

491307

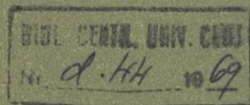
STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1969



CLUJ

REDACTOR ȘEF: Prof. ȘT. PASCU, membru corespondent al Academiei

**REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI: Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. GH. MARCU,
conf. A. NEGUCIOIU**

**COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ: Acad. prof.
G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ, prof. Z. GĂBOS,
prof. V. MERCEA, conf. P. MOCANU, conf. I. POP (secretar de redacție)**

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

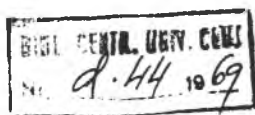
SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

Redacția: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 • Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — INHALT — CONTENTS

GH. PIC, Contributions à l'axiomatique des treillis distributifs (Contribuții la axiomatica reticulelor distributive) • К вопросу аксиоматики дистрибутивных структур	3
I. VIRÁG, Über die Zerlegung von Gruppen (Despre descompunerea grupurilor) • О разложении групп	11
P. SANDOVICI, P. ENGIȘ, M. ȚARINĂ, Spații V_n de curbură proiectivă recurentă • V_n пространства рекуррентной проективной кривизны • Espaces V_n de courbure projective récurrente	17
M. RĂDULESCU, Une définition de l'intégrale (O definiție a integralei) • Одно определение интеграла	23
P. T. MOCANU, About the Radius of Starlikeness of the Exponential Function (Despre raza de starlitate a funcției exponențiale) • О радиусе звездообразности экспоненциальной функции	35
L. DEBNATH, On Faltung Theorem of Laguerre Transform (O teoremă de convoluție pentru transformarea Laguerre) • Одна теорема свертки функции для преобразования Лагерра	41
I. A. RUS, Sur l'unicité de la solution du problème de Riquier pour les systèmes métaharmoniques (Asupra unicității soluției problemei lui Riquier relativă la sisteme metaarmonice) • Об единстве решения задачи Рикье, относящейся к метагармоническим системам	47
A. NICULA, G. PAVEL, Generalizarea cu ajutorul matricilor a ecuației funcționale care caracterizează funcțiile sinus circular, hiperbolic și dual • Обобщение при помощи матриц функционального уравнения, характеризующего функции циркулярный, гиперболический и дуальный синус • Généralisation à l'aide des matrices de l'équation fonctionnelle caractérisant les fonctions sinus circulaire, hyperbolique et dual	51
I. TORSAN, Asupra unei generalizări a distribuției Beta • Об одном обобщении β распределения • Sur la généralisation de la distribution Béta	59
M. BALÁZS, Asupra rezolvării ecuațiilor complexe prin metoda iperbolelor tangente • О решении комплексных уравнений методом касательных гипербол • Sur la résolution des équations complexes par la méthode des hyperboles tangentes	63
P. PAVEL, Asupra unor ecuații funcționale • О некоторых функциональных уравнениях • Sur certaines équations fonctionnelles	69
V. URECHE, Contribuții la interpretarea curbelor de lumină ale sistemelor binare strînse (I). Forma componentelor • К вопросу об интерпретации кривых блеска тесных двойных систем. (I) Форма составляющих • Contributions à l'interprétation des courbes de lumière des systèmes binaires étroits. (I) Formes des composantes	73



- Z. GÁBOS, Asupra cîmpurilor cuantice cu $2(2s+1)$ componente ● О квантовых полях с $2(2s+1)$ компонентами ● On Quantum Fields with $2(2s+1)$ Components 8
- D. DEMCO, R. BAICAN, Diagrammes Argand dans la résonance paramagnétique (Diagrame Argand în rezonanța electronică de spin) ● Диаграммы Арганда в электронном парамагнитном резонансе 8
- N. VEZENTAN, Über das „Extraabsorptionssignal“ der EPR-Spektren einiger Cu (II)-Chelate in eingefrorenen Lösungen (Asupra semnalului de „extraabsorbție“ din spectrele RES ale unor chelați ai Cu(II) în soluții înghețate) ● О сигналах „экстраабсорбции“ в спектрах ЭПР некоторых хелатов Си (II) в замороженных растворах 9
- I. STĂNESCU, I. ARDELEAN, Das Studium der Fest-Flüssigen Phasenänderung im Halbleitersystem V_2O_5 - MoO_3 (Studiul transformării de fază solid-lichid în sistemul semiconductor V_2O_5 - MoO_3) ● Исследование фазового превращения твёрдое состояние-жидкость в полупроводниковой системе V_2O_5 — MoO_3 10
- I. POP, L. MAXIM, I. MAXIM, Das strukturelle und magnetische Studium des Legierungssystems Nickel-Gold-Kupfer (Studiul structural și magnetic al sistemului de aliaje nichel-aur-cupru) ● Структурное и магнитное исследование системы сплавов никель-золото-медь 11
- O. POP, Conductibilitatea electrică și forța termoelectromotoare la sistemul semiconductor Cr_2O_3 - SnO_2 ● Электропроводность и термоэлектродвижущая сила полупроводниковой системы Cr_2O_3 - SnO_2 ● Electric Conductivity and Thermoelectromotive Force at Cr_2O_3 - SnO_2 Semi-conductor System 11
- F. PUSKÁS, Măsurarea coeficientului de nelinearitate a varistorului de ZnO — Al_2O_3 ● Измерение коэффициента нелинейности варистора ZnO - Al_2O_3 ● Measurement of the Non-linear Coefficient of ZnO - Al_2O_3 Varistor. 13
- H. ȚINTEA, L. ONIȚIU, D. AUSLÄNDER, Sur la vitesse de propagation des ultrasons dans des solutions des halogénures alcalins et alcalino-terreux (I) (Despre viteza de propagare a ultrasunetelor în soluții ale halogenurilor alcaline și alcalino-teroase (I)) ● О скорости распространения ультразвуков в растворах щелочных и щелочно-земельных галлоидов (I). 13⁵
- D. AUSLÄNDER, E. RUS, E. GHERGARU, Variația viscozității apei în cîmp ultrasonic ● Изменение вязкости воды в ультразвуковом поле ● Variation of Viscosity of Water in Ultrasonic Field 141
- E. GALIGER, Primul român transilvănean, doctor în științele fizice ● Первый трансильванский румын, доктор физических наук ● The First Romanian in Transylvania who Took his Doctorate in Physics. 147

Recenzii — Рецензии — Livres lus — Bücherbesprechung — Books

- A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsehe Ringe* (I. GY. MAURER) 151
- L. Rédei, *Foundation of Euclidean and Non-Euclidean Geometries according to F. Klein* (F. RAIÓ) 151
- I. Ursu, *La résonance paramagnétique électronique* (AL. NICULA) 152

CONTRIBUTIONS A L'AXIOMATIQUE DES TREILLIS
DISTRIBUTIFS

par
GH. PIC

1. Soit M un ensemble muni d'une opération ternaire notée (x, y, z) ou simplement xyz et de deux opérations nulaires qui nous donnent les éléments O et I , dénommés aussi premier et dernier élément de M .

Birkhoff a montré dans son livre bien connu [1] que, si l'opération ternaire a les propriétés suivantes :

$$(O, x, I) = x \quad (x, y, x) = x \quad (x, y, z) = (y, x, z) = (y, z, x)$$

$$((x, y, z), u, v) = ((x, u, v), y, (z, u, v))$$

alors on peut organiser M comme treillis en définissant

$$x \cup y = (x, I, y) \quad x \cap y = (x, O, y)$$

et ce treillis sera distributif ; on a

$$(x, y, z) = (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) \tag{1}$$

Ce système d'axiomes a été étudié et modifié par plusieurs auteurs dont nous citons Ph. Vassiliou (1950), R. Croisot (1952), M. Sholander (1952), J. Hashimoto (1951), G. Trevisan (1951), Wang Shih Chang (1953), Ceresinin (1958) et dont les études ont pour but de donner un système plus restreint d'axiomes indépendants pour l'opération ternaire. On trouvera une exposition complète de ces travaux dans la monographie de S. Rudeanu [2] cap. IV. Nous observons que le système d'axiomes donné par Birkhoff n'est pas indépendant et que dans tous les travaux indiqués ci dessus l'opération ternaire est celle donnée par [1].

Dans notre note nous donnerons la caractérisation du treillis distributif avec premier et dernier élément à l'aide d'une opération n -aire. On démontre l'indépendance des axiomes et le fait qu'il y a plusieurs expressions analytiques qui satisfont à l'équation fonctionnelle donnée pour l'opération n -aire. Enfin on établit pour cette opération une équation similaire à celle donnée par Birkhoff.

2. *Théorème.* Soit A une algèbre avec une opération n -aire et 2 opérations nulle-aires qui définissent les éléments O et I , telle que

$$A_1: (O, a, I, O, \dots, O) = a$$

$$A_2: (O, I, a, O, \dots, O) = a$$

$$A_3: (a, b, a, O, \dots, O) = a$$

$$A_4: (b, a, a, \dots, a) = a$$

$$B: (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = (x_2, x_3, x_1, x_4, \dots, x_n)$$

$$C: ((x_1, x_2, \dots, x_n), y_2, y_3, \dots, y_n) = ((x_1, y_2, \dots, y_n) \cdot (x_2, y_2, \dots, y_n), \dots, (x_n, y_2, \dots, y_n))$$

En définissant dans A une opération de réunion \cup et une d'intersection \cap en mettant

$$a \cup b = (a, I, b, O, \dots, O)$$

$$a \cap b = (a, O, b, \dots, O)$$

A devient un treillis distributif.

Démonstration. a) On voit que les opérations de réunion et intersection sont idempotentes.

b)

$$a \cup I = I$$

$$a \cap O = O.$$

En effet $a \cup I = (a, I, I, O, \dots, O)$ et les axiomes A_3 et B nous donnent le résultat énoncé. On procède de la même manière pour démontrer la deuxième partie.

c)

$$a \cup b = a \Leftrightarrow a \cap b = b.$$

En effet $a \cup b = a$ signifie $(a, I, b, O, \dots, O) = a$. Par conséquent $a \cap b = (a, O, b, O, \dots, O) = (aIbO \dots O, O, b, O, \dots, O) = (aObO \dots O, IObO \dots O, bIbO \dots O, OO bO \dots O, \dots, OO bO \dots O) = (aObO \dots O, b, b, O, \dots, O) = b$.

Soit maintenant $a \cap b = b$, c'est-à-dire $(a, O, b, O, \dots, O) = b$. Des axiomes A, B, C on déduit

$$a \cup b = (a, I, b, O, \dots, O) = (b, a, I, O, \dots, O) = (aObO \dots O, a, I, O, \dots, O) = (aaIO \dots O, OaIO \dots O, baIO \dots O, OaIO \dots O, OaIO \dots O) = (a, a, baIO \dots O, \dots, a) = a.$$

On peut démontrer de la même manière que

$$b \cap a = a \Leftrightarrow a \cup b = b$$

et d'autres relations similaires. Cette équivalence n'est pas une conséquence de la précédente, parce que nous n'avons pas encore démontré que l'opération de réunion ou intersection est commutative.

d) Nous établirons qu'on a les propriétés d'absorption pour la réunion et l'intersection. On le démontre par exemple de la manière suivante :

$$(a \cup b) \cap b = (aIbO \dots O, O, b, O, \dots, O) = (aObO \dots O, IObO \dots O, bObO \dots O, OO bO \dots O, \dots, OO bO \dots O) = (aObO \dots O, b, b, O, \dots, O) = b.$$

e)

$$(b \cap a) \cap a = b \cap a.$$

En effet nous avons vu auparavant que $(b \cap a) \cup a = a$ et donc c) nous donne l'égalité désirée.

f) Nous sommes maintenant en état de démontrer la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection. On a plusieurs relations de distributivité. Nous nous contentons de démontrer l'une d'elles.

Nous avons :

$$\begin{aligned} & ((bOaO \dots O, I, cOaO \dots O, O, \dots, O), I, a, O, \dots, O) = \\ & ((bOaO \dots O, I, a, O, \dots, O), IOaO \dots O, (cOaO \dots O, I, a, O, \dots, O), \\ & IOaO \dots O, \dots, IOaO \dots O) = (a, I, a, a, \dots, a) = a. \end{aligned}$$

c) nous donne maintenant que

$$((bOaO \dots O, I, cOaO \dots O, O, \dots, O), O, a, O, \dots, O) = (bOaO \dots O, I, cOaO \dots O, O, O, \dots, O)$$

Mais le premier membre est égal, tenant compte de e), à

$$(bOaO \dots O, IOaO \dots O, OaOO \dots O, \dots, OaOO \dots O) = (bIcO \dots O, O, a, \dots, O)$$

donc

$$(b \cup c) \cap a = (b \cap a) \cup (c \cap a).$$

On obtient les autres relations de distributivité de la même manière.

g) On peut maintenant démontrer la commutativité de l'opération de réunion et d'intersection.

Nous aurons par suite des observations d) et f) que

$$\begin{aligned} a \cup b &= [(b \cup a) \cap a] \cup [(b \cup a) \cap b] = (b \cup a) \cap (a \cup b) = \\ &= [(b \cap (a \cup b)) \cup [a \cap (a \cup b)]] = b \cup a \end{aligned}$$

De la même manière on démontre la commutativité de l'opération d'intersection.

h) Les opérations d'intersection et réunion sont associatives. Pour le démontrer on observe que des observations f) et d) il résulte que pour $\forall a \in \mathbf{A}$

$$a \cap [(a \cup b) \cup c] = [a \cap (a \cup b)] \cup (a \cap c) = a \cup (a \cap c) = a$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} a \cup (b \cup c) &= \{a \cap [(a \cap b) \cap c] \cup \{(b \cap (a \cup b)) \cup c\} \cup \\ &\{c \cap [(a \cup b) \cup c]\}\} = \{a \cap [(a \cup b) \cup c]\} \cup \{(b \cup c) \cap [(a \cup b) \cup c]\} = \\ &= [a \cup (b \cup c)] \cap [(a \cup b) \cup c] = \{[a \cup (b \cup c)] \cap (a \cup b)\} \cup \{[a \cup (b \cup c)] \cap c\}. \end{aligned}$$

Mais

$$[a \cup (b \cup c)] \cap (a \cup b) = \{[a \cup (b \cup c) \cap a] \cup \{[a \cup \{[a \cup (b \cup c)] \cap b\}]\} = a \cup b$$

et par conséquent

$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup \{[a \cup (b \cup c)] \cap c\} = (a \cup b) \cup c$$

Par là la démonstration du théorème 1 se trouve effectuée.

3. Dans les démonstrations que nous avons données auparavant nous avons utilisé tous les axiomes. Il s'agit de voir si d'autres démonstrations existent qui n'utiliseraient qu'une partie des axiomes, c'est-à-dire, si les axiomes donnés sont ou non indépendants.

Pour le démontrer nous construirons des structures algébriques qui satisfont tous les axiomes donnés à l'exception d'un seul.

Nous considérons un ensemble de 3 éléments pour lequel l'opération n -aire est définie de la manière suivante :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = (x_1, x_2, x_3, O, O, \dots, O)$$

Notons pour simplifier l'écriture $(x_1, x_2, x_3, O, \dots, O) = [x_1, x_2, x_3]$
 Alors nos axiomes deviennent :

$$[O, a, I] = a \quad (1)$$

$$[O, I, a] = a \quad (1')$$

$$[a, b, a] = a \quad (1'')$$

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_3, x_1] \quad (2)$$

$$[[x_1, x_2, x_3], y_2, y_3] = [[x_1, y_2, y_3], [x_2, y_2, y_3], [x_3, y_2, y_3]] \quad (3)$$

a) Pour démontrer l'indépendance de l'axiome (1) nous posons :

$[O O O] = O$	$[a O O] = O$	$[I O O] = O$
$[O O a] = O$	$[a O a] = a$	$[I O a] = O$
$[O O I] = O$	$[a O I] = a$	$[I O I] = I$
$[O a O] = O$	$[a a O] = a$	$[I a O] = a$
$[O a a] = a$	$[a a a] = a$	$[I a a] = a$
$[O a I] = O$	$[a a I] = a$	$[I a I] = I$
$[O I O] = O$	$[a I O] = O$	$[I I O] = I$
$[O I a] = a$	$[a I a] = a$	$[I I a] = I$
$[O I I] = I$	$[a I I] = I$	$[I I I] = I$

et on voit que (1') n'est pas satisfait parce que par ex. $[O a I] = O$ mais les autres axiomes sont satisfaits.

b) Pour démontrer l'indépendance de l'axiome (1'') nous posons

$[O O O] = O$	$[a O O] = O$	$[I O O] = O$
$[O O a] = O$	$[a O a] = a$	$[I O a] = a$
$[O O I] = O$	$[a O I] = O$	$[I O I] = I$
$[O a O] = O$	$[a a O] = a$	$[I a O] = O$
$[O a a] = a$	$[a a a] = a$	$[I a a] = a$
$[O a I] = a$	$[a a I] = a$	$[I a I] = I$
$[O I O] = O$	$[a I O] = a$	$[I I O] = I$
$[O I a] = O$	$[a I a] = a$	$[I I a] = I$
$[O I I] = I$	$[a I I] = I$	$[I I I] = I$

et on voit que (1'') n'est pas satisfait parce que par ex. $[O I a] = O$ mais les autres axiomes sont satisfaits.

c) Pour démontrer l'indépendance de l'axiome (1) nous convenons que

$$\text{si } x_4 \neq I \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = [x_1, x_2, x_3, O];$$

si $x_4 = I$ nous distinguons deux cas selon que α) deux des éléments x_1, x_2, x_3 sont égaux à I , ou β) si au plus un des éléments x_1, x_2, x_3 est égal à I .

Dans le cas α) $(x_1, x_2, x_3, I, O, \dots, O) = I$

Dans le cas β) $(x_1, x_2, x_3, I, O, \dots) = [x_1, x_2, x_3, O]$

Nous posons :

$$\begin{array}{lll}
 [O O O O] = O & [a O O O] = O & [I O O O] = O \\
 [O O a O] = O & [a O a O] = a & [I O a O] = a \\
 [O O I O] = O & [a O I O] = a & [I O I O] = I \\
 [O a O O] = O & [a a O O] = a & [I a O O] = a \\
 [O a a O] = a & [a a a O] = a & [I a a O] = a \\
 [O a I O] = a & [a a I O] = a & [I a I O] = a \\
 [O I O O] = O & [a I O O] = a & [I I O O] = I \\
 [O I a O] = a & [a I a O] = a & [I I a O] = a \\
 [O I I O] = O & [a I I O] = a & [I I I O] = I
 \end{array}$$

$$[O I I I] = [a I I I] = [I I I I] = [I O I I] = [I a I I] = [I I O I] = [I I a I] = I$$

et l'axiome (1'') n'est pas satisfait parce que par ex. $(a I I O \dots O) = a$, mais les autres axiomes sont satisfait.

d) Pour démontrer l'indépendance de l'axiome (1''') nous faisons les conventions d'aparaavant avec la différence que si x_4 et deux des éléments x_1, x_2, x_3 sont égaux à I alors $(x_1, x_2, x_3, I, I, \dots, I)$ est égal à celui des éléments x_1, x_2, x_3 qui diffère de I. Tous les autres éléments sont déterminés par nos axiomes. L'al-gèbre ainsi construite est un modèle qui satisfait les axiomes (1), (1'), (1''), (2) et (3) mais pas (1''').

e) Pour démontrer l'indépendance de l'axiome (2) des autres axiomes nous posons :

$$\begin{array}{lll}
 [O O O] = O & [a O O] = O & [I O O] = O \\
 [O O a] = a & [a O a] = a & [I O a] = a \\
 [O O I] = O & [a O I] = a & [I O I] = I \\
 [O a O] = O & [a a O] = a & [I a O] = a \\
 [O a a] = a & [a a a] = a & [I a a] = a \\
 [O a I] = a & [a a I] = a & [I a I] = I \\
 [O O I] = O & [a I O] = a & [I I O] = I \\
 [O I a] = a & [a I a] = a & [I I a] = I \\
 [O I I] = I & [a I I] = I & [I I I] = I
 \end{array}$$

L'axiome (2) n'est pas satisfait parce que $[O O a] = a$ et $[O O a] = O$.

f) Enfin pour démontrer l'indépendance de l'axiome C des autres axiomes il suffit de poser

$$(O, a, I, a, \dots, a) = 0; \quad (I, a, I, a, \dots, a) = a$$

et de tenir compte des autres axiomes. Alors l'axiome C n'est pas satisfait parce que

$$(OaIaa \dots a, a, I, a, \dots, a) = (O, a, I, a, \dots, a) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
 (OaIa \dots a, aaIa \dots a, IaIa \dots a, aaIa \dots a, \dots, aaIa \dots a) = \\
 = (O, a, a, a, \dots, a) = a.
 \end{aligned}$$

4. Nous établirons maintenant l'expression analytique de l'opération n -aire. Pour cela nous introduirons la notation suivante :

$$\mathbf{A}_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_i) \cap (x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{i-1} \cup x_{i+1}) \cap \dots \cap (x_{n-i+1} \cup x_{n-i+2} \cup \dots \cup x_n)$$

L'expression duale sera noté par $\mathbf{A}_{n,i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dans un treillis distributif on a toujours

$$\mathbf{A}_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_{n,n-i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

et

$$\mathbf{A}_n^i(x_1 \cap x'_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cap \mathbf{A}_n^i(x'_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{A}_n^i(x_1 \cup x'_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup \mathbf{A}_n^i(x'_1, x_2, \dots, x_n)$$

et autres égalités similaires. Avec leur aide on montre aisément que $\mathbf{A}_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une opération n -aire qui satisfait l'axiome C . Il y a donc plusieurs expressions qui satisfont l'axiome C , mais de toutes ces expressions la seule qui vérifie aussi les autres axiomes et seulement $\mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_{n,2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mais outre $\mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il y a aussi d'autres expressions qui satisfont les axiomes A, B, C par exemple

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n \cup \mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Donc pour assurer que les axiomes A, B, C déterminent univoquement l'opérateur (x_1, x_2, \dots, x_n) nous avons besoin d'une condition supplémentaire.

Nous poserons

$$\mathbf{A}_{n-1,2}(x_2, \dots, x_n) \leq (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(x_2, \dots, x_n)$$

de l'axiome B résulte

$$\mathbf{A}_{n-1,2}(x_1, x_3, \dots, x_n) \leq (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{A}_{n-1,2}(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n) \leq (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n)$$

et d'ici

$$\mathbf{A}_{n,2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Comme notre treillis est distributif on en déduit

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_{n,2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarquons enfin que (x_1, x_2, \dots, x_n) déterminé de cette manière satisfait aussi une équation fonctionnelle de type Birkhoff, parce que nous avons le résultat suivant :

Théorème. Dans un treillis distributif

$$\mathbf{A}_n^{n-1}(\mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, x_2, \dots, y_n), \dots, \mathbf{A}_n^{n-1}(x_{n-1}, y_2, \dots, y_n), z)$$

$$= \mathbf{A}_n^{n-1}(\mathbf{A}_n^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, z), y_2, \dots, y_n)$$

(Manuscrit reçu le 28 septembre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New-York, 1948.
[2] S. Rudeanu, *Axiomele laticilor și ale algebrei moderne*, Editura Academiei, București, 1963.

CONTRIBUȚII LA AXIOMATICA RETICULELOR DISTRIBUTIVE

(R e z u m a t)

G. Birkhoff a dat un sistem de axiome care cu ajutorul unei operații ternare caracterizează reticulele distributive. Totodată Birkhoff a determinat forma analitică a acestei operații ternare. De acest sistem de axiome s-au ocupat și alți autori ca Ph. Vassiliou, R. Croisot, M. Sholander, J. Hashimoto, G. Trevisan, J. Ceremesin și alții. În prezenta lucrare se arată că se poate da și un sistem de axiome care caracterizează reticulul distributiv folosind o relație n -ară. Se arată că există mai multe expresii pentru operația n -ară care satisfac sistemul de axiome dat și se dă o condiție suplimentară pentru ca această expresie să fie unică.

К ВОПРОСУ АКСИОМАТИКИ ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУР

(Р е з ю м е)

Г. Биркгофф дал систему аксиом, которые при помощи одной операции характеризуют дистрибутивные структуры. Одновременно, Биркгофф определил аналитическую форму этой тройной операции. Этой системой аксиом занимались и другие авторы, как: Ф. Василиу, Р. Круазо, М. Шолэндер, Ж. Хашимото, Г. Тревизан, Ж. Черемесин и др. В настоящей работе показано, что можно дать и систему аксиом, характеризующих дистрибутивную структуру, используя n -ое отношение. Показывается, что имеется много выражений для n -ого отношения, которые удовлетворяют данной системе аксиом и дается дополнительное условие для того, чтобы это выражение было единственным.

ÜBER DIE ZERLEGUNG VON GRUPPEN

I. VIRÁG

In der vorliegenden Arbeit werden wir einige Eigenschaften der Zerlegung einer Gruppe beweisen.

Wir werden folgende Bezeichnungen, Begriffe und Ergebnisse benützen:

1° Gruppen und Untergruppen werden mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet, Elemente der Gruppen mit kleinen lateinischen Buchstaben und Homomorphismen mit kleinen griechischen Buchstaben.

2° Es sei G eine Gruppe. Mit $\{G_i; i \in I\}$ bezeichnen wir eine nicht-leere Untergruppenmenge von G , deren Mächtigkeit nicht kleiner als 2 sein soll. Das Symbol $\bigcap_{i \in I} G_i, \bigcup_{i \in I} G_i$ bzw. G_i^* bedeutet immer den Durchschnitt, die Vereinigung im gruppentheoretischen Sinne der Untergruppen $G_i (i \in I)$ von G bzw. $G_i^* = \bigcup_{i \in I - \{i\}} G_i (i \in I)$.

3° \bar{A} bezeichnet denjenigen minimalen Normalteiler von G , der die Untergruppen A von G enthält.

4° $A \circ B$ bezeichnet den „Kommutanten“ der Untergruppen A und B von G , d.h. die von den Kommutatoren $a \circ b = a^{-1} \cdot b^{-1} ab$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe von G .

5° Wenn $G = A \cup B$, so ist $\overline{A \circ B} = \overline{A \circ B} = \overline{A \circ B}$ und $\bar{A} = A \cup (A \circ B)$ [2].

6° Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so ist $\overline{\bigcup_{i, l \in I, i \neq l} (G_i \circ G_l)} = \bigcup_{i, l \in I, i \neq l} (\overline{G_i \circ G_l})$ [2].

7° Es sei φ ein Epimorphismus $G \rightarrow G'$, $G\varphi = G'$. Es gilt $(\bigcup_{i \in I} G_i)\varphi = \bigcup_{i \in I} (G_i\varphi)$

und $\left[\bigcup_{i, l \in I, i \neq l} (G_i \circ G_l) \right] \varphi = \bigcup_{i, l \in I, i \neq l} (G_i\varphi \circ G_l\varphi)$ [2].

8° $A\varphi = \overline{A\varphi}$ gilt für beliebige Untergruppe A von G [2].

9° Wenn A und B zwei Untergruppen von G sind und $\ker(\varphi) \cdot \subseteq A$, so gilt $(A \cap B)\varphi = A\varphi \cap B\varphi$ [1].

10° G ist das verallgemeinerte direkte Produkt seiner Untergruppen $\{G_i; i \in I\}$, wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ und $G_i \circ G_i^* = e (i \in I)$ (wobei e das Einheits-element der Gruppe G bezeichnet).

11° G ist das reguläre Produkt seiner Untergruppen, wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ und $G_i \cap G_i^* = e (i \in I)$ [2].

Es sei

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i \quad (1)$$

Dann ist

$$N = \bigcap_{i \in I} \overline{G_i^*}$$

der Kern der Zerlegung (1) von G ,

$$K = \bigcup_{\substack{i, l \in I \\ i \neq l}} (\overline{G_i} \circ \overline{G_l})$$

der Kommutant der Zerlegung (1) und

$$R = \bigcup_{i \in I} (G_i \cap \overline{G_i^*})$$

der reguläre Kern der Zerlegung (1).

Es sei $N_i = \overline{G_i} \cap \overline{G_i^*}$; $K_i = \overline{G_i} \circ \overline{G_i^*}$, $R_i = G_i \cap \overline{G_i^*}$ ($i \in I$).

Die folgenden Relationen gelten [3]

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i \quad (2)$$

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i \quad (3)$$

HILFSSATZ 1. Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so gilt die folgende Relation

$$N_i = R_i \cup K_i \quad (i \in I) \quad (4)$$

Beweis. Man sieht leicht, dass

$$R_i \subseteq N_i \quad (i \in I)$$

und

$$K_i \subseteq N_i \quad (i \in I)$$

Also

$$R_i \cup K_i \subseteq N_i \quad (i \in I) \quad (5)$$

Es sei nun $x \in N_i = \overline{G_i} \cap \overline{G_i^*}$. Aus 5° folgt, dass $\overline{G_i} = G_i \cdot K_i$. Also

$$x = g_i \cdot k_i = g_i^* (g_i \in G_i, k_i \in K_i, g_i^* \in \overline{G_i^*})$$

und

$$\begin{aligned} g_i &= g_i^* \cdot k_i^{-1} \in \overline{G_i^*}; \\ x &\in (G_i \cap \overline{G_i^*}) K_i = R_i \cup K_i \end{aligned}$$

Also ist

$$N_i \subseteq R_i \cup K_i \quad (i \in I) \quad (6)$$

SATZ 1. Sei $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Dann ist

$$N = R \cup K \tag{7}$$

Beweis. In der Tat folgt aus (5) $R \cup K \subseteq N$, und aus (6) $N \subseteq R \cup K$.

Bemerkung. Wenn $K = e$, so ist $\bar{G}_i = G_i$ ($i \in I$), $N = R = \bigcap_{i \in I} G_i^*$ und die Zerlegung (1) von G ist das verallgemeinerte direkte Produkt seiner Untergruppen G_i ($i \in I$).

Wenn $R = e$, so ist $G_i \cap \bar{G}_i^* = e$ ($i \in I$), $N = K$ und die Zerlegung (1) von G ist das reguläre Produkt seiner Untergruppen G_i ($i \in I$).

Aus $K = e$ und $R = e$ folgt $N = e$, und dass die Zerlegung (1) von G das direkte Produkt seiner Untergruppen G_i ($i \in I$) ist.

HILFSSATZ 2. Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so gilt

$$G_i \cap N = G_i \cap \bar{R} = G_i \cap R = R_i \quad (i \in I), \tag{8}$$

Beweis. Es ist klar, dass $G_i \cap \bar{G}_i^* \subseteq G_i \cap R$ ($i \in I$). Aus den Relationen $N \supseteq \bar{R} \supseteq R$ und $\bar{G}_i^* \supseteq G_i$ ($i \in I$) folgt unmittelbar, dass

$$G_i \cap N = G_i \cap \left(\bigcap_{i \in I} \bar{G}_i^* \right) = G_i \cap \bar{G}_i^* \supseteq G_i \cap \bar{R} \supseteq G_i \cap R \quad (i \in I)$$

Folgerung. Wenn

$$\alpha: G \rightarrow G/\bar{R}$$

und

$$\beta: G \rightarrow G/N$$

Homomorphismen sind, dann ist

$$G_i \alpha \simeq G_i \beta \quad (i \in I) \tag{9}$$

Beweis. In der Tat, aus (8) folgt

$$G_i \alpha = G_i \cup \bar{R}/\bar{R} \simeq G/G_i \cap R = G_i/R_i \quad (i \in I)$$

und

$$G_i \beta = G_i \cup N/N \simeq G_i/G_i \cap N = G_i/R_i \quad (i \in I).$$

Bemerkung. Wenn φ_1 und φ_2 Homomorphismen von G sind und $\bar{R} \leq \leq \text{Ker } \varphi_i \leq N$ ($i = 1, 2$), so ist

$$G_i \varphi_1 \simeq G_i \varphi_2 \quad (i \in I). \tag{10}$$

SATZ 2. Ist $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so ist

- a) $G\alpha = G/R$ das reguläre Produkt der Untergruppen $G_i \alpha \simeq G_i/R_i$ ($i \in I$);
- b) $G\beta = G/K$ das verallgemeinerte direkte Produkt der Untergruppen $G_i \beta = G_i K/K \simeq G_i/G_i \cap K$ ($i \in I$).

c) $G_\gamma = G/N$ das direkte Produkt der Untergruppen $G_i\gamma \cong G_i/R_i$ ($i \in I$).

B e w e i s. a) Aus den Relationen $\bar{R} \triangleleft \bar{G}_i^*$ ($i \in I$) und $G_i \cap \bar{G}_i^* \triangleleft R$ ($i \in I$) und aus den Bemerkungen 7°, 8° und 9° folgt

$$G_i\alpha \cap (\bar{G}_i\alpha)^* = G_i\alpha \cap \bar{G}_i^*\alpha = G_i\alpha \cap \bar{G}_i\alpha = (G_i \cap \bar{G}_i^*)\alpha = e' \quad (i \in I) \quad (11)$$

(e' das Einheitsselement der Gruppe $G\alpha$).

b) Aus der Bemerkung 7° und der Relation (3) folgt

$$G_i\beta \circ (G_i\beta)^* = G_i\beta \circ G_i^*\beta = (G_i \circ G_i^*)\beta = K_i\beta = e'' \quad (i \in I). \quad (12)$$

(e'' das Einheitsselement der Gruppe $G\beta$).

c) folgt unmittelbar aus a) und b).

F o l g e r u n g. Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, φ_1 und φ_2 Homomorphismen von G und $R \triangleleft \text{Ker}(\varphi_1) \triangleleft N$ bzw. $K \triangleleft \text{Ker}(\varphi_2) \triangleleft N$, so ist $G\varphi_1$ das reguläre Produkt der Untergruppen $G_i\varphi_1 \cong G_i/R_i$ ($i \in I$) bzw. $G\varphi_2$ ist das verallgemeinerte direkte Produkt der Untergruppen $G\varphi_2$ ($i \in I$).

Es sei $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Im folgenden werden wir uns mit der Darstellung der Elemente $g \in G$ als Produkt von Elementen aus G beschäftigen. Dazu benutzen wir die Normalteiler N , R und \bar{R} .

In der Arbeit [4] haben wir eine solche Darstellung in folgender Weise erhalten:

Aus jeder Nebenklasse, d.h. aus den Elementen der Faktorgruppe G_i/R_i ($i \in I$) wählen wir ein beliebiges Element und bezeichnen mit S_i ($i \in I$) das auf dieser Weise für jedes $i \in I$ erhaltene Repräsentantensystem.

SATZ 3. Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so ist ein beliebiges Element $g \in G$ in einer sogenannten Normalform

$$g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \dots s_{i_n} \cdot u \quad (13)$$

darstellbar, wobei jedes $s_{i_k} \neq e$ ($1 \leq k \leq n$) zu einem Repräsentantensystem S_{i_k} gehört, und $u \in N$. Diese Normalform ist für vorgegebene Repräsentantensysteme und für eine vorgegebene Anordnung der Faktoren $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}$ eindeutig.

Es sei $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, so ist beliebiges Element $g \in G$ in

$$g = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_j} \cdot \dots g_{i_k} \dots g_{i_m}, \quad g_{i_k} \in G_{i_k} \quad (1 \leq k \leq m) \quad (14)$$

darstellbar. Diese Darstellung von $g \in G$ ist im allgemeinen nicht eindeutig, und mehrere Faktoren in (14) können zur selber Untergruppe gehören.

Für beliebiges $g_{i_k}^* \in G_{i_k}^*$ und $g_{i_k} \in G_{i_k}$ ist

$$g_{i_k}^* \cdot g_{i_k} = g_{i_k} \cdot g_{i_k}^*(g_{i_k}^{*-1} g_{i_k}^{-1} \cdot g_{i_k}^* g_{i_k}^k) = g_{i_k} \cdot g_{i_k}^* \cdot k, \quad \text{wobei } k \in K, \quad (15)$$

und für beliebiges $g \in G$ und $k \in K$ ist

$$g \circ k = g^{-1} k^{-1} g \cdot k \in K. \quad (16)$$

Auf Grund der Eigenschaften (15) und (16) definieren wir die folgende elementare Umformung:

Sind g_{l_j} und g_{l_k} zwei Faktoren in (14) derart, dass beide zu G_i gehören, g_{l_j} und g_{l_k} benachbarte Faktoren aus G_i und $g_{l_j} \cdot g_{l_k} = g_i$, so ersetzen

$$g = g_{i_1} \cdots g_{l_{j-1}} \cdot g_i g_{l_{j+1}} \cdots g_{l_{k-1}} \cdot g_{l_{k-1}} \cdots g_{l_m} \cdot k, \quad k \in K \quad (17)$$

Es ist klar, dass man jedes Produkt (14) in endlich vielen Schritten in ein Produkt

$$g = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_n} \cdot k \quad (18)$$

umformen kann, wobei die Faktoren $g_{i_k} (1 \leq k \leq n)$ zu verschiedenen Untergruppen gehören.

Wir nennen die Darstellung (18) eine kanonische Form von $g \in G$

SATZ 4. Wenn $G = \bigcup_{i \in I} G_i$.

$$g = g_{i_1} \cdots g_{i_n} \cdot k \quad (19)$$

und

$$g = g_{j_1} \cdots g_{j_m} \cdot k' \quad (20)$$

zwei beliebige kanonische Formen von $g \in G$ sind, so folgt aus $g_{i_k} \in G_h$ und $g_{j_l} \in G_h$, $g_{i_k}^{-1} \cdot g_{j_l} \in G_h \cap G_h^* = R_h$.

Beweis. Wir verwandeln die kanonische Formen (19) und (20) von $g \in G$ in

$$g = g_{i_k} \cdot g_{i_1} \cdots g_{i_{k-1}} \cdot g_{i_{k-1}} \cdots g_{i_n} k_1 \quad (21)$$

und

$$g = g_{j_f} \cdot g_{j_1} \cdots g_{j_{l-1}} \cdot g_{j_{l-1}} \cdots g_{j_m} k'_1 \quad (22)$$

Aus (21) und (22) folgt

$$g_{i_k}^{-1} \cdot g_{j_l} = g_{i_1} \cdots g_{i_{k-1}} \cdot g_{i_{k-1}} \cdots g_{i_n} \cdot k_1 (g_{i_1} \cdots g_{j_{l-1}} \cdot g_{j_{l+1}} \cdots g_{j_m} \cdot k'_1)^{-1} \in G_h \cap G_h^*$$

Folgerung. Wenn G das reguläre Produkt seiner Untergruppen $G_i (i \in I)$ ist, so sind zwei kanonische Formen (19) und (20) $n = m$ und jeder Faktor $g_{i_k} (1 \leq k \leq n)$ stimmt mit einem $g_{j_l} (1 \leq l \leq n)$ überein

$$g_{i_k} = g_{j_l}$$

und wenn $i_k = j_l (1 \leq k \leq n)$, so ist $k = l$ [2].

(Eingegangen am 30. September 1968)

L I T E R A T U R

1. Benado M., Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin (I), „Math. Nachrichten“, 14, Heft 4/6, 1956, 213–234.
 2. Golowin O. N. Nilpotentnie proizvedenia grup, „Mat. Sbornik“, 27 (69) nr. 3., 1950, 427–454.

3. I. Gy. Maurer und I. Virág., *Eine Verallgemeinerung des direkten Produktes*, „Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sci. math. astr. et phys.”, XV, No. 2, 1967, 61–69.
4. I. Gy. Maurer, I. Virág., *Despre o formă normală a elementelor unui grup*, „Studia Universitatis Babeş – Bolyai, Mathematica – Physica”, Fasc. 1, 1961, 45–51.

DESPRE DESCOMPUNEREA GRUPURILOR

(R e z u m a t)

Fie G un grup arbitrar, despre care presupunem că este generat de o mulțime a subgrupurilor sale $G_i (i \in I)$:

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i$$

Pentru o astfel de descompunere a grupului G se definește nucleul descompunerii, comutantul descompunerii și nucleul regular al descompunerii.

Se arată anumite relații între nucleul, comutantul și nucleul regular al unei descompunerii.

Folosind nucleul, comutantul, nucleul regular și componentele unei descompunerii se dă două tipuri de reprezentări ale elementelor grupului G sub formă de produse de elemente. În cazuri particulare, din aceste reprezentări se obțin reprezentări cunoscute în literatură.

О РАЗЛОЖЕНИИ ГРУПП

(Р е з ю м е)

Пусть G произвольная группа. Предполагаем, что G порождена некоторым множеством её подгрупп $G_i (i \in I)$

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i$$

Для такого разложения группы G определяется ядро разложения, коммутант разложения и регулярное ядро разложения.

Показаны определённые отношения между ядром, коммутантом и регулярным ядром одного разложения.

Используя ядро, коммутант, регулярное ядро и составляющие одного разложения, даются два типа представлений элементов группы G в виде произведений элементов. В частных случаях, из этих представлений получаются представления, известные в литературе.

SPAȚII V_n DE CURBURĂ PROIECTIVĂ RECURENTĂ

de

P. SANDOVICI, P. ENGIȘ, M. ȚARINĂ

Un spațiu V_n este de curbură recurentă, după definiția dată de H. S. R u s e [1] dacă există un vector covariant φ_r , astfel încît tensorul de curbură verifică relațiile :

$$R_{jkl,r}^i = \varphi_r R_{jkl}^i \quad (1)$$

Din aceste relații, prin contracție în raport cu indicii i, k rezultă :

$$R_{jl,r} = \varphi_r R_{jl} \quad (2)$$

Spațiile V_n care satisfac relațiile (2) se numesc spații Ricci-recurente. Astfel un spațiu de curbură recurentă este de asemenea un spațiu Ricci recurent, reciproca nefiind în general adevărată [2].

Spațiile recurente generalizează spațiile simetrice în sensul lui E. Cartan pentru care avem $\varphi_r = 0$.

Prin analogie cu aceste spații introducem spații V_n de curbură proiectivă recurentă, pentru care tensorul de curbură proiectivă

$$K_{jkl}^i = R_{jkl}^i - \frac{1}{n-1} (\delta_k^i R_{jl} - \delta_l^i R_{jk}) \quad (3)$$

satisface relațiile :

$$K_{jkl,r}^i = \psi_r K_{jkl}^i \quad (4)$$

unde ψ_r este un vector covariant. Aceste spații generalizează spațiile proiective simetrice Ψ_n^* considerate de G y. S o o s [3] și B a n d a n a G u p t a [4]. Spațiile considerate le notăm cu Ψ_n^* și presupunem că nu se reduc la spații de curbură constantă.

În această lucrare stabilim unele proprietăți ale spațiilor Ψ_n^* .

TEOREMA 1. Un spațiu Ψ_n^* care este Ricci-recurent de vector v_r este de curbură recurentă, dacă și numai dacă $\psi_r = v_r$.

Într-adevăr, presupunînd că avem $R_{jl,r} = v_r R_{jl}$ și ținînd seama de aceste relații în ecuațiile (4) găsim :

$$R_{jkl,r}^i - \psi_r R_{jkl}^i - \frac{1}{n-1} [\delta_k^i (v_r - \psi_r) R_{jl} - \delta_l^i (v_r - \psi_r) R_{jk}] = 0. \quad (5)$$

Dacă spațiul Ψ_n^* este de curbură recurentă, deci $R_{jkl,r}^i = \lambda_r R_{jkl}^i$, prin contracție rezultă $\lambda_r = \nu_r$, deci relația (5) devine:

$$(\nu_r - \psi_r) K_{jkl}^i = 0$$

Dar am presupus $K_{jkl}^i \neq 0$, prin urmare $\nu_r = \psi_r$.

Reciproc, un spațiu Ψ_n^* Ricci-recurent cu vector $\nu_r = \psi_r$ este de curbură recurentă.

TEOREMA 2. Un spațiu Ψ_n^* cu vector de recurență ψ , verifică relațiile

$$(R\delta_l^i - nR_l^i)\psi_j = -\frac{n-2}{2}R_l^i, \quad (6)$$

Într-adevăr, contractînd relațiile (4) în raport cu i și r , avem:

$$K_{jkl,i}^i = \psi_i K_{jkl}^i.$$

Ținînd seama de formula lui Weyl

$$K_{jkl,i}^i = \frac{n-2}{n-1}(R_{jl,k} - R_{jkl}) \quad (7)$$

și ridicînd indicele j , obținem:

$$(n-2)(R_{l,k}^j - R_{k,l}^j) = (n-1)\psi_i \left[R_{kl}^{ij} - \frac{1}{n-1}(\delta_k^i R_l^j - \delta_k^j R_l^i) \right].$$

Prin contracție în raport cu indicii j și k , folosind formula:

$$R_{l,j}^j = \frac{1}{2}R_l,$$

obținem relația (6).

C o n s e c i n ț ă . O condiție necesară ca un spațiu $V_n (n > 2)$ să fie de curbură scalară constantă $R = \text{const.}$ este ca ecuația caracteristică

$$|\rho\delta_l^j - R_l^j| = 0 \quad (8)$$

să aibă o rădăcină $\rho = \frac{R_l}{n}$.

TEOREMA 3. Un spațiu V_n reductibil de metrică $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ este un spațiu Ψ_n^* dacă și numai dacă ds_1^2 este o metrică euclidiană iar ds_2^2 e o metrică de curbură recurentă.

D e m o n s t r a ț i e . Să presupunem că metrica spațiului Ψ_n^* este

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \quad (9)$$

unde

$$ds_1^2 = \sum g_{i,j_1} dx^{i_1} dx^{j_1}, \quad ds_2^2 = \sum g_{i,j_2} dx^{i_2} dx^{j_2}$$

iar $g^{i_1 j_1}$ depind de variabilele x^1, \dots, x^r , și $g^{i_2 j_2}$ de x^{r+1}, \dots, x^n . Rezultă că singurele componente nenule ale tensorului de curbură proiectivă sînt:

$$K_{i_\alpha j_\alpha k_\alpha l_\alpha}; K_{i_\alpha j_\beta k_\alpha l_\beta} = -\frac{1}{n-1} g_{i_\alpha k_\alpha} R_{j_\beta l_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (10)$$

Relațiile (4) devin :

$$K_{i\alpha j\alpha k\alpha l\alpha, r\beta} = \psi_{r\beta} K_{i\alpha j\alpha k\alpha l\alpha}; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (11)$$

$$K_{i\alpha j\beta k\alpha l\beta, r\gamma} = \psi_{r\gamma} K_{i\alpha j\beta k\alpha l\beta}; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \text{ și } \alpha \neq \beta \quad (12)$$

Considerînd ecuațiile (11) pentru $\alpha \neq \beta$ și observînd că $K_{i\alpha j\alpha k\alpha l\alpha, r\beta} \neq 0$, rezultă :

$$\psi_{r\alpha} K_{i\beta j\alpha k\beta l\beta} = 0. \quad (13)$$

Dacă ds_1^2 și ds_2^2 nu sînt de curbură constantă și $r > 2$, $n - r > 2$, egalitățile (13) pot fi satisfăcute numai pentru $\psi_{r\alpha} = 0$, $\alpha = 1, 2$, deci spațiul Ψ_n^* ar fi un spațiu Ψ_n .

Să presupunem atunci că $K_{i_1 j_1 k_1 l_1} = 0$ deci că metrica ds_1^2 este de curbă onstantă, iar $K_{i_2 j_2 k_2 l_2} \neq 0$. Din relațiile (13) pentru $\alpha = 1$, $\beta = 2$ rezultă $\psi_{r_1} = 0$. Ecuațiile (12) ne dau

$$R_{j_1 l_1 \beta, r_1 \gamma} = \psi_{r_1 \gamma} R_{j_1 l_1 \beta}, \text{ deci} \quad (14)$$

$$R_{j_1 l_1 \beta, r_1} = 0 \quad R_{j_1 l_1 \beta, r_2} = \psi_{r_2} R_{j_1 l_1 \beta}.$$

Pentru $\beta = 1$ ecuațiile de mai sus ne dau $R_{j_1 l_1} = 0$, deci în ipoteza făcută vom $R_{i_1 j_1 k_1 l_1} = 0$, adică metrica ds_1^2 este euclidiană.

Pentru $\beta = \gamma = 2$ relațiile (14) ne dau :

$$R_{j_2 l_2, r_2} = \psi_{r_2} R_{j_2 l_2} \quad (15)$$

iar pentru restul indicilor sînt identic satisfăcute. Considerînd relațiile (11) pentru $\alpha = \beta = 2$ și ținînd seama de (15), obținem :

$$R_{i_2 j_2 k_2 l_2, r_2} = \psi_{r_2} R_{i_2 j_2 k_2 l_2},$$

eci metrica ds_2^2 este de curbură recurentă.

Concluzia se menține aceeași și în cazul cînd cel puțin una din metricile ds_1^2 , ds_2^2 este bidimensională.

Reciproc, un spațiu V_n reductibil cu metrica (9), unde ds_1^2 este o metrică euclidiană iar ds_2^2 o metrică de curbură recurentă cu vector ψ_r , este un spațiu Ψ_n^* cu vector de recurență $(0, \psi_r)$, ceea ce se poate verifica printr-un calcul direct.

O b s e r v a Ț i a 1. Un spațiu Ψ_n^* reductibil cu metrica (9) unde ds_1^2 ($i = 1, 2$) u sînt de curbură constantă este un spațiu simetric Cartan.

Aceasta rezultă din faptul că în acest caz spațiul Ψ_n^* este un spațiu Ψ_n reductibil, deci este un spațiu simetric Cartan [4].

O b s e r v a Ț i a 2. Un spațiu reductibil Ψ^* este de curbură recurentă.

Spații Ψ_n^* conform-euclidiene. În cele ce urmează se consideră spații Ψ_n^* conform euclidiene și se indică anumite relații necesare pe care acestea le satisfac și care permit verificarea pe o cale algebrică a faptului că un anumit spațiu V_n conform euclidian este un spațiu Ψ_n^* . Relațiile găsite se exprimă sub o formă invariantă.

Un spațiu V_n , $n > 3$ conform euclidian este caracterizat de anularea tensorului de curbură conformă

$$R_{ijkl} = a_{ik}R_{jl} - a_{il}R_{jk} - a_{jk}R_{il} + a_{jl}R_{ik} - \frac{R}{(n-2)(n-1)}(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}) \quad (16)$$

iar pentru $n = 3$ de anularea tensorului

$$R_{j_l, k} - R_{j_k, l} - \frac{1}{2(n-1)} (a_{j_l} R_{,k} - a_{j_k} R_{,l}) = 0. \quad (17)$$

În cazul $n > 3$ relațiile (17) sînt consecințe ale relațiilor (16) iar în cazul $n = 3$ relațiile (16) sînt identități.

Contractînd relațiile (4) în raport cu i și r și folosind formula (7), obținem

$$R_{j_l, k} - R_{j_k, l} = \frac{n-1}{n-2} R_{jkl}^r \psi_r - \frac{1}{n-2} (\psi_k R_{j_l} - \psi_l R_{j_k}). \quad (18)$$

Introducînd aceste expresii în relațiile (17) și ținînd seama de relațiile (6) găsim:

$$A_{jkl}^s \psi_s = 0, \quad (19)$$

unde am notat

$$A_{jkl}^s = (n-1) R_{jkl}^s - (\delta_k^s R_{j_l} - \delta_l^s R_{j_k}) + \\ + \frac{1}{n-1} [a_{j_l} (R \delta_k^s - n R_k^s) - a_{j_k} (R \delta_l^s - n R_l^s)]. \quad (20)$$

Astfel vectorul de recurență ψ_r satisface sistemul de ecuații liniare (19). Dacă rangul matricii sistemului (19)

$$\|A_{jkl}^s\|$$

este n , sistemul admite numai soluția $\psi_s = 0$, prin urmare avem un spațiu Ψ .

De aici rezultă că vectorul de recurență al unui spațiu Ψ_n^* conform euclidian trebuie să fie o soluție a sistemului (19) și avem:

TEOREMA 4. O condiție necesară ca un spațiu V_n conform euclidian să fie un spațiu Ψ_n^* , este ca rangul matricii $\|A_{jkl}^s\|$ să fie mai mic decît n .

Tensorul A_{jkl}^i dat de formulele (20) posedă următoarele proprietăți:

- $A_{jkl}^i + A_{jlk}^i = 0$
- $A_{jkl}^i + A_{kij}^i + A_{ljk}^i = 0$
- Tensorii contractați sînt:

$$A_{kl} = A_{ikl}^i = 0, \quad B_{jl} = A_{jil}^i = \frac{nR_{jl} - a_{j_l} R}{n-1}$$

care rezultă din proprietățile tensorului de curbură.

Se observă că în cazul în care $B_{jl} = 0$ avem $R_{jl} = \frac{R}{n} a_{j_l}$ adică spațiul Ψ_n^* conform euclidian este un spațiu Einstein și deci este un spațiu de curbură constant.

Exemplu de spațiu Ψ_n^* conform euclidiene. Considerăm spațiile V_n conform euclidiene cu metrica de forma

$$ds^2 = \frac{1}{u^2} [(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2] \quad (2)$$

unde u este o funcție de o singură variabilă $u = u(x^1)$.

Coeficienții nenuli de speța a doua ai lui Christoffel sînt :

$$\left| \begin{matrix} i \\ i \ 1 \end{matrix} \right| = -\frac{u'}{u}, \quad \left| \begin{matrix} 1 \\ i \ i \end{matrix} \right| = \frac{u'}{u}, \quad \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right| = -\frac{u'}{u}$$

Simbolurile de speța a doua nenule ale lui Riemann sînt :

$$R^1_{j1j} = R^i_{1i1} = \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2}, \quad R^i_{jij} = -\frac{u'^2}{u^2} \quad (22)$$

iar componentele derivatei covariante

$$R^i_{jij,1} = -\frac{2u'u''}{u^2}, \quad R^1_{j1j,1} = \frac{uu''' - u'u''}{u^2} \quad (23)$$

Componentele nenule ale tensorului de curbură proiectivă (Weyl) sînt :

$$K^1_{j1j} = \frac{n-2}{n-1} \frac{u''}{u}, \quad K^i_{jij} = -\frac{1}{n-1} \frac{u''}{u} \quad (24)$$

iar pentru tensorul derivat obținem :

$$K^1_{j1j,1} = \frac{n-2}{n-1} \frac{uu''' + u'u''}{u^2}, \quad K^i_{jij,1} = -\frac{1}{n-1} \frac{uu''' + u'u''}{u^2} \quad (25)$$

Ecuțiile (4) vor fi verificate pentru :

$$\psi_1 = \frac{uu''' + u'u''}{uu''} \text{ și } \psi_\alpha = 0. \quad (26)$$

dacă $u'' \neq 0$. În cazul $u'' = 0$ spațiul (21) este un spațiu de curbură constantă.

Deci spațiul (21) este un exemplu de spațiu Ψ_n^* cu vectorul de recurență (26). Acest spațiu este, în general, un spațiu Ψ_n^* propriu-zis, adică nu este de curbură recurentă. Într-adevăr, spațiile (21) de curbură recurentă satisfac relațiile :

$$R^i_{jij,1} = \psi_1 R^i_{jij}, \quad R^1_{j1j,1} = \psi_1 R^1_{j1j}, \quad (27)$$

celelalte relații fiind satisfăcute cu valorile $\psi_\alpha = 0$. Din expresiile (23) rezultă că este necesar să avem

$$\psi_1 = \frac{uu''' - u'u''}{uu'' - u'^2} = \frac{2u''}{u'}$$

Prin urmare spațiile (21) de curbură recurentă corespund numai funcțiilor u ce verifică ecuația diferențială

$$uu'u''' + u'^2u'' - 2uu''^2 = 0 \quad (28)$$

a cărei soluție generală este

$$u = (1 - k_1) [k_2x^1 + k_3]^{k_1-1} \quad \text{dacă } k_1 \neq 1$$

respectiv

$$u = k_3e^{k_2x^1} \quad \text{dacă } k_1 = 1$$

Astfel pentru o funcție $u(x^1)$ care nu este o soluție a ecuației (28), spațiul cu metrica (21) este un spațiu Ψ_n^* propriu-zis.

(Intrat în redacție la 23 ianuarie 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. H. S. Ruse, *A classification of K^* -spaces*. Proc. Lond. Math. Soc. (2), **53** (1951).
2. W. Rothe, *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, **X**, 10 (1962).
3. Gy. Soos, *Über die geodätische Abbildungen von Riemannschen Räumen auf projektiv-symmetrisch Riemannsche Räume*. Acta Mat. Acad. Sc. Hungariae, **9** (1958).
4. Bandana Gupta, *On projective-symmetric spaces*. The Journal of the Australian Mathematica Society, **IV**, 1 (1964).
5. G. Vrânceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*. Vol. II. București, Editura Academiei R.P.R. 1951.

 V_n ПРОСТРАНСТВА РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ КРИВИЗНЫ

(Резюме)

Авторы обобщают проективно симметричные пространства, рассматриваемые Дь. Шоош [3] определяя пространства Ψ_n^* рекуррентной проективной кривизны посредством отношений (4), которые проверяются тензором проективной кривизны Вейля.

В первой части работы авторы доказывают несколько свойств этих пространств. Некоторые из них относятся к приводимым Ψ_n^* пространствам.

Во второй части работы рассматриваются конформно эвклидовые Ψ_n^* пространства и даётся критерий алгебраической природы, которым можно проверить если конформно эвклидовое V_n пространство является Ψ_n^* пространством. В формулировке этого условия (Теорема 4) введён тензор A_{jk}^i данный формулами (20), со свойствами, аналогичными тензору кривизны.

В заключении дается пример собственно конформно эвклидового Ψ_n^* пространства (21).

ESPACES V_n DE COURBURE PROJECTIVE RÉCURRENTE

(Résumé)

Les auteurs généralisent les espaces projectivement symétriques considérés par Gy. Soós [3] en définissant les espaces Ψ_n^* de courbure projective récurrente par les relations (4) que vérifie le tenseur de courbure projective de Weyl.

Dans la première partie du travail on démontre plusieurs propriétés de ces espaces, dont certains se rapportent aux espaces Ψ_n^* réductibles.

Dans la seconde partie on considère les espaces Ψ_n^* conformément-euclidiens et l'on indique un critère algébrique d'après lequel on puisse vérifier si un espace V_n conformément-euclidien est un espace Ψ_n^* . Dans l'énoncé de cette condition (théorème 4) on a introduit le tenseur A_{jkl}^i donné par les formules (20) et de propriétés analogues à celles du tenseur de courbure.

On donne en conclusion un exemple d'espace Ψ_n^* conformément-euclidien proprement dit (21).

UNE DEFINITION DE L'INTEGRALE

par

M. RĂDULESCU

1. Etant donné un intervalle $[a, b]$ et une fonction $f(x)$ définie dans cet intervalle, si nous voulons définir l'intégrale Riemann, on considère des divisions de l'intervalle et on construit les sommes intégrales correspondantes. Parce que la classe des fonctions intégrables Riemann est trop restreinte, il a été nécessaire de trouver de nouveaux procédés pour construire des sommes intégrales qui conduisent à des intégrales plus générales. On observe cependant que pour les fonctions qui sont intégrables dans un sens plus général et ne sont pas intégrales Riemann, l'ensemble des points dans le voisinage desquels la fonction a une structure singulière, a ordinairement une mesure nulle. Par exemple, l'ensemble des points au voisinage desquels une telle fonction est infinie, est de mesure nulle. De même, évidemment apparaît l'idée de ne pas construire des sommes intégrales sur l'intervalle $[a, b]$ entier, mais sur un ensemble $B \subset [a, b]$ qui ne contient pas les singularités de la fonction, donc pour lequel

$$m(B) = b - a.$$

Ainsi, J. G. Burkill [3], [4], [5] a défini des intégrales dans lesquelles il a employé la notion de base B de l'intervalle $[a, b]$. Les intégrales M_* et M qui seront définies dans l'article présent, sont basées sur la construction de la moyenne de certaines sommes intégrales Riemann, qui correspondent à de certaines divisions d'une base B .

D'un autre côté E. H. Moore et H. L. Smith dans les articles [8], [9] ont démontré que les sommes intégrales constituent une suite généralisée (en anglais nets) convergente. La théorie des suites généralisées a été développée par plusieurs auteurs [1], [2], [10] et a été essentiellement complétée par la définition donnée par J. L. Kelley de la notion de sous-suite [6], [7]. Alors, en utilisant ces notions, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite généralisée soit convergente est que toute sous-suite de la suite généralisée soit convergente vers la même limite.

Dans la définition des intégrales M_* et M on va utiliser le langage des suites généralisées, définies sur l'ensemble de divisions d'une base B . Cet article contient une partie des résultats communiqués par l'auteur en 1966 à Bucarest, au Congrès interbalcanique des mathématiciens, à la faculté de Mathématiques—Mécanique de Cluj et à la session de l'Institut pédagogique d'Oradea en 1967. Dans d'autres articles seront discutés différentes propriétés des intégrales M_* et M et les primi-

tives correspondantes, et on démontrera le théorème selon lequel une fonction intégrable Denjoy est intégrable M_* .

§ 2. Soit $[a, b]$ un intervalle fini de l'axe réel. Nous appellerons *base de l'intervalle* $[a, b]$, un ensemble mesurable $B \subset [a, b]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° les extrémités de l'intervalle $[a, b]$ appartiennent à l'ensemble B et

2° la mesure de l'ensemble B est égale à la longueur de l'intervalle $[a, b]$

donc

$$m(B) = b - a.$$

Faisons la remarque que, étant donné un intervalle $[a, b]$ il existe une infinité de bases de cet intervalle ; en particulier, l'intervalle $[a, b]$ lui-même est une telle base. Soit B une base de l'intervalle $[a, b]$; nous disons que la suite finie de points $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ constitue une *division* de la base B , si $x_1 = a$, $x_k = b$ et $x_i \in B$, $i = \overline{1, k}$. Nous désignons une division (x_1, x_2, \dots, x_k) d'une base B , par la lettre D . La division $D_0(a, b)$ formée avec les extrémités de l'intervalle $[a, b]$ est une division de toute base B de l'intervalle $[a, b]$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la notion plus générale de sous-division d'une base B . Soit B une base de l'intervalle $[a, b]$; nous allons appeler *sous-division* un système de couples des points distincts $\langle x_1, y_1 \rangle ; \langle x_2, y_2 \rangle ; \dots \langle x_k, y_k \rangle$ de sorte que $x_i, y_i \in B$; $x_i < y_i$ $i = \overline{1, k}$ et $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset$ $i \neq j$; $i, j = \overline{1, k}$; On peut supposer de même sans diminuer la généralité, que $y_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, k-1}$. Notons une sous-division avec la lettre d . Soit $D(x_1, x_2, \dots, x_k)$ une division de la base B ; on peut alors considérer la sous-division $\langle x_1, x_2 \rangle ; \langle x_2, x_3 \rangle ; \dots ; \langle x_{k-1}, x_k \rangle$. Réciproquement, étant donnée une sous-division d , si $x_1 = a$, $y_k = b$ et $y_i = x_{i+1}$ $i = \overline{1, k-1}$, la sous-division détermine une division de la base B . Il résulte de l'observation précédente, qu'on peut étudier les propriétés des divisions d'une base B à l'aide des propriétés analogues des sous-divisions.

Pour caractériser la mesure de la densité de la répartition des points d'une sous-division B sur la base B , on va utiliser les notions de norme de la sous-division d et de norme absolue de la sous-division. Soit d une sous-division de la base B ; on appelle *norme* de la sous-division d le nombre

$$\delta = \delta(d) = \max_{1 \leq i \leq k} (y_i - x_i),$$

et *norme absolue* de la sous-division d , le nombre

$$\Delta = \Delta(d) = \sum_{i=1}^k (y_i - x_i).$$

Pour toute sous-division d , on a les relations

$$0 < \delta(d) < \Delta(d) \leq b - a.$$

Par analogie, pour une division D de la base B , nous avons

$$\delta(D) = \max_{1 \leq i \leq k-1} (x_{i+1} - x_i),$$

et

$$\Delta(D) = \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a.$$

On peut introduire dans la classe des sous-divisions d'une base B une relation d'équivalence : deux sous-divisions $d_1: \langle x_i^1, y_i^1 \rangle, i = \overline{1, k_1}$, et $d_2: \langle x_j^2, y_j^2 \rangle j = \overline{1, k_2}$ sont égales, si $\overline{k_1} = \overline{k_2}$, et il résulte de $\langle x_i^1, y_i^1 \rangle \in d_1$ que $\langle x_i^1, y_i^1 \rangle \in d_2$ pour n'importe quel $i = \overline{1, k_1}$. Par conséquent, deux sous-divisions d_1 et d_2 sont égales si les couples de points par lesquels elles sont formées sont les mêmes. Si les sous-divisions d_1 et d_2 sont égales, on écrira $d_1 = d_2$.

Soit d une sous-division d'une base B ; nous disons que deux couples $\langle x_i, y_i \rangle < x_{i+1}, y_{i+1} \rangle \in d$ sont *liés dans la division d* si $y_i = x_{i+1}$. Nous allons désigner pour *composante* de la sous-division d , une sous-division $\bar{d}: \langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle j = \overline{1, h}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° N'importe quel couple $\langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle \in \bar{d} j = \overline{1, h}$ appartient à la sous-division d .

2° N'importe quel couple $\langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle \in \bar{d}, j = \overline{1, h}$ est lié au moins à l'un des couples $\langle \bar{x}_{j-1}, \bar{y}_{j-1} \rangle ; \langle \bar{x}_{j+1}, \bar{y}_{j+1} \rangle$.

3° Aucun couple $\langle x_i, y_i \rangle \in d, \langle x_i, y_i \rangle \notin \bar{d}$ n'est lié à aucun des couples $\langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle \in \bar{d} j = \overline{1, h}$.

Il est à observer dans cette définition qu'une composante \bar{d} de la sous-division d est formée avec le maximum de couples liés de la sous-division d , en partant du couple donné. En notant k_r le nombre des composantes d'une sous-division d , on a les inégalités $1 \leq k_r \leq k$. Si $k_r = k$, il n'existe pas deux couples de la sous-division d qui soient liés, donc les composantes de d sont formées chacune d'un seul couple. Soit $D(x_1, x_2, \dots, x_k)$, une division de la base B ; alors $x_i = x_{i+1}, i = \overline{1, k-1}$ et par conséquent n'importe quel couple $\langle x_i, x_{i+1} \rangle i = \overline{1, k-1}$, est lié par au moins un des couples $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$. Il résulte que toute division D a une composante qui est égale à D . Soit $d: \langle x_i, y_i \rangle i = \overline{1, k}$ une sous-division de la base B et $\bar{d}_q: \langle \bar{x}_j^q, \bar{y}_j^q \rangle j = \overline{1, h_q}, q = \overline{1, k_r}$ les composantes de la sous-division d ; on appelle *sous-division réduite* de la sous-division d , la sous-division $d_r: \langle \bar{x}_1^q, \bar{y}_{h_q}^q \rangle q = \overline{1, k_r}$. Les composantes de chaque sous-division réduite d_r d'une sous-division d , sont formées d'un seul couple et donc $(\bar{d}_r)_r = d_r$.

Étant donnée une sous-division $d: \langle x_i, y_i \rangle i = \overline{1, k}$, on peut lui attacher un ensemble ouvert e_d

$$e_d = \bigcup_{i=1}^k (x_i, y_i) \tag{2.1}$$

Il résulte de la définition donnée pour une sous-division que

$$(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, k}. \tag{2.2}$$

et

$$x_i < y_i; \quad x_i, y_i \in B \quad i = \overline{1, k}. \tag{2.3}$$

Réciproquement, étant donné un ensemble ouvert de type (2.1) de sorte que (2.2) et (2.3) soient vérifiés, il lui correspond la sous-division $d: \langle x_i, y_i \rangle i = \overline{1, k}$ de la base B . Par conséquent, la correspondance entre d et e_d est biunivoque. En utilisant l'ensemble e_d , attaché à une sous-division d , on peut définir et démon-

trer certaines propriétés des sous-divisions. Dans ce qui suit nous allons noter par 0 la sous-division vide, c'est-à-dire la sous-division qui ne contient aucun couple.

Étant données d_1 et d_2 , deux sous-divisions de la base B , nous allons désigner leur *intersection* par la sous-division $d_3 = d_1 \cap d_2$ pour laquelle on a :

$$e_{d_3} = e_{d_1} \cap e_{d_2}.$$

On peut déduire facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d \cap 0 &= 0; & d \cap d &= d; & d \cap d_r &= d \\ d_1 \cap d_2 &= d_2 \cap d_1; & d_1 \cap (d_2 \cap d_3) &= (d_1 \cap d_2) \cap d_3. \end{aligned}$$

Étant donnée une sous-division $d : \langle x_i, y_i \rangle i = \overline{1, k}$ de la base B , nous noterons par C_d l'ensemble

$$C_d = \bigcup_{i=1}^k [\{x_i\} \cup \{y_i\}].$$

Nous appellerons la *réunion* de deux sous-divisions d_1 et d_2 de la base B , la sous-division $d_3 = d_1 \cup d_2$, pour laquelle a lieu la relation

$$e_{d_3} = e_{d_1} \cup e_{d_2} - C_{d_1} - C_{d_2}.$$

Il résulte les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d \cup 0 &= d; & d \cup d &= d; & d \cup d_r &= d \\ d_1 \cup d_2 &= d_2 \cup d_1; & d_1 \cup (d_2 \cup d_3) &= (d_1 \cup d_2) \cup d_3. \end{aligned}$$

Étant données deux sous-divisions $d_1 : \langle x_i^1, y_i^1 \rangle i = \overline{1, k_1}$; $d_2 : \langle x_j^2, y_j^2 \rangle j = \overline{1, k_2}$, si pour chaque $i = \overline{1, k_1}$, le couple $\langle x_i^1, y_i^1 \rangle$ appartient à la sous-division d_2 , nous dirons que d_1 est contenue dans d_2 et nous écrirons $d_1 \subset d_2$. On observe facilement que l'égalité de deux sous-divisions, d_1 et d_2 , est équivalente aux relations : $d_1 \subset d_2$, $d_2 \subset d_1$. Il résulte de même, des définitions données, que

$$d_1 \cap d_2 \subset d_1 \cup d_2$$

pour n'importe quelles sous-divisions d_1 et d_2 de la base B .

THEOREME 2.1. Pour n'importe quelles sous-divisions d_1 et d_2 de la base B , a lieu la relation

$$(d_1 \cup d_2)_r = [(d_1)_r \cup (d_2)_r]_r. \quad (2.4)$$

Pour le démontrer, on considère les sous-divisions $d' = (d_1 \cup d_2)_r$, $d'' = [(d_1)_r \cup (d_2)_r]_r$, et on démontre qu'on a les relations suivantes :

$$d' \subset d'', \quad d'' \subset d'. \quad (2.5)$$

Soit $\langle x, y \rangle \in d'$; il existe alors les composantes $\overline{d_{i p_1}}, \overline{d_{j q_2}}$ $p = \overline{1, h_1}$; $q = \overline{1, h_2}$

des sous-divisions d_1, d_2 et la composante \bar{d}_s de la sous-division $d_1 \cup d_2$, de sorte que

$$\bar{d}_s = \bigcup_{p=1}^{h_1} \bar{d}_{i_p 1} \cup \bigcup_{q=1}^{h_2} \bar{d}_{j_q 2}$$

et

$$(\bar{d}_s)_r = \langle x, y \rangle.$$

De plus, pour chaque $\bar{d}_{i_p 1}$, $p = \overline{1, h_1}$, il existe un $\bar{d}_{j_q 2}$ de sorte que

$$\bar{d}_{i_p 1} \cap \bar{d}_{j_q 2} \neq 0 \tag{2.6}$$

et réciproquement, pour chaque $\bar{d}_{j_q 2}$ $q = \overline{1, h_2}$ il existe un $\bar{d}_{i_p 1}$ de sorte que

$$\bar{d}_{i_p 1} \cap \bar{d}_{j_q 2} \neq 0. \tag{2.7}$$

car au contraire, \bar{d}_s ne pourrait pas être composante du $d_1 \cup d_2$. En considérant la sous-division;

$$d_s = \bigcup_{p=1}^{h_1} (d_{i_p 1})_r \cup \bigcup_{q=1}^{h_2} (d_{j_q 2})_r$$

on remarque que d_s est une composante de la sous-division $(d_1)_r \cup (d_2)_r$. Il résulte de (2.6) et (2.7) que $(d_s)_r$ est constitué par un seul couple $(d_s)_r = \langle x, y \rangle$, et parce que $(d_s)_r \subset d''$, il en résulte que $\langle x, y \rangle \in d''$. On a démontré, par conséquent, que $\bar{d}' \subset d''$. De même, on démontre la deuxième relation (2.5).

Soient d_1 et d_2 deux sous-divisions de la base B ; nous disons que d_1 est moins fine que d_2 , s'il existe une sous-division $d_3 \neq 0$, de sorte que

$$d_2 = d_1 \cup d_3 \tag{2.8}$$

et d_3 est de la forme

$$d_3 = \bigcup_{i=1}^m d_i^3,$$

où

$$(d_i^3)_r \subset d_1 \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.9}$$

En ce cas nous écrivons $d_1 < d_2$. En transportant cette définition à deux divisions D_1 et D_2 de la base B , on remarque que D_1 est moins fine que D_2 , si n'importe quel point $x_i^1 \in D_1$ de la division D_1 appartient à la division D_2 , et que de plus, il existe un point $x_j^2 \in D_2$, de sorte que $x_j^2 \notin D_1$.

Si d_1 et d_2 sont deux sous-divisions, de sorte que $d_1 < d_2$, on a évidemment

$$\delta(d_1) \geq \delta(d_2) \tag{2.10}$$

et

$$\Delta(d_1) = \Delta(d_2).$$

On peut démontrer, en utilisant le théorème 2.1, que la relation de finesse entre les sous-divisions est transitive, c'est-à-dire, étant données les sous-divisions d_1, d_2, d_3 , de sorte que $d_1 < d_2, d_2 < d_3$, il en résulte que $d_1 < d_3$.

THEOREME 2.2 Soit d_1 et d_2 deux sous-divisions de la base B de sorte que $d_1 < d_2$, alors

$$(d_2)_r = (d_1)_r. \quad (2.11)$$

Par hypothèse, il existe la sous-division $d_3 \neq 0$, de sorte que (2.8) et (2.9) soient vérifiées. Sur la base du théorème 2.1, nous avons :

$$(d_2)_r = (d_1 \cup d_3)_r = [(d_1)_r \cup (d_3)_r]_r.$$

Nous déduisons cependant de (2.9) que

$$d_1 = d_1 \cup (d_3)_r.$$

et par conséquent

$$(d_1)_r = [d_1 \cup (d_3)_r]_r = [(d_1)_r \cup (d_3)_r]_r = (d_2)_r.$$

§ 3. Soient d_1 et d_2 , deux sous-divisions de la base B ; nous dirons que d_1 et d_2 ont le même support, si $(d_1)_r = (d_2)_r$, nous écrirons alors $d_1 \sim d_2$. Cette relation est une relation d'équivalence, car $d_1 \sim d_1$; de $d_1 \sim d_2$ il résulte que $d_2 \sim d_1$ et de $d_1 \sim d_2, d_1 \sim d_3$ il résulte que $d_2 \sim d_3$. On remarque que l'ensemble des sous-divisions d'une base B se divise en classes d'équivalence disjointes, deux par deux.

Soit d une sous-division élémentaire, c'est-à-dire une sous-division pour laquelle $d_r = d$. Nous appellerons *classe de support d* , l'ensemble des sous-divisions d' pour lesquelles $d' \sim d$. Nous désignerons la classe de support d par (\mathcal{H}, d) . Évidemment, pour n'importe quelle sous-division d a lieu la relation

$$d \in (\mathcal{H}, d_r).$$

Chaque division D de la base B appartient à la classe de support $D_0(a, b)$ donc $D \in (\mathcal{H}, D_0)$. Le théorème 2.2 démontre qu'étant données deux sous-divisions d_1, d_2 , telles que $d_1 < d_2$, alors $d_1, d_2 \in (\mathcal{H}, d)$ où $(d_1)_r = (d_2)_r = d$.

Soit d_1 et d_2 deux sous-divisions de la base B ; nous dirons que d_1 est tout au plus également fine relativement à d_2 , si $d_1 < d_2$ ou $d_1 = d_2$. Nous écrivons en ce cas $d_1 \leq d_2$. Si $d_1 \leq d_2$ alors a lieu, ou (2.8) avec (2.9), ou $d_1 = d_2$, et donc (2.8) s'écrit

$$d_2 = d_1 \cup 0$$

c'est-à-dire $d_3 = 0$. Il est évident que la relation \leq entre les sous-divisions est une relation transitive, et donc l'ensemble des sous-divisions d'une base B est partiellement ordonné par cette relation.

Étant donné un ensemble non-vide U d'éléments r, s, t, \dots et une relation binaire $<$, on dit que $<$ est une relation qui dirige l'ensemble U , si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1° Si r, s, t sont des éléments de l'ensemble U et $r < s, s < t$ et alors $r < t$.
- 2° Pour tout élément $s \in U$, on a la relation $s < s$.
- 3° Si r et s sont des éléments quelconques de l'ensemble U , il existe un élément $t \in U$, de sorte que $r < t$ et $s < t$.

Un ensemble dirigé est un couple $(U, <)$ où U est un ensemble non-vide, et $<$ est une relation binaire qui dirige l'ensemble U . La relation binaire \leq entre les

sous-divisions d'une base B est une relation transitive et réflexive, de sorte que les conditions 1° et 2° sont vérifiées. Pour vérifier la condition spéciale 3°, il faut réduire l'ensemble des sous-divisions aux sous-divisions d'une classe d'un même support.

THEOREME 3.1 Soit (\mathcal{H}, d) une classe de sous-divisions de la base B , de support d , et la relation \leq de finesse définie auparavant ; alors $[(\mathcal{H}, d), \leq]$ est un ensemble dirigé.

Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier la condition 3°. Soit $d_1, d_2 \in (\mathcal{H}, d)$; alors $(d_1)_r = (d_2)_r$, et le nombre k_r des composants des sous-divisions d_1 et d_2 est le même, et au plus, on peut numéroter ces composantes de sorte que

$$(\bar{d}_{i1})_r = (\bar{d}_{i2})_r, \quad i = \overline{1, k_r}. \quad (3.1)$$

On considère la sous-division $d_3 = d_1 \cup d_2$; alors on déduit de (3.1) et des relations évidentes

$$\bar{d}_{i1} \cap \bar{d}_{j1} = 0, \quad \bar{d}_{i2} \cap \bar{d}_{j2} = 0 \quad i \neq j ; i, j = \overline{1, k_r}$$

qu'une composante \bar{d}_{i3} de d_3 a la forme $\bar{d}_{i3} = \bar{d}_{i1} \cup \bar{d}_{i2}$ $i = \overline{1, k_r}$. De (3.1) et du fait que $\bar{d}_{i1}, \bar{d}_{i2}$ sont des composantes des sous-divisions d_1 et d_2 , il résulte que

$$\bar{d}_{i3} = \bar{d}_{i1} \cup \bar{d}_{i2} = \bar{d}_{i1} \cup (\bar{d}_{i1} \cap \bar{d}_{i2}) = \bar{d}_{i2} \cup (\bar{d}_{i1} \cap \bar{d}_{i2}) \quad (3.2)$$

$i = \overline{1, k_r}$. On déduit ensuite de (3.2)

$$d_3 = d_1 \cup d'_3 \quad (3.3)$$

où

$$\bar{d}'_{i3} = \bar{d}_{i1} \cap \bar{d}_{i2} \quad i = \overline{1, k_r}$$

et

$$d'_3 = \bigcup_{i=1}^{k_r} \bar{d}'_{i3}. \quad (3.4)$$

Cependant, parce que \bar{d}'_{i3} peut être écrit

$$\bar{d}'_{i3} = \bigcup_{p=1}^{h_{i1}} \bar{d}'_{i3p}$$

où

$$(\bar{d}'_{i3p})_r \subset d_1 \quad p = \overline{1, h_{i1}} ; i = \overline{1, k_r} \quad (3.5)$$

il résulte de (3.3) que $d_1 \leq d_3$. On déduit de même, en partant de (3.2), une relation analogue à (3.3) pour d_2 , d'où il résulte ensuite que $d_2 \leq d_3$. On déduit, en particulier, de ce théorème que $[(\mathcal{H}, D_0), \leq]$ est un ensemble dirigé.

Soit (\mathcal{H}, d) une classe de support d et d_1, d_2 deux sous-divisions appartenant à cette classe. Nous dirons que d_1 est en norme tout au plus égale à d_2 si $\delta(d_1) \geq \delta(d_2)$. Lorsque d_1 est en norme tout au plus égale avec d_2 , nous écrirons $d_1 <_{\delta} d_2$. La relation binaire $<_{\delta}$ entre les sous-divisions d'une classe (\mathcal{H}, d) est, évidemment, transitive et réflexive.

THEOREME 3.2. Soit (\mathcal{H}, d) une classe de sous-divisions de la base B de support d et $<_{\delta}$ la relation d'ordre entre les sous-divisions ; alors le couple $[(\mathcal{H}, d), <_{\delta}]$ est un ensemble dirigé.

Pour démontrer le théorème il suffit de vérifier la condition 3°. Soit $d_1, d_2 \in (\mathcal{H}, d)$, et considérons la sous-division $d_3 = d_1 \cup d_2$. La relation (3.3) a lieu, où d'_3 est du type (3, 4). Il résulte de (3.5) que

$$\delta(d'_{3p}) < \delta(d_1) \quad p = \overline{1, h_{i1}}; i = \overline{1, k},$$

et donc $\delta(d'_3) < \delta(d_1)$. On déduit de la dernière inégalité, et de (3.3), que $\delta(d_3) < \delta(d_1)$, et donc $d_1 <_{\delta} d_3$. On démontre de même que $d_2 <_{\delta} d_3$.

§ 4. Soit B une base de l'intervalle $[a, b]$ et $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ une suite de divisions de la base B . Nous dirons que la suite \mathfrak{D} est une *suite admise*, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(D_n) = 0. \tag{4.1}$$

Nous disons de même que la suite \mathfrak{D} est une *suite ordonnée* si

$$D_n < D_{n+1} \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

Etant donnée une fonction $f(x)$ définie sur la base B de l'intervalle $[a, b]$ et $D(x_1, x_1, \dots, x_k)$ une division de cet intervalle, nous allons appeler *somme intégrale* $\sigma(f, D)$ la somme suivante :

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Soit $f(x)$ une fonction définie sur la base B ; nous disons que $f(x)$ est intégrable M_* sur la base B , s'il existe un nombre fini I_B^* de sorte que, pour n'importe quelle suite de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ admise, de la base B , on a la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D) = I_B^* \tag{4.3}$$

et cette limite est indépendante de la suite admise considérée.

THEOREME 4.1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur une base B soit intégrable M_* sur B , est qu'il existe une constante I_B^* de sorte que, pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il lui corresponde η ainsi que

$$|\sigma(f, D) - I_B^*| < \epsilon, \tag{4.4}$$

pour toute division D de la base B , pour laquelle $\delta(D) < \eta$.

La condition est suffisante, parce que si (4.4) est accompli, alors pour toute suite admise $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ a lieu (4.3). Supposons, réciproquement, que $f(x)$ est intégrable M_* sur B et que (4.4) n'est pas vérifiée. En ce cas il existe ϵ_0 et la suite de nombres positifs $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$, qui converge vers zéro, et la suite de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ correspond avec

$$\delta(D_n) < \eta_n \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.5}$$

de sorte que

$$|\sigma(f, D_n) - I_B^*| \geq \epsilon_0 \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.6}$$

Il résulte de (4.5) que \mathfrak{D} est une suite admise, et comme (4.6) contredit (4.3), il résulte que l'hypothèse faite est fausse.

THÉOREME 4.2. Si $f(x)$ est une fonction définie et intégrable M^* sur les bases B_1 et B_2 , de l'intervalle $[a, b]$, alors $f(x)$ est intégrable M_* sur la base $B = B_1 \cap B_2$, et ont lieu les relations :

$$(4.7) \quad I_B^* = I_{B_1}^* = I_{B_2}^*.$$

L'ensemble B est une base de l'intervalle $[a, b]$. Soit $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ une suite de divisions admise sur la base B ; alors la suite est admise aussi sur les bases B_1, B_2 . Par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n) = I_{B_1}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n) = I_{B_2}^*.$$

d'où il résulte (4.7).

Ce théorème démontre que le nombre I_B^* ne dépend pas de la base B , et donc I_B^* est univoquement déterminé sur $[a, b]$. Nous appellerons ce nombre *l'intégrale M_** , et nous écrirons

$$I_B^* = (M_*) \int_B f(x) dx.$$

Soit $f(x)$ une fonction définie sur la base B ; nous dirons que $f(x)$ est intégrable M sur B , s'il existe un nombre fini I_B , de sorte que n'importe laquelle serait la suite de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ admise et ordonnée de la base B , il existe la limite :

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n) = I_B$$

et cette limite est indépendante de la suite considérée.

Pour les fonctions $f(x)$ intégrables M sur B , a lieu un théorème analogue à 4.2, qui se démontre de la même manière. Dans ce cas résulte aussi la conséquence que I_B ne dépend pas de la base B de l'intervalle $[a, b]$. Nous allons appeler le nombre I_B , s'il existe, *l'intégrale M* de la fonction $f(x)$ et nous écrirons :

$$I_B = (M) \int_B f(x) dx.$$

Il est évident que si $f(x)$ est intégrable M_* sur la base B , elle est de même intégrable M sur la base B , et a lieu la relation

$$(M) \int_B f(x) dx = (M_*) \int_B f(x) dx.$$

Étant donné un ensemble dirigé $(U, <)$ on appelle suite généralisée un couple $(\sigma, <) = (\sigma_t, t \in U, <)$ où σ_t est une fonction définie sur l'ensemble U . Soit $(\sigma, <)$ une suite généralisée et A un ensemble d'éléments quelconques; on dit que $(\sigma, <)$ est éventuellement dans A s'il existe $t \in U$, de sorte que pour chaque élément $t' \in U$, pour qui $t' < t$, $\sigma_{t'}$ appartient à A .

Considérons une suite généralisée $(\sigma_t, t \in U, <)$ de sorte que les valeurs σ_t appartiennent à un espace topologique X . Nous désignerons par V_x un voisinage du point $x \in X$ et par \mathfrak{V}_x la classe des voisinages V_x . On dit que la suite généralisée $(\sigma, <)$

est convergente vers le point $x_0 \in X$, s'il est éventuellement dans chaque voisinage $V_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}$. Si $(\sigma, <)$ est convergente vers x_0 , nous écrivons :

$$\lim_i \sigma_i = x_0.$$

Soit $(\sigma, P, <_1) = (\sigma_p, p \in P, <_1)$ et $(\sigma, Q, <_2) = (\sigma_q, q \in Q, <_2)$ deux suites généralisées. On dit que $(\sigma, Q, <_2)$ est une sous-suite généralisée de $(\sigma, P, <_1)$, s'il existe une fonction φ définie sur l'ensemble Q , avec des valeurs dans P , de sorte que

1° La fonction σ est la composition des fonctions σ et φ : $\tau = \sigma \circ \varphi$, c'est-à-dire $\tau_q = \sigma_{\varphi_q}$ $q \in Q$.

2° Pour tout $p \in P$ il existe un q_0 , dans Q , de sorte que si $q_0 <_2 q$, alors $p <_1 \varphi_q$.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur la base B , et l'ensemble dirigé $[(\mathcal{X}, D_0), <_\delta]$. Pour tout $D \in (\mathcal{X}, D_0)$ la fonction $\sigma(f, D)$ définit une suite généralisée $[\sigma(f, D), <_\delta]$. Soit $(\tau, q \in Q, <_2)$ une sous-suite généralisée de la suite $[\sigma(f, D), <_\delta]$; alors, en conformité avec 2°, pour toute division D il existe un q_0 , de sorte que pour $q_0 <_2 q$ nous avons $D <_\delta \varphi_q$, donc $\delta(\varphi_q) \leq \delta(D)$. Pour n'importe quel nombre positif $\varepsilon > 0$, et pour toute division D_ε qui vérifie l'inégalité

$$(4.9) \quad \delta(D_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

il existe q_ε , de sorte que, quel que soit q , $q_\varepsilon <_2 q$, a lieu la relation

$$(4.10) \quad \delta(\varphi_q) \leq \delta(D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Cette dernière relation nous prouve que la suite généralisée $[\delta(\varphi_q), q \in Q, <_2]$ est éventuellement dans chaque voisinage V_ε de l'origine et donc

$$(4.11) \quad \lim_q \delta(\varphi_q) = 0.$$

Considérons réciproquement la suite généralisée $(\tau_q, q \in Q, <_2)$ et la fonction φ , définie sur Q , ayant des valeurs dans la classe des divisions d'une base B , de sorte que $\tau_q = \sigma(f, \varphi_q)$ et que la relation (4.11) ait lieu. Dans ces conditions, $(\tau_q, q \in Q, <_2)$ est une sous-suite généralisée de $[\sigma(f, D), <_\delta]$. Il est nécessaire de démontrer seulement la vérification de la condition 2°. Soit D_* une division quelconque et $\delta_* = \delta(D_*)$ sa norme. Il résulte de la relation (4.11) que $[\delta(\varphi_\varepsilon), Q, <_2]$ est éventuellement dans le voisinage V_{δ_*} de l'origine et que donc il existe ε_0 de sorte que, pour q pour lequel $q_0 <_2 q$, nous avons $\delta(\varphi_q) \leq \delta_*$. Cependant alors $D_* <_\delta \varphi_q$ et donc la relation 2° est vérifiée.

Il résulte de l'analyse faite le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. Une fonction $f(x)$ définie sur la base B est intégrable M_1 sur B , lorsque, et seulement alors, la suite généralisée $[\sigma(f, D), <_\delta]$ est convergente

On peut considérer de même l'ensemble dirigé $[(\mathcal{X}, D_0), \leq]$ et la suite généralisée $[\sigma(f, D), \leq]$. Soit $(\tau_q, q \in Q, <_2)$ une sous-suite généralisée de la suite $[\sigma(f, D), \leq]$ alors, en considérant une division D_ε qui vérifie la relation (4.9) pour $\varepsilon > 1$ donnée, il existe q_ε de sorte que pour chaque q pour qui $q_\varepsilon <_2 q$ nous avons $D_\varepsilon \leq \varphi_q$. Cependant, il résulte en vertu de la relation (2.9) que la relation (4.10) a lieu et donc aussi la relation (4.11). On remarque, d'autre part qu'en vertu de la condition 2° pour chaque division D il correspond q_0 , de sorte que pour $q \in Q$, qui vérifie la relation $q_0 <_2 q$, nous avons

$$(4.12) \quad D \leq \varphi_q.$$

Supposons réciproquement que la suite généralisée $(\tau_q, q \in Q, <_2)$ est telle qu'il existe une fonction φ définie sur Q avec des valeurs dans la classe des divisions d'une base B , de sorte que $\tau = \sigma \circ \varphi$, et les relations (4.11) et (4.12) sont de même vérifiées. Dans ces conditions on démontre facilement que $(\sigma_q, q \in Q, <_2)$ est une sous-suite généralisée de $[\sigma(f, D), \leq]$. En tenant compte de la définition (4.8), il résulte des observations précédentes le théorème suivant :

THEOREME 4.4. Soit $f(x)$ une fonction définie sur la base B , alors la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit intégrable M sur la base B est que la suite généralisée $[\sigma(f, D), \leq]$ soit convergente.

§ 5. Considérons un espace linéaire X de points notés par x, y, \dots ayant comme scalaires, le corps des nombres réels. Etant donnés deux points x, y de l'espace X , nous appellerons segment d'extrémités x, y l'ensemble des points $z \in X$, pour qui

$$z = z(t) = tx + (1 - t)y \quad t \in [0, 1].$$

Nous disons que z appartient au segment $[x, y]$, et nous le désignons par $z(t)$. Soit A un ensemble de points du segment $[x, y]$; nous allons désigner par A_t , l'ensemble des valeurs du paramètre t pour lesquelles $z(t) \in A$. Nous disons que $A \subset [x, y]$ est mesurable, si $A_t \subset [0, 1]$ est mesurable et la mesure de l'ensemble A est

$$m(A) = m(A_t).$$

L'ensemble $B \subset [x, y]$ est une base du segment $[x, y]$ si $x, y \in B$, et $m(B) = 1$. On peut définir les divisions D d'une base B , et de même les ensembles dirigés correspondants $[(\mathcal{B}, D_0), <_s], [(\mathcal{B}, D_0), \leq]$.

Soit T un espace linéaire topologique ayant comme corps des scalaires le corps des nombres réels, f une application de l'espace linéaire X dans l'espace T

$$f: X \rightarrow T$$

et $D(z_1, z_2, \dots, z_k)$ une division de la base B . Nous noterons par $\sigma(f, D)$ l'expression

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f(z_i) + f(z_{i+1})}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

où $z_i = z(t_i)$ $i = \overline{1, k}$. On peut considérer les suites généralisées $[\sigma(f, D), <_s]$ et $[\sigma(f, D), \leq]$.

Si la suite généralisée $[\sigma(f, D), <_s]$ est convergente, l'application f est intégrable M_* sur B , et nous écrivons

$$\lim_D \sigma(f, D) = (M_*) \int_B f(z) dz.$$

Si la suite généralisée $[\sigma(f, D), \leq]$ est convergente, l'application f est intégrable M sur B et nous écrivons de même

$$\lim_D \sigma(f, D) = (M) \int_B f(z) dz.$$

On observe que, si l'application f est intégrable M_* sur la base B , alors f est de même intégrable M sur B , et l'on a l'égalité

$$(M) \int_B f(z) dz = (M_*) \int_B f(z) dz.$$

Il faut observer de même que les intégrales M_* et M , de l'application intégrable f , ne dépendent pas de la base B .

(Manuscrit reçu le 22 mai 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. Arens R., *Note on convergence in topology*, Math. Mag., **23**, 1950, 229–234.
2. Birkhoff G., *Moore Smith convergence in general topology*, Ann. of Math. (2), **38**, 1937, 39–56.
3. Burkill J. C., *The Cesàre-Perron integral*, Proc. London Math. Soc. (2), **34**, 1932, 314–322.
4. — *The Cesàre-Perron scale of integration*, Proc. London Math. Soc. (2), **39**, 1935, 541–552.
5. — *Integral and trigonometric series*, Proc. London Math. Soc. (3), 1, NOI, 1951 March.
6. Kelley J. L., *Convergence in topology*, Duke Math. Journal, **17**, 1950, 277–283.
7. — *General topology*, Princeton INC, New York, 1955.
8. Moore E. H., *Definition of limit in general integral analysis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **1**, 1915, 628.
9. Moore E. H., Smith H. L., *A general theory of limits*, Amer. J. Math., **44**, 1922, 102–121.
10. Mc Shane E. J., *Partial orderings and Moore-Smith limits*, Amer. Math. Monthly, **59**, 1952, 1–11.

O DEFINIȚIE A INTEGRALEI

(R e z u m a t)

Fiind dat un interval $[a, b]$, o mulțime măsurabilă $B \subset [a, b]$ se numește bază a acestuia dacă $a, b \in B$ și $m(B) = b - a$. Se consideră diviziuni D ale bazei B și, mai general, subdiviziuni d . În primul paragraf se definesc diferite operații între subdiviziuni precum și două norme $\delta(d)$ și $\Delta(d)$. Se definesc și relațiile de ordonare $<$ și $<_{\delta}$. Se arată (teoremele 3.1 și 3.2) că atât relația $<$ cât și relația $<_{\delta}$ este o relație de dirijare pentru fiecare clasă (\mathcal{X}, d) de subdiviziuni de același suport. Un șir de diviziuni $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ este admis dacă (4.1) are loc, iar dacă relația (4.2) este satisfăcută șirul de diviziuni se numește ordonat. Fie $f(x)$ o funcție reală definită pe o bază B , pentru orice diviziune D se consideră suma integrală $\sigma(f, D)$. Dacă are loc limita (4.3) oricare ar fi șirul de diviziuni \mathfrak{D} admis atunci $f(x)$ se spune că este integrabilă M_* pe B . Dacă are loc limita (4.8) oricare ar fi șirul de diviziuni \mathfrak{D} admis și ordonat atunci $f(x)$ se spune că este integrabilă M . Se arată (teoremele 4.3 și 4.4) că $f(x)$ este integrabilă M_* respectiv integrabilă M atunci și numai atunci când șirurile generalizate $[\sigma(f, D), <_{\delta}]$ respectiv $[\sigma(f, D), <]$ sînt convergente.

ОДНО ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

(Резюме)

Пусть дан промежуток $[a, b]$. Измеримое множество $B \subset [a, b]$ называется базой промежутка если $a, b \in B$ и $m(B) = b - a$. Рассматриваются разделения D базы B , и, в более общем случае, подразделения d . В первом параграфе определяются разные операции между подразделениями, а также две нормы $\delta(d)$ и $\Delta(d)$. Определяются и соотношения упорядочения \leq и $<_{\delta}$. Показано (теоремы 3.1 и 3.2), что как соотношение \leq , так и соотношение $<_{\delta}$ являются соотношениями управления для каждого класса (\mathcal{X}, d) подразделений той же опоры. Последовательность разделений $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \dots, D_n, \dots)$ допустима если имеет место (4.1), а если соотношение (4.2) удовлетворено, то последовательность разделений называется упорядоченной. Пусть $f(x)$ вещественная функция, определённая на базе B . Для любого разделения D рассматривается интегральная сумма $\sigma(f, D)$. Если имеет место предел (4.3), какой бы ни была допустимая последовательность \mathfrak{D} , то говорим, что $f(x)$ является M_* -интегрируемой на B . Если имеет место предел (4.8) какой бы ни была допустимая и упорядоченная последовательность \mathfrak{D} , то говорим, что $f(x)$ является M -интегрируемой. Показано (теоремы 4.3 и 4.4), что $f(x)$ является M_* -интегрируемой, соответственно M -интегрируемой тогда и только тогда, когда обобщённые последовательности $[\sigma(f, D), <_{\delta}]$ соответственно $[\sigma(f, D), \leq]$ являются сходящимися.

ABOUT THE RADIUS OF STARLIKENESS OF THE EXPONENTIAL FUNCTION

by
PETRU T. MOCANU

1. We give a detailed discussion promised in [1], of the system determining the generalized radius of starlikeness of the exponential function.

First we enunciate the principal result of the above mentioned paper.

Let f be a regular and univalent function in the disc $\{z; |z| < R\}$ and $f(0) = 0$. Let us denote by C_r the image of the circle $\{z; |z| = r\}$, $r < R$, by the conformal mapping $w = f(z)$. We say that the curve C_r is starlike with respect to C_ρ , $\rho \leq r < R$, if the angle made with the positive real half-axis by every half-tangent to the curve C_ρ with the origin at the point $f(\zeta)$ of tangency and passing through the point $f(z) \in C_r$, increases continuously with increasing $\arg z$, $|z| = r$.

Let us denote by r_c (respectively by r_s) the radius of convexity (respectively of starlikeness) of the function f , i.e. the upper bound of the radii of the circles with its centre at the origin and which are mapped by $w = f(z)$ onto convex (respectively starlike with respect to the origin) curves. For given ρ , $0 \leq \rho \leq r_c$ we shall call radius of starlikeness associated with ρ of the function f , and denote them by $r^*(\rho)$, the upper bound of the numbers, r , $r \geq \rho$, such that C_r be starlike with respect to C_ρ . If $0 \leq \rho < r_c$ then $r^*(\rho)$ is given by the minimum value of $|z|$, where z verifies the system.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} = 0, & \quad \operatorname{Re} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} = 0, \\ \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = 0, & \quad |\zeta| = \rho. \end{aligned} \tag{1}$$

It is clear that $r^*(0) = r_s$. We denote $\tilde{r} = \lim_{\rho \uparrow r_c} r^*(\rho)$; we have $\tilde{r} \geq r_c$. When ρ increases from 0 to r_c , $r^*(\rho)$ decreases from r_s to \tilde{r} .

2. We shall apply the above result to the function $f(z) = e^z - 1$, which is regular and univalent in the disc $\{z; |z| < \pi\}$ and $f(0) = 0$. In this case we have $r_c = 1$ and $r_s \approx 2,83$ [2]. For given ρ , $0 < \rho < 1$, the system (1) becomes

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{\bar{z}(1 - e^{\zeta-z})\} = 0, & \operatorname{Im}\{\zeta \bar{z} e^{\zeta-z}\} = 0, \\ \operatorname{Re} z = -1, & |\zeta| = \rho. \end{cases} \tag{2}$$

Putting

$$z = x + iy, |z| = r, \zeta = \xi + i\eta, w = \bar{z}e^{\zeta-z} = u + iv,$$

we get

$$\begin{aligned} u &= e^{\xi-x}[x \cos(\eta-y) + y \sin(\eta-y)] \\ v &= e^{\xi-x}[x \sin(\eta-y) - y \cos(\eta-y)] \\ r^2 e^{2(\xi-x)} &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

and the system (2) becomes

$$u = -1, x = -1, \eta = \xi v, \xi^2 + \eta^2 = \rho^2.$$

Since $\rho > 0$, we have $\xi \neq 0$. Hence we obtain the following system in ξ, η, y :

$$\begin{cases} e^{\xi+1}[\cos(\eta-y) - y \sin(\eta-y)] = 1 \\ e^{\xi+1}[y \cos(\eta-y) + \sin(\eta-y)] = -\frac{\eta}{\xi} \\ 1 + y^2 = \frac{\rho^2}{\xi^2 e^{2(\xi+1)}} \end{cases} \quad (3)$$

Since $r = \sqrt{1+y^2}$, the problem to find $r^*(\rho)$ of the function $e^z - 1$ is that of finding the solution of (3) for which $|y|$ has the minimum value.

We notice that it is sufficient to consider only the solutions (ξ, η, y) of (3) with $y \leq 0$, because if (ξ, η, y) is a solution of (3) then $(\xi, \eta, -y)$ is also such a solution.

Making the substitutions

$$y = \operatorname{tg} \varphi \quad (4)$$

$$\eta - y + \varphi = \psi \quad (5)$$

the system (3) becomes

$$\begin{cases} e^{\xi+1} \cos \psi = \cos \varphi \\ \xi e^{\xi+1} \sin \psi = (\varphi - \operatorname{tg} \varphi - \psi) \cos \varphi \\ \xi^2 e^{2(\xi+1)} = \rho^2 \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (6)$$

which is a system in ξ, φ, ψ . Since $y = \operatorname{tg} \varphi \leq 0$, it results that $\varphi \in \bigcup_k \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right]$. Observing that $(\xi, \varphi + k\pi, \psi + k\pi)$ is a solution of (6) provided that (ξ, φ, ψ) is such a solution, we can suppose that $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Therefore $\cos \varphi > 0$ and $r = \frac{1}{\cos \varphi}$. We have also $\cos \psi > 0$.

Next we suppose $\xi < 0$. Then the last equation of (6) may be written

$$\xi e^{\xi+1} = -\rho \cos \varphi$$

and we obtain

$$\begin{aligned}\xi &= -\rho \cos \psi \\ \cos \varphi &= \cos \psi e^{1-\rho \cos \psi} \\ \psi - \rho \sin \psi &= \varphi - \operatorname{tg} \varphi\end{aligned}\quad (7)$$

Finally we deduce the following equation in ψ

$$\psi - \rho \sin \psi + \arccos \frac{1}{r} - \sqrt{r^2 - 1} = 0 \quad (8)$$

where

$$r = \frac{1}{\cos \psi} e^{\rho \cos \psi - 1} \quad (9)$$

and

$$0 \leq \arccos \frac{1}{r} < \frac{\pi}{2}$$

On the other hand r verifies the inequalities

$$1 = r_c \leq r \leq r_s < 3$$

Then for ψ given by (8) we obtain the estimations:

$$-\pi < 1 - \frac{\pi}{2} < \psi < 1 + 2\sqrt{2} < \frac{3\pi}{2}$$

Since $\cos \psi > 0$, it follows $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$.

In fact our problem is to find the solution of the equation (8) lying in the interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ such that r given by (9) be minimum.

We shall show that for every ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, the equation (8) has a single root in the interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ which lies in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

From (7) we deduce the condition

$$0 < \cos \psi e^{1-\rho \cos \psi} < 1. \quad (10)$$

Let us denote

$$F = F(\psi, \rho) = \psi - \rho \sin \psi + \arccos \frac{1}{r} - \sqrt{r^2 - 1}$$

$$G = G(\psi, \rho) = \cos \psi e^{1-\rho \cos \psi}$$

We have

$$G(-\psi, \rho) = G(\psi, \rho)$$

and

$$\frac{\partial G}{\partial \psi} = -\sin \psi (1 - \rho \cos \psi) e^{1-\rho \cos \psi}.$$

Since $\frac{\partial G}{\partial \psi} < 0$, for $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, G as function of ψ decreases from $G(0, \rho) = e^{1-\rho} >$ to $G\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = 0$ in the interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Let $\psi_0 = \psi_0(\rho)$ be the unique solution of the equation $G(\psi, \rho) = 1$ which lies in this interval.

The condition (10) is verified for $-\frac{\pi}{2} < \psi < -\psi_0$ and $\psi_0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. From (9) we deduce

$$\frac{\partial r}{\partial \psi} = r(1 - \rho \cos \psi) \operatorname{tg} \psi$$

Then

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = (1 - \rho \cos \psi) H \quad (11)$$

where

$$H = H(\psi, \rho) = 1 - \sqrt{r^2 - 1} \operatorname{tg} \psi \quad (12)$$

We have

$$H(\psi_0, \rho) = H(-\psi_0, \rho) = 1, \quad H\left(-\frac{\pi}{2}, \rho\right) = +\infty, \quad H\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = -\infty$$

and

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{1 - \rho \cos \psi}{\sqrt{r^2 - 1}} \operatorname{tg}^2 \psi - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{\cos^2 \psi} < 0.$$

Hence H decreases from $+\infty$ to 1 in the interval $\left[-\frac{\pi}{2}, -\psi_0\right]$ and decreases from 1 to $-\infty$ in the interval $\left[\psi_0, \frac{\pi}{2}\right]$. Then $H(\psi, \rho)$ as function of ψ vanishes at a unique point $\psi_1 = \psi_1(\rho)$, $\psi_0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$.

From (11) it results $\frac{\partial F}{\partial \psi} > 0$ for $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\psi_0\right) \cup (\psi_0, \psi_1)$; $\frac{\partial F}{\partial \psi}(\psi_1, \rho) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \psi} < 0$, for $\psi \in \left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)$. Therefore F increases from $F\left(-\frac{\pi}{2}, \rho\right) = -\infty$ to $F(-\psi_0, \rho) = -\psi_0 + \rho \sin \psi_0 < 0$ in the interval $\left(-\frac{\pi}{2}, -\psi_0\right)$; F increases from $F(\psi_0, \rho) = \psi_0 - \rho \sin \psi_0 > 0$ to $F(\psi_1, \rho) > 0$ in the interval $[\psi_0, \psi_1]$ and F decreases from $F(\psi_1, \rho) > 0$ to $F\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = -\infty$ in the interval $\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hence in the interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ the equation (8) has a single root $\psi^* = \psi^*(\rho)$ which lies in the interval $\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)$, where ψ_1 is the solution of the equation $H(\psi, \rho) = 0$ where H is given by (12). We thus have

$$r^* = r^*(\rho) = \frac{1}{G(\psi^*, \rho)} \quad (1)$$

where

$$G(\psi, \rho) = \cos \psi e^{1-\rho \cos \psi}.$$

From (11) we deduce

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \rho} = \frac{\cos \psi^*}{(1 - \rho \cos \psi^*)H(\psi^*, \rho)} (\operatorname{tg} \psi^* + \sqrt{r^{*2} - 1}).$$

Since $H(\psi, \rho) < 0$, for $\psi_1 < \psi < \frac{\pi}{2}$, it results $\frac{d\psi^*}{d\rho} < 0$. Therefore $\psi^* = \psi^*(\rho)$ increases from 0 to ψ_2 , where $\psi_2 \approx 1,44$ is the root of $F(\psi, 0) = 0$ when ρ decreases from 1 to 0.

Since

$$\frac{dr^*}{d\rho} = \frac{r^*}{\cos \psi^* H(\psi^*, \rho)} < 0 \quad (14)$$

it results that $r^* = r^*(\rho)$ increases from $\tilde{r} \approx 1,50$ to $r_s \approx 2,83$, provided that ρ decreases from 1 to 0.

It may be easily shown that inequality (14), is also true for $-1 < \rho < 0$.

We supposed $\xi < 0$. If $\xi > 0$, we can make a similar discussion by replacing in the above formulas ρ by $-\rho$. In virtue of (14) we obtain for r^* a superior value.

Hence $r^*(\rho)$, given by (13) is indeed the radius of starlikeness associated with ρ of the function $e^z - 1$.

Finally, we give the following approximate values of $\psi^*(\rho)$ and $r^*(\rho)$ for some values of ρ .

ρ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ψ^*	1,440	1,433	1,424	1,415	1,404	1,390	1,373	1,353	1,325	1,285	1,218
r^*	2,83	2,72	2,60	2,48	2,36	2,24	2,11	1,98	1,84	1,68	1,50

(Received September 16, 1968)

REFERENCES

1. Mocanu P. T., *Convexity and starlikeness of conformal mapping*, *Mathematica* **8** (31), 1, 1966, pp. 91-102.
2. — *Asubra razei de stelaritate a funcțiilor univalente*, *Studii și cercet. de mat. Cluj*, 1960, **11**, pp. 337-341.

DESPRE RAZA DE STELARITATE A FUNCȚIEI EXPONENȚIALE

(R e z u m a t)

În lucrare se determină raza generalizată de stelaritate, în sensul definiției dată în [1], a funcției $f(z) = e^z - 1$. Pentru un ρ dat, $0 \leq \rho \leq 1$, această rază este dată de formula (13), unde ψ^* este soluția ecuației (8), situată în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

О РАДИУСЕ ЗВЁЗДОБРАЗНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Резюме)

В работе определяется обобщённый радиус звёздообразности, в смысле определения, данного в [1] функции $f(z) = e^z - 1$. Для одного данного ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, этот радиус дан формулой (13), где ψ^* является решением уравнения (8), находящегося в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ON FALTUNG THEOREM OF LAGUERRE TRANSFORM

by

L. DEBNATH (London)

1. Introduction. The author (Debnath, 1960) [1] has introduced the Laguerre transform and investigated some of its basic operational properties. The usefulness of the Laguerre transform method has been demonstrated by deriving a solution of heat conduction problem (Debnath, 1962) [2] as well as of oscillation of a very long and heavy chain under an external transverse force (Debnath, 1961) [3]. Furthermore, this method has also been extended to obtain a solution of a more general partial differential equation (Debnath, 1966) [4].

McCully (1960) [7] has considered the Laguerre transform and studied some of its operational properties including an application to heat conduction problem. It is important to notice that the Laguerre transform considered by McCully follows as a special case of that of the author when $a = 0$. Consequently, all the operational properties including applications considered by the author reduce to those of McCully as particular cases when $a = 0$.

The object of the present investigation is to establish the Faltung (or Convolution) theorem of the Laguerre transform and to study some of the algebraic properties of the convolution operation in considerable detail.

In order to make the discussion readable, the author has assumed the important properties of the Laguerre transform and polynomial [1, 8] and the basic features of the integral transform methods [5, 6].

The Laguerre transform [1] $f_a(n)$ of a function $F(x)$ has been introduced by means of the integral

$$f_a(n) = T\{F(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a L_n^a(x) F(x) dx \quad (1)$$

provided the integral exists in the sense of Lebesgue or in particular $F(x)$ is integrable (L) in $(0, \infty)$; $L_n^a(x)$ is the well-known orthogonal Laguerre polynomial of degree n and order a (> -1).

2. Faltung (or Convolution) Theorem.

THEOREM 1 *If $f_a(n)$ and $g_a(n)$ be the Laguerre transform of the functions $F(x)$ and $G(x)$ respectively, then the Laguerre transform of the convolution $F(x) * G(x)$ exists when $R(a) > -\frac{1}{2}$ and is equal to $f_a(n) g_a(n)$.*

In fact

$$T\{F(x)\} T\{G(x)\} = T\{F(x) * G(x)\}$$

where $F(x) * G(x)$ is given by the following repeated integral

$$F(x) * G(x) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{n! \sqrt[n]{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^a} F(t) \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{xt} \cos \varphi} \\ \times \frac{J_{a-\frac{1}{2}}(\sqrt{xt} \sin \varphi)}{\left(\frac{1}{2} \sqrt{xt} \sin \varphi\right)^{a-1/2}} \sin^{2a} \varphi G(x+t+2\sqrt{xt} \cos \varphi) dt d\varphi;$$

provided $R(a) > -\frac{1}{2}$, where $J_n(z)$ is the Bessel function of the first kind of order n

Proof. Let us consider

$$f_a(n) g_a(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a L_n^a(x) F(x) dx \int_0^{\infty} e^{-y} y^a L_n^a(y) G(y) dy \\ = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a F(x) \int_0^{\infty} e^{-y} y^a L_n^a(x) L_n^a(y) G(y) dx dy, \quad (2)$$

The integral representation for the product of two Laguerre polynomials due to Watson [9], is given by

$$\frac{n! L_n^a(x) L_n^a(y)}{\Gamma(n+a+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{xy} \cos \theta} L_n^a(x+y+2\sqrt{xy} \cos \theta) \\ \times \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xy} \sin \theta)}{(1/2 \sqrt{xy} \sin \theta)^{a-1/2}} \sin^{2a} \theta d\theta, \quad \left(R(a) > -\frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Using the integral representation for the product $L_n^a(x) L_n^a(y)$, we can reduce (2) into the form

$$\frac{\sqrt{\pi} n! f_a(n) g_a(n)}{\Gamma(n+a+1)} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a F(x) dx \left[\int_0^{\infty} e^{-y} y^a G(y) \right. \\ \left. \times \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{xy} \cos \theta} \sin^{2a} \theta L_n^a(x+y+2\sqrt{xy} \cos \theta) \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xy} \sin \theta)}{(1/2 \sqrt{xy} \sin \theta)^{a-1/2}} \times dy d\theta \right] \quad (4)$$

Putting $t = x + y + 2\sqrt{xy} \cos \theta$ and making use of the results

$$y = x + t + 2\sqrt{xt} \cos \varphi, \quad \sin \theta \cdot \sqrt{y} = \sqrt{t} \sin \varphi;$$

the integral under the third bracket of (4) can be put into the form

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-y} y^a G(y) \int_0^\pi e^{-\sqrt{xy} \cos \theta} \sin^{2a} \theta L_n^a(x + y + 2\sqrt{xy} \cos \theta) \times \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xy} \sin \theta)}{(1/2\sqrt{xy} \sin \theta)^{a-1/2}} d\theta dy \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^a L_n^a(t) \int_0^\pi e^{-\sqrt{xt} \cos \varphi} \sin^{2a} \varphi G(x + t + 2\sqrt{xt} \cos \varphi) \times \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xt} \sin \varphi)}{(1/2\sqrt{xt} \sin \varphi)^{a-1/2}} d\varphi dt. \end{aligned}$$

We thus obtain

$$\begin{aligned} f_a(n) g_a(n) &= \frac{\Gamma(n + a + 1)}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^a L_n^a(t) dt \times \\ & \times \left[\int_0^\infty e^{-x} x^a F(x) \int_0^\pi e^{-\sqrt{xt} \cos \varphi} \sin^{2a} \varphi G(x + t + 2\sqrt{xt} \cos \varphi) \right. \\ & \left. \times \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xt} \sin \varphi)}{(1/2\sqrt{xt} \sin \varphi)^{a-1/2}} dx d\varphi \right] = \int_0^\infty e^{-t} t^a L_n^a(t) H(t) dt, \end{aligned}$$

where $H(x)$ is given by

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{\Gamma(n + a + 1)}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^a F(t) dt \int_0^\pi e^{-\sqrt{xt} \cos \varphi} \sin^{2a} \varphi \\ & \times G(x + t + 2\sqrt{xt} \cos \varphi) \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xt} \sin \varphi)}{(1/2\sqrt{xt} \sin \varphi)^{a-1/2}} d\varphi, \quad (R(a) > -1) \end{aligned}$$

Hence we have obtained the result $f_a(n) g_a(n) = T\{H(x)\}$

The convolution $F(x) * G(x)$ of the functions $F(x)$ and $G(x)$ is defined by

$$\begin{aligned} F(x) * G(x) &= \frac{\Gamma(n + a + 1)}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^a F(t) dt \int_0^\pi e^{-\sqrt{xt} \cos \varphi} \\ & \times \sin^{2a} \varphi G(x + t + 2\sqrt{xt} \cos \varphi) \frac{J_{a-1/2}(\sqrt{xt} \sin \varphi)}{(1/2\sqrt{xt} \sin \varphi)^{a-1/2}} d\varphi, \quad R(a) > -1. \end{aligned}$$

This establishes the theorem.

Remark. Putting $a = 0$, and replacing φ by $(\pi - \theta)$, we deduce the convolution theorem of the Laguerre transform $f(n)$ of $F(x)$ in the form

$$f(n)g(n) = T\{H(x)\}$$

where $H(x)$ is given by the integral

$$H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} F(t) dt \int_0^{\pi} e^{\sqrt{xt} \cos \theta} G(x + t - 2\sqrt{xt} \cos \theta) \times \cos(xt \sin \theta) d\theta$$

which has been obtained by Mc Cully [7].

3. Algebraic Properties of the Convolution. As regards the algebraic properties of the convolution operation, it can be easily shown that the convolution operation is commutative distributive, under the operation addition and associative.

As a matter of fact, we can prove the following properties:

$$(a) \quad F_1(x) * F_2(x) = F_2(x) * F_1(x) \quad (\text{Commutative})$$

$$(b) \quad F_1(x) * \{F_2(x) + F_3(x)\} = F_1(x) * F_2(x) + F_1(x) * F_3(x) \\ \{F_1(x) + F_2(x)\} * F_3(x) = F_1(x) * F_3(x) + F_2(x) * F_3(x) \quad (\text{Distributive})$$

$$(c) \quad F_1(x) * \{k F_2(x)\} = k\{F_1(x) * F_2(x)\}, \quad k \text{ is a constant.}$$

$$(d) \quad F_1(x) * \{F_2(x) * F_3(x)\} = \{F_1(x) * F_2(x)\} * F_3(x) \quad (\text{Associative})$$

As the proof of the properties is not very difficult, we may omit it.

(Received December 10, 1967)

REFERENCES

1. Debnath, L., *On Laguerre Transform*. Bull. Cal. Math. Soc., **52**, No. 2, p 69, (1960).
2. Debnath, L., *Application of Laguerre Transform on Heat Conduction Problem*. Annali dell'Univ. di Ferrara, Sezione VII, Scienza Matematiche, **X**, p 17. (1962).
3. Debnath, L., *An application of Laguerre Transform on the Problem of Oscillation of a very long and heavy Chain*. Annali dell'Univ. di Ferrara, Sezione VII, Scienze Matematiche, **IX**, p 149, (1961).
4. Debnath, L., *Solution of Partial Differential Equation by the Laguerre Transform*, Ind. Jour. Mech. Math. **3**, No. 2, p. 84. (1965).
5. Carslaw, H. S. Jaeger, J. C., *Operational Methods in Applied Mathematics* (1941).
6. Duff, G. F. D., Naylor, D., *Differential Equations of Applied Mathematics* (1966).
7. Mc Cully, J., *The Laguerre Transform*, Siam Review. **2**, No. 2, p. 185, (1960).
8. Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, (1939).
9. Watson, G. N., *Another note on Laguerre Polynomials*, Jour. Lond. Math. Soc., **14**, p. 19, (1939).

O TEOREMĂ DE CONVOLUȚIE PENTRU TRANSFORMAREA LAGUERRE

(R e z u m a t)

Autorul stabilește o teoremă de convoluție (Faltung Theorem) pentru transformarea Laguerre definită de autor în lucrarea [1]. Se mai arată că operația de convoluție se bucură de proprietățile de comutativitate, asociativitate și distributivitate.

ОДНА ТЕОРЕМА СВЁРТКИ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

(Р е з ю м е)

Автор устанавливает одну теорему свёртки функции (Faltung Theorem) для преобразования Лагерра, определённую автором в работе [1]. Показано также, что операция свёртки функции пользуется свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

SUR L'UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE RIQUIER POUR LES SYSTEMES METAHARMONIQUES

par
IOAN A. RUS

1. Soit

$$\Delta^k u + A_{k-1}(x) \Delta^{k-1} u + \dots + A_1(x) \Delta u + A_0(x) u = f \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \Delta u|_{\Gamma} = \dots = \Delta^{k-1} u|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

le problème de Riquier pour le système (1) et le domaine (borné) $\Omega \subset R^m$; Γ est la frontière de Ω et $A_0(x), \dots, A_{k-1}(x)$, sont des matrices carrées définies sur $\overline{\Omega}$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \Delta^k u = \Delta (\Delta^{k-1} u).$$

Supposons que A_i, f et $g \in C(\overline{\Omega})$.

Dans cette note, en utilisant des théorèmes de comparaison, nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution régulière du problème (1) – (2) (voir pour certains cas particuliers [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]...).

2. Considérons le système

$$\Delta V + Q(x)V = 0 \quad (3)$$

où $Q(x)$ est une matrice carrée d'ordre nk ; $Q(x) \in C(\Omega)$, $v = (v_1, \dots, v_{nk})$.
On a le

THEOREME 1. On suppose que

1. $Q(x)$ est symétrique.
2. $\eta(Q(x) - C(x))\eta^* \geq 0$, pour toute $\eta \in R^{nk}$, $x \in \Omega$, où

$$C(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{k-2} & A_{k-1} \end{pmatrix}$$

3° Il existe une matrice-solution, T , du système (3) de sorte que T est symétrique et le déterminant $|T| \neq 0$, dans $\bar{\Omega}$.

Alors le problème (1) — (2) a tout au plus une solution régulière.

Démonstration. En écrivant le problème (1) — (2) dans la forme suivante

$$\begin{aligned} \Delta w_1 - w_2 &= 0 & (w_1 = u) \\ \Delta w_2 - w_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots \\ \Delta w_{k-1} - w_k &= 0 \\ \Delta w_k + A_0 w_1 + \dots + A_{k-1} w_k &= f \\ w_1|_{\Gamma} = \dots = w_k|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

et en utilisant le théorème de comparaison de G. C i m m i n o [7] on a le théorème 1.

3. De la même manière on peut appliquer les théorèmes de comparaison donnés dans [7] afin de donner des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution régulière du problème de Riquier suivant

$$\Delta^k u + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^m B_{ij}(x; u) \frac{\partial \Delta^j u}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x; u) \Delta^i u = \quad (7)$$

$$u|_{\Gamma} = \Delta u|_{\Gamma} = \dots = \Delta_u^{k-1}|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

où $B_{ij}(x; u)$, $A_i(x; u)$, sont des matrices carrées d'ordre n ;

$$B_{ij}(x; u) \in C(\Omega \times R^n), A_i(x; u) \in C(\Omega \times R^n), f = (f_1, \dots, f_n).$$

Par exemple si on applique pour le système

$$\Delta^2 u + \sum_{i=1}^m B_i(x; u) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} + A_1(x; u) \Delta u + A_0(x; u) u = f$$

le théorème 1, donné dans [7], alors la condition 2° du théorème 1, est remplacée par la condition suivante.

$$2^\circ. \sum_{i=1}^m \eta_i \eta_i^* - 2 \sum_{i=1}^m \eta_0 D_i(x; \tau) \eta_i^* + \eta_0 (Q(x) - 2C(x; \tau)) \eta_i^* \geq 0$$

pour toute $\eta_i \in R^{2n}$, $\tau \in R^n$, $x \in \Omega$, où

$$C(x; \tau) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_0(x; \tau) & A_1(x; \tau) \end{pmatrix}, D_i(x; \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_i(x; \tau) \end{pmatrix}$$

Remarque. De la même manière que dans [8] nous pouvons exprimer la condition 2°' par les normes des matrices, C , D_i , et Q .

(Manuscrit reçu le 13 septembre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. G. C i m m i n o, *Sulle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali di ordine superiore al secondo.* „Memorie della Reale Acc. D'Italia", 1, no. 3, 1—15 (1930).
2. M. G h e r m ā n e s c o, *Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du type elliptique.* C. R. Acad. Sc. Paris, 194, 430—432 (1932).

3. M. Ghermănescu. „Sur le problème de Riquier” C. R. Acad. Sc. Paris., 194, 2011.
4. L. M. Kuks, Ob oblastjach razrešimosti pervoj kraevoj zadači dlja sil'no elliptičeskich sistem diferencial'nych uravnenij. Iz. vysš. učeб. zaved., 2, 90—99 (1961).
5. M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques*. Act. sc. et ind. Paris, no. 331, 1936.
6. J. P. Robert, *Le problème de Riquier et ses généralisations*. C.R. Acad. Sc. Paris, 194, 428—430 (1932).
7. I. A. Rus. *Théorèmes de comparaison pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre*, Boll. U.M.I., 22, 486—490 (1967).
8. I. A. Rus, *Asupra unicității soluției problemei lui Dirichlet relativ la sisteme tari eliptice de ordinul al doilea* — Studii și cercet. mat. (București), no. 9, 1337—1352 (1968).
9. C. A. Swanson, *A generalization of Sturm's comparison theorem*. J. Math. Anal. Appl., 15, 512—519 (1966).

ASUPRA UNICITĂȚII SOLUȚIEI PROBLEMEI LUI RIQUIER
RELATIVĂ LA SISTEME METAARMONICE

(R e z u m a t)

Folosind teoremele de comparație stabilite în lucrarea [7], se stabilesc condiții suficiente pentru unicitatea soluției regulate a problemei lui Riquier (1)–(2) și (7)–(8).

ОБ ЕДИНСТВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИКЬЕ, ОТНОСЯЩЕЙСЯ К МЕТАГАРМОНИЧЕСКИМ
СИСТЕМАМ

(Р е з ю м е)

Используя теоремы сравнения, установленные в работе [7], автор устанавливает достаточные условия для единственности регулярного решения задачи Рикье (1)–(2) и (7)–(8).

GENERALIZAREA CU AJUTORUL MATRICILOR A ECUAȚIEI FUNCȚIONALE CARE CARACTERIZEAZĂ FUNCȚIILE SINUS CIRCULAR, HIPERBOLIC ȘI DUAL

de

ANTONINA NICULA și GAROFIȚA PAVEL

Ecuția funcțională de care ne vom ocupa este următoarea :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \psi(y) + \varphi(y) \cdot \psi(x) \quad (1)$$

ce a fost integrată de către N. Abel, Th. Angheluță (1), Aczél [2], Kurepa [3], Vincze [4], Oct. E. M. Gheorghiu și V. Mioc [5], obținându-se soluția generală continuă, integrabilă, măsurabilă etc... în domeniul real, dată de :

1. $\varphi(x) = 0$	$\psi(x)$ oarecare	
2. $\varphi(x) = \beta e^{\alpha x}$	$\psi(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\alpha x}$	
3. $\varphi(x) = \beta e^{bx} \operatorname{sh} ax$	$\psi(x) = e^{bx} \operatorname{ch} ax$	(2)
4. $\varphi(x) = \beta e^{bx} \sin ax$	$\psi(x) = e^{bx} \cos ax$	
5. $\varphi(x) = ax e^{bx}$	$\psi(x) = e^{bx}$	

unde a, b, α, β sînt constante arbitrare reale.

Ne propunem să studiem ecuația funcțională cu matrici :

$$F(x + y) = F(x) \cdot G(y) + F(y) \cdot G(x) \quad (3)$$

unde $F(x)$ și $G(x)$ sînt matricile ciclice de ordinul trei :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) \\ F_3(x) & F_1(x) & F_2(x) \\ F_2(x) & F_3(x) & F_1(x) \end{pmatrix} \quad G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) & G_2(x) & G_3(x) \\ G_3(x) & G_1(x) & G_2(x) \\ G_2(x) & G_3(x) & G_1(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Efectuînd calculele în ecuația (3) obținem sistemul :

$$\begin{aligned} F_1(x + y) &= F_1(x)G_1(y) + F_2(x)G_3(y) + F_3(x)G_2(y) + F_1(y)G_1(x) + F_2(y)G_3(x) + F_3(y)G_2(x) \\ F_2(x + y) &= F_1(x)G_2(y) + F_2(x)G_1(y) + F_3(x)G_3(y) + F_1(y)G_2(x) + F_2(y)G_1(x) + F_3(y)G_3(x) \\ F_3(x + y) &= F_1(x)G_3(y) + F_2(x)G_2(y) + F_3(x)G_1(y) + F_1(y)G_3(x) + F_2(y)G_2(x) + F_3(y)G_1(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Pentru integrarea ecuației (3) respectiv a sistemului (5) folosim metoda pe care o aplică O. Gheorghiu, V. Mihoc și B. Crstici [6].

Se consideră variabilă hipercomplexă

$$\xi = \xi_1 + \theta \xi_2 + \theta^2 \xi_3,$$

în care ξ_1, ξ_2, ξ_3 , sînt variabile reale, iar θ este unitatea hipercomplexă care satisface ecuația caracteristică

$$\theta^3 = 1.$$

Se introduc în raport cu unitatea hipercomplexă θ funcțiile hipercomplex conjugate, de variabilă reală:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= F_1(x) + F_2(x) + F_3(x); & K_1(x) &= G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) \\ H_2(x) &= F_1(x) + \theta F_2(x) + \theta^2 F_3(x); & K_2(x) &= G_1(x) + \theta G_2(x) + \theta^2 G_3(x) \\ H_3(x) &= F_1(x) + \theta^2 F_2(x) + \theta F_3(x); & K_3(x) &= G_1(x) + \theta^2 G_2(x) + \theta G_3(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Ținînd cont de funcțiile (6) sistemul (5) devine:

$$H_i(x+y) = H_i(x)K_i(y) + H_i(y)K_i(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

care repetă ecuația funcțională (3), ale cărei soluții sînt date de relațiile (2), în care în loc de constantele reale a, b, α, β , vom avea constante hipercomplexe arbitrare de forma $m + p\theta + n\theta^2$ unde m, n, p , sînt numere reale.

Pentru determinarea funcțiilor necunoscute

$$F_i(x) \text{ și } G_i(x) \quad (i = 1, 2, 3)$$

este suficient să utilizăm funcțiile $H_2(x)$ și $K_2(x)$

$$1^\circ H_2(x) = 0 \quad K_2(x) \text{ arbitrară}$$

$$F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = 0 \quad G_1(x); G_2(x); G_3(x) \text{ arbitrară}$$

$$2^\circ H_2(x) = (\beta_1 + \theta\beta_2 + \theta^2\beta_3) \cdot e^{(x_1 + \theta x_2 + \theta^2 x_3)x}$$

$$K_2(x) = \frac{1}{2} e^{(x_1 + \theta x_2 + \theta^2 x_3)x}$$

Ținînd seama că:

$$e^{(\theta x_2 x + \theta^2 x_3 x)} = A(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta B(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta^2 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x)$$

unde A, B, C sînt cosinușii lui Appell, avem:

$$H_2(x) = e^{x_1 x (\beta_1 + \theta\beta_2 + \theta^2\beta_3)} [A(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta B(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta^2 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x)]$$

$$K_2(x) = \frac{1}{2} e^{x_1 x} [A(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta B(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \theta^2 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x)]$$

Ținând seama de (6) deducem :

$$F_1(x) = e^{\alpha_1 x} [\beta_1 A(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_2 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_3 B(\alpha_2 x, \alpha_3 x)]$$

$$F_2(x) = e^{\alpha_1 x} [\beta_1 B(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_2 A(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_3 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x)]$$

$$F_3(x) = e^{\alpha_1 x} [\beta_1 C(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_2 B(\alpha_2 x, \alpha_3 x) + \beta_3 A(\alpha_2 x, \alpha_3 x)]$$

$$G_1(x) = \frac{1}{2} e^{\alpha_1 x} A(\alpha_2 x, \alpha_3 x)$$

$$G_2(x) = \frac{1}{2} e^{\alpha_1 x} B(\alpha_2 x, \alpha_3 x)$$

$$G_3(x) = \frac{1}{2} e^{\alpha_1 x} C(\alpha_2 x, \alpha_3 x)$$

$$3^\circ H_2(x) = (\beta_1 + \theta\beta_2 + \theta^2\beta_3) \cdot e^{(\theta b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3)x} \cdot sh(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$$

$$K_2(x) = e^{(\theta b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3)x} \cdot ch(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$$

Pentru determinarea funcțiilor $F_i(x)$ și $G_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$); va fi necesar să scriem $sh(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$ și $ch(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$ sub forma $p + \theta m + \theta^2 n$.

Pentru simplificarea scrierii notăm :

$$a_1 x = v_1, \quad a_2 x = v_2, \quad a_3 x = v_3$$

și vom calcula $sh(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3)$ și $ch(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3)$.

Ținând seama de cosinușii lui Appell [7]

$$A(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{3n}}{(3n)!}; \quad B(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{3n-1}}{(3n-1)!}; \quad C(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{3n-2}}{(3n-2)!};$$

formăm funcțiile :

$$A_1(v) = \frac{C(v) - C(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-1}}{(6n-1)!}; \quad A_2(v) = \frac{B(v) + B(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-2}}{(6n-2)!}$$

$$A_3(v) = \frac{A(v) - A(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-3}}{(6n-3)!}; \quad A_4(v) = \frac{C(v) + C(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-4}}{(6n-4)!}$$

$$A_5(v) = \frac{B(v) - B(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-5}}{(6n-5)!}; \quad A_6(v) = \frac{A(v) + A(-v)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{6n-6}}{(6n-6)!}$$

$$sh\theta v = A_3(v) + \theta A_5(v) + \theta^2 A_1(v); \quad ch\theta v = A_6(v) + \theta A_2(v) + \theta^2 A_4(v)$$

$$sh\theta^2 v = A_3(v) + \theta A_1(v) + \theta^2 A_5(v); \quad ch\theta^2 v = A_6(v) + \theta A_4(v) + \theta^2 A_2(v)$$

Expresii care se pot scrie mai simplu, astfel :

$$\begin{aligned} sh(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) &= shv_1 [\Sigma A_1(v_2) A_1(v_3) + \theta \Sigma A_1(v_2) A_5(v_3) + \theta^2 \Sigma A_1(v_2) \cdot \\ &\cdot A_3(v_3)] + chv_1 [\Sigma A_1(v_2) A_4(v_3) + \theta \Sigma A_1(v_2) A_2(v_3) + \theta^2 \Sigma A_1(v_2) A_6(v_3)] \cdot \\ &\cdot ch(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) = shv_1 [\Sigma A_1(v_2) A_4(v_3) + \theta \Sigma A_1(v_2) A_2(v_3) + \\ &+ \theta^2 \Sigma A_1(v_2) A_6(v_3)] + chv_1 [\Sigma A_1(v_2) A_1(v_3) + \theta \Sigma A_1(v_2) A_5(v_3) + \\ &+ \theta^2 \Sigma A_1(v_2) A_3(v_3)] \end{aligned}$$

În sumele considerate indicele fiecărui factor se permută circular între numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\text{Notînd: } \Sigma A_1(v_2) A_k(v_3) = A_k(v_2, v_3)$$

Atunci

$$\begin{aligned} sh(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) &= shv_1 [A_1(v_2, v_3) + \theta A_5(v_2, v_3) + \theta^2 A_3(v_2, v_3)] + chv_1 [A_4(v_2, v_3) + \\ &+ \theta A_2(v_2, v_3) + \theta^2 A_6(v_2, v_3)] \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} ch(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) &= shv_1 [A_4(v_2, v_3) + \theta A_2(v_2, v_3) + \theta^2 A_6(v_2, v_3)] + \\ &+ chv_1 [A_1(v_2, v_3) + \theta A_5(v_2, v_3) + \theta^2 A_3(v_2, v_3)] \end{aligned}$$

Ținînd seama de (8) și (9)

$$\begin{aligned} H_2(x) &= e^{b_1 x} \{ \beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \theta [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] + \\ &+ \theta^2 [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \} \{ sha_1 x A_1(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ cha_1 x A_4(a_2 x, a_3 x) + \theta [sha_1 x A_5(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_2(a_2 x, a_3 x)] + \\ &+ \theta^2 [sha_1 x A_3(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_6(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= e^{b_1 x} \{ [\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)] \\ &+ [sha_1 x A_1(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_4(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] \cdot [sha_1 x A_3(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_6(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] [sha_1 x A_5(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_2(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= e^{b_1 x} \{ [\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)] [sha_1 x A_5(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ cha_1 x A_2(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] \cdot \\ &\cdot [sha_1 x A_1(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_4(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \cdot [sha_1 x A_3(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_6(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(x) &= e^{b_1 x} \{ [\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)] \cdot \\ &+ [sha_1 x A_3(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_6(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] \cdot [sha_1 x A_5(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_2(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \cdot [sha_1 x A_1(a_2 x, a_3 x) + cha_1 x A_4(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$K_2(x) = e^{b_1x} [A(b_2x, b_3x) + \theta B(b_2x, b_3x) + \theta^2 C(b_2, b_3x)].$$

$$\{sha_1xA_4(a_2x, a_3x) + cha_1xA_1(a_2x, a_3x)[sha_1xA_2(a_2x, a_3x) + cha_1xA_5(a_2x, a_3x)] \theta + \\ + \theta^2[sha_1xA_6(a_2x, a_3x) + cha_1xA_3(a_2x, a_3x)]\}$$

$$G_1(x) = e^{b_1x} \{A(b_2x, b_3x)[sha_1xA_4(a_2x, a_3x) + cha_1xA_1(a_2x, a_3x)] + B(b_2x, b_3x) \\ [sha_1xA_6(a_2x, a_3x) + cha_1xA_3(a_2x, a_3x)] + C(b_2x, b_3x) \cdot \\ [sha_1xA_2(a_2x, a_3x)] + cha_1xA_5(a_2x, a_3x)\}$$

$$G_2(x) = e^{b_1x} \{A(b_2x, b_3x)[sha_1xA_2(a_2x, a_3x) + cha_1xA_5(a_2x, a_3x)] + B(b_2x, b_3x) \cdot \\ \cdot [sha_1xA_4(a_2x, a_3x) + cha_1xA_1(a_2x, a_3x)] + C(b_2x, b_3x)[sha_1xA_6(a_2x, a_3x) + \\ + cha_1xA_3(a_2x, a_3x)]\}$$

$$G_3(x) = e^{b_1x} \{A(b_2x, b_3x)[sha_1xA_6(a_2x, a_3x) + cha_1xA_3(a_2x, a_3x)] + \\ + B(b_2x, b_3x)[sha_1xA_2(a_2x, a_3x) + cha_1xA_5(a_2x, a_3x)] + \\ + C(b_2x, b_3x)[sha_1xA_4(a_2x, a_3x) + cha_1xA_1(a_2x, a_3x)]\}$$

$$4^\circ H_2(x) = (\beta_1 + \theta\beta_2 + \theta^2\beta_3) e^{(b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3)x} \cdot \sin(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$$

$$K_2(x) = e^{(b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3)x} \cdot \cos(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$$

Pentru determinarea funcțiilor $F_i(x)$ și $G_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) vom exprima $\sin \cdot (a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$, și $\cos(a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3)x$ sub forma $p + \theta m + \theta^2 n$.

Notăm: $a_1x = v_1$, $a_2x = v_2$, $a_3x = v_3$ și cu ajutorul cosinuşilor lui Appell, introducem următoarele funcții [7]:

$$B_6(v) = \frac{A(iv) + A(-iv)}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-6}}{(6n-6)!}$$

$$B_4(v) = \frac{B(iv) + B(-iv)}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-4}}{(6n-4)!}$$

$$B_2(v) = \frac{C(iv) + C(-iv)}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-2}}{(6n-2)!}$$

$$B_3(v) = \frac{A(iv) - A(-iv)}{2i} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-3}}{(6n-3)!}$$

$$B_1(v) = \frac{B(iv) - B(-iv)}{2i} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-1}}{(6n-1)!}$$

$$B_5(v) = \frac{C(iv) - C(-iv)}{2i} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{v^{6n-5}}{(6n-5)!}$$

Urmînd același drum ca și în cazul 3° apar sumele:

$$\Sigma B_1(v_2) B_k(v_3) = B_k(v_2, v_3)$$

$$\Sigma' B_1(v_2) B_k(v_3) = B'_k(v_2, v_3)$$

care se deosebesc de primele prin aceea că termenii din ultima sumă au semnele alternate, termenii cu indicele primului factor par sînt pozitivi, cei cu primul factor impar sînt negativi.

Deci,

$$\begin{aligned} \sin(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) &= \sin v_1 [B'_1(v_2, v_3) + \theta B'_5(v_2, v_3) + \theta^2 B'_3(v_2, v_3)] + \\ &+ \cos v_1 [B_1(v_2, v_3) + \theta B_2(v_2, v_3) + \theta^2 B_6(v_2, v_3)] \\ \cos(v_1 + \theta v_2 + \theta^2 v_3) &= \sin v_1 [B_4(v_2, v_3) + \theta B_2(v_2, v_3) + \theta^2 B_6(v_2, v_3)] + \\ &+ \cos v_1 [B'_1(v_2, v_3) + \theta B'_5(v_2, v_3) + \theta^2 B'_3(v_2, v_3)] \end{aligned} \quad (10)$$

Ținînd cont de relațiile (8) și (10) avem:

$$\begin{aligned} H_2(x) &= e^{b_1 x} \{ \beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x) + \theta [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] + \theta^2 [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \} \{ \sin a_1 x B'_1(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x) + \theta [\sin a_1 x B'_5(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x)] + \theta^2 (\sin a_1 x B'_3(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x)) \} \end{aligned}$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= e^{b_1 x} \{ [\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_1(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_5(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x)] + \\ &+ [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_3(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= e^{b_1 x} \{ [(\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)) [\sin a_1 x B'_5(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] [\sin a_1 x B'_1(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x)] + \\ &+ [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_3(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(x) &= e^{b_1 x} \{ (\beta_1 A(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 B(b_2 x, b_3 x)) [\sin a_1 x B'_3(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x)] + [\beta_1 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 A(b_2 x, b_3 x) + \\ &+ \beta_3 C(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_5(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x)] + \\ &+ [\beta_1 C(b_2 x, b_3 x) + \beta_2 B(b_2 x, b_3 x) + \beta_3 A(b_2 x, b_3 x)] \cdot [\sin a_1 x B'_1(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(x) &= e^{b_1 x} [A(b_2 x, b_3 x) + \theta B(b_2 x, b_3 x) + \theta^2 C(b_2 x, b_3 x)] \{ \sin a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x) + \\ &+ \cos a_1 x B'_1(a_2 x, a_3 x) + \theta [\sin a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B'_5(a_2 x, a_3 x)] + \\ &+ \theta^2 [\sin a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B'_3(a_2 x, a_3 x)] \} \end{aligned}$$

De aici rezultă :

$$\begin{aligned}
 G_1(x) &= e^{b_1 x} \{ A(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_1'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ B(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_3'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ C(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_5'(a_2 x, a_3 x)] \} \\
 G_2(x) &= e^{b_1 x} \{ A(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_5'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ B(b_2 x, b_3 x) \cdot [\sin a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_1'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ C(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_3'(a_2 x, a_3 x)] \}. \\
 G_3(x) &= e^{b_1 x} \{ A(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_6(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_3'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ B(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_2(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_5'(a_2 x, a_3 x)] + \\
 &+ C(b_2 x, b_3 x) [\sin a_1 x B_4(a_2 x, a_3 x) + \cos a_1 x B_1'(a_1 x, a_3 x)] \}
 \end{aligned}$$

În sfârșit ultima soluție :

$$\begin{aligned}
 5^\circ H_2(x) &= (a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3) x e^{(b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3)x} \\
 H_2(x) &= (a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3) x e^{b_1 x} [A(b_2 x, b_3 x) + \theta B(b_2 x, b_3 x) + \theta^2 C(b_2 x, b_3 x)] \\
 F_1(x) &= e^{b_1 x} [a_1 x A(b_2 x, b_3 x) + a_2 x C(b_2 x, b_3 x) + a_3 x B(b_2 x, b_3 x)] \\
 F_2(x) &= e^{b_1 x} [a_1 x B(b_2 x, b_3 x) + a_2 x A(b_2 x, b_3 x) + a_3 x C(b_2 x, b_3 x)] \\
 F_3(x) &= e^{b_1 x} [a_1 x C(b_2 x, b_3 x) + a_2 x B(b_2 x, b_3 x) + a_3 x A(b_2 x, b_3 x)] \\
 K_2(x) &= e^{b_1 x} (b_1 + \theta b_2 + \theta^2 b_3) x \\
 K_2(x) &= e^{b_1 x} \cdot [A(b_2 x, b_3 x) + \theta B(b_2 x, b_3 x) + \theta^2 C(b_2 x, b_3 x)] \\
 G_1(x) &= e^{b_1 x} A(b_2 x, b_3 x) \\
 G_2(x) &= e^{b_1 x} B(b_2 x, b_3 x) \\
 G_3(x) &= e^{b_1 x} C(b_2 x, b_3 x)
 \end{aligned}$$

(Intrat în redacție la 15 februarie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. T h. A n g h e l u ț ă, *Lucrările celei de-a doua sesiuni științifice a S.S.M.F.*, București, 1958, „G.M.F.” seria A, nr. 8.
2. J. A c z é l, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel—Stuttgart—Berlin, 1961 (parag. 3.2.2; 2.5.2 și Bibliografia).
3. S. K u r e p a, „Monatsh. Math.”, 64, 1960, p. 321—329.
4. E. V i n c z e, „Matematikai Lapok”, XII, nr. 1—2, 1961, p. 18—31.
5. O c t. E m. G h e o r g h i u și V. M i o c, *Soluție generală a unui sistem de ecuații funcționale*, „Analele Univ. Timișoara”, Seria mat.-fiz., I, 1963.
6. O. G h e o r g h i u, V. M i o c, B. C r s t i c i, *Generalizarea matricială a unei ecuații funcționale care cuprinde drept caz particular ecuația funcțională D'Alembert-Poisson*, „Comunic. Acad. R.P.R.”, nr. 7, XI, 1961.
7. A. N i c u l a, H. R o ș c ă u, *Generalizarea ecuației funcționale a lui Pompeiu pentru matrici*, „Bul. Inst. Politehnic Cluj”, 8, 1965.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЦ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ,
ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕГО ФУНКЦИИ ЦИРКУЛЯРНЫЙ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ
И ДУАЛЬНЫЙ СИНУС

(Резюме)

Рассматривается матричное функциональное уравнение (3), которое обобщает функциональное уравнение (1), характеризующее циркулярный, гиперболический и дуальный синус, в котором $F(x)$ и $G(x)$ — циркулярные матрицы третьего порядка.

При помощи сопряженной комплексной функции действительного переменного (6) уравнение становится (7), т. е. имеет вид (1).

Получается множество измеримых решений системы (3).

GÉNÉRALISATION A L'AIDE DES MATRICES DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE
CARACTÉRISANT LES FONCTIONS SINUS CIRCULAIRE, HYPERBOLIQUE ET DUAL

(Résumé)

On considère l'équation fonctionnelle matricielle (3) qui généralise l'équation fonctionnelle (1) caractérisant les fonctions sinus circulaire, hyperbolique et dual, où $F(x)$ et $G(x)$ sont les matrices cycliques d'ordre 3.

A l'aide de la fonction complexe conjuguée de variable réelle (6), l'équation devient (7) qui est de forme (1).

On obtient l'ensemble des solutions mesurables du système (3).

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A DISTRIBUȚIEI BETA

de
ILIE TORSAN

1. În această notă se determină unele proprietăți ale distribuției variabilei aleatorii $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, unde X_1 și X_2 sînt variabile aleatorii independente avînd funcția de densitate

$$f(x_i, a_i, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\alpha_i}{(a_i)^{\beta_i/\alpha_i} \Gamma(\beta_i/\alpha_i)} x_i^{\beta_i-1} \exp\left(-\frac{x_i^{\alpha_i}}{a_i}\right) \quad (1)$$

unde $0 < x_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $a_i > 0$
introdusă de T. S r o d k a în [1] și care generalizează distribuția gamma.

Astfel avem

TEOREMA 1. Funcția de densitate a variabilei aleatorii Y este

$$h(y) = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{(a_1)^{\beta_1/\alpha_1} (a_2)^{\beta_2/\alpha_2} \Gamma(\beta_1/\alpha_1) \Gamma(\beta_2/\alpha_2)} y^{\beta_1-1} (1-y)^{\beta_2-1} \int_0^\infty z^{\beta_1+\beta_2-1} \exp\left[-\left(\frac{z^{\alpha_1} y^{\alpha_1}}{a_1} + \frac{z^{\alpha_2} (1-y)^{\alpha_2}}{a_2}\right)\right] dz \quad (2)$$

pentru $0 < y < 1$.

Într-adevăr X_1 și X_2 fiind independente, densitatea lor mixtă de probabilitate este

$$f(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{(a_1)^{\beta_1/\alpha_1} (a_2)^{\beta_2/\alpha_2} \Gamma(\beta_1/\alpha_1) \Gamma(\beta_2/\alpha_2)} x_1^{\beta_1-1} \cdot x_2^{\beta_2-1} \exp\left[-\left(\frac{x_1^{\alpha_1}}{a_1} + \frac{x_2^{\alpha_2}}{a_2}\right)\right]$$

Notînd $Z = X_1 + X_2$ avem că $X_1 = Y \cdot Z$ și $X_2 = Z(1 - Y)$ și cum determinantul funcțional

$$\frac{D(X_1, X_2)}{D(Z, Y)} = -Z$$

rezultă că densitatea mixtă de probabilitate a lui Z și Y este

$$g(z, y) = f[y \cdot z, z(1 - y)]z$$

și cum $0 < x_i < \infty$ pentru $i = 1, 2$ rezultă că $0 < y < 1$ și $0 < z < \infty$ și deci densitatea de probabilitate a lui Y este

$$h(y) = \int_0^{\infty} g(z, y) dz$$

de unde rezultă (2).

Consecința 1. Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ și $a_1 = a_2 = 1$ rezultă din (1) că X_1 și X_2 urmează distribuția gamma și din (2) urmează că Y are densitatea de probabilitate

$$h(y) = \frac{y^{\beta_1-1} (1-y)^{\beta_2-1}}{B(\beta_1, \beta_2)}$$

adică distribuția beta, rezultat cunoscut. (Vezi de exemplu [2].)

Consecința 2. Dacă în (2) avem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ obținem că

$$h(y) = \frac{\alpha}{(a_1)^{\frac{\beta_1}{\alpha}} (a_2)^{\frac{\beta_2}{\alpha}} B\left(\frac{\beta_1}{\alpha}, \frac{\beta_2}{\alpha}\right)} \cdot \frac{y^{\beta_1-1} (1-y)^{\beta_2-1}}{\left[\frac{y^\alpha}{a_1} + \frac{(1-y)^\alpha}{a_2}\right]^{\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}}} \quad (3)$$

TEOREMA 2. Dacă Y_1 și Y_2 sînt două variabile aleatorii independente cu funcțiile de densitate

$$h(y_1, \alpha, a_1, a_2, \beta_1, \beta_2) \text{ și } h(y_2, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2)$$

de forma (3), atunci variabila aleatorie $P = Y_1 \cdot Y_2$ are funcția de densitate

$$f(p) = \frac{\alpha^2}{(a_1)^{\frac{\beta_1}{\alpha}} (a_2)^{\frac{\beta_2}{\alpha}} (b_1)^{\frac{c_1}{\alpha}} (b_2)^{\frac{c_2}{\alpha}} B\left(\frac{\beta_1}{\alpha}, \frac{\beta_2}{\alpha}\right) \cdot B\left(\frac{c_1}{\alpha}, \frac{c_2}{\alpha}\right)} p^{\beta_1-1} (1-p)^{\beta_2+c_2-1} \cdot I \quad (4)$$

unde $0 < p < 1$ și I este următoarea integrală:

$$I = \int_0^1 \frac{[\lambda(1-p) + p]^{c_1} \lambda^{\beta_2-1} (1-\lambda)^{c_2-1}}{\left[\frac{p^\alpha}{a_1} + \frac{\lambda^\alpha (1-p)^\alpha}{a_2}\right]^{\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}} \left[\frac{(\lambda(1-p) + p)^\alpha}{b_1} + \frac{(1-\lambda)^\alpha (1-p)^\alpha}{b_2}\right]^{\frac{c_1+c_2}{\alpha}}} d\lambda \quad (5)$$

unde $\lambda = \frac{y_2 - p}{1 - p}$.

Demonstrație. Variabilele Y_1 și Y_2 fiind independente, densitatea mixtă de probabilitate a lui Y_1 și Y_2 este

$$g(y_1, y_2) = h(y_1, \alpha, a_1, a_2, \beta_1, \beta_2) \cdot h(y_2, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2)$$

notînd $Y_1 = \frac{P}{Y_2}$ și $Y_2 = Y_2$ și țînînd seama de valoarea determinantului funcțional

$$\left| \frac{D(y_1, y_2)}{D(p, y_2)} \right| = \frac{1}{y_2}$$

rezultă că densitatea mixtă de probabilitate a cuplului (P, Y_2) este

$$h(p, y_2) = g\left(\frac{p}{y_2}, y_2\right) \cdot \frac{1}{y_2}$$

de unde rezultă că densitatea de probabilitate a variabilei P este :

$$f(p) = \int_p^1 h(p, y_2) dy_2 = \int_p^1 g\left(\frac{p}{y_2}, y_2\right) \frac{1}{y_2} dy_2 \quad (6)$$

și dacă în această expresie notăm $y_2 - p = \lambda(1-p)$ și $1 - y_2 = (1-p)(1-\lambda)$; de unde $0 < \lambda < 1$, atunci din (6) rezultă (4) și teorema este demonstrată.

Consecința 1. Dacă în teorema 2 considerăm că $c_1 = \beta_1 + \beta_2$, $\alpha = 1$ și $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$, rezultă că Y_1 are distribuția beta, $B(\beta_1, \beta_2)$, Y_2 are distribuția beta $B(\beta_1 + \beta_2, c_2)$ iar variabila $P = Y_1 \cdot Y_2$ are distribuția cu funcția de densitate

$$f(p) = \frac{p^{\beta_1-1} (1-p)^{\beta_2+c_2-1}}{B(\beta_1, \beta_2 + c_2)} \quad 0 < p < 1$$

deci tot o distribuție beta $B(\beta_1, \beta_2 + c_2)$. Aceasta constituie un rezultat dat de **Jambunathan** în [3].

2. Să considerăm ecuația diferențială a curbelor lui Pearson :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-C)y}{C_0 + C_1x + C_2x^2} \quad (7)$$

unde c, c_0, c_1, c_2 sînt constante care pot fi exprimate în funcție de primele patru momente ale repartiției, iar constanta de integrare determinîndu-se din condiția :

$$k \int_H g(x) dx = 1$$

H fiind mulțimea intervalelor pentru care $kg(x) \geq 0$.

Particularizînd valorile parametrilor α_i și β_i din teoremele de mai sus se pot obține diferite tipuri de curbe Pearson. Astfel avem

TEOREMA 3. Dacă X_1 și X_2 sînt două variabile aleatorii normale cu mediile egale cu zero și dispersiile $\sigma_i^2 = \frac{a_i}{2}$ ($i = 1, 2$), atunci variabila aleatorie $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ urmează o distribuție Pearson de tip 4.

Demonstrație. Considerînd în (1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ și $\beta_1 = \beta_2 = 1$, rezultă că X_1 și X_2 sînt normale cu $E(X_i) = 0$ și $\sigma_i^2 = \frac{a_i}{2}$ ($i = 1, 2$), și atunci din (3) rezultă că variabila aleatorie Y are funcția de densitate :

$$h(y) = \frac{2\sqrt{a_1 \cdot a_2}}{\pi} \cdot \frac{1}{[a_2 y^2 + a_1(1-y)^2]} \quad (8)$$

care verifică ecuația diferențială

$$h'(y) = \frac{\left[y - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right] h(y)}{\left[-\frac{a_1}{2(a_1 + a_2)} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} y - \frac{1}{2} y^2 \right]} \quad (9)$$

și deoarece $a_1 > 0$; $a_2 > 0$, rezultă că numitorul are rădăcini complexe, caz care coincide cu curbele Pearson tip 4.

Folosind relațiile dintre constantele C_0, C_1, C_2, C ale ecuației (9) și primele patru momente ale repartiției variabilei Y avem

$$D^2(Y) = \frac{1}{5} \cdot \frac{D^2(X_1)}{D^2(X_1) + D^2(X_2)}; \quad \beta_1(Y) = -\frac{4\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{D^2(X_1)}{D^2(X_1) + D^2(X_2)}} \quad (10)$$

unde $\beta_1(Y)$ este coeficientul de asimetrie. Deoarece $\beta_1(Y) < 0$, rezultă că distribuția variabilei Y prezintă o asimetrie la stînga.

TEOREMA 4. Dacă X_1 are distribuția gamma și X_2 are distribuția exponențială, atunci variabila aleatorie Y are o distribuție Pearson de tip 1.

(Intrat în redacție la 25 ianuarie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. T. Srodka, *On the distribution of product and ratio of powers of two independent random variables with the generalized gamma, Maxwell and Weibull distribution*, „Rocz. polsk. Tow. mat., Pracemat.” (1967), 11, nr. 1 pp. 77–85.
2. G. Mihoș – D. Fîrescu, *Statistică matematică*. Ed. didact. și pedagog., București (1966) pag. 120.
3. V. Jambunathan, *Some properties of beta and gamma distributions*. „Ann. math. Statist.” (25) nr. 2, (1954), pp. 401–405.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ β РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Резюме)

Полагая, что случайная переменная X_i имеет функцию плотности (1), где $0 < x_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $a_i > 0$, автор статьи определяет при помощи теоремы 1 функцию плотности случайной переменной $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ в предположении, что X_1 и X_2 — независимые случайные переменные, и показывает, что она является обобщением β распределения. В дальнейшем определяется при помощи теоремы 2 функция плотности случайной переменной $P = Y_1 \cdot Y_2$ в предположении, что Y_1 и Y_2 независимы, имея функцию плотности

$$h(y_1, \alpha, a_1, a_2, \beta_1, \beta_2); \quad h(y_2, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2) \text{ вида (3).}$$

Теоремы 3 и 4 делают связь между распределением переменной Y с функцией плотности вида (2) и кривыми Пирсона, охарактеризованными дифференциальным уравнением (7).

SUR LA GÉNÉRALISATION DE LA DISTRIBUTION BÉTA

(Résumé)

Considérant que la variable aléatoire X_i a pour densité de probabilité (1) où $0 < x_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $a_i > 0$, on détermine dans le présent travail, à l'aide du *Théorème 1*, la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ dans l'hypothèse où X_1 et X_2 sont indépendants et ont la

distribution (1), et l'on montre qu'elle constitue une généralisation de la distribution Béta. On détermine ensuite, à l'aide du *théorème 2*, la densité de probabilité de la variable aléatoire $P = Y_1 \cdot Y_2$ dans l'hypothèse où Y_1 et Y_2 sont indépendants, ayant les densités de probabilité

$$h(y_1, \alpha, a_1, a_2, \beta_1, \beta_2); \quad h(y_2, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2)$$

de forme (3).

Le *théorème 3* et le *théorème 4* font la liaison entre la distribution de la variable Y de forme (2) et les courbes Pearson caractérisées par l'équation différentielle (9).

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR COMPLEXE PRIN METODA IPERBOLELOR TANGENTE

de
M. BALÁZS

Fie ecuația

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

unde $P(x)$ este o funcție de o variabilă complexă (sau reală) definită într-un domeniu convex D . Să presupunem mai departe că funcția $P(x)$ are derivate pînă la ordinul trei inclusiv.

În lucrarea noastră [3] am studiat rezolvarea ecuației (1) prin metoda iperbolelor tangente arătînd o îmbunătățire a condițiilor folosite de G. S. S a l e h o v în lucrarea sa [1] pentru rezolvarea ecuației (1) cu aceeași metodă.

În lucrarea de față vom stabili teoreme referitoare la existența, respectiv la unicitatea soluției ecuației (1) în condițiile analoge condițiilor puse în lucrarea noastră [2] în care am studiat rezolvarea ecuațiilor operaționale nelineare în spații lineare normate. Observăm că în lucrarea [2] n-am reușit să dăm condiții în care ecuația să aibă o singură soluție.

TEOREMA 1. *Dacă există un punct $x_0 \in D$ astfel încît următoarele condiții să fie satisfăcute:*

$$1^\circ P'(x_0) \text{ are inversă } \Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1} \text{ și } |\Gamma_0| \leq B_0;$$

$$2^\circ |\Gamma_0 P(x_0)| \leq \bar{\eta}_0;$$

$$3^\circ |P''(x)| \leq M, |P'''(x)| \leq N \text{ pentru orice punct } x \text{ din cercul } C : |x - x_0| \leq \frac{16}{9} \bar{\eta}_0;$$

$$4^\circ \bar{h}_0 = B_0 M \bar{\eta}_0 \leq \frac{1}{2};$$

$$5^\circ \bar{a}_0 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{N}{3B_0M^2}}{\left(1 - \frac{3}{2} \bar{h}_0\right) \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)^2} \leq 2$$

atunci ecuația (1) are o soluție x^* în cercul C către care converge șirul (x_n) definit de formula de recurență

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2P'(x_n)P(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)} = x_n - \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)\right]^{-1} \Gamma_n P(x_n) \quad (2)$$

și rapiditatea convergenței este caracterizată de inegalitatea

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} 2^{1-2n} (2\bar{h}_0)^{3^n - 1}$$

Demonstrație. Arătăm că trecînd de la x_0 la x_1 , de la x_1 la x_2 , etc. condițiile $1^\circ - 5^\circ$ ale teoremei rămîn valabile.

a) Deoarece

$$\left| \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} B_0 M \bar{\eta}_0 = \frac{\bar{h}_0}{2} \leq \frac{1}{4},$$

există $\left[1 - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1}$ și avem

$$\left| \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0}$$

Din formula (2), dacă $n = 0$, obținem

$$|x_1 - x_0| \leq \left| \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \right| \cdot |\Gamma_0 P(x_0)| \leq \frac{\bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} \quad (3)$$

Folosind relația (3) din formula lui Lagrange obținem

$$|\Gamma_0 P'(x_0) - \Gamma_0 P'(x_1)| \leq B_0 M |x_1 - x_0| \leq \frac{B_0 M \bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} = \frac{\bar{h}_0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0}$$

de unde rezultă că $H_0 = \{1 - [\Gamma_0 P'(x_0) - \Gamma_0 P'(x_1)]\}^{-1}$ există și

$$|H_0| \leq \frac{1}{1 - \frac{1 - \bar{h}_0}{\frac{1}{2} \bar{h}_0}}$$

Din identitatea evidentă $H_0 \Gamma_0 = \Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$, rezultă că Γ_1 există și avem

$$\frac{B_0}{1 - \frac{2\bar{h}_0}{2 - \bar{h}_0}} = B_1$$

adică condiția 1° este satisfăcută pentru x_1 .

b) Să considerăm următoarea funcție ajutătoare (vezi [3]):

$$F_{u,v,w}(x) = x + \frac{P(x)}{2[P'(u)]^2 - P''(u)P(u)} [-2P'(u) + P''(u)(x-u)] - \frac{P''(u)P'''(v)(x-u)^3(x-v)^3(x-w)}{6(v-u)^2(v-w) \cdot \{2[P'(u)]^2 - P''(u)P(u)\}} \quad (4)$$

unde u, v, w sînt puncte arbitrare ($u \neq v, v \neq w$) din cercul C .

În lucrarea noastră citată [3] am demonstrat următoarele proprietăți ale funcției $F_{v, v, w}(x)$:

- 1° $F_{x_0, v, w}(x_0) = x_1$, pentru orice $v, w \in C$;
- 2° $F_{x_0, v, x_1}(x_1) = x_1 - \frac{4[P'(x_0)]^2 P(x_1)}{\{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)\}^2}$, pentru orice $v \in C$;
- 3° $F'_{x_0, v, w}(x_0) = 0$; $F''_{x_0, v, w}(x_0) = 0$; pentru orice $v, w \in C$;
- 4° $F'''_{x_0, v, w}(v) = \frac{-2P'''(v)P'(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)} + \frac{3P'''(v)P''(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)}$

pentru orice $v, w \in C$.

Să scriem formula lui Taylor pentru funcția $F_{x_0, v, x_1}(x)$, unde v este un punct arbitrar din C .

$$F_{x_0, v, x_1}(x_1) = F_{x_0, v, x_1}(x_0) + \frac{1}{6} F'''_{x_0, v, x_1}(\xi_0)(x_1 - x_0)^3 \tag{5}$$

Din (5) dacă punem $v = \xi_0$ obținem

$$\frac{P(x_1)}{P'(x_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{P''(x_0)P(x_0)}{[P'(x_0)]^2}} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{P'''(\xi_0)}{P'(x_0)} - \frac{3}{2} \frac{P''(\xi_0)P''(x_0)}{[P'(x_0)]^2} \right\} (x_1 - x_0)^3$$

le unde

$$|\Gamma_0 P(x_1)| \leq \left(\frac{B_0 N}{6} + \frac{1}{4} B_0^2 M^2 \right) |x_1 - x_0|^3 \leq \frac{\bar{h}_0^2 \bar{\eta}_0}{\left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)^3} \left(\frac{N}{6B_0 M^2} + \frac{1}{4} \right) \tag{6}$$

deoarece avem $\Gamma_1 P(x_1) = H_0 \Gamma_0 P(x_1)$, rezultă

$$|\Gamma_1 P(x_1)| \leq \frac{\bar{h}_0^2 \bar{\eta}_0}{\left(1 - \frac{3}{2} \bar{h}_0\right) \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{N}{6B_0 M^2} \right) = \bar{\eta}_1 \tag{7}$$

cea ce înseamnă că condiția 2° este satisfăcută pentru x_1 .

Din relația (7) folosind 5° obținem următoarea inegalitate

$$\bar{\eta}_1 \leq \bar{h}_0^2 \bar{\eta}_0 \leq \frac{1}{4} \bar{\eta}_0 \tag{8}$$

c) Verificarea condiției 3° se face pentru cazul general mai târziu.

d) Pe baza inegalității (8) folosind notația introdusă pentru B_1 avem

$$\bar{h}_1 = B_1 M \bar{\eta}_1 \leq 4\bar{h}_0^3 \leq \bar{h}_0 \leq \frac{1}{2} \tag{9}$$

leci și condiția 4° este satisfăcută pentru x_1 .

e) Din expresia lui B_1 rezultă că $B_1 > B_0$. Pe baza acestei inegalități folosind relația (9) avem

$$\bar{a}_1 \leq \bar{a}_0 \leq 2$$

leci și condiția 5° este satisfăcută pentru x_1 .

Înșădar, am constatat că condițiile 1° - 5° sînt satisfăcute pentru x_1 , dacă constantele $B_0, \bar{\eta}_0, \bar{h}_0, \bar{a}_0$ se înlocuiesc respectiv cu $B_1, \bar{\eta}_1, \bar{h}_1, \bar{a}_1$.

Prin metoda inducției complete se demonstrează ușor următoarele relații

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - \frac{2\bar{h}_0}{2-\bar{h}_0}} \leq 4B_{n-1} \text{ și } B_n > B_{n+1};$$

$$\bar{\eta}_n \leq \bar{h}_{n-1}^2 \bar{\eta}_{n-1} \leq \frac{1}{4} \bar{\eta}_{n-1}, \text{ unde } |\Gamma_n P(x_n)| \leq \bar{\eta}_n; \quad (10)$$

$$\bar{h}_n \leq 4\bar{h}_{n-1}^2 \leq \bar{h}_{n-1}, \text{ unde } \bar{h}_n = B_n M \bar{\eta}_n;$$

$$\bar{a}_n \leq 2 \text{ și } \bar{a}_n \leq \bar{a}_{n-1}.$$

Din a doua și a treia inegalitate a relațiilor (10) rezultă

$$\bar{\eta}_n \leq 2^{-2^n} (2\bar{h}_0)^{3^n-1} \bar{\eta}_0 \quad (11)$$

Folosind formula (2) obținem

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\bar{\eta}_n}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} \quad (12)$$

de unde pe baza formulei (11) avem

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{\bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} 2^{1-2^n} (2\bar{h}_0)^{3^n-1} (1 - 2^{2^p}) \quad (13)$$

Din (13) rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Dacă în inegalitatea (13) trecem la limită când $p \rightarrow \infty$, obținem inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenței și delimitarea aproximației x_n .

În sfârșit să arătăm că x_n și ξ_{n-1} pentru $n = 1, 2, \dots$ se găsesc în cercul $C(\xi_{n-1} = x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1}), 0 < \theta < 1)$; în adevăr, din relațiile (10) și (12) avem

$$|x_0 - x_n| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} (\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_1 + \dots + \bar{\eta}_{n-1}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0} \left(\bar{\eta}_0 + \frac{\bar{\eta}_0}{4} + \dots + \frac{\bar{\eta}_0}{4^{n-1}} \right) \leq \frac{16}{9} \bar{\eta}_0.$$

și deoarece $|\xi_{n-1} - x_{n-1}| < |x_n - x_{n-1}|$ avem și

$$|x_n - \xi_{n-1}| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - \xi_{n-1}| \leq |x_0 - x_1| + \\ + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - x_n| < \frac{16}{9} \bar{\eta}_0$$

ceea ce era de demonstrat.

Avem inegalitatea analogă cu (5)

$$|P(x_{n+1})| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\bar{h}_n^2 \bar{\eta}_n}{B_n} \left(1 + \frac{N}{6B_n M^2}\right)$$

de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} |P(x_n)| = 0$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$; pe baza continuității funcției $P(x)$ avem deci $P(x^*) = 0$, adică x^* este rădăcina ecuației $P(x) = 0$.

Observație. Menționăm că condiția $\bar{a}_0 \leq 2$ este mai puțin restrictivă decât condiția analogă $\sigma_0 \leq 2$ din lucrarea [2].

TEOREMA 2. *Dacă condițiile 1°—5° ale teoremei 1 sînt satisfăcute, atunci singura soluție a ecuației (1) în cercul $C_1: |x - x_0| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\eta}_0$ este soluția către care converge șirul definit de relația (2).*

Demonstrație. Fie τ o soluție oarecare a ecuației $P(x) = 0$ din cercul C_1 și să considerăm funcția ajutătoare (4)

$$F_{x_n, v, \tau}(x) = x + \frac{P(x)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)} [-2P'(x_n) + P''(x_n)(x - x_n)] - \frac{P''(x_n)P'''(v)(x - x_n)^2(x - v)^2(x - \tau)}{6(v - x_n)^2(v - \tau)\{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)\}}$$

unde v este un punct arbitrar din cercul C_1 diferit de τ și de aproximațiile x_n definite de relația (2). Avem în mod evident

$$F_{x_n, v, \tau}(x_n) = x_{i+1}; F_{x_n, v, \tau}(\tau) = \tau; F'_{x_n, v, \tau}(x_n) = 0;$$

$$F''_{x_n, v, \tau}(x_n) = 0 \text{ și } F'''_{x_n, v, \tau}(v) = \frac{-2P'''(v)P'(x_n) + 3P''(v)P''(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)}$$

Aplicînd formula lui Taylor la funcția $F_{x_n, v, \tau}(x)$ obținem

$$F_{x_n, v, \tau}(\tau) = F_{x_n, v, \tau}(x_n) + \frac{1}{6} F'''_{x_n, v, \tau}(\bar{\xi}_n)(\tau - x_n)^3$$

unde $\bar{\xi}_n = x_n + \theta_n(\tau - x_n)$. De aici, dacă punem $v = \bar{\xi}_n$, obținem

$$\tau - x_{n+1} = \frac{1}{6} \frac{-2P'''(\bar{\xi}_n)P'(x_n) + 3P''(\bar{\xi}_n)P''(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)} (\tau - x_n)^3 \quad (14)$$

Din formula (14), folosind condiția 5° și inegalitatea $B_n \leq 4B_{n-1}$ avem

$$|\tau - x_{n+1}| \leq \frac{4}{3} B_n^2 M^2 |\tau - x_n|^3 \leq \frac{1}{3\bar{\eta}_0^2} 4^{2n} |\tau - x_n|^3 \quad (15)$$

Folosind notația $|\tau - x_0| \leq \rho \bar{\eta}_0$ din relația (15), se obține ușor prin metoda inducției complete că

$$|\tau - x_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{3}}{8} 4^{-n} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \rho\right)^{3^{n+1}} \bar{\eta}_0.$$

Prin urmare, dacă $\rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau - x_{n+1}) = 0$, adică $\tau = x^*$ și teorema este demonstrată.

(Intrat în redacție la 24 septembrie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. Salehov G. S., *O shodimosti professa kasatelnih ghiperbol*, „DAN SSSR”, **88**, 4, 525—528 (1952).
2. B. Jankó și M. Balázs, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale nelineare prin metoda iperbolelor tangente*. „Studii și cercetări matematice”, 6, **18** (1966), 817—828.
3. M. Balázs, *Despre rezolvarea ecuațiilor prin metoda iperbolelor tangente*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai”, Math.-Phys. 1/1968.

О РЕШЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ
ГИПЕРБОЛ
(Резюме)

Методом касательных гипербол изучается решение уравнений $P(x) = 0$, где $P(x)$ — комплексная или вещественная функция. Установлены новые условия существования и единственности решения уравнения.

SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS COMPLEXES PAR LA
MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES

(Résumé)

L'auteur étudie la résolution des équations $P(x) = 0$, où $P(x)$ est une fonction complexe ou réelle, par la méthode des hyperboles tangentes. Il établit de nouvelles conditions d'existence et d'unicité pour la solution de l'équation.

ASUPRA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE

de
PARASCHIVA PAVEL

1. O extensiune naturală a ecuației funcționale a lui D. Pompeiu

$$f' \left(\frac{a+b}{2} \right) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

a fost dată de D. V. Ionescu [1] care a dedus noi ecuații funcționale și a stabilit o legătură între aceste noi ecuații funcționale și formulele de cuadratură ale lui Gauss și P. Turán [6].

În cele ce urmează, reluând ideea lui D. V. Ionescu, se vor studia alte ecuații funcționale, stabilind o legătură între ele și formulele de cuadratură de tip Gauss generalizate.

2. Se consideră ecuația funcțională

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(x_i) \quad (2)$$

în care coeficienții $A_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$ și nodurile x_1, x_2, \dots, x_n se determină astfel ca ecuația să fie verificată de $1, x, \dots, x^N$; unde

$$N = r_1 + r_2 + \dots + r_n + n \quad (3)$$

iar r_1, r_2, \dots, r_n sînt numere impare date.

Ecuația funcțională (2) se poate scrie sub forma

$$\int_a^b f'(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(x_i) \quad (2')$$

și problema pusă asupra acestei ecuații funcționale, este de fapt aceea de a determina nodurile și coeficienții formulei de cuadratură (2'), astfel ca ea să aibă gradul de exactitate N .

3. Se rezolvă ecuația funcțională (2), căutîndu-se soluția ei în clasa funcțiilor $C^{N+1}[a, b]$.

În [4] s-a demonstrat că se pot determina coeficienții, nodurile și restul formulei de cuadratură:

$$\int_a^b g(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} g^{(j)}(x_i) + R \quad (4)$$

cu ajutorul unei probleme la limită, pentru un sistem de ecuații diferențiale
Pentru rest s-a obținut expresia :

$$R = \int_a^b \varphi(x) g^{(N)}(x) dx \quad (5)$$

demonstrându-se că funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b) .

În general, pentru o funcție de clasa $C^{N+1} [a, b]$, avem

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(x_i) + \int_a^b \varphi(x) f^{(N+1)}(x) dx. \quad (6)$$

Dacă $f(x)$ este soluție a ecuației funcționale (2), atunci

$$\int_a^b \varphi(x) f^{(N+1)}(x) dx = 0$$

oricare ar fi a și b .

Deoarece funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b) , vom avea, oricare a fi a și b :

$$f^{(N+1)}(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că f este un polinom oarecare de grad cel mult N .

Deci, soluția cea mai generală a ecuației funcționale (2) în clasa $C^{N+1} [a, b]$ \hat{p} tot intervalul $[a, b]$, este un polinom de grad cel mult N .

(Intrat în redacție la 1 iunie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Asupra citorva extensiuni ale ecuației funcționale a lui D. Pompeiu*. Comunicare prezentată la sesiunile de comunicări ale Facultății de matematică-mecanică ale Univ. „Babe Bolyai” Cluj.
2. T. Popoviciu, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. „Stuc și cerc. șt. Iași”, **6**, 1955, pp. 29–57.
3. P. Pavel, *On the Remainder of Some Gaussian Formulae*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai” Clu 1967, fsc. 2, pp. 65–70.
4. P. Pavel, *Asupra unei formule de cuadratură de tip Gauss*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai” Clu 1968, fsc. 1, pp. 51–57.
5. L. Tchahalooff, *General Quadrature Formulas of Gaussian Type*. „Bulgar. Akad. Nauk, Iz Mat. Inst.”, **1** (1954), pp. 67–84.
6. P. Turán, *On the Theory of the Mechanical Quadrature*. „Acta Sci. Math.” (Szeged), **12** (1956) pp. 30–37.

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Резюме)

В работе рассматривается функциональное уравнение (2)

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(x_i)$$

в котором коэффициенты $A_i^{(j)}$ $i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, r_i - 1$ и узлы x_1, x_2, \dots, x_n определяют так, чтобы оно было верным для $1, x, \dots, x^N$, где $N = r_1 + r_2 + \dots + r_n$, a, r_1, r_2, \dots, r_n — данные нечётные числа.

Автор доказывает, делая связь с квадратурными формулами типа Гаусса, что наиболее общее решение этого функционального уравнения в классе $C^{N+1}[a, b]$ на всём промежутке $[a, b]$ является произвольным многочленом, степень которого меньше или равна N , каким бы ни был a и b .

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

(R é s u m é)

Dans le présent article on considère l'équation fonctionnelle (2)

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i^{(j)} f^{(j+1)}(x_i)$$

dans laquelle les coefficients A_i , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$ et les noeuds x_1, x_2, \dots, x_n sont déterminés de façon qu'elle soit vérifiée par $1, x, \dots, x^N$ où $N = r_1 + r_2 + \dots + r_n + n$ et r_1, r_2, \dots, r_n sont des nombres impairs donnés.

On démontre, en établissant la liaison avec les formules de quadrature de type Gauss, que la solution la plus générale de cette équation fonctionnelle dans la classe $C^{N+1}[a, b]$ sur tout l'intervalle $[a, b]$ est un polynome quelconque de degré égal au plus à N , quels que soient a et b .

CONTRIBUȚII LA INTERPREȚAREA CURBELOR DE LUMINĂ ALE SISTEMELOR BINARE STRÎNSE (I)

Forma componentelor

de

VASILE URECHE

1. *Introducere.* Importanța studiului variației strălucirii stelelor duble fotometrice este bine cunoscută [8]. Analiza acestei variații permite deducerea unora din datele fundamentale ale stelelor care compun sistemele duble, ca: dimensiunile componentelor luminozitățile lor, etc. Cantitatea de informații care rezultă dintr-o asemenea analiză depinde de precizia observațiilor, de justetea interpretării lor și de finețea analizei teoretice.

Metodele existente de calculare a elementelor orbitale ale sistemelor duble fotometrice se bazează pe modelul sferic sau consideră componentele elipsoizi asemenea [8, 14]. În ultimul caz, curba de lumină a sistemului format din componente deformate se caută să se reducă la o curbă de lumină echivalentă, corespunzătoare unui sistem format din componente sferice, prin așa-numitul procedeu de „rectificare”. Neajunsurile „rectificării” au fost scoase în evidență încă de K o p a l [6]. De asemenea K o p a l [7] a semnalat necesitatea elaborării unor metode noi pentru calculul elementelor orbitale ale sistemelor binare strînse, mai ales pentru sistemele semidetașate și în contact, la care metodele clasice nu dau rezultate satisfăcătoare.

Pe această linie se înscriu lucrările lui K ř i ž [9] și ale lui H o r á k [2, 3] care propun metode noi de calculare a elementelor orbitale, pe baza modelului sferă-elipsoid. Aceste metode dau o bună aproximație pentru sistemele semidetașate. Dar metoda lui K ř i ž este valabilă numai pentru eclipse centrale ($i = 90^\circ$). Apoi atât în metoda lui K ř i ž, cât și în metoda lui H o r á k se neglijează variația de lumină din cursul minimumului secundar. Deci soluția astfel obținută se va putea considera satisfăcătoare numai dacă adâncimea minimumului secundar este neînsemnată.

De aceea mi-am propus să elaborez o metodă de interpretare a curbelor de lumină ale stelelor binare strînse care să țină mai bine seama de realitatea fizică. În acest scop voi pleca de la următoarele ipoteze de bază:

1° Sistemele binare strînse se caracterizează printr-un înalt grad de concentrare a materiei spre centrele componentelor, încît este valabil modelul Roche.

2° Orbita relativă este circulară.

3° Rotația componentelor este sincronă cu revoluția, iar axele de rotație sînt perpendiculare pe planul orbitei.

4° Întunecarea spre margine este descrisă de la legea liniară a cosinusului, iar întunecarea gravifică, de teorema lui von Zeipel.

În lucrarea de față mă voi ocupa de forma componentelor sistemului binar.

2. *Suprafețele echipotențiale Roche.* În interpretarea curbelor de lumină ale sistemelor binare strânse, alegerea modelului geometric pentru cele două componente este fundamentală. Pentru a obține rezultate conforme cu observațiile, acest model trebuie să fie cât mai apropiat de forma reală a componentelor. Întrucât sistemele binare fotometrice se caracterizează printr-un înalt grad de concentrare a materiei spre centru [10, 11, 13], în deducerea formei componentelor voi pleca de la modelul Roche; considerând masele componentelor esențial concentrate în centrele lor.

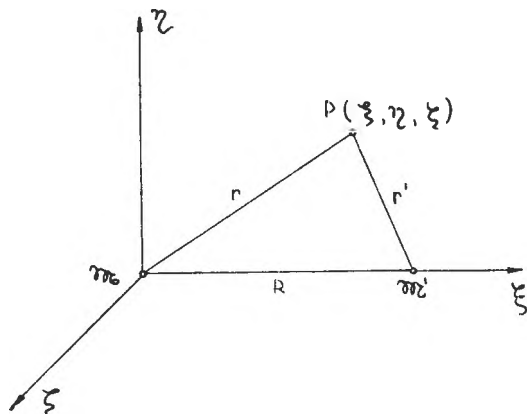


Fig. 1.

Atunci fie \mathcal{M} — masa componentei principale (mai masive), \mathcal{M}' masa componentei secundare și $R = 1$ distanța dintre ele. Fie $\mathcal{M} \xi \eta \zeta$ un sistem rectangular de axe, cu originea în centrul componentei de masă \mathcal{M} și fiind orientat ca în fig. 1 în care planul $\xi \mathcal{M} \eta$ este planul orbitei.

Atașând sistemului de coordonate rectangulare ξ, η, ζ , sistemul de coordonate sferice corespunzătoare r, θ, Φ , legate prin relațiile :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \sin \theta \cos \Phi = r \lambda \\ \eta &= r \sin \theta \sin \Phi = r \mu \\ \zeta &= r \cos \theta = r \nu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

și utilizând legea a treia a lui Kepler generalizată :

$$\omega^2 = G \frac{\mathcal{M} + \mathcal{M}'}{R^3} \quad (2)$$

(ω — fiind viteza unghiulară kepleriană, iar G — constanta atracției universale.), Kopal [8] arată că potențialul normalizat într-un punct $P(\xi, \eta, \zeta) \equiv P(r, \theta, \Phi)$ are expresia :

$$\Omega = \frac{1}{r} + q \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda r + r^2}} - \lambda r \right\} + \frac{q+1}{2} (1 - \nu^2) r^2 \quad (3)$$

unde Ω este potențialul normalizat, iar $q = \mathcal{M}'/\mathcal{M}$. Suprafețele $\Omega = \text{const.}$ sînt suprafețele echipotențiale Roche.

3. Forma componentelor.

a) *Componenta principală.* Considerînd $\Omega = \text{const.}$ în ecuația (3) și rezolvînd-o în raport cu r vom obține :

$$r = r(\lambda, \nu) \quad (4)$$

care reprezintă ecuația unui oval din jurul lui \mathcal{M} . Dacă $\Omega (\Omega > \Omega_1)$ potențialul normalizat critic) coincide cu valoarea Ω^* a potențialului normalizat pe supra-

fața componentei principale, atunci ecuația (4) va fi chiar ecuația care descrie forma suprafeței acestei componente. Dar ecuația (3) este de gradul opt în r , astfel că găsirea unei soluții analitice este imposibilă [8]. De aceea va trebui să ne mulțumim cu o soluție aproximativă, oprindu-ne la o aproximație corespunzătoare preciziei fotometriei fotoelectrice moderne.

Dezvoltând membrul doi al ecuației (3) în serie cu ajutorul polinoamelor lui Legendre, K o p a l [8] pune această ecuație sub forma :

$$(\Omega - q)r = 1 + q \sum_{j=2}^{\infty} r^{j+1} P_j(\lambda) + \frac{q+1}{2} r^3 (1 - v^2) \tag{5}$$

unde $P_j(\lambda)$, ($j = 2, 3, \dots$), sînt polinoamele lui Legendre.

Dacă r este mic față de R (dimensiunile componentelor sînt mici în raport cu distanța dintre ele), atunci neglijînd în ecuația (5) termenii de ordin superior, obținem :

$$r_0 = \frac{1}{\Omega - q} \tag{6}$$

Ecuația (6) dă prima aproximație pentru forma componentei principale : anume aceasta va fi o sferă de rază r_0 .

Să calculăm aproximația următoare, introducînd în membrul doi al ecuației (5) în locul lui r pe r_0 . Obținem :

$$r = r_0 \left\{ 1 + q \sum_{j=2}^{\infty} r_0^{j+1} P_j(\lambda) + \frac{1+q}{2} r_0^3 (1 - v^2) \right\} \tag{7}$$

Dacă în ecuația (7) neglijăm suma

$$q \sum_{j=3}^{\infty} r_0^{j+2} P_j(\lambda) \tag{8}$$

obținem :

$$r = r_0 \left\{ 1 + q r_0^3 P_2(\lambda) + \frac{1+q}{2} r_0^3 (1 - v^2) \right\} \tag{9}$$

În cele ce urmează mă voi opri la aproximația (9). Eroarea comisă în curba teoretică de lumină prin neglijarea sumei (8) va fi evaluată mai tîrziu (în paragraful 4.).

Introducînd în ecuația (9) expresia cunoscută a lui $P_2(\lambda)$ și utilizînd ecuațiile (1), se găsește ușor că ecuația (9) este echivalentă (în limitele aproximației considerate, în care suma (8) este neglijabilă) cu ecuația :

$$r = r_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} q r_0^3 \left(\frac{\xi}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{2} (1+q) r_0^3 \left(\frac{\zeta}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{2} r_0^3 \right\} \tag{10}$$

Dar $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, încît (cu aceeași precizie) ecuația (10) se poate pune sub forma :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{11}$$

Ecuatia (11) reprezintă un elipsoid, ale cărui semiaxe sînt:

$$\left. \begin{aligned} a &= r_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} r_0^3 + \frac{3}{2} q r_0^3 \right\} \\ b &= r_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} r_0^3 \right\} \\ c &= r_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} r_0^3 - \frac{1}{2} (1+q) r_0^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Mărimea r_0 nu este accesibilă direct observațiilor. Însă dacă curba de lumină a unui sistem binar strîns este interpretată pe baza modelului sferic, raza astfel obținută, numită uneori „rază fotometrică” [7, 12], coincide practic cu semiaxa mijlocie b a stelei considerate. De aceea mai departe voi exprima semiaxele a și c cu ajutorul semiaxei b . Din a doua ecuație (12) rezultă (cu precizia considerată)

$$r_0 = b \left\{ 1 - \frac{1}{2} b^3 \right\} \quad (13)$$

deci ecuațiile (12) devin:

$$a = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} q b^3 \right\}, \quad b = b, \quad c = b \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1+q) b^3 \right\} \quad (14)$$

Introducînd expresia (13) în ecuația (10) găsim:

$$r = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} q b^3 \left(\frac{\xi}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} (1+q) b^3 \left(\frac{\zeta}{b} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

În cele ce urmează voi considera că forma componentei principale este descrisă de ecuația (15) care poate fi reprezentată prin elipsoidul de ecuație (11) ale cărui semiaxe sînt legate prin relațiile (14).

b) *Componenta secundară.* Printr-un raționament analog celui precedent se arată că forma componentei secundare poate fi aproximată cu aceeași precizie prin elipsoidul de ecuație

$$\frac{(1-\xi)^2}{a'^2} + \frac{\eta^2}{b'^2} + \frac{\xi^2}{c'^2} - 1 = 0 \quad (16)$$

ale cărui semiaxe sînt

$$a' = b' \left\{ 1 + \frac{3}{2} q' b'^3 \right\}, \quad b' = b', \quad c' = b' \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1+q') b'^3 \right\} \quad (14')$$

unde $q' = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}' = 1/q$. Se observă că elipsoizii de ecuații (11) și (16) nu sînt, în general, asemenea.

4. *Evaluarea preciziei modelului elipsoidal.* În deducerea ecuației (11) am neglijat suma (8). Să vedem care este influența acestei neglijări asupra curbei teoretice de lumină.

Dacă r_0 este mic față de unitate* suma (8) converge repede. Astfel ordinul ei de mărime este dat de primul termen:

$$q r_0^5 P_3(\lambda) \quad (17)$$

* Chiar și în cazul limită 2° de mai jos, $r_0 = 0,3636\dots$ se poate considera mic față de unitate.

Mai departe voi defini abaterea medie a elipsoidului de ecuație (11) de la suprafața reală a componentei principale (numind-o scurt „abaterea medie”), $\overline{\delta r}$, astfel :

$$\overline{\delta r} = qr_0^5 |\overline{P_3(\lambda)}| \quad (18)$$

unde

$$|\overline{P_3(\lambda)}| = \frac{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\Phi=0}^{2\pi} |P_3(\lambda)| \sin \theta \, d\theta \, d\Phi}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\Phi=0}^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\Phi} \quad (19)$$

Definiția (19) arată că $|\overline{P_3(\lambda)}|$ reprezintă valoarea mediată după toate direcțiile a lui $|P_3(\lambda)|$. Introducând în formula (19) expresia polinomului Legendre $P_3(\lambda)$, ținând seamă de prima ecuație (1) și efectuând calculele, găsim $|\overline{P_3(\lambda)}| = 1/8$, deci

$$\overline{\delta r} = \frac{1}{8} qr_0^5 \quad (20)$$

Atunci și pentru semiaxa mijlocie a elipsoidului de ecuație (11), abaterea medie este de forma (20), adică :

$$\overline{\delta b} = \frac{1}{8} qr_0^5 \quad (21)$$

Pierderea maximă de lumină ΔL în cursul eclipsării componentei principale poate fi de ordinul de mărime :

$$\Delta L = \pi b^2 J \quad (22)$$

unde J este strălucirea superficială medie a componentei principale. Abaterii $\overline{\delta b}$ a semiaxei mijlocii îi va corespunde o abatere $\delta l = \delta(\Delta L)$ în curba de lumină, dată de

$$\delta l = \delta(\Delta L) = 2\pi b J \cdot \overline{\delta b} \quad (23)$$

Abaterea corespunzătoare în scara magnitudinilor, va fi în baza formulei lui Pogson :

$$\delta(\Delta m) \sim \frac{\delta(\Delta L)}{l} \quad (24)$$

unde l este luminozitatea sistemului în mijlocul minimului principal. Formula (24) corespunde abaterii maxime pentru minimul principal. O formulă analogă putem scrie pentru minimul secundar.

Calculul abaterii $\delta(\Delta m)$ în cazul cel mai general este dificil, deoarece curba de lumină (adică luminozitatea sistemului la un moment dat) depinde, cum se știe, de un număr mare de parametri ; de aceea voi calcula această abatere numai în trei cazuri particulare, care însă sînt suficient de reprezentative pentru sistemele binare strînse : primul pentru sistemele semidetășate, al doilea pentru cele în contact. Cazul al treilea se referă la sistemul *AI Draconis*, care va face obiectul unei cercetări ulterioare.

1° Fie un sistem pentru care $q = 0,5$ (valoare des întâlnită la sisteme semidetășate). Să considerăm că pentru componenta principală avem :

$$r_0 = 0,3; \quad L = 0,9; \quad u = 0,5$$

unde L este luminozitatea componentei principale, iar u este coeficientul de întunecare spre margine corespunzător. Atunci formula (24) conduce la $\delta(\Delta m) = 0^m,002 - 0^m,003$ depinzînd de amplitudinea minimului principal. Această abatere este mult sub limita erorii observațiilor fotoelectrice actuale. Înseamnă că modelul elipsoidal propus dă o bună aproximație pentru sistemele semidetășate, la care abaterea reală $\delta(\Delta m)$ este de așteptat să fie mai mică.

2° Fie un sistem binar format din două componente egale (ca masă și dimensiuni), în contact, pentru care :

$$q = 1; \quad L = L' = 0,5; \quad u = u' = 0,5$$

Pe baza tabelor lui P l a v e c și K r a t o c h v i l [12] se evaluează $r_0 = 0,3636\dots$, iar formula (24) conduce la $\delta(\Delta m) = 0,005$. Această valoare este aproape de limita preciziei observațiilor fotoelectrice actuale. Înseamnă că și pentru sistemele în contact modelul elipsoidal propus poate da o aproximație suficient de bună. Este posibil însă ca interpretarea curbilor de lumină ale unor sisteme în contact particulare să ceară luarea în considerare pentru deducerea formei componentelor și a polinoamelor Legendre de grad mai mare ca doi: $P_3(\lambda)$, $P_4(\lambda)$, ...

3° Utilizînd elementele fotometrice ale sistemului *AI Draconis* deduse de autor (nepublicate), rezultă :

- pentru minimul principal: $\delta(\Delta m) = 0^m,001$
- pentru minimul secundar: $\delta(\Delta m) = 0^m,0002$

Înseamnă că pentru sistemul *AI Draconis* eroarea care provine din abaterea componentelor de la forma de elipsoizi (neasemenea) nu depășește nicăieri în curba de lumină valoarea: $0^m,001$.

5. *Efectul structurii interne.* Ecuația (11) a fost dedusă în ipoteza că materia componentei principale este esențial concentrată în centrul ei. Dar stelele reale se abat de la modelul Roche. De aceea forma lor va mai depinde și de gradul de concentrare a materiei spre centru [1, 6, 8]. Utilizînd rezultatele lui K o p a l [8] se poate arăta că în acest caz în locul ecuației (15) vom avea, pînă la gradul de precizie considerat înainte, ecuația :

$$r = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} qb^3 \Delta_2 \left(\frac{\xi}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} (1+q) b^3 \Delta_2 \left(\frac{\zeta}{b} \right)^2 \right\} \quad (25)$$

în care b este legat de raza a_0 a sferei de volum egal cu volumul stelei reale — utilizată de Kopal — prin relația

$$a_0 = b \left\{ 1 + \frac{1}{2} qb^3 \Delta_2 - \frac{1}{6} (1+q) b^3 \Delta_2 \right\} \quad (26)$$

și unde Δ_2 este o constantă care depinde de structura internă a stelei (de gradul de concentrare a materiei spre centru), constantă definită (și tabulată pentru modelele politropice) de C h a n d r a s e k h a r [1]. Atunci se poate vedea imediat că ecuația (25) reprezintă tot un elipsoid de forma (11), însă ale cărui semiaxe sînt de data aceasta următoarele

$$a = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} qb^3 \Delta_2 \right\}, \quad b = b, \quad c = b \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1+q) b^3 \Delta_2 \right\} \quad (27)$$

Ecuțiile (27) sînt analoge ecuațiilor (14), la care se reduc pentru $\Delta_2 = 1$ (modelul Roche). Deci și în cazul unei structuri interne oarecare componenta principală se poate aproxima prin elipsoidul de ecuație (11), semiaxele fiind însă de forma (27).

Studiile asupra mișcării liniei apsidale [10, 11, 13] arată că stelele duble fotometrice posedă o pronunțată concentrare a materiei spre centrele componentelor, încît Δ_2 este apropiat de 1. Atunci diferențele între semiaxele (27) și (14) vor fi insensibile. În adevăr, deoarece :

$$\Delta_2 = 1 + 2k_2 \quad (28)$$

unde k_2 este constanta mișcării apsidale, pentru diferențele amintite obținem :

$$\Delta a = 3qb^4k_2, \quad \Delta c = - (1 + q)b^4k_2 \quad (29)$$

Utilizînd valoarea $\bar{k}_2 = 0,01$ indicată de Russell [13], formulele (29) dau pentru cele trei cazuri considerate în paragraful precedent valori de ordinul a 10^{-4} . Asemenea diferențe între semiaxe nu pot fi puse încă în evidență nici din cele mai precise curbe de lumină (fotoelectrice).

Astfel observațiile justifică utilizarea modelului Roche. Dacă pentru o stea concretă putem evalua constanta Δ_2 , atunci pentru calculul semiaxelor vom utiliza formulele (27) în locul formulelor (14).

Cele spuse mai sus relativ la componenta principală sînt valabile și pentru componenta secundară.

6. *Efectul devierii de la sincronism.* Calculele precedente s-au efectuat în ipoteza sincronismului dintre rotație și revoluție. Huang [4, 5] a arătat că sincronismul este un fenomen general la binarele strinse. Totuși se cunosc cîteva excepții de la sincronism (sistemele β *Lyrae*, *U Cephei* și *RZ Scuti*).

Se poate arăta ușor că în cazul nesincronismului, în locul ecuației (25) avem :

$$r = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} qb^3 \Delta_2 \left(\frac{\xi}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 + q) b^3 \Delta_2 \bar{\omega}^2 \left(\frac{\zeta}{b} \right)^2 \right\} \quad (30)$$

unde

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_k} \quad (31)$$

ω fiind viteza unghiulară de rotație a componentei considerate, iar ω_k viteza unghiulară în mișcarea kepleriană. Se vede imediat că ecuația (30) reprezintă tot un elipsoid de forma (11), ale cărui semiaxe sînt :

$$a = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} qb^3 \Delta_2 \right\}, \quad b = b, \quad c = b \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 + q) b^3 \Delta_2 \bar{\omega}^2 \right\} \quad (32)$$

Dacă pentru un sistem binar concret se cunoaște că rotația și revoluția nu sînt sincrone, deducîndu-se $\bar{\omega}$ din „efectul rotațional”, pentru calculul semiaxelor se vor utiliza formulele (32). În cazul sincronismului, evident $\bar{\omega} = 1$.

Cele de mai sus sînt valabile și pentru componenta secundară :

7. *Concluzii.* Utilizînd notațiile lui Kopal [8] :

$$w^{(2)} = qb^3, \quad v^{(2)} = (1 + q)b^3 \quad (33)$$

— în cazul modelului Roche sau

$$w^{(2)} = qb^3 \Delta_2, \quad v^{(2)} = (1 + q)b^3 \Delta_2 \quad (34)$$

— în cazul unei structuri interne oarecare (în prezența sincronismului), sau

$$w^{(2)} = qb^3\Delta_2, \quad v^{(2)} = (1+q)b^3\Delta_2\bar{\omega}^2 \quad (35)$$

— în lipsa sincronismului, expresiile (14), (27), și (32) ale semiaxelor pot fi puse sub forma :

$$a = b \left\{ 1 + \frac{3}{2} w^{(2)} \right\}, \quad b = b, \quad c = b \left\{ 1 - \frac{1}{2} v^{(2)} \right\} \quad (36)$$

unde $w^{(2)}$ este coeficientul de deformare mareică, iar $v^{(2)}$ coeficientul de deformare rotațională; coeficienții de deformare calculându-se cu formulele (33) sau (34) sau (35), după caz.

În concluzie putem spune că forma componentei principale este descrisă de elipsoidul (II) ale cărui semiaxe sînt date de ecuațiile (36). Forma componentei secundare este descrisă de elipsoidul (16) ale cărui semiaxe vor fi date de formule analoge formulelor (33)—(36).

Considerînd în general expresiile corespunzătoare modelului Roche**, urmează să aplic formulele deduse în această lucrare la interpretarea variației de lumină a sistemului binar strîns.

Pe baza evaluării din paragraful 5 este de așteptat ca modelul elipsoidal propus să dea o bună aproximație nu numai pentru sisteme semidetășate, ci și pentru sisteme în contact.

Autorul exprimă sincere mulțumiri profesorului Gheorghe Chiș pentru discuțiile stimulative purtate în timpul elaborării acestei lucrări.

(Intrat în redacție la 17 ianuarie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. Chandrasekhar, S., Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **93**; pp. 390, 449, 462, 539; 1933.
2. Horák, T., Bul. Astr. Inst. Czech. **17**, 27, 1966.
3. Horák, T., Bul. Astr. Inst. Czech. **17**, 272, 1966.
4. Huang, S. S., Astronomical J. **71**, 165, 1966.
5. Huang, S. S., Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **4**, 35, 1966.
6. Kopal, Z., *An Introduction to the Study of Eclipsing Variables*, Cambridge, 1946.
7. Kopal, Z., Shapley, M. B., Jodrell Bank Annals, **1**, fasc. 4, 1956.
8. Kopal, Z., *Close Binary Systems*, London, 1959.
9. Kříž, S., Bul. Astr. Inst. Czech, **16**, 118, 1965.
10. Martınov, D. J. a., Astronomiceskii J., **42**, 1209, 1965.
11. Plavec, M., Bul. Astr. Inst. Czech., **11**, 148, 1960.
12. Plavec, M., Kratochvil, P., Bul. Astr. Inst. Czech., **15**, 165, 1964.
13. Russell, H. N., Astrophysical J., **90**, 641, 1939.
14. Tsesevich, V., Martınov, D. J. a. ș. a., „Peremennıe zvezdı”, vol. III, OGIZ, Moskva, 1947.

Unii autori utilizează modelul Roche generalizat pentru studiul binarelor strînse. Calculul lui Orlov (Astronomiceskii Jurnal **37, p. 902, 1960), arată că pentru un înalt grad de concentrare a materiei spre centru, diferența dintre modelul Roche generalizat și modelul Roche clasic este cu totul neînsemnată pentru precizia observațiilor actuale.

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КРИВЫХ БЛЕСКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ (I)

Forma constituenților

(Резюме)

В работе показано, что две составляющие одной тесной двойной системы могут аппроксимироваться двумя эллипсоидами, которые вообще не являются одинаковыми. Затем автор вычисляет точность предлагаемой эллипсоидальной модели. В дальнейшем анализируется вкратце эффект внутренней структуры и эффект отклонения от синхронизма на форму составляющих.

Полученные результаты полезны для интерпретации кривых блеска затменных переменных звезд.

CONTRIBUTIONS À L'INTERPRÉTATION DES COURBES DE LUMIÈRE DES SYSTÈMES BINAIRES ÉTROITS (I).

Formes des composantes

(Résumé)

On montre que les deux composantes d'un système binaire étroit peuvent être approchées par deux ellipsoïdes qui en général ne sont pas similaires. Puis on évalue la précision du modèle ellipsoïdal proposé. On analyse ensuite brièvement l'effet de la structure interne et l'effet de la déviation du synchronisme sur la forme des composantes.

Les résultats obtenus sont utiles pour l'interprétation des courbes de lumière des étoiles doubles photométriques.

4

ASUPRA CÎMPURILOR CUANTICE CU $2(2s + 1)$ COMPONENTE

de
Z. GÁBOS

Funcțiile de undă ale particulelor cu spinul s și cu masa de repaos m_0 diferită de zero, sînt vectori de bază ai reprezentării ireductibile $(s, 0) \oplus (0, s)$ a grupului Lorentz omogen.

Acești vectori — cu $2(2s + 1)$ componente — pot fi construiți pornind de la cîmpuri „elementare” de tipul $(1/2, 0)$ și $(0, 1/2)$ [6], [7], [9]. În lucrare — avînd în vedere acest fapt — se stabilesc unele rezultate noi referitoare la funcția de undă, matricele de bază, operatorul transformării Lorentz și expresiile bilineare ale cîmpurilor cu spin superior.

1°. **Funcții de undă.** Pentru particule (și antiparticule) cu spinul s avem $2s + 1$ funcții de undă, cu cîte $2(2s + 1)$ componente

$$U(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(\Lambda) \\ \chi(\Lambda) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = -\overline{s, s}, \quad (1)$$

Λ este numărul cuantic de helicitate).

Componentele lui Φ și χ sînt date de

$$\Phi_A(\Lambda) = \sqrt{\frac{1}{N_A N_A}} \sum \prod_{k=1}^{2s} \Phi_{a_k}(\lambda_k), \quad (2)$$

$$\chi^A(\Lambda) = \sqrt{\frac{1}{N_A N_A}} \sum \prod_{k=1}^{2s} \chi^{a_k}(\lambda_k), \quad A = \overline{1, 2s + 1} \quad (3)$$

unde

$$A = \sum_{k=1}^{2s} a_k - (2s - 1), \quad \Lambda = \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k.$$

$\Phi(\lambda_k)$ și $\chi(\lambda_k)$ sînt spinori Dirac cu două componente ($a_k = 1, 2$), λ_k este numărul cuantic de helicitate (cu valorile posibile $\pm 1/2$).

Sumele din expresiile (2) și (3) conțin $N_A N_A$ termeni. N_A este numărul combinațiilor de numere a_k care ne conduc la valoarea bine determinată A :

$$N_A = \frac{(2s)!}{(2s - A)! A!}.$$

N_Λ este numărul sistemelor de numere λ_k care corespund unei valori bine determinate a lui Λ :

$$N_\Lambda = \frac{(2s)!}{(s + \Lambda)! (s - \Lambda)!}.$$

2°. **Matricele de bază.** Operatorii matriciali ai câmpurilor cu spinul s , sînt operatori hermitici cu $2(2s + 1)$ rînduri și $2(2s + 1)$ coloane. În consecință numărul matricelor de bază este $4(2s + 1)^2$.

Să considerăm matricea

$$\gamma_{\lambda_1 \mu_1 \dots \mu_{2s}} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{M}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} \\ M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}$ și $\overline{M}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}$ fiind date de

$$(M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}})_{A\dot{B}} = i^{2s} \sqrt{\frac{1}{N_A N_B}} \sum \prod_{k=1}^{2s} (\sigma_{\mu_k})_{a_k b_k}, \quad (5)$$

$$(M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}})_{A\dot{B}} = i^{2s} \sqrt{\frac{1}{N_A N_B}} \sum \prod (\sigma_{\mu_k})_{a_k \dot{b}_k}, \quad (6)$$

$$\mu_k = \overline{1, 4}, \quad A, B = \overline{1, 2s + 1},$$

(indicele A ne indică rîndul, iar B coloana). Mai avem

$$[(\sigma_j)^{ab}] = -[(\sigma_j)_{ab}] = \sigma_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

$$[(\sigma_4)^{ab}] = [(\sigma_4)_{ab}] = i\sigma_0, \quad a, b = 1, 2, \quad (8)$$

(σ_j sînt matricele lui Pauli, σ_0 este matricea unitate).

Sumele (5), (6) conțin $N_A N_B$ termeni (N_A este numărul de combinații de nume a_k care ne conduc la aceeași valoare a lui A , iar N_B ne indică numărul de combinații de numere b_k , care ne conduc la valoarea bine determinată B). Deoarece

$$A = \sum_{k=1}^{2s} a_k - (2s - 1), \quad B = \sum_{k=1}^{2s} b_k - (2s - 1),$$

avem

$$N_A = \frac{(2s)!}{(2s + 1 - A)! (A - 1)!},$$

$$N_B = \frac{(2s)!}{(2s + 1 - B)! (B - 1)!}.$$

Matricele (4) astfel definite satisfac toate condițiile care se impun față de matricele de bază: hermiticitatea, simetria față de indicii μ , anularea expresiei obținute în urma contracției a doi indici μ .

Din (4) rezultă

$$\gamma_{44 \dots 4} = (-1)^{2s} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

I este matricea unitate cu $2s + 1$ rînduri și $2s + 1$ coloane. Dacă mai introducem matricea

$$\gamma_{55 \dots 5} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (9)$$

obținem matricele de bază

$$\begin{aligned} & \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}, \quad \gamma_{55 \dots 5} \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}, \\ & \gamma_{44 \dots 4} \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}, \quad \gamma_{44 \dots 4} \gamma_{55 \dots 5} \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} \end{aligned}$$

dintre care $4(2s+1)^2$ sînt independente.

3°. Consecințe. *A. Relații referitoare la matricele de bază.* Avînd în vedere (4), (5), (6), (7), (8), în urma unor calcule simple obținem pentru $s = 1, 3/2$ următoarele rezultate:

$$Sp(\gamma_{\mu\nu} \gamma_{\lambda\rho}) = 4 (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}) - 2 \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Sp(\gamma_{\mu\nu\tau} \gamma_{\lambda\rho\epsilon}) &= \frac{8}{3} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} \delta_{\tau\epsilon} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\epsilon} \delta_{\tau\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\epsilon} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\epsilon} \delta_{\tau\lambda} + \\ &+ \delta_{\mu\epsilon} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\rho} + \delta_{\mu\epsilon} \delta_{\nu\rho} \delta_{\tau\lambda}) - \frac{8}{9} [\delta_{\mu\nu}(\delta_{\tau\lambda} \delta_{\rho\epsilon} + \delta_{\tau\rho} \delta_{\lambda\epsilon} + \delta_{\tau\epsilon} \delta_{\lambda\rho}) + \\ &+ \delta_{\mu\tau}(\delta_{\nu\lambda} \delta_{\rho\epsilon} + \delta_{\nu\rho} \delta_{\lambda\epsilon} + \delta_{\nu\epsilon} \delta_{\lambda\rho}) + \delta_{\nu\tau}(\delta_{\mu\lambda} \delta_{\rho\epsilon} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\lambda\epsilon} + \delta_{\mu\epsilon} \delta_{\lambda\rho})]. \end{aligned} \quad (12)$$

B. Operatorul transformării Lorentz. În cazul $s = 1/2$ avem

$$\begin{aligned} L_{1/2}(\vec{v}) &= \gamma_4 \left(\sqrt{\frac{\beta+1}{2}} \gamma_4 - i \sqrt{\frac{\beta-1}{2}} e_j \gamma_j \right), \\ \beta &= \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{-1/2}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}, \end{aligned} \quad (13)$$

\vec{V} este viteza de deplasare a sistemului K' față de K .

Avînd în vedere expresiile (5), (6) ajungem la concluzia, că operatorul transformării Lorentz pentru particule cu spinul $n/2$ se obține printr-o „ridicare la puterea i ” a expresiei (13). Această operație simbolică constă în trecerea de la matricele μ cu un singur indice, la matrici cu n indici. Astfel pentru $s = 1, 3/2$ obținem:

$$\begin{aligned} L_1(\vec{v}) &= \gamma_{44} \left(\frac{\beta+1}{2} \gamma_{44} - i\beta \frac{V}{C} e_j \gamma_{j4} - \frac{\beta-1}{2} e_j e_k \gamma_{jk} \right), \\ L_{3/2}(\vec{v}) &= \gamma_{444} \left[\left(\frac{\beta+1}{2} \right)^{3/2} \gamma_{444} - \frac{3}{2} i(\beta+1) \sqrt{\frac{\beta-1}{2}} e_j \gamma_{j44} - \right. \\ &\left. - \frac{3}{2} (\beta-1) \sqrt{\frac{\beta+1}{2}} e_j e_k \gamma_{jk4} + i \left(\frac{\beta-1}{2} \right)^{3/2} e_j e_k e_m \gamma_{jkm} \right]. \end{aligned}$$

C. Expresii bilineare. Fie x_k și y_k mărimi cu două componente:

$$(x_k)_{a_k}, (y_k)_{b_k}, \quad k = \overline{1, 2s}; \quad a_k, b_k = 1, 2.$$

u ajutorul acestor mărimi — aplicînd procedeul din paragraful 1° — construim mărimile X și Y cu cîte $2s+1$ componente

$$\begin{aligned} X_A &= \sqrt{\frac{1}{N_A}} \sum \prod_{k=1}^{2s} (x_k)_{a_k}, \\ Y_B &= \sqrt{\frac{1}{N_B}} \sum \prod_{k=1}^{2s} (y_k)_{b_k}. \end{aligned}$$

ie $M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}$ matricea definită sub (5). Avem egalitatea

$$X_A (M_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}})^{AB} Y_B = \frac{1}{[(2s+1)^2]} \left\{ \prod_{k=1}^{2s} [(x_k)_{a_k} (\sigma_{\mu_k})^{ab} (y_k)_{b_k}] + \dots \right\}. \quad (14)$$

În paranteză avem $[(2s)!]^2$ termeni care se obțin considerînd toate permutații posibile ale matricilor σ_{μ_k} și ale mărimilor y_k .

Referitor la produsul direct al două funcții de undă, cu cîte $2(2s + 1)$ componente, avem

$$[(s, 0) \oplus (0, s)] \times [(s, 0) \oplus (0, s)] = 2(s, s) + \sum_{n=0}^{2s} [n, 0] + (0, n).$$

Utilizînd (14) ajungem la următoarele corespondențe:

$$U_1^+ (1 + \gamma_{55} \dots 5) \gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} \dots U_2 \rightarrow (n, 0), \quad i_k = \overline{1, 3},$$

$$U_1^+ (1 - \gamma_{55} \dots 5) \gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} \dots U_2 \rightarrow (0, n),$$

$$U_1^+ \gamma_{44} \dots 4 (1 \pm \gamma_{55} \dots 5) \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} U_2 \rightarrow (s, s).$$

(Intrat în redacție la 14 septembrie 1965)

BIBLIOGRAFIE

1. E. P. Wigner, *Ann. of Math.*, **40**, 149, 1939.
2. V. Bargmann, *Ann. of Math.*, **48**, 568, 1947.
3. W. L. Bade, H. Jehle, *Revs. Mod. Phys.*, **25**, 714, 1953.
4. H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, Amsterdam, 1956, p. 56-97.
5. P. Roman, *Theory of Elementary Particles*, Amsterdam, 1961, p. 141-160.
6. H. Joos, *Fortschritte der Physik*, **10**, 65, 1962.
7. A. O. Barut, I. Muzinich, D. N. Williams, *Phys. Rev.*, **130**, 442, 1963.
8. S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **133**, B. 1318, 1964; **134**, B. 882, 1964.
9. D. Zwanziger, *Phys. Rev.*, **133**, B. 1036, 1964; **137**, B. 1535, 1965.
10. L. D. Landau, E. M. Lifșitș, *Mecanica cuantică, teoria nerelativistă* (traducere din limba rusă), București, 1965, p. 210-213.
11. W. C. Parke, H. Jehle, *Reprint from Lectures in Theoretical Physics*, vol. VII A., Univ. of Colorado Press, 1965, p. 297-386.
12. R. A. Berg, *Journ. of Math. Phys.*, **6**, 24, 1965.
13. A. Sankaranarayanan, R. H. Good, jr., *Il. Nuovo Cimento*, **36**, 1303, 1965.
14. D. Shay, H. S. Song, R. H. Good, jr., *Suppl. Nuovo Cimento*, **3**, 455, 1965.

О КВАНТОВЫХ ПОЛЯХ С $2(2s + 1)$ КОМПОНЕНТАМИ (Резюме)

Имея в виду, что волновые функции полей с произвольным спином могут быть построены спинорных волновых функций, автор устанавливает некоторые новые результаты, по

a) выражениям

$$Sp(\gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} \gamma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s}});$$

b) оператору $L_s(\vec{v})$ преобразования Лоренца;

в) двучленными выражениями.

ON QUANTUM FIELDS WITH $2(2s + 1)$ COMPONENTS (Summary)

Taking into account that the wave functions of the fields with any spin may be constructed of spin wave functions the author establishes some results referring to

a) expressions

$$Sp(\gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} \gamma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s}});$$

b) $L_s(\vec{v})$ operator of the Lorentz transformation

c) bilinear expressions.

DIAGRAMMES ARGAND DANS LA RÉSONANCE PARAMAGNÉTIQUE

par

D. DEMCO, R. BAICAN

1. Introduction. Cole—Cole [1] a montré que les caractéristiques de la relaxation conformes aux équations de Debye peuvent être obtenues en représentant la permittivité électrique complexe $\varepsilon_r = \varepsilon' - i\varepsilon''$ sous la forme d'un diagramme Argand. Un diagramme analogue a été proposé aussi pour la polarisabilité complexe [2]. Des diagrammes Argand ont été utilisés dans la résonance ferromagnétique [3].

Nous allons étudier ces diagrammes pour la susceptibilité dynamique $\chi = \chi' - i\chi''$, dans le cas de la résonance paramagnétique.

2. Le diagramme Argand pour le cas des champs élevés. Dans les conditions des champs perturbateurs très faibles près de la résonance [4], on obtient des équations de Bloch que le diagramme Argand est une ellipse [5] avec le grand demi-axe de $\omega_0\chi_0 T_2/4Z$, le petit demi-axe de $\omega_0\chi_0 T_2/4Z^2$ et l'excentricité de $e \equiv \sqrt{Z^2 - 1}/Z$. Ici $Z^2 \equiv 1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2$, $\omega_0 \equiv \gamma H_0$ est la pulsation, Larmor H_1 est l'intensité du champ perturbateur, χ_0 est la susceptibilité statique et T_1, T_2 , sont les temps de relaxation.

L'étude de la dépendance du diagramme envers H_1 permet de déterminer les temps de relaxation et, par suite, χ_0 . Durant les mesures, le champ magnétique statique doit être très stable. Dans le cas contraire, l'aiguille de l'enregistreur se déplace sur une famille d'ellipses, ayant toutes la même excentricité, parce que les demi-axes de l'ellipse dépendent de H_0 contrairement aux affirmations de [5].

3. Le diagramme Argand pour le cas des champs faibles. La validité des expressions de χ' et χ'' utilisées en [5] devient discutable si le champ statique est comparable soit à la largeur de la ligne de résonance (en Gauss), soit à l'amplitude du champ perturbateur [6]. On distingue deux cas :

a) Pour un champ circulairement polarisé (R) les expressions modifiées (M) des équations de Bloch sont [6]

$$\chi_R^M = \frac{1}{2} \cdot \frac{[1 + (\gamma H_1 T)^2] - \omega_0 \Delta \omega T^2}{1 + (\gamma H_1 T)^2 + (T \Delta \omega)^2} \cdot \chi_0 \quad (1)$$

$$\chi_R^{M'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega T}{1 + \gamma H_1 T)^2 + (T \Delta \omega)^2} \cdot \chi_0 \quad (2)$$

où $T_1 = T_2 \equiv T$ et $\Delta \omega = \omega_0 - \omega$. La relation entre χ_R^M et $\chi_R^{M'}$ sera

$$2\chi_R^{M^2} + 2Z^2 \chi_R^{M'^2} - \omega_0 T \chi_0 \chi_R^{M'} - \chi_0 \chi_R^M = 0. \quad (3)$$

ce qui représente une ellipse (Figure 1) ayant l'origine au point $(\chi''_R)''_0 = \omega_0 \chi_0 T / 4Z^2$, $(\chi'_R)''_0 = \chi_0 / 4$, et l'excentricité $e \equiv \gamma H_1 Z / z$. Les points D_m , D'_m et A_m correspondent à la dispersion et à l'absorption maximales et le point R à la résonance.

On voit que, dans ce cas, à la différence du diagramme Argand pour champs élevés en partant de l'ordonnée du point D ou O on peut déterminer la susceptibilité

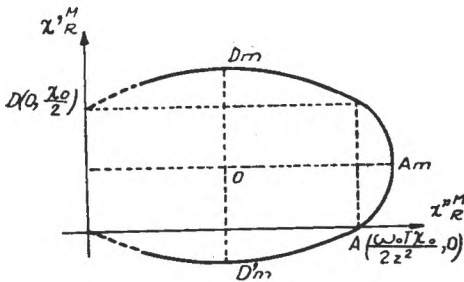


Fig. 1

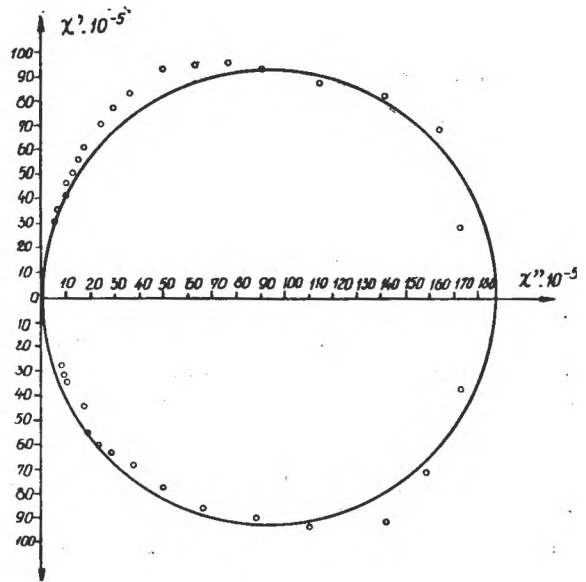


Fig. 2

statique de l'échantillon. En connaissant la valeur de H_1 , nous pouvons aussi déterminer le temps de relaxation.

Quand $(\gamma H_1 T)^2 < 1$ l'ellipse dégénère en un cercle.

Dans le cas d'un champ rotatif pour $\omega_0 = 0$ on obtient une ellipse ayant la même excentricité, mais avec le centre placé sur l'axe χ''_R . L'appareil qui trace un diagramme pareil peut être utilisé comme magnétomètre.

b) Les expressions de la susceptibilité dynamique données en [7] pour le champ linéairement polarisé conduisent à un diagramme compliqué. Si on a un champ linéairement polarisé pur, on obtient les formules Debye qui fournissent un diagramme circulaire.

On obtient aussi un diagramme compliqué, qui n'est pas une conique, pour le cas des champs perturbateurs forts, en utilisant les résultats de Redfield [8].

4. Le diagramme Argand pour l'octochlorphénothiazinil. Les équations de Bloc sont consistantes avec les expériences sur des radicaux organiques libres [7]. L'octochlorphénothiazinil est un radical libre avec une très bonne stabilité thermique et a été préparé suivant [9].

Le diagramme Argand pour des champs élevés et loin de saturation est un cercle avec le centre sur l'axe χ'' et ayant le rayon $R = \omega_0 \chi_0 T / 4$.

Nous avons utilisé un spectromètre de type commercial adapté pour la dispersion et pris comme référence de D.P.P.H. [10]., [11]. Les courbes d'absorption et de dispersion nous ont permis d'obtenir le diagramme de la figure 2.

En connaissant la susceptibilité statique $\chi_0 = (4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$ u.e.m./gr. à $T = 293^\circ K$, on obtient le rayon du cercle $T_2 = (1,5 \pm 0,1) 10^{-8}$ sec., ce qui concorde avec la valeur évaluée par la largeur de la ligne de résonance.

Les auteurs remercient M. le Professeur I. Ursu, pour son aide dans l'élaboration du présent travail.

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. K. S. Cole — R. H. Cole, J. Chem. Phys., **9**, 341 (1941).
2. B. K. P. Scaife, Proc. Phys. Soc. (London) **81**, 124 (1963).
3. J. G. Radó, I. R. Weertman, Phys. Chem. Solids, **11**, 315 (1959).
4. D. Demco, Rev. Roum. Phys., **9**, 792 (1967).
5. R. Sechenay, A. Erbeia, Hel. Phys. Acta, **38**, 639 (1965).
6. A. Abragam, *Principle of Nuclear Magnetism*, Oxford, 1961.
7. M. A. Gartens, J. I. Kaplan, Phys. Rev., **99**, 459 (1955).
8. A. G. Redfield, Phys. Rev. **98**, 1787 (1955).
9. C. Bodea, I. Silberg, Rev. Roum. Chem., **9**, 505 (1964).
10. R. Baican, A. Bódi, D. Demco (Communication privée).
11. D. Demco, R. Baican, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. Phys., **2** (1968).

DIAGRAME ARGAND IN REZONANȚA ELECTRONICĂ DE SPIN

(Rezumat)

Se studiază diagramele Argand pentru cazul cimpurilor înalte și joase și aplicarea lor în determinarea timpilor de relaxare și a susceptibilității statice. Se trasează diagrama Argand în cazul cimpurilor înalte, departe de saturație, pentru octoclorfenotiazinil și se determină timpul de relaxare transversal.

ДИАГРАММЫ АРГАНДА В ЭЛЕКТРОННОМ ПАРАМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ

(Резюме)

Авторы изучают диаграммы Арганда для случая высоких полей и их применение к определению времён релаксации и статической восприимчивости. Они строят диаграмму Арганда при высоких полях, далеко от области насыщения, для октохлорфенотиазинила и определяют поперечное время релаксации.

ÜBER DAS „EXTRAABSORPTIONSSIGNAL“ DER EPR-SPEKTREN EINIGER Cu(II)-CHELATE IN EINGEFRORENEN LÖSUNGEN

NICOLAE VEZENTAN

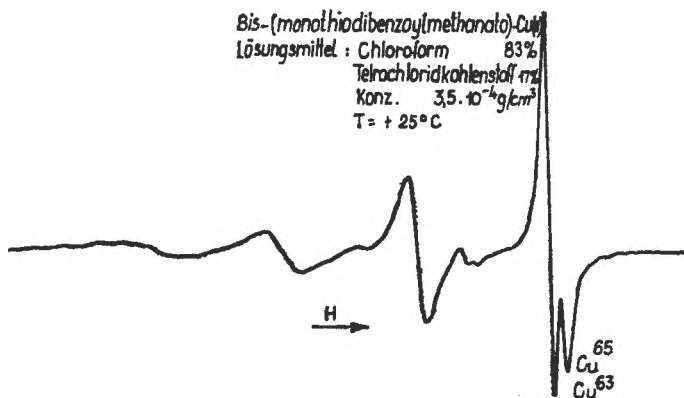
Einführung. Wie allgemein bekannt, erscheinen in den aufgelösten EPR-Spektren der Cu(II)-Chelate aus eingefrorenen Lösungen, für den Fall der axialen Symmetrie, 4 schwache, sehr asymmetrische (Pic)-Hyperfeinstrukturlinien, um g_{\parallel} zentriert, die von einer anderen Gruppe von vier Signalen begleitet sind, welche, von grösserer Intensität, im Bereich eines angewendeten höheren magnetischen Feldes und um g_{\perp} zentriert sind [1, 2].

Diese Signale erscheinen als Folge der Wechselwirkung der ungepaarten Spins ($S = \frac{1}{2}$) des Cu(II) mit dem Kern des eigenen Ions $I_{Cu} = \frac{3}{2}$ im Falle der parallelen bzw. senkrechten Orientierung der Molekülachse zu dem angewendeten statischen Magnetfeld.

In der Mehrzahl der EPR-Studien über die Cu(II)-Chelate findet sich da Cu(II)-Ion in natürlicher isotopischer Zusammensetzung. Aus diesem Grunde können die EPR-Spektren unter den erwähnten Bedingungen komplizierter erscheinen. Sie können aus einer grösseren Anzahl von Signalen als vorgesehen bestehen, auch im Falle des Fehlens der superhyperfeinen Wechselwirkung.

Die beiden Kupferisotope (Cu^{63} und Cu^{65}) sind in der Häufigkeit von 68,9% Cu^{63} und 31,1% Cu^{65} vorhanden. Ihre magnetischen Kernmomente sind ebenfalls verschieden, was zu verschiedenen Werten der hyperfeinen Aufspaltungskonstanten und demzufolge manchmal auch zu einer isotopischen Aufspaltung in den Spektren führt (Abb. 1,7).

In letzterer Zeit erschienen EPR-Arbeiten, die sich mit den monoisotopischen Cu(II)-Chelaten in Lösungen und eingefrorenen Lösungen befassen [3, 4, 5]. Das Bis-(acetylacetonato)- Cu^{63} (II)-Spektrum weist jene Signale auf,



A b b. 1.

deren Vorhandensein theoretisch vorausgesehen war. und einerseits, gesondert gruppiert, jene, die zur Absorption der parallelen Orientierung, andererseits diejenigen die zur senkrechten Orientierung gehören.

Es ist möglich, dass in Abhängigkeit von der Substanz, Temperatur und Lösungsmittel, die Signalgruppe aus der parallelen Orientierung, über jener aus der senkrechten Orientierung liegend, erscheint [2, 5, 7].

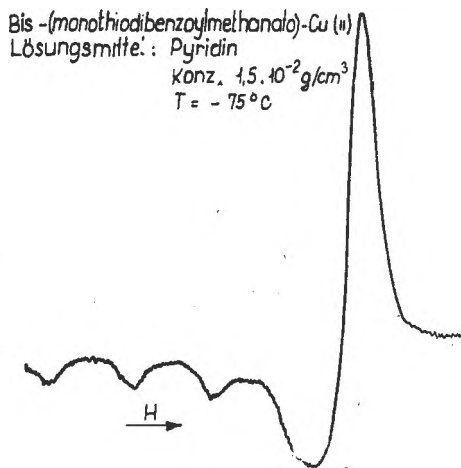


Abb. 2.

Aus diesem Grunde ist die Auswertung der Spektren im Bereiche der hohen Felder manchmal sehr schwierig und daher die Bestimmung der magnetischen Parameter weniger genau.

In Abbildung 2 ist das Spektrum, in dem nur die „Pics“ der parallelen Orientierung aufgelöst sind, dargestellt, während die ganze Absorption der senkrechten Orientierung durch ein einziges Signal dargestellt ist; die völlig aufgelöste Struktur erhält man im oben erwähnten Fall bei 77°K .

Der Absorptionsbereich der senkrechten Orientierung kann selbst dann noch eine „Struktur“ aufweisen, wenn der Wert der hyperfeinen Aufspaltungskonstante, die für diese Orientierung charakteristisch ist, $|B| = 0$. Dies aber tritt ein, wenn einer oder mehrere „Pics“, die der parallelen Orientierung angehören, im Bereich der

hohen Felder angeordnet sind. Es erscheint das sogenannte Phänomen des „Überholens“ [8].

Im vorliegenden Fall interessiert uns die Interpretation der Spektren aus dem Bereiche der hohen Felder im Falle der aufgelösten hyperfeinen Struktur für das ganze Spektrum, während das Cu(II) sich in natürlicher isotopischer Zusammensetzung in den Chelaten vorfindet.

R. Neiman und D. Kivelson gelingt es eine grössere Anzahl von Signalen (als Sands theoretisch [1] voraussah) im EPR-Spektrum des Cu(II)-Phthalocyanins in eingefrorenen Lösungen nachzuweisen.

Um das Erscheinen einiger zusätzlicher Signale zu rechtfertigen, wurde die Sands' sche Theorie auf die eingefrorenen Lösungen erweitert [2]. Daraus geht hervor, dass zusätzliche Signale als Folge der Eigenheiten des Verhaltens der Sinus- und Cosinusfunktionen bei Werten der aus den Spektren bestimmten magnetischen Parametern auftreten können.

Die physikalische Bedeutung des Erscheinens der zusätzlichen Signale muss in der vorliegenden Interpretation, in dem anomalen Verhalten des Cu(II)-Ions gefunden werden. H. R. Gersman und J. P. Swalen [6] zeigen, dass im Spektrum des Bis-(diäthylthiocarbamato)-Cu(II) in eingefrorenen Lösungen an Stelle von vier, eine Anzahl von fünf Signalen im Bereiche der hohen Felder erscheint.

Das Signal vom äussersten Ende des hohen Feldes wird als „Signal der Extraabsorption“ benannt.

Die Sands'sche Theorie wurde in der Richtung der Berechnung der Stellung der „Extraabsorption“ im Bis-(acetylacetonato)-Cu(II) und des bis-(diäthylthiocarbamato)-Cu(II)-Spektrums weiter ausgearbeitet. Der Wert des ent-

sprechenden Feldes wird bei $m = -\frac{3}{2}$ erhalten (wo m die kernmagnetische Quantenzahl ist).

Die physikalische Bedeutung weicht im Grunde genommen nicht von der Theorie Neimans und Kivelsons ab.

Dieses „zusätzliche“ Signal oder Signal der „Extraabsorption“ erscheint auch in den Spektren anderer Bis-(dialkyldithiocarbamato)-Cu (II), des Bis-(diäthylthiophosphato)-Cu(II) und bei einer ganzen Reihe von inneren Komplexen [9, 10, 11, 12].

Besonders in Arbeit [9] geht man von der Theorie Neimans und Kivelsons bei der Berechnung der Werte $|B|$ und g_{\perp} aus, die vor allem auch im Sinne der Berechnung der „Extraabsorption“ entwickelt ist. Diese erhält die Benennung „totaler Absorptionspic“ und dessen Stellung im Spektrum ist ebenfalls für $m = -\frac{3}{2}$ berechnet.

In den von uns erhaltenen Spektren des Bis-(monothiodibenzoylmethanato)-Cu(II) in verschiedenen Lösungsmitteln erscheint das „Extraabsorptionssignal“ in verschiedenen Gestaltungen (Abb. 3, 4, 5, 6), aber sehr überzeugend in Abb. 5 und 6, so wie in Abb. 8 des Bis-(diäthylthiophosphato)-Cu(II).

Das alles erfordert ein Studium dieser Eigenheiten in den Spektren der Cu (II)-Chelate.

*

In der nachfolgenden Interpretation des „Extraabsorptionssignals“ hat das Cu(II)-Ion aus den Chelaten ein normales Verhalten in den EPR-Spektren, das dem anderer Elemente aus der Eisengruppe ähnlich ist.

Dies geht aus einer Reihe von weiter unten besprochenen Aspekten hervor.

Für das Bestimmen der Werte von $|B|$ (die Konstante der hyperfeinen Wechselwirkung in der senkrechten Orientierung) und von g_{\perp} aus den nicht aufgelösten Spektren der senkrechten Orientierung, oder wenn die Struktur dieses Bereiches zu kompliziert ist, verwendet man im allgemeinen elektronische Rechenmaschinen. In der Programmierung sind die aus den Spektren geschätzten berechneten Werte von $|A_{\parallel}|$ und g_{\parallel} gegeben, g_{\perp} und $|B|$ erhält man durch Versuche, indem man ihnen beliebige Werte verleiht.

(A_{\parallel} ist die Konstante der hyperfeinen Wechselwirkung in der parallelen Orientierung, g_{\parallel}, g_{\perp} haben die übliche Bedeutung.)

Die Paare der Werte von $|B|$ und g_{\perp} , für welche das Experimentalspektrum konvenabel wiedergegeben ist, werden als reelle Werte dieser Parameter betrachtet. Durch dieses Berechnungsverfahren ist die gefundene Lösung nicht auch die einzige. Neiman und Kivelson selbst erhoben Einspruch dagegen [2].

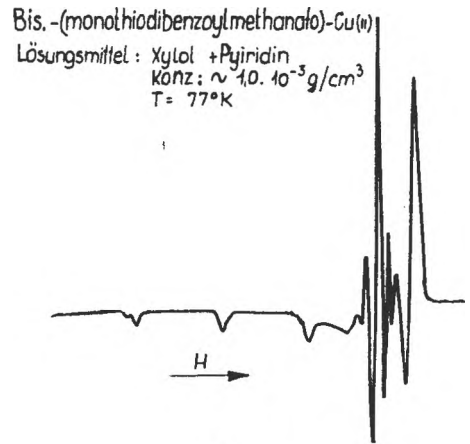


Abb. 3.

2. Bei der Bestimmung der Stellung der „Extraabsorption“ im Spektrum nimmt man bei der Programmierung den Wert $m = -\frac{3}{2}$, wie auch für die Bestimmung des „Pics“ im Bereiche des hohen Feldes, das der parallelen Orientierung angehört. Wenn, im letzten Fall, das Einführen dieses Wertes eine Rechtfertigung und gleichzeitig eine tiefe physikalische Bedeutung hat, sind wir nicht in der gleichen Lage bei der Berechnung der „Extraabsorption“. Trotzdem, sowohl in Arbeit [6] wie auch in [9] wurde in beiden Fällen der Wert $m = -\frac{3}{2}$ verwendet. Die Tatsache, dass es notwendig war in beiden Fällen denselben Wert $m = -\frac{3}{2}$ zu verwenden, kann höchstens einen Beweis bilden, dass von ein und demselben Signal und nicht von einer zusätzlichen „Extraabsorption“ die Rede ist.

3. Studiert man nun eine Reihe von Cu(II)-Chelatspektren, lässt sich feststellen, dass die „Pics“ gegen die Werte der höheren Felder an Umfang zunehmen, was in der Arbeit [2] festgestellt wurde. Dasselbe lässt sich auch in den Abbildungen 2, 3, 4, 5, 6 und 8 feststellen. Ebenfalls aus diesen Abbildungen und aus den Spektren, die von anderen Cu(II)-Chelaten in eingefrorenen Lösungen erhalten wurden, kann festgestellt werden, dass die „Pics“ im Bereiche der höheren Felder symmetrischer werden und von beiden Seiten der Nulllinie des Spektrums der abgeleiteten Kurve beschrieben sind. Die Pics können sogar umgekehrt beschrieben werden; jene aus dem Bereich der starken Felder, gegenüber jenen aus dem Bereich der schwachen Felder.

Dieses Verhalten wurde bis jetzt bei den Cu(II)-Chelaten noch nicht bemerkt, doch für den Fall der Vanadyl-Chelate ist es eine bekannte experimentale

Tatsache.

Unsere Meinung ist, dass auch einige Cu(II)-Chelate diese Eigenschaft besitzen.

Unter Voraussetzung dieser Idee kann man das Verfahren, das bei der Berechnung der „Extraabsorption“ und der „Pics“ der parallelen Orientierung verwendet wurde, verstehen. Mit dem Wert $m = -\frac{3}{2}$ wurde das Feld für das Minimum unterhalb der Nulllinie des Signals berechnet, und gesagt, dass dies die Stellung des „Pics“ sei. Der Wert des Feldes und der Spitze des Signals, welches oberhalb der Nulllinie liegt, wurde als Stellung der „Extraabsorption“ angenommen.

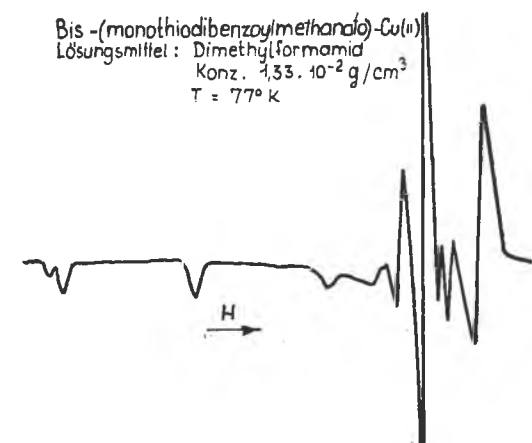


Abb. 4.

4. Das Vorhandensein der beiden Isotope des Cu(II) bedingte das Erscheinen der Idee von dem Vorhandensein der Extraabsorption. Gersman und Swalen berichteten zuerst vom Vorhandensein der „Extraabsorption“ im Falle des Bis-(diäthylthiocarbamato)-Cu(II) [6]. Sie wurde auch für den Fall des Bis-(acetylacetonato)-Cu(II) nachgewiesen und dann wurde ihre Stellung im Spektrum dieser Substanz berechnet. Die „Extraabsorption“ tritt im Fall des Bis-(acetylacetonato)-Cu⁶³(II) nicht auf [5].

Das Vorhandensein der beiden Isotope könnte eine Struktur des Signals von ungewöhnlicher Form hervorrufen.

5. Die „Extraabsorption“ weist eine Struktur von zwei Signalen auf (Abb. 5). Über das Vorhandensein der isotopischen Aufspaltung in den „Pics“, der am äussersten Ende des schwachen Feldes liegt, wurde schon früher gesprochen [6].

Das ist in Abbildung 3,4 und 5 ersichtlich.

Laut unserer Interpretation der „Extraabsorption“, erscheint das Signal dank der beiden Isotope $\text{Cu}^{63}(\text{II})$ und $\text{Cu}^{65}(\text{II})$ mit der schon früher erwähnten Eigenheit. Da an beiden Enden des Spektrums ähnliche Strukturen erscheinen, lässt sich folgern, dass die Signale derselben Gruppe angehören.

Es ergibt sich nun das Problem der Interpretation der Spektren aus Abbildung 3 und 4. Das Bis-(acetylacetonato)- $\text{Cu}^{63}(\text{II})$ Spektrum aus Arbeit [5] kann uns zur Orientierung dienen. Hier (bei 77°K) ist das Signal,

das am äussersten Ende des hohen Feldes liegt, sehr scharf und stark von den anderen, die der Absorption aus der senkrechten Orientierung angehören, distanziert.

Wie aus Abbildung 3 und 4 ersichtlich ist, distanziert sich das Signal, das an den äussersten Enden des hohen Feldes liegt, viel und scharf von den anderen, im Vergleich mit der „Extraabsorption“ aus Abbildung 5,6 und 8. Diese Tatsache lässt sich auf die starke Polarität des Lösungsmittels zurückführen — so wie es aus Arbeit [6] ersichtlich ist —, aber auch auf einen Überlagerungseffekt oder eventuell auf eine zusätzliche Koordinierung.

6. Es lässt sich nun die Frage stellen: welches von den fünf Signalen (unter Weglassung jeder vorher erwähnten Meinung), die im Berei-

che des hohen Feldes liegen, gehört der senkrechten Orientierung und welche der Absorption der parallelen Orientierung an? Die Antwort ergibt sich von selbst, wenn man die superhyperfeine Wechselwirkung in Betracht nimmt.

In Abbildung 7 ist das Spektrum des Bis-(diäthylthiophosphato)- $\text{Cu}(\text{II})$ in Benzollösung bei $T = +25^\circ\text{C}$ dargestellt.

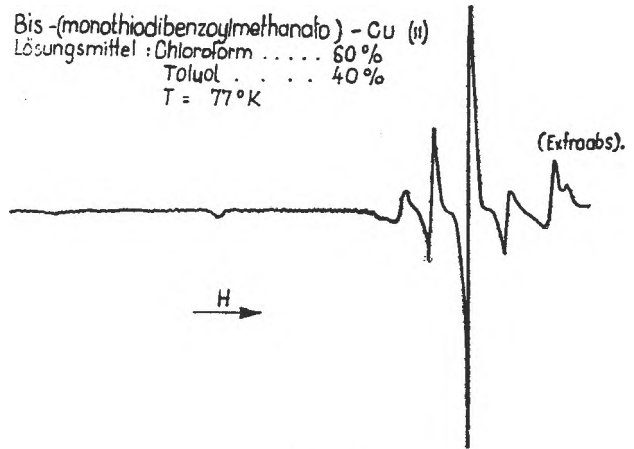


Abb. 5.

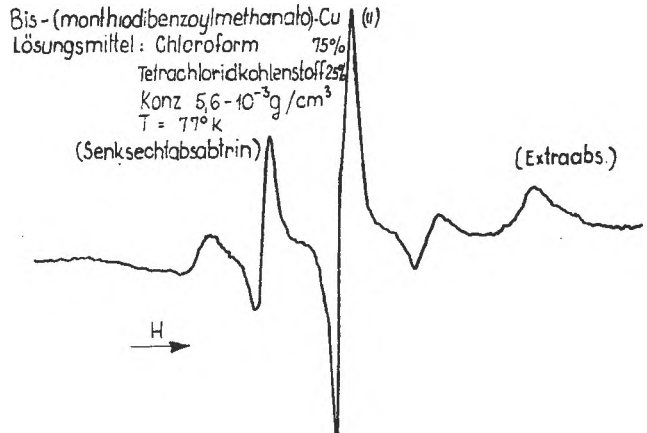


Abb. 6.

Man kann die hyperfeine Struktur aus vier Linien, sowie die sehr gut aufgelöste superfeine aus drei Linien bestehend fast auf dem ganzen Spektrum erkennen. Die letzteren sind auf jede hyperfeinen Linie befestigt und durch die Wechselwirkung des ungepaarten Elektrons mit den beiden P^{31} -Kernen, die sich im Molekül befinden, hervorgerufen ($I_{P^{31}} = \frac{1}{2}$). Auf dem Signal des äussersten Endes des hohen Feldes sind tatsächlich 4 Signale befestigt. Eines wird durch das $Cu^{65}(II)$ hervorgerufen [13]. Diese superfeine Wechselwirkung

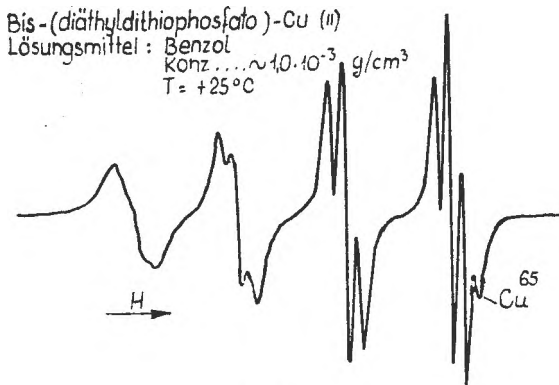


Abb. 7.

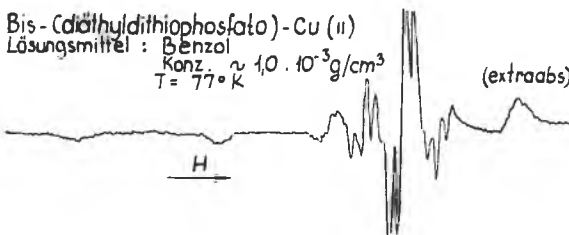


Abb. 8.

lässt sich auch in den eingefrorenen Lösungen (Abb. 8) in den Signalen der senkrechten Orientierung wieder finden (je drei auf einer jeden).

Bei einer starken Verstärkung kann man auf den Pics der parallelen Orientierung drei Signale wahrnehmen. Die „Extraabsorption“ lässt sich sehr gut erkennen und erscheint als ein „Pic“, der gegenüber jenen aus dem Bereich des schwachen Feldes, umgekehrt beschrieben wird. Prüft man die Spektren aus Abbildung 5, 6 und 8, dann geht zweifellos hervor, dass die „Extraabsorption“ nicht existiert. Es existiert nur ein „Absorptionspic“ aus der parallelen Orientierung, der gegenüber jenen aus dem Bereiche der schwachen Felder umgekehrt beschrieben wurde und schärfer als jene erscheint. Das Spektrum des Cu(II)-Phtalocyanins, welches Neiman und Kivelson [2] erhielt, weist neun Signale bei jedem „Pic“ aus dem Bereiche des schwachen Feldes auf.

Im Bereiche des starken Feldes erscheinen zwei Gruppen von je neun Linien. Das Vorhandensein von neun Linien der superhyperfeinen Struktur ist auf das Vorhandensein im Molekül von vier äquivalenten Stickstoffatomen ($I_N = 1$) zurückzuführen. Die Temperaturabhängigkeit der beiden Signalgruppen ist verschieden und das heisst, dass sie nicht derselben Kategorie angehören.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die erste Gruppe, und zwar die schärfere, der Absorption aus der senkrechten Orientierung, hingegen die andere der parallelen Orientierung angehört. Die Tatsache, dass die letzte Gruppe schärfer ist als die Signale der anderen „Pics“, ist mit Hilfe der von uns der „Extraabsorption“ gegebenen Interpretation leicht zu verstehen. Sie erscheinen schärfer, weil das ganze Signal (Pic) schärfer ist als jenes aus der parallelen Orientierung.

Larins Bemerkung (9), dass die superhyperfeine Struktur des „totalen Absorptionssignals“ im allgemeinen gut aufgelöst erscheint, kann auch in diese Interpretation eingeschlossen werden.

Aus Mangel von Übereinanderschichtung und aus dem Grunde, dass sie schärfer als die anderen „Pics“ sind, kann die „Extraabsorption“ beim Erkennen der Anzahl der Ligandenatome im Molekül nützlich sein.

Diskussion und Schlussfolgerungen. Bei einer grossen Kategorie von inneren Komplexen erscheint die hyperfeine Struktur nicht völlig aufgelöst in der Aborption aus der senkrechten Orientierung.

Häufiger ist der Fall, wenn diese in zwei weiteren Signale aufgespalten ist, über er in manchen Fällen die superhyperfeine Struktur liegt.

Es kommen häufig Fälle vor, in denen bei Studien von Monokristallen der Cu(II)-Chelate bei der Interpretation ihrer Spektren das Vorhandensein von zwei nichtäquivalenten magnetischen Komplexen angenommen wird. Es werden keine Einzelheiten über die Art dieser Komplexe gegeben.

Im Falle der Cu(II)-Chelate mit β -diketone kann die Möglichkeit des Vorhandenseins einer „cis-trans“ Isomerie angenommen werden. Aus den EPR-Studien kann man in dieser Beziehung noch keine gültigen Schlüsse ziehen. Wenn die zwei Komplexe auf das Vorhandensein von $\text{Cu}^{63}(\text{II})$ und $\text{Cu}^{65}(\text{II})$ im Molekül zurückzuführen wären, würde das bedeuten, dass sehr starke isotopische Effekte existieren. Die beiden Maxime könnten dem Vorhandensein der beiden nichtäquivalenten magnetischen Komplexe zugeschrieben werden. Es ist gleichgültig ob die Aufspaltung dem Mitwirken der beiden Komplexe zugeschrieben werden kann oder nicht, das Übereinanderschichten der „Pics“ von Seiten des hohen Feldes trägt um Erscheinen dieser Aufspaltung im Bereiche des hohen Feldes bei. Wir nahmen vom Neuen das Studium des Bis-(diäthylthiophosphato)-Cu(II) auf, das vorher von N. S. Garifianov und B. Kozyrev [13] studiert wurde, um das „Extraabsorptionssignal“ zu verfolgen und weil es ein Chelat mit Schwefelligandenatomen ist. Bei dieser Gelegenheit fanden wir die Ergebnisse aus der Literatur wieder (Tabelle 1) und führten noch andere Studien zur Vervollständigung aus.

Tabelle 1

Band	g_0	g_{\parallel}	g_{\perp}	a_0 gauss	$ A_{\parallel} $ gauss	$ B $ gauss	a^P gauss
X	2,045	2,081	2,024	70	151	28	8,9
K	2,047	—	—	70	—	—	8,9
X [13]	2,047 $\pm 0,001$	—	—	$7,3 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}	—	—	8 ± 1

In Abbildung 8 geben wir ein vollständiges Spektrum in eingefrorener Lösung, in dem in der Literatur fehlenden „Pic“ vom äussersten Ende des schwachen Feldes inbegriffen, wieder. Hier hoben wir die drei Signale der superhyperfeinen Wechselwirkung hervor.

Auf der schärferen Absorptionslinie in der senkrechten Orientierung (Abb. 8) hoben wir die von Garifianov und Kozyrev [13] vorausgesehenen sechs Signale hervor. Die Voraussetzung, dass das Auflösen und Erscheinen der sechs Signale auf das Übereinanderschichten einer rhombischen Komponenten über das

axiale Feld zurückzuführen wäre, ist möglich, aber wir nehmen an, dass dazu noch keine genügende experimentelle Unterlage vorhanden ist.

Hinweise in diesem Sinn erhielten auch wir beim Bis-(monothiodibenzoylmethanato)-Cu(II).

Trotzdem scheint es wahrscheinlicher, dass die Struktur dem Vorhandensein der beiden Isotope zu verdanken ist, die das Erscheinen der superhyperfeinen (isotopischen) aufgelösten Struktur verursachen [3,4].

In Abbildung 6 sieht man, dass das stärkere Signal einen schwachen Anfang der Auflösung in zwei (isotopische) Komponenten aufweist.

Die von uns vorgenommenen Messungen der Substanz im X-Band bei Zimmertemperatur (Abb. 7) geben genau das Spektrum aus der Literatur wieder [13]. Das von uns erhaltene Spektrum im K-Band zeigt die hyperfeine Struktur im tiefen Bereich des Feldes schwächer aufgelöst, während die superhyperfeine Struktur in diesem Bereich nicht mehr aufgelöst ist. Daraus geht hervor, dass die Brownsche Umdrehung viel kleiner als die Larmoorfrequenz ist, die dem K-Band entspricht. Die Grössenordnung ist die der Larmoorfrequenz, welche dem X-Band entspricht, was aus der viel besseren Auflösung des Spektrums bei Zimmertemperatur [14] und bei dieser Mikrowellenfrequenz hervorgeht. Das Bis-(monothiodibenzoylmethanato)-Cu(II) wurde bis jetzt in der Literatur noch nicht studiert. In einer Note [16] hoben wir einige studierte Probleme der Cu(II)-Chelate mit β -diketone hervor.

Die Messungsergebnisse mit den aus den Spektren bestimmten magnetischen Parametern werden wir in einer nachfolgenden Arbeit bekanntgeben.

Als Schlussfolgerung:

Das Signal der „Extraabsorption“, oder „totaler Absorption“ bzw. ein „zusätzliches Signal“ existiert nicht als solches. Es ist ein Signal („Pic“), dass der Absorption aus der parallelen Orientierung vom äussersten Ende des Spektrums aus dem Bereiche der hohen Felder, angehört.

Es kann eine besondere Form annehmen, als Effekt der Überlagerungen, die durch das Vorhandensein der beiden Isotope des Cu⁶³ und Cu⁶⁵ hervorgerufen werden, als Lösungsmittel und Temperatureffekt für bestimmte Substanzen.

Die Tatsache, dass wir dieses spezielle Signal bei den Cu(II)-Chelaten mit Schwefelligandenatomen verfolgten, ist den Eigenschaften, sehr schmale EPR-Linien der hyperfeinen Struktur aufzuweisen zu verdanken. Aus diesem Grunde erscheint die isotopische Struktur aufgelöst und im Falle des Vorhandenseins der superhyperfeinen Wechselwirkung sind diese genügend gut aufgelöst, um das Spektrum nicht unnötig zu überladen. Ausserdem sind die Cu(II)-Chelate mit Schwefel sehr passend zum Studium der Lösungsmittel, der Substituenten und Temperatureffekte und wahrscheinlich auch zum Studium der Isotopeneffekte.

In Zusammenhang mit den zusätzlichen Signalen haben wir beim Bis-(monothiodibenzoylmethanato)-Cu(II) andere Signale als die an die „Extraabsorption“ sowohl in flüssigen wie in eingefrorenen Lösungen gebunden sind, hervor (Abb. 1) [16]. Diese Signale schreiben wir den verbotenen Übergängen $\Delta m = \pm 1$ zu. Wichtig erscheint die Tatsache, dass diese „verbotenen Übergänge“ auch bei erhöhten Temperaturen in Lösungsmitteln von geringer Zähigkeit erhalten bleiben. Sorgt man für eine genügende Durchschnittlichkeit der Anisotropien, wird das Vorhandensein des Dimerzustandes oder des Einflusses einer rhombischen Komponenten ausgeschlossen.

L I T E R A T U R

1. Sands R. H., Phys Rev. **99**, 1222 (1955).
2. Robert Neiman, Daniel Kivelson, J. Chem. Phys. **1**, 156 (1961).
3. V. F. Anufrienko, E. K. Mamaeva, N. P. Kcier, Dokl. Ak. Nauk., **5**, 1059 (1964)
4. V. F. Anufrienko, A. P. Seif, Dokl. Ak. Nauk., **1**, 116 (1966).
5. Raymond Wilson and Daniel Kivelson IV, J. Chem. Phys. **44**, 4445 (1966).
6. Gersman H. R., Swalen J. P., J. Chem. Phys. **12**, 3221 (1962).
7. E. Billig, Raymond Williams, I. Bernal, Inorg. Chemistry, **5**, 663 (1964).
8. T. Vännngard, R. Aasa, *Paramagnetic Resonance*, ed. by W. Low. Acad. Press, New-York, V. II. 1963.
9. G. M. Larin, J.C.X, **5**, 391 (1965).
10. G. M. Larin, B. M. Dziomko, K. A. Dunaevskaja, J.C.X, **5**, 784 (1964).
11. G. M. Larin, B. M. Dziomko, K. A. Dunaevskaja, I. K. Syrkin, J.C.X. **3**, 391 (1965).
12. L. V. Mirošničenko, G. M. Larin, I. K. Syrkin, **3**, 361 (1966).
13. N. S. Garifianov i B. M. Kozirev, J.C.X, **6**, 773 (1965).
14. A. L. Rivkin d, J. Fiz. Him. **9**, 2099 (1961).
15. E. Uhlemann, Fritsche P. Zeitschr. für anorg. u allgem. Chem. **327**, 79 (1964), 328, 180 (1964).
16. N. Vezentan, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Series Mathematica-Physica, fasc. 2, 140, (1967).

ASUPRA SEMNALULUI DE „EXTRAABSORBȚIE” DIN SPECTRELE RES ALE UNOR CHELAȚI AI CU(II) IN SOLUȚII ÎNGHEȚATE

(R e z u m a t)

În teoria lui Neiman și Kivelson asupra soluțiilor înghețate se scoate în evidență pentru chelații de Cu(II) posibilitatea de apariție a unor semnale suplimentare care iese din cadrul prevederilor teoriei lui Sands. În spectrele RES ale unor chelați ai Cu(II) în regiunea câmpului intens a fost pus în evidență un număr de cinci semnale în loc de patru, cit se prevede pentru absorbția în orientarea perpendiculară. Astfel, semnalul situat la extremitatea spectrului din regiunea câmpului înalt a primit denumirea de „extraabsorbție” sau „pic de absorbție totală”. Gersman și Swalen, Larin ș.a. au reluat ideea existenței semnalelor suplimentare în spectrele chelaților de Cu(II) cu scopul de a putea defini poziția „extraabsorbției” în spectru.

În articolul de față se arată că „extraabsorbția” sau „picul de absorbție totală” nu este un semnal suplimentar ci un semnal „obișnuit” care aparține grupului de „picuri” din absorbția în orientarea paralelă, prevăzut de teoria lui Sands.

În sprijinul acestei interpretări se arată că: 1. procedeul de calcul a poziției extraabsorbției în spectru nu duce la o soluție unică.

2. Utilizarea valorii numărului cuantic magnetic $m = -\frac{3}{2}$ pentru aflarea poziției „extraabsorbției” nu are semnificație fizică.

3. Semnalul denumit „extraabsorbție” poate exista ca un „pic” asemănător celor situate la câmp slab, ca un semnal descris de ambele părți a liniei de nul în spectrul curbei derivate, sau ca un „pic” descris invers față de cele din partea câmpului slab, analog chelaților de vanadil.

4. În unele spectre apare desplicarea izotopică în „picul” situat în extremitatea câmpului slab.

5. Extraabsorbția prezintă de asemenea o desplicare. Aceasta poate să fie desplicarea izotopică apărută la extremitățile spectrului. Suprapunerea „picurilor” celor doi izotopi ar putea modifica structura semnalului de o manieră greu de recunoscut că aparține absorbției din orientarea paralelă.

6. Semnalele care aparțin absorbției din orientarea perpendiculară se recunosc după interacțiunea „superhiperfină în cazul bis-(diethyliditiofosfato)-Cu(II). Ca urmare extraabsorbția se prezintă ca un „pic” descris invers față de cele din regiunea câmpului slab.

Interpretarea făcută are la bază analogia spectrelor după literatură și a unor chelați ai Cu(II) cu β -dicetone cercetați de autor.

O atenție deosebită s-a acordat chelaților cu sulf. Dintre aceștia bis-(dialchiliditioicarbamato)-Cu(II) bis-(diethyliditiofosfato)-Cu(II) și bis-(monotiodibenzoilmetanato)-Cu(II) au constituit centrul de preocupare. Pentru ultimele substanțe sînt prezentate o parte din măsurătorile proprii.

О СИГНАЛЕ „ЭКСТРААБСОРБЦИИ“ В СПЕКТРАХ ЭПР НЕКОТОРЫХ ХЕЛАТОВ Cu(II) В ЗАМОРОЖЕННЫХ РАСТВОРАХ

(Резюме)

Теория Неймана и Кивельсона о замороженных растворах указывает на возможность появления у хелатов Cu (II) некоторых дополнительных сигналов, не предвиденных теорией Сандса. В спектрах ЭПР некоторых хелатов Cu (II), в области сильных полей, было выявлено число пяти сигналов вместо четырёх, сколько предусмотрено для поглощения в перпендикулярной ориентации. Так, сигнал, находящийся на краю спектра области высоких полей получил название „экстраабсорбции“ или „пик дополнительного поглощения“. Герсман и Свален, Ларин и др. подчеркнули идею существования дополнительных сигналов в спектрах хелатов Cu(II) с целью определения положения „экстраабсорбции“ в спектре.

В статье показано, что „экстраабсорбция“ или „пик дополнительного поглощения“ не является дополнительным, а „обыкновенным“ сигналом, принадлежащим к группе „пиков“ из поглощения в параллельной ориентации, предусмотренным теорией Сандса.

В пользу этой интерпретации показано следующее:

1. Способ вычисления положения экстраабсорбции в спектре не приводит к единому решению

2. Использование значения магнитного квантового числа $m = -\frac{3}{2}$ для нахождения положения „экстраабсорбции“ лишено физического смысла.

3. Сигнал, называемый „экстраабсорбцией“, может существовать или как „пик“, сходный с пиками расположенными в слабых полях, как сигнал, списываемый с обеих частей линии нуля в спектр производной кривой, или как „пик“, обратное списываемый по отношению к пикам области слабых полей, аналогично с ванадийскими хелатами.

4. В некоторых спектрах появляется изотопное расщепление „пика“, расположенного на краю слабых полей.

5. Экстраабсорбция также расщепляется. Это может быть изотопное расщепление, появившееся на краях спектра. Наложение „пиков“ двух изотопов могло бы изменить структуру сигнала, таким образом, что трудно увидеть принадлежит ли он поглощению в параллельной ориентации.

6. Сигналы, принадлежащие поглощению в перпендикулярной ориентации узнаются по „супергипертонкому“ взаимодействию в случае бис-(диэтилдитиофосфата)-Cu(II). Следовательно „экстраабсорбция“ является „пиком“, обратным по отношению к пикам области слабых полей.

В основе этой интерпретации лежит сходство спектров, полученных в литературе, со спектрами некоторых хелатов Cu (II) с β -дикетонами, исследованными автором.

Особое внимание уделено хелатам с серой. Из них бис-(диалкилдитиокарбамато)-Cu(II), бис-(диэтилдитиофосфато)-Cu (II) и бис-(монотиодибензоилметанато)-Cu (II) были в центре внимания. Для последних веществ приводятся часть измерений, проведенных автором.

DAS STUDIUM DER FEST-FLÜSSIGEN PHASENÄNDERUNG IM HALBLEITERSYSTEM V_2O_5 - MoO_3

L. STĂNESCU und I. ARDELEAN

In einer Reihe von Arbeiten die dem Studium der Übergänge vom festen zum flüssigen Zustand der Halbleiteroxide gewidmet sind, wie im Falle des V_2O_5 [1, 2, 3] und Bi_2O_3 [4] wurde ein plötzliches Anwachsen der Resistivität beim Schmelzen hervorgehoben, das durch das Fehlen von überzeugenden experimentellen Daten, bis jetzt noch nicht erklärt werden konnte.

Es wurde den roentgenographischen Studien gemäss festgestellt, dass die flüssigen Substanzen in der Nähe der Kristallisierungstemperatur einen ausgeprägten Ordnungsgrad besitzen. Diese Ordnung ist ungefähr vom selben Typ wie in den entsprechenden festen Kristallen [6, 7]. Man kann also von einem quasikristallinen Zustand sprechen [8, 9].

Unter der Annahme, dass das Prinzip der induzierten Valenz im flüssigen quasikristallinen Zustand nicht gültig ist, studierten wir die Thermogramme einer Reihe von Proben verschiedener Zusammensetzung der Systeme V_2O_5 - MoO_3 in Sauerstoff und Stickstoff beim Schmelzen und Erstarren. Gemäss der Mehrzahl der Daten aus der Literatur [10, 11, 12] sind im System V_2O_5 - MoO_3 feste Lösungen bis zu 25 Molprozenten MoO_3 und eine Verbindung von 1 Mol V_2O_5 zu 1 Mol MoO_3 nachweisbar. Münch und Pirson [13] behaupten, dass sich keine festen Lösungen bilden, sondern nur zwei Verbindungen: $Mo_9V_9O_{40}$ und $Mo_6V_6O_{25}$. Unsere Ergebnisse unterstützen, so wie es weiter unten ersichtlich wird, das erste von den Phasendiagrammen.

Laut einiger ESP-Studien induziert das Vorhandensein im Grundgitter des Vanadiumpentoxydes der Ionen Mo^{6+} [14, 15, 16] eine entsprechende Menge von V^{4+} Ionen. Da beim Schmelzen die Kohäsionskräfte schwach sind, ist zu erwarten, dass das Prinzip der Valenzinduktion nicht gültig ist und die V^{4+} -Ionen in Gegenwart von Sauerstoff in V^{5+} -Ionen durch die Absorption einer entsprechenden Menge von Sauerstoff, übergehen. Es ist anzunehmen, dass wir es, im Grunde genommen, nach einer entsprechenden Oxydierung im flüssigen Zustand, mit Molekülen von V_2O_5 und MoO_3 zu tun haben. Die Absorption des Sauerstoffes kann auf thermogravimetrischem Weg gemessen werden. Für jedes Sauerstoffmolekül muss das Oxydieren von vier tetravalenten Vanadiumionen stattfinden, ein Prozess, der durch die Elektrenspinesonanz indirekt nachgewiesen werden kann.

Versuchsergebnisse und ihre Besprechung.

a) *Zubereitung der Proben.* Es wurden Substanzen vom Reinheitsgrad p.a verwendet. Die Proben wurden in Quarztiegeln geschmolzt und hernach in Achat mörsern gemörsert.

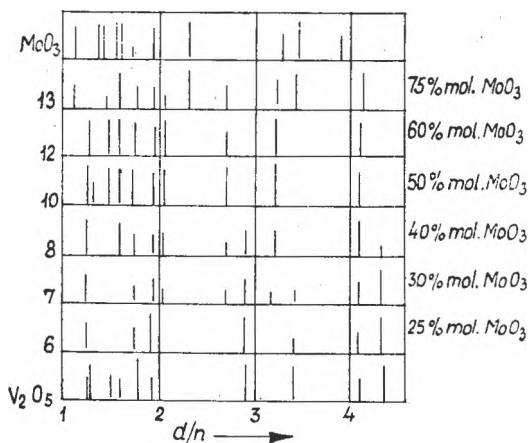
In Tabelle I sind die Konzentrationen in Mollprozenten für das System V_2O_5 - MoO_3 wiedergegeben.

Tabelle

Probenzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
V_2O_5 Molprozent	100	98	95	90	80	75	70	60	55	50	45	40	25
MoO_3 Molprozent	—	2	5	10	20	25	30	40	45	50	55	60	75

b) *Debye-Scherrer-Analyse.* Die X-Strahlenanalyse wurde mit Hilfe einer TUR Dresden-Anlage durchgeführt unter Verwendung einer Kupferantikathode.

Abbildung 1 stellt die charakteristischsten Roentgenographien dar, aus denen eine Reihe von Linien zur besseren Übersicht weggelassen werden.



A b b. 1.

Aus Abbildung 1 wird festgestellt dass in unserem Fall die Lage identisch ist mit der in der Literatur beschriebenen [10]. Bis zu 25 Molprozent MoO_3 sind nur die V_2O_5 Linien sichtbar. Bei 50 Molprozent MoO_3 werden die Linien einer neuen Verbindung festgestellt. Erst bei 75 Molprozent MoO_3 wird ihr Einfluss klarer.

c) *Infrarot-Spektren.* Die infraroten Absorptionsspektren wurden mit Hilfe eines U.R. 10 Spektrographen erhalten, indem Proben in KBr einverleibt verwendet wurden.

In Abbildung 2 ist das Spektrum für V_2O_5 dargestellt.

Das Band bei 1030 cm^{-1} ist auf die Valenzschwingungen der Verbindungen $V=O$ zurückzuführen. Das

Band bei 810 cm^{-1} wird durch die Schwingungen der Bindungen der Bindungen $-V-O-V-$ verursacht und das breite Band zwischen 450 und 600 cm^{-1} entspricht den Schwingungen des Gitters [17, 18].

In den Abbildungen 3—6 sind die I.R.-Spektren der Proben aus Tabelle I in sukzessiver Reihenfolge mit den Zahlen 4, 5, 6 und 10 beziffert, dargestellt.

Es wird festgestellt, dass das Absorptionsminimum zwischen den Maximen von 810 und 1030 cm^{-1} sich ungefähr proportionell mit dem Anwachsen der MoO_3 Konzentration bis zu 25 Molprozent MoO_3 verkleinert. Das flache Maximum zwischen 450 und 600 cm^{-1} weist in diesem Bereich praktisch keine Veränderungen auf

Das Spektrum der Probe, die dem Verhältnis 1 Mol V_2O_5 /1 Mol MoO_3 entspricht, weist eine völlig unterschiedliche Struktur auf.

Die I.R. Analyse des $V_2O_5-MoO_3$ Systems wurde zum erstenmal ausführlich in der Veröffentlichung [19] und nachher in Arbeit [20] durchgeführt.

Sowohl aus den Analysen der Roentgenographien wie auch der I.R. Spektren geht hervor, dass wir bis zu 25 Molprozent MoO_3 eine feste Lösung von MoO_3 in

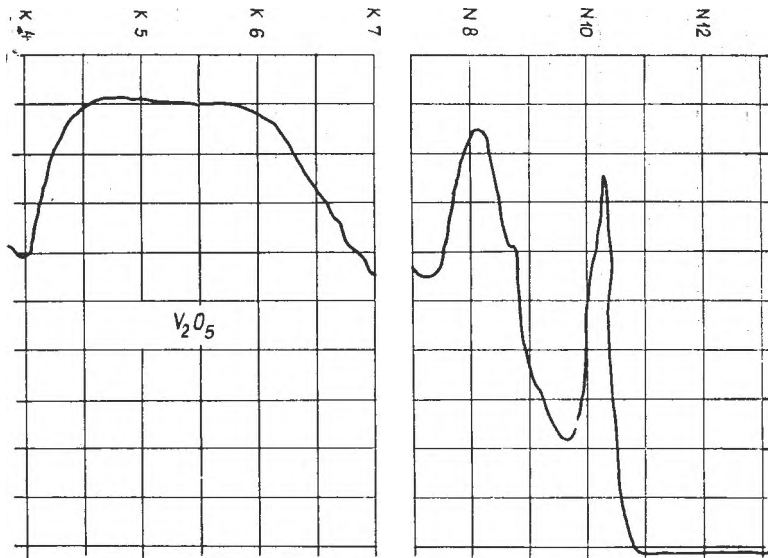


Abb. 2.

V_2O_5 haben, hingegen bildet sich für das äquimolare Verhältnis der Komponenten eine neue Verbindung.

d) *Thermogravimetrische und thermodifferentiale Analysen.* Die thermogravimetrische und thermodifferentiale Analyse wurde mit Hilfe eines ORION OD-101/676 Derivatographen durchgeführt.

In Abbildung 7 ist die Analyse einer Probe mit 20 Molprozenten MoO_3 beim Schmelzen in einer Sauerstoffatmosphäre wiedergegeben. Es wird festgestellt, dass bei ungefähr $690^\circ C$ das Schmelzen der Probe mit einer gleichzeitigen Absorption von Sauerstoff ($5,74 \text{ mg } O_2/\text{g Subst.}$) stattfindet.

Nach eingehender Betrachtung der Versuchsergebnisse kamen wir zu dem Schluss, dass das Phänomen beim Erstarren besser verfolgt werden kann als beim Schmelzen, da die Ergebnisse im ersten Fall leichter reproduzierbar und besser ablesbar sind.

Abbildung 8 zeigt den Verlauf der Erstarrung unter Ausscheidung des Sauerstoffes bei derselben Probe.

Es wird festgestellt, dass die Erstarrungstemperatur bei $630^\circ C$ liegt, also um $60^\circ C$ tiefer als die Schmelztemperatur.

Zoliani und Regel haben ihrerseits gefunden, dass die Sprünge der Resistivität beim Schmelzen und Erstarren nicht bei derselben Temperatur stattfinden, wie aus Abbildung 9 für den Fall des Vanadiumpentoxydes, mit 5 Gewichtsprozenten

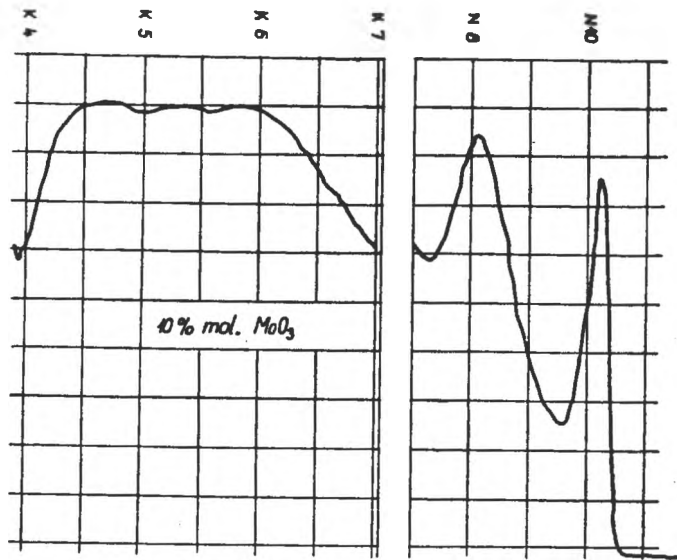


Abb. 3.

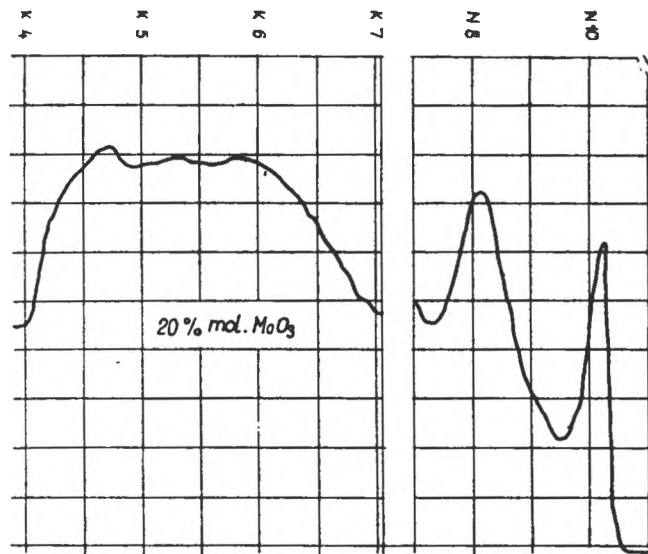
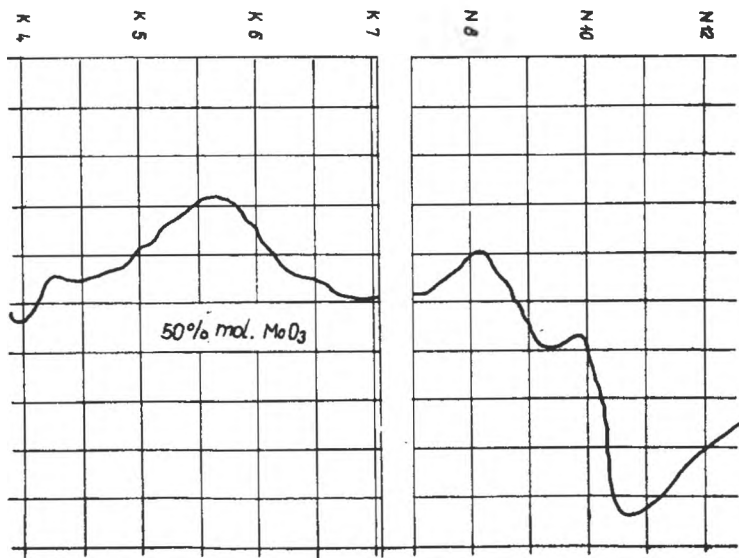
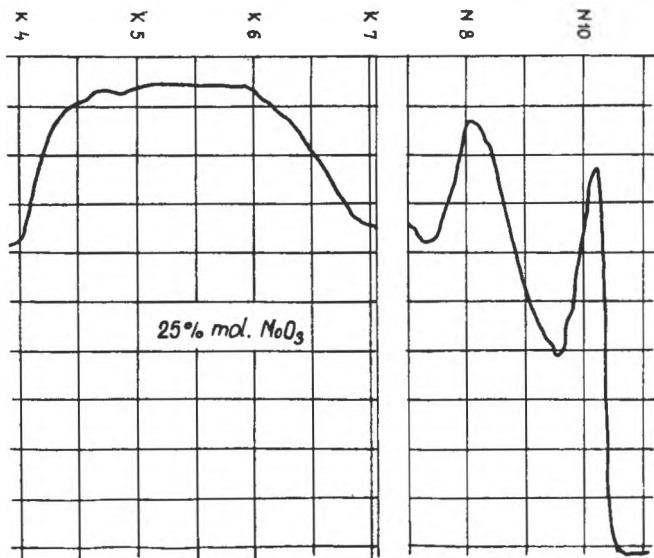
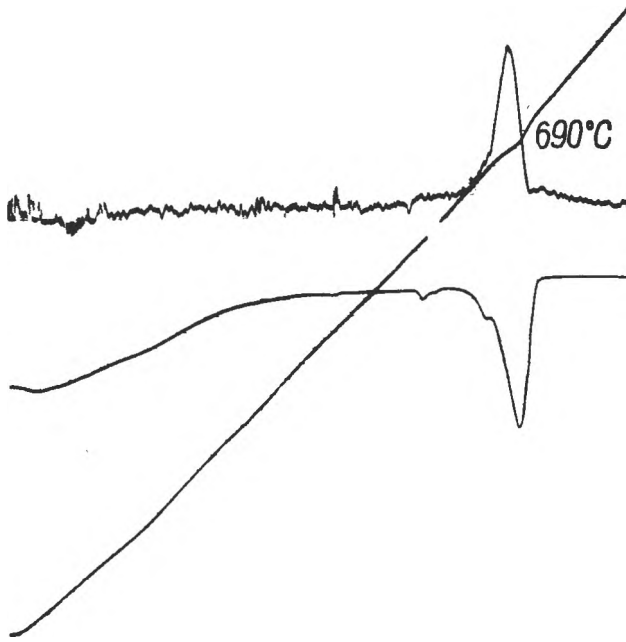


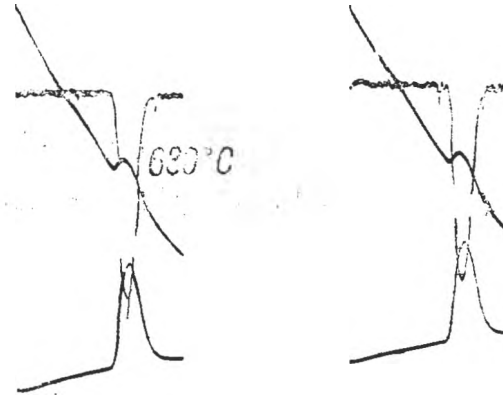
Abb. 4.





20 % mol. MoO_3
DTA = 1/20, DTG = 1/20, $S_G = 20$, $G = 1224,2 \text{ mg}$
Sauerstoffatmosphäre

Abb. 7.



20% mol. MoO₃
DTA = 1/50, DTG = 1/50, S_G = 20, G = 1224,2 mg
Sauerstoffatmosphäre

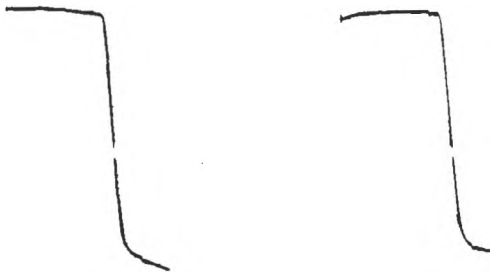


Abb. 8

Indium dotiert, ersichtlich ist [1]. Die durch die leeren Kreise gekennzeichnete Kurve entspricht dem Schmelzen.

Die Differenzen sind mit den von uns gefundenen vergleichbar. Es ist anzunehmen, dass man es mit einer Unterkühlung zu tun hat, die der Neigung des Vanadiumpentoxydes glasartige Phasen zu bilden, entspricht. Wie aus Abbildung 4 ersichtlich wird, ist die Verschiebung der beiden

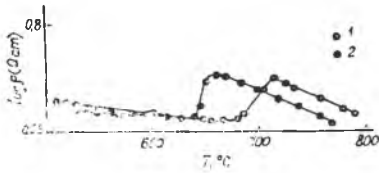


Abb. 9.

Temperaturen nicht an den Absorptionsprozess des Sauerstoffes gebunden. In diesem Fall findet das Schmelzen in Stickstoffatmosphäre statt, so wie aus Abbildung 10 ersichtlich ist, wo man feststellt, dass der Schmelzpunkt derselbe ist wie in Sauerstoff.

Eigentlich dürfte man im Falle des Stickstoffes kein Anwachsen des Gewichtes feststellen, da

das Vanadium bei einer niedrigen Valenz auch in der flüssigen Phase verbleibt. Das unbedeutende Anwachsen des Gewichtes, das trotzdem nachweisbar ist, liegt an der nicht einwandfreien Luftdichte des Derivatographen.

Es ist anzunehmen, dass die Ergebnisse von Zolian und Regel auf Grund von unseren obenangeführten Behauptungen erläutert werden können, und zwar, dass beim Schmelzen in der Luft, wie es die Autoren durchgeführt haben, die Verunreinigungen des Vanadiumoxydes von niedriger Valenz zum V_2O_5 oxydierten, wobei die Quelle der Donatoren verschwindet und die Resistenz plötzlich anwächst, da das Prinzip der induzierten Valenz im flüssigen Zustand nicht gültig ist.

Wenn die von uns aufgestellten Hypothesen gültig sind, muss eine Analogie in der Abhängigkeit der Konzentration der ungekoppelten Spinzahl, die mit Hilfe der elektronischen Spinresonanz festgestellt wurde, und der Abhängigkeit der Konzentration der beim Schmelzen absorbierten, oder beim Erstarren freiwerdenden Sauerstoffmenge nachgewiesen werden können.

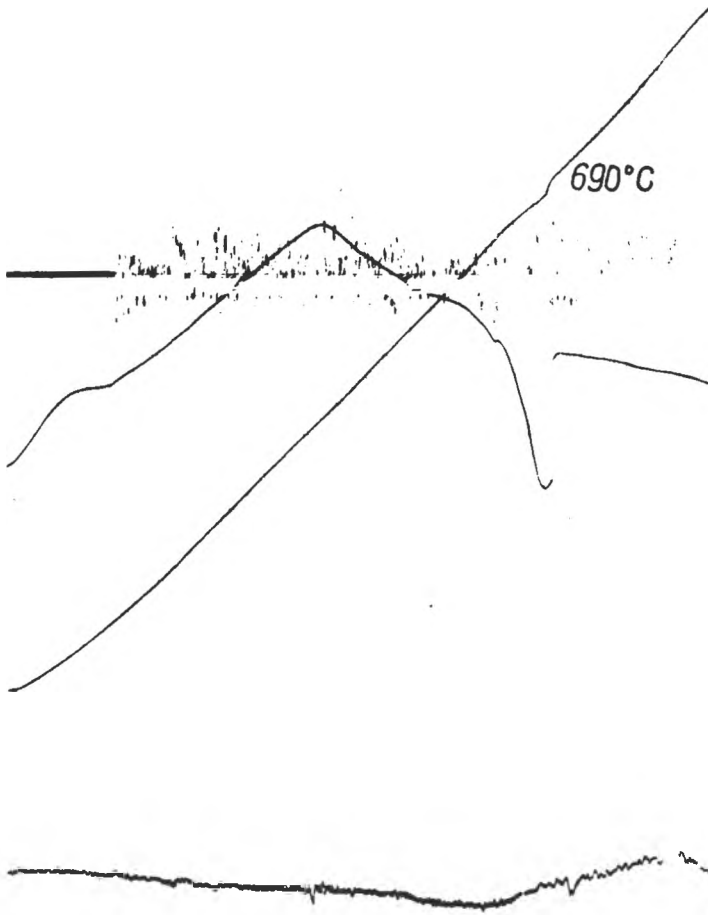
In Abbildung 11 geben wir die Abhängigkeit der frei werdenden Sauerstoffmenge beim Erstarren, die sich auf die Masseneinheit bezieht und eine Funktion der Konzentration in MoO_3 ist, wieder.

Es wird festgestellt, dass bis zu 20 Molprozent MoO_3 die freiwerdende Sauerstoffmenge proportionell mit der Konzentration in MoO_3 anwächst. Das Maximum befindet sich bei 25 Molprozent MoO_3 und zeigt die Grenze der festen Lösung an. Es wird noch ein zweites Maximum bei 50 Molprozent MoO_3 festgestellt. Aus der freiwerdenden Sauerstoffmenge folgt, dass die neue Verbindung im Verhältnis zum Sauerstoffgehalt, nicht stoechiometrisch ist.

e) *E.S.R. - Studium*. In Abbildung 12 wird die Abhängigkeit der Grösse A von der Konzentration dargestellt. Die Grösse A des Flächeninhalts der Absorptionskurve ist mit der ungekoppelten Spinzahl proportionell. Die von uns verwendete Anlage ist ein JES-3B Spektrometer. Wir arbeiteten im X. Band.

Die von uns festgestellte Abhängigkeit ist der von K a z a n s k i und Mitarbeitern [15] gefundenen vergleichbar, wobei aber von den Autoren nur eine kleine Anzahl von Konzentrationen studiert wurden und das Minimum bei 40 Molprozent MoO_3 nicht nachgewiesen wurde.

Das feste lineare Anwachsen der nichtgekoppelten Spinzahlen mit dem Anwachsen der MoO_3 -Konzentration bis zu ungefähr 25 Molprozent MoO_3 kann nur dann erklärt werden, wenn man annimmt, dass in diesem Konzentrationsbereich eine feste Lösung von MoO_3 in V_2O_5 vorhanden ist.

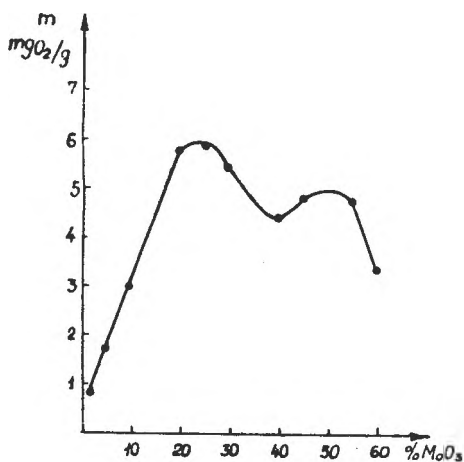


20% mol. MoO_3
DTA-1/20, DTG = 1/20, $S_G = 20$, G = 1414,5 mg
Stickstoffatmosphäre

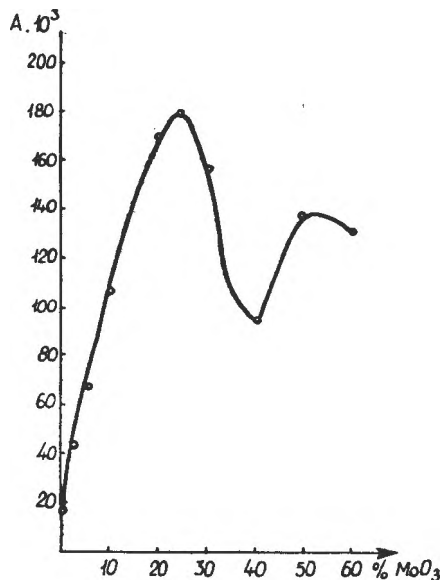
Abb. 10.

Vergleicht man die beiden letzten Abbildungen, so stellt man ein qualitativ identisches Verhalten der beiden Grössen fest.

Beachtet man die roentgenographischen Daten und jene der I.R.-Spektren, muss man das erste Modell des Phasendiagrammes für das System $V_2O_5-MoO_3$ gelten lassen.



A b b. 11.



A b b. 12.

Einleitende thermogravimetrische und elektronische Spinresonanzstudien, die auch mit dem $V_2O_5-WO_3$ -System durchgeführt wurden, weisen ebenfalls einen qualitativ identischen Verlauf für die Grössen A und m auf.

Die eingehenden Ergebnisse des letztgenannten Systems bilden die Aufgabe einer nachfolgenden Arbeit.

Schlussfolgerungen.

Die strukturellen Studien mit Hilfe der Debye-Scherrer Methode und der I.R.-Spektren bestätigen das erste der erwähnten Phasendiagramme der Systeme $V_2O_5 - MoO_3$, und stellen somit das Vorhandensein von festen Lösungen bis zu ungefähr 25 Molprozent MoO_3 fest, sowie die Bildung einer nicht stoechiometrischen Verbindung für das äquimolare Verhältnis der Komponenten.

Aus den von uns erhaltenen thermogravimetrischen Daten nehmen wir an, dass die von Zoljan und Regel veröffentlichten Sprünge der Resistivität erklärt werden können, indem man annimmt, dass das Prinzip der induzierten Valenz im flüssigen quasikristallinen Zustand nicht gültig ist. Es bleibt noch übrig Messungen der elektrischen Resistivität beim Schmelzen und Erstarren in Sauerstoff und inerte Atmosphäre durchzuführen, um in dieser Beziehung zu endgültigen Schlüssen zu kommen. Wir beabsichtigen ebenfalls magnetische Suszeptibilitäts- und ESR-Messungen beim Schmelzen und Erstarren in kontrollierter Atmosphäre durchzuführen.

În der Arbeit wurden die ESR-Messungen von Kazanski und Mitarbeitern ergänzt, wobei ein Minimum bei 40 Molprozent MoO_3 festgestellt wurde, welches auch durch die thermogravimetrischen Ergebnisse bestätigt wird.

Man kann die thermogravimetrische Methode, die sich der Umwandlung vom flüssigen zum festen Zustand bedient, zum Studium der Oxyde mit induzierter Valenz, die einen nicht zu hohen Schmelzpunkt haben, verwenden. Wir nehmen an, dass alle Systeme auf Grund von V_2O_5 auf diese Weise studiert werden können. Wir beabsichtigen auf diese Weise unter anderem auch die Vanadiumbronze zu studieren.

Diese Methode kann als ein Hilfsmittel zur Bestimmung der Phasendiagramme dieser Systeme betrachtet werden.

(Eingegangen am 5. September 1968)

L I T E R A T U R

1. T. S. Zolian, A. R. Regel, F.T.T., **6**, 1520 (1964).
2. V. A. Jurkov, J.E.T.F., **22**, 223 (1952).
3. V. L. Ziazev, O. A. Esin, J.T.F., **28**, 18 (1958).
4. T. S. Zolian, A. R. Regel, F.T.T., **28**, 18 (1958).
5. A. I. Beliaev, E. A. Zemčužina, L. A. Firsanova, *Fiziceskaia chimia rasplavlennykh solei*, Moskva, 1957.
6. G. Breitling, International Colloquium on Amorphous and Liquid Semiconductors (Abstracts), S. 11, București, 1967.
7. H. Richter, International Colloquium on Amorphous and Liquid Semiconductors (Abstracts), S. 13, București, 1967.
8. R. C. Evans, *Einführung in die Kristallchemie*, Leipzig, 1954.
9. Iosif Imreh, *Cristalografie*, București, 1966.
10. I. I. Joffe, Z. I. Ežkova, A. G. Ljubarskij, *Kinetika i Kataliz*, **3**, nr. 2 (1962).
11. I. I. Joffe, Z. I. Ežkova, A. G. Ljubarskij, J.F.H., **35**, 2348 (1961).
12. V. L. Zaicev, Z. I. Ežkova, I. I. Joffe, *Kinetika i Kataliz*, **7**, 755 (1966).
13. L. J. a. Margolis, *Geterogennoe kataliticeskoe okislenie uglevodородov*, Leningrad, 1967.
14. C. V. Dmitrievna, V. A. Joffe, I. B. Patrina, F.T.T., **7**, 2754 (1965).
15. V. B. Kazanskij, Z. I. Ežkova, A. G. Ljubarskij, V. V. Voevodskij, I. I. Joffe, *Kinetika i Kataliz*, **2**, 862 (1951).
16. E. Gillis, E. Boesman, *Pays. stat. Sol.*, **14**, 349 (1966).
17. Barraclough, J. Lewis, R. S. Nyholm, *J. Chem. Soc.*, 3552 (1959).
18. S. Blanchard, *Journ. de Chim. Physique*, **61**, 747 (1964).
19. I. Ursu, L. Stănescu, *Colocviu! de fizica solidului*, p. 28, București, 1964.
20. V. L. Zaicev, Z. I. Ežkova, I. I. Joffe, *Kinetika i Kataliz*, **7**, 755 (1966).

STUDIUL TRANSFORMĂRII DE FAZĂ SOLID-LICHID ÎN SISTEMUL SEMICONDUCTOR $\text{V}_2\text{O}_5\text{-MoO}_3$

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele determinărilor de analiză termogravimetrică la transformarea solid-lichid și lichid-solid în sistemul $\text{V}_2\text{O}_5\text{-MoO}_3$.

Rezultatele obținute prin studii de rezonanță electronică de spin în stare solidă, analiză Debye-Scherrer și spectre I. R. se compară cu cele termogravimetrice.

Folosind metodele amintite se precizează diagrama de fază a sistemului semiconductor $\text{V}_2\text{O}_5\text{-MoO}_3$. Se fac considerații asupra valabilității principiului valenței induse pentru substanțe aflate în stare lichidă cvasicristalină, propunându-se o explicație privind particularitățile menționate în literatură pe care le prezintă rezistivitatea electrică a unor oxizi semiconductori la topire.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОЕ СОСТОЯНИЕ—ЖИДКОСТЬ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СИСТЕМЕ $V_2O_5-MoO_3$

(Резюме)

Авторы приводят результаты определений термогравиметрического анализа при превращении твёрдое состояние—жидкость и жидкость—твёрдое состояние в системе $V_2O_5-MoO_3$.

Результаты, полученные путём исследований электронного парамагнитного резонанса в твёрдом состоянии, анализом Дебай-Шеррера и анализом в ИК области, сравниваются с термогравиметрическими результатами.

Используя упомянутые методы, уточняется фазовая диаграмма полупроводниковой системы $V_2O_5-MoO_3$.

Авторы делают соображения о действительности принципа индуцированной валентности для веществ, находящихся в квазикристаллическом жидком состоянии, и предлагают объяснение особенностей — упомянутых в литературе — удельного сопротивления некоторых полупроводниковых оксидов при плавлении.

DAS STRUKTURELLE UND MAGNETISCHE STUDIUM DES LEGIERUNGSSYSTEMS NICKEL-GOLD-KUPFER

JULIU POP, LUCIA MAXIM und IOAN MAXIM

Einführung. Das magnetische Verhalten der ternären Legierungen auf Grund von Nickel, wie Ni-Au-Al, Ni-Cu-Zn, Ni-Cu-Mn, [1, 4] eröffnet eine Reihe von interessanten Problemen der magnetischen Ordnung, da sich die Nickelatome in ferrimagnetischen Untergittern anordnen. Das Modell der ferrimagnetischen Nickeluntergitter wird vor allem durch das magnetische Verhalten des ganz besonderen Legierungssystems Ni-Cu-Zn veranschaulicht, welches sich durch das Vermindern der Nickelkonzentration unter 80 Atomprozent ausgeprägt ferrimagnetisch verhält. Indem wir den Leitfaden unserer vorangehenden Arbeiten verfolgten, begannen wir ein strukturelles und magnetisches Studium des ternären Legierungssystems Ni-Au-Cu, welches bisher nur vom magnetischen Gesichtspunkt aus studiert wurde und zwar bezüglich des Phasenumwandlungspunktes Ordnung — Unordnung [5, 6].

Zubereitung der Proben und Versuchsmethoden. Es wurden neun Legierungen zubereitet, die nach der Nickelkonzentration in drei Gruppen eingeteilt werden und zwar: 90 Atomprozent Ni, 80 Atomprozent Ni und 70 Atomprozent Ni; die Gold- und Kupferkonzentration ändert sich nach dem Verhältnis 2:1; 1:1; und 1:2 laut Tabelle 1. Die Proben wurden aus Metallen von elektrolytischem Reinheitsgrad, durch Schmelzen im Vakuum zubereitet. In luftleeren, Quarzampullen eingeschlossen, wurden sie zur Homogenisierung 12 Stunden bei 1000°C einer thermischen Behandlung unterzogen und, um das Vorhandensein der festen Flüssigkeit zu gewährleisten, hernach plötzlich gehärtet. Es wurden gehärtete und auch nicht gehärtete Proben studiert. Da sowohl die Studien der Struktur, wie auch das Gleichgewichtsdiagramm fehlen, wurde zuerst ein strukturelles Studium mit X-Strahlen durch die Debye-Methode mit Hilfe einer TUR M60-Anlage mit einer Kobaltkathode ($\lambda = 1,7871 \text{ \AA}$, K-Strahlung) durchgeführt. Die magnetische Suszeptibilität wurde im paramagnetischen Bereich mit Hilfe einer magnetischen Waage mit mechanischer Kompensation unter Verwendung einer Nullmethode gemessen. Die Empfindlichkeit der Anlage beträgt $10^{-7} \text{ cm}^3/\text{g}$ [7].

Tabelle 1

N:	NiAtom- prozent	AuAtom- prozent	CuAtom- prozent
1	70	20	10
2	70	10	20
3	70	15	15
4	80	10	10
5	80	13,3	6,7
6	80	6,7	13,3
7	90	6,7	3,3
8	90	3,3	6,7
9	90	5	5

Versuchsergebnisse und ihre Interpretierung. Aus den X-Strahlenspektren wird festgestellt, dass die Anzahl der den Komponenten spezifischen Reflexionen sich bei den gehärteten Proben, gegenüber den ungehärteten, vermindern und gleichzeitig werden die übriggebliebenen Reflexionen schärfer. Die interplanaren Abstände d/n , die Reflexionsflächenindexe, die Intensität der Reflexion (in relativen Einheiten) und die Parameter der Gitter, die aus den Spektren berechnet wurden, sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

1				2				3				4				5	
d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I
1,3006	8	220	3,6787	1,2667	6	220	3,5827	1,2864	8	220	3,635	1,2864	8	220	3,5532	1,2823	8
1,3587	1	520	7,410	1,3437	4	520	7,25					1,3533	6	511	7,18		
1,4819	1	500	7,320					1,4852	4	422	7,28					1,4908	3
1,8377	8	200	3,6754	1,7908	6	200	3,5816	1,8105	7	220	3,6210	1,7858	7	220	3,571	1,8195	7
				1,9026	4	321	7,13					1,9306	6	321	7,22		
2,1221	10	111	3,6751	2,0683	9	111	3,5825	2,1031	10	111	3,6427	2,0636	10	111	3,527	2,1012	10
				2,1981	6	311	7,28					2,2302	8	310	7,05	2,2545	1
2,3605	1	310	7,46	2,3832	1	300	7,22	2,3829	2	300	7,15					2,4313	2
								2,4446	2	300	7,32						

Aus der Tabelle lässt sich für alle Proben das Vorhandensein von 3 systematischen Reflexionen feststellen: (220), (200) und (111), die dem Zustand der festen Lösung spezifisch sind. Diese Reflexionen haben gegenüber der Konzentration der Legierung eine gleichbleibende stark ausgeprägte Intensität (hohe Werte), die dem Nickelgitter charakteristisch ist.

In den X-Strahlenspektren lässt sich neben den Hauptreflexionen, mit Ausnahme der Proben Ni 90%, Au : Cu 1 : 1 und Ni 90%, Au : Cu 1 : 2 das Erscheinen einer sehr schwachen Reflexion feststellen, deren Werte d/n sich klar von denen der Komponenten sowie der festen Lösungen unterscheiden. Die Erklärung, die wir dieser Erscheinung gaben ist die, dass diese Reflexion einer Superstruktur (intermetallische Verbindungen) mit einfachem kubischen Gitter mit dem Parameter $a = 7,227 \text{ \AA}$ angehören (das doppelte der retikulären Konstante des kubischen Gitters mit zentrierten Flächen). Die retikuläre Konstante der entdeckten Superstruktur ändert sich wahrnehmbar mit dem Gold- und Kupfergehalt der Legierung.

Auch in den Spektren der ungehärteten Proben wurde das Vorhandensein der Linien der Superstruktur bemerkt, doch mit anderen d/n . Werten.

Diese Tatsache beweist, dass die thermische Behandlung in erster Linie die Beschaffenheit der Superstruktur angreift. Die Abänderung der Superstruktur zieht auch Abänderungen des magnetischen Verhaltens dieser Legierung nach sich.

Alle Legierungen haben im nichtgehärteten Zustand ein normales magnetisches Verhalten, die Abhängigkeit der reziproken magnetischen Suszeptibilität von der Temperatur aber ist laut dem Curie-Weiss'schen Gesetz linear. Die vorerst gehärteten und auf ungefähr 1150°K wieder aufgewärmten Proben weisen beim Abkühlen ebenfalls eine Curie-Weiss'sche Abhängigkeit der Suszeptibilität auf, mit dem Unterschied, dass die Curietemperatur um ungefähr $150\text{--}200^\circ$ anwuchs und das bedeutet, dass das Gitter in Folge der thermischen Behandlung einem bestän-

digeren Gleichgewichtszustand zustrebt, und dass die ferromagnetische Wechselwirkung anwächst.

Die Werte der effektiven magnetischen Momente und der ferromagnetischen Curiepunkte der thermisch behandelten Proben sind in Tabelle 3 enthalten.

Die gehärteten Proben mit grossem Goldgehalt (20, 15 und 13,3 Atomprozent), weisen eine abweichende Abhängigkeit der Suszeptibilität auf und haben so wie aus Abbildung 1, in der die Änderung der Suszeptibilität mit der Temperatur

Tabelle 2

		6				7				8				9			
hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a	d/n	I	hkl	a
220	3,6268	1,2779	8	220	3,6144	1,2655	8	220	3,5793	1,2655	8	220	3,5738	1,2782	8	220	3,6039
422	7,30	1,4933	2	422	7,31	1,4489	1	422	7,10								
200	3,6390	1,8080	8	200	3,6160	1,7956	8	200	3,5914	1,7957	8	200	3,5914	1,8078	8	200	3,6156
						2,0696	10	111	3,5847	2,0614	10	111	3,5705	2,0841	10	111	3,5638
						2,2832	2	310	7,23								
111	3,6394	2,0880	10	111	3,6166												
310	7,14	2,3165	1	310	7,31												
300	7,28	2,4377	1	300	7,31												

für die Probe 70 Atomprozent Ni, 15 Atomprozent Au, 15 Atomprozent Cu (die anderen Proben haben ein gleichartiges Verhalten), ersichtlich ist, ein ausgeprägtes Maximum bei 750°, 800° und 760°K. In der Abbildung ist (1) die Experimentalkurve und (2) eine hypothetische Kurve für den Fall einer antiferromagnetischen Substanz, die der Auslegung des Ergebnisses dienen soll. Macht man nun die Differenz zwischen der hypothetischen Kurve (2) und der Experimentalkurve (1), erhält man Kurve (3), die keine Abweichungen mehr aufweist, aber durch einen rascheren Abfall der Temperatur, als sich aus dem Curie-Weiss'schen Gesetz ergibt, gekennzeichnet wird. Wird nun für Kurve (3) die reziproke Grösse $1/\chi$ (T) dargestellt, erhält man eine dem Verhalten der ferrimagnetischen Substanzen mit der Temperatur im paramagnetischen Bereich vergleichbare Abhängigkeit, also eine hyperbolische Abhängigkeit vom Néelschen Typ, so wie aus Abbildung 2 ersichtlich ist, also $1/\chi = 1/\chi_0 + T/c - \sigma/T - \theta$, wo χ_0 , c , σ und θ Konstanten sind, die von den Koeffizienten des Molekularfeldes abhängen.

Aus Analysen der Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität kann gesagt werden, dass die oben erwähnten Legierungen mit grossem Goldgehalt, oberhalb des Curiepunktes, ein ferromagnetisches Benehmen haben, so als ob im Gitter gleichzeitig zwei übereinanderliegende magnetische Strukturen, eine antiferromagnetische und eine ferrimagnetische vorhanden wären. Diese Hypothese wird auch durch das X-Strahlenspektrum bekräftigt, das neben den Reflexionen des Grundgitters, kubisch mit zentrierten Flächen (220), (200) und (111) auch Reflexionen die der Superstruktur mit einfachem kubischen Gitter

Tabelle 3

Nr.	$P_p, \mu B$	$T_c, ^\circ K$
1	1,323	315
2	1,085	344
3	1,43	409
4	—	410
5	1,46	440
6	1,05	433
7	1,58	515
8	1,77	535
9	1,56	518

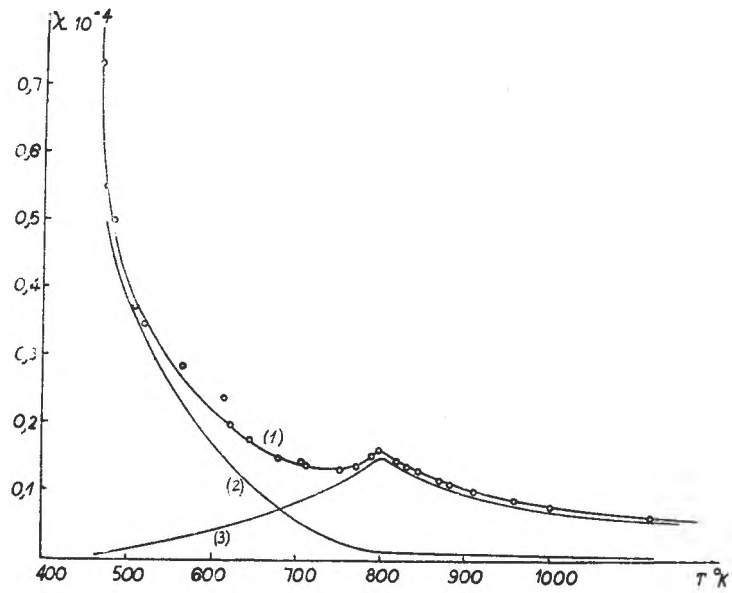


Abb. 1.

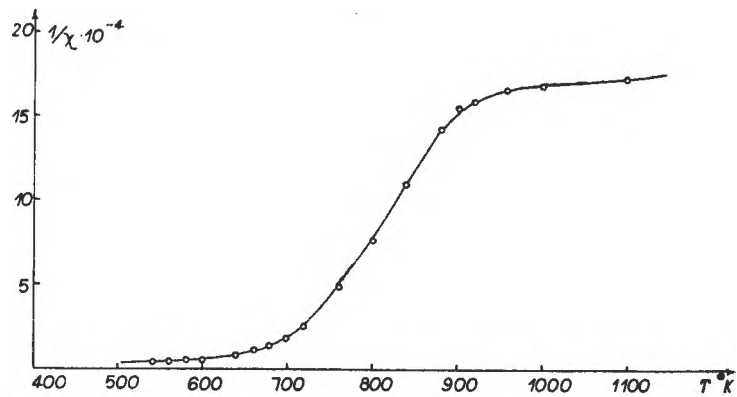


Fig. 2

Abb. 2.

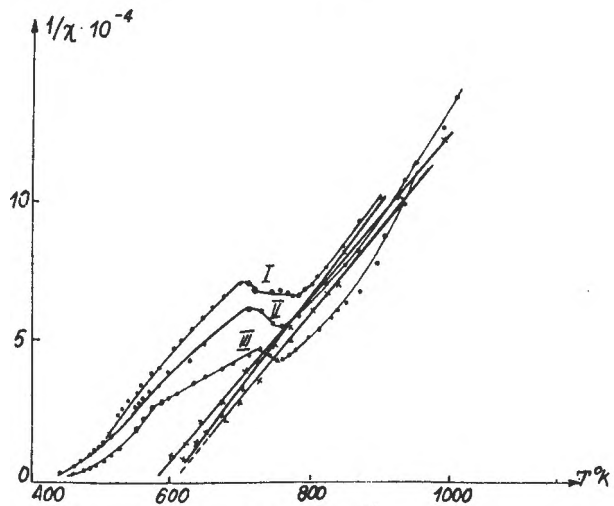
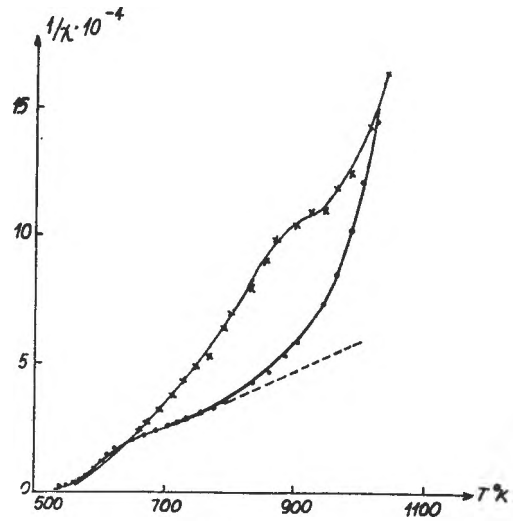


Abb. 3



(intermetallische Verbindungen) und Gitterparameter $a=7,26 \text{ \AA}$ (siehe Tabelle 2) entsprechen, aufweist. Das Grundgitter des Nickels, das einer festen Lösung Ni-Au-Cu entspricht, kann für die magnetischen Momente der Nickelatome ein Phänomen der ferrimagnetischen Ordnung aufweisen, genau so, wie in einem ferrimagnetischen Néelmodell mit 2 Untergittern; hingegen kann das Gitter, welches der Superstruktur entspricht, ein Phänomen der normalen antiferromagnetischen Ordnung aufweisen.

Für die Probe 80% Ni, 13,3% Au, 6,7% Cu wurde ein Studium der Abhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität von der Feldstärke oberhalb des ferromagnetischen Curiepunktes durchgeführt.

Es wird festgestellt (Abbildung 3), dass die magnetische Suszeptibilität mit dem Anwachsen des magnetischen Feldes abfällt und das Minimum der Kurve $1/\chi (T)_{H=\text{const}}$ sich merklich gegen tiefere Temperaturen verschiebt. Aus der Abbildung ist noch ersichtlich, dass die geordnete Phase, nur den gehärteten Proben spezifisch, unbeständig ist, da nach einem Erhitzen über 1000°K , beim Abkühlen, die Abhängigkeit $1/\chi (T)_{H=\text{const}}$ linear ist.

Trotzdem die Nickelproportion dieselbe bleibt (70 Atomprozent) und nur die Gold- und Kupferproportion sich im Verhältnis 1 : 2 ändert, ist das Verhalten der Legierung verschieden, ohne Anomalien der magnetischen Suszeptibilität, nur als eine ferrimagnetische Substanz. Das bedeutet, dass das Gold eine bestimmte Rolle im komplexen Phänomen der magnetischen Ordnung in diesem Legierungssystem spielt.

Das Modell mit zwei magnetischen Strukturen, anti- und ferrimagnetisch ist gültig auch für Legierungen mit höherem Nickelgehalt (80 Atomprozent Ni, 6,7 Atomprozent Au, 13,3 Atomprozent Cu, 90 Atomprozent Ni, 6,7 Atomprozent Au, 3,3 Atomprozent Cu), mit der Ausnahme, dass die Anomalie weniger ausgeprägt ist und zwischen 800 und 900°K liegt.

Die Legierungen 80 Atomprozent Ni, 10 Atomprozent Au, 10 Atomprozent Cu; 90 Atomprozent Ni, 3,3 Atomprozent Au, 6,7 Atomprozent Cu und 90 Atomprozent Ni, 5 Atomprozent Au, 5 Atomprozent Cu, haben, so wie aus Abbildung 4, wo die Abhängigkeit $1/\chi (T)$ für die gehärtete Probe 80 Atomprozent Ni, 10 Atomprozent Au, 10 Atomprozent Cu dargestellt ist, bis zu 800°K ein ferrimagnetisches Verhalten. Über dieser Temperatur tritt ein plötzlicher Abfall der Suszeptibilität auf, beim Abkühlen hingegen ist das Phänomen irreversibel und die Kurve ist jener der Legierungen mit zwei übereinanderliegenden magnetischen Strukturen ähnlich. Nach wiederholten Erwärmungen übergehen die Legierungen in einen stabilen Gleichgewichtszustand mit einem normalen paramagnetischen Betragen. ¶

(Eingegangen am 2. Oktober 1968)

L I T E R A T U R

1. Iuliu Pop, I. Maxim Studia Univ. Babeş—Bolyai, Cluj, ser. Math. Phys 1, 103 (1966).
2. Iuliu Pop, I. Cosma, Studia Univ. Babeş—Bolyai, Cluj, ser. Math. Phys., 2, 89 (1966).
3. Iuliu Pop, I. Cosma, Proc. of the X. th Intern. Conf. on low temperature Physics, Moscow, USSR, (1966), Moskva VINITI 1967 A 81, 331.
4. I. Cosma, Iuliu Pop, Studia Univ. Babeş—Bolyai, Cluj, ser. Math-Phys. 1, 85 (1968).
5. V. Marian, I. Maxim, V. Cristea, Rev. de Phys, II, 1, 105 (1957).
6. V. Marian, I. Maxim, H. Țintea, Com. Acad. R.P.R., II, 09 (1957).
7. Iuliu Pop, V. I. Tchetchernikov, Pribory i teh. exp. 5, 180 (1964).

STUDIUL STRUCTURAL ȘI MAGNETIC AL SISTEMULUI DE ALIAJE NICHEL-AUR-CUPRU

(R e z u m a t)

S-a efectuat un studiu roentgenostructural și magnetic asupra sistemului de aliaje ternare Ni-Au-Cu. Spectrele de raze X au pus în evidență la toate probele studiate, formarea unor suprastructuri cu rețea cubică având parametrul $a = 7,23$, alăturat de reflexiile normale ale nichelului specifice rețelei cubice cu fețe centrate, care corespunde soluției solide a aliajelor în stare călită.

Studiul comportării magnetice a aliajelor în stare călită a pus în evidență formarea unor structuri feri-și antiferomagnetice suprapuse, care au fost corelate cu proprietățile structurale.

СТРУКТУРНОЕ И МАГНИТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ СПЛАВОВ НИКЕЛЬ—

—ЗОЛОТО—МЕДЬ

(Р е з ю м е)

Авторы провели рентгеноструктурное и магнитное исследование системы тройных сплавов Ni-Au-Cu. Рентгеновские спектры показали у всех исследованных образцов образование суперструктур с кубической решёткой, имеющих параметр $a = 7,23 \text{ \AA}$, наряду с нормальными отражениями никеля, специфическими гранецентрированной кубической решётке, которая соответствует твёрдому раствору сплавов в закалённом состоянии.

Исследование магнитного поведения сплавов в закалённом состоянии выявило образование наложенных ферри- и антиферромагнитных структур, которые были соотнесены со структурными свойствами.

CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ȘI FORȚA TERMOELECTRO- MOTOARE LA SISTEMUL SEMICONDUCTOR

Cr_2O_3 — SnO_2

de

OLIVIA POP

Lucrarea reprezintă o continuare a studiului consacrat proprietăților semiconductoare ale unor sisteme pe bază de Cr_2O_3 [1, 2, 3]. Ținând cont de principiul valenței induse, aplicat sistemelor pe bază de Cr_2O_3 [4, 5], adaosul de SnO_2 trebuie să mărească rezistivitatea sistemului în domeniul soluției solide, fapt care s-a pus în evidență în această lucrare.

În literatură există puține lucrări dedicate studiului proprietăților electrice ale semiconductorului SnO_2 [6, 7]. Prezintă un deosebit interes dopajul SnO_2 cu Cr_2O_3 , atît ca principiu cît și ținînd cont de faptul că SnO_2 , avînd o structură de tip rutil, ar putea fi un cristal-gază potrivit pentru confecționarea de maseri. Sescvioxidul de crom (Cr_2O_3) făcînd parte din grupa oxizilor de tranziție 3d, se arată că nivelele 3d³ nu formează o bandă [8, 9]. Se consideră că electronii 3d din oxizii metalelor de tranziție sînt localizați în nodurile rețelei, iar mișcarea purtătorilor are loc prin salt între nodurile rețelei echivalente din punct de vedere cristalografic, ocupate de ioni de valență diferită. În felul acesta conductibilitatea se realizează pe seama trecerii gaurei de la ionul de valență superioară către ionul de valență inferioară, în cazul nostru de la $\text{Cr}^{4+} \rightarrow \text{Cr}^{3+}$.

Rezultate experimentale. a) *Prepararea probelor.* Probele (pulbere policristalină) au fost preparate din CrO_3 p.a. și SnO_2 de puritate spectrală, folosind metoda descrisă anterior [1, 2, 3]. Pulberile de diferite compoziții au fost presate la 7 tf/cm² și sinterizate timp de 14 ore la 1280°C. A urmat apoi un tratament termic timp de o săptămînă la $\approx 800^\circ\text{C}$. Pastilele au fost argintate prin evaporare în vid. S-au studiat probele avînd compoziția în procente molare specificată în tabelul 1.

Tabel 1

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Cr_2O_3	0	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	33,33	50	70	90	96	97	98	99	99,5	100
SnO_2	100	99,9	99,8	99,5	99	98	97	96	66,66	50	30	10	4	3	2	1	0,5	0

b) *Determinarea rezistivității electrice.* Studiul dependenței rezistivității electrice în funcție de temperatură a probelor de mai sus s-a făcut folosind o instalație de tipul celei descrise în lucrarea [10]. Măsurătorile au fost făcute în aer.

În fig. 1—3 sînt redat graficele dependenței mărimii $\log \rho$ de inversul temperaturii. Se constată că pentru majoritatea probelor, dreptele semilogaritmice prezintă schimbarea de pantă. Pentru dreptele corespunzătoare concentrațiilor mari de Cr_2O_3 , schimbarea de pantă a fost discutată în lucrarea [2]. Schimbarea de pantă a dreptei corespunzătoare SnO_2 ar putea fi interpretată admițînd, după

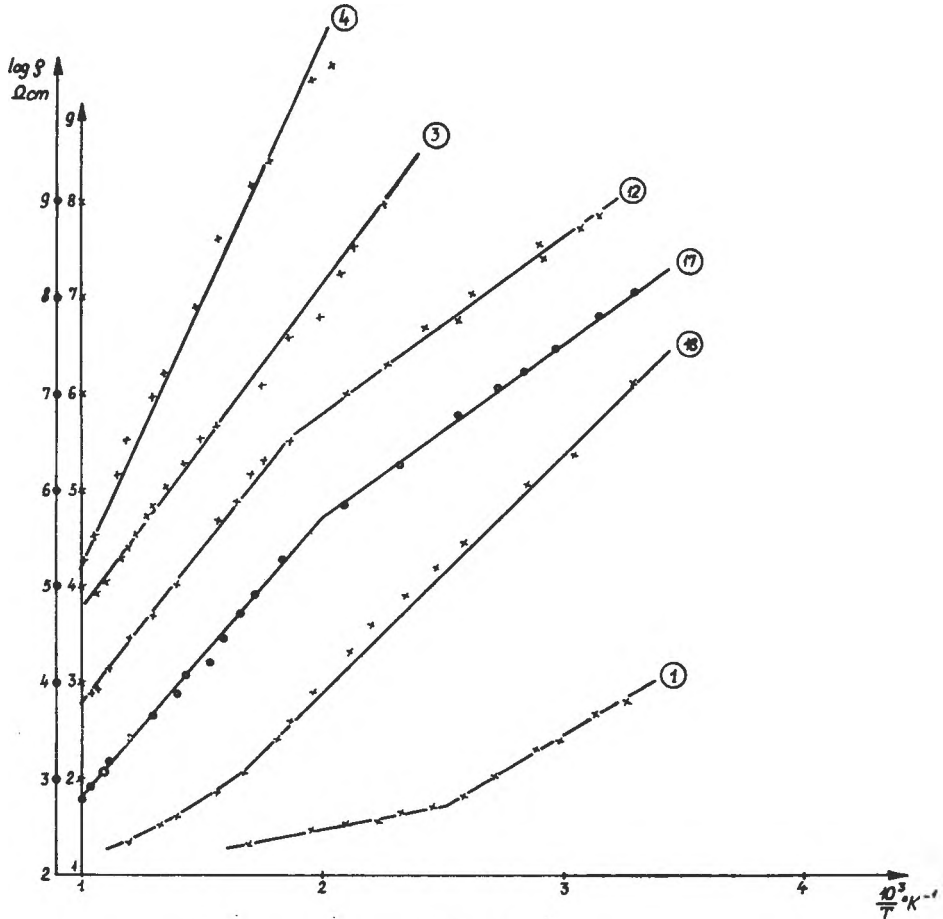


Fig. 1.

cum indică K r u z h a n o v s k i [7] că transportul de electroni este determinat de existența staniului metallic în SnO_2 care rezultă în urma disocierii termice a impurităților de SnO . În figura 4 este reprezentată dependența de concentrație în SnO_2 a mărimii $\log \rho$ pentru diferite temperaturi.

Din forma izotermelor de concentrație se constată că domeniul soluțiilor solide este foarte îngust la ambele extremități ale axei concentrațiilor. Astfel soluția solidă pe bază de Cr_2O_3 se limitează la cca 1% molar de SnO_2 , iar cea pe bază de SnO_2 la aproximativ 2% molare de Cr_2O_3 . În domeniul limitat de aceste două valori avem amestecuri mecanice. Nu se pune în evidență formarea vreunei combinații.

În fig. 5 este reprezentată dependența de concentrație în SnO_2 a energiei de activare corespunzătoare temperaturilor joase (ΔE_1) și temperaturilor ridicate (ΔE_2). Energia de activare maximă a sistemului se află la concentrația de 2% molare Cr_2O_3 , avînd valoarea de $\approx 1,18$ eV și corespunde cu limita de solubilitate a Cr_2O_3 în SnO_2 , după cum am arătat mai sus.

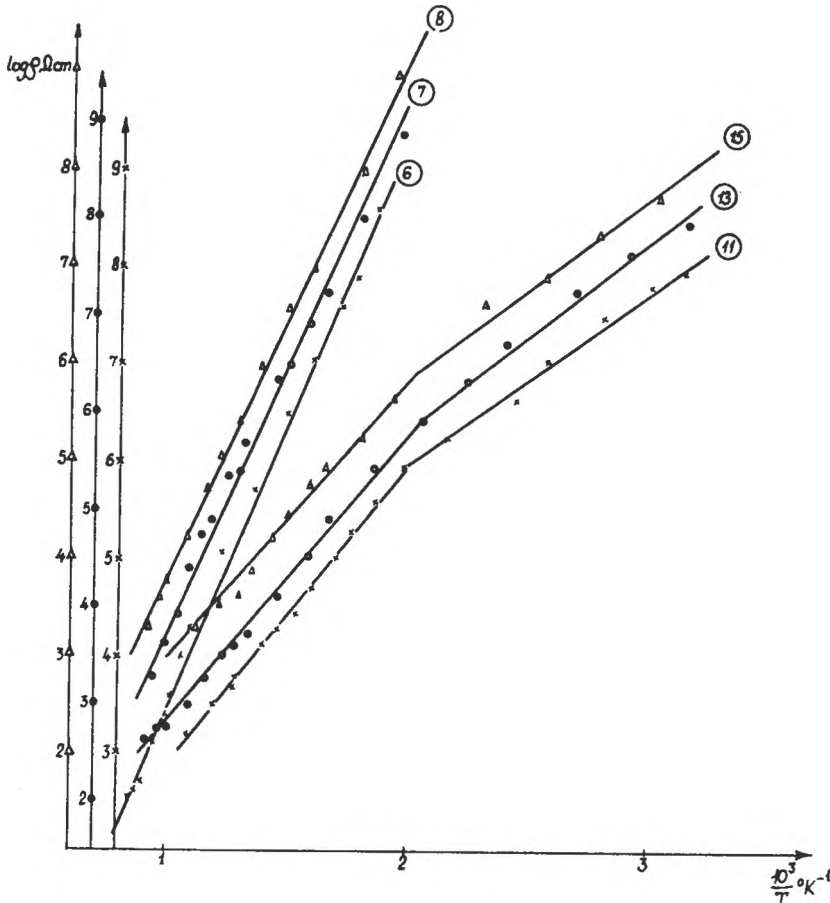


Fig. 2.

c) *Determinarea forței termoelectromotoare.* Măsurătorile au fost efectuate cu o instalație analogă cu cea descrisă în lucrarea [11], folosindu-se electrozi de platină, termocuple de Pt-PtRh și potențiomtru R-307 de rezistență mare. Între cele două capete s-a menținut o diferență de temperatură de ordinul a 25°C, suficientă pentru a face să apară o forță termoelectromotoare de ordinul milivolților. Și aici măsurătorile au fost făcute în aer.

În fig. 6-10 sînt redată curbele $\alpha = f(T)$ obținute la răcirea pastilelor. Numerotarea curbelor corespunde cu cea a probelor din tabelul 1.

Examinînd figurile de mai sus se constată că alitura curbelor, cu cîteva excepții, este analogă cu cea obținută pentru cromitul de neodim dopat cu Sr sau Ca [12].

Curba pentru Cr_2O_3 pur este foarte asemănătoare cu cea obținută pentru NiO [13]. Interesantă este variația cu temperatura a forței termoelectromotoare pentru proba 9, care reprezintă schimbare de semn la cca 1070°K .

În fig. 11 este redată izoterma de concentrație a forței termoelectromotoare pentru 1000°K . Se constată schimbarea de semn a purtătorilor de curent la con-

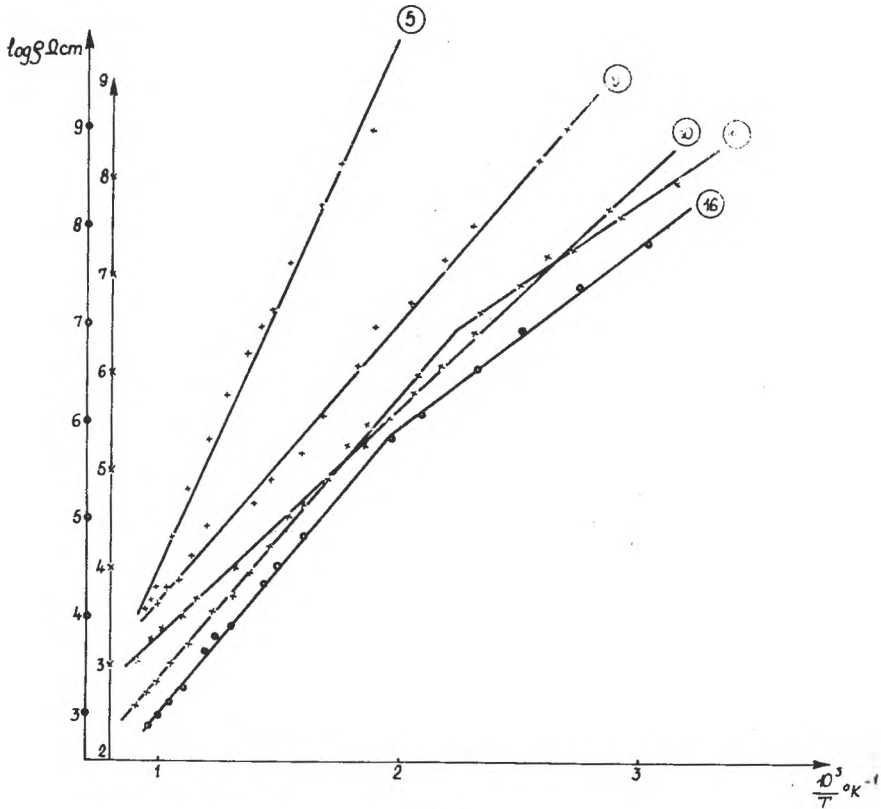


Fig. 3.

centrația de cca 33% molare Cr_2O_3 , la concentrații mai mari conductibilitatea fiind de tip p. Se pun în evidență limitele de solubilitate ale componentilor prin minime ale valorii lui α .

Discutarea rezultatelor experimentale. Din examinarea curbelor $\alpha = f(T)$ corespunzătoare probelor 15, 16, 17 și a fig. 11 rezultă următoarele.

Concentrația găurilor scade o dată cu creșterea concentrației de Sn^{4+} .

Se pune în evidență o ușoară scădere a concentrației găurilor o dată cu creșterea temperaturii, toate probele prezentând un palier cu α constant la temperaturi mai ridicate.

Slaba dependență a lui α de temperatură sugerează existența unui mecanism de conducție „prin salt”. În acest sens am folosit expresia cunoscută a lui α , pen-

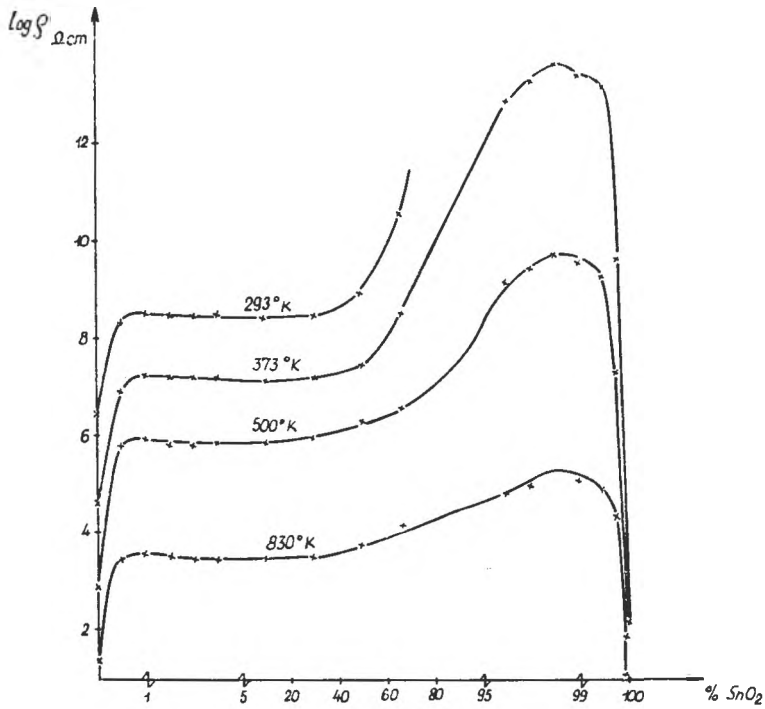


Fig. 4.

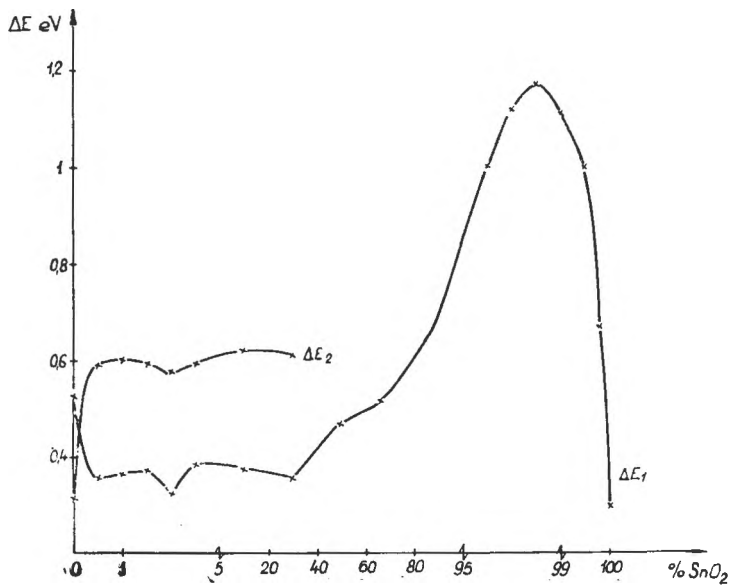


Fig. 5.

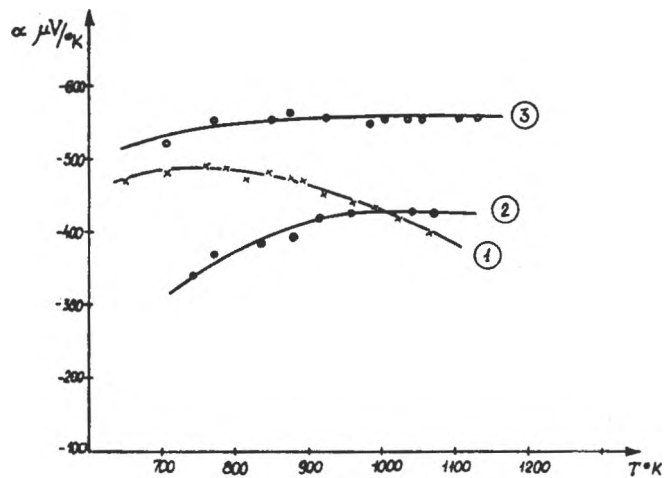


Fig. 6.

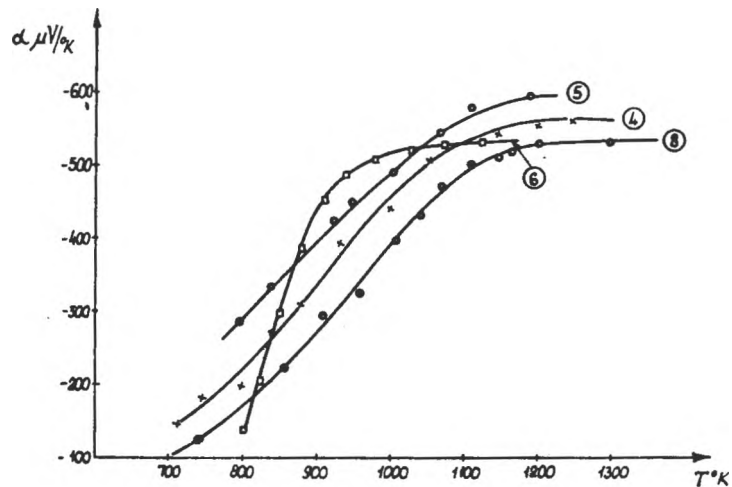


Fig. 7.

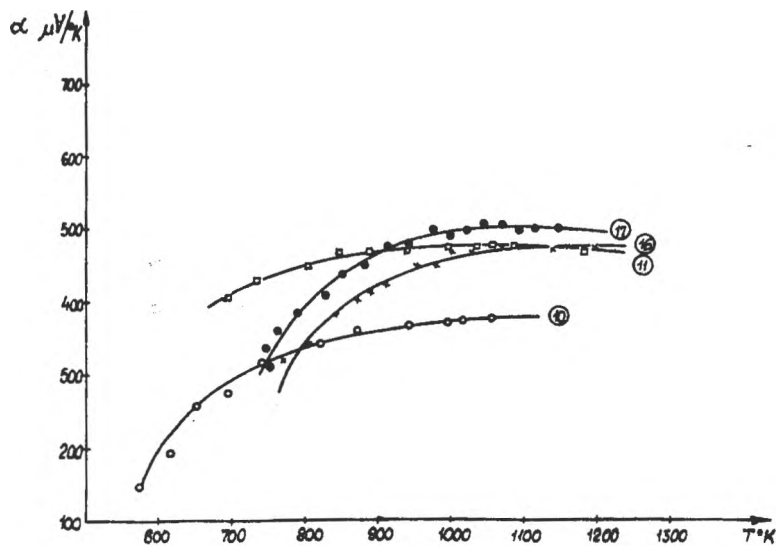


Fig. 8.

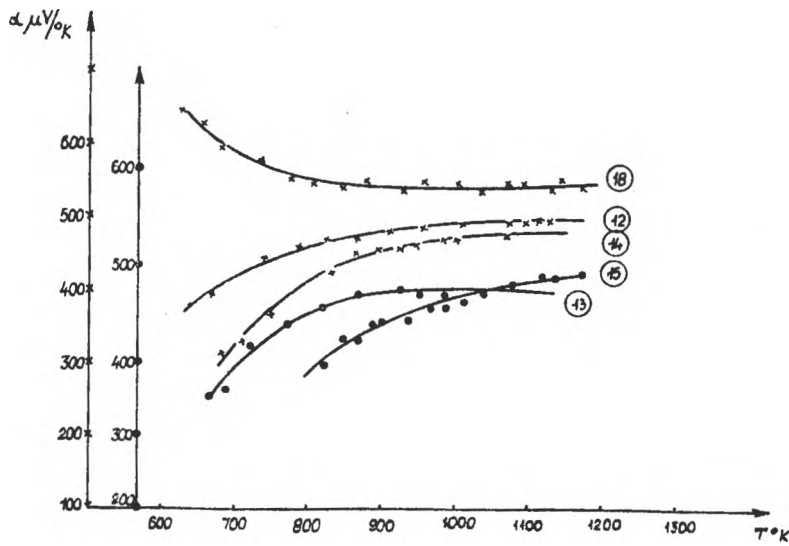


Fig. 9.

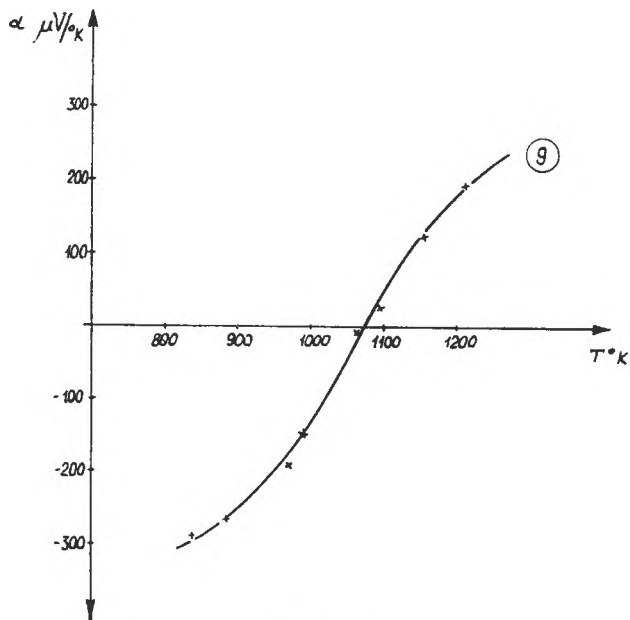


Fig. 10.

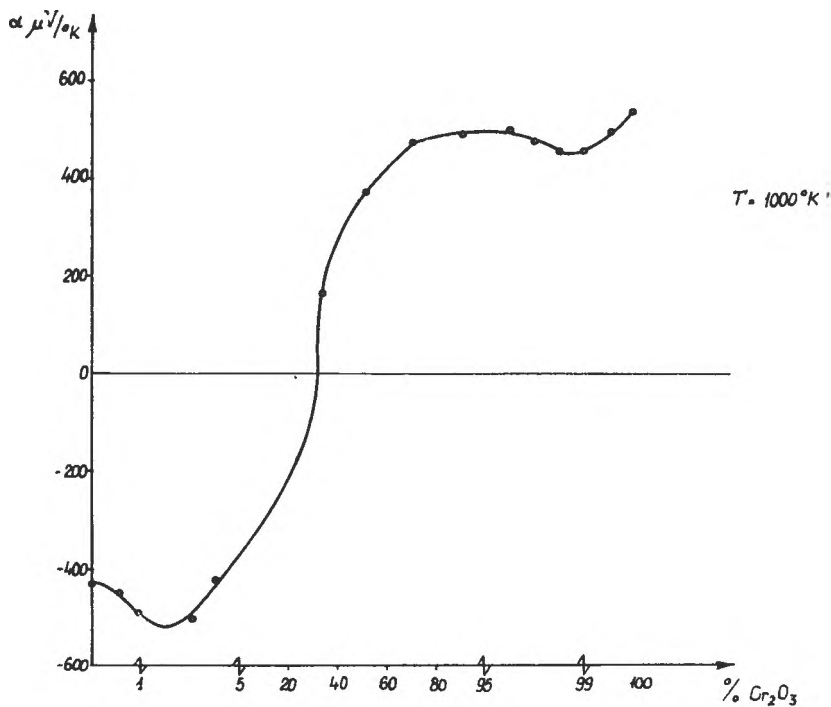


Fig. 11.

tru cazul în care coeficientul forței termoelectromotoare nu depinde de numărul purtătorilor de curent ($p = \text{constant}$):

$$\alpha = \frac{k}{e} \left[A + \ln \frac{2(2\pi m^* k)}{h^3 p} \right] + \frac{3}{2} \frac{k}{e} \ln T \quad (1)$$

sau

$$\alpha = A' + B \log T. \quad (1a)$$

Trebuie specificat, însă, că în loc de densitatea de stări corespunzătoare teoriei obișnuite a benzilor

$$N_0 = 2 \left(\frac{2\pi m^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (2)$$

am luat în considerare densitatea de stări din teoria conducției „prin salt”. Această densitate se consideră egală cu numărul de cationi dintr-un cm^3 .

În fig. 12 am reprezentat $\alpha = f(\log T)$ pentru probele 14, 15, 16 și 17.

Din dependența lineară pusă în evidență rezultă că relația (1a) este foarte bine verificată. Valoarea constantă a concentrației purtătorilor de curent rezultă și din prelucrarea curbelor din fig. 13, în care s-a reprezentat dependența de temperatură a poziției nivelului Fermi. Pe porțiunea lineară a curbelor de mai sus se constată că α este practic independent de temperatură, deoarece avem:

$$E_F = \alpha T. \quad (3)$$

Pentru evaluarea concentrației și mobilității trebuie să se țină seamă și de termenul cinetic. În acest caz:

$$E_F = \alpha T + A, \quad (3a)$$

avînd în vedere valoarea suficient de mare a lui α , am ales pentru A valoarea 2,5 [14]. Pe de altă parte, pentru concentrația găurilor avem expresia [9]:

$$p = N_0 \exp \left(- \frac{E_F}{KT} \right), \quad (4)$$

unde N_0 este densitatea de stări. În cazul Cr_2O_3 și pentru dopări mici cu SnO_2 am găsit valoarea $N_0 = 4,16 \cdot 10^{22} \text{cm}^{-3}$. Am calculat concentrația găurilor pentru proba nr. 17 și am găsit că: $p = 1,67 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$, valoare care în domeniul cercetat nu variază practic cu temperatura.

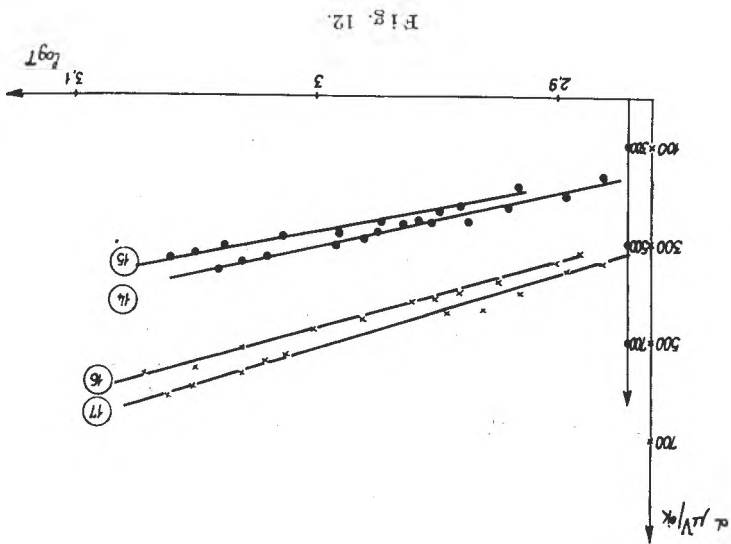
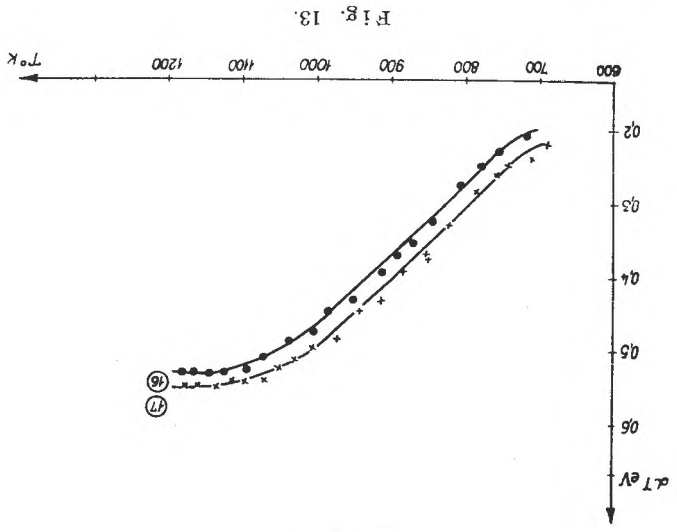
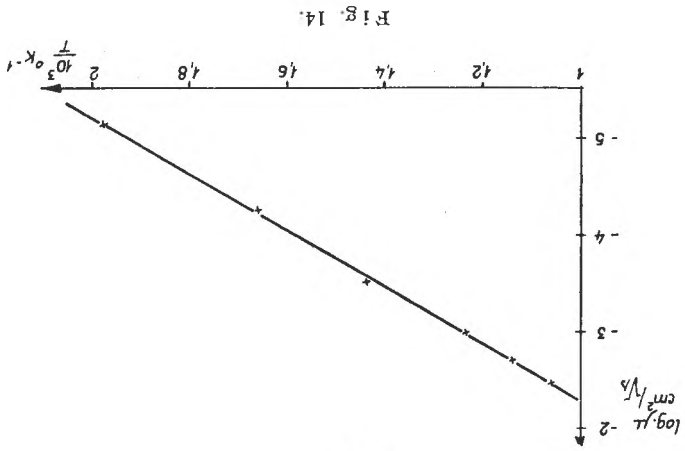
În teoria transportului „prin salt” se admite că energia de activare a conducibilității nu caracterizează procesul de ionizare ci mobilitatea, în sensul că mobilitatea este un proces activat. De aceea se aplică relația [15]:

$$\mu = \mu_0 e^{-\frac{\Delta E}{KT}}, \quad (5)$$

cu alte cuvinte mobilitatea crește, după o lege exponențială, cu creșterea temperaturii.

Ținînd seama de relația cunoscută: $\mu = \frac{1}{\rho e p}$, dacă înlocuim valorile lui ρ pentru diferite temperaturi și reprezentăm grafic $\log \mu = f(1/T)$, trebuie să obținem o dreaptă.

În fig. 14 redăm această dependență pentru proba nr. 17 (cu 0,5% molare de SnO_2).



Se constată că într-adevăr mobilitatea depinde exponențial de temperatură.

Valorile obținute pentru mobilitate sînt foarte mici și sînt cuprinse între $7,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{v.s}$ la temperatura ambiantă și $7,27 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{v.s}$ la 1000°K .

O dependență analogă a fost obținută de Morin [16, 17] pentru $\alpha\text{Fe}_2\text{O}_3$ și NiO cu adaos de ioni de titan și litiu.

Concluzii. 1. În sistemul semiconductor $\text{Cr}_2\text{O}_3-\text{SnO}_2$ se constată două domenii înguste la extremități, cu formare de soluții solide (fig. 4), în restul intervalului există amestecuri mecanice.

2. Conductibilitatea electrică a sistemului pentru dopări mici cu SnO_2 are loc prin saltul găurilor de la cation la cation. Mecanismul conducerii „prin salt” este sprijinit de următoarele constatări:

a) Se stabilește că numărul de purtători de curent este practic independent de temperatură (fig. 12 și 13).

b) Concentrația purtătorilor de curent calculată, se găsește că este de ordinul lui 10^{18} cm^{-3} , valoare caracteristică pentru semiconductori în care conductibilitatea are loc prin salt.

c) Mobilitatea purtătorilor este extrem de mică. Astfel la temperatura camerei am calculat pentru $\mu = 7,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{v.s}$.

d) Mobilitatea crește exponențial cu temperatura (fig. 14), așa cum o cere relația de bază (5) a teoriei conducerii prin salt.

(Intrat în redacție la 2 octombrie 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. I. Ursu, Olivia Pop, L. Stănescu și Iuliu Pop, Rev. Roum. Phys. **11**, 751 (1966).
2. Olivia Pop, L. Stănescu și Iuliu Pop, Studia Universitatis Babeș-Bolyai, s. Math. Phys., f. 2, p. 115 (1967).
3. Olivia Pop, Iuliu Pop și L. Stănescu, Sistemul $\text{Cr}_2\text{O}_3-\text{TiO}_2$ (sub tipar).
4. K. Hauffe and J. Block, Z. Physik Chem. **198**, 232 (1951).
5. K. Hauffe, *Reaktionen in und an festen Stoffen*. Berlin — Göttingen—Heidelberg (1955).
6. J. M. Honig, D. Cella, T. B. Reed, Solide State Res. Lincol. lab. Mass. Instit. Technical No 2, 17 (1962).
7. B. P. Kruzhanovski, J.T.F. Nr. 7, p. 1489 (1958).
8. E. J. Verwey, *Poluprovodnikovie materialy*, p. 210, Moscova (1954).
9. F. J. Morin, *Semiconductors*, N. B. Hannay, New York — London (1960).
10. L. Stănescu și colab., Buletin științific al I.P.C. **5**, 65 (1962).
11. M. Nachmann, L. Cojocar, L. Ribca, Phys. Stat. Solidi **8**, 773 (1965).
12. Tresviatski, A. V. Zirin, S. A. Maximenko, *Himiceskaia sviaz v poluprovodnikoh i tverdih telah*. Minsk, p. 295 (1965).
13. S. van Houtin, J. Phys. Solids **17**, 7 (1960).
14. E. G. Schlosser, Z. Elektrochem. **65**, 453 (1961).
15. R. R. Heikes și W. D. Johnston, J. Chem. Phys. **26**, 582 (1957).
16. F. J. Morin, Phys. Rev. **83**, No 5, 1005, (1959).
17. F. J. Morin, Phys.Rev. **93**, No. 6, 1195 (1954).

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И ТЕРМОЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СИСТЕМЫ Cr₂O₃—SnO₂

(Резюме)

Изучена полупроводниковая система Cr₂O₃—SnO₂ в широком интервале концентраций при измерении электропроводности и термоэлектродвижущей силы. Было установлено, что существуют две узкие области твердой растворимости только на краях диаграммы состояния. Показано, что при малых примесных концентрациях SnO₂ механизм проводимости окисного полупроводника является скачкообразным.

Измерения термоэлектродвижущей силы выявили изменение знака носителей тока при концентрации $\approx 33\%$ моль Cr₂O₃. При большей концентрации Cr₂O₃, система имеет проводимость типа p. Вычислена также концентрация носителей тока, которая имеет значение $N = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и их подвижность, которая при $T = 23^\circ\text{C}$ имеет экстраполированное значение $\mu = 7,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{в. сек.}$

ELECTRIC CONDUCTIVITY AND THERMOELECTROMOTIVE FORCE AT Cr₂O₃—SnO₂ Semi-conductor System

(Summary)

Cr₂O₃—SnO₂ semi-conductor system was studied in a large interval of concentrations by means of electric conductivity and thermoelectromotive force determinations. The experiments rendered evident two narrow domains at the extremities where solid solutions were formed, while in the rest of interval there existed mechanical mixtures. It has been established that by small dopings of SnO₂, the mechanism of conduction is „by hopping”.

Measurements of thermoelectromotive force made obvious sign change of the current carriers at a concentration of ≈ 33 per cent mol Cr₂O₃. At a higher concentration of Cr₂O₃, the system showed a p type conductivity. The concentration of current carriers was calculated and found to be $N = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ their mobility which at $T = 23^\circ\text{C}$ had the extrapolated value $\mu = 7,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{V.s.}$

MĂSURAREA COEFICIENTULUI DE NELINEARITATE AL VARISTORULUI DE $ZnO - Al_2O_3$

de
F. PUSKÁS

În mai multe lucrări au fost studiate unele proprietăți semiconductoare ale sistemului $ZnO - Al_2O_3$ [1-3]. Proprietățile electrice și structurale ale acestui sistem ne-au îndemnat să studiem mai departe comportarea lui și în câmp electric variabil. Din aceste cercetări rezultă că sistemul $ZnO - Al_2O_3$ la anumite concentrații prezintă o variație nelineară foarte pronunțată a rezistenței, în funcție de tensiunea aplicată. Acest efect nelinear poate fi studiat în mod calitativ prin ridicarea caracteristicilor voltamperice, a probelor de diferite concentrații, cu ajutorul oscilografului catodic. În fig. 1-3 sînt reprezentate caracteristicile voltamperice obținute la probele de diferite concentrații: ZnO (fig. 1), 95% ZnO (fig. 2) și 75% ZnO (fig. 3).

Din aceste oscilograme rezultă că probele studiate prezintă un efect varistoric. Acest efect varistoric a fost pus în evidență numai în domeniul semiconductor

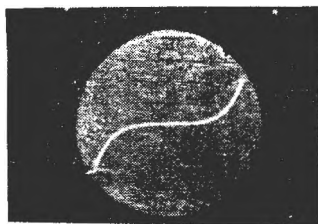


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

al sistemului $ZnO - Al_2O_3$ (adică în domeniul de concentrație 100% $ZnO - 75%$ ZnO). Pentru caracterizarea acestor varistori sau altfel zis rezistențe semiconductoare nelineare (prescurtat RSN), s-a introdus noțiunea coeficientului de nelinearitate β , care se definește prin relația:

$$\beta = \frac{R_s}{R_d} = \frac{U}{I} \cdot \frac{dI}{dU} \quad (1)$$

unde $R = U/I$ este rezistența statică, iar $R_d = \frac{dU}{dI}$ este rezistența dinamică a varistorului.

Valoarea coeficientului de nelinearitate β se poate determina din caracteristica voltamperică, utilizând metoda grafică bine cunoscută, însă această metodă ne conduce la un rezultat destul de imprecis, mai ales la porțiunea caracteristicii unde curentul crește destul de brusc. De aceea în literatură au fost propuse mai multe metode de măsură pentru determinarea coeficientului de nelinearitate [4–5].

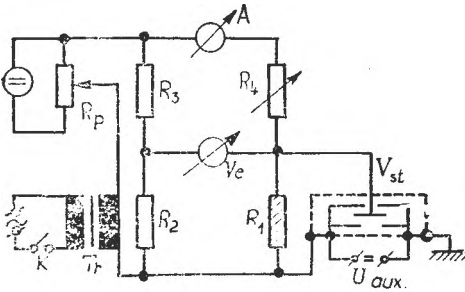


Fig. 4.

volți. Pentru orice valoare a tensiunii continue este satisfăcută inegalitatea $U_c < U_a$.

La începutul măsurătorilor puntea este alimentată numai de tensiunea continuă; în acest caz echilibrăm puntea cu ajutorul rezistenței R_4 . În caz de echilibru avem relația:

$$R_s = R_4 \cdot \frac{R_2}{R_3} \quad (2)$$

deoarece rezistența varistorului R_1 , măsurată în curent continuu, va fi egală cu rezistența sa statică. După echilibrarea punții, se introduce în circuitul de măsură și tensiunea alternativă U_a . În acest caz puntea se dezechilibrează datorită faptului că rezistența statică a varistorului R_1 nu coincide cu rezistența sa dinamică și astfel voltmetrul electronic din diagonala punții va indica o tensiune alternativă ΔU_a . Pentru curent alternativ este valabilă relația $R_1 = R_d$.

Din schema punții rezultă că tensiunea ΔU_a măsurată de instrumentul de zero va fi dată de relația:

$$\Delta U_a = U_a \left(\frac{R_s}{R_2 + R_3} - \frac{R_d}{R_d + R_4} \right) \quad (3)$$

Valoarea rezistențelor R_2 și R_3 o putem alege astfel încît $R_2 = R_3$; luînd în considerare relațiile precedente vom ajunge la relația:

$$\Delta U_a = U_a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \frac{R_s}{R_d}} \right) \quad (4)$$

iar dacă ținem cont de definiția coeficientului de nelinearitate dată de relația (1), vom ajunge la relația finală pentru β sub forma:

$$\beta = \frac{U_a + 2 \cdot \Delta U_a}{U_a - 2 \cdot \Delta U_a} \quad (5)$$

Această metodă de măsurare ne permite să determinăm valoarea lui β cu o precizie destul de bună; eroarea relativă a măsurătorilor după cum rezultă din relația (5) a fost mai mică decât 1%. În același timp această metodă ne permite să determinăm și tensiunea și intensitatea curentului, adică punctul de pe caracteristica voltamperică pentru care s-a obținut și valoarea lui β . Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul următor:

	ZnO	95% ZnO	90% ZnO	85% ZnO	80% ZnO	75% ZnO
β						
la 20 volți	2,5	2,6	2,7	2,75	2,9	3
β_{\max}	4,5	2,9	2,9	3,5	3,8	5
U_{\max} [volt]	110	30	25	40	50	75
P_{\max} [watt]	2,5	0,4	0,3	0,6	1	1,5

În acest tabel U_{\max} reprezintă tensiunea maximă de lucru pe care varistorul o poate suporta fără să se încălzească prea tare, β_{\max} este coeficientul de nelinearitate măsurată la tensiunea maximă de lucru, iar P_{\max} este puterea maximă pe care o poate suporta varistorul.

Cea mai mare valoare pentru U_{\max} , β_{\max} , respectiv pentru P_{\max} s-a obținut în cazul oxidului de zinc și în cazul probelor cu concentrația de 75% ZnO. Pe baza acestor rezultate putem afirma că cele mai bune rezistențe semiconductoare neliniare în cadrul sistemului ZnO—Al₂O₃ s-au obținut la aceste două concentrații.

Comparînd parametrii acestor probe cu datele similare ale varistorilor produși de diferite firme, putem constata că din sistemul ZnO—Al₂O₃ se pot confecționa varistori de calitate similară.

(Intrat în redacție la 29 august 1968)

BIBLIOGRAFIE

1. I. Ursu, F. Puskas, V. Cristea, Rev. Phys. **VII**, 277, 1962.
2. I. Ursu, F. Puskas, V. Cristea, Studia Univ. Babeș—Bolyai, s. Math. Phys, 127, 1961.
3. I. Ursu, F. Puskas, V. Cristea, Rev. Roum. de Phys., **10**, 223, 1965.
4. E. Brown, P. Walker, Electronic Eng. **30**, 154, 1958.
5. W. W. Passynkow, G. A. Saweljew, L. K. Tschizkin, *Nichtlineare Halbleiter-Widerstände* (trad. l. rusă), Akad. Verlag, Leipzig, 1965.

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕЛИНЕЙНОСТИ ВАРИСТОРА ZnO—Al₂O₃

(Резюме)

Автор выявляет ярко выраженное нелинейное изменение сопротивления в зависимости от напряжения, приложенного к системе ZnO—Al₂O₃ в области концентрации 100%—75% ZnO. Описана измерительная установка для определения коэффициента нелинейности изученных образцов. Автор приходит к выводу, что из окиси цинка и из образцов, с концентрацией 75% ZnO можно построить нелинейные полупроводниковые сопротивления.

MEASUREMENT OF THE NON-LINEAR COEFFICIENT OF $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ VARISTOR

(S u m m a r y)

The author made obvious a very marked non-linear variation of the resistance depending on the tension applied to $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ system, in the concentration domain of 100% — 75% ZnO . A measuring device for the non-linearity coefficient of the investigated samples is presented. The author concludes that using zinc oxide and samples having a conc. of 75% ZnO it may be obtained some non-linear semi-conductor resistors.

SUR LA VITESSE DE PROPAGATION DES ULTRASONS DANS DES SOLUTIONS DES HALOGENURES ALICALINS ET ALCALINO-TERREUX (I)

par

H. ȚINTEA, LIA ONIȚIU, D. AUSLÄNDER

On connaît l'importance des mesures de la vitesse de propagation des ultrasons dans les liquides, mesures qui conduisent à la détermination de constantes physiques importantes.

Spécialement, dans le cas des solutions d'électrolytes, on peut obtenir des relations entre la „concentration” et d'autres grandeurs comme la „compressibilité adiabatique”, la „chaleur spécifique” etc., d'où la possibilité de vérifier certaines théories sur les électrolytes.

Du point de vue pratique, la détermination précise des vitesses de propagation peut conduire à des méthodes d'analyse chimique rapide.

Dans la littérature de spécialité [1] on trouve de nombreuses études où il s'agit de la vitesse de propagation des ultrasons dans des solutions d'halogénures alcalins, et alcalino-terreux.

Mais, à notre connaissance il manque une étude *systématique* de la dépendance de la vitesse en fonction de la *concentration* et de la *température* dans de telles solutions. C'est cette étude que nous nous proposons d'entreprendre avec l'intention de mettre, d'une part, en évidence des relations entre ces grandeurs et d'autre part d'établir des méthodes d'analyse chimique non-destructive rapides.

Méthode expérimentale. La méthode utilisée a été celle de la diffraction de la lumière par les ondes ultrasonores qui se propagent dans le liquide à étudier (Debye-Sears, Lucas-Biquard). On voit dans la figure 1 le schéma de l'installation.

Un collimateur constitué par une fente horizontale située dans le foyer d'un achromate L_a envoie un faisceau monochromatique parallèle à travers la cuve parallélépipédique C.

Les rayons diffractés par les ondes ultrasonores donnent dans le plan focal du système S des images de la fente, des maxima de divers ordres dont l'éloignement

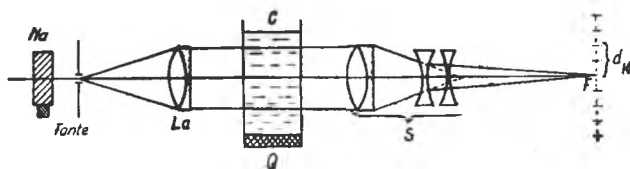


Fig. 1. Schéma de l'installation optique utilisée.

d_k du maxima d'ordre zéro dépend de la vitesse de propagation des ondes dans le liquide, v :

$$d_k = \frac{\lambda \cdot F \cdot v}{v} \quad (I)$$

où λ = longueur d'onde de la lumière monochromatique,
 F = distance focale du système S et v = fréquence des ultrasons.

Les distances d_k peuvent être mesurées directement avec un micromètre oculaire ou sur une photographie.

Pour obtenir une meilleure précision dans la mesure de la vitesse, v , on a intérêt à avoir des d_k les plus grands possibles pour une fréquence v et une longueur d'onde λ donnée.

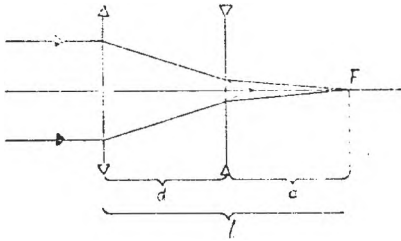


Fig. 2. Principe de construction du système de projection S .

En conséquence on doit utiliser un système de projection S ayant une distance focale F grande.

Une simple lentille achromatique nécessite pour la réalisation de la lunette d'observation un tube métallique d'une longueur au moins égale à F , par exemple 1 m et plus.

Cela devient encombrant et donne un ensemble peu stable au point de vue mécanique.

Pour éviter cet inconvénient tout en gardant un F grand nous avons eu l'idée d'utiliser un système à lentille Barlow (2) ce qui permet de réduire d'une manière importante les dimensions de la lunette.

Si on réduit le système S à deux lentilles minces (fig. 2) on a $F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$ (II) et si par exemple on s'impose une longueur de la lunette $l = 2d$, le double de la distance entre les deux composants, on obtient :

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{d} \quad (III)$$

En combinant (2) et (3) on reçoit

$$f_1 = \frac{F \cdot d}{F - d} \quad (IV)$$

On peut donc à l'aide des relations précédentes calculer, pour une longueur de la lunette l imposée par des considérations d'ordre pratique les distances focales f_1 et f_2 .

En fait les lentilles L_1 et L_2 (fig. 2) sont des systèmes : L_1 un achromat et L_2 , deux lentilles biconcaves identiques.

L'installation que nous avons réalisée était caractérisée par :

$$v = 2\text{MHz} \pm 4 \text{ kHz}$$

$$\lambda = 5893 \text{ \AA}$$

$$F = 145,5 \text{ cm.}$$

Les d_k ont été mesurés à l'aide d'un micromètre oculaire à vis, les lectures étant précises à 0,002 mm près.

Somme toute la précision dans la détermination des vitesses peut être appréciée à 0,5%.

En photographiant les franges on peut élever la précision, les mesures étant faites à l'aide d'un comparateur.

Voici par exemple les valeurs que nous avons obtenues pour l'eau à diverses températures. (Tab. 1).

Tableau 1

T	20°	25°	30°	35°	40°	45°
nos mesures	1480	1496	1509	1520	1528	1535
Bergman (3)	1483	1497	1509		1529	

Dans ce qui suit nous donnons les résultats que nous avons obtenus en étudiant des solutions aqueuses de chlorure de potassium à des températures et concentrations variées. (Tab. 2).

Tableau 2

conc. \ t°C	t°C							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
3 m	1638	1658	1671	1680	1688	1691	1692	1686
2,5 m	1612	1627	1640	1650	1658	1663	1666	1663
2 m	1582	1597	1611	1622	1630	1636	1639	1634
1,5 m	1549	1567	1583	1594	1604	1610	1614	1610
1 m	1520	1539	1554	1566	1576	1583	1587	1583
1/2 m	1492	1509	1525	1539	1549	1555	1560	1562
1/5 m	1475	1491	1508	1522	1532	1539	1545	1550
H ₂ O	—	1480	1496	1509	1520	1528	1535	—

On voit que la dépendance de la vitesse de propagation v est fonction linéaire de la concentration à température constante (fig. 3).

À concentration constante, la vitesse en fonction de la température est donnée par des courbes (fig. 4) qui ont l'allure d'une parabole.

Nous avons essayé de vérifier sur les valeurs du tableau 2 l'exactitude de la relation de Willard (4) qui s'applique à l'eau et que certains des auteurs considèrent comme valable aussi pour les solutions :

$$v_t = v_{\max} - 0,0245 (t_{\max} - t)^2 \text{ ou, exprimé d'une autre manière :}$$

$$\frac{\Delta v}{(\Delta t)^2} = W = 0,0245 \quad (V)$$

Il est intéressant de signaler que cette relation ne se vérifie pas dans le cas de l'eau lourde ($v_{\max} = 1464$ m/sec $t_{\max} = 76^\circ$), le rapport $\frac{\Delta v}{(\Delta t)^2}$ variant entre 0,0283 à 5° et 0,0163 à 50° (voir les valeurs données par Bergmann (3) pour la vitesse en eau lourde).

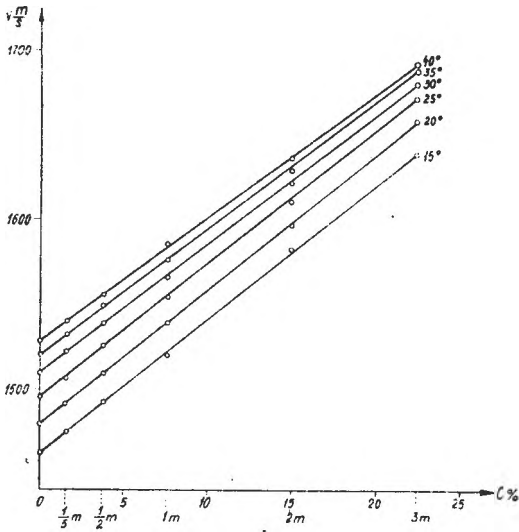


Fig. 3. Dépendance de la vitesse de propagation des ultrasons en fonction de la concentration, à diverses températures

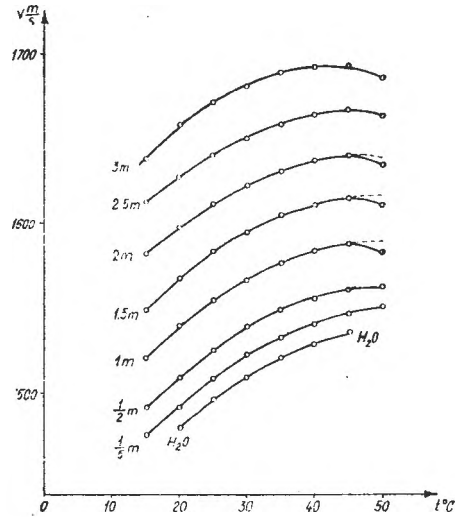


Fig. 4. Dépendance de la vitesse de propagation des ultrasons en fonction de la température, à diverses concentrations.

Pour les solutions de chlorure de potassium cette relation ne se vérifie pas non plus. Bien que l'allure des courbes reste celle d'une parabole, le rapport $\frac{\Delta v}{(\Delta t)^2}$ varie selon la concentration. (Tab. 3).

Tableau 3

Concentration	t_{\max}	v_{\max}	w_{moyen}
3 m	43°	1691	0,064
2,5 m	45°	1666	0,058
2 m	49°	1640	0,051

On voit que la valeur du rapport $\frac{\Delta v}{(\Delta t)^2}$ croît avec la concentration. Il est très probable que ce comportement est dû au fait qu'il s'agit des électrolytes forts.

En tout cas il est nécessaire d'étendre les mesures à un domaine de températures (et de concentrations) plus grand.

Conclusions. 1. On décrit une installation pour la mesures des vitesses de propagations des ultrasons dans les liquides.

2. On présente les résultats obtenus en étudiant les solutions de KCl.

3. On trouve que la relation de Willard $\frac{\Delta v}{(\Delta t)^2} = \text{const.}$ ne se vérifie pas, le rapport étant dépendant de la concentration en KCl.

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. Voir par ex. Bergmann L., *Der Ultraschall*. Stuttgart, 1954 Epiner U., *Ultrazvuk*, Moscou, 1963. Schaffs W., *Molekularakustik*, Berlin, 1963. Balachandra C. G., *Nature*, London **187**, 136—37 (1960). Padmini P R K L, Rao B. R., *Indian J. of Ph.* **34**, 565—76 (1960) Prozorov P., *J. Phys. Chem. USSR*, **14**, 384—91 (1940). Tamás G., *Magyar Fiz. Foly* **7**, 201—206 (1959).
2. Gramatzki H. I., *Probleme der konstruktiven Optik*, Akademie Verlag, Berlin, 1957.
3. Bergmann L., *Der Ultraschall*, pag. 410, tableau 41.
4. Bergmann L., *Der Ultraschall*, pg. 373 et 426.

DESPRE VITEZA DE PROPAGARE A ULTRASUNETELOR ÎN SOLUȚII ALE HALOGENURILOR
ALCALINE ȘI ALCALINO-TEROASE (I)

(R e z u m a t)

Se descrie o instalație optică pentru măsurarea vitezelor de propagare a ultrasunetelor în lichide. Instalația utilizează o lunetă de observație de dimensiuni reduse dar cu distanță focală mare. Se prezintă apoi primele rezultate obținute pe soluții de clorură de potasiu.

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВ В РАСТВОРАХ ЩЕЛОЧНЫХ И ЩЕЛОЧНО-ЗЕМЕЛЬНЫХ ГАЛОИДОВ (I)

(Р е з ю м е)

Описана оптическая установка для измерения скоростей распространения ультразвуков в жидкостях. Данная установка использует подзорную трубу небольшого размера, но с большим фокусным расстоянием. Приводятся затем первые результаты, полученные в растворах хлористого калия.

VARIAȚIA VISCOZITĂȚII APEI ÎN CÎMP ULTRASONIC

de

D. AUSLÄNDER, E. RUS, E. GHERGARU

Dezvoltarea ultraacusticii a creat noi posibilități de cercetare a structurii corpurilor. Indiferent de faza studiată, aceste metode se bazează în primul rînd pe măsurători de viteză de propagare și de absorbție a fascicului ultrasonic în substanța cercetată.

Măsurarea absorbției ultrasunetelor în diferite lichide, a îndreptat atenția cercetărilor asupra viscozității, factor de care depinde în primul rînd atenuarea fascicului ultrasonic [4], [5], [6], [7].

Luînd în studiu comportarea viscozității unor lichide asociate și neasociate în cîmp ultrasonic ne-am oprit în primul rînd asupra apei, lichid puternic asociat, care prezintă o serie de anomalii bine cunoscute.

Procedeeul experimental. Determinarea viscozității apei bidistilate s-a efectuat la temperaturile de: 9,76°C; 15,32°C; 15,74°C; 16,66°C; 18,70°C; 20,86°C; 30,88°C; 39,36°C; 49,52°C în absența cîmpului ultrasonic, precum și după 5, 10, 15, 20, 30, 45, 60, 120 respectiv 240 minute de ultrasunare. Pentru măsurători s-a utilizat un viscosimetru de tip Ostwald-Auerbach [8], modificat în vederea realizării termostatării și a evitării efectelor ultrasunetelor asupra capilarei care ar fi introdus erori sistematice în determinări, prin scoaterea acestuia în afara cîmpului ultrasonic.

Precauțiunile amintite au eliminat posibilitatea apariției unui gradient de temperatură, a unei curgeri neizoterme, a influenței presiunii de radiații, precum și a diferitelor efecte de interfață solid-lichid produse de ultrasunete în timpul măsurătorilor.

Temperatura s-a măsurat cu ajutorul unui termocuplu Fier-constantan în prealabil etalonat.

Fascicului ultrasonic s-a obținut de la un generator tip „Tesla” cu frecvența de 1 MHz, la o tensiune de placă: $U = 1,37$ KV și cu intensitatea curentului anodic: $I = 80$ mA.

Fiecare valoare dată rezultă din media unui număr de 15 determinări.

Rezultate. Din reprezentările grafice ale datelor obținute se constată că prin ultrasunare viscozitatea apei bidistilate manifestă o creștere ce depinde de temperatură și de timpul de ultrasunare.

Variația efectului cu timpul de ultrasunare este reprezentată în fig. 1 pentru 7 temperaturi diferite. Se observă că în toate cazurile prelungirea acțiunii cîmpului ultrasonic duce la creșterea efectului care are loc în două etape; în prima

perioadă de timp are loc o creștere bruscă urmată, apoi, în a doua etapă, de una mai lentă, cu tendința atingerii unui palier.

Saltul efectului este bine evidențiat la temperaturi sub 40°C; peste această temperatură însă panta fiind mult mai mică nu se mai pot distinge net cele două etape în procesul creșterii viscozității. Astfel, la temperaturi pînă la aproximativ 40°C, efectul maxim este atins între 20 și 60 minute, pe cînd la 49,5°C abia la

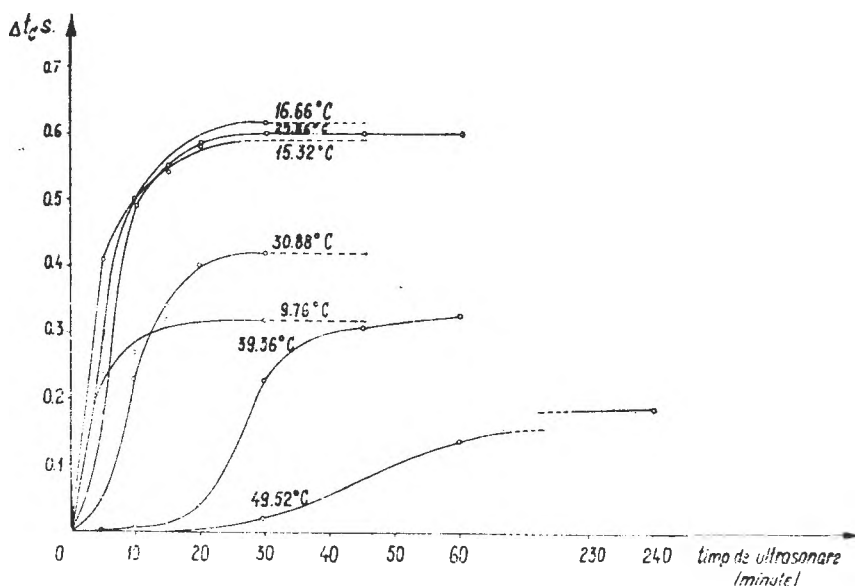


Fig. 1. Variația efectului cu timpul de ultrasonare.

240 minute. În ceea ce privește valoarea efectului maxim, se constată creșterea acestuia cu temperatura pînă la 20°C, urmată apoi de o scădere la temperaturi mai ridicate.

Variația efectului în funcție de temperatură pentru diferite durate ale acțiunii cîmpului ultrasonic, sînt reprezentate în fig. 2. Se observă creșterea efectului cu temperatura pînă la atingerea unui maxim urmată de scăderea lui cu tendința anulării totale.

Maximele corespunzătoare diferitelor durate de ultrasonare prezintă o ușoară deplasare cu temperatura pînă la aproximativ 20°C, la care, în condițiile noastre de lucru, s-au obținut cele mai ridicate valori ale efectului. Fiecărui timp de ultrasonare îi sînt caracteristice două efecte identice pentru două temperaturi relativ simetrice față de 20°C.

Creșterea temperaturii obligă la acțiuni de mai lungă durată pentru obținerea unor variații de viscozitate. Astfel, de exemplu la 49,5°C, o ultrasonare de 4 ore produce același efect ca una de 5 minute la temperatura de 20,8°C.

Interpretarea rezultatelor. Structura fazei lichide se caracterizează printr-o ordine pe distanțe mici datorită existenței grupelor cibotactice în permanentă descompunere și refacere.

De la punctul de topire pînă la temperatura critică are loc micșorarea grupelor cibotactice, afinarea progresivă a structurilor, cu tendința stabilirii unei stări de dezordine asemănătoare gazelor.

Apa prezintă unele abateri față de comportarea restului lichidelor din cauza asocierilor moleculare, cît și prin coexistența a două structuri în echilibru care se deplasează sub acțiunea temperaturii sau a altor factori. Energia legăturii de hidrogen de 4,5 kcal/mol este situată între energia legăturilor covalente și a celor Van der Waals, putînd fi relativ ușor desfăcute, astfel încît la fiecare temperatură se stabilește un echilibru între moleculele asociate și cele neasociate. În vecinătatea temperaturii de topire sînt desfăcute 15% din legăturile de hidrogen, pe cînd la 40°C aproximativ 50%.

În apă vor fi prezente deci ambele structuri: cea tetraedrică afinată dată de punțile de hidrogen și alta, mai compactă, asemănătoare structurii cvarțului.

Creșterea temperaturii desigur deplasează echilibrul înspre cea de-a doua structură.

În conformitate cu acest model, pe baza teoriei golurilor, viscozitatea lichidelor în general este dată de relația [3]:

$$\eta = Ae^{\frac{U}{KT}}$$

unde:

$$A = \frac{2\tau_0KT}{8^3}$$

Dependența lui A de temperatură este considerată neglijabilă față de variația exponențială; totuși acest fapt este infirmat de rezultatele experimentale în cazul lichidelor asociate. În cazul acestora, prin ruperea punților de hidrogen, apar modificări structurale, astfel încît numărul golurilor ce determină curgerea, nu poate să crească după o relație exponențială. Astfel de modificări pot afecta pe lîngă numărul și dimensiunile medii ale golurilor, însăși valoarea energiei de activare.

Valoarea lui A pentru apă la $t = 0^\circ\text{C}$ este deosebit de mică față de alte lichide, pe cînd energia de activare ($U = 3,05$ kcal/mol) e mai mare decît cea corespunzătoare atît lichidelor neasociate cît și celor asociate.

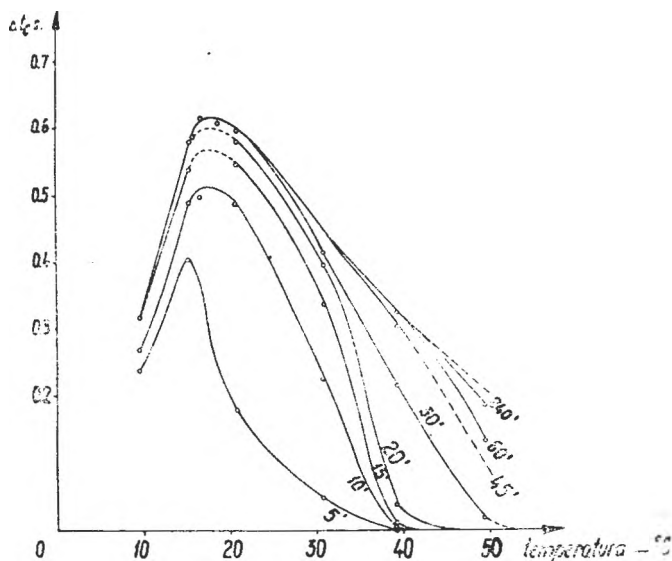


Fig. 2. Dependența efectului de temperatură.

Datele de mai sus pledează pentru o structură foarte afînată datorită dimensiunilor mari ale goloșurilor la această temperatură.

Efectul ultrasunetelor, în prima fază de ruperea legăturilor de hidrogen, ar trebui să decurgă în același sens cu temperatura. Probabil însă că, concomitent, se produc sub acțiunea cîmpului modificări în sensul unei aranjări mai condensate a structurii cvasicristaline, ceea ce are drept urmare variația numărului goloșurilor cu temperatura după o altă relație decît cea simplă exponențială, micșorarea mărimii goloșurilor și creșterea valorii energiei de activare datorită mărimii lucrului mecanic necesar pentru formarea goloșurilor.

Prin prisma acestor ipoteze ultrasunetele afectează viscozitatea prin intermediul termenilor „ δ ” și „U”, ca o consecință a ruperii punților de hidrogen.

Efectul de sens contrar al agitației termice duce la stabilirea unui echilibru caracteristic fiecărei temperaturi, în sensul scăderii efectului produs de ultrasunete o dată cu creșterea temperaturii, datorită atît agitației termice cît și scăderii în lichid a numărului de legături de hidrogen. Din rezultatele experimentale se pare că pînă la 20°C predomină acțiunea produsă de ultrasunete în sensul creșterii efectului, iar peste această valoare cea de sens contrar a agitației termice.

Timpul de ultrasonare necesar stabilirii echilibrului între cele două acțiuni opuse se deplasează spre valori crescînde, o dată cu ridicarea temperaturii.

Este probabil, de asemenea, ca ultrasunetele să acționeze nu numai prin desfacerea legăturilor de hidrogen, ci și prin frînarea formării de asocieri moleculare, proces ce are loc îndeosebi la temperaturi mai scăzute, din cauza stării de excitație în care se găsește lichidul în urma perturbării lui de către undele ultrasonice.

Concluzii. 1. Ultrasunetele de frecvență de 1 MHz măresc viscozitatea apei în domeniul de temperaturi cuprins între 10°C și 50°C.

2. Mărimea efectului pentru valori constante ale intensității și frecvenței cîmpului ultrasonic este în funcție de temperatură și timpul de acționare.

3. Creșterea viscozității se datorește unor modificări structurale ca urmare a desfacerii legăturilor de hidrogen.

(Intrat în redacție la 30 septembrie 1938)

BIBLIOGRAFIE

1. Ausländer D., Olteanu C., *Curgerea lichidelor în tuburi capilare în cîmp ultrasonic*, în „Metode ultrasonice de măsură și control”, București, Ed. I. D. T. IV, 1965, p. 53–62.
2. Bergmann L., *Ultrazvuk i ego primenenie v nauke i tehnike*. (Traducere din limba germană). Izdatelstvo inostrannoï literaturî, Moskva, 1957.
3. Frenkel, I., *A Kinetic theory of liquids*, Oxford, 1946.
4. Krisknamurthi-Suryanarayana, *Ultrasonic studies in chemically active liquid media*. II, în „Acustica”, 1961.
5. Krisknamurthi-Suryanarayana, *Ultrasonic studies in chemically active liquid media*. III, în „Acustica”, 1962.
6. Mihailov I. G. și Soloviov V. A., *Pogloșcenie ultrazvukovih voln v jidkostiah i molekularni mehanizm obeomnoi veazhosti*, în „Uspehi fiziceskih Nauk”, 50 (1953), fascicul. 1 (mai).
7. Mokhtar-Salama, *On the structural absorption of ultrasonic waves in toluene*, în „Acustica” 1962.
8. Solomon Max, *Viscozimetrie și elemente de teoria viscozității*, Editura tehnică, București, 1958.

ИЗМЕНЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ВОДЫ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ

(Резюме)

Работа занимается действием ультразвуков на вязкость воды в зависимости от температуры и времени ультразвуковой обработки, причём частота и сила ультразвукового поля сохранены постоянными.

Отмечено повышение вязкости в области 10—50°C и достижение максимальных эффектов, изменяющихся с температурой. Их получение требует растущей длительности ультразвуковой обработки с повышением температуры. После получения максимального эффекта, продление времени ультразвуковой обработки не изменяет больше значения вязкости.

Явление объясняется действием ультразвуков на водородные мостики, а также структурными изменениями, вызванными разрывом водородных мостиков.

VARIATION OF VISCOSITY OF WATER IN ULTRASONIC FIELD

(Summary)

The paper deals with the action of ultrasonics upon viscosity of water, depending on temperature and the time of ultrasonic treatment, the frequency and intensity of the ultrasonic field being maintained constant.

An increase of the viscosity in the range of 10°C to 50°C has been found, as well as an obtaining of some maximum effects which vary with temperature. Such phenomena require increasing durations of ultrasonic treatment; after obtaining a maximum effect, the prolongation of the time of ultrasonic treatment does not modify the value of viscosity.

The phenomenon is explained by the action of ultrasonics upon hydrogen bridges and by the structural modifications caused by their breaking.

PRIMUL ROMÂN TRANSILVĂNEAN, DOCTOR ÎN ȘTIINȚELE FIZICE

de

EVA GALIGER

Primul român transilvănean care și-a luat doctoratul în științele fizice la Universitatea din Cluj a fost prof. Ioan Radu.

El s-a născut în 1866, în satul Hărtăgani, jud. Hunedoara, dintr-o familie de țărani săraci.

Studiile și le începe în satul său natal, apoi învață în liceul din Brad. În 1883, după patru clase gimnaziale, pleacă la liceul din Blaj pentru continuarea studiilor sale, pe care le termină în anul 1887. Tot în acest an se înscrie la Universitatea din Cluj urmînd cursurile Facultății de științe, secția matematică-fizică.

În timpul studiilor liceale și universitare se întreține din diferite burse (60 de florini de la Consistoriul ortodox din Sibiu, în 1886/7, 80 coroane de la „Asociațiunea pentru literatura și cultura poporului român”, iar la Universitate 200 florini din fundația Gojdu și în 1889/90 încă 300 florini ca bursă de stat, obținută prin concurs), pe lângă care mai dă și meditații.

Ioan Radu termină studiile universitare, iar în vara anului 1892 își trece examenul de doctorat cu lucrarea *Cîteva date experimentale asupra căldurii radiante*. Teza este dedicată profesorului său Antoniu Abt, care a fost conducătorul științific al lucrării.

Lucrarea este constituită din două părți principale, *prima* parte conținînd o introducere și un istoric al rezultatelor obținute în acest domeniu de fizicienii contemporani, și prezentînd trei capitole: 1. difuzia căldurii radiante, 2. absorbția razelor de căldură de către corpurile gazoase, 3. dependența de temperatură a cantității de căldură radiante, iar *partea a doua* a lucrării conține experiențele lui I. Radu asupra căldurii radiante.

În *Introducere*, Radu, după enumerarea fenomenelor ce au loc în cazul radiației căldurii și după o înșirare a cunoștințelor dobîndite în acest domeniu, trage concluzia că radiațiile călduroase și luminoase sînt într-o strînsă legătură, spunînd: „Peste tot unde apar raze luminoase, apare și radiație de căldură: legătura între ele e așa de mare căci și căldura radiată, la fel ca și lumina, le putem pricepe ca vibrațiile transversale ale eterului, ba chiar le putem identifica”*. Tot aici arată scopul de a trata și a include în primele trei capitole experiențele efectuate în ultimul deceniu și de a face cunoscut în partea a doua a lucrării experiențele efectuate de autor la Universitatea din Cluj.

* Teza de doctorat: *Néhány kísérleti adat a sugározó hőhöz*, pag. 4.

În *capitolul I* face un istoric al problemei, arătînd că difuzia căldurii a fost descoperită de Melloni. În acest domeniu au descoperiri interesante Knoblauch, De la Provostaye și Desains, dar din cauza aparatului insuficient de precise ei n-au reușit să determine direcții precise pentru distribuția căldurii difuzate. Acest merit îi revine lui Knut Angström, care a folosit bolometrul lui Langley. Cu acest aparat el a studiat suprafața de difuzie, ce depinde de prelucrarea mecanică a suprafeței corpului respectiv și de grosimea stratului prin care are loc difuzia. Rezultatele obținute de el se pot rezuma în următoarele :

— în cazul incidenței normale suprafața de difuzie este un elipsoid de rotație a cărui axă este normala ; la alte unghiuri de incidență acest elipsoid se poate turti sau poate lua forma de sferă ;

— raportul intensităților razei reflectate în direcția normalei și a celei incidente scade cu creșterea unghiului de incidență, iar radiația totală de căldură a unei suprafețe scade aproape proporțional cu cosinusul unghiului de incidență ;

— intensitatea în direcția razei refractate scade cu grosimea stratului respectiv ;

— difuzia maximă coincide cu direcția normalei la suprafață.

Pentru explicarea difuziei căldurii Angström presupune că suprafața ce produce difuzia constă dintr-o infinitate de suprafețe reflectatoare.

În *capitolul II* prezintă cele trei metode (Tyndall, Magnus și Tyndall-Röntgen) folosite de fizicieni pentru studiul absorbției căldurii de către gaze. Primele două metode neavînd importanță științifică, ci numai istorică, nu sînt descrise pe larg ; numai metoda lui Tyndall-Röntgen este prezentată amănunțit, metodă ce a fost îmbunătățită de Angström și pentru determinări cantitative.

Esența metodei lui Röntgen este că măsurarea căldurii absorbite se face pe baza măririi unui volum de gaz dat. Cu această metodă s-a studiat absorbția de căldură la hidrogen, aer, vapori de apă și bioxidul de carbon. Ca sursă de căldură s-a folosit flacăra Bunsen, lampa cu gaz detonant, anilină fierbinte și apă fierbinte.

Din experiențele efectuate a rezultat că :

— hidrogenul și aerul nu prezintă absorbție față de flacăra Bunsen și lampa cu gaz detonant,

— vaporii de apă au un anumit spectru caloric, căci cantitatea de căldură absorbită variază cu sursa de căldură,

— vaporii de apă și bioxidul de carbon prezintă o diferență la absorbția căldurii.

Experiențele lui Röntgen lămuresc problema mult discutată și anume că vaporii de apă sînt absorbanți și prezintă un spectru caloric specific.

Angström s-a străduit să evite deficiențele măsurărilor efectuate de Röntgen și să măsoare cantitativ absorbția de căldură, mai ales la CO_2 , vapori de apă și aer, gaze ce au o influență mare asupra fenomenelor meteorologice. Ca aparate de măsură a folosit bolometrul și spectrobolometrul. Din experiențele efectuate a rezultat că vaporii de apă absorb mai pronunțat căldura decît CO_2 , iar absorbția aerului este aproape negliabilă.

Capitolul III reprezintă un istoric al relației dintre căldura radiantă și temperatura corpului radiant. Radu aici ne dă relațiile stabilite de :

$$\text{Dulong și Petit, } Q = k^* \cdot (1.0077)^\vartheta \quad (\vartheta = \text{temperatura în } ^\circ\text{C}) \quad (1)$$

$$\text{Ștefan } Q = k^* \cdot T^4 \quad (T = \text{temperatura absolută}) \quad (2)$$

* k este o constantă caracteristică corpului radiant în toate relațiile (1), (2), (3).

care a fost dedusă teoretic de Boltzman și verificată de Graetz și Schneebeli. Experiențele lui Schleiermacher și Edler însă au infirmat valabilitatea generală a acestei relații. Pornind din aceste rezultate negative

Weber stabilește relația

$$Q = k^* \cdot \tau e^{\alpha\tau} \quad (3)$$

(τ fiind diferența de temperatură dintre mediu și corpul radiant), care însă la rîndul său de asemenea n-a fost urmată în mod riguros de toate corpurile cercetate.

În *partea a doua* Radu descrie propriile sale experiențe cu care contribuie în oarecare măsură la rezolvarea problemelor de radiația căldurii; mai precis, el se ocupă de absorbția căldurii și cercetează experimental constanța coeficientului de absorbție. El folosește o metodă de reducere la absurd, adică presupune că în cazul corpurilor stratificate, dacă *emitem ipoteza* că, coeficienții de absorbție ai straturilor din interiorul corpului nu diferă între ei, atunci coeficientul de absorbție este constant și nu depinde de numărul straturilor subțiri, adică

$$r = 1 - \sqrt[n-i]{\frac{I_n}{I_1}} \quad (4)$$

este constant (unde I_n — intensitatea de căldură trecură prin corp, I_1 — intensitatea de căldură incidentă, n — numărul straturilor).

Însă în urma unei serii de experiențe efectuate cu termomultiplicatorul lui Melloni, Radu a ajuns la concluzia că *r nu este constant* ci crește cu n , de unde rezultă că ipoteza făcută a fost greșită.

Măsurătorile propriu-zise au fost precedate de o serie de experiențe ce aveau drept scop controlul aparaturii, evaluarea sensibilității acesteia, verificarea intensității căldurii ce crește cu inversul pătratului distanței. Aceste experiențe au fost efectuate cu diferite surse de căldură (lampa lui Locatelli, cubul lui Leslie, tablă de alamă încălzită cu flacăra Bunsen) pentru a alege cea mai corespunzătoare, și anume lampa lui Locatelli, care asigură o radiație cu o intensitate de căldură constantă pe un interval de aproape o săptămână. Corpul studiat a fost din sticlă și mică, materiale ce au putut fi ușor stratificate.

Rezultatele obținute sînt cuprinse în 8 tabele.

Din păcate autorul n-a reușit să facă și alte experiențe ce ar fi putut clarifica cauzele ce au dus la variația lui r infirmînd relația (4).

Teza de doctorat a lui I. Radu a fost apreciată de oamenii de știință din Cluj și din întreaga țară.

*

Dr. Ioan Radu, după terminarea studiilor, este numit profesor la liceul din Brad, unde se stabilește definitiv și unde își desfășoară activitatea sa ca profesor, iar din 1920 ca directorul liceului, pînă la pensionarea lui.

În această perioadă el a depus o muncă rodnică didactică și extrașcolară, ce contribuia la ridicarea nivelului cultural al țărănimii din împrejurimi (ținea conferințe în satele învecinate, conducea cursuri de alfabetizare, scria și tipărea broșuri cu sfaturi gospodărești pentru țărani). Multe articole de specialitate apărute în „Anuarul liceului din Brad”, ca: *Un tractat de geometrie*, din 1892, *Un tractat de aritmetică*, din 1893, *Goniometrie*, din 1895 și altele îl au ca autor pe Dr. I. Radu. Profesorul Radu a mai tradus, în colaborare cu I. Hossu și E. Viciu, din limba maghiară, manualul *Geometrie* de Dr. L. Sárkány, pentru clasele superioare gimnaziale.

Pe lângă aceste activități, profesorul I. Radu a fost preocupat continuu de buna organizare a liceului, de înființarea internatului, bibliotecii și laboratoarelor de chimie, fizică și științele naturale, de ridicarea continuă a nivelului cultural al învățămîntului la liceul „Avram Iancu” din Brad.

După o viață bogată în rezultate remarcabile, prof. Ioan Radu, mult prețuit de colegii săi de lucru și de toți oamenii simpli din ținut, moare la 30 decembrie 1936, la vârsta de 70 de ani.

(*Intrat în redacție la 20 iulie 1968*)

ПЕРВЫЙ ТРАНСИЛЬВАНСКИЙ РУМЫН, ДОКТОР ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

(Резюме)

Иоан Раду, доктор физических наук, рождённый в 1866 г., сдал экзамен для получения докторской степени в Клужском университете в 1892 г., защищая диссертацию „Несколько экспериментальных данных о лучистой теплоте”. Работа была выполнена под руководством профессора А. Абта. Она содержит, кроме введения и обзора результатов, полученных в то время в области радиации и поглощения теплоты, его собственные опыты, связанные с постоянством коэффициента поглощения теплоты.

Используя метод доведения до абсурда и в качестве прибора тепломultiпликатор Меллони, Иоан Раду приходит к выводу, что коэффициент поглощения не является постоянным и зависит от числа слоёв изученного тела (стекло, слюда).

В работе не разьяснены однако причины, приводящие к повышению коэффициента поглощения.

Всё же работа представляет интерес с точки зрения истории изучения физики в Клужском университете.

THE FIRST ROMANIAN IN TRANSYLVANIA WHO TOOK HIS DOCTORATE IN PHYSICS

(Summary)

Ioan Radu, born in 1866, passes his doctorate in Physics at Cluj University, in 1892. His thesis entitled “Some experimental data on the radiant heat” was carried out under prof. A. Abt. It contains besides an introduction and a review on the results obtained during those years in the domain of radiation and absorption of heat, also his own experiments related to the constancy of absorption coefficient of heat.

Making use of reductio ad absurdum and utilizing Melloni's thermomultiplier, Ioan Radu concludes that the absorption coefficient is not a constant, but its depends on the number of layers of the studied sample (glass, mica).

A shortcoming of his thesis is the lack of the causes that determine an increase of the absorption coefficient.

However, the work is important for the history of Physics at Cluj University.

A. Kertész, **Vorlesungen über Artinsche Ringe**, Akadémiai Kiadó, Budapest (1968), 281 Seiten.

Die Untersuchung der Artinschen Ringe — d.h. von Ringen, die die Kettenbedingung für absteigende Ketten von Rechtsidealen erfüllen —, bildet den Kern der modernen Theorie der nicht notwendig kommutativen Ringe. In ihrem im Jahre 1944 erschienenen Buch *Rings with minimum condition* haben Artin, Nesbitt und Thrall eine vorzügliche Zusammenfassung der bis dahin erzielten Ergebnisse gegeben. Die seit damals verflossene zwanzigjährige Zeitspanne hat aber eine solche Fülle neuer Ergebnisse gebracht, dass das Erscheinen eines neuen Buches über Artinsche Ringe zur Notwendigkeit wurde. Das vorliegende Buch, das sich auf Vorlesungen — die der Verfasser im Studienjahr 1962/63 an der Universität zu Halle gehalten hat — gründet, vermittelt einerseits ein genaues Bild des gegenwärtigen Standes der Theorie der Artinschen Ringe und bildet andererseits eine Einführung in die allgemeine Ringtheorie. Das Buch enthält viele Ergebnisse, die vom Verfasser in den letzten fünfzehn Jahren in verschiedenen Zeitschriften publiziert wurden. Das betrachtete Material zerfällt in zehn Kapitel: 1. Mengen, Relationen; 2. Der Ringbegriff; 3. Ringkonstruktionen; 4. Moduln und Algebren; 5. Das Radikal; 6. Allgemeines über Artinsche Ringe; 7. Ringe linearer Transformationen; 8. Halbeinfache Ringe und vollständig primäre Ringe; 9. Moduln über halbeinfachen Ringen; 10. Die additive Struktur der Artinschen Ringe. Das Buch setzt keine weitgehenden Vorkenntnisse aus der Ringtheorie voraus, doch wird eine gewisse Vertrautheit mit der Gruppen- und Körpertheorie vorausgesetzt. Ein Anhang fasst diejenigen Aussagen über Abelsche Gruppen zusammen, die für die Lektüre des zehnten Kapitels unentbehrlich sind. Für weitergehende Studien verweist der Verfasser auf das Literaturverzeichnis am Ende des Buches, das mehr als zweihundert Titel umfasst. Den einzelnen Kapiteln sind Übungsaufgaben hinzugefügt. Hinweise zu den Lösungen der schwieri-

gen Aufgaben werden am Ende des Buches gegeben.

Das Buch ist sehr klar und übersichtlich geschrieben. Grosses Gewicht wird auf den systematischen Aufbau des Werkes gelegt, wodurch der Wert des Buches noch mehr erhöht wird.

I. GY. MAURER

L. Rédei, **Fundation of Euclidean and Non-Euclidean Geometries according to F. Klein**, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

This book provides a systematical exposition of the foundation of the three-dimensional parabolic, hyperbolic and elliptic geometries through a projective extension of the space. As Felix Klein's ideas in this direction have not yet found a satisfactory treatment, L. Rédei's book fills up a real gap in mathematical literature.

The author starts with a system of axioms comprising the axioms of incidence, betweenness, continuity and motion. The axioms of incidence and betweenness are assumed to be fulfilled only in a subset of the space R , called the basic domain.

Two chapters are devoted to simple consequences of the axioms of incidence and betweenness. It is shown that these axioms retain their validity when we replace the points, lines and planes of the space by the points, lines and planes of the basic domain.

The following chapter is of particular interest.

The projective closure R of the space R is constructed here by means of improper bundles of lines. Desargues configuration and its associated configuration — deduced by carrying out a well-defined interchange of the role of the points intervening in the configuration — are used in an original manner.

The chapter devoted to the investigation of the projective space is concerned with collineations, cyclic ordering, projective segments and angles,

complete quadrangles and preliminaries about coordinate systems.

Coordinates are introduced in the next chapter, which is based on the first three groups of axioms. Here the classical fundamental theorem of projective geometry is proved, all collineations of the space are determined and cross ratio are defined.

A particular emphasis is paid to the last chapter, in which all the axioms are assumed to be valid. First it is shown that every motion of the space R can be extended in just one way to form a collineation of the projective closure \bar{R} , and then that no proper segment is contracted by a motion. It follows from a discussion about metric scales that we have to consider for the space \bar{R} only the following three cases: 1) there exists no improper point, 2) every proper line contains just one improper point, 3) every proper line contains an infinity of improper points. According to which of these three cases hold, the space is called elliptic, parabolic or hyperbolic, respectively, and at this moment the geometry branches into three theories. Then a parallel treatment of each theory is given. This treatment concludes, in the sense of the Erlangen programme, by establishing the motion equations of the three geometries their consistency being also proved. The last paragraphs are concerned with the measuring of segments and angles and some applications to trigonometry of hyperbolic geometry.

Emphasis is given exclusively to the logical framework of geometry. Topics which are not directly connected with the main purpose being disregarded, the book has a convenient size.

The book presents many original features both in conception and methodological details. Extremely clear, attractive and well-organized exposition make this carefully written book an excellent text for studying the foundations of Euclidean and Non-euclidean geometries.

F. RADÓ

I. URSU. *La résonance paramagnétique électronique*, Dunod, Paris, 1968.

Acum cîțiva ani remarcam în paginile acestei reviste apariția, în Editura Academiei, a cărții profesorului Ioan Ursu, *Rezonanța electronică de spin*. Am salutat atunci apariția acestei cărți ca răspunzînd la două deziderate importante: 1. Dezvoltarea unui colectiv de cercetare în probleme

de rezonanță magnetică la Cluj a impus scrierea unei cărți care să cuprindă principiile fenomenelor de rezonanță, aplicațiile rezonanței electronice și care în același timp să conțină și principalele rezultate obținute de acest colectiv. 2. În țară l. noi se simțea nevoia unei astfel de cărți care să informeze cercurile largi de specialiști și studenți asupra acestui domeniu de activitate creatoare care s-a dezvoltat începînd cu anul 1944.

Apariția cărții a stîrnit interesul specialiștilor străini care au apreciat-o la reala ei valoare. Din acest interes s-a născut noua ediție a cărții revizuită și adăugită. Evenimentul s-a produs în editura pariziană Dunod care o publică în limba franceză, cu titlul *La résonance paramagnétique électronique*. Tipărirea, în vestita editură, a cărții de mai sus semnifică prezența și afirmarea intensă a fizicii românești pretutindeni. Simți o profundă mîndrie cînd în expozițiile de cărți ce se organizează în holul congreselor apare și cîte o carte românească. Așa s-a întîmplat și la Grenoble, unde cu ocazia celui de al XV-lea Colocviu AMTERR (16-20 septembrie 1968) cartea profesorului I. Ursu figura printre noutățile expuse.

Lucrarea tipărită pe 500 de pagini expune un material bogat, repartizat pe 14 capitole și 3 anexe. În primele șapte capitole sînt expuse principiile fenomenului de rezonanță și legătura acestuia cu alte fenomene nucleare atomice și moleculare. Tot în prima parte este expusă și tehnica de măsură în fenomenele de rezonanță paramagnetică electronică. În ultimele 7 capitole sînt discutate rezultatele experimentale pe două clase de ioni și centrul care prezintă absorbție de rezonanță (radicali liberi, centri de culoare, etc.) în diferite substanțe, inclusiv în semiconductori. În ultimul capitol sînt prezentate implicațiile practice ale fenomenului de rezonanță; se discută aici generatorii cuantici și aplicațiile lor practice. În Anexa 1 se expun transformările de simetrie sub formă sistematică, deoarece ele au fost folosite pe parcursul cărții. Anexele 2 și 3 prezintă tablele cu momente nucleare ale elementelor și respectiv constantele din hamiltonianul de spin pentru un mare număr de ioni introduși în diferite cristale ionice.

Cartea este prefațată de către cunoscutul om de știință A. Kastler, profesor la École Normale Supérieure din Paris, laureat al premiului Nobel. Competența lui Kastler face ca aprecierile date de el cărții pe care o discutăm să ridice și mai mult, în fața lumii, prestigiul autorului și al fizicii românești.

AL. NICULA

În cel de al XIV-lea an de apariție (1969) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde seriile :

matematică—fizică (2 fascicule) ;
chimie (2 fascicule) ;
geologie—geografie (2 fascicule) ;
biologie (2 fascicule) ;
filozofie ;
științe economice ;
psihologie—pedagogie ;
științe juridice ;
istorie (2 fascicule) ;
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIV году издания (1969) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями :

математика—физика (2 выпуска) ;
химия (2 выпуска) ;
геология—география (2 выпуска) ;
биология (2 выпуска) ;
философия ;
экономические науки ;
психология—педагогика ;
юридические науки ;
история (2 выпуска) ;
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XIV-me année de publication (1969) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les séries suivantes :

mathématiques—physique (2 fascicules) ;
chimie (2 fascicules) ;
géologie—géographie (2 fascicules) ;
biologie (2 fascicules) ;
philosophie ;
sciences économiques ;
psychologie—pédagogie ;
sciences juridiques ;
histoire (2 fascicules) ;
linguistique—littérature (2 fascicules).

43875