2}}\right). \quad (20)$$

In cazul că

$$\beta \in [0, 1] \text{ și } \alpha \in \left[0, \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}\right] \quad (21)$$

avem

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+(\beta-\alpha)^2}}\right), \quad (22)$$

iar dacă

$$\beta \geq 1 \text{ și } \alpha \leq \frac{\beta}{2} \quad (23)$$

atunci are loc inegalitatea

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \left(1 + \frac{4(\beta-\alpha)^2 + 1}{2\beta + 2}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+(\beta-\alpha)^2}}\right). \quad (24)$$

*Demonstrație.* Ținând seama de pozitivitatea operatorului (6) și de prima egalitate de la (13) putem scrie succesiv

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \left| \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left[ f(x) - f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right) \right] \right| \leq \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right) \right|.$$

Dar pe baza lui (15) și (16), pentru  $\delta > 0$  avem

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{1}{\delta} \left| x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right| \delta\right) \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \left| x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right| \right) \omega(\delta).$$

În consecință

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left| x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right| \right) \omega(\delta). \quad (25)$$

Dar pe baza inegalității lui Cauchy-Buniakovski avem

$$\sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left| x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right| \leq \left[ \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Deoarece

$$\sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^m k p_{m,k}(x) = mx, \quad \sum_{k=0}^m k^2 p_{m,k}(x) = m^2 x^2 + mx(1-x),$$

obținem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right)^2 &= x^2 - \frac{2x}{m+\beta} (mx + \alpha) + \frac{1}{(m+\beta)^2} [m^2 x^2 + mx(1-x) + \\ &+ 2\alpha mx + \alpha^2] = \frac{mx(1-x) + (\beta x - \alpha)^2}{(m+\beta)^2}. \end{aligned}$$

În consecință

$$\sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left| x - \frac{k+\alpha}{m+\beta} \right| \leq \frac{1}{m+\beta} \sqrt{mx(1-x) + (\beta x - \alpha)^2}.$$

Se observă că pe intervalul  $[0,1]$  avem

$$mx(1-x) + (\beta x - \alpha)^2 \leq \frac{m}{4} + \max \{ \alpha^2, (\beta - \alpha)^2 \}.$$

Notînd

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{m + 4 \max \{ \alpha^2, (\beta - \alpha)^2 \}}{4(m + \beta)^2},$$

inegalitatea (25) ne conduce la următoarea

$$|f(x) - P_m^{(\alpha,\beta)}(f; x)| \leq \left( 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{M_{\alpha,\beta}} \right) \omega(\delta). \quad (26)$$

Presupunînd că

$$\max \{ \alpha^2, (\beta - \alpha)^2 \} = \alpha^2, \quad (27)$$

ceea ce înseamnă că  $\alpha^2 \geq (\beta - \alpha)^2$ , adică

$$\beta \leq 2\alpha, \quad (28)$$

avem

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{m + 4\alpha^2}{4(m + \beta)^2}.$$

În acest caz, dacă alegem  $\delta = 1/\sqrt{m + 4\alpha^2}$ , inegalitatea (26) devine

$$|f(x) - P_m^{(\alpha,\beta)}(f; x)| \leq 1 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{m + 4\alpha^2}{m + \beta} \right) \omega \left( \frac{1}{\sqrt{m + 4\alpha^2}} \right). \quad (29)$$

Fie

$$a_m = \frac{m + 4x^2}{m + \beta}.$$

Deoarece

$$a_{m+1} - a_m = \frac{\beta - 4x^2}{(m + \beta)(m + 1 + \beta)},$$

în cazul  $\beta \geq 4x^2$  avem  $a_m \leq 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), iar în cazul  $\beta \leq 4x^2$  avem  $a_1 \geq a_m$ , deci

$$a_m \leq \frac{4x^2 + 1}{\beta + 1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

În consecință, dacă avem

$$0 \leq x \leq \beta, \quad \beta \leq 2x, \quad \beta \geq 4x^2 \quad (30)$$

din (29) obținem inegalitatea (18), iar dacă

$$0 \leq x \leq \beta, \quad \beta \leq 2x, \quad \beta \leq 4x^2, \quad (31)$$

inegalitatea (25) ne conduce la inegalitatea (20).

Să analizăm puțin sistemele de inegalități (30) și (31). Se observă că avem o soluție (de fapt o familie de soluții) pentru (30) dacă

$$0 \leq x \leq 4x^2 \leq 2x, \quad 4x^2 \leq \beta \leq 2x,$$

adică dacă

$$x \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \text{ și } \beta \in [4x^2, 2x].$$

De asemenea mai se obține o soluție a lui (30) dacă

$$4x^2 \leq x \leq 2x, \quad x \leq \beta \leq 2x,$$

adică dacă

$$x \in \left[ 0, \frac{1}{4} \right] \text{ și } \beta \in [x, 2x].$$

Cu acestea am demonstrat complet inegalitatea (18).

O soluție a sistemului de inegalități (31) se obține dacă

$$0 \leq x \leq 4x^2 \leq 2x \quad \text{și} \quad x \leq \beta \leq 4x^2,$$

adică dacă

$$x \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \text{ și } \beta \in [x, 4x^2].$$

O altă soluție se obține dacă

$$0 \leq \alpha \leq 2\alpha \leq 4\alpha^2 \quad \text{și} \quad \alpha \leq \beta \leq 2\alpha,$$

adică dacă

$$\alpha \geq \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \beta \in [\alpha, 2\alpha].$$

În felul acesta am arătat care sînt condițiile în care e valabilă și inegalitatea (20).

Să considerăm cel de al doilea caz posibil, alături de cel de la (27) :

$$\max \{ \alpha^2, (\beta - \alpha)^2 \} = (\beta - \alpha)^2,$$

care are loc în cazul  $\beta \geq 2\alpha$ . În acest caz avem

$$M_{\alpha, \beta} = \frac{m + 4(\beta - \alpha)^2}{4(m + \beta)^2}.$$

Ținînd seama de aceasta, prin alegerea

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{m + 4(\beta - \alpha)^2}},$$

inegalitatea (26) devine

$$|f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m + 4(\beta - \alpha)^2}{m + \beta}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m + 4(\beta - \alpha)^2}}\right). \quad (32)$$

Fie

$$b_m = \frac{m + 4(\beta - \alpha)^2}{m + \beta}.$$

Deoarece

$$b_{m+1} - b_m = \frac{\beta - 4(\beta - \alpha)^2}{(m + \beta)(m + 1 + \beta)},$$

se observă că dacă  $\beta - 4(\beta - \alpha)^2 \geq 0$ , adică  $\alpha \geq \beta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta}$  atunci  $b_m \leq 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) și (32) ne conduce la inegalitatea (22). Dacă însă  $\beta - 4(\beta - \alpha)^2 \leq 0$ , deci dacă  $\alpha \leq \beta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta}$ , atunci  $b_{m+1} \geq b_m$  și avem

$$b_m \leq b_1 = \frac{4(\beta - \alpha)^2 + 1}{\beta + 1} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

iar (32) ne conduce la inegalitatea (24).

În definitiv inegalitatea (22) are loc dacă

$$0 \leq \alpha \leq \beta, \quad \beta \geq 2\alpha, \quad \alpha \geq \beta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta}.$$

Se verifică cu ușurință că acestea sînt satisfăcute dacă parametrii  $\beta$  și  $\alpha$  se aleg conform prescripției de la (21).



Apoi, inegalitatea (24) e valabilă dacă

$$0 \leq \alpha \leq \beta, \quad \beta \geq 2\alpha \quad \text{și} \quad \alpha \leq \beta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta},$$

care se verifică pentru  $\beta \geq 1$  și  $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$ .

Cu acestea teorema 3 este complet demonstrată.

**Cazuri particulare.** Mai întâi trebuie remarcat că dacă în (17) — (18) sau (21) — (22) se alege  $\alpha = \beta = 0$  atunci se obține inegalitatea lui T. Popoviciu [3] pentru polinoamele lui Bernstein.

Dacă în (17) alegem  $\alpha = \frac{1}{2}$  atunci avem  $\beta = 1$  și inegalitatea (18) devine

$$\left| f(x) - P_m^{(\frac{1}{2}, 1)}(f; x) \right| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right).$$

Polinomul  $P_m^{(\frac{1}{2}, 1)}(f; x)$  folosește  $m$  noduri echidistante, cu pasul  $h = \frac{1}{m+1}$  și are primul nod la distanța  $\frac{1}{2(m+1)}$  de punctul 0, iar ultimul nod la aceeași depărtare de punctul 1.

Dacă  $\alpha = \frac{1}{4}$  și  $\beta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  atunci din (18) obținem

$$\left| f(x) - P_m^{(\frac{1}{4}, \beta)}(f; x) \right| \leq 3\omega\left(\frac{1}{\sqrt{4m+1}}\right).$$

Dacă la (23) alegem  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$  primim

$$\left| f(x) - P_m^{(1, 2)}(f; x) \right| \leq \frac{11}{6} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right).$$

**8.** Să ne ocupăm acum de evaluarea restului formulei de aproximare (10). Vom aplica metoda pe care am folosit-o în [7] la găsirea restului formulei de aproximare prin polinoamele clasice ale lui Bernstein.

Are loc

**TEOREMA 4.** Dacă  $f(x)$  are pe  $[0, 1]$  diferențele divizate de ordinul unu și doi finite, restul formulei de aproximare (10) se poate exprima prin formula

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] \\ &- \frac{m x (1 - x)}{(m + \beta)^2} \sum_{k=0}^{m-1} \hat{p}_{m-1, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}, \frac{k + \alpha + 1}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

*Demonstrație.* Se observă că putem scrie

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left[ f(x) - f\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left( x - \frac{k + \alpha}{m + \beta} \right) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned}$$

Deoarece

$$(m + \beta)x - k - \alpha = (m - k)x + \beta x - \alpha - (1 - x)k,$$

putem scrie în continuare

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] \\ &+ \frac{x}{m + \beta} \sum_{k=0}^{m-1} (m - k) \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] \\ &- \frac{1 - x}{m + \beta} \sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned}$$

Ținând seama că

$$(m - k) \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k}, \quad k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1},$$

obținem apoi

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] + \\ &+ \frac{mx(1 - x)}{m + \beta} \sum_{k=0}^{m-1} \hat{p}_{m-1, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] - \\ &- \frac{m(1 - x)}{m + \beta} \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} x^k (1 - x)^{m-k} \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned}$$

Făcând în ultima sumă schimbarea  $k = i + 1$ , primim

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} x^k (1 - x)^{m-k} \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} x^{i+1} (1 - x)^{m-1-i} \left[ x, \frac{i + 1 + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned}$$

În consecință avem

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} \sum_{k=0}^m \hat{p}_{m, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] + \\ &+ \frac{mx(1 - x)}{m + \beta} \sum_{k=0}^{m-1} \hat{p}_{m-1, k}(x) \left[ x, \frac{k + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right] - \\ &- \frac{mx(1 - x)}{m + \beta} \sum_{k=0}^{m-1} \hat{p}_{m-1, k}(x) \left[ x, \frac{k + 1 + \alpha}{m + \beta}; f(t) \right]. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} & \left[ x, \frac{k+1+\alpha}{m+\beta}; f(t) \right] - \left[ x, \frac{k+1+\alpha}{m+\beta}; f(t) \right] = \\ & = -\frac{1}{m+\beta} \left[ x, \frac{k+\alpha}{m+\beta}, \frac{k+1+\alpha}{m+\beta}; f(t) \right], \end{aligned}$$

obținem tocmai formula (33) pe care voiam s-o demonstrăm.

Din teorema precedentă rezultă următorul

**COROLAR.** Dacă  $f \in C^2[0,1]$  atunci restul formulei de aproximare (10) se poate pune sub forma

$$R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} f'(\xi_1) - \frac{mx(1-x)}{2(m + \beta)^2} f''(\xi_2), \quad (34)$$

unde  $0 < \xi_1, \xi_2 < 1$ .

Într-adevăr, se observă că operatorul

$$r_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left[ x, \frac{k+\alpha}{m+\beta}; f(t) \right]$$

se anulează dacă  $f(x) = 1$  și ia valoarea 1 dacă  $f(x) = x$ . Apoi operatorul

$$\tilde{r}_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{p}_{m-1,k}(x) \left[ x, \frac{k+\alpha}{m+\beta}, \frac{k+1+\alpha}{m+\beta}; f(t) \right]$$

se anulează dacă  $f(x) = 1$  sau  $x$  și ia valoarea 1 dacă  $f(x) = x^2$ .

Pe de altă parte avem  $r_m^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x) \neq 0$  dacă  $\varphi(x)$  este convexă de ordinul zero pe  $[0,1]$ , iar  $\tilde{r}_m^{(\alpha, \beta)}(\psi; x) \neq 0$  dacă  $\psi(x)$  este convexă de ordinul întâi pe  $[0, 1]$ . Aplicând o teoremă a lui T. Popoviciu [4] putem trage concluzia că

$$r_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = f'(\xi_1), \quad \tilde{r}_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \frac{1}{2} f''(\xi_2),$$

unde  $0 < \xi_1, \xi_2 < 1$ . Rezultă că are loc formula (34).

Formula corespunzătoare cazului  $\alpha = \beta = 0$  a fost dată anterior de noi în [5], [6].

**9.** Cu ajutorul formulei de aproximare (10), cu restul sub forma (33), se poate construi imediat o formulă de cuadratură corespunzătoare funcției  $f$  și intervalului  $[0,1]$ . Aceasta va fi

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right) + R_m^{(\alpha, \beta)}(f),$$

unde

$$R_m^{(\alpha, \beta)}(f) = \frac{\beta - 2\alpha}{2(m + \beta)} f'(\eta) - \frac{m}{6(m + \beta)^2} f''(\xi).$$

Se observă că pentru  $\beta = 2\alpha$  avem

$$R_m^{(\alpha, 2\alpha)}(f) = -\frac{m}{6(m+2\alpha)^2} f''(\zeta).$$

Restul corespunzător cazului  $\alpha = 0$  a fost dat în lucrarea [6].

**10.** În continuare vom căuta să dăm o evaluare asimptotică, de tip Voronovskaia (a se vedea, de exemplu, [2]) pentru  $R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x)$ .

**TEOREMA 5.** *Dacă  $f(x)$  e mărginită pe  $[0, 1]$ , iar pe un anumit punct  $x \in [0, 1]$  există derivata  $f''(x)$ , atunci are loc formula*

$$\begin{aligned} R_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= f(x) - P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \\ &= \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} f'(x) - \frac{m x(1-x)}{2(m + \beta)^2} f''(x) + \frac{\varepsilon_m^{(\alpha, \beta)}(x)}{m}, \end{aligned} \quad (35)$$

unde  $\varepsilon_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  tinde la zero când  $m$  tinde la infinit.

*Demonstrație.* Fie  $y \in [0, 1]$ . Se știe că dacă  $f(y)$  are derivată secundă pe punctul  $x \in [0, 1]$  atunci există o funcție  $g(y)$  definită pe  $[0, 1]$  astfel că pentru  $y \rightarrow x$  să avem  $g(y) \rightarrow 0$ , iar  $f(y)$  să se poată dezvolta după formula lui Taylor

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)^2 \left[ \frac{f''(x)}{2} + g(y) \right].$$

Dacă înlocuim aici  $y = \frac{k + \alpha}{m + \beta}$ , înmulțim cu  $p_{m,k}(x)$  și apoi însumăm de la  $k = 0$ , la  $k = m$  obținem

$$\begin{aligned} P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) &= f(x) + f'(x) \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right) + \\ &+ \frac{f''(x)}{2} \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right)^2 + \delta_m^{(\alpha, \beta)}(x), \end{aligned}$$

unde

$$\delta_m^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right)^2 g \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} \right). \quad (36)$$

Ținând seama de formulele (13) obținem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right) &= \frac{\alpha - \beta x}{m + \beta}, \\ \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) \left( \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right)^2 &= \frac{m x(1-x) + (\alpha - \beta x)^2}{(m + \beta)^2}. \end{aligned}$$

În consecință

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(f; x) = f(x) - \frac{\beta x - \alpha}{m + \beta} f'(x) + \frac{m x(1-x) + (\alpha - \beta x)^2}{2(m + \beta)^2} f''(x) + \rho_m^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (37)$$

Avînd în vedere că  $g(y) \rightarrow 0$  cînd  $y \rightarrow x$ , înseamnă că dîndu-se un număr  $\varepsilon > 0$  se poate găsi un număr  $\delta > 0$  astfel încît să avem  $|g(y)| < \varepsilon$  cînd  $|y - x| \leq \delta$ . Luînd  $y = \frac{k + \alpha}{m + \beta}$  trebuie să avem

$$\left| g\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad \left| \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right| \leq \delta. \quad (38)$$

Din (36) se deduce

$$|\rho_m^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq \sum_{k=0}^m \left(\frac{k + \alpha}{m + \beta} - x\right)^2 p_{m, k}(x) \left| g\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \right|.$$

Să descompunem suma care figurează aici în două, prima fiind extinsă la mulțimea  $I_m$  care întreține inegalitatea  $\left| \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right| \leq \delta$  și a doua extinsă la mulțimea  $J_m$  care întreține inegalitatea  $\left| \frac{k + \alpha}{m + \beta} - x \right| > \delta$ ; obținem

$$\begin{aligned} |\rho_m^{(\alpha, \beta)}(x)| &\leq \sum_{k \in I_m} \left(\frac{k + \alpha}{m + \beta} - x\right)^2 p_{m, k}(x) \left| g\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \right| + \\ &+ \sum_{k \in J_m} \left(\frac{k + \alpha}{m + \beta} - x\right)^2 p_{m, k}(x) \left| g\left(\frac{k + \alpha}{m + \beta}\right) \right|. \end{aligned}$$

Ținînd seama de (38) și de faptul că pentru  $x, y \in [0, 1]$  funcția  $(y - x)^2 |g(y)|$  este mărginită, să zicem de  $M$  ( $M > 0$ ), putem scrie

$$|\rho_m^{(\alpha, \beta)}(x)| < \varepsilon \frac{mx(1-x) + (\alpha - \beta x)^2}{2(m + \beta)^2} + M \sum_{k \in J_m} p_{m, k}(x).$$

Să ținem seama că pentru  $m > N$  ( $\delta, \eta$ ), unde  $\eta > 0$ , avem

$$\sum_{k \in J_m} p_{m, k}(x) < \eta$$

și

$$mx(1-x) + (\alpha - \beta x)^2 \leq \frac{m}{4} + m\alpha x \{\alpha^2, (\beta - \alpha)^2\}.$$

Alegînd în mod convenabil pe  $\eta$  și pe  $m$  suficient de mare vom avea

$$|\rho_m^{(\alpha, \beta)}(x)| < \frac{\varepsilon}{m}. \quad (39)$$

Deoarece

$$\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2(m + \beta)^2} = O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

relațiile (37) și (39) ne conduc la formula (35) pe care voiam s-o dovedim.

Pentru  $\alpha = \beta = 0$  formula (35) se reduce la formula binecunoscută a lui Voronovskaia.

Formula (35) ne dă o indicație importantă asupra mărimii erorii care se comite cînd funcția  $f(x)$  se aproximează prin polinomul (6). Totuși expresia de la (34) a restului formulei (10) ne dă o evaluare mai precisă și utilă a acestei erori.

(Intrat în redacție la 8 octombrie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Bernstein, S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités*. Commun. Soc. Math. Kharkov (2) **13**, 1–2 (1912–1913).
2. Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.
3. Popoviciu, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica **10**, 49–54 (1935).
4. Popoviciu, T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica **1** (24), 95–142 (1959).
5. Stancu, D. D., *On the remainder in the approximation formulae by Bernstein polynomials*. Notices, Amer. Math. Soc. **9**, 26 (1962).
6. Stancu, D. D., *Evaluation of the remainder term in approximation formulas by Bernstein polynomials*. Math. Comput., **17**, 270–278 (1963).
7. Stancu, D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*. J. SIAM Numer. Anal., **1**, 137–163 (1964).

#### ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА

(Резюме)

В работе рассматривается многочлен типа Бернштейна (6), где  $p_{m,k}(x)$  дан в (2), а  $\alpha, \beta$  являются действительными параметрами, не зависящими от  $m$  и такими, чтобы  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . Этот многочлен характеризуется тем, что он использует одинаково отдаленные узлы  $x_k = \frac{k + \alpha}{m + \beta}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ).

Если  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ , тогда он не совпадает ни на одном узле с функцией; если  $\alpha = 0$  и  $\beta \neq 0$ , тогда он совпадает с  $f$  на  $x_0 = 0$ , в то время как для  $\alpha = \beta \neq 0$  он совпадает с  $f$  на  $x_m = 1$ . Для  $\alpha = \beta = 0$  получаем многочлен Бернштейна (1), который совпадает с  $f$  на узлах  $x_0 = 0, x_m = 1$ .

Автор доказывает, что многочлен (6) можно представить при помощи конечных разностей в вид (11). Используя отношения (13) и известную теорему Боман-Коровкина, автор выводит, что для  $f \in C[0,1]$  последовательность многочленов (6) равномерно сходится на  $[0,1]$  к  $f(x)$ . В дальнейшем дается оценка соответствующего порядка приближения, используя модуль непрерывности  $f$ . Таким образом, если  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$  и  $\beta \in [x, 2x]$ , или если  $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  и  $\beta \in [4x^2, 2x]$  то имеет место неравенство

(18); если  $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  и  $\alpha \in [x, 4x^2]$  или если  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  и  $\beta \in [x, 2x]$ , то имеет место (20); если  $\beta \in [0,1]$

и  $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}\right]$  то имеет место (22); наконец, если  $\beta \geq 1$  и  $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$  то имеет место неравенство (24).

В (33) и (34) даны выражения остатка формулы приближения (10). Работа заканчивается асимптотической оценкой остатка.

## ON A GENERALIZATION OF BERNSTEIN POLYNOMIALS

## (S u m m a r y)

One considers the polynomial of Bernstein type (6), where  $p_{m,k}(x)$  is given by (2), and  $\alpha, \beta$  are real parameters, independently on  $m$ , such that  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . This polynomial is characterized by the fact that it uses the equally spaced nodes  $x_k = \frac{k + \alpha}{m + \beta}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ). If  $\alpha \neq 0$  and  $\beta \neq 0$  then it does not coincide at any nodes with the function  $f$ ; if  $\alpha = 0$  and  $\beta \neq 0$  then it coincides with  $f$  at  $x_0 = 0$ , while if  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  then it coincides with  $f$  at  $x_m = 1$ . For  $\alpha = \beta = 0$  we obtain the Bernstein polynomial (1) which coincides with  $f$  at the nodes  $x_0 = 0, x_m = 1$ .

It is proved that the polynomial (6) can be represented, in terms of finite differences, under the form (11). Referring to the realtions (13) and to the known theorem of Bohman-Korovkin one sees that if  $f \in C[0, 1]$  then the sequence of the polynomials (6) converges uniformly to  $f$  on  $[0, 1]$ . Further is evaluated the corresponding order of approximation, by using the modulus of continuity of  $f$ . Thus,

if  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$  and  $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$ , or if  $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  and  $\beta \in [4\alpha^2, 2\alpha]$  then the inequality (18) holds;

if  $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  and  $\beta \in [\alpha, 4\alpha^2]$ , or if  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  and  $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$ , then the inequality (20) is true; if

$\beta \in (0, 1]$  and  $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}\right]$  then the inequality (22) is true; finally, if  $\beta \geq 1$  and  $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$  then the inequality (24) holds.

At (33) and (34) are given expressions for the remainder term of the approximation formula (10). The paper concludes with a theorem of Voronovskaja type, giving an asymptotic estimate (35) for the remainder term.





# ON SOLVING OPERATIONAL EQUATIONS BY AN ITERATIVE METHOD

by  
**MARTIN BALÁZS**

The convergence of the methods of tangent hyperbolas and tangent parabolas to a solution of the equation

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

where  $P(x)$  is a nonlinear operator defined in a domain of Banach space  $X$  and with value in Banach space  $Y$ , was studied by many authors. I. I. Kaazik gave an iterative method [1] defined by the recursion formula

$$x_{n+1} = x_n - (I + \lambda R_n)^{-1} [I + (\lambda + 1)R_n] \Gamma_n P(x_n) \tag{2}$$

where

$$R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \text{ and } \Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

which is dependent on a parameter  $\lambda$  and which for  $\lambda = -1$  gives the method of the tangent hyperbolas and for  $\lambda = 0$ , the method of the tangent parabolas. The convergence of these methods was proved when  $P(x)$  allows Fréchet derivatives to the third order inclusively.

In the present paper, improving the conditions imposed by Kaazik, some theorems of the convergence of the method (2) to a solution of the equation (1) are given.

**THEOREM 1.** *If in the domain of definition of the operator  $P(x)$ , there is a point  $x_0$ , so that:*

- 1° *there exists  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$  and  $\|\Gamma_0\| \leq B_0$ ;*
- 2°  *$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \tau_0$ ;*
- 3°  *$P''(x)$  satisfies the Hölder condition*

$$\|P''(x') - P''(x'')\| \leq (\alpha + 1)(\alpha + 2)L\|x' - x''\|^\alpha$$

where  $0 < \alpha \leq 1$  and  $\|P''(x)\| \leq 2K$  for any  $x', x''$ , respectively  $x$  of the sphere  $S_0$  defined by the inequality

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\epsilon_0 \tau_0}{1 - g_0(t_0 h_0)^{1+\alpha}};$$

$$4^\circ \quad |\lambda|k_0 = |\lambda|B_0K\tau_0 < 1, \quad 2k_0\varepsilon_0 = 2k_0 \frac{1 - (|\lambda| - 1)k_0}{1 - |\lambda|k_0} < 1,$$

$$t_0k_0 \leq 1, \text{ where } t_0^{1+\alpha} = \frac{1 + \alpha|2 + \lambda| + A_0 - k_0(|2\lambda + \lambda^2| - 1)}{(1 - |\lambda|k_0)^2g_0^2},$$

$$g_0 = 1 - 2k_0\varepsilon_0, \quad A_0 = \frac{L(1 - k_0)^{2+\alpha}}{B_0^2K^{1+\alpha}(1 - |\lambda|k_0)^2}$$

then equation (1) has at least a solution  $x^* \in S_0$ , which is the limit of the sequence of the successive approximations constructed by formula (2) and the rapidity of the convergence is given by the inequality

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{g_0^n(t_0k_0)^{(2+\alpha)^n-1} \varepsilon_0 \tau_0}{1 - g_0(t_0k_0)^{(1+\alpha)(2+\alpha)}}.$$

*Proof.* Since  $\|\lambda R_0\| \leq |\lambda|B_0K\tau_0 = |\lambda|k_0 < 1$ , it results that the operator  $(I + \lambda R_0)^{-1}$  exists, hence  $x_1$  can be constructed by formula (2) and

$$\|(I + \lambda R_0)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |\lambda|k_0}$$

We prove that  $x_1$  satisfies the conditions 1°–4°. From (2) for  $n = 1$  we obtain

$$\|x_1 - x\| \leq \tau_0 + \frac{k_0\tau_0}{1 - |\lambda|k_0} = \tau_0\alpha_0. \quad (3)$$

Applying the generalized Lagrange formula and using the relation (3) we have

$$\|\Gamma_\bullet P'(x_0) - \Gamma_\bullet P'(x_1)\| \leq 2k_0\varepsilon_0 < 1,$$

whence it results the existence of the operators

$$H^{-1} = \{I - \Gamma_\bullet [P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}, \quad \Gamma_1 = H^{-1}\Gamma_0 = [P'(x_1)]^{-1}$$

and the inequalities

$$\|H^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - 2k_0\varepsilon_0} \quad \text{and} \quad \|\Gamma_1\| \leq \frac{B_0}{1 - 2k_0\varepsilon_0} = B_1 (B_1 \geq B_0) \quad (4)$$

Hence the condition 1° is satisfied for  $x_1$ .

Using (2) and applying the Taylor formula to the operator  $\{\Gamma_0 P(x)$  we obtain

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{k_0^2\tau_0[2 + \lambda|(1 - |\lambda|k_0) + k_0]}{(1 - |\lambda|k_0)^2} + \frac{B_0L\tau_0^{2+\alpha}[1 - (|\lambda| - 1)k_0^{2+\alpha}]}{(1 - |\lambda|k_0)^{2+\alpha}} \quad (5)$$

Since from the condition  $2k_0\varepsilon_0 < 1$  it results that  $k_0 < 1$ , from the relation (5) we obtain

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq k_0^{1+\alpha}\tau_0 \frac{|2 + \lambda| + A_0 - k_0(|2\lambda + \lambda^2| - 1)}{(1 - |\lambda|k_0)^2},$$

whence using (4) we have

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leq k_0^{1+\alpha}\tau_0 \frac{|2 + \lambda| + A_0 - k_0(|2\lambda + \lambda^2| - 1)}{(1 - |\lambda|k_0)^2g_0} = (t_0k_0)^{1+\alpha}g_0\tau_0 = \tau_1 \leq \tau_0 \quad (6)$$

Hence  $x_1$  satisfies also the condition 2°.

From (4) and (6) we obtain

$$k_1 = B_1 M \tau_1 \leq (t_0 k_0)^{1+\alpha} k_0 \text{ hence } |\lambda| k_1 \leq |\lambda| k_0 < 1.$$

Since  $\varepsilon_1 = 1 + \frac{k_1}{1 - |\lambda| k_1} \leq 1 + \frac{k_0}{1 - |\lambda| k_0} = \varepsilon_0$  we have  $2k_1 \varepsilon_1 \leq 2k_0 \varepsilon_0 < 1$  and  $g_1 \geq g_0$ .

From the inequality  $k_1 \leq k_0$  and from (4) it results that  $A_1 \leq A_0$  and  $t_1 \leq t_0$ , hence  $t_1 k_1 \leq t_0 k_0 < 1$ . Hence the condition 4° is satisfied.

We shall prove that the sphere  $S_1$  defined by the inequality

$$\|x - x_1\| \leq \frac{\varepsilon_1 \tau_1}{1 - g_1(t_1 k_1)^{1+\alpha}}$$

is included in the sphere  $S_0$ , whence it will result that the condition 3° is satisfied too. Let  $x$  be an arbitrary point in the sphere  $S_1$ . Using (6) and the inequalities  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ,  $t_1^{1+\alpha} g_1 \leq t_0^{1+\alpha} g_0$  we have

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon_1 \tau_1}{1 - g_1(t_1 k_1)^{1+\alpha}} + \tau_0 \varepsilon_0 \leq \frac{\tau_0 \varepsilon_0}{1 - g_0(t_0 k_0)^{1+\alpha}}, \quad \text{q. e. d.}$$

Hence the conditions 1–4° are satisfied for  $x_1$ .

By induction we can prove that the point  $x_n$  may be constructed by (2);  $P$  satisfies in this point the conditions 1°–4°, and the following relations take place:

$$\begin{aligned} B_n &\geq B_{n-1}; \tau_n \leq (t_{n-1} k_{n-1})^{1+\alpha} g_{n-1} \tau_{n-1}; \\ \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \varepsilon_n \tau_n; S_n \subset S_{n-1}; k_n \leq t_{n-1}^{1+\alpha} k_{n-1}^2; \\ A_n &\leq A_{n-1}; t_n \leq t_{n-1}; \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1} \end{aligned} \quad (7)$$

From relations (7) it results

$$\tau_n \leq \tau_0 g_0^n (t_0 k_0)^{(2+\alpha)n-1}, \quad (8)$$

whence

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\tau_0 k_0^n (t_0 k_0)^{(2+\alpha)n-1} \varepsilon_n}{1 - g_0 (t_0 k_0)^{(1+\alpha)(2+\alpha)}} [1 - g_0^p (t_0 k_0)^{p(1+\alpha)(2+\alpha)}] \quad (9)$$

Since  $X$  is complete, from the inequality (9) it results the existence of the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ . If in (9)  $p \rightarrow \infty$  we obtain the inequality describing the rapidity of the convergence of the sequence  $(x_n)$ . Since all the terms of the sequence  $(x_n)$  belong to  $S_0$ , we also have  $x^* \in S_0$ .

For proving that  $x^*$  is a solution of equation (1) we can use the method given in the case of the analogous theorem of [1].

*Remarks 1.* If  $\alpha = 1$ , i.e. the second derivative of the operator  $P$  satisfies the Lipschitz condition, then the order of the convergence of the sequence  $(x_n)$  is 3, in the opposite case the order of the convergence is only  $2 + \alpha$ .

2. If  $P''(x)$  is bounded in the point  $x_0$ , i.e.  $\|P''(x_0)\| \leq M$ , then from the first part of the condition 3° it results that  $P''$  is uniformly bounded in the sphere  $S_0$ . Indeed, for an arbitrary  $x$  in  $S_0$  we have

$$\|P''(x)\| \leq \|P''(x_0)\| + (\alpha + 1)(\alpha + 2) L r^\alpha \leq M + (\alpha + 1)(\alpha + 2) L r_0^\alpha$$

where  $r_0$  is the radius of the sphere  $S_0$ .

The Theorem 1 of the present paper and the Theorem 2 of [1] can be generalized, supposing that the operator  $\Gamma_0$  exists without being bounded.

R. A. Shafiev [3] proved that in cases of the methods of the tangent hyperbolas and tangent parabolas, the theorems can be generalized, supposing that  $\|\Gamma_0 P''(x)\|$  is not uniformly bounded, but  $\|\Gamma_0 P''(x_0)\|$  is bounded. In this sense we prove the following theorem.

**THEOREM 2.** *If in the domain of the definition of the operator  $P(x)$  there is a point  $x_0$  so that:*

$$1^\circ \text{ there exists } \Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1},$$

$$2^\circ \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \tau_0, \|\Gamma_0 P''(x_0)\| \leq K_0 \text{ and } |\lambda|k_0 = |\lambda|K_0\tau_0 < 2;$$

$$3^\circ \|\Gamma_0 P'''(x)\| \leq L_0 \text{ for any } x \text{ in the sphere } S_0 \text{ defined by the inequality}$$

$$\|x - x_0\| \leq \frac{d}{1 - s_0^2 k_0^2}, \text{ where}$$

$$d_0 = \sigma_0 \tau_0, \quad \sigma_0 = \frac{1 - \frac{1}{2}(|\lambda| - 1)k_0}{1 - \frac{1}{2}|\lambda|k_0}, \quad s_0^2 = \frac{|2 + \lambda| + 2A_0 - \frac{1}{2}(|2\lambda + \lambda^2| - 1)k_0}{4[1 - f(h_0)]\left(1 - \frac{1}{2}|\lambda|k_0\right)^2},$$

$$A_0 = \frac{l_0 \sigma_0}{3} \left(1 + \frac{1}{2}k_0\right)^2, \quad l_0 = \frac{L_0}{K_0^2};$$

$$4^\circ f(h_0) = h_0 + \frac{l_0}{2} h_0^2 < 1, \text{ where } h_0 = K_0 d_0;$$

$$5^\circ t_0^2 = \frac{f'(h_0) s_0^2 k_0^2}{1 - f(h_0)} \leq 1$$

then the equation (1) has at least a solution  $x^* \in S_0$ , which is the limit of the sequence of the successive approximations constructed by formula (2) and the rapidity of the convergence is given by the evaluation

$$\|x^* - x_n\| \leq \left[ \frac{1 - f(h_0)}{f'(h_0)} \right]^n \frac{t_0^{3^n - 1} d_0}{1 - s_0^2 k_0^2}$$

*Proof.* We observe that from the condition 2<sup>o</sup> it results the existence of the operator  $Q_0 = (I + \lambda R_0)^{-1}$  and

$$\|Q_0\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}|\lambda|k_0}$$

Hence, using the formula (2)  $x_1$  can be constructed and

$$\|x_1 - x_0\| \leq \sigma_0 \tau_0 = d_0.$$

We prove that  $x_1$  satisfies the conditions 1<sup>o</sup>–5<sup>o</sup>. Indeed, by applying the Taylor formula to the operator  $\Gamma_0 P'(x)$  we obtain

$$\|\Gamma_0 P'(x_1) - \Gamma_0 P'(x_0)\| \leq K_0 d_0 + \frac{L_0}{2} d_0^2 = h_0 + \frac{l_0}{2} h_0^2 = f(h_0) < 1$$

It results that the operator  $H = I - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)] = \Gamma_0 P'(x_1)$  has an inverse, so the operator  $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$  exists and

$$\|H^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - f(h_0)} \tag{10}$$

Hence  $x_1$  satisfies the condition 1°.

Applying the Taylor formula to the operator  $\Gamma_0 P(x)$  it results

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq k_0^2 \tau_0 \frac{|2 + \lambda| - \frac{1}{2} (|2\lambda + \lambda^2| - 1)k_0 + 2A_0}{4 \left(1 - \frac{1}{2} |\lambda|k_0\right)^2} \tag{11}$$

From (10) and (11) we obtain

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| = \tau_1 = k_0^2 \tau_0 \frac{|2 + \lambda| + 2A_0 - \frac{1}{2} (|2\lambda + \lambda^2| - 1)k_0}{4 [1 - f(h_0)] \left(1 - \frac{1}{2} |\lambda|k_0\right)^2} = s_0^2 k_0^2 \tau_0 \tag{12}$$

Since  $x_1 \in S_0$ , from Lagrange formula we obtain

$$\|\Gamma_0 P''(x_1)\| \leq K_0 + L_0 d_0 = K_0(1 + l_0 h_0) = K_0 f'(h_0)$$

whence

$$\|\Gamma_1 P''(x_1)\| \leq \frac{K_0 f'(h_0)}{1 - f(h_0)} = K_1 \tag{13}$$

From (12) and (13) it results

$$k_1 = M_1 \tau_1 = \frac{K_0 f'(h_0) s_0^2 k_0^2 \tau_0}{1 - f(h_0)} = t_0^2 K_0 \tau_0 \leq K_0 \tau_0 = k_0$$

hence  $|\lambda|k_1 = |\lambda|K_1 \tau_1 < 2$  and in this way the condition 2° is satisfied for  $x_1$ .

From here it results the existence of the operator  $Q_1 = (I + \lambda R_1)^{-1}$ , i.e. the point  $x_2$  can be constructed by (2) and since  $\sigma_1 \leq \sigma_0$ , we have.

$$\|x_2 - x_1\| \leq \sigma_1 \tau_1 = d_1 \leq \sigma_0 s_0^2 k_0^2 \tau_0 = s_0^2 k_0^2 d_0 \tag{14}$$

From the definition of  $h_1$  it results  $h_1 = K_1 d_1 = t_0^2 K_0 d_0 \leq K_0 d_0 = h_0$ . If we use the notation  $I_1 = \frac{L_0}{1 - f(h_0)}$  we have  $l_1 \leq l_0$ , whence we obtain  $f(h_1) \leq f(h_0) < 1$ , i.e. the condition 4° is satisfied too.

Evidently we have  $A_1 \leq A_0$ , whence  $s_1^2 \leq s_0^2$  and since  $f'(h_1) \leq f'(h_0)$  it results  $t_1^2 \leq t_0^2$ , i.e. the condition 5° is satisfied too.

Finally we show that the sphere  $S_1$  defined by the inequality

$$\|x - x_1\| \leq \frac{d_1}{1 - s_1^2 k_1^2}$$

is included in the sphere  $S_0$ , which assures the realization of the condition 3°. Let  $x$  be an arbitrary point in  $S_1$ . Using the relation (14) we have

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{d_1}{1 - s_1^2 k_1^2} + d_0 \leq \frac{d_0}{1 - s_0^2 k_0^2}, \text{ q.e.d.}$$

By induction is proved the possibility of the construction of the point  $x_n$ ; the operator  $P(x)$  satisfies the conditions 1°–5° for this point, and

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq s_{n-1}^2 k_{n-1}^2 \eta_{n-1}; \quad k_n \leq t_{n-1}^2 k_{n-1} \leq \left(\frac{s_0}{\omega_0}\right)^2 k_{n-1}^3, \text{ where} \\ \omega_0^2 &= \frac{1-f(h)}{f'(h_0)}; \quad d_n \leq s_{n-1}^2 k_{n-1}^2 d_{n-1} \leq s_0^2 k_{n-1}^2 d_{n-1}; \\ h_n &\leq t_{n-1}^2 h_{n-1}; \quad t_n^2 \leq t_{n-1}^2; \quad s_n^2 \leq s_{n-1}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

From the relations (15) it results the inequality

$$d_n \leq \omega_0^{2n} t_0^{2n-1} d_0,$$

whence considering that  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n$ , we obtain

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \omega_0^n \frac{t_0^{2n-1} d_0}{1 - s_0^2 k_0^2} [1 - s_0^2 k_0^2]^p$$

$X$  being complete, from the relation (16) it results that the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  exists. If in the last inequality  $p \rightarrow \infty$ , we obtain the inequality characterizing the rapidity of the convergence of the sequence of the approximations. Evidently  $x^* \in S_0$ .

For proving that  $P(x^*) = 0$  we can use the method given in [3].

The Theorem 2 can be generalized, supposing that  $P(x)$  has not the third derivative, but the second derivative satisfies a Lipschitz, respectively Hölder condition.

(Received November 13, 1967)

#### REFERENCES

1. Ju. Ja. Kaazik, *Ob odnom klasse iteracionnyh processov dlja priblizennogo rešenija operatornyh uravnenij*. DAN SSSR, **112**, 4, (1957)
2. B. A. Wertheim, *Ob uslovijach primenenija metoda Newtona*. DAN SSSR., **110**, 5 (1956)
3. R. A. Šafiev, *O nekotoryh iteracionnyh processach*. „Žurnal vyčisl. mat. i matem. fiziki“, **4**, 1 (1964).

#### ASUPRA REZOLVĂRII UNOR ECUAȚII OPERAȚIONALE PRIN METODA ITERAȚIEI

(Rezumat)

Se studiază rezolvarea ecuațiilor operaționale  $P(x) = 0$ , unde  $P(x)$  este un operator neliniar definit într-un spațiu liniar  $X$  și cu valori în spațiul  $Y$  de același tip cu metoda dată în [1] dând noi condiții de convergență ale metodei către o soluție a ecuației.

#### О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ

(Резюме)

Исследуется решение операциональных уравнений  $P(x) = 0$ , где  $P(x)$  — нелинейный оператор, определенный в линейном пространстве  $X$  и со значениями в пространстве  $Y$  того же типа методом, данным в [1.] и даются новые условия сходимости метода к решению уравнения.

# O GENERALIZARE A FORMULEI DE CUADRATURĂ A TRAPEZELOR ȘI A FORMULEI LUI SIMPSON

de  
**GH. COMAN**

Unul din procedeele folosite pentru calculul aproximativ al integralei funcției  $f(x)$  pe segmentul  $[0, 1]$  este următorul: se împarte segmentul  $[0, 1]$  în  $n$  părți egale  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) unde  $x_0 = 0$  și  $x_n = 1$ , și fiecărei părți  $i$  se aplică formula de cuadratură

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{k=1}^m C_k^{(i)} f(x_k^{(i)}) \quad (1)$$

unde  $x_{i-1} \leq x_1^{(i)} < \dots < x_m^{(i)} \leq x_i$ . Se ia pe urmă

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m C_k^{(i)} f(x_k^{(i)}) \quad (2)$$

sau, dacă se notează prin  $R_{n,m}(f)$  restul formulei (2), avem

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m C_k^{(i)} f(x_k^{(i)}) + R_{n,m}(f). \quad (3)$$

În particular, dacă

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

se obține formula de cuadratură a dreptunghiurilor.

Dacă

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

se obține formula de cuadratură a trapezelor, iar dacă

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{6n} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)]$$

se obține formula de cuadratură a lui Simpson.

Se pune problema studiului formulelor de cuadratură, obținute prin același procedeu, fără să se presupună însă că cele  $n$  părți în care se împarte segmentul  $[0, 1]$  sînt egale.

Această problemă a fost studiată [1] în cazul formulei de cuadratură a dreptunghiurilor.

În lucrarea de față se studiază aceeași problemă în cazul formulei trapezelor și a formulei lui Simpson.

Fie funcția  $f(x)$  definită pe segmentul  $[0, 1]$ . Se împarte segmentul  $[0, 1]$  în  $n$  părți și se notează cu  $a_i$  lungimea părții  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

I. Aplicînd fiecărei părți formula de cuadratură a trapezului

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{a_i}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

se obține

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + R_{n,2}(f) \quad (4)$$

unde

$$C_0 = \frac{a_1}{2}, \quad C_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad C_n = \frac{a_n}{2}, \quad (5)$$

iar

$$x_0 = 0, \quad x_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

**TEOREMA 1.** *Formula de cuadratură (4) are gradul de exactitate egal cu unu.*

*Demonstrație.* Este suficient să se arate că formula (4) este exactă pentru  $f(x) = 1$  și  $f(x) = x$ , și nu este exactă pentru  $f(x) = x^2$ , adică  $R_{n,2}(1) = R_{n,2}(x) = 0$  și  $R_{n,2}(x^2) \neq 0$ .

Printr-un calcul direct se obține

$$R_{n,2}(1) = 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0$$

$$R_{n,2}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = 0$$

$$R_{n,2}(x^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left[ \sum_i a_i^3 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j^2 + 4 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k \right],$$



sau ținând seamă de faptul că  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  și de relația

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 = \sum_i a_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i a_j^2 + 6 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k,$$

se obține

$$R_{n,2}(x^2) = \frac{1}{3} \left[ \sum_i a_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i a_j^2 + 6 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k \right] - \\ - \frac{1}{2} \left[ \sum_i a_i^3 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j^2 + 4 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k \right] = -\frac{1}{6} \sum_i a_i^3 \neq 0.$$

**TEOREMA 2.** *Dacă funcția  $f(x)$  este definită pe segmentul  $[0, 1]$  și are derivată de ordinul doi continuă pe acest segment, atunci*

$$R_{n,2}(f) = -\frac{1}{12} (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) f''(\xi), \tag{7}$$

unde  $\xi \in [0, 1]$ .

*Demonstrație.* Se știe [2] că

$$R_{n,2}(f) = \int_0^1 F_2(t) f''(t) dt, \tag{8}$$

unde

$$F_2(t) = \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{i=0}^n C_i K_2(x_i - t),$$

iar

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1} & \text{dacă } u \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } u < 0 \end{cases}.$$

Însă  $F_2(t)$  nu-și schimbă semnul pe segmentul  $[0, 1]$ . Într-adevăr, pe fiecare din segmentele  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ),  $F_2(t)$  este un polinom de gradul doi,

$$F_2(t) = \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{i=k+1}^n C_i (x_i - t),$$

care se anulează în extremitățile intervalului,  $F_2(x_k) = F_2(x_{k+1}) = 0$ , iar  $F_2''(t) = 1$ . De aici rezultă că funcția  $F_2(t)$  nu-și schimbă semnul pe segmentul  $[0, 1]$  și anume, este nepozitivă.

Aplicînd teorema de medie lui (8) se obține

$$R_{n,2}(f) = f''(\xi) \int_0^1 F_2(t) dt,$$

unde  $\xi \in [0, 1]$ .

**Dar**

$$\int_0^1 F_2(t) dt = \int_0^1 \left[ \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{i=0}^n C_i K_2(x_i - t) \right] dt = \frac{1}{6} - \sum_{i=0}^n C_i \int_0^{x_i} (x_i - t) dt = \\ = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n C_i x_i^2 = -\frac{1}{12} (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)$$

și teorema este demonstrată.

2. Aplicând fiecărei părți  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) formula de cuadratură a lui Simpson

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{a_i}{6} \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f(x_i) \right],$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

se obține

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n C_i' f(x_i) + \sum_{i=1}^n C_i'' f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + R_{n,3}(f) \quad (9)$$

unde

$$C_0' = \frac{a_1}{6}, \quad C_i' = \frac{a_i + a_{i-1}}{6} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad C_n' = \frac{a_n}{6}, \quad (10)$$

$$C_i'' = \frac{2a_i}{3} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10')$$

$$x_0 = 0, \quad x_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

**TEOREMA 3.** *Formula de cuadratură (9) are gradul de exactitate egal cu trei.*

*Demonstrație.* Se va arăta că  $R_{n,3}(1) = R_{n,3}(x) = R_{n,3}(x^2) = R_{n,3}(x^3) = 0$ , iar  $R_{n,3}(x^4) \neq 0$ .

Într-adevăr, avem

$$R_{n,3}(1) = 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0,$$

$$R_{n,3}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = 0$$

$$R_{n,3}(x^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 = 0,$$

$$R_{n,3}(x^3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 = 0$$

și

$$R_{n,3}(x^4) = -\frac{1}{120} (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5) \neq 0$$

**TEOREMA 4.** *Dacă funcția  $f(x)$  este definită pe intervalul  $[0, 1]$  și are pe acest interval derivată de ordinul patru continuă, atunci*

$$R_{n,3}(f) = -\frac{1}{2880} (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5) f^{IV}(\xi) \quad (12)$$

unde  $\xi \in [0, 1]$ .

*Demonstrație.* Din [2] se vede că

$$R_{n,3}(f) = \frac{1}{3!} \int_0^1 F_4(t) f^{IV}(t) dt, \tag{13}$$

unde

$$F_4(t) = \frac{(1-t)^4}{4} - \left[ \sum_{i=0}^n C_i' K_4(x_i - t) + \sum_{i=1}^n C_i'' K_4\left(x_{i-\frac{1}{2}} - t\right) \right].$$

Se va arăta acum, că funcția  $F_4(t)$  nu-și schimbă semnul pe intervalul  $[0, 1]$ .

Fie  $t \in [x_{k-1}, x_k]$ . Atunci

$$F_4(t) = \frac{(1-t)^4}{4} - \left[ \sum_{i=k}^n C_i'(x_i - t)^3 + \sum_{i=k}^n C_i''\left(x_{i-\frac{1}{2}} - t\right)^3 \right] \tag{14}$$

dacă  $t \in [x_{k-1}, x_{k-\frac{1}{2}}]$  și

$$F_4(t) = \frac{(1-t)^4}{4} - \left[ \sum_{i=k}^n C_i'(x_i - t)^3 + \sum_{i=k+1}^n C_i''\left(x_{i-\frac{1}{2}} - t\right)^3 \right] \tag{15}$$

dacă  $t \in [x_{k-\frac{1}{2}}, x_k]$ .

Printr-un calcul direct se obține din (14) că  $F_4(x_{k-1}) = F_4'(x_{k-1}) = 0$  iar din (15) că  $F_4(x_k) = F_4'(x_k) = 0$ . La fel din (14) sau (15) se obține că  $F_4\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{a_k^4}{192}$

De aici rezultă că funcția  $F_4(t)$  nu se poate anula în intervalul deschis  $(x_{k-1}, x_k)$ . Într-adevăr, dacă presupunem că ar exista în acest interval un punct  $\eta$  pentru care  $F_4(\eta) = 0$ , aplicînd teorema lui Rolle funcției  $F_4(t)$  pe intervalul  $[x_{k-1}, x_k]$ , precum și derivatelor ei succesive, ar rezulta că există cel puțin un punct, situat în intervalul  $(x_{k-1}, x_k)$ , în care derivata de ordinul patru se anulează. Dar aceasta contrazice faptul că  $F^{IV}(t) = 1$  pe întreg intervalul  $[0, 1]$ . Astfel afirmația noastră este demonstrată. Cum aceasta are loc oricare ar fi intervalul  $[x_{k-1}, x_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) și avînd în vedere faptul că  $F_4\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right) < 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), rezultă că funcția  $F_4(t)$

nu-și schimbă semnul pe întreg intervalul  $[0, 1]$  și anume, este nepozitivă.

Aplicînd acum lui (13) teorema de medie, se obține

$$R_{n,3}(f) = \frac{1}{3!} f^{IV}(\xi) \int_0^1 F_4(t) dt = -\frac{1}{2880} (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5) f^{IV}(\xi),$$

ceea ce trebuia arătat.

(Intrat în redacție la 13 decembrie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. Seymour Haber, *Midpoint Quadrature Formulas*, „Math. Comput’”. **21**, N 100, 1967, pp 719-721.
2. S. M. Nikol’skij, *Kvadraturnyje formuly*. Moskva, 1958.

## ОДНО ОБОБЩЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦИЙ И ФОРМУЛЫ СИМПСОНА

(Р е з ю м е)

В работе изучается квадратурная формула (4), в которой коэффициенты даны выражением (5), а узлы — выражением (6), и квадратурная формула (9), в которой коэффициенты даны выражениями (10) и (10'), а узлы — выражением (11), которые обобщают формулу трапеций, соответственно формулу Симпсона. Эти два частных случая получаются при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ .

Доказывается, что формула (4) имеет степень точности равную единице и, если функция  $f(x)$  имеет на промежутке  $[0, 1]$  непрерывную производную второго порядка, то остаток дан выражением (7), а формула (9) имеет степень точности равную трём и, если функция  $f(x)$  имеет на промежутке  $[0, 1]$  непрерывную производную четвёртого порядка, то её остаток дан выражением (12).

## UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DES TRAPÈZES ET DE LA FORMULE DE SIMPSON

(R é s u m é)

L'auteur étudie la formule de quadrature (4), où les coefficients sont donnés par les expressions (5) et les noeuds par (6), ainsi que la formule de quadrature (9), où les coefficients sont donnés par (10) et (10') et les noeuds par (11), qui généralisent respectivement la formule des trapèzes et celle de Simpson, à réduction à celles-ci ayant lieu si  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ .

On démontre que la formule (4) a le degré d'exactitude égal à 1 et que, si la fonction  $f(x)$  a sur le segment  $[0, 1]$  une dérivée d'ordre deux continue, alors le reste est donné par (7) et que, d'autre part, la formule (9) a le degré d'exactitude égal à 3 et, en outre, que si la fonction  $f(x)$  a sur le segment  $[0, 1]$  une dérivée d'ordre quatre continue, son reste est donné par l'expression (12).

## ASUPRA UNOR OPERATORI DE TIP BERNSTEIN

de

GRIGOR MOLDOVAN

I. Operatorul lui Bernstein  $B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  atașat unei funcții  $f \in C[0, 1]$ , constituie un instrument simplu pentru demonstrarea primei teoreme a lui Weierstrass privind aproximarea uniformă a acestei funcții prin polinoame algebrice. Se cunosc multe generalizări ale acestui operator care în majoritate sînt tot polinoame și care au multe proprietăți comune cu ale operatorului lui Bernstein. Amintim dintre aceste generalizări pe cele date de Baskakov [2], Cheney Sharma [4], Jakimovski-Ramanujan [5] și Stancu [11].

De multe ori, însă, nu se cere neapărat aproximarea unei funcții printr-un polinom algebric. Sînt utile și cerute de practică și așa-numitele polinoame (operatori) de sumă [8] care se atașează la două matrici, una de noduri, iar cealaltă de funcții fundamentale.

În cele ce urmează vom considera următorul operator

$$\mathfrak{B}_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) p_{n,k}(x) \quad (1)$$

unde

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} [\varphi(x)]^k [1 - \varphi(x)]^{n-k} \quad (2)$$

iar  $f, \varphi \in C[0, 1]$  și  $\varphi(x)$  în plus pe intervalul  $[0, 1]$  satisface condițiile: a) este derivabilă, b)  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$  și c)  $\varphi'(x) \neq 0$ . Funcția  $\varphi$  poate în general să depindă de valoarea indicelui  $n$  a operatorului (1).

Operatorul considerat se observă că este un operator liniar și pozitiv.

Observăm de asemenea că pentru  $\varphi(x) = x$  și  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$  se obțin polinoamele obișnuite ale lui Bernstein [3]. De aceea convenim să numim operatorul (1) operator de tip Bernstein.

Să menționăm cîteva proprietăți ale acestui operator. Întîi să observăm că

$$\mathfrak{B}_n(1; x) = 1, \quad (3)$$

iar apoi, în cazul cînd considerăm nodurile  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$  avem

$$\mathfrak{F}_n(t; x) = \varphi(x), \quad (4)$$

$$\mathfrak{F}_n(t^2; x) = [\varphi(x)]^2 + \frac{\varphi(x)[1 - \varphi(x)]}{n}. \quad (4')$$

2. În legătură cu operatorul (1) se poate pune în general problema determinării nodurilor  $x_k^{(n)}$  în așa fel ca pentru o funcție dată  $\varphi$ , care să îndeplinească anumite condiții, acest operator liniar și pozitiv să convergă uniform către funcția  $f$ ,  $f \in C[0, 1]$ , sau invers.

Pentru operatori liniari și pozitivi se cunosc condiții care asigură convergența uniformă a lor și anume, cele date de teorema lui B o h m a n - K o r o v k i n [6]. Pentru convergența uniformă a operatorului  $\mathfrak{F}_n(f; x)$  aceste condiții sînt atît necesare cît și suficiente. Avem

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) = 1 \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^n x_k^{(n)} p_{n,k}(x) = x + \alpha_n(x) \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n [x_k^{(n)}]^2 p_{n,k}(x) = x^2 + \beta_n(x) \quad (7)$$

unde  $\alpha_n(x)$  și  $\beta_n(x)$  sînt funcții oarecare, continue. Convergența uniformă pe intervalul  $[0, 1]$  a operatorului  $\mathfrak{F}_n(f; x)$  are loc atunci și numai atunci cînd  $\alpha_n(x) \rightarrow 0$ ,  $\beta_n(x) \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Pentru operatorul (1) relația (5) este identică cu (3) care este adevărată întotdeauna. Relația (6) permite determinarea nodurilor  $x_k^{(n)}$  pentru o alegere convenabilă a funcțiilor  $\alpha_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), iar (7) determină funcțiile  $\beta_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Dacă  $\alpha_n(x) \rightarrow 0$ ,  $\beta_n(x) \rightarrow 0$ , cînd  $n \rightarrow \infty$ , atunci cele trei condiții asigură convergența uniformă a operatorului (1) către funcția  $f$ ,  $f \in C[0, 1]$ .

Proprietățile (4), (4') ne dovedesc un lucru important și anume că  $\mathfrak{F}_n(f; x)$  pentru nodurile  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ , cînd  $\varphi$  îndeplinește condițiile menționate mai sus și nu depinde de  $n$ , poate să convergă uniform pe  $[0, 1]$  către  $f$ ,  $f \in C[0, 1]$ , numai dacă  $\varphi(x) = x$ . În cazul cînd  $\varphi$  depinde de  $n$ , atunci poate fi numai de forma  $\varphi(x) = x + \omega_n(x)$  unde  $\omega_n(x)$  ( $n$  fiind același cu indicele operatorului (1)) este continuă și converge uniform către 0 pe intervalul  $[0, 1]$ .

3. Cele trei relații (5), (6), (7) conduc la egalitatea

$$\sum_{k=0}^n [x_k^{(n)} - x]^2 p_{n,k}(x) = \beta_n(x) - 2x\alpha_n(x) = \gamma_n(x) \quad (8)$$

unde  $\gamma_n(x) \rightarrow 0$ , cînd  $n \rightarrow \infty$ .

Acum putem pune în evidență o inegalitate asemănătoare cu cea stabilită de T. P o p o v i c i u [9]. Pentru aceasta vom ține seama de definiția modului de continuitate

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in [0, 1] \quad (9)$$

și de următoarele proprietăți ale lui

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta) \quad (\delta \geq 0, \lambda \geq 0)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski, obținem

$$|\mathfrak{B}_n(f; x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\gamma_n}\right) \omega(\delta), \tag{10}$$

unde  $\gamma_n = \|\gamma_n(x)\|$ , sau dacă luăm  $\delta = \sqrt{\gamma_n}$  atunci

$$|\mathfrak{B}_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(\sqrt{\gamma_n}). \tag{11}$$

4. Putem constata că dacă  $\varphi(x) = x$  și  $\alpha_n(x) = 0$  din relația (6) obținem pentru nodurile  $x_k^{(n)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ) valorile  $\frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ), adică obținem tocmai polinoamele lui Bernstein obișnuite. Verificăm aceasta pentru cazul particular  $n = 2$ . Relația (6) devine

$$x_0^{(2)}(1 - x)^2 + 2x_1^{(2)}x(1 - x) + x_2^{(2)}x^2 = x.$$

Din această identitate rezultă  $x_0^{(2)} = 0, x_1^{(2)} = \frac{1}{2}, x_2^{(2)} = 1$ . În general obținem

$x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ) și după ce înlocuim acestea în (7) ajungem la  $\beta_n(x) = \frac{x(1-x)}{n}$ .

Inegalitatea (11) se transformă cu mici modificări în cunoscuta inegalitate a lui T. P o p o v i c i u [9], căci în acest caz  $\gamma_n(x) = \beta_n(x) - 2x\alpha_n(x) = \frac{x(1-x)}{n}$ , iar  $\gamma_n = \frac{1}{4n}$ .

5. În legătură cu șirul de operatori (1) se poate pune problema monotoniei lui. Urmînd aceeași metodă elegantă din lucrarea [10] a lui D. D. S t a n c u și presupunînd că  $x_0^{(m)} = 0$  și  $x_n^{(m)} = 1$  obținem

$$\mathfrak{B}_{n+1}(f; x) - \mathfrak{B}_n(f; x) = -\varphi(x)[1 - \varphi(x)] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n-k)(k+1)} p_{n-1,k}(x) \cdot E_k(f)$$

unde

$$E_k(f) = (k+1)f(x_k^{(n)}) - (n+1)f(x_{k+1}^{(n+1)}) + (n-k)f(x_{k+1}^{(n)}).$$

Observăm de aici că monotonia șirului de operatori considerați depinde de  $E_k(f)$  și anume, că dacă  $E_k(f) > 0$ , atunci șirul  $(\mathfrak{B}_n(f; x))$  este descrescător, dacă  $E_k(f) < 0$  șirul  $(\mathfrak{B}_n(f; x))$  este crescător, iar dacă  $E_k(f) = 0$  șirul respectiv este staționar.

Se poate observa de aici, de asemenea, că dacă  $\varphi(x) = x$  și  $\alpha_n(x) = 0$ , atunci rezultă că  $\mathfrak{B}_{n+1}(t; x) - \mathfrak{B}_n(t; x) = 0$  și deci că nodurile trebuie să satisfacă relația de recurență

$$E_k(t) = (k+1)x_k^{(n)} - (n+1)x_{k+1}^{(n+1)} + (n-k)x_{k+1}^{(n)} = 0.$$

Din această relație de recurență, rezultă de fapt că  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ , ceea ce s-a menționat și la punctul 4.

Dacă se consideră nodurile  $\frac{k}{n}$ , funcția  $\varphi(x)$  trebuie să fie de forma  $\varphi(x) = x + \omega_n(x)$  unde  $\omega_n(x)$  sau este 0 sau tinde uniform pe intervalul  $[0, 1]$  către 0 când  $n \rightarrow \infty$ , așa cum s-a menționat la sfârșitul punctului 2. În acest caz este adevărată următoarea relație

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{n+1}(f; x) - \mathfrak{S}_n(f; x) &= \\ &= -\frac{\varphi(x)(1-\varphi(x))}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{p}_{n-1,k}(x) \cdot \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f \right] \end{aligned}$$

întru totul analogă unei egalități din lucrarea [10] a lui D. D. Stancu și de unde rezultă aceleași proprietăți de conservare ale alurii funcției  $f$  ca și ale operatorului lui Bernstein obișnuit, proprietăți care au fost stabilite de Temple [12] și Aramă [1].

6. Să mai facem câteva observații asupra operatorului (1). Mai sus s-a spus că pentru determinarea nodurilor  $x_k^{(n)}$  trebuie să se dea funcția  $\varphi(x)$  și șirul de funcții  $(\alpha_n(x))$  convenabil alese ce converg uniform către 0 când  $n \rightarrow \infty$ . Acestea nu se pot considera în general arbitrare, ele trebuie să ne asigure posibilitatea determinării nodurilor  $x_k^{(n)}$  situate în intervalul  $[0, 1]$ . Apoi, dacă (1) este un polinom algebric trebuie să mai ținem seama de faptul că  $\|\alpha_n\| \neq o(n^{-2})$  după cum se știe dintr-o teoremă a lui Korovkin (vezi [3]).

Nu sînt lipsite de interes, însă, nici acele cazuri cînd nodurile  $x_k^{(n)}$  nu sînt toate în intervalul  $[0, 1]$ , dar aceasta implică cunoașterea valorilor funcției pe un interval mai mare, ce conține nodurile respective. Aceasta corespunde situației din practică cînd putem calcula valorile funcției pe un interval oarecare și se cere să aproximăm funcția  $f$  pe un subinterval al acestui interval, printr-un polinom de sumăție. De fapt în caz contrar funcția se poate prelungi prin continuitate pe orice interval.

Considerăm aici cazul cînd  $\varphi(x) = x$ ,  $\alpha_n(x) = \frac{\lambda}{n}$  și  $x$  aparține unui interval  $I_\lambda$  care va fi precizat mai jos, iar  $\lambda$  este o constantă oarecare. În acest caz relația (6) se scrie astfel

$$\sum_{k=0}^n x_k^{(n)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x + \frac{\lambda}{n}.$$

Ușor se constată că  $x_k^{(n)} = \frac{k+\lambda}{n}$ , care formează o progresie aritmetică cu rația  $\frac{1}{n}$ .

Ele sînt situate în intervalul  $[0, \lambda+1]$  dacă  $\lambda \geq 0$ , iar  $[0, 1]$  este un subinterval al acestuia. Dacă  $\lambda < 0$  atunci nodurile respective aparțin intervalului  $[\lambda, 1]$ , iar  $[0, 1]$  este un subinterval al acestuia. Notăm mai scurt  $I_\lambda = \{x | x \in [\lambda, 1], \text{ dacă } \lambda < 0 \text{ sau } x \in [0, \lambda+1], \text{ dacă } \lambda \geq 0\}$ .

Din condițiile (7) se determină pentru aceste noduri funcțiile  $\beta_n(x)$ . Înlocuindu-le în această relație avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k+\lambda}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (k+\lambda)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{n^2} (n^2 x^2 + nx(1-x) + 2\lambda nx + \lambda^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} + \frac{\lambda(\lambda+2nx)}{n^2}, \end{aligned}$$



de unde rezultă

$$\beta_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + \frac{\lambda(\lambda + 2nx)}{n^2}. \quad (13)$$

Se vede că avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(x) = 0$  pentru orice  $\lambda$ . Prin urmare, deoarece  $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ ,  $\beta_n(x) \rightrightarrows 0$  când  $n \rightarrow \infty$ , avem uniform pe intervalul  $[0, 1]$  convergența operatorului

$$\mathfrak{B}_n^{[\lambda]}(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\lambda}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (14)$$

dacă  $f(x)$  este definită și mărginită pe intervalul  $I_\lambda$  și continuă pe intervalul  $[0, 1]$ , iar dacă  $\lambda < 0$ , continuă la stînga pe punctul  $x = 0$  și dacă  $\lambda > 0$ , atunci continuă la dreapta pe punctul  $x = 1$ .

Pentru acest polinom putem să precizăm numerele  $\gamma_n$  din inegalitatea (11). După cum știm din (8) și apoi ținînd seama de (13) avem

$$\gamma_n(x) = \beta_n(x) - 2x\alpha_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + \frac{\lambda^2}{n^2}$$

și deci  $\gamma_n = \frac{1}{4n} + \frac{\lambda^2}{n^2}$ . Inegalitatea (11) se poate scrie în acest caz astfel

$$|\mathfrak{B}_n^{[\lambda]}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{\lambda^2}{n^2}}\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

sau dacă în (10) punem  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$  avem

$$|\mathfrak{B}_n^{[\lambda]}(f; x) - f(x)| \leq c_\lambda \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

unde  $c_\lambda = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{n}}$ . Din aceste calcule se observă că în acest mod nu s-a obținut un ordin de aproximație mai bun decît cel pentru polinoamele lui Bernstein obișnuite. Pentru  $\lambda = 0$  din (15) regăsim inegalitatea lui T. Popoviciu [9]

(Introt în redacție la 28 septembrie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Proprietăți privind monotonía șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor.* „Studii și cercetări de matematică Cluj”, 8, 3-4, 195-210 (1957).
2. Baskakov V. A., *A generalization of the Bernstein polynomials.* „Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika”, 3(16), 48-53 (1960) (Russian).
3. Bernstein, S. N., *Demonstration du théorème de Weierstrass sur le calcul des probabilités.* „Commun. Soc. Math. Kharkov”, 13(2), 1-2 (1912).
4. Cheney E. W., Sharma A., *On a Generalization of Bernstein Polynomials.* „Riv. Mat. Univ. Parma” (2) 5, 77-84 (1964).
5. Jakimovski A., Ramanujan M. S., *A uniform approximation theorem and its applications to moment problems.* „Math. Zeitschr.”, 84, 143-153 (1964).
6. Korovkin P. P., *Linear operators and approximations theory.* Fizmatgiz, 1959.
7. Lorentz, G. G., *Approximation of Functions.* Holt, 1966.
8. Natanson, I. P., *Konstruktive Funktionentheorie,* Berlin, 1955.

9. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, „Mathematica”, 19, 49—54 (1935).
10. Stancu, D. D., *On the Monotonicity of the Sequence Formed by the First Order Derivatives of the Bernstein Polynomials*. „Math. Zeitschr.”, 98, 45—51 (1967).
11. Stancu, D. D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*. „Rev. Roum. Math. Pures et Appl.”, 13, nr.8, 1173—1194 (1968).
12. Temple W. B., *Stieltjes integral representation of convex functions*. „Duke Math. J.”, 21, 527—531 (1954).

## ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

(Резюме)

В работе рассматривается линейный и положительный оператор (1), где  $f, \varphi \in C[0, 1]$ , а  $\varphi$  в промежутке  $[0, 1]$  имеет следующие свойства: а) имеет производную; б)  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ ; в)  $\varphi'(x) \neq 0$ . В связи с этим оператором доказано несколько свойств равномерной сходимости к  $f$ . Если  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ , то последовательность операторов (1) является сходящейся к  $f$ , если только  $\varphi(x) = x + \omega_n(x)$ , где  $\omega_n(x)$  либо есть нуль, либо равномерно стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ . Доказывается неравенство (11).

Условия (5), (6), (7) для  $\varphi(x) = x$  и  $\alpha_n(x) = \frac{\lambda}{n}$  приводят к оператору (14), который равномерно сходится на  $[0, 1]$  к  $f$ , если  $f$  определена на  $I_\lambda$  и является непрерывной на  $[0, 1]$ .

Автор делает также некоторые замечания в связи с монотонностью последовательности рассмотренных операторов, используя результаты Д.Д. Станку [10].

## SUR CERTAINS OPÉRATEURS DE TYPE BERNSTEIN

(R é s u m é)

L'auteur considère l'opérateur linéaire et positif (1) où  $f, \varphi \in C[0, 1]$ , et  $\varphi$  possède dans l'intervalle  $[0, 1]$  les propriétés suivantes: a) elle est dérivable; b)  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ ; c)  $\varphi'(x) \neq 0$ . En relation avec cet opérateur on démontre quelques propriétés de convergence uniforme vers  $f$ . Si  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ , alors la série d'opérateurs (1) n'est convergente vers  $f$  que si  $\varphi(x) = x + \omega_n(x)$  où  $\omega_n(x)$  ou bien est zéro, ou bien tend uniformément vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . On démontre l'inégalité (11).

Les conditions (5), (6), (7) pour  $\varphi(x) = x$  et  $\alpha_n(x) = \frac{\lambda}{n}$  conduisent à l'opérateur (14), qui converge uniformément pour  $[0, 1]$  vers  $f$ , si  $f$  est définie sur  $I_\lambda$  et est continue pour  $[0, 1]$ .

On fait de même quelques observations concernant la monotonie de la série d'opérateurs considérés, en utilisant les résultats obtenus par D. D. Stancu [10].

## ASUPRA UNOR INEGALITĂȚI DE TIP BERNSTEIN

de

ILIE TORSAN

Fie  $F(x)$  o funcție reală de o variabilă reală  $x$  și să considerăm dezvoltarea ei în serie de puteri

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \quad (1)$$

pentru  $x \in [0, b]$  astfel încât  $A_i x^i \geq 0$  pe acest interval.

În [1] am studiat variabila aleatorie discretă  $N$  cu valori întregi nenegative, a cărei funcție de probabilitate este

$$f(i) = \frac{A_i x^i}{F(x)} \quad (2)$$

Dacă  $X$  este o variabilă aleatorie continuă, nenegativă, avînd momente  $M_k(x)$  de orice ordin și pentru care există funcția generatoare de momente (funcția caracteristică în sensul lui Poincaré)

$$\varphi_X(\alpha) = M(e^{\alpha X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n M_n(X)}{n!} \quad (3)$$

unde seria din membrul doi este convergentă pentru  $0 \leq \alpha \leq A$ , în [2] s-a definit variabila aleatorie discretă  $Y$  cu valori întregi nenegative, ca fiind asociata variabilei aleatorii  $X$ , dacă funcția ei de probabilitate este

$$f(n, \alpha) = \frac{\alpha^n M_n(X)}{n! \varphi_X(\alpha)} \quad \text{pentru } 0 \leq \alpha \leq A \quad (4)$$

În această lucrare vom studia distribuția sumelor aleatoare de variabile aleatoare folosind distribuțiile definite mai sus.

Astfel vom extinde următorul rezultat datorit lui Bernstein (vezi de exemplu [3]).

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  variabile aleatorii independente și  $S = \sum_{j=1}^n X_j$ . Dacă  $M(X_j) = 0$  și  $M(X_j^2) = b_j < \infty$  pentru  $j = 1, 2, \dots, n$  și dacă există o constantă pozitivă  $H$  astfel încît

$$|M(X_j^k)| \leq \frac{k!}{2} b_j H^{k-2} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

pentru toate valorile lui  $k$  întregi ( $k \geq 2$ ) atunci avem

$$P(S \geq x) \leq e^{-\frac{x^k}{4B}} \quad \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{B}{H}$$

$$P(S \geq x) \leq e^{-\frac{x}{4H}} \quad \text{dacă } x \geq \frac{B}{H}$$

$$P(S \leq -x) \leq e^{-\frac{x^k}{4B}} \quad \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{H}{B}$$

$$P(S \leq -x) \leq e^{-\frac{x}{4H}} \quad \text{dacă } x \geq \frac{B}{H}$$

unde  $B = \sum_{j=1}^n b_j$ .

Fie  $\{X_i\}$  un șir de variabile aleatorii total independente pentru care sînt îndeplinite condițiile

$$\varphi_{X_i}(t) \text{ există pentru } 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

Există o serie cu termeni pozitivi  $\sum_1^{\infty} a_i$  convergentă avînd suma  $a$  și astfel încît

$$\varphi_{X_i}(t) \leq e^{-\frac{a_i t^2}{2}} \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq T \quad (6)$$

În acest caz avem

**TEOREMA 1.** *Dacă  $N$  este o variabilă aleatorie discretă cu valori întregi nenegative, avînd funcția de probabilitate definită prin (2), independentă de variabilele  $X_i$ , pentru care sînt îndeplinite condițiile (5) și (6), atunci*

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \geq z_0) \leq e^{-\frac{z_0^2}{2a}} \quad \text{dacă } 0 \leq z_0 \leq aT$$

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \geq z_0) \leq e^{-\frac{Tz_0}{2}} \quad \text{dacă } z_0 \geq aT$$

*Demonstrație.* Fie  $\Phi(t)$  funcția caracteristică în sensul lui Poincaré a variabilei  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ . Dacă  $N = n$ , din independența variabilelor  $X_i$  avem

$$\Phi_{Z|N=n}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t) \quad (7)$$

și din (2) rezultă că

$$\Phi(t) = M_Z(e^{tZ}) = M_N[M_Z(e^{tZ} | N = n)] = \frac{1}{F(x)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \prod_{j=1}^n \varphi_j(t) \quad (8)$$

Ținând seama de condițiile (5) și (6) avem

$$\Phi(t) < e^{\frac{at^2}{2}} \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq T \tag{9}$$

Dacă  $z_0$  este un număr pozitiv, din inegalitatea lui Kolmogorov rezultă

$$P(X_1 + \dots + X_N \geq z_0) = P[e^{tz} \geq e^{tz_0}] \leq e^{-tz_0} \Phi(t) < e^{-tz_0 + \frac{at^2}{2}} \tag{10}$$

pentru  $0 \leq t \leq T$ .

Dacă însă  $0 \leq z_0 \leq aT$ , atunci  $f(t) = -tz_0 + \frac{at^2}{2}$  are un minim pentru  $t = \frac{z_0}{a}$

care îndeplinește condiția  $0 \geq t \geq T$ . Introducând această valoare a lui  $t$  în (10), rezultă prima inegalitate din teoremă.

Dacă  $z_0 \geq aT$ , atunci  $f'(t) = -z_0 + at < 0$  pentru  $0 \leq t \leq T$ , și cum funcția  $f(t) = -tz_0 + \frac{at^2}{2}$  nu crește, punând  $t = T$  în (10) rezultă a doua inegalitate din teoremă.

**TEOREMA 2.** *Dacă  $N$  este variabila aleatorie discretă cu valori întregi nenegative, avînd funcția de probabilitate definită prin (2), independentă de variabilele  $X_i$  și condițiile (5) și (6) rămîn valabile pentru  $-T \leq t \leq 0$  atunci*

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq -z_0) \leq e^{-\frac{z_0^2}{2a}} \quad \text{dacă } 0 \leq z_0 \leq aT$$

și

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq -z_0) \leq e^{-\frac{Tz_0}{2}} \quad \text{dacă } z_0 \geq aT$$

Demonstrația este analogă celei de mai sus.

*Aplicație.* Dacă variabila aleatorie  $N$  are distribuția Poisson cu  $M(N) = x$  iar  $X_i$  sînt variabile caracteristice ale unui eveniment  $A$  a cărui probabilitate de realizare  $p$  rămîne constantă în cursul repetării succesive a  $N$  probe ( $N$  aleator), atunci variabila  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  are tot distribuția Poisson cu  $M(z) = px$ . Într-adevăr, considerînd în (1) că  $F(x) = e^x$  din (2) rezultă că  $N$  are distribuția Poisson cu  $M(N) = x$  și din (8) avem

$$\Phi(t) = \frac{F(x \cdot z(t))}{F(x)} = e^{x \cdot \varphi(t) - 1} \tag{11}$$

dar cum în acest caz  $\varphi(t) = pt^c + q$  unde  $p > 0$ ,  $q > 0$  și  $p + q = 1$  rezultă

$$\Phi(t) = e^{px(ct^c - 1)} \tag{12}$$

adică funcția caracteristică în sensul lui Poincaré corespunzătoare unei distribuții Poisson cu media  $px$ .

Are loc și propoziția reciprocă.

Dacă  $N$  și  $Z$  au distribuția Poisson cu  $M(N) = x$  respectiv  $M(Z) = \mu$  și  $\mu \leq x$  atunci variabilele  $X_i$  sînt variabile caracteristice ale evenimentului  $A$  a cărui probabilitate de realizare  $p = \frac{\mu}{x}$  rămîne constantă în cursul repetării succesive a  $N$  probe ( $N$  aleator).

Într-adevăr, în acest caz în (8) avem că  $F(x) = e^x$  și  $\Phi(t) = e^{\mu t - 1}$ . Ținând seama de (11) rezultă că

$$\frac{\mu}{x} (e^t - 1) = \varphi(t) - 1$$

de unde

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{x} e^t + \left(1 - \frac{\mu}{x}\right) = p e^t + q$$

și afirmația este demonstrată.

Să presupunem că variabilele  $X_i$  satisfac condițiile: a) sînt total independente, nenegative și identic distribuite, b)  $M(X_i^n) \leq 1$  pentru  $n = 0, 1, 2, \dots$

Fie  $Y$  variabila aleatorie discretă, asociata lor comună, avînd funcția de probabilitate dată de (4), atunci avem

**TEOREMA 3.** *Dacă variabilele aleatorii  $\{x_i\}$  îndeplinesc condițiile a) și b) iar  $Y$  este asociata lor comună*

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_Y \geq z_0) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} e^{-z_0 \left(\ln \frac{z_0}{\alpha} - 1\right)} \text{ dacă } \alpha < z_0 \leq \alpha e^T$$

și

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_Y \geq z_0) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} e^{-T z_0 + \alpha e^T} \text{ dacă } z_0 \geq \alpha e^T$$

pentru orice  $\alpha \in [0, T]$  fixat.

*Demonstrație.* Din (8) și din condiția b) rezultă că

$$\Phi(t) < \frac{1}{\varphi(\alpha)} e^{\alpha \psi(t)} \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq T$$

și

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r M_r(X)}{r!} < e^t$$

de unde se obține

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} e^{\alpha e^t} \quad (13)$$

și din (10) rezultă că

$$P(X_1 + \dots + X_Y \geq z_0) \leq \frac{e^{t z_0 + \alpha e^t}}{\varphi(\alpha)} \quad (14)$$

pentru  $0 \leq t \leq T$  și  $\alpha \in [0, T]$  fixat.

Dacă  $\alpha < z_0 \leq \alpha e^T$  atunci funcția  $f(t) = -t z_0 + \alpha e^t$  are un minim pentru  $t = \ln \frac{z_0}{\alpha}$  care îndeplinește condiția  $0 \leq t \leq T$ . Introducînd această valoare a lui  $t$  în (14) rezultă prima inegalitate din teoremă. Dacă  $z_0 \geq \alpha e^T$  atunci  $f'(t) = -z_0 + \alpha e^t < 0$  pentru  $0 \leq t \leq T$  și cum  $f(t) = -t z_0 + \alpha e^t$  nu crește, punînd  $t = T$  în (14) rezultă a doua inegalitate și teorema este demonstrată.

## BIBLIOGRAFIE

1. Ilie Torsan, *Asupra distribuțiilor variabilelor aleatorii discrete*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai” (1) 1968, pp. 33–37.
2. Cseke V., Torsan I., *Asupra variabilei asociate unei variabile aleatorii continue*. Comunicată la Ses. jub. a învăț. economic superior din România, 18–21 dec. 1968, București.
3. V. V. Petrov, *Obobščenie i utocnenie neravenstv Bernšteina*, „Vestnik Leningrad. Univ” (19) 1967. pp 63–68.

## О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

(Резюме)

Рассматривая последовательность  $\{X_i\}$  независимых случайных переменных, автор доказывает некоторые неравенства для  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \geq Z_0)$ , где  $N$  — дискретное случайное переменное с целыми неотрицательными значениями, имеющее функцию вероятности, данную (2), соответственно (4).

## SUR LES INÉGALITÉS DE TYPE BERNSTEIN

(Résumé)

Considérant une série  $X$  de variables aléatoires indépendantes, on démontre dans ce travail certaines inégalités pour  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_N < z_0)$  où  $N$  est une variable aléatoire discrète, à valeurs entières non-négatives et ayant la fonction de probabilité données respectivement par (2) et par (4).





# ASUPRA MIȘCĂRII GENERALE A UNUI PROFIL ÎN PREZENȚA A DOI PEREȚI DE FORMĂ OARECARE. ECUAȚIILE INTEGRALE ALE MIȘCĂRII

de  
TITUS PETRILĂ

1. În prezenta lucrare se caută să se determine potențialul complex al mișcării plane generate de o deplasare oarecare a unui profil într-un fluid ideal și incompresibil, în prezența a doi pereți arbitrari. Această problemă generalizează pe cea tratată de G. C o u c h e t [1].

2. Fie  $z = H(Z) = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$  reprezentarea conformă care aplică exteriorul cercului ( $C$ ) de rază  $a$  din planul ( $Z$ ) în exteriorul profilului ( $c$ ) din planul fizic. În același timp fie  $Z = \zeta(u)$  și  $Z = r_1(s)$  ecuațiile curbelor  $\Delta$  și  $\nabla$  transformate pereților ( $\alpha$ ) și ( $\beta$ ) din planul fizic la momentul considerat; introducem de asemenea și curbele  $\Delta'$  și  $\nabla'$  de ecuații  $Z = \zeta'(u) = \frac{a^2}{\zeta(u)}$  respectiv  $Z = r_1'(s) = \frac{a^2}{r_1(s)}$  inversele curbelor  $\Delta$  și  $\nabla$  față de cercul ( $C$ ).

În cele ce urmează vom considera un sistem de axe  $Ox$  și  $Oy$  legate de profilul ( $c$ ) a cărui centru coincide cu originea sistemului [și implicit axele  $OX$  și  $OY$  din planul ( $Z$ ) cu centrul în centrul cercului ( $C$ )]; notăm prin  $l, m$  componentele vitezei de transport a centrului profilului, iar prin  $\omega$  rotația instantanee.

Fie acum  $F(Z)$  potențialul complex al mișcării în planul ( $Z$ ) pentru profilul izolat. Avem:

$$F(Z) = l \cdot g^{(1)}(Z) + m \cdot g^{(2)} \cdot Z - \frac{i \cdot \Gamma}{2\pi} \log Z + \omega \cdot g^{(3)}(Z)$$

Introducem acum un potențial complementar  $F_c(Z)$  plasînd o repartiție continuă de surse atît pe curba  $\Delta$  și pe inversa ei  $\Delta'$ , cît și pe curba  $\nabla$  și pe inversa  $\nabla'$ . Aplicînd teorema cercului vom obține pentru  $F_c(Z)$  expresia:

$$F_c(Z) = \int_{\Delta} \log \frac{[Z - \zeta(u)][Z - \zeta'(u)]}{Z} \left( l \cdot \varphi^{(1)}(u) + m \cdot \varphi^{(2)}(u) + \omega \cdot \varphi^{(3)}(u) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \varphi^{(4)}(u) \right) du + \\ + \int_{\nabla} \log \frac{[Z - r_1(s)][Z - r_1'(s)]}{Z} \left( l \cdot \psi^{(1)}(s) + m \cdot \psi^{(2)}(s) + \omega \cdot \psi^{(3)}(s) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \psi^{(4)}(s) \right) ds$$

$$\text{unde } \varphi(u) = l \cdot \varphi^{(1)}(u) + m \cdot \varphi^{(2)}(u) + \omega \cdot \varphi^{(3)}(u) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \varphi^{(4)}(u)$$

$$\text{și } \psi(s) = l \cdot \psi^{(1)}(s) + m \cdot \psi^{(2)}(s) + \omega \cdot \psi^{(3)}(s) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \psi^{(4)}(s)$$

sînt funcții reale, deocamdată necunoscute, reprezentînd intensitatea surselor plasate pe curba  $\Delta$  respectiv  $\nabla$ .

Fie acum  $f(Z) = F(Z) + \bar{F}_c(Z)$  potențialul complex total al mișcării. Pentru ca mișcarea definită de acest potențial să satisfacă și condițiile la limită pe cei doi pereți ( $\alpha$ ) și ( $\beta$ ), va fi suficient ca funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  să fie astfel alese încît să avem :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ (U - iV)_\alpha \cdot H_\zeta \frac{d\zeta}{dv} \right] &= 0 \\ \operatorname{Im} \left[ (U - iV)_\beta \cdot H_\eta \frac{d\eta}{dt} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

unde  $(U - iV)_\alpha$  și  $(U - iV)_\beta$  reprezintă viteza complexă  $U - iV = \frac{df}{dZ} \Big|_{\frac{dH}{dZ}}$  pe pereții ( $\alpha$ ) și ( $\beta$ ), iar  $\zeta = \zeta(v)$  respectiv  $\eta = \eta(t)$  reprezintă două puncte oarecare fixe pe curbele  $\Delta$  și  $\nabla$ .

Exprimînd pe  $(U - iV)_\alpha$  și pe  $(U - iV)_\beta$  cu ajutorul lui  $f(Z)$ , condițiile (1) se vor retranscrie sub forma următorului sistem de ecuații integrale :

$$\begin{aligned} \text{I} \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Im} \left[ \frac{dg^{(i)}}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dv} + \frac{d\zeta}{dv} \int_{\Delta} \left( \frac{1}{\zeta(v) - \zeta(u)} + \frac{1}{\zeta(v) - \zeta'(u)} - \frac{1}{\zeta(v)} \right) \varphi^{(i)}(u) du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\zeta}{dv} \int_{\nabla} \left( \frac{1}{\zeta(v) - \eta(s)} + \frac{1}{\zeta(v) - \eta'(s)} - \frac{1}{\zeta(v)} \right) \psi^{(i)}(s) ds \right] = \pi \cdot \varphi^{(i)}(v) \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\operatorname{Im} \left[ \frac{i \cdot a}{\zeta} \frac{d\zeta}{dv} + \frac{d\zeta}{dv} \int_{\Delta} \left( \frac{1}{\zeta(v) - \zeta(u)} + \frac{1}{\zeta(v) - \zeta'(u)} - \frac{1}{\zeta(v)} \right) \varphi^{(4)}(u) du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\zeta}{dv} \int_{\nabla} \left( \frac{1}{\zeta(v) - \eta(s)} + \frac{1}{\zeta(v) - \eta'(s)} - \frac{1}{\zeta(v)} \right) \psi^{(4)}(s) ds \right] = \pi \cdot \varphi^{(4)}(v) \end{aligned} \right. \\ \\ \text{II} \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Im} \left[ \frac{dg^{(i)}}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \int_{\nabla} \left( \frac{1}{\eta(t) - \eta(s)} + \frac{1}{\eta(t) - \eta'(s)} - \frac{1}{\eta(t)} \right) \psi^{(i)}(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\eta}{dt} \int_{\Delta} \left( \frac{1}{\eta(t) - \zeta(u)} + \frac{1}{\eta(t) - \zeta'(u)} - \frac{1}{\eta(t)} \right) \varphi^{(i)}(u) du \right] = \pi \cdot \psi^{(i)}(t) \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\operatorname{Im} \left[ \frac{ia}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \int_{\nabla} \left( \frac{1}{\eta(t) - \eta(s)} + \frac{1}{\eta(t) - \eta'(s)} - \frac{1}{\eta(t)} \right) \psi^{(4)}(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\eta}{dt} \int_{\Delta} \left( \frac{1}{\eta(t) - \zeta(u)} + \frac{1}{\eta(t) - \zeta'(u)} - \frac{1}{\eta(t)} \right) \cdot \varphi^{(4)}(u) du \right] = \pi \cdot \psi^{(4)}(t) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

În cazul în care profilul se va translața cu viteza  $\vec{V}_t = l \cdot \vec{i}$ , sistemul de ecuații de mai sus se va simplifica considerabil, dispărînd ecuațiile a doua și a treia atît din I cît și din II.

Considerînd acum mișcarea generală a unui obstacol circular în prezența unor pereți rectilinii de ecuații  $\zeta = \zeta(u) = (p_1 + iu)e^{i\theta_1}$  și  $\eta = \eta(s) = (p_2 + is)e^{i\theta_2}$ , unde  $u$  și  $s$  sînt parametri reali parcurgînd întreaga axă reală, ecuațiile integrale ale miș-

cării se vor obține prin particularizarea sistemului (1 și 11) unde vom pune

$$g^{(1)} = -\frac{R^2}{z}, \quad g^{(2)} = -i\frac{R^2}{z}, \quad g^{(3)} = -\frac{iR^2}{2}$$

În definitiv vom avea în acest caz particular următorul sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} \text{I} \\ \text{II} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2}{(p_1^2 + v^2)^2} \left[ \cos \theta_1 \cdot (p_1^2 - v^2) - \sin \theta_1 \cdot 2p_1 \cdot v \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, v, p_1) \cdot \varphi^{(1)}(u) du + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s, v, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \psi^{(1)}(s) \cdot ds = \pi \cdot \varphi^{(1)}(v) \\ \\ \frac{R^2}{(p_1^2 + v^2)^2} \left[ \cos \theta_1 \cdot 2p_1 v + \sin \theta_1 \cdot (p_1^2 - v^2) \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, v, p_1) \cdot \varphi^{(2)}(u) du + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s, v, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \psi^{(2)}(s) ds = \pi \cdot \varphi^{(2)}(v) \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, v, p_1) \cdot \varphi^{(3)}(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s, v, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \psi^{(3)}(s) ds = \pi \cdot \varphi^{(3)}(v) \\ \\ \frac{Rv}{p_1^2 + v^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, v, p_1) \cdot \varphi^{(4)}(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s, v, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \psi^{(4)}(s) ds = \pi \cdot \varphi^{(4)}(v) \\ \\ \frac{R^2}{(p_2^2 + t^2)^2} \left[ \cos \theta_2 \cdot (p_2^2 - t^2) - \sin \theta_2 \cdot 2p_2 t \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t, p_2) \psi^{(1)}(s) ds + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, t, p_2, p_1, \theta_2, \theta_1) \varphi^{(1)}(u) du = \pi \cdot \psi^{(1)}(t) \\ \\ \frac{R^2}{(p_2^2 + t^2)^2} \left[ \cos \theta_2 \cdot 2p_2 t + \sin \theta_2 \cdot (p_2^2 - t^2) \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t, p_2) \cdot \psi^{(2)}(s) ds + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, t, p_2, p_1, \theta_2, \theta_1) \cdot \varphi^{(2)}(u) du = \pi \cdot \psi^{(2)}(t) \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t, p_2) \psi^{(3)}(s) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, t, p_2, p_1, \theta_2, \theta_1) \varphi^{(3)}(u) du = \pi \cdot \psi^{(3)}(t) \\ \\ \frac{Rt}{p_2^2 + t^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t, p_2) \psi^{(4)}(s) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, t, p_2, p_1, \theta_2, \theta_1) \cdot \varphi^{(4)}(u) du = \pi \cdot \psi^{(4)}(t) \end{array} \right.$$

unde s-a notat

$$K(u, v, p) = \frac{(p^2 + u^2)[p(p^2 + u^2) - R^2 p]}{[p(p^2 + u^2) - R^2 p] + (v - R^2 u)^2} - \frac{p}{p^2 + v^2}$$

și

$$H(s, v, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 \cdot \cos(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) + s \cdot \sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)}{\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2 + s^2 + v^2 - 2 \cos(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \cdot (\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + v \cdot s) - 2 \sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)(v \tilde{p}_2 - \tilde{p}_1 s)} +$$

$$+ \frac{\tilde{p}_1(\tilde{p}_2^2 + s^2) - R^2 \cdot \tilde{p}_2 \cos(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) + R^2 \cdot s \sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)}{(\tilde{p}_1^2 + v^2)(\tilde{p}_2^2 + s^2) + R^4 - 2R^2 \cdot \cos(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)(\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + v \cdot s) - 2R^2 \sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)(\tilde{p}_2 v - s \cdot \tilde{p}_1)} - \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1^2 + v^2}$$

(Intrat în redacție la 1 septembrie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. G. Couchet, *Mouvement d'un profil en présence d'une paroi*, Congrès International de Mécanique Bruxelles (1956).
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*, Bucarest-Paris (1959).

#### ОБ ОБЩЕМ ДВИЖЕНИИ ОДНОГО ПРОФИЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТЕН. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

(Резюме)

Изучается плоское движение, порождённое произвольным смещением одного профиля в идеальной и несжимаемой жидкости в присутствии двух произвольных стен. Использованный метод обобщает метод Г. Куше [1].

#### SUR LE MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN PROFIL EN PRÉSENCE DE DEUX PAROIS ARBITRAIRES. ÉQUATIONS INTÉGRALES DU MOUVEMENT

(Résumé)

On étudie le mouvement plan produit par un déplacement général d'un profil dans un fluide idéal et incompressible en présence de deux parois arbitraires. La méthode utilisée généralise celle utilisée par G. Couchet (1).

# STREUUNG VON SPIN—1 TEILCHEN IN EINEM ZENTRALFELD

Z. GÁBOS, S. HOLAN, H. RUCK

Die Wellenfunktionen mit  $2(2s + 1)$  Komponenten — des Weinberg-Formalismusses [4] — wurden mit Erfolg auf freie Felder angewandt. Trotzdem wurden die Wechselwirkungen der Felder bis gegenwärtig fast ausschließlich durch den Rarita-Schwinger Formalismus beschrieben. Obwohl wir einige allgemeine Ergebnisse bezüglich der Anwendung der Weinberg-Methode kennen [4], [9], wurden noch keine numerischen Berechnungen für spezielle Fälle durchgeführt.

In dieser Arbeit wird die elastische Streuung von Spin—1 Teilchen, mit einer von Null verschiedenen Ruhemasse, in einem pseudoskalaren und elektromagnetischen Zentralfeld studiert. Wir berechnen den differentiellen Streuungsquerschnitt als Funktion des Impulses und der Polarisationsparameter des einfallenden und des gestreuten Teilchens.

1°. Wir bezeichnen mit  $\Psi$  die 6—Komponenten—Wellenfunktion des Spin —1 Teilchens, mit  $\varphi$  die Wellenfunktion des pseudoskalaren Feldes und mit  $A_\mu$  das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes.

Wir nehmen an, dass für die Wechselwirkungen: Teilchen-pseudoskalares Feld und Teilchen-elektromagnetisches Feld die Lagrange-Funktionen gelten

$$L_W = g\bar{\Psi}\gamma_{55}\Psi\varphi, \quad (1)$$

$$L_W = ie\left(\bar{\Psi}\gamma_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\nu}\gamma_{\mu\nu}\Psi\right)A_\mu, \quad (2)$$

wo

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_{44}$$

Der Ausdruck (1) ist eine Erweiterung der Lagrange-Funktion der Pion-Nukleon Wechselwirkung. Der Ausdruck (2) wurde mit Hilfe der von A. S a n k a r a n a r a y a n a n [10] vorgeschlagenen Stromdichte gebildet.

Die Matrizen  $\gamma_{55}$ ,  $\gamma_{\mu\nu}$  aus (1) und (2) sind die wohlbekannten Matrizen  $6 \times 6$  aus der Theorie der Spin—1 Teilchen [3], [4], [6], [7]:

$$\begin{aligned} \gamma_{55} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, & \gamma_{44} &= \begin{pmatrix} 0 & M_{44} \\ M_{44} & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{4k} &= \begin{pmatrix} 0 & -M_{4k} \\ M_{4k} & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_{jk} &= \begin{pmatrix} 0 & M_{jk} \\ M_{jk} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit

$$M_{44} = I, \quad M_{4k} = -iS_k, \quad \dot{M}_{jk} = -(S_j S_k + S_k S_j) + I \delta_{jk},$$

wo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für Zentralfelder haben wir

$$\varphi = \varphi(r); \quad A_i = 0, \quad A_4 = A_4(r),$$

wo  $r$  den Abstand von dem felderzeugenden Teilchen bezeichnet.

Wenn wir in Betracht ziehen, dass für ein Teilchen mit bestimmten Impuls

$$\Psi = u(\vec{p})e^{i\vec{p}x}$$

ist, und die S-Matrix Methode anwenden [1], so erhalten wir in erster Näherung für die differentiellen Streuquerschnitte

$$d\sigma = -g^2 \varepsilon^2 |\varphi(\vec{q}^2)|^2 S \rho u r (P_2 \gamma_{55} P_1 \gamma_{55}) \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}, \quad (3)$$

$$d\sigma = -e^2 \varepsilon^2 |A_4(\vec{q}^2)|^2 S \rho u r (P_2 Q P_1 Q) \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}, \quad (4)$$

mit

$$Q = (p_{1\mu} + p_{2\mu})\gamma_{4\mu}.$$

In den Formeln (3), (4) kennzeichnen die Indizes 1 und 2 den Anfangs- bzw. den Endzustand.  $\varepsilon$  ist die Energie,  $\vec{q}$  die Impulsübertragung:

$$\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

$\varphi(\vec{q}^2)$  und  $A_4(\vec{q}^2)$  sind die Fourier-Transformierten der Funktionen  $\varphi(r)$  bzw.  $A_4(r)$ :

$$\varphi(\vec{q}^2) = \int \varphi(r) \exp(-i\vec{q}\vec{x}) d^3x, \quad A_4(\vec{q}^2) = \int A_4(r) \exp(-i\vec{q}\vec{x}) d^3x,$$

$P$  ist die kovariante Polarisations-Matrix, welche durch

$$P_{\alpha\beta} = u_x \bar{u}_\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 6},$$

definiert wird.

Die Erhaltung der Energie:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  führt zu

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|,$$

folglich können wir

$$\vec{p}_1 = |\vec{p}|e_1, \quad \vec{p}_2 = |\vec{p}|e_2, \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}|^2 \cos \vartheta$$

schreiben ( $\vartheta$  Streuwinkel).

Wie man sieht, ist das rechnerische Hauptproblem die Berechnung der Spuren aus (3), (4).

2°. Die kovariante Polarisations-Matrix für das Spin-1 Teilchen hat folgende Gestalt:

$$P = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{m_0^2} \not{p}_\mu \not{p}_\nu \gamma_{\mu\nu} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{\rho\sigma}^{(1)} \gamma_{55} \gamma_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} s_{\rho\sigma}^{(2)} \gamma_{\rho\sigma} \right), \quad (5)$$

wo  $s_{\rho\sigma}^{(1)}$  und  $s_{\rho\sigma}^{(2)}$  durch

$$s_{\rho\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} t_k (l_{4\rho} k_{k\sigma} + l_{k\rho} l_{4\sigma}), \quad \sigma, \varrho = \overline{1, 4},$$

$$s_{\rho\sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} t_j (l_{j\rho} l_{k\sigma} + l_{k\rho} l_{j\sigma}), \quad j, k = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

gegeben sind [7], [8].

Die Parameter  $t_k$  sind die Komponenten des Polarisations-Vektors  $\vec{t}$  und  $t_{ik}$  sind die Komponenten des Polarisations-Tensors zweiten Ranges ( $t_{kk} = 0$ ,  $t_{jk} = t_{kj}$ ).

Mit  $l_{\lambda\rho}$  wurden die Koeffizienten der Lorentz-Transformation bezeichnet:

$$l_{44} = \beta, \quad l_{4k} = -l_{k4} = -i \beta v e_k, \quad l_{jk} = \delta_{jk} + (\beta - 1) e_j e_k, \quad (7)$$

mit

$$\vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \beta = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aus (6), (7) folgert

$$s_{\rho\sigma}^{(1)} = s_{\sigma\rho}^{(1)}, \quad s_{\rho\sigma}^{(2)} = s_{\sigma\rho}^{(2)}, \quad s_{\rho\rho}^{(1)} = s_{\rho\rho}^{(2)} = 0,$$

$$\not{p}_\rho \not{p}_\sigma s_{\rho\sigma}^{(1)} = 0, \quad \not{p}_\rho s_{\rho\sigma}^{(2)} = 0, \quad s_{\rho\sigma}^{(1)} s_{\rho\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \vec{t}^2, \quad s_{\rho\sigma}^{(2)} s_{\rho\sigma}^{(2)} = t_{jk} t_{jk}.$$

Es ist vorteilhaft für praktische Berechnungen die  $P$ -Matrix unter folgende Form zu setzen

$$P = a_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + b_{\mu\nu} \gamma_{44} \gamma_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} \gamma_{55} \gamma_{\mu\nu} + d_{\mu\nu} \gamma_{55} \gamma_{44} \gamma_{\mu\nu}, \quad (8)$$

welche möglich wird, wenn man folgende Beziehungen in Betracht zieht:

$$\gamma_{4j} \gamma_{4k} = \frac{1}{2} \gamma_{44} \gamma_{44} \delta_{jk} - \frac{1}{2} \gamma_{44} \gamma_{jk} - \frac{1}{2} \gamma_{55} \gamma_{44} \varepsilon_{jkm} \gamma_{4m},$$

$$\gamma_{4j} \gamma_{mk} = \frac{1}{2} \gamma_{44} (\delta_{im} \gamma_{4k} + \delta_{jk} \gamma_{4m}) - \frac{1}{2} \gamma_{55} \gamma_{44} (\varepsilon_{jmp} \gamma_{pj} + \varepsilon_{jkp} \gamma_{pm}),$$

$$\gamma_{ij} \gamma_{4k} = -\frac{1}{2} \gamma_{44} (\delta_{ik} \gamma_{4j} + \delta_{jk} \gamma_{4i}) + \frac{1}{2} \gamma_{55} \gamma_{44} (\varepsilon_{ikp} \gamma_{pj} + \varepsilon_{jkp} \gamma_{pi}),$$

$$\gamma_{ij} \gamma_{mk} = (\delta_{im} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mk}) \gamma_{44} \gamma_{44} + \frac{1}{2} \gamma_{44} (\delta_{im} \gamma_{jk} +$$

$$+ \delta_{ik} \gamma_{jm} + \delta_{jk} \gamma_{im} + \delta_{jm} \gamma_{ik} - 2 \delta_{ij} \gamma_{mk} - 2 \delta_{mk} \gamma_{ij}) -$$

$$- \frac{1}{2} \gamma_{55} \gamma_{44} (\delta_{im} \varepsilon_{jkm} + \delta_{ik} \varepsilon_{jmp} + \delta_{jk} \varepsilon_{imp} + \delta_{jm} \varepsilon_{ikp}) \gamma_{4p},$$

$$\{\gamma_{55}, \gamma_{\mu\nu}\} = 0, \quad \gamma_{55} \gamma_{55} = \gamma_{44} \gamma_{44}, \quad \{\gamma_{44}, \gamma_{4p}\} = [\gamma_{44}, \gamma_{mk}] = 0.$$

Für die Koeffizienten aus (8) finden wir auf diesem Wege:

$$\begin{aligned}
 a_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} s_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{6m_0^2} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu, \\
 c_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} s_{\mu\nu}^{(1)}, \\
 b_{44} &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{4m_0^2} \hat{p}_k \hat{p}_m (s_{km}^{(2)} + s_{44}^{(2)} \delta_{km}), \\
 b_{4k} &= -\frac{1}{4m_0^2} \hat{p}_\mu (\hat{p}_4 s_{\mu k}^{(2)} - \hat{p}_k s_{\mu 4}^{(2)}) - \frac{i}{2\sqrt{2} m_0^2} \varepsilon_{jlk} \hat{p}_j \hat{p}_\mu s_{\mu l}^{(1)}, \\
 b_{mk} &= -\frac{i}{\sqrt{2} m_0^2} \varepsilon_{jqm} (\hat{p}_4 \hat{p}_j s_{qk}^{(1)} + \hat{p}_q \hat{p}_k s_{4j}^{(1)}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2m_0^2} \left( \frac{1}{2} m_0^2 s_{mk}^{(2)} + \hat{p}_4 \hat{p}_4 s_{mk}^{(2)} + \hat{p}_m \hat{p}_k s_{44}^{(2)} - \hat{p}_4 \hat{p}_m s_{4k}^{(2)} + \hat{p}_m \hat{p}_l s_{lk}^{(2)} \right), \\
 d_{44} &= \frac{i}{2\sqrt{2} m_0^2} \hat{p}_k \hat{p}_m (s_{km}^{(1)} + \delta_{km} s_{44}^{(1)}), \\
 d_{4k} &= \frac{i}{2\sqrt{2} m_0^2} \hat{p}_\mu (\hat{p}_4 s_{\mu k}^{(1)} - \hat{p}_k s_{\mu 4}^{(1)}) + \frac{1}{4m_0^2} \varepsilon_{jlk} \hat{p}_j \hat{p}_\mu s_{\mu l}^{(2)}, \\
 d_{mk} &= \frac{1}{2m_0^2} \varepsilon_{jqm} (\hat{p}_4 \hat{p}_j s_{qk}^{(1)} + \hat{p}_q \hat{p}_k s_{4j}^{(1)}) + \\
 &\quad + \frac{i}{\sqrt{2} m_0^2} \left( \frac{1}{2} m_0^2 s_{mk}^{(1)} + \hat{p}_4 \hat{p}_4 s_{mk}^{(1)} + \hat{p}_m \hat{p}_k s_{44}^{(1)} - \hat{p}_4 \hat{p}_m s_{4k}^{(1)} + \hat{p}_m \hat{p}_l s_{lk}^{(1)} \right).
 \end{aligned}$$

### 3<sup>o</sup>. Ergebnisse.

a) Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \text{Spur}(M_{44} M_{44}) &= 3, \quad \text{Spur} M_{mk} = -\delta_{mk}, \\
 \text{Spur}(M_{4j} M_{4k}) &= -2\delta_{jk}, \quad \text{Spur} M_{4j} = \text{Spur}(M_{4j} M_{mk}) = 0, \\
 \text{Spur}(M_{ij} M_{mk}) &= 2(\delta_{im} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm}) - \delta_{ij} \delta_{mk},
 \end{aligned}$$

erhalten wir für die Spur aus (5):

$$\begin{aligned}
 -\text{Spur}(P_2 \gamma_{55} P_1 \gamma_{55}) &= 8(a_{\mu\nu}^{(1)} a_{\mu\nu}^{(2)} - b_{\mu\nu}^{(1)} b_{\mu\nu}^{(2)} - c_{\mu\nu}^{(1)} c_{\mu\nu}^{(2)} - d_{\mu\nu}^{(1)} d_{\mu\nu}^{(2)}) - \\
 &\quad - 2(a_{\mu\mu}^{(1)} a_{\nu\nu}^{(2)} - b_{\mu\mu}^{(1)} b_{\nu\nu}^{(2)} - c_{\mu\mu}^{(1)} c_{\nu\nu}^{(2)} - d_{\mu\mu}^{(1)} d_{\nu\nu}^{(2)}) + 32(b_{4k}^{(1)} b_{4k}^{(2)} + d_{4k}^{(1)} d_{4k}^{(2)}).
 \end{aligned}$$

b) Für einen nichtpolarisierten Teilchenstrom vereinfacht sich die Polarisations-Matrix zu

$$P_0 \sim \left( 1 + \frac{1}{m_0^2} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \gamma_{\mu\nu} \right)$$

( $\sim$  deutet die Proportionalität an).



Wenn wir uns auf diesen speziellen Fall beschränken und die Beziehungen

$$\text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_1)^2 = \text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_2)^2 = 2,$$

$$\text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_1)(\vec{S}, \vec{e}_2) = \text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_1)^2(\vec{S}, \vec{e}_2)(\vec{S}, \vec{e}_1) = 2 \cos \vartheta,$$

$$\text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_1)^2(\vec{S}, \vec{e}_2)^2 = \text{Spur}(\vec{S}, \vec{e}_1)(\vec{S}, \vec{e}_2)^2(\vec{S}, \vec{e}_1) = 1 + \cos^2 \vartheta,$$

benutzen, ergibt sich für die Spur aus (6) folgender Ausdruck:

$$- \text{Spur}(P_{02} Q P_{01} Q) \sim 48 \varepsilon^2 \left( 1 + \frac{1}{6} \beta^2 v^4 \sin^2 \vartheta \right).$$

#### L I T E R A T U R

1. A. I. Ahiezer, V. B. Beresteckij, *Kvantovaja elektrodinamika*, Izd. vtoroje, Moskva 1959, p. 272—274.
2. H. P. Stapp, *Phys. Rev.*, **103**, 425, 1965.
3. A. O. Barut, I. Muzinich, D. N. Williams, *Phys. Rev.* **130**, 442, 1963.
4. S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **133**, B. 1318, 1964.
5. D. L. Weaver, C. L. Hammer, R. H. Good, jr. *Phys. Rev.* **135**, B. 241, 1964.
6. A. Sankaranarayanan, R. H. Good, jr., *Il Nuovo Cimento* **36**, 1303, 1965.
7. A. Sankaranarayanan, *Il Nuovo Cimento*, **38**, 889, 1965.
8. Z. Gábos, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, series Math. -Phys.*, fasc. 2, 1968, p. 85.
9. M. S. Marinov, *Annals of Phys.*, **49**, 357, 1968.
10. A. Sankaranarayanan, *Il Nuovo Cimento*, **56**, A. 459, 1968.

#### ÎMPRĂȘTIEREA PARTICULELOR CU SPINUL UNU ÎNTR-UN CÎMP CENTRAL

(R e z u m a t)

În lucrare se studiază împrăștierea elastică a particulelor cu spinul unu și cu masa de repaus diferită de zero, într-un câmp central pseudoscalar și într-un câmp coulombian. Se stabilesc secțiunile eficace diferențiale în funcție de impulsul inițial și final, și de parametrii de polarizare ai stării inițiale și finale.

#### РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ С ЕДИНИЧНЫМ СПИНОМ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

(Р е з ю м е)

Авторами изучено рассеяние частиц с единичным спином и с различной от нуля массой покоя в центральном псевдоскалярном поле и в кулоновском поле. Установлены эффективные дифференциальные сечения в зависимости от начального и конечного импульса и от поляризационных параметров начального и конечного состояния.



# SPECTRELE DE ABSORBȚIE ÎN INFRAROȘU. ANALIZA TERMOGRAVIMETRICĂ ȘI CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ A SISTEMULUI $V_2O_5 - As_2O_3$

de

L. STĂNESCU, S. GOCAN, I. ARDELEAN și ȘT. MAX

Lucrarea se încadrează în studiul sistematic consacrat unor sticle semiconductoare pe bază de  $V_2O_5$  [1, 2, 3, 4], urmînd să fie extinsă prin introducerea unui al treilea component oxidic.

În literatură nu există nici un fel de date structurale și electrice privind sistemul  $V_2O_5 - As_2O_3$ .

Lucrarea este dedicată atît clarificării unor probleme de natură principială (conductibilitatea electrică în sticle), cît și unor eventuale aplicații practice (confecționarea de termistori).

**Partea experimentală. 1. Prepararea probelor.** Pentru prepararea probelor am folosit produși de puritate p.a. care au fost topiți în creuzete de cuarț.

În tabelul 1 este redată compoziția probelor exprimată în procente molare.

Tabel 1

Nr. probelor	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_2O_5$ mol %	98	95	90	80	70	60	50	40
$As_2O_3$ mol %	2	5	10	20	30	40	50	60

2. *Studiul spectrelor de absorbție în infraroșu.* Pentru obținerea spectrelor s-a folosit spectrograful UR-10 și tehnica pastei în nujol.

Benzile caracteristice ale spectrului de absorbție pentru  $V_2O_5$  sînt analizate în alte lucrări [5, 6].

În fig. 1 redăm spectrul de absorbție în IR al  $As_2O_3$ .

Se constată un maxim de absorbție puternic avînd două picuri situate respectiv la  $820\text{ cm}^{-1}$  și  $920\text{ cm}^{-1}$  și un maxim mai puțin intens situat la  $1240\text{ cm}^{-1}$ . În domeniul frecvențelor joase spectrul posedă benzi de intensitate mult mai slabă. Astfel este cazul benzii de la  $600\text{ cm}^{-1}$ . Spectrul mai posedă benzi corespunzătoare probabil vibrațiilor de deformare la frecvență joasă. Este cazul benzii de intensitate slabă cu două maxime situate la  $450\text{ cm}^{-1}$  și  $475\text{ cm}^{-1}$ .

Pe măsura adausului de  $\text{As}_2\text{O}_3$  la  $\text{V}_2\text{O}_5$  este influențată mai ales banda de la  $1020\text{ cm}^{-1}$  a  $\text{V}_2\text{O}_5$ , care la concentrații mai mari de  $\text{As}_2\text{O}_3$  dispare. Dispariția acestui maxim este legată de formarea unei faze cu aspect net sticlos.

În fig. 2, spectrul nr. 2, cu 30%  $\text{As}_2\text{O}_3$  corespunde formării fazei vitroase. La 50%  $\text{As}_2\text{O}_3$  aspectul sticlos este și mai accentuat (spectrul nr. 3).

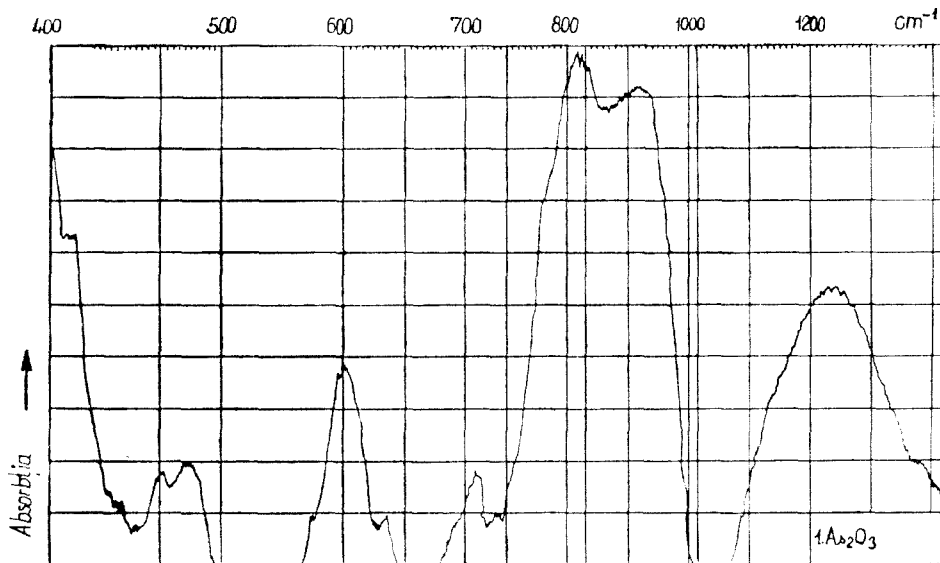


Fig. 1.

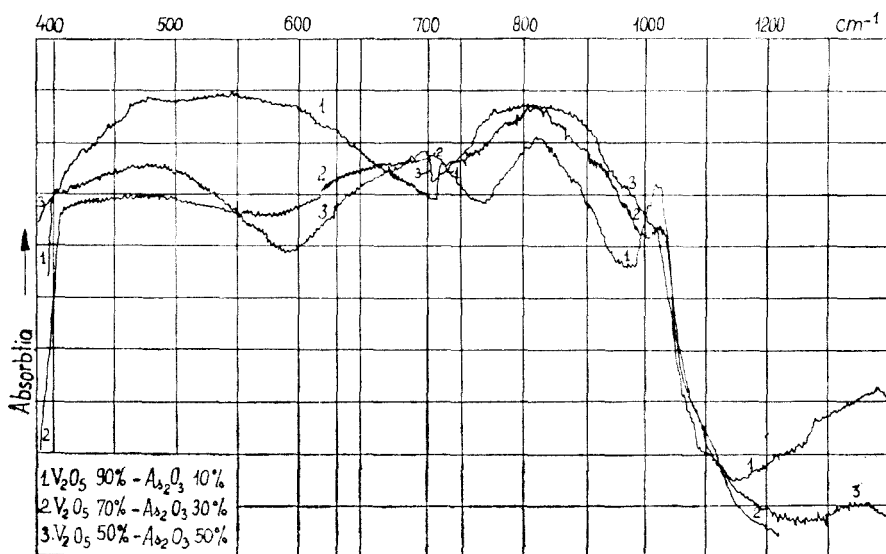


Fig. 2.

Se constată că formarea de sticle este însoțită de o uniformizare a absorbției în urma atenuării caracterului cristalin al probelor.

3. *Studiul termogravimetric.* Analiza termogravimetrică s-a făcut cu ajutorul unui „Derivatograph” typ OD-101 (PPE-676).

În fig. 3 redăm cantitatea de oxigen în miligrame, absorbită la topirea probelor din sistemul  $V_2O_5-As_2O_3$  raportată la un gram de substanță în funcție de compoziția componentelor [5].

Se constată că o dată cu formarea fazei vitroase nu se mai pune în evidență absorbția de oxigen la topire. În faza vitroasă sistemul nu prezintă nestoechiometrie în raport cu oxigenul. Acest fapt interesant este în foarte bun acord cu observația lui B. T. K o l o m i e ț și T. F. N a z a r o v a, [7], după care în fazasticloasă de  $As_2SeTe_2$  nu există conductibilitate de impurități.

Tot așa, în cazul unor sticle semiconductoare de tipul  $V_2O_5 -$

$P_2O_5-RO_3$  conductibilitatea este de asemenea de tip intrinsec [8].

Ținând cont de rezultatele analizei termogravimetrice, conform căreia nu avem nestoechiometrie în raport cu oxigenul, nu vom avea nici donori reprezentați de  $V^{4+}$  sau vacanțe de oxigen în cantități deceleabile termogravimetric care reprezintă centrele de absorbție a oxigenului la topire [5].

4. *Studiul rezistenței electrice în funcție de temperatură.* Măsurătorile s-au făcut folosind instalația și metoda descrisă în lucrarea [1].

În fig. 4 este redată dependența  $\log R = f(T)$ .

Se constată că toate probele prezintă o dependență de formă exponențială. Dreptele semilogaritmice posedă o pantă constantă. Se constată că pe măsura adăugării de  $As_2O_3$  panta dreptelor semilogaritmice crește, cu creșterea concomitentă și a rezistenței electrice.

Acest fapt este ilustrat mai bine în fig. 5 unde redăm dependența energiei de activare a conductibilității în funcție de compoziția sistemului.

Se constată că începând de la cca 30%  $As_2O_3$  energia de activare variază puțin. Sintem tocmai în domeniul unde analiza termogravimetrică nu prezintă nestoechiometrie în raport cu oxigenul. Începând cu concentrația amintită mai sus s-a pus în evidență, după cum am mai amintit, formarea de fază vitroasă, caracterizată și printr-un spectru IR mai puțin bogat în benzi de absorbție.

S-a mai amintit în cadrul analizei termogravimetrice că domeniul cuprins între 30%  $As_2O_3$  și 60%  $As_2O_3$  — fază vitroasă — trebuie să posedă o conductibilitate de tip intrinsec. Acest fapt este sprijinit atât de energia de activare mare și cvasiconstantă în acest domeniu cât și de rezistențele electrice mari ale probelor.

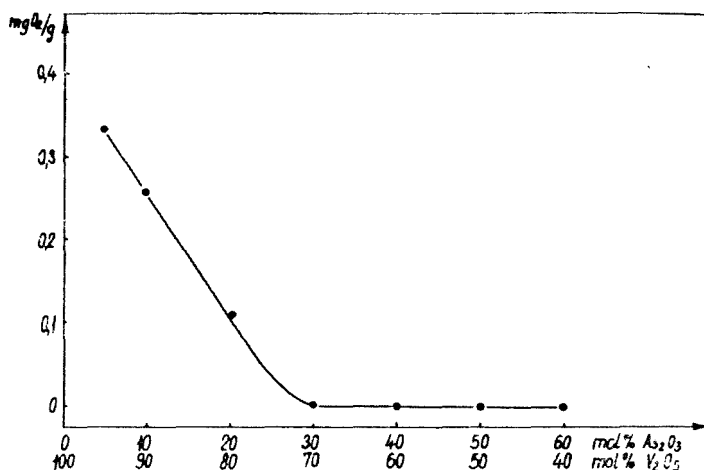


Fig. 3.

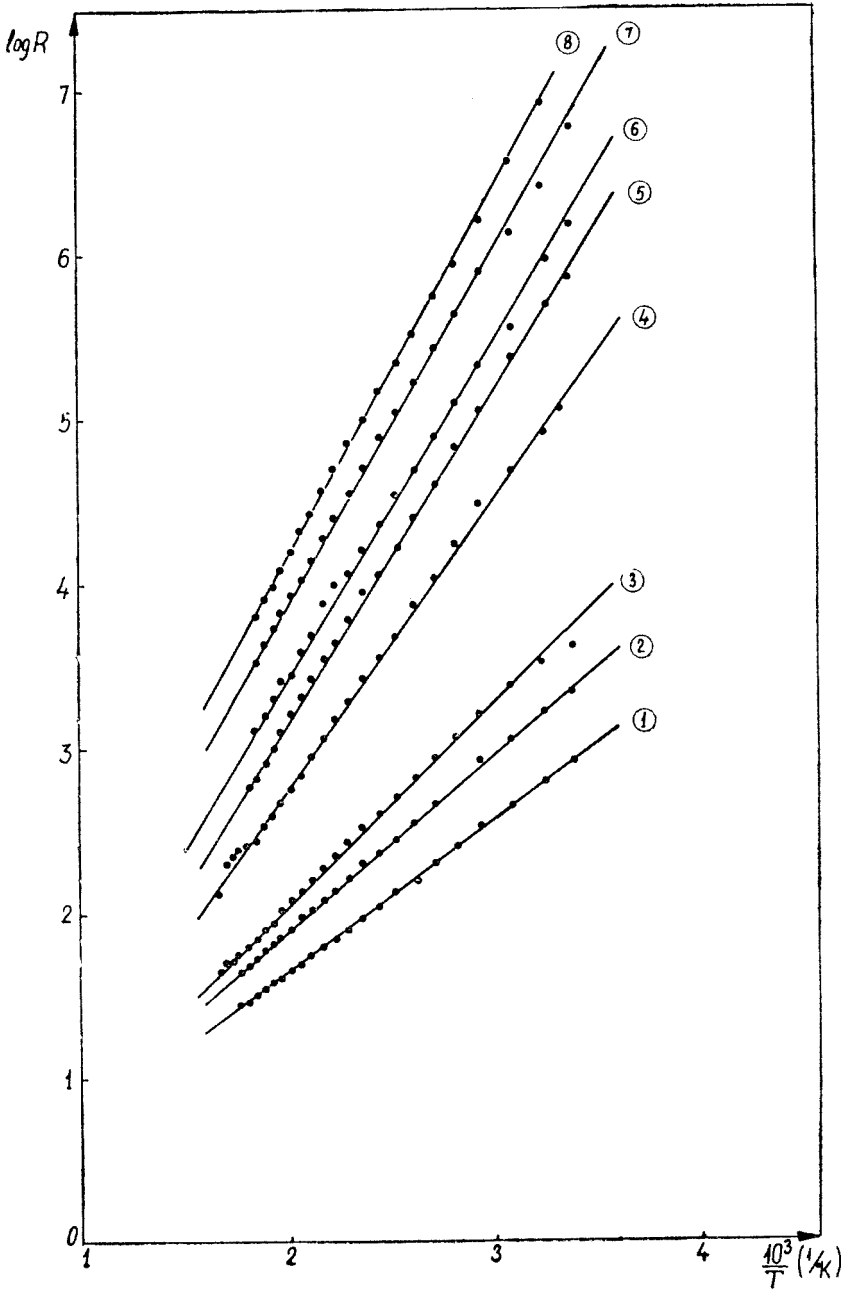


Fig. 4.

Ținând cont de datele electrice, analiza termogravimetrică și de concepția generală după care sticlele posedă doar conductibilitate proprie [9], putem admite că și în cazul sticlelor din sistemul  $V_2O_5-As_2O_3$  studiat de noi, conductibilitatea este de asemenea de tip intrinsec.

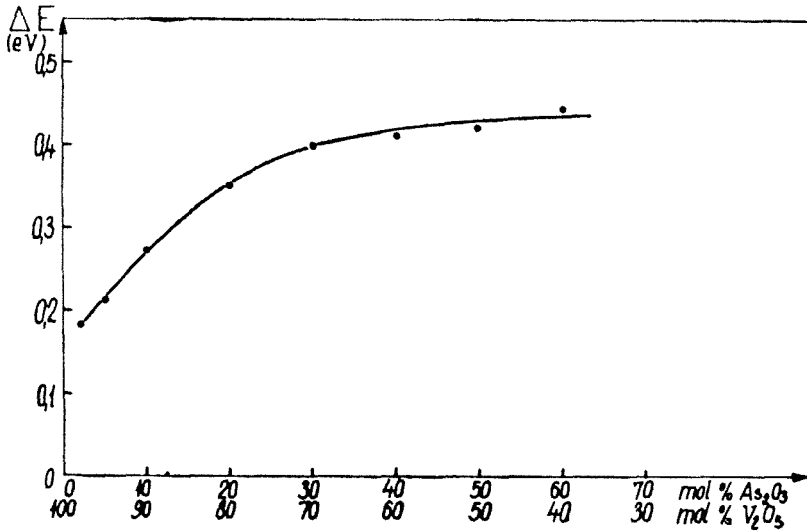


Fig. 5.

Aspectul aproape perfect linear al dreptelor semilogaritmice și valorile energiilor de activare în domeniul fazelor sticloase prezintă interes în ceea ce privește posibilitatea confecționării de termistori.

**Concluzii.** În sistemul semiconductor  $V_2O_5-As_2O_3$  s-a pus în evidență formarea unor sticle semiconductoare în intervalul 30% — 60%  $As_2O_3$  caracterizate prin spectre IR puțin bogate în benzi, lipsa nestoechiometriei în raport cu oxigenul, și energia de activare a conductibilității mai mare decât a celorlalte compoziții nesticloase. Energia de activare a conductibilității pentru fazele sticloase depinde puțin de compoziție. Variația cu compoziția a energiei de activare are un mers antibat comparativ cu variația nestoechiometriei în raport cu oxigenul în funcție de compoziție, determinată pe cale termogravimetrică. Acest fapt este în acord cu datele experimentale în general cunoscute la semiconductori, după care o nestoechiometrie mare duce la energii de activare mici și invers.

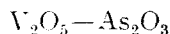
Lipsa de nestoechiometrie în raport cu oxigenul pusă în evidență la fazele sticloase cît și variația energiei de activare și a rezistenței electrice pentru aceste faze, ne permit să tragem concluzia că fazele sticloase posedă o conductibilitate de tip intrinsec.

## BIBLIOGRAFIE

1. S. Gocan și L. Stănescu, Stud. Univ. Babeș-Bolyai. Seria Math.-Phys. fasc. 1, 105 (1965).
2. S. Gocan, L. Stănescu și Șt. Man, Stud. Univ. Babeș-Bolyai, Seria Math.-Phys. fasc. 2, 109 (1965).
3. L. Stănescu, S. Gocan, I. Ardelean și Șt. Man, Stud. Univ. Babeș-Bolyai (sub tipar).

4. S. Gocan, L. Stănescu, I. Ardelean și Șt. Man, Stud. Univ. Babeș-Bolyai (sub tipar).
5. L. Stănescu și I. Ardelean, Stud. Univ. Babeș-Bolyai, Seria Math.-Phys. fasc. 1, 101 (1969).
6. O. G. Barraclough, J. Lewis, R. S. Nyholm, J. Chem. Soc., 3552 (1959).
7. B. T. Kolomiț, T. F. Nazarova, F.T.T., 2, 174 (1960).
8. L. A. Greceanic, N. V. Petrovach, V. G. Karpeccenco, F.T.T., 2, 2131 (1960).
9. A. I. Gubanov, *Kvantovoelektronnaia teoria amorfnih provodnikov*, Moskva-Leningrad, 1963.

## СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ В ИНФРАКРАСНОЙ ОБЛАСТИ. ТЕРМОГРАВИМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ СИСТЕМЫ



(Резюме)

Авторы проанализировали ИК спектры некоторых образцов полупроводниковой системы  $\text{V}_2\text{O}_5 - \text{As}_2\text{O}_3$ , выявляя образование стеклянных фаз.

Термогравиметрический анализ указывает на отсутствие нестехиометрии по отношению к кислороду для стеклянных фаз.

Электрическое сопротивление образцов повышается по мере прибавления  $\text{As}_2\text{O}_3$ , а энергия активации имеет квазипостоянное значение в области стеклянных фаз.

Авторы считают, что полученные таким образом стёкла (между 30% и 60%  $\text{As}_2\text{O}_3$ ) имеют проводимость собственного типа.

## INFRA-RED ABSORPTION SPECTRA, THERMOGRAVIMETRIC ANALYSIS AND ELECTRICAL CONDUCTIVITY POWER OF THE $\text{V}_2\text{O}_5 - \text{As}_2\text{O}_3$ SYSTEM

(Summary)

I. R. spectra of some samples from  $\text{V}_2\text{O}_5 - \text{As}_2\text{O}_3$  semiconductor system were analysed making evident glassy phases formation.

Thermogravimetric analysis indicates lacking of nonstoichiometry in comparison with oxygen for glassy phases.

The electrical resistance of the samples increases with adding  $\text{As}_2\text{O}_3$  and the activation energy presents a quasi plateau region in the domain of glassy phases.

The glass obtained in this way (between 30% - 60%  $\text{As}_2\text{O}_3$ ) is considered to present an intrinsic type conductivity power.



## E.S.R. SPECTRUM OF $Mn^{2+}$ IN $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$

by

GH. CRISTEA and A. DARABONT

Cadmium and ammonium double sulphate  $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3$  is a compound which attracted the attention of researchers especially by its ferroelectric properties. The transition temperature of the paraelectric phase to that of the ferroelectric one is  $-184^\circ C$  [1].

In 1962 Tatzuzaki [1] published a partial study on ESR spectrum of  $Mn^{2+}$  in  $(NH_4)Cd_2(SO_4)_3$ . In the following, we will present some ESR measurements on the same system.

Our measurements were carried out on single crystal samples obtained by evaporation from watery solution to which a small amount of  $MnSO_4$  was added as impurities. The crystallization process took place at room temperature and the average sizes of the crystals were about 10  $\mu m$ . We note that in [1] the growth of the crystals was done at  $83^\circ C$ , which probably increased the growth rate.

The crystal symmetry of the  $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3$  is cubic, being described by space group  $T$  ( $3C_2$ ,  $4C_3$ ) [1, 2, 3].

In the cadmium and ammonium double sulphate lattice,  $Mn^{2+}$  ions have the possibility to substitute both cadmium as well as ammonium ions. These two sites are magnetically unequivalent and this fact can be noticed in the ESR spectrum by the appearance of several lines (in the middle of the spectrum) which makes pattern analysis difficult.

Despite the above, it results clearly from the intensity ratio of lines, originated in unequivalent ions, that we can conclude that the substitution goes on preferentially for a certain kind of sites. We suppose that the ammonium ions are substituted with a higher probability owing to the their bigger sizes.

The spectrum was drawn up at room temperature in the X band. The crystal orientation was made up roughly with the help of a two circles goniometer and then in the resonant cavity.

From the angular dependence of the spectrum we found that the symmetry of the close vicinity of  $Mn^{2+}$  is an axial one. As in Tatzuzaki's paper the symmetry axis of crystalline field is chosen along the direction  $[111]$  of the system  $\xi, \eta, \zeta$  connected with the cubic axis of the crystal.

The spin Hamiltonian used for the spectrum interpretation is the common one for S state ions [4].

$$(1) \quad H_s = g\beta\mathbf{H} \cdot \mathbf{S} - D \left[ S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \\ + \frac{1}{6} a \left[ S_x^4 + S_y^4 + S_z^4 - \frac{1}{5} S(S+1)(3S^2 + 3S - 1) \right] + \\ + \frac{1}{180} F \left[ 35 S_z^4 - 30 S(S+1) S_z^2 + 25 S_z^2 - 6S(S+1) + 3S^2(S+1)^2 \right] + \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$$

where the  $z$  direction is parallel to the  $c$  axis of the trigonal crystalline field. In order to evaluate the energetic levels of the ions, as well as that of the resonant fields then Hamiltonian (1) is expressed in the same frame system, it is diagonalized and then the theory of perturbation is used [5]. The values of resonant fields, in the third order approximation, and  $\mathbf{H} \parallel z$  are [6].

$$H_{Mm} = H_0 - D(2M - 1) - K(a - F) - AMm - \\ - \frac{A^2}{2H_0} [I(I+1) - m^2 + m(2M - 1)] - \\ - \frac{A^3}{2H_0^3} [(I^2 + I - m)(2M - 1) - m(S^2 + S - 3M^2 + 3M - 2)] + \\ + \frac{A^2 D}{H_0^2} [(I^2 + I - m)(2M - 1) - m(S^2 + S - M^2 + M - 1)]$$

where  $K = -4/3, 5/3, 0, -5/3, +4/3$  for  $M = +5/2, +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ , and the rest of parameters have the usual significance. The parameter values of the spectrum determined by us are:

$$|D| = (264 \pm 2) \text{ Gs} \quad |A| = (88 \pm 2) \text{ Gs} \\ |(a - F)| = (3 \cdot 34 \pm 2) \text{ Gs} \quad g = 1.9988 \pm 0.0004$$

We succeeded to establish only the relative sign of parameters, namely  $\text{sign } A = -\text{sign } D = -\text{sign } (a - F)$ .

We must note that the  $D$  value, determined by us differs very much from that reported in [1]. We consider that the error came as a result of a wrong orientation of the crystal, thus the spectrum had no maximum extension. This is proved by good agreement between the calculated values of the resonance fields and those experimentally measured.

Fine structure				Hyperfine structure ( $1/2, -1/2$ )			
M	M - 1	$\Delta H_{\text{calc}}(\text{Gs})$	$\Delta H_{\text{meas}}(\text{Gs})$	$m,$	m - 1	$\Delta H_{\text{calc}}(\text{Gs})$	$\Delta H_{\text{meas}}(\text{Gs})$
5/2,	3/2	514	510	-3/2,	-5/2	93	94
3/2,	1/2	531	529	-1/2,	-3/2	90	90
1/2,	-1/2	534	538	1/2,	-1/2	88	88
-1/2,	-3/2	522	525	3/2,	1/2	85	87
				5/2,	3/2	83	84

As it may be seen in the tables, the agreement is satisfactory, that is they are within the experimental error limits of calculation of the magnetic field  $\pm 2$  Gs.

According to the author's statement [1] he did not succeed to identify in the spectrum only the extreme lines with the help of which he determined certain parameters of the spectrum. This, probably, because at a temperature of  $83^\circ C$ , during the growth of single crystals, the  $Mn^{2+}$  ions did not occupy a preferential site of ammonium and thus all the lines of the spectrum have approximately the same intensity.

We succeeded to identify all the lines of the spectrum obtained from one of unequivalent sites  $(NH_4^+)_2$  and to determine correctly the values of the parameters of EPR spectrum.

The undiscussed lines, which have much less intensity are attributed by us to  $Mn^{2+}$  ions of a second type (which substitute cadmium) although it would be possible in  $0 \neq 0$  for forbidden transitions also to appear.

#### REFERENCES

1. I. Tatzuzaki, J. Phys. Soc. Japan, **17**, 3, 852 (1962).
2. J. B. Veres, C. R. **158**, 39 (1914).
3. Al. Codarcea, și *Mîneralgie (Cristalografia)*, București (1961).
4. I. Ursu, *Rezonanța electronică de spin*, Edit. Acad. R.S.R., București, 1965.
5. B. Bleaney, D. J. E. Ingram, Proc. Roy. Soc., **A205**, 336, 1951.
6. J. Schneider, S. R. Sircar, Z; Naturforshung, **17a**, 651 (1962).

#### SPECTRUL RES AL $Mn^{2+}$ ÎN $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$

(Rezumat)

S-a studiat spectrul de rezonanță electronică de spin al ionului  $Mn^{2+}$  în  $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$  în fază cubică, la temperatura camerei. S-a constatat că ionul de mangan ocupă două poziții cu vecinătăți diferite, din care una în mod preferențial. Spectrul ionului  $Mn^{2+}$  care ocupă locurile cationului  $(NH_4)^+$  este descris satisfăcător de către Hamiltonianul de spin corespunzător unui cimp cristalin axial, cu constantele pentru  $H||z$ :  $|D| = 264 \pm 2$  Gs,  $|A| = 88 \pm 2$  Gs,  $|a - f| = 3 \pm 2$  Gs și  $g = 1,9988 \pm 0,0004$ . Merită remarcat faptul că valoarea lui D determinată de noi diferă mult de cea raportată în [1].

#### ЭПР СПЕКТР ИОНА $Mn^{2+}$ В $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$

(Резюме)

Авторы изучали ЭПР спектр иона  $Mn^{2+}$  в  $(NH_4)_2Cd_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$  в кубической фазе, при комнатной температуре. Установлено, что ион марганца занимает два положения с различным окружением, из которых одно является предпочтительным.

Спектр иона  $Mn^{2+}$ , занимающего места катиона  $NH_4^+$ , удовлетворительно описан спиновым гамилтонианом, соответствующим осевому кристаллическому полю со следующими постоянными при  $H||Z$ :  $|D| = 264 \pm 2G_s$ ,  $|A| = 88 \pm 2G_s$ ,  $|a - f| = 3 \pm 2G_s$  и  $g = 1,9988 \pm 0,0004$ .

Следует отметить, что определенное нами значение  $D$  заметно отличается от опубликованного в [1].



# ELECTRICAL RESISTIVITY OF BINARY ALLOYS WITH TRANSITION METALS (I) CLASSICAL THEORY

by  
M. CRIŞAN

**1. Introduction.** Pop and Şteţiu's experimental investigations [1–2] pointed out that alloys of transition metals of the Ni–Fe, Ni–Pd, Pd–Co type have for the resistivity a behaviour of the form:

$$\rho = \rho_0(1 + an\tau) \quad (1)$$

where  $\rho_0$  is the resistivity of the host metal "a" is a constant with the same value for these alloys, and " $n\tau$ " is the electronic concentration caused by the impurities. The aim of this work is to explain the behaviour of these alloys within the frame of the band model using the classical method, that is Boltzman's equation. Analysing the magnetic behaviour of transition metals Mott [3], Hasegawa, Wakon and Yamashita [4] correlated the transport properties with magnetic properties which shows the remarkable role of d-electrons in the transport properties.

**2. The interaction model.** For a pure transition metal the realisation of a "s–d" interaction is expressed by the probability  $P_0$ . If an impurity is introduced a supplementary scattering appears between the s-electrons of the alloying metal and d-electrons of the host metal which is expressed by the probability  $P_1$ .

It seems interesting that one must not take into account the scattering between s-electrons of host metal and x-electrons of the alloying metal but in [2] Pop and Şteţiu show, that relation (1) is valuable for Co-Cu alloys, too, and in the following we shall neglect this interaction. If we note with  $P_f$  the scattering probability of s-electrons with phonons, the total probability has the form:

$$P = P_0 + P_f + P_1(P_0 + P_f) + \dots \quad (2)$$

where the scattering with the thermal motion of the impurities has been neglected [5].

**3. The electrical resistivity for a pure transition metal.** The distribution function of electrons in the presence of the interactions can be written like this:

$$f_k = f_k^0 + \Phi_k \frac{\partial f_k^0}{\partial E_k} \quad (3)$$

where  $f_k^0$  is the free distribution function and  $\Phi_k$  is a perturbation.

Boltzman's equation in the integral form can be written

$$X(\vec{k}) = \int dk' [\Phi_{\vec{k}} - \Phi_{\vec{k}'}] P_{kk'} \quad (4)$$

where  $N_{(\vec{k})}$  is the operator depending on the external field and  $P_{(\vec{k}, \vec{k}')}^{\vec{\tau}}$  is the probability of  $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$  transition. If the entropy of the scattering is defined by :

$$S = -k \int [f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k)] dk \quad (5)$$

we get immediately for the production of the entropy  $\frac{dS}{dt}$  the expression :

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_c = - \frac{1}{2KT^2} \iint [\Phi_{\vec{k}^{\vec{\tau}}} - \Phi_{\vec{k}'^{\vec{\tau}}}] P_{(\vec{k}, \vec{k}')^{\vec{\tau}}} d\vec{k} d\vec{k}' \quad (6)$$

The production of the macroscopic entropy  $\left. \frac{dS}{dt} \right|_M$  is expressed by

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_M = - \frac{\varrho J^2}{T} \quad (7)$$

where  $\varrho$  is the electrical resistivity and  $J$  is the electrical current :

$$J = \int e v_k \Phi_k \frac{\partial f_k^\circ}{\partial E_k} d\vec{k} \quad (8)$$

After a stationar condition is required we get for "  $\varrho$  " the following value :

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2kT} \iint [\Phi_{\vec{k}^{\vec{\tau}}} - \Phi_{\vec{k}'^{\vec{\tau}}}] P_{(\vec{k}, \vec{k}')^{\vec{\tau}}} d\vec{k} d\vec{k}'}{\left| e \int V_k \Phi_k \frac{\partial f_k^\circ}{\partial E_k} \right|^2} \quad (9)$$

This expression can be written :

$$\varrho = \frac{\langle \Phi, P\Phi \rangle}{\{ \langle \Phi, X(E=1)\Phi \rangle \}^2} \quad (10)$$

where :

$$\{ \langle \Phi, X(E=1)\Phi \rangle \}^2 = \left\{ \int e \Phi_k V_k \frac{\partial f_k^\circ}{\partial E_k} d\vec{k} \right\}^2 = \left\{ \frac{eRS}{2\pi^3 h} \right\}^2 \quad (11)$$

$R$  being the Fermi sphere radius and  $S$  the value of this surface.

The N-electron scattering doesn't give a contribution to electrical resistivity but the U-process gives in the "s - d" scattering a contribution of the form :

$$\langle \Phi, P\Phi \rangle = \frac{\pi^4}{16} \frac{e^2}{V_s E_s} \left( \frac{R}{q} \right) \left( \frac{V_s - V_d}{V_d} \right)^2 \frac{K^2 T^2}{E_s^2} \quad (12)$$

where

$\Phi_k = \vec{V}_k \vec{U}$  and the scattering is described by

$$\{ (\vec{V}_1 - \vec{V}_3 + \vec{V}_2 - \vec{V}_1) \vec{U} \}^2 = \frac{(V_s - V_d)^2 (kR)^2}{R^2} \quad (13)$$

$$\vec{K}_3 - \vec{K}_2 = \vec{K} \quad \vec{K}_2 = \vec{K}_1 - \vec{g} = \vec{q}$$

In the following lines we shall apply this method to the calculation of the resistivity of alloys. The results will be compared with the experimental values.

**4. The resistivity of the alloy.** If the total probability  $P$  expressed by (2) is substituted in (10) the resistivity of the alloy,  $\rho_a$  can be written:

$$\rho_a = \frac{\langle \Phi, \{P_0 + P_f + cP_1(P_0 + P_f)\} \Phi \rangle}{\{\langle \Phi, N(E=1) \Phi \rangle\}^2} \quad (15)$$

we obtain for  $\rho_a$  the following value:

$$\rho_a = \rho_0(1 + ca) \quad (16)$$

where „ $a$ ” is:

$$a = \langle \Phi, P_1 \Phi \rangle = \frac{\pi^4 r_s^2}{16V_s E_s} \left( \frac{R}{q} \right) \left( \frac{V_s - V_d}{V_d} \right)^2 \frac{K^2 T^2}{E_s^2} \quad (17)$$

The value  $\frac{R}{q}$  can be obtained from  $\frac{q}{R} = 0,814 \sqrt{r_s}$  where  $r_s$  is the ecrane radius, and for the transition metals is 1–1,5 and  $E_s \approx E_F$ .

If the proportion  $V_s$  and  $V_d$  is expressed by  $V_s = 10 V_d^2$  we obtain for „ $a$ ” the value  $a = 0,021$ .

This constant can be calculated from [2] and we get  $a = 0,022$  in accordance with the theoretical calculation.

**5. Conclusions.** From the supposed model and the concordance between the theoretical and experimental results we arrived at the conclusion that the impurities have a special role in the „ $s - d$ ” process through the change of the concentration of „ $s$ ” electrons.

It is necessary to treat this problem using the second quantization method in order to obtain a complete description of the „ $s - d$ ” interaction.

The author wishes to express his thanks to Dr. Iuliu Pop for the helpful discussions.

#### REFERENCES

1. I. Pop, P. Şteţiu, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, I*, 227 (1961).
2. I. Pop, P. Şteţiu, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, I*, 133 (1963).
3. N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc., A*, 153 (1936), A. 156, 368 (1936).
4. A. Hasegawa, S. Wakoh, J. Yamashita, *Journ. of Phys. Soc. of Japan*, 20, 1865 (1965).
5. P. L. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, 80, 755 (1962).
6. J. M. Ziman, *Electrons and Phonons*, Oxford (1960).

#### REZISTIVITATEA ELECTRICĂ A ALIAJELOR BINARE CU METALE DE TRANZIȚIE (I)

##### *Teoria clasică*

##### (Rezumat)

Se studiază teoretic comportarea rezistivității unui aliaj al metalelor de tranziție.

Relația  $\rho = \rho_0(1 + a\tau)$  găsită experimental este dedusă, iar pentru constanta „ $a$ ” se găsește o bună concordanță cu valoarea calculată din lucrările experimentale.

УДЕЛЬНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ СПЛАВОВ ПЕРЕХОДНЫХ  
МЕТАЛЛОВ (I)*Классическая теория*

(Р е з ю м е)

Теоретически изучается поведение удельного электрического сопротивления сплава переходных металлов.

Автором было получено теоретически соотношение, с помощью которого интерпретируется экспериментально соотношение  $\rho = \rho_0 (1 + an\tau)$ , ранее установленное другими авторами.



# THE EXPLICIT FORM OF THE EULER ROTATION FOR THE EQUIVALENT OPERATORS

by

AL. NICULA, S. I. FĂRCAȘ and MARLENE PALADI

**Introduction.** It is known that the usual method used in describing the ESR spectra of the paramagnetic ions in crystals is the spin Hamiltonian method. In order to explain the crystalline field effect on the paramagnetic ions the ground state of which is  ${}^{2S+1}S_g$  in the spin Hamiltonian the polynomials in  $S$ —the spin operator — has been introduced. These are submitted to that law of symmetry like the crystalline field neighbouring the paramagnetic ions.

These extra terms  $O_n^m$ , from the spin Hamiltonian are named "The crystal field operators" or "The equivalent operators" [1].

In the spin Hamiltonian the equivalent operators which reflect the cubic symmetry, are defined in the cubic axis frame and the axial or lower terms are defined in the axis system of distortion (for. ex. [2] and [3]).

In order to describe the energy levels of the paramagnetic ions we must make a Eulerian rotation of one system to another system and the corresponding transformation of the equivalent operators.

A general expression for such transformations is given by Baker and Williams [4] but the authors did not turn the  $O_n^m$  operators. They rotated the  $\Theta_n^m$  operator which are proportional with the first. Vinokurov, Zaripov and Stepanov [5] gave the transformations of  $O_n^m$  in an explicit form in the case when  $\alpha$ ,  $\beta$  are arbitrary and  $\gamma = 0$ .

In our paper we give out a general expression for the transformations of the equivalent operators starting from the definition of the rotation operator given by Rose [6]. Such a transformation has been obtained by V. Lupci, A. Lupci and I. Ursu [7] starting from the definition of the rotation operator given in [8]. The difference between our transformation and that from [7] is according to the difference between the definitions of the rotation operators.

Further we apply this transformation and obtain the explicit expressions for the rotation of the equivalent operators used in the interpretation of the ESR spectra.

**Theory.** Starting from the expression of the  $O_n^m$  operators, by means of the rotation operator  $D(\alpha, \beta, \gamma)$  given by Rose, we obtained the transformation relations for the  $O_n^m$  operators :

$$\begin{aligned} (D(\alpha, \beta, \gamma)O_n^m) &= \frac{E_n^m}{E_n^0} (-)^m d_{n,m}^{(n)}(\cdot - \beta) O_n^0 \cos m\alpha + \\ &+ \sum_{m'=1}^n \frac{E_n^m}{E_n^{m'}} (-)^{m'} \{ [(-)^m d_{m',m}^{(n)}(\cdot - \beta) \cos(m'\gamma + m\alpha) + d_{m',-m}^{(n)}(-\beta) \times \\ &\times \cos(m'\gamma - m\alpha)] O_n^{m'} + [(-)^m d_{m',m}^{(n)}(-\beta) \sin(m'\gamma + m\alpha) + d_{m',-m}^{(n)}(-\beta) \times \\ &\times \sin(m'\gamma - m\alpha)] (O_n^{m'})^* \} \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} d_{m',m}^{(n)}(\beta) &= [(n+m)!(n-m)!(n+m')!(n-m')!]^{1/2} \\ &\times \sum_j (-)^j \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2n+m-m'-2j} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2j}}{(n-m'-j)!(n+m-j)!(j+m'-m)!j!} = d_{m'm}^{(n)}(-\beta) \end{aligned} \quad (2)$$

In our calculations we used the  $(O_n^m)^*$  operators the matrix elements of which are related to those of the  $O_n^m$  operators by the relations [7] (for  $m > 0$ ).

$$\langle l \pm m | (O_n^m)^* | l \rangle = \mp i \langle l \pm m | O_n^m | l \rangle \quad (3)$$

In (1) the coefficients  $E_n^m$  are given by following relation

$$E_n^m = \frac{1}{C_n^m} \left[ \frac{\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} \quad (4)$$

where the  $C_n^m$  are the numerical factors of the Legendre polynomials.

The expressions for these transformations of the  $O_n^m$  operators describing the cubic, hexagonal, trigonal, tetragonal and orthorhombic crystalline field have been calculated using (1). These expressions are :

$$\begin{aligned} O_0^2 \rightarrow & \frac{E_2^0}{E_2^0} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) O_0^2 - \frac{E_2^0}{E_2^0} \sqrt{6} \sin \beta \cos \beta [O_2^0 \cos \gamma + O_2^0{}^* \sin \gamma] + \\ & + \frac{E_2^0 \sqrt{6}}{E_2^0} \frac{1}{2} \sin^2 \beta [O_2^0 \cos 2\gamma + O_2^0{}^* \sin 2\gamma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2^1 \rightarrow & + \frac{E_2^1 \sqrt{6}}{E_2^0} \sin \beta \cos \beta O_2^0 \cos \alpha + \frac{E_2^1}{E_2^0} \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta [O_2^1 \cos(\gamma + \alpha) + \\ & + O_2^1{}^* \sin(\alpha + \gamma)] - \frac{E_2^1}{E_2^0} \sin \beta \cos \beta [O_2^1 \cos(2\gamma + \alpha) + O_2^1{}^* \sin(2\gamma + \alpha)] \end{aligned}$$

$$O_2^2 \rightarrow \frac{E_2^2 \sqrt{6}}{E_2^0} \sin^2 \beta O_2^0 \cos 2\alpha + \frac{E_2^2}{E_2^0} \sin \beta \cos \beta [O_2^2 \cos(\gamma + 2\alpha) +$$

$$\begin{aligned}
 & + O_2^{1*} \sin(\gamma + 2\alpha)] + \frac{E_2^3}{E_2^2} \frac{1}{2} (\cos^2 \beta + 1) [O_2^3 \cos 2(\gamma + \alpha) + O_2^{3*} \sin 2(\gamma + \alpha)] \\
 O_4^0 \rightarrow & \frac{E_4^3}{E_4^2} \frac{1}{8} (35 \cos^4 \beta - 30 \cos^2 \beta + 3) O_4^0 - \frac{E_4^3 \sqrt{20}}{E_4^1 \cdot 4} \sin \beta \cos \beta (7 \cos^2 \beta - 3) \times \\
 & \times [O_4^1 \cos \gamma + O_4^{1*} \sin \gamma] + \frac{E_4^3 \sqrt{10}}{E_4^2 \cdot 4} \sin^2 \beta (7 \cos^2 \beta - 1) [O_4^2 \cos 2\gamma + O_4^{2*} \sin 2\gamma] - \\
 & - \frac{E_4^3 \sqrt{35}}{E_4^2 \cdot 2} \sin^3 \beta \cos \beta [O_4^3 \cos 3\gamma + O_4^{3*} \sin 3\gamma] + \frac{E_4^3 \sqrt{70}}{E_4^1 \cdot 8} \sin^4 \beta [O_4^4 \cos 4\gamma + O_4^{4*} \sin 4\gamma] \\
 O_4^0 \rightarrow & \frac{E_4^3 \sqrt{10}}{E_4^2 \cdot 8} \sin^2 \beta (7 \cos^2 \beta - 1) O_4^0 \cos 2\alpha + \frac{E_4^3 \sqrt{2}}{E_4^1 \cdot 2} \sin \beta \cos \beta \times \\
 & \times (7 \cos^2 \beta - 4) [O_4^1 \cos (\gamma + 2\alpha) + O_4^{1*} \sin (\gamma + 2\alpha)] + \frac{E_4^3}{E_4^2} \frac{1}{2} (7 \cos^4 \beta - 6 \cos^2 \beta + 1) \times \\
 & \times [O_4^2 \cos 2(\gamma + \alpha) + O_4^{2*} \sin 2(\gamma + \alpha)] - \frac{E_4^3 \sqrt{14}}{E_4^1 \cdot 2} \sin \beta \cos^3 \beta [O_4^3 \cos (3\gamma + 2\alpha) + \\
 & + O_4^{3*} \sin (3\gamma + 2\alpha)] + \frac{E_4^3 \sqrt{7}}{E_4^1 \cdot 4} \sin^2 \beta (\cos^2 \beta + 1) [O_4^4 \cos 2(2\gamma + \alpha) + O_4^{4*} \sin 2(2\gamma + \alpha)] \\
 O_4^0 \rightarrow & + \frac{E_4^3 \sqrt{35}}{E_4^2 \cdot 4} \sin^3 \beta \cos \beta O_4^0 \cos 3\alpha - \frac{E_4^3 \sqrt{7}}{E_4^1 \cdot 4} (4 \cos^4 \beta - 5 \cos^2 \beta + 1) \times \\
 & \times [O_4^1 \cos (\gamma + 3\alpha) + O_4^{1*} \sin (\gamma + 3\alpha)] + \frac{E_4^3 \sqrt{14}}{E_4^2 \cdot 2} \sin \beta \cos^3 \beta [O_4^2 \cos (2\gamma + 3\alpha)] + \\
 & + O_4^{2*} \sin (2\gamma + 3\alpha)] + \frac{E_4^3}{E_4^2} \frac{1}{4} (4 \cos^4 \beta + 3 \cos^2 \beta - 3) [O_4^3 \cos 3(\gamma + \alpha) + \\
 & + O_4^{3*} \sin 3(\gamma + \alpha)] - \frac{E_4^3 \sqrt{2}}{E_4^1 \cdot 4} \cdot \sin \beta \cos \beta (\cos^2 \beta + 3) [O_4^4 \cos (4\gamma + 3\alpha) + \\
 & + O_4^{4*} \sin (4\gamma + 3\alpha)] \\
 O_4^1 \rightarrow & \frac{E_4^3 \sqrt{70}}{E_4^2 \cdot 16} \sin^4 \beta O_4^0 \cos 4\alpha + \frac{E_4^3 \sqrt{14}}{E_4^1 \cdot 4} \sin^3 \beta \cos \beta [O_4^1 \cos (\gamma + 4\alpha) + O_4^{1*} \sin (\gamma + 4\alpha)] + \\
 & + \frac{E_4^3 \sqrt{7}}{E_4^2 \cdot 4} \sin^2 \beta (\cos^2 \beta + 1) [O_4^2 \cos 2(\gamma + 2\alpha) + O_4^{2*} \sin 2(\gamma + 2\alpha)] + \\
 & + \frac{E_4^3 \sqrt{2}}{E_4^2 \cdot 4} \sin \beta \cos \beta \cdot (\cos^2 \beta + 3) [O_4^3 \cos (3\gamma + 4\alpha) + O_4^{3*} \sin (3\gamma + 4\alpha)] + \\
 & + \frac{E_4^3}{E_4^1} \frac{1}{8} (\cos^4 \beta + 6 \cos^2 \beta + 1) [O_4^4 \cos 4(\gamma + \alpha) + O_4^{4*} \sin 4(\gamma + \alpha)] \\
 O_6^0 \rightarrow & \frac{E_6^3}{E_6^2} \frac{1}{16} (231 \cos^6 \beta - 315 \cos^4 \beta + 105 \cos^2 \beta - 5) O_6^0 + \frac{E_6^3 \sqrt{42}}{E_6^1 \cdot 8} \sin \beta \cos \beta \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (33 \cos^4 \beta - 30 \cos^2 \beta + 5) [O_6^1 \cos \gamma + O_6^{1*} \sin \gamma] + \\
& + \frac{E_6^0 \sqrt{105}}{E_6^2 16} \sin^2 \beta (33 \cos^4 \beta - 18 \cos^2 \beta + 1) \cdot [O_6^2 \cos 2\gamma + O_6^{2*} \sin 2\gamma] - \\
& - \frac{E_6^0 \sqrt{105}}{E_6^2 8} \sin^3 \beta \cos \beta (11 \cos^2 \beta - 3) [O_6^3 \cos^3 \gamma + O_6^{3*} \sin 3\gamma] + \\
& + \frac{E_6^0 3 \sqrt{350}}{E_6^4 80} \sin^4 \beta (11 \cos^2 \beta - 1) [O_6^4 \cos 4\gamma + O_6^{4*} \sin 4\gamma] - \frac{E_6^0 3 \sqrt{77}}{E_6^2 8} \sin^5 \beta \cos \beta \times \\
& \times [O_6^5 \cos 5\gamma + O_6^{5*} \sin 5\gamma] + \frac{E_6^0 \sqrt{231}}{E_6^2 16} \sin^6 \beta [O_6^6 \cos 6\gamma + O_6^{6*} \sin 6\gamma] \\
O_6^0 \rightarrow & \frac{E_6^2 \sqrt{105}}{E_6^0 32} \sin^2 \beta (33 \cos^4 \beta - 18 \cos^2 \beta + 1) O_6^0 \cos 2\alpha + \frac{E_6^2 \sqrt{10}}{E_6^2 16} \sin \beta \cos \beta \times \\
& \times (99 \cos^4 \beta - 102 \cos^2 \beta + 19) [O_6^1 \cos (\gamma + 2\alpha) + O_6^{1*} \sin (\gamma + 2\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^2 1}{E_6^2 32} (495 \cos^6 \beta - 735 \cos^4 \beta + 289 \cos^2 \beta - 17) [O_6^2 \cos 2(\gamma + \alpha) + O_6^{2*} \sin 2(\gamma + \alpha)] - \\
& - \frac{E_6^2 3}{E_6^2 16} \sin \beta \cos \beta \cdot (55 \cos^4 \beta - 50 \cos^2 \beta + 11) [O_6^3 \cos (3\gamma + 2\alpha) + O_6^{3*} \sin (3\gamma + 2\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^2 \sqrt{30}}{E_6^4 32} \sin^2 \beta \cdot (33 \cos^4 \beta - 10 \cos^2 \beta + 1) [O_6^4 \cos 2(2\gamma + \alpha) + O_6^{4*} \sin 2(2\gamma + \alpha)] - \\
& - \frac{E_6^2 \sqrt{165}}{E_6^2 16} \sin^3 \beta \cos \beta \cdot (3 \cos^2 \beta + 1) [O_6^5 \cos (5\gamma + 6\alpha) + O_6^{5*} \sin (5\gamma + 6\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^2 3 \sqrt{55}}{E_6^2 32} \sin^4 \beta (\cos^2 \beta + 1) \cdot [O_6^6 \cos 2(3\gamma + \alpha) + O_6^{6*} \sin 2(3\gamma + \alpha)]. \\
O_6^3 \rightarrow & - \frac{E_6^3 \sqrt{105}}{E_6^0 16} \sin \beta \cos \beta (11 \cos^4 \beta - 14 \cos^2 \beta + 3) O_6^0 \cos 3\alpha + \\
& + \frac{E_6^3 3 \sqrt{10}}{E_6^1 16} \sin^2 \beta (22 \cos^4 \beta - 15 \cos^2 \beta + 1) [O_6^1 \cos (\gamma + 3\alpha) + O_6^{1*} \sin (\gamma + 3\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^3 3}{E_6^2 16} \sin \beta \cos \beta (55 \cos^4 \beta - 50 \cos^2 \beta + 11) [O_6^2 \cos (2\gamma + 3\alpha) + O_6^{2*} \sin (2\gamma + 3\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^3 1}{E_6^2 16} (110 \cos^6 \beta - 105 \cos^4 \beta + 12 \cos^2 \beta - 1) [O_6^3 \cos 3(\gamma + \alpha) + O_6^{3*} \sin 3(\gamma + \alpha)] - \\
& - \frac{E_6^3 \sqrt{30}}{E_6^4 16} \sin \beta \cos \beta (11 \cos^4 \beta + 2 \cos^2 \beta - 5) [O_6^4 \cos (4\gamma + 3\alpha) + O_6^{4*} \sin (4\gamma + 3\alpha)] + \\
& + \frac{E_6^3 \sqrt{165}}{E_6^2 16} \sin^2 \beta (2 \cos^4 \beta + 3 \cos^2 \beta - 1) [O_6^5 \cos (5\gamma + 3\alpha) + O_6^{5*} \sin (5\gamma + 3\alpha)] - \\
& - \frac{E_6^3 \sqrt{55}}{E_6^2 16} \sin^3 \beta \cos \beta (\cos^2 \beta + 3) [O_6^6 \cos 3(2\gamma + \alpha) + O_6^{6*} \sin 3(2\gamma + \alpha)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_6^4 &\rightarrow \frac{E_6^4}{E_6^0} \frac{3\sqrt{14}}{32} \sin^4 \beta (11 \cos^2 \beta - 1) O_6^0 \cos 4\alpha + \frac{E_6^4 \sqrt{3}}{E_6^1} \frac{1}{8} \sin^3 \beta \cos \beta \times \\
&\times (33 \cos^2 \beta - 13) [O_6^1 \cos(\gamma + 4\alpha) + O_6^{1*} \sin(\gamma + 4\alpha)] + \frac{E_6^4}{E_6^2} \frac{\sqrt{30}}{32} \sin^2 \beta (33 \cos^4 \beta - \\
&- 10 \cos^2 \beta + 1) [O_6^2 \cos 2(\gamma + 2\alpha) + O_6^{2*} \sin 2(\gamma + 2\alpha)] + \frac{E_6^4 \sqrt{30}}{E_6^3} \frac{1}{16} \sin \beta \cos \beta \times \\
&\times (11 \cos^4 \beta + 2 \cos^2 \beta - 5) [O_6^3 \cos(3\gamma + 4\alpha) + O_6^{3*} \sin(3\gamma + 4\alpha)] + \frac{E_6^4}{E_6^4} \frac{1}{16} \times \\
&\times (33 \cos^6 \beta + 35 \cos^4 \beta - 65 \cos^2 \beta + 13) [O_6^4 \cos 4(\gamma + \alpha) + O_6^{4*} \sin 4(\gamma + \alpha)] - \\
&- \frac{E_6^4}{E_6^5} \frac{\sqrt{22}}{16} \sin \beta \cos \beta (3 \cos^4 \beta + 10 \cos^2 \beta - 5) [O_6^5 \cos(5\gamma + 4\alpha) + O_6^{5*} \sin(5\gamma + 4\alpha)] + \\
&+ \frac{E_6^4 \sqrt{66}}{E_6^6} \frac{1}{32} \sin^2 \beta (\cos^4 \beta + 6 \cos^2 \beta + 1) [O_6^6 \cos 2(3\gamma + 2\alpha) + O_6^{6*} \sin 2(3\gamma + 2\alpha)] \\
O_6^6 &\rightarrow \frac{E_6^6}{E_6^0} \frac{\sqrt{231}}{32} \sin^6 \beta O_6^0 \cos 6\alpha + \frac{E_6^6}{E_6^1} \frac{3\sqrt{22}}{16} \sin^5 \beta \cos \beta \times \\
&\times [O_6^1 \cos(\gamma + 6\alpha) + O_6^{1*} \sin(\gamma + 6\alpha)] + \frac{E_6^6}{E_6^2} \frac{3\sqrt{55}}{32} \sin^4 \beta (\cos^2 \beta + 1) [O_6^2 \cos 2(\gamma + 3\alpha) + \\
&+ O_6^{2*} \sin 2(\gamma + 3\alpha)] + \frac{E_6^6}{E_6^3} \frac{2\sqrt{55}}{32} \sin^3 \beta \cos \beta (\cos^2 \beta + 3) [O_6^3 \cos 3(\gamma + 2\alpha) + \\
&+ O_6^{3*} \sin 3(\gamma + 2\alpha)] + \frac{E_6^6 \sqrt{66}}{E_6^4} \frac{1}{32} \sin^2 \beta (\cos^4 \beta + 6 \cos^2 \beta + 1) [O_6^4 \cos 2(2\gamma + 3\alpha) + \\
&+ O_6^{4*} \sin 2(2\gamma + 3\alpha)] + \frac{E_6^6 \sqrt{3}}{E_6^5} \frac{1}{16} \sin \beta \cos \beta (\cos^4 \beta + 10 \cos^2 \beta + 5) \times \\
&\times [O_6^5 \cos(5\gamma + 6\alpha) + O_6^{5*} \sin(5\gamma + 6\alpha)] + \frac{E_6^6}{E_6^6} \frac{1}{32} (\cos^6 \beta + 15 \cos^4 \beta + \\
&+ 15 \cos^2 \beta + 1) [O_6^6 \cos 6(\gamma + \alpha) + O_6^{6*} \sin 6(\gamma + \alpha)] \tag{5}
\end{aligned}$$

where :

$$\begin{aligned}
E_6^0 &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{5}}; \quad E_2^1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{5}}; \quad E_2^2 = \frac{4}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{5}{\pi}}; \\
E_4^0 &= 8 \sqrt{\frac{\pi}{3}}; \quad E_4^1 = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\pi}}{3}; \quad E_4^2 = \frac{8}{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{\pi}}{3}; \\
E_4^3 &= \frac{4}{\sqrt{35}} \frac{\sqrt{\pi}}{3}; \quad E_4^4 = \frac{16}{\sqrt{70}} \sqrt{\pi};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_6^0 &= 16\sqrt{\frac{\pi}{13}}; & E_6^1 &= \frac{16}{\sqrt{42}}\sqrt{\frac{\pi}{13}}; & E_6^2 &= \frac{32}{\sqrt{105}}\sqrt{\frac{\pi}{13}} \\
 E_6^3 &= \frac{16}{\sqrt{105}}\sqrt{\frac{\pi}{13}}; & E_6^4 &= \frac{13}{3\sqrt{14}}\sqrt{\frac{\pi}{13}}; & E_6^5 &= \frac{16}{3\sqrt{77}}\sqrt{\frac{\pi}{13}} \\
 E_6^6 &= \frac{32}{\sqrt{231}}\sqrt{\frac{\pi}{13}}
 \end{aligned}$$

The expressions (5) are given for any  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  unlike [5] where  $\gamma = 0$ . As we see (5) does not contain the imaginary coefficients, they being included  $(O_n^m)^*$ .

We outline the fact that for particular values of  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  it may be obtained equal or equivalent results to those from the literature (for. ex. [7], [9], [10]). Therefore (1) is more convenient for the certain transformations, obtaining after the transformation not the whole number of  $O_n^m$  operators, but only some. To illustrate this idea we choose a simple example. Take  $\alpha =$  arbitrary,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  and  $\gamma = 0$ . The expression of  $O_4^3$  operator given in [11] and [12] takes, after the Euler transformation, the form:

$$O_4^3 \rightarrow -\frac{1}{4} \cos 3\alpha O_4^1 \pm \frac{1}{4} i \sin 3\alpha O_4^2 - \frac{3}{4} \cos 3\alpha O_4^3 \pm \frac{i}{8} \sin 3\alpha O_4^4 \quad (6)$$

while using (5) we obtain:

$$O_4^3 \rightarrow -\frac{1}{4} [O_4^1 \cos 3\alpha + O_4^{1*} \sin 3\alpha] - \frac{3}{4} [O_4^3 \cos 3\alpha + O_4^{3*} \sin 3\alpha] \quad (7)$$

In (6) appear  $O_4^1$ ,  $O_4^2$ ,  $O_4^3$  and  $O_4^4$  and in (7) only  $O_4^1$  and  $O_4^3$ . The matrix elements of  $(O_4^1)^*$  and  $(O_4^3)^*$  can be rapidly calculated by means of (3).

Finally, we remind that (5) can be used and in the case when all the terms of the spin Hamiltonian are defined in the same system, but the electronic Zeeman term is much greater than the other terms. In this case the spin Hamiltonian is rewritten into a new system in which the Zeeman term becomes diagonal. Then in (5)  $\beta$  is the azimuthal angle of the external magnetic field,  $\alpha$  the polar angle and  $\gamma = 0$ .

#### REFERENCES

1. K. W. H. Stevens, Proc. Phys. Soc., **A-65**, 209 (1952).
2. B. Bleaney, R. S. Trenam, Proc. Roy. Soc. **223**, 1 (1954).
3. J. W. Orton, *Electron Paramagnetic Resonance*, London, ILLIFFE Books Ltd. (1968).
4. J. M. Baker, F. I. B. Williams, Proc. Roy. Soc. **78**, 1340 (1961).
5. W. M. Vinokurov, M. N. Zaripov, V. G. Stepanov, *Soviet. Phys. Solid State* (Engl. Transl.) **6**, 870 (1964).
6. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons (1957).
7. V. Lupei, A. Lupei, I. Ursu, Rev. Roum. Phys., **13**, 327 (1968).
8. A. R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton, Princeton Univ. Pres. (1957)
9. S. V. Nistor, Rev. Roum. Phys., **13**, 539 (1968).
10. D. A. Jones, J. M. Baker, D. F. D. Pope, Proc. Phys. Soc., **74**, 249 (1959).
11. J. R. Thyer, S. M. Quick, F. Holuj, Cam. J. Phys., **45**, 3597 (1967).
12. L. K ratena, K. Zdansky, V. Sik, Phys. Stat. Solid. **28**, 175 (1968).

## FORMA EXPLICITĂ A ROTAȚIILOR EULER A OPERATORILOR ECHIVALENȚI

(R e z u m a t)

Folosind operatorul de rotație definit de Rose, autorii dau formulele explicite de transformare a operatorilor  $O_n^m$  în urma unei rotații Euler generale.

Cu această metodă în rotațiile de transformare nu apar coeficienți imaginari ca și în relațiile lui Vinokurov, Zaripov și Stepanov.

## ЯВНАЯ ФОРМА ЭЙЛЕРОВЫХ ВРАЩЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Р е з ю м е)

Используя оператор вращения, определённый Розем, авторы дают явные формулы превращения операторов  $O_n^m$  вследствие общего эйлерового вращения.

Применяя данный метод, во вращениях превращения мнимые коэффициенты не появляются как в соотношениях Винокурова, Зарипова и Степанова.





## MODIFICAREA PERMITIVITĂȚII DIELECTRICE A UNOR ACIZI ORGANICI ÎN CÎMP ULTRASONIC

de

D. AUSLÄNDER, EMILIA CONSTANTIN, AURELIA CIUPE

Cercetările efectuate cu privire la acțiunea ultrasunetelor asupra unor lichide pure, respectiv amestecuri binare [1], [2], [3], [4], au pus în evidență variații ale constantei dielectrice în cazul structurilor caracterizate prin legături de hidrogen.

Comportarea diferențiată a lichidelor a condus la explicația efectului prin intervenția cîmpului ultrasonic asupra energiei potențiale de interacțiune dintre molecule.

Lucrarea prezentată urmărește extinderea cercetărilor asupra altor lichide ce prezintă asocieri moleculare: acidul acetic, acidul butiric, acidul oleic.

**Procedeeul experimental.** Măsurarea permitivității s-a efectuat la frecvența de 7 MHz cu un DK-metru „Oehme” prevăzut cu condensator plan, plăcile fiind așezate paralel față de direcția de propagare a fasciculului ultrasonic obținut de la un generator de frecvență 1 MHz, tip „Tesla”.

Variația efectului cu temperatura s-a urmărit pentru un domeniu cuprins între 13°C și 40°C în condiții de termostatare.

Determinările, începute înainte de ultrasunare, au continuat sub acțiunea cîmpului ultrasonic pînă la obținerea efectului limită, care a avut loc în mai puțin de 5 minute.

În acest interval de timp, valorile permitivității dielectrice au fost urmărite la început din 10 în 10 secunde, apoi din 30 în 30 secunde și în sfîrșit din minut în minut.

S-a urmărit de asemenea revenirea permitivității dielectrice la valoarea inițială, după încetarea acțiunii ultrasunetelor.

**Rezultate experimentale.** Din datele obținute se constată variația permitivității acizilor studiați în urma ultrasunării, în funcție de temperatură, timp de expunere în cîmp și felul lichidului.

Efectul dat prin  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_n$ , unde  $\varepsilon_i$  reprezintă permitivitatea acidului respectiv în lipsa cîmpului și  $\varepsilon_n$  valoarea acestuia după diferite durate de ultrasunare pentru aceeași temperatură, arată sistematic o scădere a permitivității.

După cum se vede din fig. 1, reprezentînd rezultatele obținute pentru acidul acetic, mărimea  $\Delta\varepsilon$  crește brusc, printr-un salt liniar în primele 30 de secunde, pentru ca apoi după o variație curbilinie să devină constantă, independentă de continuarea ultrasunării.

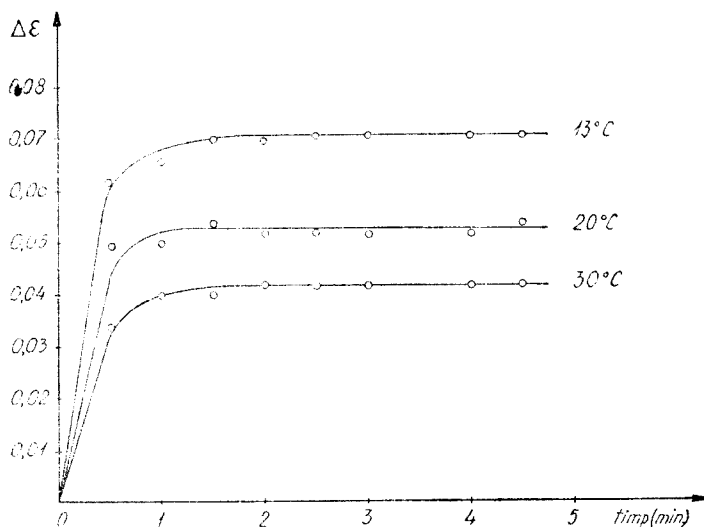


Fig. 1. Variația lui  $\Delta\varepsilon$  în funcție de timpul de ultrasonare la acidul acetic.

La temperaturi diferite se obțin curbe analoge, mărimea efectului variind în sens invers cu temperatura. Se mai poate constata de asemenea, atât la acidul acetic cât și la cel butiric și oleic din fig. 2 și 3, diferențe în privința pantei semnalate din prima perioadă a ultrasonării, corespunzând saltului efectului. Astfel, panta

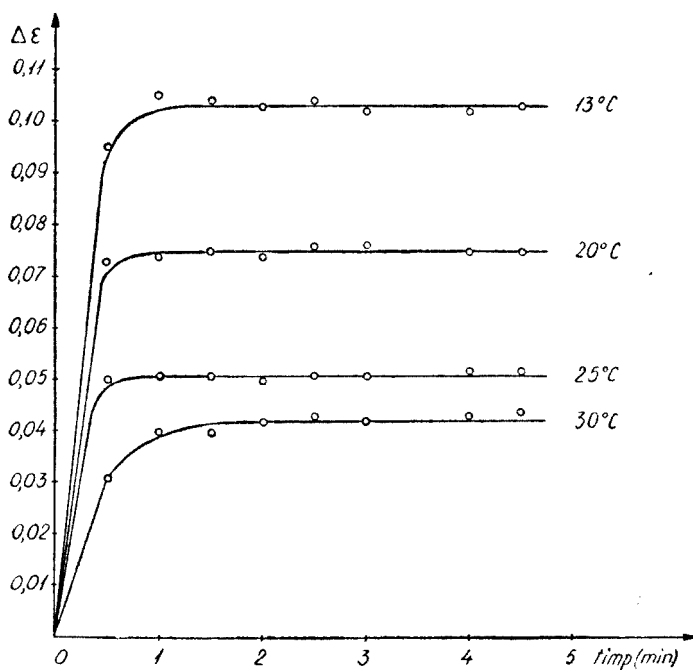


Fig. 2. Variația lui  $\Delta\varepsilon$  în funcție de timpul de ultrasonare la acidul butiric.

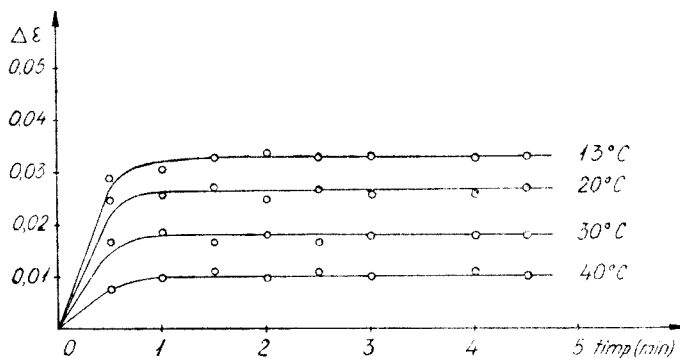


Fig. 3. Variația lui  $\Delta\varepsilon$  în funcție de timpul de ultrasunare la acidul oleic.

este cu atât mai mare cu cât temperatura este mai scăzută, variind totodată de la o substanță la alta. Se poate observa o legătură între valoarea pantei și a palierului, care decurge din însăși forma curbelor de variație a efectului cu timpul de ultrasunare.

Valorile efectului maxim în funcție de temperatură pot fi comparate în fig. 4 pentru cei trei acizi.

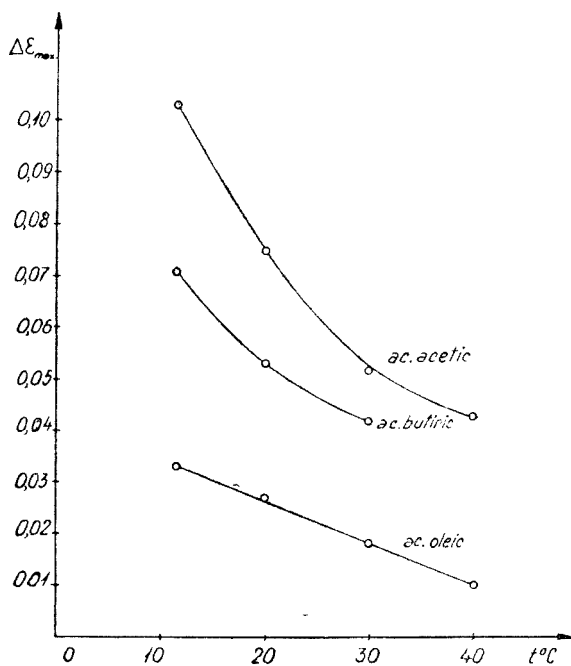


Fig. 4

Fig. 4.  $\Delta\varepsilon_{max}$  în funcție de temperatură la acidul acetic, butiric și oleic.

Se constată o dependență liniară la acidul oleic, diferită de cazul celorlalți doi acizi. Variația mărimii  $\Delta\epsilon_{max}$  cu temperatura, are loc în același sens pentru cele trei substanțe; sub temperatura de 20°C procesul fiind cel mai accentuat la acidul acetic urmat de acidul butiric și de acidul oleic; între 20°C și 30°C ultimii din acizi se inversează, iar între 30°C și 40°C acidul oleic se caracterizează prin cea mai pronunțată scădere a efectului maxim.

Rezultatele obținute pun în evidență scăderea efectelor maxime prin mărirea inerției, o dată cu creșterea greutateii moleculare; revenirea la valoarea inițială după încetarea câmpului ultrasonic are loc brusc în timp foarte scurt în urma acțiunii agitației termice.

**Interpretarea rezultatelor.** Efectul ultrasunetelor asupra permitivității dielectrice se manifestă în același sens cu cel al temperaturii, explicația putând comporta mai mulți factori.

Energia interacțiunii de orientare, și implicit permitivitatea dielectrică este influențată de temperatură [5] spre deosebire de polarizarea de deplasare. Temperatura poate acționa doar indirect asupra polarizării ionice în măsura în care aceasta este dependentă de cea de orientare datorită deplasării reciproce a nucleelor atomice în urma orientării dipolilor.

În general la lichidele polare, prevalează contribuția polarizării de orientare la constanta dielectrică față de cea de deformare.

Energia termică se opune câmpului electric exterior prin stabilirea unei simetrii medii de orientare a momentelor elementare, fără direcții privilegiate.

Este foarte probabil ca și câmpul ultrasonic să acționeze în sensul unei orientări impuse, însă diferită, în condițiile noastre experimentale, de cea a câmpului electric.

Luînd în considerare pe de altă parte caracterul acizilor studiați prin existența punților de hidrogen, trebuie subliniată contribuția acestor legături la explicația fenomenului constat.

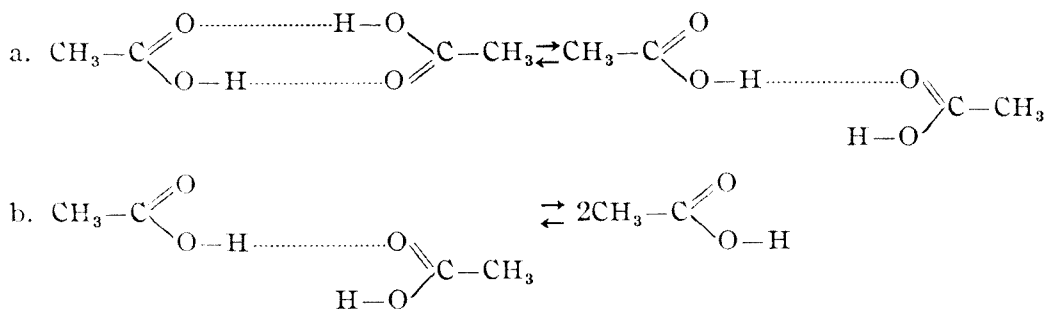
Astfel în dimeri sub acțiunea unui câmp electric exterior, pe lângă rotația moleculei în jurul legăturii de hidrogen, care contribuie la scăderea permitivității, se produce o deplasare a protonului de-a lungul legăturii de hidrogen, ceea ce duce la o creștere mult mai pronunțată a permitivității decât orientarea [6].

Agitația termică prin distrugerea progresivă a legăturilor de hidrogen, tinde să anuleze cele două efecte susamintite, rezultînd în ansamblu o scădere a permitivității.

Ultrasunetele acționează probabil de asemenea prin desfacerea punților de hidrogen, dînd naștere totodată la o stare de excitație care nu permite refacerea lor. Astfel devine evidentă variația inversă a efectului cu temperatura, acțiunea manifestîndu-se asupra unui număr cu atît mai mare de legături cu cît temperatura este mai scăzută, stabilindu-se stări de echilibru pentru fiecare valoare a temperaturii după transmiterea unei anumite energii ultrasonice. În același sens pledează și variația pantelor părților rectilinii cu temperatura.

Energia legăturii de hidrogen este suficient de mică; în cazul acidului acetic de 7,6 k cal./mol.

Mecanismul de desfacere a legăturii de hidrogen de către ultrasunete, pentru acidul acetic de exemplu (7), se pare că se produce în următoarele două etape:



Procesul de variație a permitivității cu timpul de ultrasunare,  $t$ :  $\Delta\varepsilon = f(t)$  se poate descrie prin două ecuații. În prima parte este valabilă relația:

$$\Delta\varepsilon = a \frac{bt}{1 + bt}$$

iar pentru partea în care curba trece de la dreaptă la palier:

$$\Delta\varepsilon = at^{\frac{1}{k}}$$

unde „ $a$ ” și „ $k$ ” depind de natura lichidului și temperatură, iar „ $b$ ” este o constantă caracteristică lichidului, independentă de temperatură.

Tabel 1

Acid	a			
	Temperatura °C			
	13	20	30	40
Acetic	0,103	0,075	0,052	0,043
Butiric	0,071	0,053	0,042	—
Oleic	0,033	0,027	0,018	0,010

Valorile lui  $a$  și  $b$  date în tabelele 1 și 2 se obțin din condiția  $t \rightarrow \infty$ , respectiv din panta porțiunii ascendente a curbei:  $\Delta\varepsilon = f$  (timp).

Tabel 2

Acid	b			
	Temperatura °C			
	13	20	30	40
Acetic	0,03	0,03	0,03	0,03
Butiric	0,05	0,06	0,05	—
Oleic	0,07	0,07	0,07	0,05

Constanta  $k$ , se obține din datele experimentale cu ajutorul relației:

$$k = \frac{\log \cdot t}{\log \frac{\Delta \varepsilon}{a}}$$

având valorile cuprinse în tabelul 3.

Tabel 3

Acid	K			
	Temperatura °C			
	13	20	30	40
Acetic	91,80	134,00	58,00	31,30
Butiric	74,10	222,00	55,61	—
Oleic	63,81	207,00	138,00	71,00

### Concluzii

1. Permitivitatea dielectrică a acizilor acetic, butiric și oleic, scade prin ultrasunare.
2. Valoarea efectului depinde de natura și temperatura acidului și de timpul de ultrasunare.
3. Efectul se explică prin acțiunea cîmpului ultrasonic asupra energiei potențiale de interacțiune dintre molecule.

### BIBLIOGRAFIE

1. D. Ausländer, S. Vădeanu, Emilia Constantin, *Metode ultrasonice de măsurare și control*, Buc., 29–31 oct. 1964., vol. IV, p. 27–34, IDT, București 1965.
2. D. Ausländer, Emilia Constantin, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Series Math. Phys. p. 89–93.
3. D. Ausländer, Emilia Constantin, Aurelia Ciupe, „Acustica”, **17**, nr. 4, p. 204–208, 1966.
4. Emilia Constantin, Aurelia Ciupe, D. Ausländer, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Series Math.-Phys., nr. 1, p. 113–115, 1967.
5. E. A. Rapštinskaja, O. K. Skarre, *Fizika dielektrikov*, „Trudi vses. konf. po fizike diel.” p. 101, Dnepropetrovsk, 1956, Izd. Akad. Nauk SSSR.
6. A. Piekara, „The Journal of Chemical Physics”, **36**, nr. 8, 2145, 1962.
7. D. Tabuchi, „Proceeding of the Third International Congress on Acoustics”, 1959, Stuttgart, p. 500.

### ИЗМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ КИСЛОТ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ

(Резюме)

В работе изучается изменение диэлектрической проницаемости в случае уксусной, масляной и олеиновой кислот под действием ультразвукового поля с частотой 1 мГц.

Авторы отмечают снижение диэлектрической проницаемости до постоянного значения значением, зависящим от времени обработки ультразвуками, от температуры и рода кислоты. Эффект настолько больше, насколько ниже температура жидкости и насколько меньше молекулярный вес.

Отмеченное явление интерпретируется посредством воздействия, оказанного ультразвуковым полем на потенциальную энергию взаимодействия между молекулами.

MODIFICATION DE LA PERMITTIVITÉ DIÉLECTRIQUE  
DE CERTAINS ACIDES ORGANIQUES DANS LE CHAMP DES ULTRASONS

(Résumé)

Dans ce travail est étudiée la variation de la permittivité diélectrique dans le cas des acides : acétique, butyrique et oléique sous l'action du champ des ultrasons, de fréquence d'1 MHz.

Les auteurs constatent la diminution de la permittivité diélectrique jusqu'à une valeur constante qui dépend du temps d'ultrasonisation, de la température et de la nature de l'acide. L'effet en est d'autant plus grand que la température du liquide est plus basse et que le poids moléculaire est plus petit.

Le phénomène mis en évidence est interprété par l'action du champ ultrasonore sur l'énergie potentielle d'interaction entre les molécules.





PROPRIETĂȚILE MAGNETICE ALE COMPUSULUI  
INTERMETALIC  $Gd_2Co_{17}$

de

IULIU POP, EMIL BURZO și V. I. TCHETCHERNIKOV

Compusul  $Gd_2Co_{17}$  cristalizează în două forme: romboedrică de tip  $Th_2Zn_{17}$  cât și hexagonală de tipul  $Th_2Ni_{17}$  [1, 2, 3, 4], tipul rețelei cristaline depinzând de tratamentul termic efectuat. Forma romboedrică are grupa spațială  $R3m$ , parametrii rețelei în indici hexagonali fiind  $a = 8,377 \text{ \AA}$ ,  $c = 8,134 \text{ \AA}$ .

Datele existente în literatură, relativ la comportarea magnetică a acestui compus [5, 6, 7] indică o aliniere antiparalelă a momentelor magnetice ale atomilor de cobalt și gadoliniu, fapt ce îi imprimă un caracter ferimagnetic.

Măsurătorile magnetice au fost efectuate în condițiile descrise anterior [8], probele fiind închise în ampule de cuarț sub un vid de  $10^{-3}$  mm col Hg. Probele au fost supuse unui tratament termic de omogenizare la  $1000^\circ K$ , timp de 50 ore. Controlul făcut cu ajutorul razelor X, indică urme ușoare de impurități de cobalt și  $CoGd$ . Microstructura studiată cu ajutorul microscopului metalografic (fig. 1) arată că proba este destul de omogenă.

Din studiul variației cu temperatura a intensității de magnetizare (fig. 2.) în intervalul  $96 - 1400^\circ K$ , la cîmpuri magnetice situate între  $0,64 - 11,1$  kOe, rezultă următoarele:

— existența unui maxim, de la care valoarea intensității de magnetizare începe să scadă;

— poziția acestui maxim al intensității de magnetizare este în funcție de valoarea cîmpului magnetic aplicat. Se constată pentru cîmpuri mici o deplasare liniară spre temperaturi scăzute a poziției maximumului, ca apoi după atingerea saturației acesta să rămînă la temperatură fixă (fig. 3). Acesta este în concordanță cu prezicerile teoretice ale teoriei RKKY [9, 10], cât și cu alte observații experimentale efectuate [11], arătînd astfel că în cadrul mecanismului de ordonare magnetică o parte din contribuție o are și schimbul indirect prin intermediul electronilor de conductibilitate.

Din dependența cu temperatura a lui  $\sigma_{0T}^2$  se determină existența punctului Curie la acest compus intermetalic la  $1222^\circ K$ , valoare apropiată de cea găsită în [6].

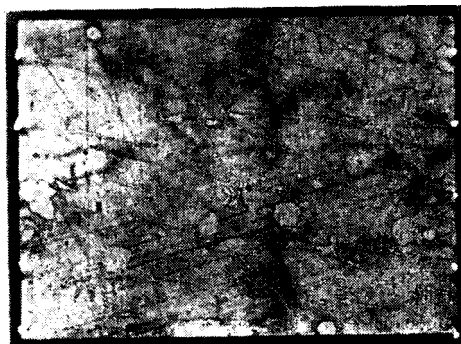


Fig. 1.

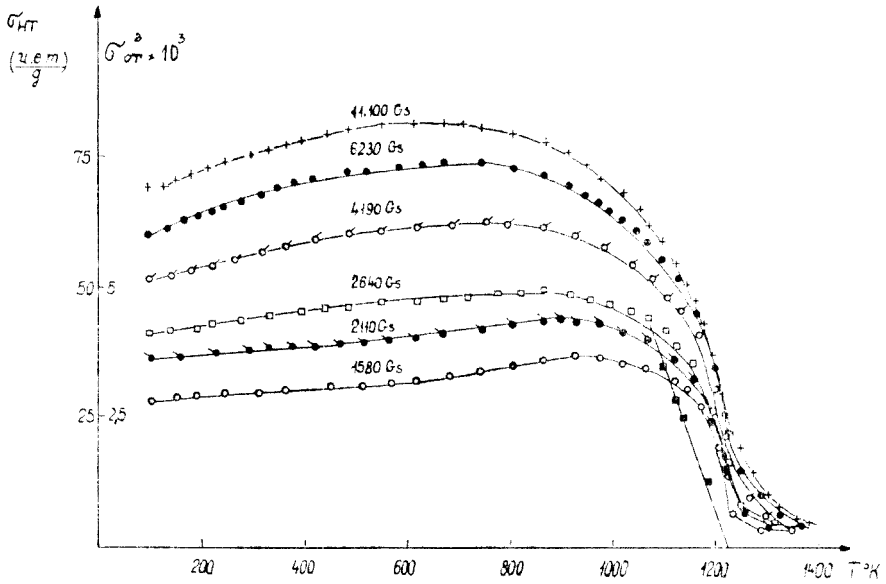


Fig. 2.

În vederea efectuării unui studiu asupra saturației magnetice cît și a stabilirii valorii intensității spontane de magnetizare  $\sigma_{0T}$  s-au trasat curbele intensității de magnetizare la diferite temperaturi cuprinse între  $96-1192^\circ\text{K}$  (fig. 4, 5). Se constată că în intervalul de temperaturi joase ( $96-296^\circ\text{K}$ ), nu a fost atinsă complet saturația magnetică, în timp ce aceasta a fost realizată pentru restul intervalului de temperatură. În fig. 6 se reprezintă variația momentului magnetic pe formula unitate în intervalul de temperatură studiat. Curba extrapolată la  $0^\circ\text{K}$  permite determinarea

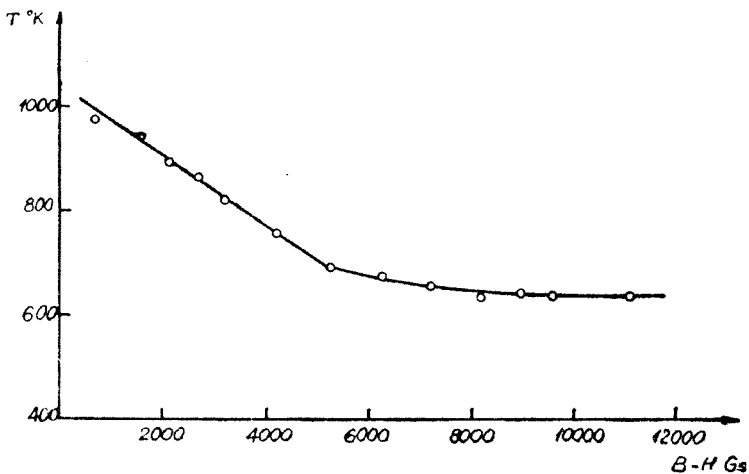


Fig. 3.

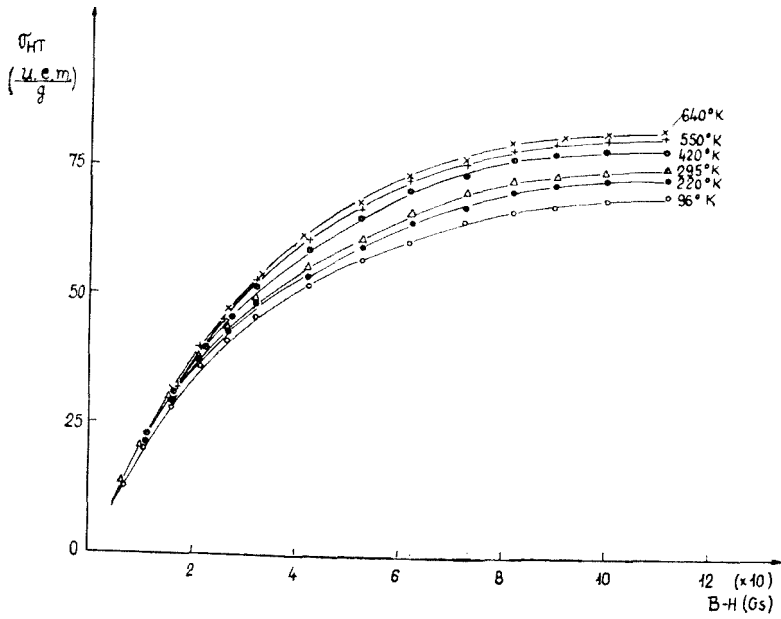


Fig. 4.

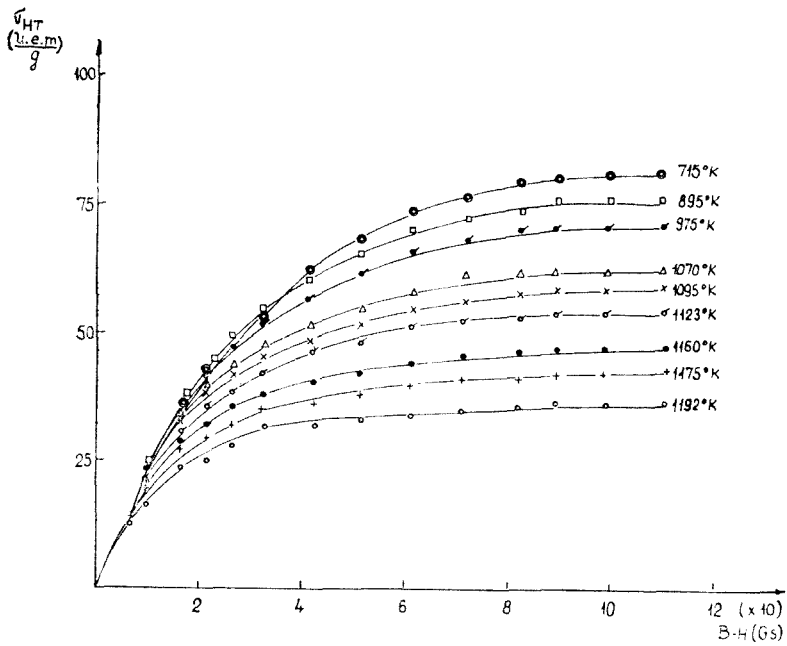


Fig. 5.

unui moment magnetic la saturație la  $0^\circ\text{K}$  de  $14,1 \mu_B$ , în acord cu rezultatele lui K. S t r n a t și colaboratorii [5], cît și cu cea stabilită de I. I. a f o r e s t și colaboratorii [6].

În acord cu alte studii [12, 13], care presupun o modificare a configurației electronice a cobaltului atît prin adiția electronilor de conductibilitate ai gadoliniului, cît și prin interacțiuni magnetice rezultînd de la acești atomi, vom admite un mo-

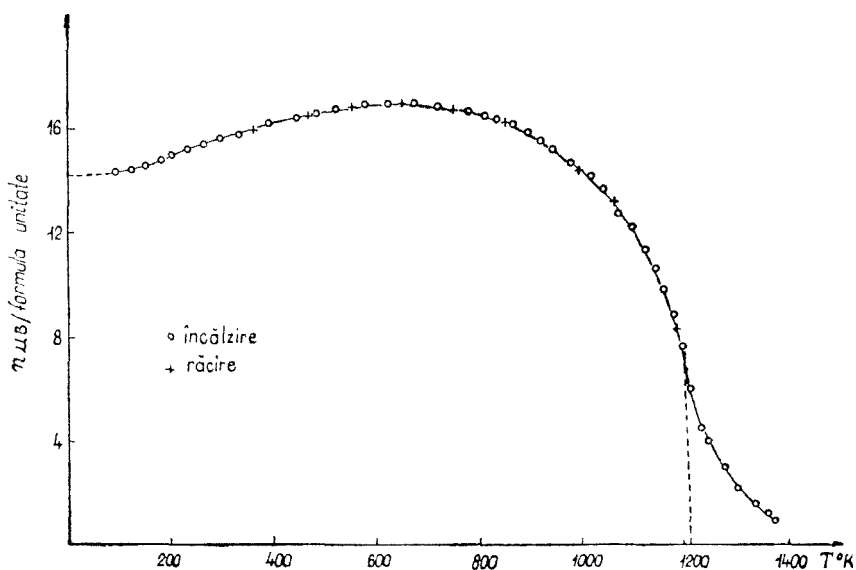


Fig. 6

ment magnetic pe atom de cobalt de  $1,66 \mu_B$ , iar la gadoliniu de  $7,12 \mu_B$ , valoare mai mică decît cea experimentală  $\mu_{Gd} = 7,55 \mu_B$ , justificată prin scăderea contribuției la momentul magnetic al electronilor de conductibilitate ce intră în banda 3d a cobaltului.

Utilizînd modelul menționat în care momentele magnetice ale atomilor de cobalt și gadoliniu sînt orientate antiparalel, rezultă un moment magnetic de  $14,2 \mu_B$  pe formula unitate, în bună concordanță cu valorile determinate experimental. Se remarcă că punctele experimentale determinate atît la încălzire cît și răcirea probei coincid, fapt ce atestă că în cadrul acestui compus intermetalic nu au avut loc procese secundare, care ar fi putut influența comportarea sa magnetică.

Creșterea cu temperatura a valorii momentului magnetic pînă la valoarea maximă (fig. 6) se poate justifica, dacă admitem că interacțiunile de schimb între atomii de gadoliniu, cît și cele între atomii de cobalt și cei de gadoliniu scad o dată cu creșterea temperaturii.

Compusul intermetalic studiat are o comportare tipic ferimagnetică, curbă de variație cu temperatura a momentului magnetic fiind de tip Néel cu asimptotă orizontală, în cadrul mecanismului de ordonare, contribuind și schimbul indirect prin intermediul electronilor de conductibilitate, partea predominantă a acestui mecanism avînd-o însă interacțiunea Co-Co, fapt oglindit în valoarea ridicată a temperaturii Curie.

## BIBLIOGRAFIE

1. O. S. Zareciniuk, P. I. Kripiakevici, „Kristallografia” **7**, 543, 1962.
2. P. E. Kripiakevici, V. F. Terehova, O. S. Zareciniuk, I. V. Burov, „Kristallografia” **8**, 268, 1963.
3. B. W. Ostertag, „Acta Cryst.”, **19**, 150, 1965.
4. G. Buchet, I. Laforest, R. Lemaire, I. Schweizer, Compt. Rend. **262**, B1227, 1966.
5. E. A. Nesbitt, J. N. Wernick and E. Corenzwit, J. Appl. Phys. **30**, 365, 1959.
6. I. Laforest, R. Lemaire, R. Pauthenet, I. Schweizer, Compt. Rend. **262**, B1260, 1966.
7. K. Strnat, G. Hoffer, W. Ostertag and I. C. Olson, J. Appl. Phys. **37**, 1252, 1966.
8. I. Pop, V. I. Tchetchernikov, Priboi i tehn. exp. **5**, 180, 1964.
9. H. Miwa, K. Yosida, Progr. Theoret. Phys. **26**, 693, 1961.
10. K. Yosida, H. Miwa, J. Appl. Phys. **32**, Suppl. 3, 88, 1961.
11. I. Pop, E. Burzo, *Antiferomagnetismul compusului intermetalic Gd<sub>2</sub>Co* (în curs de publicare).
12. I. Farrel, W. E. Wallace, Inorg. Chem. **5**, 105, 1966.
13. R. Lemaire, D. Paccard and R. Pauthenet, J. Appl. Phys. **32(2)**, 1092, 1968.

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ Gd<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>

(Резюме)

Авторы изучали магнитное поведение этого интерметаллического соединения, поведение, указывающее на антипараллельную ориентацию магнитных моментов кобальтовых и гадолиниевых атомов.

Существенный вклад в механизм упорядочения вносит взаимодействие Co—Co—факт, отражающийся в повышенном значении температуры Кюри.

MAGNETIC PROPERTIES OF THE Gd<sub>2</sub>Co<sub>17</sub> INTERMETALLIC COMPOUND

(Summary)

The magnetic behaviour of this intermetallic compound is studied within the paper. It suggests an antiparallel alignment of the magnetic moments of cobalt and gadolinium atoms.

The Co—Co interaction has an essential contribution to the ordering mechanism, a fact reflected in the high value of the Curie temperature.



## NMR AUTODYNE WITH BACKWARD DIODE

by  
EMIL TĂTARU

This short communication deals with the possibility of using backward diodes in NMR autodynes and the experimental results obtained with it.

The idea of using backward diodes in autodynes is based on the fact that oscillations of small amplitude are easily obtained by direct coupling of a backward diode with a high value negative differential resistance to the terminals of a parallel oscillating circuit. Since the peak current of the backward diode is very small it follows that the power consumption of the autodyne will be also very low.

The scheme of the NMR autodyne with the backward diode which was checked experimentally is shown in Fig. 1. The coil  $L$ , having 5 turns with a diameter

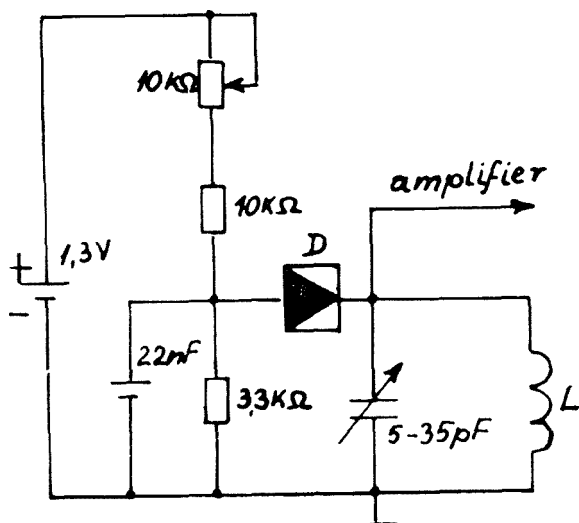


Fig. 1. The schem of NMR autodyne with backward diode.

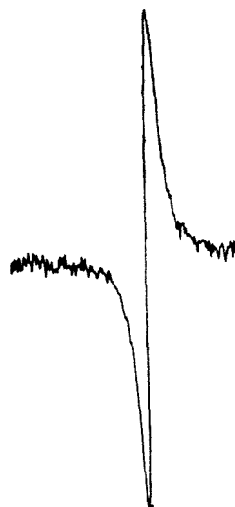


Fig. 2. NMR signal of an aqueous solution of copper sulphate recorded with schem of Fig. 1.

of 14 mm, is made of silver wire of a diameter of 0,9 mm. The backward diode has a peak current of 50  $\mu\text{A}$ , and the power consumption of the autodyne was smaller than 100  $\mu\text{W}$ .

The autodyne worked in good conditions in the 23–30 MHz band, the control being comfortable. The experiment was carried out with an JEOL type spectrometer whose autodyne, provided with electronic tubes, was replaced. Thus a direct comparison between the two types of autodynes was possible.

For illustration in Fig. 2 is shown the nuclear magnetic resonance signal of an aqueous copper sulphate solution recorded by the NMR autodyne with the backward diode. The working conditions were as follows: frequency 23 MHz self-oscillations level 50 mV, response time 1 second, velocity of paper displacement 18 mm/min and the frequency of the modulation 35 Hz. By comparing the two types of autodynes the following conclusions may be drawn: Although the autodyne with tubes displays a better signal-noise ratio, nevertheless the autodyne with a backward diode has several advantages: extremely low power consumption, (about  $10^5$  smaller) very reduced number of circuit elements, a small volume, as well as a very simple construction which can be easily controlled.

The power consumption of the NMR autodyne with a backward diode is considerably smaller than that of schemes with other semiconductor devices reported in the literature.

#### AUTODINĂ R.M.N. CU DIODA BACKWARD

(R e z u m a t)

În nota de față se arată posibilitatea folosirii diodelor backward în autodinele RMN, obținându-se următoarele avantaje: consum de putere extrem de mic (mai puțin decât 100  $\mu\text{W}$ ), număr mic de elemente de circuit, construcție simplă și reglaj comod.

#### АВТОДИН ЯМР С ОБРАЩЁННЫМ ДИОДОМ

(Р е з ю м е)

В статье указывается на возможность использования обращённых диодов в автодинах ЯМР причём получают следующие преимущества: чрезвычайно малое потребление мощности (менее 100  $\mu\text{W}$ ), малое число элементов цепи, простая конструкция и удобное регулирование.



# DEPENDENȚA DE CONCENTRAȚIE A FACTORULUI DE SEPARARE A UNEI COLOANE DE TERMODIFUZIE

de

E. FODOR, V. MERCEA

Dependența factorului de separare a coloanelor de termodifuzie de compoziția amestecului, temperaturile din coloană și condițiile geometrice a fost studiată în amănunțime într-o mare mulțime de cazuri.

Dependența de concentrația componentelor nu a fost studiată pînă în prezent pe cale experimentală. Totuși o asemenea dependență este de așteptat la amestecul unor gaze ce diferă mult unul de celălalt. În acest scop s-a făcut încercarea de a se lucra cu o coloană cu un rezervor infinit. Modificînd concentrația amestecului de separat din acest rezervor, se poate studia variația separării, menținînd în coloană toate celelalte condiții constante.

Din teoria coloanei de separare [1] rezultă că dacă se definește factorul de separare total prin:

$$q = \frac{c(z)}{1 - c(z)} \cdot \frac{1 - c(0)}{c(0)}$$

unde  $c$  este concentrația la cota  $Z$  sau  $O$  a componentei grele, acest factor de separare are valoarea [2, 3]:

$$q = e^{\frac{Z}{l_0}}$$

unde  $Z$  e lungimea coloanei, iar  $l_0$  lungimea caracteristică de separare, care are valoarea

$$l_0 = \frac{0,373}{\alpha} \cdot \frac{R_0 \bar{T} \cdot d}{\Delta T} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^4 + 2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \right]$$

în care  $\alpha$  este constanta de termodifuzie,  $\bar{T}$  temperatura medie în coloană,  $\Delta T$  diferența activă de temperatură,  $d$  o constantă ce depinde de geometria tubului,  $R$  raza coloanei și

$$R_0 = b \sqrt[3]{\frac{\tau_1 \cdot D \cdot \bar{T}}{g \cdot \rho \cdot \Delta T}}$$

raza caracteristică a coloanei,  $b$  fiind o constantă care depinde de dimensiunile transversale ale tubului,  $\tau_1$  vîscozitatea amestecului,  $\rho$  densitatea amestecului și  $D$  coeficientul de difuzie a celor două gaze.

Se vede că lungimea caracteristică  $l_0$ , deci și  $q$ , depind prin  $R_0$  de factorul  $\tau_1 D/\rho$  care este în mare măsură dependent de compoziția gazului. Variațiile lui  $\alpha$  sînt foarte slabe și nu au fost luate în considerație.

Amestecul studiat a fost cel de  $\text{CH}_4 - \text{H}_2$  cu concentrații între 10 și 90 %  $\text{CH}_4$  în  $\text{H}_2$ . Rezervorul infinit a fost realizat prin scurgerea continuă a amestecului gazos la capătul inferior al coloanei.

Coloana de termodifuzie [4], de tipul coloanelor cu fir cald, are o lungime de 251,5 cm, diametrul interior de 2,2 cm și diametrul firului de 0,05 cm. Coloana a lucrat la trei temperaturi ale firului de: 70°C, 92°C, 159°C, iar temperatura peretelui exterior a fost de 12°C. Temperatura firului s-a determinat prin măsurarea alungirii acestuia. Amestecul gazos s-a analizat la ambele capete ale coloanei prin luarea de probe, analiza făcîndu-se cu o instalație de cromatografie gazoasă [5, 6].

Rezultatele experimentale indică o puternică dependență de concentrația inițială a amestecului, separarea fiind cu atît mai ridicată cu cît este mai mare conținutul de hidrogen după cum rezultă din tabelul de mai jos.

Tabel 1

Conc. $\text{CH}_4$	Co	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$T_1 = 343^\circ\text{K}$	$\ln q$	2,29	1,90	1,66	1,50	1,38	1,27	1,18	1,08	0,99
$T_1 = 365^\circ\text{K}$	$\ln q$	2,33	2,0	1,75	1,57	1,44	1,38	1,30	1,26	1,23
$T_1 = 432^\circ\text{K}$	$\ln q$	--	3,23	2,50	2,20	2,01	1,95	1,70	1,55	1,42

Pentru compararea datelor experimentale cu teoria, s-au făcut calculele în două ipoteze:

- luînd pentru factorul  $\tau_1 D/\rho$  valori corespunzătoare rezervorului infinit,
- luînd pentru acest factor valori medii pe coloană.

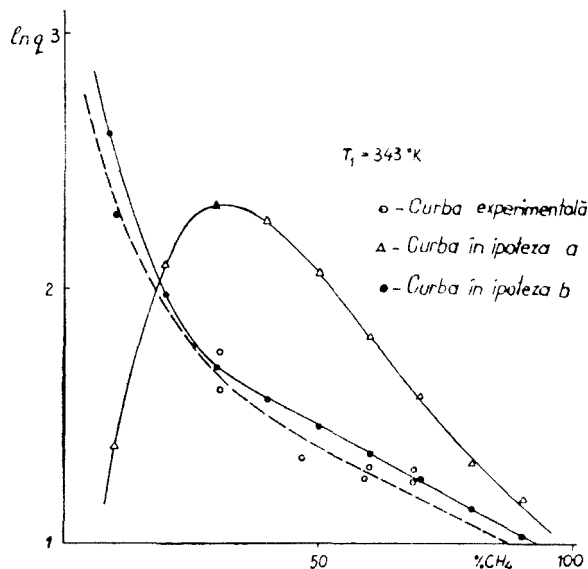


Fig. 1.

Din datele calculate rezultă că pentru valorile luate în ipoteza a) se găsesc separări mai mari decât cele determinate experimental. În afară de aceasta apare un maxim de separare între 15 și 30%  $\text{CH}_4$  în  $\text{H}_2$  care nu a putut fi pus în evidență experimental.

Valorile calculate cu ipoteza b) sînt mai apropiate de cele experimentale în afara domeniului de concentrații mari de hidrogen unde valorile calculate se abat mult de la cele experimentale. În figurile 1, 2 și 3 sînt reprezentate comparativ aceste rezultate.

Din aceste rezultate se vede că dependența de concentrația amestecului este în cea mai mare parte explicată prin factorul  $\tau_1 D/\rho$ ; totuși abaterile introduse de teorie sînt mai mari decît erorile experimen-

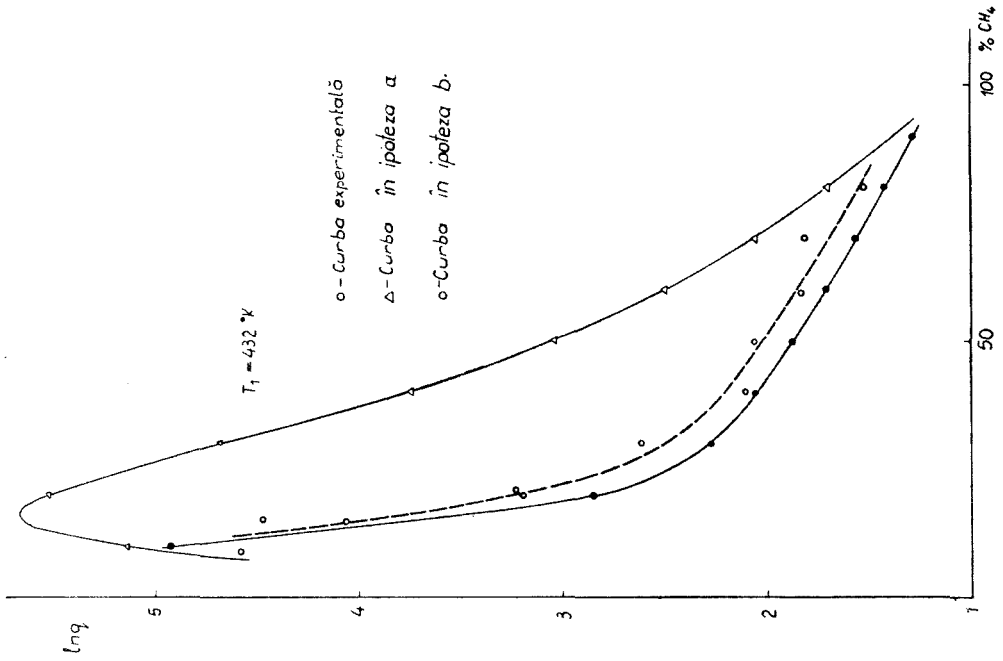


Fig. 3.

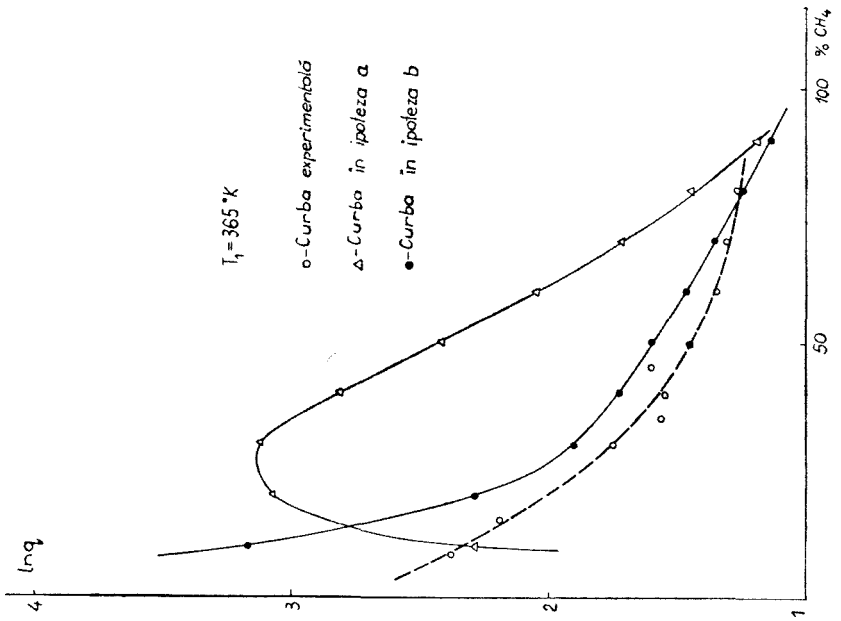


Fig. 2.

tate, ceea ce arată că explicarea fenomenului pe baza teoriei clasice a coloanei de termodifuzie nu este satisfăcătoare.

Pentru amestecurile izotopice, acest efect datorită unei variații foarte reduse a factorului  $\tau_i^{D/\rho}$  prin trecerea de la un izotop la altul, ar putea fi neglijabil, în afara amestecurilor hidrogen—deuteriu—tritiu.

#### B I B L I O G R A F I E

1. W. H. Furry, R. C. Jones, *Rev. Mod. Phys.*, **18**, 151 (1946).
2. H. Jensen, *Angew. Chem.*, **54**, 405 (1941).
3. R. Fleischmann, H. Jensen, *Ergeb. Exakt. Naturwiss.*, **20**, 121 (1942).
4. Gh. Văsar, C. Ungureanu, T. Fodor, *St. Cercet. Fiz.* **XII**, 4, 825 (1961).
5. O. Piringier, P. Mărgineanu, *Analiza cromatografică a deuteriului*, lucrare depusă la Inst. de Fizică Atomică, iunie, 1959.
6. R. Bucur, T. Fodor, I. Mercea, *St. Cercet. Fiz.* **XI**, 1, 211 (1960).

#### КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РАЗДЕЛЯЮЩЕГО ФАКТОРА В ТЕРМОДИФУЗИОННОЙ КОЛОННЕ

(Резюме)

Авторы изучают экспериментально зависимость разделяющего фактора от концентрации компонентов смеси  $\text{CH}_4\text{-H}_2$  в термодиффузионной колонне. Экспериментальные результаты указывают на сильную зависимость от начальной концентрации смеси, причём разделение повышается с концентрацией водорода в смеси. Экспериментальные данные были сравнены с теорией.

#### DEPENDENCE OF THE SEPARATION FACTOR OF A THERMAL-DIFFUSION COLUMN ON CONCENTRATION

(Summary)

In the present paper the dependence of the separation factor of a thermal diffusion column on concentration for the  $\text{CH}_4\text{-H}_2$  mixtures was studied.

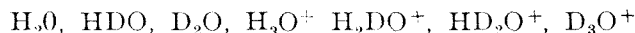
The experimental results show a strong dependence on the initial concentration of the mixture, the separation factor arising with hydrogen concentration. The experimental data were compared with the theory.

# STUDIUL R.M.N. AL ECHILIBRULUI IZOTOPIC ÎN SISTEMUL APĂ—ION DE HIDRONIU

de

V. ZNAMIROVSKI

Într-o lucrare anterioară [1] s-a stabilit prin calcul curba de echilibru a conținutului de deuteriu în sistemul apă-ion de hidroniu, luând în considerare echilibrul complex ce se stabilește între speciile izotopico-moleculare existente într-o soluție acidă:



S-a constatat că deuteriul se concentrează cu precădere în molecula de apă, în defavorul ionului de hidroniu.

O dovadă experimentală directă a acestui fapt ne poate fi furnizată de rezonanța magnetică protonică în soluții acide deuterate.

Dacă s-ar cunoaște factorul de separare  $\alpha$  definit în felul următor:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{D}{H}\right)_{ion}}{\left(\frac{D}{H}\right)_{apă}} = \frac{N}{1 - N} = \frac{n}{1 - n} \quad (1)$$

atunci cu ajutorul relației:

$$N = \frac{\alpha n}{1 - n + \alpha n} \quad (2)$$

care rezultă direct din relația de definiție a factorului de separare, s-ar putea stabili curba de echilibru. În relația (2)  $N$  reprezintă fracția molară a deuteriului în faza ionică, iar  $n$  fracția molară a deuteriului în apă.

Metoda R.M.N. permite determinarea factorului de separare măsurându-se deplasările izotopice în spectrele soluțiilor acide.

Se știe că semnalul R.M.N. protonic al apei se deplasează spre câmpuri slabe o dată cu adăugarea unui acid mineral puternic [2]. Spectrul R.M.N. observat în acest caz va fi monolinar datorită schimbului rapid dintre protonii acidului și ai apei.

Deci deplasarea semnalului R.M.N. în raport cu apa pură se datorește creșterii concentrației de protoni pe care o introduce acidul în soluție, conform relației:

$$\Delta_H = P \cdot \delta$$

unde  $P$  este fracția atomică a protonilor introduși, de acid iar  $\delta$  este deplasarea chimică a protonului.

Prin urmare, va exista o relație liniară între poziția semnalului R.M.N. observat,  $\Delta_H$  și fracția atomică a acidului. Aceasta numai atît timp cît acidul poate fi considerat complet dissociat.

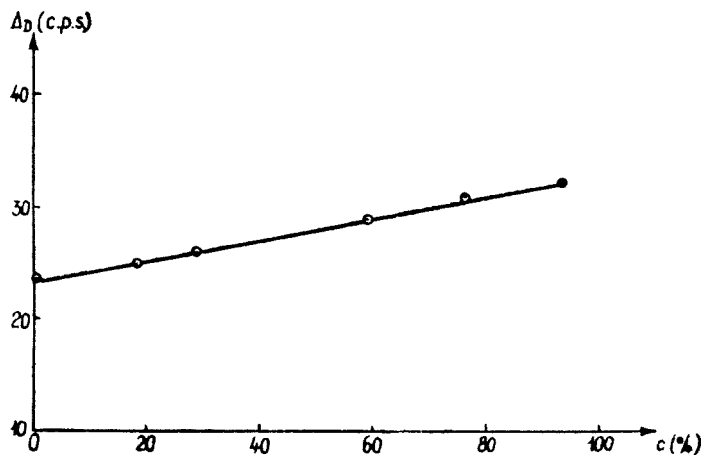


Fig. 1. Variația deplasării izotopice cu concentrația (acid 8,75%).

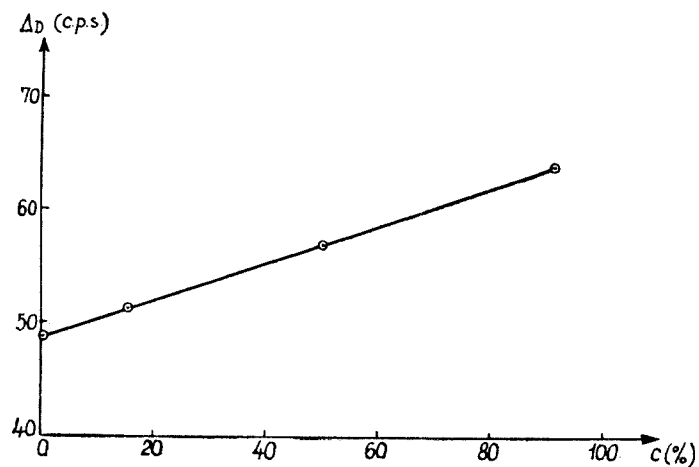


Fig. 2. Variația deplasării izotopice cu concentrația (acid 17,5%).

Dar fracția atomică a protonilor, la o concentrație de acid dată, poate fi modificată și prin introducerea deuteriului în apă, obținându-se o deplasare izotopică a semnalului care poate fi măsurată [3].

În cazul nostru s-a lucrat cu o soluție de acid percloric de concentrație 8,75% obținându-se o deplasare izotopică liniară a semnalului R.M.N. în funcție de concentrația deuteriului în probe (fig. 1).

În continuare s-au făcut măsurători ale deplasării izotopice în cazul concentrației acide 17,50% (fig. 2), observându-se o creștere a coeficientului unghiular al drepte, o dată cu creșterea concentrației de acid (fig. 3).

Rezultatele acestor măsurători au putut fi folosite la determinarea factorului de separare.

Conform relației (2) fracția molară a protonilor în faza ionică este dată de relația :

$$1 - N = \frac{1 - n}{1 - n + \alpha n} \quad (3)$$

iar raportul :

$$\frac{1 - N}{1 - n} = \frac{1}{1 - n + \alpha n} \quad (4)$$

reprezintă numărul relativ de protoni în sistemul considerat. Acesta va fi dat de raportul semnalelor R.M.N, protonice și prin urmare :

$$\frac{\Delta_D}{\Delta_H} = \frac{1}{1 - n + 2n} \quad (5)$$

Măsurînd raportul  $\frac{\Delta_D}{\Delta_H}$ , unde  $\Delta_D$  reprezintă deplasarea izotopică pentru o concentrație izotopică a apei dată, se poate calcula factorul de separare. S-a obținut pentru  $\alpha$  valoarea  $0,71 \pm \pm 0,03$ .

În continuare, folosind relația (2) se poate trasa curba de echilibru a conținutului de deuteriu în sistemul considerat (fig . 4).

Această curbă confirmă pe deplin atitudinea preferențială a deuteriului față de molecula de apă în dauna ionului de hidroniu.

Toate măsurătorile au fost făcute la 60 Mc cu o instalație J.N.M. —3H—60 de înaltă rezoluție, la temperatura camerei, folosind ca referință internă dioxanul.

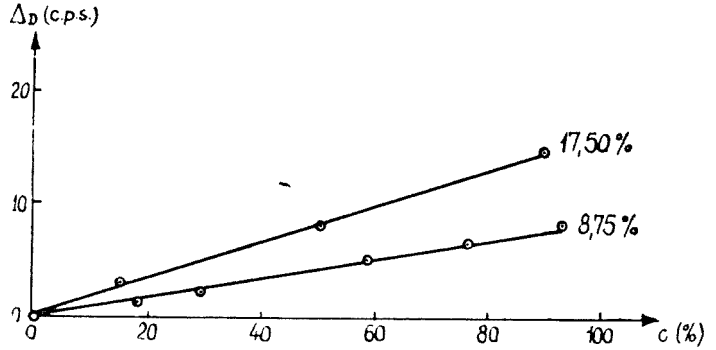


Fig. 3. Influența acidității asupra deplasărilor izotopice.

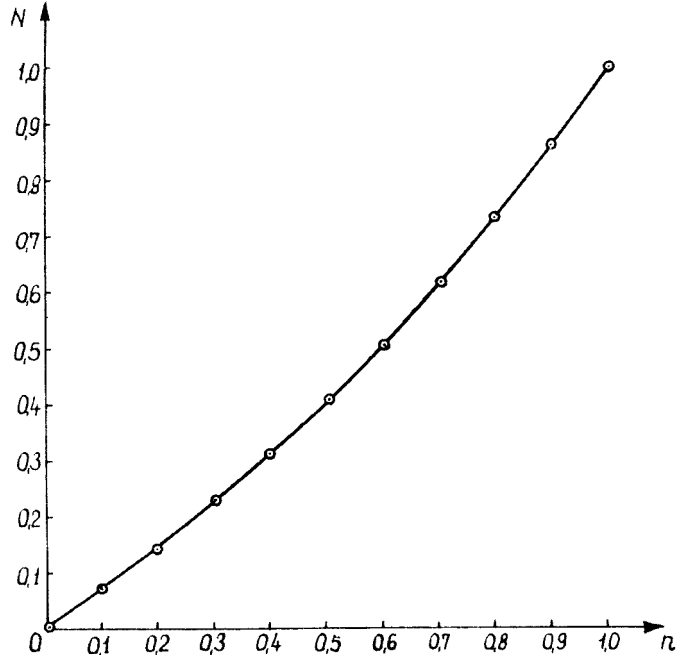


Fig. 4. Curba de echilibru izotopic în sistemul apă-ion de hidroniu.

#### BIBLIOGRAFIE

1. V. Znamirovski, Rev. roum., phys. 2, (14) 175 (1969).
2. H. S. Gutowsky, A. Saika, J. Chem. Phys. 21, 1688 (1953).
3. A. J. Kresge, A. L. Allred, J. Am. Chem. Soc. 85, 1541 (1963).

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОТОПНОГО РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМЕ ВОДА — ИОН ГИДРОНИЯ  
С ПОМОЩЬЮ ЯМР

(Резюме)

В статье установлена равновесная кривая содержания дейтерия в системе вода — ион гидрония, на основе измерения изотопных сдвигов в ЯМР спектрах кислотных растворов.

THE N.M.R. STUDY OF THE ISOTOPIC EQUILIBRIUM  
IN WATER-HYDRONIUM ION SYSTEM

(Summary)

In the present paper, the equilibrium curve for the deuterium content in water-hydronium ion system was established, by taking into account the isotopic shifts in N.M.R. spectra of acid solutions.



## STUDIUL UNOR STABILIZATORI DE TENSIUNE CU VARISTORI DIN OXID DE ZINC

de

F. PUSKÁS și I. ARDELEAN

Studiind proprietățile semiconductoare ale sistemului  $ZnO-Al_2O_3$  [1-5] s-a constatat că acest sistem este adecvat pentru construirea varistorilor simetrici. Varistorii de oxid de zinc descriși în lucrarea [5], pot fi utilizați la construirea stabilizatorilor de tensiune. Cu acești varistori au fost încercate următoarele montaje de stabilizatoare de tensiune:

**A. Stabilizator de tensiune în regim static.** Folosind o schemă foarte simplă, dată în fig. 1, obținem un montaj care lucrând în regim static funcționează ca un stabilizator de tensiune.

Un parametru important pentru caracterizarea unui stabilizator este coeficientul de stabilizare, care se definește prin relația:

$$[S = \frac{\Delta x}{x} \left( \frac{\Delta y}{y} \right)^{-1}] \quad (1)$$

unde  $x$  și  $y$  sînt mărimile de stabilizat la intrarea respectiv la ieșirea stabilizatorului, iar  $\Delta x$  și  $\Delta y$  sînt variațiile acestora.

În cazul stabilizatorului de tensiune dat în fig. 1. coeficientul de stabilizare este dat de următoarea relație:

$$[S = \frac{U_{ies} \Delta U_{int}}{U_{int} \Delta U_{ies}}] \quad (2)$$

unde cu  $\Delta U_{int}$  și  $\Delta U_{ies}$  s-au notat variațiile tensiunilor de intrare respectiv de ieșire.

Dacă se admite că variația tensiunii de ieșire la bornele varistorului nu este mai mare decît 10%, atunci caracteristica voltamperică a acestuia poate fi descrisă prin relația:

$$I = B U_{ies}^\beta \quad (3)$$

unde  $\beta$  este coeficientul de neliniaritate al varistorului, iar  $B$  o constantă care depinde de construcția varistorului.

Presupunînd că stabilizatorul lucrează în regim static putem scrie:

$$U_{int} = U_{ies} + R B U_{ies}^\beta \quad (4)$$

$$\Delta U_{int} = (1 + \beta R B U_{ies}^{\beta-1}) \Delta U_{ies} \quad (5)$$

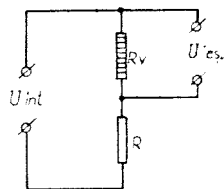


Fig. 1.

Folosind relațiile (1), (3) și (4) obținem :

$$S = \beta - k(\beta - 1) \tag{6}$$

unde  $k = \frac{U_{ies}}{U_{int}}$  este coeficientul de transfer al stabilizatorului. Din ecuația coeficientului de stabilizare dedusă pentru acest montaj se vede că valoarea maximă a lui  $S$  se obține când  $U_{ies} \ll U_{int}$ . În acest caz  $S \approx \beta$ .

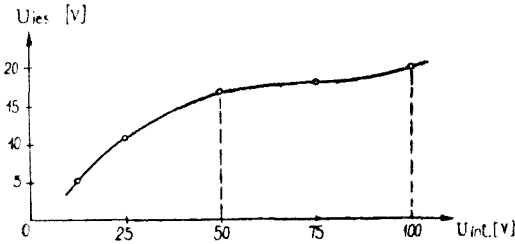


Fig. 2.

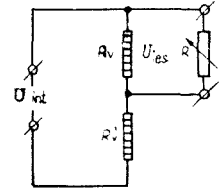


Fig. 3.

În cazul montajului din fig. 1 am lucrat cu următoarele valori :  $U_{int} = 75V$   $\Delta U_{int} = \pm 25 V$ ,  $U_{ies} = 20 V$ ,  $\beta = 5$  și  $R = 500\Omega$ . Rezultatele obținute pentru acest stabilizator sînt reprezentate în figura 2. După cum rezultă din fig. 2 variația tensiunii de ieșire este mai mică de 8% dacă tensiunea de intrare variază cu 33%. Calculînd coeficientul de stabilizare din relația (6) obținem o valoare în jur de 4, ceea ce demonstrează că datele experimentale obținute concordă foarte bine cu rezultatele teoretice.

**B. Stabilizator de tensiune cu sarcină variabilă.** În fig. 3 este reprezentată schema de principiu a unui stabilizator de tensiune cu sarcină variabilă, avînd ca element de stabilizare doi varistori.

În acest caz considerăm că tensiunea de intrare este constantă, iar rezistența de sarcină variază. Datorită variației rezistenței de sarcină variază și tensiunea de ieșire ; montajul din fig. 3 asigură o stabilizare a tensiunii de ieșire.

Dacă valoarea rezistenței de sarcină  $R_s$  variază cu o mărime  $\Delta R_s$  în circuit se va schimba atît valoarea curentului cît și a tensiunii. Să notăm cu  $\Delta I_1$  și  $\Delta I_2$  respectiv  $\Delta U_1$  și  $\Delta U_2$  variațiile acestor mărimi din porțiunile corespunzătoare ale circuitului (vezi fig. 3).

Luînd în considerare că variația tensiunii pe varistorul  $R'_v$  duce la aceeași variație a tensiunii pe varistorul  $R_v$ , dar de semn contrar, între variația de curent și tensiune obținem următoarele relații :

$$\Delta I_1 = \frac{\Delta U_1}{R_{d_1}} = \beta_1 \frac{\Delta U_1}{R_v} = - \beta_1 \frac{\Delta U_{ies}}{R_v} \tag{7}$$

$$\Delta I_2 = \frac{\Delta U_2}{R_{d_2}} = \beta_2 \frac{\Delta U_2}{R'_v} = - \beta_2 \frac{\Delta U_{ies}}{R'_v} \tag{8}$$

unde cu  $R_{d_1}$  și  $R_{d_2}$  s-au notat rezistențele dinamice ale celor doi varistori iar cu  $R_v$  și  $R'_v$  s-au notat rezistențele statice corespunzătoare.

Din mărimile  $\Delta I_1$  și  $\Delta I_2$  se poate calcula variația  $\Delta I$  a curentului din circuitul exterior :

$$\Delta I = \Delta I_1 - \Delta I_2 = - \Delta U_{ies} \left( \frac{\beta_1}{R_v} + \frac{\beta_2}{R'_v} \right) \quad (9)$$

Pe de altă parte este valabilă relația :

$$\Delta I = \frac{U_{ies} + \Delta U_{ies}}{R_s + \Delta R_s} - \frac{U_{ies}}{R_s} \quad (10)$$

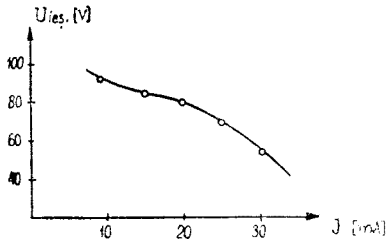


Fig. 4.

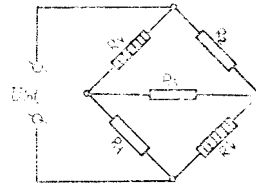


Fig. 5.

Folosind relațiile (1), (9) și (10) obținem pentru coeficientul de stabilizare următoarea relația :

$$S = \left( \frac{\beta_1}{R_v} + \frac{\beta_2}{R'_v} \right) (R_s + \Delta R_s) + 1 \quad (11)$$

S-au studiat și experimental stabilizatori de acest tip, ca exemplu dăm elementele unui stabilizator construit după montajul din fig. 3. :  $R_v = R'_v = 25\text{k}\Omega$ ,  $\beta_1 \approx \beta_2 = 5$ ,  $R_s = 10\text{k}\Omega$  și  $R_s = 5\text{k}\Omega$ . Caracteristica obținută pentru acest stabilizator este dată în fig. 4.

Din calcule rezultă pentru acest stabilizator un coeficient de stabilizare  $S = 7$ , iar din caracteristica stabilizatorului reiese că aceeași valoare a coeficientului de stabilizare a fost atinsă în domeniul de tensiune 86–93 V.

**C. Stabilizatori de tensiune în punte.** În fig. 5 este reprezentată schema de principiu a unui stabilizator în punte, în acest montaj ca elemente de stabilizare s-au folosit varistorii  $R_v$  și  $R'_v$ . Între variația tensiunii de intrare și cea de ieșire, după cum rezultă din schema montajului este valabilă următoarea relație :

$$\Delta U_{ies} = \frac{\Delta U_{int}}{2} \left( \frac{R_1 - R_{d1}}{R_1 + R_{d1}} + \frac{R_2 - R_{d2}}{R_2 + R_{d2}} \right) \quad (12)$$

Din relațiile (1) și (12) se deduce relația pentru coeficientul de stabilizare avînd următoarea formă :

$$S = 2K \left( \frac{\beta_1 R_1 - R_v}{\beta_1 R_1 + R_v} + \frac{\beta_2 R_2 - R'_v}{\beta_2 R_2 + R'_v} \right)^{-1} \quad (13)$$

Pentru a studia și experimental acest montaj s-a construit un stabilizator în punte cu următoarele date:  $R_v = R'_v = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $\beta_1 \approx \beta_2 = 4$ ,  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$  și  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ . Caracteristica stabilizatorului este redată în fig. 6. După cum se vede din figură stabilizatorul funcționează cu un coeficient de stabilizare în jur de 3, în timp ce calculul teoretic al acestui coeficient folosind relația (13) ne dă o valoare în jur de 4.

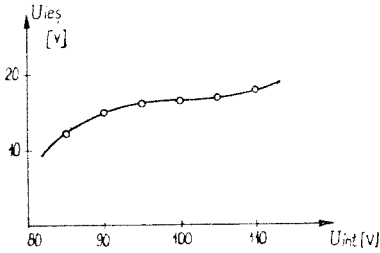


Fig. 6.

**Concluzii.** Au fost încercate câteva montaje de stabilizatori de tensiune avînd ca elemente neliniare varistorii din oxid de zinc. Aceste montaje au fost studiate și teoretic. Coeficienții de stabilizare teoretic calculați sînt în bună concordanță cu rezultatele experimentale.

## BIBLIOGRAFIE

1. I. Ursu, F. Pușkas, V. Cristea, Rev. Phys. **VII**, 277, 1962.
2. I. Ursu, F. Puskas, V. Cristea, Studia Univ. Babeș-Bolyai, S. Math-Phys., fasc. 1, 127, 1962.
3. I. Ursu, F. Puskas, V. Cristea, Rev. Roum. de Phys., **10**, 223, 1965.
4. F. Puskas, Studia Univ. Babeș-Bolyai, S. Math-Phys., fasc. 1, 131, 1969.
5. F. Puskas, Teză de doctorat, Univ. Babeș-Bolyai, Facultatea de Fizică, 1968.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ С ВАРИСТОРАМИ ИЗ ОКИСИ ЦИНКА

(Резюме)

Авторы показывают, что зависимость от напряжения сопротивления варисторов из окиси цинка может быть использована для построения стабилизаторов напряжения. Изучены теоретически и экспериментально три типа стабилизаторов напряжения. Установлено, что теоретические соотношения, выведенные для изученных стабилизаторов, находятся в хорошем согласии с полученными экспериментальными результатами.

## INVESTIGATION OF SOME TENSION STABILIZERS WITH ZINC OXIDE VARISTORS

(Summary)

In the paper it is shown that the dependency on tension of the resistance of zinc oxide varistors can be utilized for constructing tension stabilizers. Three types of tension stabilizers were studied both theoretically and experimentally. It has been ascertained that the theoretical relations deduced for the studied stabilizers are in good unison with the experimental results obtained.

CONSIDERAȚII ASUPRA TENSORILOR DE DUBLĂ ȘI TRIPLĂ CORELAȚIE A VITEZELOR DIN DOUĂ PUNCTE ALE UNUI FLUID TURBULENT

de

STELIANA CODREANU

Teoria statistică utilizează în descrierea fenomenului de turbulență corelațiile dintre pulsațiile vitezelor din două puncte ale fluxului turbulent. Astfel au fost introduși tensori de corelație de diferite ranguri printre care tensorul de dublă corelație  $(Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A(u_j)_B}$  și tensorul de triplă corelație  $(S_{i,j,k})_{A,B} = \overline{(u_i)_A(u_j)_A(u_k)_B}$ . În condițiile turbulenței izotrope acești tensori pot fi exprimați în funcție de anumite funcții scalare, funcții de corelație. Expresiile tensorilor în acest caz au fost stabilite de Th. K a r m a n și L. H o w a r t h [1] pe cale geometrică și de H. P. R o b e r t s o n [2] prin metoda invarianților.

În această lucrare ne propunem să arătăm că aceste expresii pot fi găsite folosind un mod de lucru matricial.

Fie  $(u_1, u_2, u_3)$  și  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  componentele vitezelor din punctele  $A$  și  $B$  pe axele de coordonate ale unui sistem rectangular de axe. Notăm cu  $(v_1, v_2, v_3)$  și  $(v'_1, v'_2, v'_3)$  componentele vitezelor din  $A$  și  $B$  pe trei linii reciproc perpendiculare ale căror cosinusi directori sînt respectiv  $(l_1, m_1, n_1)$ ;  $(l_2, m_2, n_2)$ ;  $(l_3, m_3, n_3)$ . Alegem în particular prima linie de direcția lui  $AB$ , astfel că  $l_1 = \frac{\xi_1}{r}$ ;  $m_1 = \frac{\xi_2}{r}$ ;  $n_1 = \frac{\xi_3}{r}$ . Cu  $r$  am notat distanța  $AB$ , iar  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sînt proiecțiile ei pe cele trei axe de coordonate.

În aceste condiții componentele  $u_1, u_2, u_3$ , respectiv  $u'_1, u'_2, u'_3$  se scriu:

$$u_1 = \sum_i l_i v_i \qquad u'_1 = \sum_j l_j v'_j$$

$$u_2 = \sum_i m_i v_i \qquad u'_2 = \sum_j m_j v'_j$$

$$u_3 = \sum_i n_i v_i \qquad u'_3 = \sum_j n_j v'_j$$

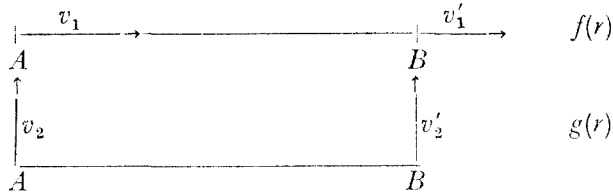
$$i, j = 1, 2, 3.$$

Pentru calculul tensorului de dublă corelație vom ține seama de faptul că din condiția de izotropie a turbulenței, numai produsele:

$$\overline{v_1 v'_1} = \overline{u^2} f(r); \quad \overline{v_2 v'_2} = \overline{v_3 v'_3} = \overline{u^2} g(r)$$

sînt diferite de zero.

Funcțiile  $f(r)$  și  $g(r)$  sînt respectiv funcția de dublă corelație longitudinală și funcția de dublă corelație transversală:



Ținînd seama de considerațiile anterioare, tensorul de dublă corelație devine:

$$\begin{aligned} (Q_{ij})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \begin{pmatrix} \overline{u_1 u'_1} & \overline{u_2 u'_2} & \overline{u_1 u'_3} \\ \overline{u_2 u'_1} & \overline{u_2 u'_2} & \overline{u_2 u'_3} \\ \overline{u_3 u'_1} & \overline{u_3 u'_2} & \overline{u_3 u'_3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j l_j v'_j} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j m_j v'_j} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j n_j v'_j} \\ \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j l_j v'_j} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j m_j v'_j} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j n_j v'_j} \\ \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j l_j v'_j} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j m_j v'_j} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j n_j v'_j} \end{pmatrix} = \\ &= \overline{u^2} \begin{pmatrix} l_1^2 f + l_2^2 g + l_3^2 g & l_1 m_1 f + l_2 m_2 g + l_3 m_3 g & l_1 n_1 f + l_2 n_2 g + l_3 n_3 g \\ m_1 l_1 f + m_2 l_2 g + m_3 l_3 g & m_1^2 f + m_2^2 g + m_3^2 g & m_1 n_1 f + m_2 n_2 g + m_3 n_3 g \\ n_1 l_1 f + n_2 l_2 g + n_3 l_3 g & n_1 m_1 f + n_2 m_2 g + n_3 m_3 g & n_1^2 f + n_2^2 g + n_3^2 g \end{pmatrix} = \\ &= \overline{u^2} f \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 \\ m_1 l_1 & m_1^2 & m_1 n_1 \\ n_1 l_1 & n_1 m_1 & n_1^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \overline{u^2} g \begin{pmatrix} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 & l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 & l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 \\ m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 & n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{pmatrix} - \\ &- \overline{u^2} g \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 \\ m_1 l_1 & m_1^2 & m_1 n_1 \\ n_1 l_1 & n_1 m_1 & n_1^2 \end{pmatrix} = \\ &= \overline{u^2} \frac{f-g}{r^2} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{pmatrix} + \overline{u^2} g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sau

$$Q_{i,j} = \bar{u}^2 \left[ \frac{f-g}{r^2} \zeta_i \zeta_j + g \delta_{ij} \right]$$

În mod analog, pentru tensorul de triplă corelație, ținînd cont de expresiile funcțiilor de corelație  $h(r)$ ,  $k(r)$ ,  $q(r)$  și de faptul că celelalte produse de corelație sînt nule, avem :

$$h(r) = \frac{\overline{v_2^2 v_2'}}{(u^2)^{3/2}}$$

$$k(r) = \frac{\overline{v_1^2 v_1'}}{(u^2)^{3/2}}$$

$$q(r) = \frac{\overline{v_1 v_2 v_2'}}{(u^2)^{3/2}}$$

$$(S_{ij,k})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_A (u'_k)_B} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \overline{u_1 u_1 u'_1} & \overline{u_1 u_1 u'_2} & \overline{u_1 u_1 u'_3} \\ \overline{u_1 u_2 u'_1} & \overline{u_1 u_2 u'_2} & \overline{u_1 u_2 u'_3} \\ \overline{u_1 u_3 u'_1} & \overline{u_1 u_3 u'_2} & \overline{u_1 u_3 u'_3} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k l_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k n_j v'_k} \\ \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k l_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k n_k v'_k} \\ \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k l_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i l_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k n_k v'_k} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k n_k v'_k} \\ \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k n_k v'_k} \\ \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i m_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k n_k v'_k} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j l_j v_j \sum_k n_k v'_k} \\ \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j m_j v_j \sum_k n_k v'_k} \\ \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k l'_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k m_k v'_k} & \overline{\sum_i n_i v_i \sum_j n_j v_j \sum_k n_k v'_k} \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{k-h-2q}{r^3} \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} \xi_1 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_3 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 \end{array} \right\| + \\
 &+ (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{h}{r} \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{array} \right\| + \\
 &+ (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{q}{r} \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{array} \right\| + \\
 &+ (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{q}{r} \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 \end{array} \right\|
 \end{aligned}$$

sau :

$$(S_{ij,k}) = (\bar{u}^2)^{3/2} \left[ \frac{k-h-2q}{r^3} \xi_i \xi_j \xi_k + \frac{h}{r} \delta_{ij} \xi_k + \frac{q}{r} \delta_{ik} \xi_j + \frac{q}{r} \delta_{jk} \xi_i \right]$$

BIBLIOGRAFIE

1. Th. K á r m á n, L. Howarth Proc. Roy. Soc. **164**, 192 (1938).
2. H. P. Robertson Proc. Cambridge Phil. Soc. **36**, 1940).
3. G. K. Batchelor *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge (1953).
4. T. O. Hinze, *Turbulence. An introduction to its mechanism and theory*. Mc. Graw – Hill Book (1959)

О ТЕНЗОРАХ ДВОЙНОЙ И ТРОЙНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СКОРОСТЕЙ В ДВУХ ТОЧКАХ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

(Резюме)

В работе используется способ матричного вычисления для получения выражений тензоров двойной и тройной корреляции в зависимости от корреляционных функций.

CONSIDERATIONS ON TENSORS OF DOUBLE AND TRIPLE SPEED CORRELATION FROM TWO POINTS OF A TURBULENT FLUID

(Summary)

A usage of matrix calculus is utilized in the paper in order to obtain the tensor expressions of double and triple correlation depending on the correlation function.



# CÎTEVA OBSERVAȚII REFERITOARE LA MODUL DE SCRIERE ȘI DE INTERPRETARE A UNOR CONSTANTE FIZICE UNIVERSALE

de

T. I. LÁSZLÓ

*Lucrare prezentată la cea de-a II-a Sesiune științifică (6-7 mai 1967)  
a cadrelor didactice de la Institutul pedagogic de 3 ani Baia-Mare*

*Datele numerice* izolate exprimă prea puțin în sine. O părere justă despre rolul lor și o apreciere obiectivă a valorii lor se formează comparîndu-le cu alte mărimi de aceeași natură sau cu altă mărime avînd natură diferită, dar fiind legate de primele prin relații bine definite. *Reprezentarea comparativă*, tabelară (de tip statistic) sau grafică (de tip calitativ) a valorilor numerice referitoare la diferitele mărimi fizice reprezintă o necesitate primordială, atît teoretică cît și practică.

Una dintre cele mai importante aranjări într-o schemă ordonată după ordinea de mărime este aceea care se referă la *energie* (de exemplu [1], [2]). În această schemă se încadrează perfect și unele *constante fizice universale* din categoria celor dimensionale. Reușita acestei clasificări presupune însă alegerea unei interpretări juste și a unui mod logic de scriere a lor, în plus pe lîngă aceasta de a nu insista neapărat asupra denumirilor înrădăcinate ale unităților, ci a se baza pe expresivitatea lor.

Pe scara ordinelor de mărime submicroscopice se disting constantele care apar la descrierea cantitativă a proceselor de interacțiune: *mărimile caracteristice pentru cuantificare* (la fenomenele de emisie, ionizare și absorbție).

1. *Constanta lui Boltzmann* scrisă prin definiția obișnuită  $k = W/T$ , avînd ca unitate de măsură  $J/^\circ K$  exprimă clar faptul că ea reprezintă cuanta de energie termică  $W$  furnizată de o variație unitară a temperaturii  $T$ .

2. *Constanta lui Planck* scrisă sub forma originală  $h = W/f$ , cu unitatea de măsură  $Ws^2$  nu exprimă așa de clar sensul ei, alegînd însă ca unitate de măsură pe  $J/Hz$  [2], se clarifică imediat că ea reprezintă cuanta de energie electromagnetică  $W$  datorată variației unitare a frecvenței  $f$ .

3. *Electronvoltul* se recomandă a fi scris sub forma de  $e = W/U$  cu unitatea de măsură  $J/V$ , indicîndu-se astfel că reprezintă cuanta de energie electrică  $W$  ce corespunde variației unitare a tensiunii electrice de accelerare  $U$ .

4. *Magnetonul lui Bohr--Procopiu* exprimat sub forma  $\mu_B = \Gamma/H$  cu unitatea de măsură  $\frac{J}{A/m}$  [3] apare ca dualul electronvoltului, în sensul că el reprezintă

cuanta de energie magnetică  $W$  ce corespunde variației momentului de rotație  $\Gamma$  la variația unitară a intensității câmpului magnetic  $H$ .

5. *Semimasa electronului și protonului*, conform relației  $\frac{1}{2} m = W/v^2$  cu unitatea de măsură  $\frac{J}{(m/s)^2}$ , apar ca reprezentanții cuantei de energie mecanică  $W$  la o variație unitară a vitezei pătratică  $v^2$  a corpusculului respectiv.

Plecînd de la aceste considerente constantele microfizice enumerate mai sus pot fi înglobate în *reprezentarea tabelară a energiei* (tabelul 1, cu valorile numerice luate din [3], [4]).

Tabel 1

Unele constante microfizice universale

Cuanta de energie datorată variației unitare a	Denumirea constantei	Energia în Js	Unitatea de măsurare
frecvenței	constanta lui Planck*	$6,6249 \cdot 10^{-34}$ [4]	$\frac{J}{Hz}$
vitezei electronului	semimasa electronului	$4,5541 \cdot 10^{-31}$ [4]	$\frac{J}{(m/s)^2}$
cîmpului magnetic	magnetonul lui Bohr	$1,16526 \cdot 10^{-29}$ [3]	$\frac{J}{A/m}$
vitezei protonului	semimasa protonului	$0,83619 \cdot 10^{-27}$ [4]	$\frac{J}{(m/s)^2}$
temperaturii	constanta lui Boltzmann	$1,3804 \cdot 10^{-23}$ [4]	$\frac{J}{^\circ K}$
tensiunii electrice	electronvoltul	$1,60206 \cdot 10^{-19}$ [4]	$\frac{J}{V}$

\* Constanta lui Planck raționalizată are valoarea numerică  $\hbar = 1,0544 \cdot 10^{-34}$  [4] în același sistem de unități.

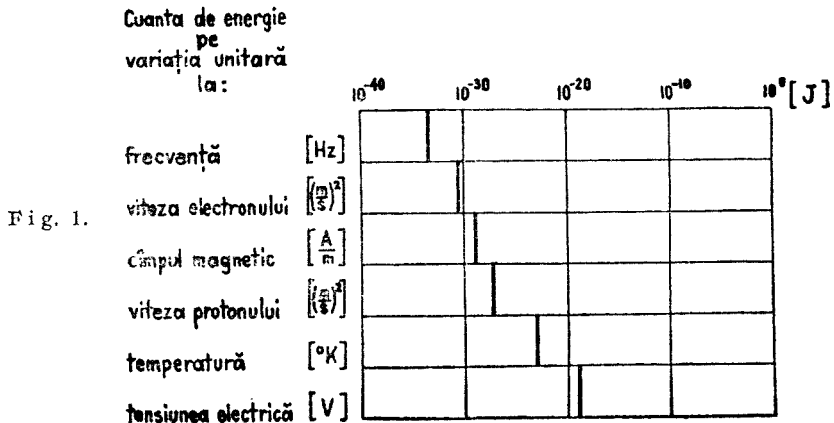


Fig. 1.

Aceste constante la interacțiuni pot fi considerate ca *unități naturale* de măsură ale proceselor *energetice microfizice*. Rolul și măsura în care intervin ele se evidențiază și mai bine reprezentându-le grafic pe scară logaritmică (fig. 1).

Prezentarea convenabilă și ilustrativă a acestor date posedă atributele clarității, simplității și formei atrăgătoare, dând o privire de ansamblu intuitivă asupra fenomenelor microfizice.

#### BIBLIOGRAFIE

1. \*\*\* *Elektricitvo*, (1951) nr. 1.57.
2. J. á s z l ó, T. — B ó d i, S., *Fizikai laboratóriumí praktikum. Elektrofizikai mérések*. Cluj, Litografia Invățămintului, 1957. p. 471—472.
3. S i m o n y i, K., *Elektronfizika*. Budapest, Tankönyvkiadó, 1965. p. 119.
4. M a n e a, C., *Unități de măsură*. București, Editura Militară, 1968. p. 107, 210—219.

#### НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СПОСОБА НАПИСАНИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

(Резюме)

Постоянная Больцманна, Планка, электрон-вольт, магнетон Бора, полумасса электрона и протона задуманы и выражены как кванты энергии, соответствующие единичному изменению температуры, частоты, электрического напряжения, напряжённости магнитного поля квадратной скорости соответствующей корпускулы. Дается сравнительное табельное и графическое изображение этих постоянных, рассматриваемых как природные единицы измерения микрофизических энергетических процессов. Таким образом постоянные могут быть включены в упорядоченную схему по порядку величины энергии.

#### SOME OBSERVATIONS REFERING TO THE WAY OF WRITING AND INTERPRETING SOME UNIVERSAL PHYSICAL CONSTANTS

(Summary)

The Boltzmann's and Planck's constants, the electronvolt, Bohr's magneton, electron and proton half-mass are conceived and expressed as being quantum energy corresponding to the unitary variation of temperature, frequency, electric tension, magnetic field intensity, quadratic velocity of the respective corpuscule. A comparative representation in tables and a plotting of these constants are given. Thus, the constants, considered as natural units of measure of the microphysical energetic processes, can be included in an orderly scheme according to the energy order of magnitude.



G. Alexits et E. Fenyő, **Les méthodes mathématiques en chimie**. Traduction par Pascal Desschamps. Paris — Budapest, Masson et Cie — Akadémiai Kiadó, 1969. 427 p.

Il y a dans la littérature une série d'ouvrages de mathématiques générales qui peuvent être utilisés par des étudiants et par des chercheurs en chimie, mais aucun de ces ouvrages n'est lié si intimement aux applications à la chimie que le présent ouvrage. En effet, cet ouvrage a été écrit exprès pour les chimistes. Dans cet ouvrage les auteurs se proposent de faire connaître au chimiste les éléments mathématiques qui lui sont nécessaires et en même temps de lui apprendre à assimiler le raisonnement mathématique et de lui donner un langage mathématique dans lequel il devra essayer d'exprimer les phénomènes naturels.

Le livre est par excellence un livre de mathématiques appliquées, ou, du moins, comme le disent les auteurs dans la Préface, un livre „de mathématiques directement applicables”. C'est pourquoi l'ouvrage contient un très grand nombre d'exemples d'applications physico-chimiques, analysés complètement, tant du point de vue mathématique que du point de vue physico-chimique. Les auteurs ont renoncé presque complètement aux démonstrations purement mathématiques; voilà pourquoi ils ont réussi à réunir dans un nombre limité de pages un volume assez grand de matériel des divers chapitres de la mathématique.

Un autre trait caractéristique de cet ouvrage est celui que, à l'encontre de la majorité des autres livres similaires de mathématiques générales, ici l'exposition du matériel se fait unitairement. Ainsi dans le Chapitre 1, intitulé: „Grandeurs et fonctions”, on donne aussi les systèmes de coordonnées du plan, le calcul vectoriel, les transformations des systèmes de coordonnées et l'équation d'une droite.

Dans les chapitres 2, 3, 4, 5 et 6 on expose les éléments du calcul différentiel et intégral avec les applications physico-chimiques des fonctions d'une variable réelle.

Après ces chapitres, suit le Chapitre 7, consacré à l'étude des équations différentielles de l'ordre 1 à variables séparables et linéaires et des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. Naturellement ce chapitre contient aussi un grand nombre de belles applications physico-chimiques des équations différentielles du premier et deuxième ordre.

Dans le Chapitre 8 intitulé „Fonctions de plusieurs variables”, on introduit la notion de dérivée partielle et la différentielle totale d'une fonction de deux variables et aussi la notion d'intégrale curviligne et d'intégrale double. Comme une application des intégrales curvilignes et doubles on étudie le premier et le deuxième principe de la thermodynamique.

Les Chapitres 9 et 10 contiennent les éléments de nomographie et les bases du calcul des probabilités respectivement. Puis on fait une série d'applications du calcul des probabilités dans la théorie de l'erreur de mesure et dans la théorie moléculaire des gaz.

La notion de série de Fourier est introduite dans le Chapitre 11, consacré aux équations aux dérivées partielles, où l'on utilise les séries de Fourier pour la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables.

L'ouvrage se termine par un appendice contenant les opérations avec les nombres complexes et les éléments des systèmes d'équations linéaires.

Le livre est écrit avec un exceptionnel talent pédagogique, c'est pourquoi on peut le lire facilement. Cet ouvrage peut constituer un précieux manuel tant pour les étudiants que pour les chimistes chercheurs.

I. MARUȘCIAC

András Ádám. **Truth Functions and the Problem of their Realization by Two-terminal Graphs**. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 206 pp.

The work is a systematic survey on the main directions of the theory of Boolean functions

(i.e. truth functions) from a mathematical point of view.

The book is divided into two parts: Part I: Truth functions; Part II: Rezults and problems on realization.

Part I is devoted to the most problems in the theory of Boolean functions: investigations concerning prime implicants, irredundant disjunctive normal forms, superpositional completeness, unique decomposability by repetition-free superposition, symmetric Boolean functions and the number of symmetry types of Boolean functions.

This part includes the following chapters: 1. Fundamental concepts; 2. Studies on prime implicants; 3. Interrelations between conjunctive and disjunctive normal forms; 4. Superpositional completeness; 5. Decomposition by repetition-free superpositions; 6. Studies on numerical problems; 7. Linear separability.

Part II deals with the connections between Boolean functions and graphs i.e. with the problems

of realization, putting special emphasis on the problem of the repetition-free realization of Boolean functions by two-terminal graphs.

This part includes the chapters: 8. Two-terminal graphs; 9. Repetition-free realization; 10. Some aspects of the problem of optimal realization.

The Appendix of the book gives a list of open problems.

The work is unique in its conception, has many special scientific qualities. The proofs are rigorous, the presentation is compact and the style is clear.

This important book presents a special interest for theoretically-minded mathematicians who want to make researches in the theory of Boolean functions and also for the mathematicians working in practical applications, as well as for nonmathematicians, who may apply the theory of Boolean functions in their work.

I. VIRÁ

L'ÉTUDE DES SÉRIES DANS LES ESPACES LINÉAIRES

Résumé de la thèse de doctorat soutenue par ANDREI NEY à l'Université „Babeş—Bolyai” de Cluj le 12 mars 1968.

L'auteur synthétise dans sa thèse ses recherches sur les algorithmes infinis construits inductivement à l'aide de l'opération binaire d'un groupe topologique quelconque (par exemple les séries, les produits infinis, etc.), ainsi que les intégrales impropres sur un intervalle infini; les résultats portent sur l'établissement de la nature de ces algorithmes (critères de convergence, rapidité de convergence) et aussi sur l'aspect calculatif (somme, évaluation du reste, accélération de la convergence).

Ce qui a rendu possible le traitement des problèmes théoriques et pratiques, d'un point de vue unitaire, c'est la notion d'opérateur-reste défini initialement par l'auteur dans la Revue Roumaine de math. pures et appl. Tome IX, No. 4, 1964 pp. 337—356, puis dans l'article paru à Cluj dans MATHEMATICA • Vol 7/30/1, 1965, pp. 59—65. À savoir: l'opérateur-reste est un opérateur (additif et homogène) qui applique l'ensemble des séries convergentes d'un groupe topologique dans l'ensemble des suites ayant comme limite l'élément neutre du groupe (en attachant à chaque série la suite de ses restes). L'étude des valeurs propres et des éléments propres (dans un sens généralisé par l'auteur) de cet opérateur, a conduit l'auteur à des extensions du critère classique de Kummer, aux séries dans les espaces topologiques (par exemple espace de Banach, espace linéaire  $\sigma$ -réticulé). En même temps on a établi des formules d'évaluation du reste et on a construit des méthodes d'accélération de la convergence. Nous tâcherons d'énumérer succinctement quelques-uns des résultats.

*Résultats concernant la théorie.* L'auteur arrive à une représentation analytique du terme général et du reste des séries monodimensionnelles, convergentes, quelconques. A l'aide de cette formule et de celle de la notion de *fonction-ordre* du terme général et du reste (introduit par l'auteur dans la MATHEMATICA, Vol. 4/27/1, pp. 77—105), il a pu mettre au point plusieurs problèmes ouverts de la théorie classique de la rapidité de convergence, parmi lesquels on mentionne la délimitation exacte du domaine d'applicabilité des critères de convergence de d'Alembert, Duhamel-Raabe, Bertrand, etc. De même c'est aussi la rapidité de convergence à l'aide de laquelle l'auteur a donné une extension au théorème de contraction de Banach dans les espaces métriques complets. Enfin on mentionne la construction d'une opération dépendant d'une variable soumise à un passage à la limite (dans un espace linéaire topologique) et qui contient à la fois les algorithmes à caractère discret (comme les séries) et aussi ceux à caractère continu (comme les intégrales impropres sur un intervalle infini).

*Résultats concernant le calcul numérique.* L'auteur a établi une formule asymptotique générale pour l'évaluation du reste des séries convergentes à termes positifs, ainsi que des méthodes d'amélioration du reste asymptotique. Il a construit trois opérateurs qui servent à l'examen de la convergence, mieux que des critères classiques, et aussi à l'accélération de la convergence. L'auteur a élaboré une méthode d'accé-

lération de la convergence des séries et des intégrales impropres, à grand effet; en appliquant cette méthode on peut effectuer aussi la quadrature numérique sur un intervalle infini. Nous mentionnons enfin une nouvelle méthode de sommation sous la forme intégrale.

## JURY DE DOCTORAT

<i>Président :</i>	Prof. Dr. Doc. GH. CHIȘ, doyen de la Faculté de mathématiques-mécanique
<i>Membres :</i>	Prof. Dr. Doc. T. POPOVICIU, de l'Académie de la R.S. de Roumanie dirigeant scientifique. Prof. Dr. Doc. D. V. IONESCU, professeur émérite de la R.S. de Roumanie Prof. Dr. Doc. R. CRISTESCU (Bucarest) Prof. Dr. Doc. I. POPA (Jassy)

## FORMULE DE CUADRATURĂ DE TIP GAUSS

*Rezumatul tezei de doctorat susținută la 26 octombrie 1968 la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj, de PĂRASCHIVA PAVEL, pentru obținerea titlului de doctor în matematici*

În lucrare se tratează despre formula de cuadratură a lui Gauss

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R[f] \quad (1)$$

și despre diferite generalizări ale ei.

În formula (1) se presupune că se calculează coeficienții  $A_1, A_2, \dots, A_n$  și nodurile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  astfel ca această formulă să aibă gradul de exactitate egal cu  $2n - 1$ .

Se urmărește să se determine și restul  $R[f]$  al acestei formule.

Studiul și generalizări ale formulei de cuadratură a lui Gauss au fost făcute de către R. Lobatto, E. B. Christoffel, I. J. Stieltjes, K. A. Possé F. G. Mehler, A. A. Markoff.

Cercetări noi, moderne în legătură cu această formulă de cuadratură au fost făcute de P. Turan, L. Tchakaloff, T. Popoviciu, D. D. Stancu, D. V. Ionescu.

În lucrare se studiază formulele de cuadratură de tip Gauss, Turan, Popoviciu, Tchakaloff, Christoffel-Stancu, în cazul unei pondere  $p(x)$ , printr-o metodă unitară, întrebuințată de D. V. Ionescu, metodă ce constă în atașarea la fiecare formulă de cuadratură a unei probleme la limită, prin rezolvarea căreia se obțin coeficienții formulei, nodurile și restul.

Mai mult, metoda conduce la scrierea restului  $R[f]$  sub forma unei integrale definite și permite studiul acestui rest.

Lucrarea conține patru capitole și o introducere.

În cap. I se vorbește despre formula de cuadratură a lui Gauss și restul ei, arătându-se diferite metode ce au condus la această formulă și la determinarea restului ei.

În cap. II se tratează problema restului formulelor de cuadratură ale lui Turan, printr-o problemă la limită.

Capitolul se termină cu un exemplu de formulă de cuadratură de tip Gauss-Turan în cazul ponderci

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  și a intervalului  $(-1, 1)$ .

În cap. III se studiază restul formulelor de cuadratură de tip Tchakaloff-Popoviciu

$$\int_b^a p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{r_i-1} A_i^{(k)} f^{(k)}(x_i) + R[f] \quad (2)$$



tot cu ajutorul unei probleme la limită, făcându-se un amplu studiu asupra rezolvabilității acestei probleme la limită și arătându-se că existența soluției acestei probleme la limită depinde de rezolvabilitatea unui sistem de ecuații algebrice, în care necunoscutele sînt nodurile și coeficienții formulei de cuadratură (2). Se demonstrează că

$$R[f] = \int_a^b \varphi(x) f^{(N)}(x) dx \quad (3)$$

unde  $N = r_1 + r_2 + \dots + r_n + n$  și că funcția  $\varphi(x)$  păstrează un semn constant în intervalul  $(a, b)$ .

În cap. IV al lucrării se studiază formulele de cuadratură de tip Gauss-Christoffel-Stancu

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} f^{(j)}(a_i) + \sum_{s=1}^n \sum_{\nu=0}^{r_{i-1}} B^{(s)} f^{(\nu)}(x_s) + R[f] \quad (4)$$

unde  $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + r_1 + r_2 + \dots + r_n + n$  în care nodurile  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sînt date împreună cu ordinul lor de multiplicitate, fiind supuse singurei condiții ca

$$S(x) = A \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{\alpha_i} > 0, \text{ pentru } x \in (\alpha, \beta) \quad (5)$$

$A$  constant

Metoda de cercetare utilizată în lucrare, s-a dovedit a fi eficace și în cazul acestor formule de cuadratură, deși dificultățile de demonstrație sînt mai mari decît în cazurile anterioare.

Se demonstrează și aici că

$$R[f] = (-1)^N \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) f^{(N)}(x) dx \quad (6)$$

că funcția  $\varphi(x)$  păstrează un semn constant în  $(\alpha, \beta)$ .

#### COMISIA DE DOCTORAT

*Președinte:* Prof. dr. doc. GHEORGHE CHIȘ  
(Universitatea Babeș-Bolyai Cluj)

*Conducător științific:* Prof. dr. doc. DUMITRU V. IONNESCU  
(Universitatea Babeș-Bolyai Cluj)

*Membru:* Acad. Prof. CAIUS IACOB  
(Universitatea din București)  
Conf. univ. dr. DUMITRU  
D. STANCU  
(Universitatea Babeș-Bolyai Cluj)  
Conf. univ. dr. CAROL KALIK  
(Universitatea Babeș-Bolyai Cluj)

#### SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES SYSTÈMES FORTEMENT ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE

*Résumé de la thèse de doctorat soutenue par IOAN A. RUS à l'Université Babeș-Bolyai de Cluj, le 26 octobre 1968*

On donne des conditions suffisantes pour l'unicité, dans des différentes sortes d'espaces  $(C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), C^2(\bar{\Omega}), W_p^2(\Omega))$ , de la solution du problème de Dirichlet correspondant au système fortement elliptique du second ordre et au domaine borné  $\Omega \subset R^m$ . Chapitre I. Principes de maximum.

§1. Principes de maximum pour les solutions d'une équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles du second ordre.

§2. Modèle abstrait.

§3. Exemples.

Pour certains résultats donnés dans ce chapitre voir: Studia Univ. Babeş-Bolyai (Cluj), fasc. 1 1968, 19-26 et Glasnik Matematički, 4, 1969, 75-78.

Chapitre II. Théorèmes de comparaison.

§1. Théorèmes de comparaison pour les systèmes d'équations différentielles du second ordre.

§2. Théorème de comparaison pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre.

Pour certains résultats donnés dans ce chapitre voir: Boll. U.M.I., N. 4-5, 540-542, 1968, Boll. U.M.I., vol. 22, 486-490, 1967, et „Asupra unei probleme bilocale” Studii și cercetări Matematice (București), 1969.

Chapitre III. Théorèmes d'unicité.

§1. Historique du problème.

§2. Conséquences des principes de maximum.

§3. Conséquences des identités intégrales.

§4. Conséquences des théorèmes de comparaisons.

§5. Sur une classe particulière de systèmes aux coefficients constants.

§6. Sur l'existence de la solution.

Pour certains résultats donnés dans ce chapitre voir: Studii și Cercetări Matematice (București), t. 20, Nr. 9, 1337-1352 (1968), et, Studia Univ. Babeş-Bolyai (Cluj), fas. 1., 47-49 (1969).

Chapitre IV. Systèmes non-linéaires.

§1. Systèmes semi-linéaires.

§2. Conséquences du principe de linéarisation.

§3. Conséquences du principe de contraction.

Bibliographie (64rf.)

#### LE JURY DE DOCTORAT

Président: Prof. Dr. Doc. G.H. CHIȘ, doyen de la Faculté de mathématiques-mécanique

Membres: Prof. Dr. Doc. D.V. IONĂȘCU (directeur scientifique)

Prof. Dr. Doc. C. IACOB, de l'Académie de la R.S. de Roumanie (Bucarest)

Prof. Dr. Doc. G. CĂLUȚĂ-REANU, de l'Académie de la R.S. de Roumanie

Dr. C. KALIK, maître de conférences, Cluj

#### CONTRIBUȚII LA INTERPRETAREA CURBELOR DE LUMINĂ ALE SISTEMELOR BINARE STRÂNSE

Recunoscerea lucrării prezentată de VASILE URECHE pentru obținerea titlului de doctor în matematică și susținută la Universitatea „Babeş-Bolyai” Cluj, în 16 decembrie 1968

În lucrare s-a tratat problema determinării elementelor orbitale ale sistemelor duble fotometrice, elaborând o metodă nouă pentru determinarea mai precisă a acestor elemente la sistemele binare strânse. Metoda se bazează pe un model elipsoid-elipsoid (neasemenea) luând în considerare efectul întunecării gravifrice și eclipsarea luminii reflectate, și evitând procedul rectificării.

Reținând în dezvoltarea potențialului termenii până la  $P_2(\gamma)$  — inclusiv se obțin pentru componentele elipsoizii cu semiaxele

$$a_i = b_i \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{(2)}{i} \right\}, \quad b_i = b_i, \quad c_i = b_i \left\{ 1 - \frac{1}{2} v_i^{(2)} \right\}; \quad i = 1, 2.$$

unde pentru modelul Roche

$$w_i^{(2)} = q_i b_i^3, \quad v_i^{(2)} = (1 + q_i) b_i^3, \quad q_i = \frac{M_{i2} - i}{M_i} \quad - \text{raportul maselor } (i=1, 2)$$

Pentru proiecțiile componentelor pe planul perpendicular pe raza vizuală am obținut ecuațiile

$$\{1 - n_2^2 v_1^{(2)}\} x^2 + 2n_1 n_2 v_1^{(2)} xy + \{1 + 3l_1^2 w_1^{(2)} - n_1^2 v_1^{(2)}\} y^2 - b_1^2 \{1 + 3l_1^2 w_1^{(2)} (n_1^2 + n_2^2) v_1^{(2)}\} = 0$$

— pentru componenta principală

$$\{1 - n_2^2 v_2^{(2)}\} (l_1 - x)^2 - 2n_1 n_2 v_2^{(2)} (l_1 - x)y + \{1 + 3l_1^2 w_2^{(2)} - n_1^2 v_2^{(2)}\} y^2 - b_2^2 \{1 + 3l_1^2 w_2^{(2)} - (n_1^2 + n_2^2) v_2^{(2)}\} = 0$$

— pentru componenta secundară, unde cosinii directori  $l_i, m_i, n_i, (i = 1, 2, 3)$  sînt funcții de unghiul de fază  $\psi$  și de unghiul de inclinare  $i$ . Aceste ecuații generalizează ecuațiile lui Horak obținute pentru modelul sferă-elipsoid.

Distribuția strălucirii pe discurile aparente am considerat-o (utilizînd notațiile lui Kopal) de forma

$$J = H_0 \left\{ 1 + \tau \frac{g - g_0}{g_0} \right\} (1 - \alpha + \alpha \cos \gamma)$$

Calculul pierderii de lumină în cursul eclipselor l-am redus la integrarea (prin cuadratură numerică) a unor funcții de forma  $x^k D_k^j(x), (l, k, j = 0, 1, 2, \dots)$ , unde funcțiile diferențiale-am definit astfel:

$$D_k^j(x) = I_k^j[x, y_2(x)] - I_k^j[x, y_1(x)], \text{ unde am notat } I_k^j(x, y) = \frac{1}{\pi b_i^{j+k+2}} \cdot \int Z^k y^j dy, Z = (C_2 b_1^2 -$$

$- C_3 x^2 - 2C_3 xy - C_4 y^2)^{1/2}$   
 $i = 1$  — eclipsa principală,  $i = 2$  — eclipsa secundară)  $C_1, C_2, C_3, C_4$  fiind funcții de  $\psi$ . Mai sus  $y_1(x)$  și  $y_2(x)$  sînt limitele de integrare în raport cu  $y$ .

Pentru variația luminii în cursul mișcării orbitale am regăsit ecuațiile clasice cunoscute (Russel, Kopal, etc.).

Pentru descrierea fenomenului de reflecție am utilizat rezultatele lui Kopal. Luminozitatea sistemului între minime am pus-o sub forma

$$I(\psi) = 1 - \beta \cos \psi - [C(1 - \alpha) - \gamma] \cos^2 \psi,$$

unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sînt coeficienții de reflecție, iar  $C$  — coeficientul de elipticitate. Curba teoretică de lumină, în minime, am calculat-o cu formula

$$I_i(\psi) = 1 - \beta \cos \psi - [C(1 - \alpha) - \gamma] \cos^2 \psi - \frac{1}{i + \alpha} \cdot \Delta L_i(\psi) - \frac{1}{i + \alpha} \cdot \Delta L_i^*(\psi); \quad i = 1, 2$$

unde  $\Delta L_1(\psi), \Delta L_2(\psi); \Delta L_1^*(\psi), \Delta L_2^*(\psi)$  sînt pierderile de lumină prin eclipsarea luminii intrinseci, respectiv a luminii reflectate, în cele două minime (calculîndu-se prin integrarea prin cuadratură numerică a funcțiilor  $x^k D_k^j(x)$ ).

Determinarea elementelor orbitale se face aplicînd (prin aproximații succesive) metoda corecțiilor diferențiale. Pentru aceasta am obținut ecuația de condiție

$$\frac{\partial I}{\partial b_1} \cdot \Delta b_1 + \frac{\partial I}{\partial b_2} \cdot \Delta b_2 + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha + \frac{\partial I}{\partial L_1} \cdot \Delta L_1 = 0 - C$$

derivatele parțiale urmînd a se calcula prin procedee numerice.

Metoda elaborată am aplicat-o la sistemul AI Draconis, utilizînd observațiile fotoelectrice ale lui Cester (luînd ca orbită preliminară orbita obținută de acesta). Pentru determinarea raportului maselor am dat o variantă la metoda lui Kopal.

Principalele rezultate numerice obținute sînt următoarele:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,2939 \pm 0,0038; & b_2 &= 0,2964 \pm 0,0025; & L_1 &= 0,8263 \pm 0,0064; \\ L_2 &= 0,0737 \pm 0,0064; & i &= 79^\circ,59 \pm 0,21; & q_1 &= 0,42 \pm 0,08. \end{aligned}$$

Utilizînd orbita spectroscopică a lui Elbighausen am obținut: Masele:  $M_1 = 2,8M_\odot$ ,  $M_2 = 1,2M_\odot$ . Razele medii:  $R_1 = 2,21R_\odot$ ,  $R_2 = 2,26R_\odot$ . Raza orbitei relative:  $5,24 \cdot 10^6$  km.

Sistemul AI Draconis este un sistem semidetășat.

#### COMISIA DE DOCTORAT

*Președinte:*

Conf. dr. DIMITRIE D. STANCU  
(Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj)

*Conducător științific:*

Prof. dr. doc. GHEORGHE CHIȘ  
(Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj)

*Membri:*

Prof. dr. doc. IOAN CUREA  
(Universitatea din Timișoara)

Prof. dr. doc. CĂLIN POPOVICI  
(Universitatea din București)

Cerc. pr. dr. IOAN TODORAN  
(Observatorul Astronomic Cluj)

### PRINCIPIUL DUALITĂȚII LA O CLASĂ DE PROBLEME DE OPTIMIZARE

*Rezumatul tezei de doctorat susținută de IOSIF KOLUMBĂN la Universitatea „Babeș-Bolyai” în 21 decembrie 1968*

După cum se știe o serie de probleme de optimizare, cum ar fi de exemplu problema programării liniare, problema celei mai bune aproximații etc., se reduc la determinarea minimumului sau maximumului unei funcții cu valori reale. Există însă și probleme de aproximație unde se cere, mai general, determinarea elementelor minime (sau maxime) ale unei mulțimi ordonate. O astfel de problemă, studiată în lucrarea de față, este următoarea:

Fie  $F$  o mulțime înzestrată cu o relație binară  $r$  și  $M$  o mulțime pe care este definită o relație binară tranzitivă  $\rho$ . Se consideră aplicația  $\omega: F \rightarrow M$ . Imaginea unui element  $f \in F$  prin aplicația  $\omega$  se notează cu  $\omega(f)$ .

*Definiție.* Elementul  $x \in M$  se numește admisibil, dacă există cel puțin un  $f \in F$  astfel încît  $x \neq \omega(f)$ .

*Definiție.* Fie  $x \in M$  un element admisibil. Elementul  $f$  din  $F$  se numește indicatorul lui  $x$  dacă următoarele condiții sînt satisfăcute:

(I<sub>1</sub>) dacă  $h \in F$  și  $f_x r h$ , atunci  $x \rho \omega(h)$

(I<sub>2</sub>) dacă  $g \in F$  și  $g r f_x$ , atunci  $x \neq \omega(g)$ ,

unde prin  $\tilde{r}$  s-a notat relația complementară a lui  $r$ .

Fie  $S$  o submulțime fixată a lui  $M$ . Se arată că, în anumite condiții, asupra lui  $S$  orice element din această mulțime are cel puțin un indicator.

*Definiție.* Un element admisibil  $x_0$  din  $S$  se numește optimul relativ la  $S$ , dacă există un indicator  $f_{x_0}$  al lui  $x_0$  astfel încît oricare ar fi un element admisibil  $x$  din  $S$ ,  $x \neq x_0$ , și oricare ar fi un indicator  $f_x$  al lui  $x$  să aibă loc relația  $f \tilde{r} f_{x_0}$ , unde prin  $\tilde{r}$  s-a notat relația complementară a lui  $r$ .

Prin problema elementului optimal se înțelege problema studiului elementelor optimale definite mai sus.

În lucrare se formulează o problemă, care este, într-un anumit sens, duala problemei elementului optimal și se demonstrează o teoremă care generalizează cunoscuta teoremă de dualitate a lui G. S. Rubinstein.

În continuare se studiază amănunțit două cazuri particulare: problema programării convexe în spații liniare topologice ordonate și problema infraelementelor. În această direcție se dau diferite caracterizări ale soluțiilor problemelor amintite, care generalizează unele rezultate cunoscute din teoria programării convexe (cum ar fi de exemplu teorema de dualitate a lui H. W. Kuhn și A. W. Tucker) și din teoria celei mai bune aproximații în spații normate (cum ar fi de exemplu teorema lui I. Singer). De asemenea se dă un algoritm de determinare al soluțiilor problemei programării liniare cu mai multe funcții de scop, problemă care se încadrează în schema generală.

#### CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:

Acad. prof. dr. doc. TIBERIU POPOVICI

#### REFERENȚI ȘTIINȚIFICI:

Acad. prof. dr. doc. G. CĂLUGĂREANU (Cluj)

Prof. dr. doc. A. HAJMOVICI (Iași)

Conf. dr. I. MARUSCIAC (Cluj)

#### Ședințe de comunicări

La ședințele de comunicări organizate în anul 1968 la Facultățile de Matematică-mecanică și Fizică s-au prezentat următoarele referate:

12 ianuarie

F. Radó, Despre închiderea proiectivă a spațiului de incidență.

M. Balázs, G. Goldner, Asupra metodei coardei.

14 februarie

I. Ursu, Despre Societatea Europeană de Fizică.

V. Grecu, Dubla rezonanță electronică-nucleară a  $F^{19}$  în  $AlF_3 \cdot Cr^{3+}$ . (Partea I, teză de doctorat).

21 februarie

A. Nicula, S. Fărcaș, A. Darabont, R.E.S. a monocristalului de NaCl iradiat cu U.V.

R. Baican, A. Bódi, D. Demco, Utilizarea dispersiei în R.E.S.

8 martie

E. Virág, Unele proprietăți ale grupurilor finite.

V. Ureche, Pierderea luminii în cursul eclipselor la stelele duble.

I. Purdea, Relații generalizate.

13 martie

P. Lamothe, Alexandru Cișman — Viața și opera.

F. Kelemen, A. Nédá, E. Cruceanu, D. Niculescu, Conductibilitatea termică a soluțiilor solide de  $Zn_x Hg_{1-x} Te$ .

20 martie

S. Dumitru, Asupra unor parametri ai dispersiei.

D. Demco, R. Baican, Măsurarea lui  $T_1$  și  $T_2$  simultan din curbele  $\chi''$  și  $\chi'''$ .

V. Grecu, Dubla rezonanță electronică nucleară a  $F^{19}$  în  $Al_2F_3 \cdot Cr^{3+}$  (Partea a II-a, teză de doctorat).

12 aprilie

A. S. Roberts (de la School of Engineering, Old Dominion College, Norfolk, Virginia, S.U.A.), Dezvoltarea energiei nucleare în S.U.A.

17 aprilie

A. Weissmann, Funcții de memorie în sisteme termodinamice I. Rezonanță nucleară magnetică.

D. Demco, R. Baican, Diagrame Argand în rezonanță paramagnetică.

I. Barbur, Efecte ferodectrice la  $(NH_4)_2SO_4$  și  $(ND_4)_2SO_4$  iradiat (Notă).

21 aprilie

V. Grecu, Dubla rezonanță electronică nucleară a  $F^{19}$  în  $Al_2F_3 \cdot Cr^{3+}$  (Partea a III-a, Teză de doctorat).

I. Pop, V. Niculescu, I. Stănescu, C. Pop, Rezonanță magnetică nucleară a izotopului  $Li^7$  în carbonat, oxid și cromit de litiu.

V. Lupoi, Vizită de documentare în Franța.

10 mai

C. Tăntia, În legătură cu recunoașterea formelor codificate.

B. Orbán, Interpretarea geometrică a unor proprietăți extreme și aplicațiile lor.

I. Purdea, Despre relații difuncționale.

22 mai

F. Koch, R.M.N. la sistemul etanol-litiu.

V. Niculescu, Contribuții la studiul  $Li^7$  în  $HLi$ , prin R.M.N.

5 iunie

A. Weissmann, Funcții de memorie în sisteme termodinamice. II. Amortizare prin magnetoni.

A. Bódi, V. Militaru, Determinarea constantei dielectrice la pături subțiri în ghizi de microunde.

14 iunie

Gh. Pie, I. Purdea, Despre reticolul relațiilor difuncționale.

I. Pop, Strat limită nestaționară.

T. Rus, Proceduri în limbajul de asamblare pas.

15 noiembrie

E. Virág, Despre descompunerile grupurilor.  
I. Purdea, Despre algebre infinite.

### Participări la manifestări științifice internaționale

1. În lunile aprilie și mai 1968 lect. Dr. I. Gy. Maurer a fost invitat în calitate de „profesor vizitator” de către Institutul matematic „Guido Castelnuovo” al Universității din Roma și a ținut în cadrul Seminarului de algebră și geometrie al acestui institut un ciclu de 11 conferințe cu titlul recapitulativ *Quelques problèmes d'algèbre pure et d'algèbre topologique*.

2. În perioada 25 martie—25 iunie 1968 asist. Gr. Moldovan a fost în R.S. Cehoslovacă pentru specializare în domeniul mașinilor electronice de calcul la Centrul de calcul de la Universitatea „Carel” din Praga. Cu această ocazie a mai vizitat diferite Institute de cibernetică și de calcul din Brno și Bratislava.

3. Între 8—12 mai, lect. dr. I. Gy. Maurer a participat la Colocviul de geometrie algebrică din Roma.

4. Între 16 mai—16 iunie 1968, prof. emerit dr. doc. D. V. Ionescu a făcut o vizită în Franța și a ținut următoarele conferințe:

28 mai, Facultatea de științe din Paris, *Quelques recherches récentes en analyse numérique notamment sur l'intégration numérique des équations différentielles*.

14 iunie, Facultatea de științe din Nancy, *Introduction à la théorie des fonctions „monosplines”*.

15 iunie, Facultatea de științe din Grenoble, *Représentation intégrale des différences divisées et introduction à la théorie des fonctions splines*.

5. 3—8 iunie, al IX-lea Congres iugoslav de mecanică rațională și aplicată, Split.

T. Petriță, *Sur le mouvement général d'un profil dans un fluide en présence d'une paroi arbitraire*.

I. Pop, *Flow of a Viscous Incompressible Fluid between Torsionally Oscillating Disk and a Stationary Porous Disk*.

A. Turcu, *Librations sous-harmoniques de l'équations de Duffing*.

6. 10—11 iunie, Consfătuirea INTERKOSMOS. Grupa Grupă cosmică, Moscova, a participat prof. dr. doc. Gh. Chiș.

7. 16—17 iunie, Colocviul de ecuații funcționale, Oberwolfach, R.F. a Germaniei:

D. V. Ionescu, *Sur l'équation fonctionnelle de M. Fréchet*.

F. Radó, *Behandlung von Fragen über Kollektionen mit Funktionsgleichungsmethoden*.

8. 17—20 iulie, Colocviul „Abstract Spaces and Approximation”, Oberwolfach, R.F. a Germaniei.

E. Popovici, *Über den Begriff der Konvexität in Bezug auf ein Approximationsverfahren*.

T. Popoviciu, *Conservation de l'allure de convexité des fonctions par les polynômes d'approximation*.

9. 28 august—5 septembrie, Consfătuirea INTERCOSMOS, Grupa Atmosfera înaltă, Sofia. A participat prof. dr. doc. Gh. Chiș.

10. În perioada 15 septembrie—15 noiembrie asist. Gh. Coman a fost la Universitatea din Moscova la Catedra de Calcul numeric pentru documentare.

11. 5—9 septembrie, U.I.A., Colloquium on Non-Periodic Phenomena in Variable Stars. Budapesta. Au participat conf. dr. A. Pál, cercetător principal dr. I. Todoran.

12. 30 septembrie—2 octombrie, Colocviul de ecuații funcționale și aplicațiile ei. Miskolc, R.F. Ungară.

I. Gy. Maurer, M. Szilágyi, *L'étude de certaines équations définies dans les algèbres universelles*.

13. 19—23 noiembrie, Colocviul „Nichtlineare Probleme der Numerischen Mathematik”, Oberwolfach, R.F. a Germaniei.

D. V. Ionescu, *Über Adams' Verfahren*  
E. Popoviciu, *Nichtlineare Interpolationsmenge*.

T. Popoviciu, *Bemerkungen über einen Mittelwertsatz von Elena Moldovan (Popoviciu)*

### Participări la manifestări științifice din țară

25 mai

#### SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A TINERILOR MATEMATICIENI

A. Vasile, Nomograma optimă dintr-o clasă de nomograme.

25—26 mai

#### SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN ORADEA

M. Brădeanu, Asupra calculului aproximativ al stratului limită hipersonic axial simetric.

Gh. Chiș, Determinarea densității atmosferei înalte cu ajutorul sateliților artificiali.

I. Marușciac, Asupra polinoamelor de abatere minimă de la zero cu rădăcini multiple.

I. Muntean, Asupra stabilității asimptotice a soluțiilor sistemului forțat al lui Rayleigh-Liénard.

A. Ney, Asupra seriilor divergente și transformările lor kummeriene.

M. Rădulescu, Proprietăți diferențiale ale primitivelor  $M$  în spații liniare.

M. Țarină, Observații asupra clasificării spațiilor  $P$ .

1-10 septembrie

### SEMINARUL DE TEORIA INTERPOLĂRII ȘI NOȚIUNEA DE CONVEXITATE

D. V. Ionescu, Restul în formule de interpolare generalizate (conferință).

I. Marușciac, Asupra unor probleme din teoria interpolării.

P. Mocanu, Proprietate de convexitate generalizată în teoria reprezentării conforme.

E. Popoviciu, Procedee generale de interpolare și mulțimi interpolatoare.

T. Popoviciu, Problema conservării alurii unghiilor prin interpolare.

C. Tarța, Aspectul interpolator al problemelor de sinteză.

1-17 septembrie

### COLOCVIU DE ECUAȚII FUNCȚIONALE BUCUREȘTI-MAMAIA

D. V. Ionescu, La représentation des différences divisées par des intégrales définies et les fonctions spline.

I. Muntean, On Convergence of Solutions of a System of Ordinary Differential Equations.

P. Pavel, Asupra unei ecuații funcționale.

E. Schechter, Delimitarea erorilor înțării numerice a ecuațiilor diferențiale prin prelungirea soluțiilor discrete.

7-24 septembrie

### COLOCVIUL DE GEOMETRIE ALGEBRICĂ

Au participat: Acad. prof. dr. doc. G. Călușreanu, prof. dr. doc. Gh. Pic, asist. I. Purdea, asist. M. Schechter.

5 septembrie

### CONFERINȚA UNESCO, BUCUREȘTI

cu tema:

### MODERNIZAREA ÎNVĂȚĂMÎNTULUI MATEMATIC

Au participat: acad. prof. dr. doc. G. Călușreanu, prof. emerit dr. doc. D. V. Ionescu.

0-12 octombrie

### SESIUNEA JUBILARĂ

### AL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN CLUJ

D. V. Ionescu, O aplicație a reprezentării diferențiale divizate de ordinul  $n$  pe într-o integrală efinită.

Gh. Micula, Formule de cuadratură cu noduri rezultate din superpoziție.

I. Muntean, Traiectorii închise pentru anumite sisteme de ecuații diferențiale autonome.  
19-21 octombrie

### SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ

### A OBSERVATORULUI ASTRONOMIC DIN BUCUREȘTI

Gh. Chiș, A. Pál, T. Oproiu, O metodă de determinare a perioadei cuasidraconotice a sateliților artificiali ai Pământului folosind observațiile din cadrul programului INTEROBS. Aplicație la Cosmos 44.

Gh. Chiș, V. Pop, Studiul fotometric al cimpului vizual al unui telescop.

T. Oproiu, D. Chiș, Determinarea constantelor unei camere UFISZ-25-2 (tip NAFA-3c/25) pentru observarea fotografică a sateliților artificiali la stația Cluj (1132).

I. Todoran, Determinarea mișcării apsidale la binarele fotometrice cu o slugură eclipsă observabilă.

I. Todoran, Asupra racordării sistemelor fotometrice. Tracera de la un sistem propriu la un sistem standard.

V. Ureche, Asupra determinării raportului maselor componentelor sistemelor binare strinse din observații fotometrice.

V. Ureche, Asupra reducerii observațiilor în sistemul fotometric U.B.V.

### Vizite

9 octombrie

Prof. Jean Dieudonné (Franța); Despre dezvoltări moderne ale teoriei grupurilor Lie.

19 decembrie

Prof. Jean-Jacques Moreau (Franța); Dualitatea funcționalelor convexe. Elemente teoretice ale problemei nașterii cavității.

### CORRIGENDUM

Calculation of the energetic levels for an  $^{55}\text{Fe}^{2+}$  ion situated in cubic crystalline field with axial deformation in the  $\langle 111 \rangle$  direction, by S. V. Nistor and C. Mihali (Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math. Phys., 1, 123, 1968).

The expression for the magnetic fields which correspond to the transitions  $\Delta M = \pm 1, \pm 2$ , contain many errors. The correct expression must be taken from: Rev. Roum. Phys., 13, 502-508, 1968 employing our value for  $Z_3$  (eq. (6)).

In the case  $Z_i \ll D$  the magnetic field transitions are:

$$\Delta M = \pm 1$$

$$H_{\pm \frac{5}{2}} \leftrightarrow \pm \frac{3}{2} = H_0 \mp 4DA_0 \pm \frac{4}{3} (a - F)B_0 \pm \frac{80\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{4D^2}{9H_0} (2A_1^2 - A_2^2) \mp \\ \mp \frac{D^3}{H_0^2} \left( \frac{10}{9} A_1^2 A_2 - \frac{2}{3} A_0 A_2^2 + 4A_0 A_1^2 \right)$$

$$H_{\pm \frac{3}{2}} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2} = H_0 \mp 2DA_0 \mp \frac{5}{3} (a - F)B_0 \mp \frac{100\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{D^2}{9H_0} (5A_2^2 - A_1^2) \mp \\ \mp \frac{D^3}{3H_0^2} \left( -\frac{10}{3} A_1^2 A_2 + 4A_0 A_1^2 - 11A_0 A_2^2 \right)$$

$$H_{+\frac{1}{2}} \leftarrow -\frac{1}{2} = H_0 + \frac{4D^2}{9H_0} (A_1^2 - A_2^2)$$

$$(\Delta M = \pm 2).$$

$$H_{\pm \frac{5}{2}} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2} = \frac{H_0}{2} \mp 3DA_0 \mp \frac{1}{6} (a - F)B_0 \mp \frac{10\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{D^2}{18H_0} (7A_1^2 + A_2^2) \pm \\ \pm \frac{D^2 A_0}{6H_0^2} (13A_2^2 + 3A_1^2)$$

$$H_{\pm \frac{3}{2}} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2} = \frac{H_0}{2} \mp DA_0 \mp \frac{5}{6} (a - F)B_0 \mp \frac{50\sqrt{2}}{3} aC_0 + \frac{D^2}{18H_0} (5A_1^2 - 13A_2^2) \mp \\ \mp \frac{D^3}{6H_0^2} \left( -\frac{10}{3} A_1^2 A_2 + 4A_0 A_1^2 - 11A_0 A_2^2 \right)$$

$$(\Delta M = \pm 3)$$

$$H_{\pm \frac{5}{2}} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2} = \frac{H_0}{3} \mp 2DA_0 \mp \frac{1}{9} (a - F)B_0 \mp \frac{20\sqrt{2}}{9} aC_0 - \frac{D^2}{3H_0} \left( \frac{1}{3} A_1^2 + A_2^2 \right) \pm \\ \pm \frac{D^3}{9H_0^2} (13A_0 A_2^2 + 3A_0 A_1^2)$$

$$H_{+\frac{3}{2}} \leftarrow -\frac{3}{2} = \frac{H_0}{2} + \frac{2D^2}{3H_0} \left( \frac{1}{3} A_1^2 - A_2^2 \right)$$



NUMERE APĂRUTE — ВЫШЕДШИЕ НОМЕРА  
NUMEROS PARUS — ISSUED NUMBERS —  
ERSCHIENENE NUMMERN

1956

BULETINUL UNIVERSITĂŢILOR „V. BABEŞ” ŞI „BOLYAI” CLUJ, Seria Ştiinţe  
sociale, vol. I, nr. 1—2  
A KOLOZSVÁRI BABEŞ ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, társadalom-  
tudományi sorozat, I. évfolyam, 1—2. szám

1957

BULETINUL UNIVERSITĂŢILOR „V. BABEŞ” ŞI „BOLYAI” CLUJ, Seria Ştiinţele  
naturii, vol. II, nr. 1—2  
A KOLOZSVÁRI BABEŞ ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, termé-  
szettudományi sorozat, II. évfolyam, 1—2. szám

1958

STUDIA UNIVERSITATUM VICTOR BABEŞ ET BOLYAI, Tomus III

Nr. 1, Series III Fasciculus 1, Philosophia  
Nr. 2, Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia  
Nr. 3, Series I Fasciculus 1, Mathematica  
Nr. 4, Series I Fasciculus 2, Chemia  
Nr. 5, Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia  
Nr. 6, Series IV Fasciculus 1, Philologia  
Nr. 7, Series II Fasciculus 2, Biologia  
Nr. 8, Series IV Fasciculus 2, Historia

1959

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Physica  
Series I Fasciculus 2, Chemia  
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia  
Series II Fasciculus 2, Biologia  
Series III Fasciculus 1, Psychologia—Paedagogia  
Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia  
Series IV Fasciculus 1, Historia  
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1960

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Mathematica—Physica  
Series I Fasciculus 2, Chemia  
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia  
Series II Fasciculus 2, Biologia

Series III Fasciculus 1, Philosophia et Oeconomica  
Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia  
Series IV Fasciculus 1, Historia  
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1961

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Mathematica—Physica  
Series I Fasciculus 2, Chemia  
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia  
Series II Fasciculus 2, Biologia  
Series III Fasciculus 1, Psychologia—Paedagogia  
Series III Fasciculus 2, Oeconomica et Iurisprudentia  
Series IV Fasciculus 1, Historia  
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1962, 1963, 1964, 1965

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1  
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2  
Series Chemia, fasciculus 1  
Series Chemia, fasciculus 2  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2  
Series Biologia, fasciculus 1  
Series Biologia, fasciculus 2  
Series Philosophia et Oeconomica  
Series Psychologia—Paedagogia  
Series Iurisprudentia  
Series Historia, fasciculus 1  
Series Historia, fasciculus 2  
Series Philologia, fasciculus 1  
Series Philologia, fasciculus 2

1966, 1967, 1968, 1969

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1  
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2  
Series Chemia, fasciculus 2  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1  
Series Chemia, fasciculus 1  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2  
Series Biologia, fasciculus 1  
Series Biologia, fasciculus 2  
Series Philosophia  
Series Oeconomica  
Series Psychologia—Paedagogia  
Series Iurisprudentia  
Series Historia, fasciculus 1  
Series Historia, fasciculus 2  
Series Philologia, fasciculus 1  
Series Philologia, fasciculus 2



În cel de al XIV-lea an de apariție (1969) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);  
chimie (2 fascicule);  
geologie—geografie (2 fascicule);  
biologie (2 fascicule);  
filozofie;  
științe economice;  
psihologie—pedagogie;  
științe juridice;  
istorie (2 fascicule);  
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIV году издания (1969) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);  
химия (2 выпуска);  
геология—география (2 выпуска);  
биология (2 выпуска);  
философия;  
экономические науки;  
психология—педагогика;  
юридические науки;  
история (2 выпуска);  
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XIV-me année de publication (1969) les *Studia Universitatis Babeș — Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);  
chimie (2 fascicules);  
géologie—géographie (2 fascicules);  
biologie (2 fascicules);  
philosophie;  
sciences économiques;  
psychologie—pédagogie;  
sciences juridiques;  
histoire (2 fascicules);  
linguistique-littérature (2 fascicules).

43875