

491307

Gr. 3

STUDIA  
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1968

C L U J

**REDACTOR ȘEF: Acad. prof. C. DAICOVICIU**

**REDACTORI ȘEFI ADJUNȚI: Prof. N. LASCU, acad. prof. ȘT. PÉTERFI,  
prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei**

**COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:**  
**Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ,**  
**prof. Z. GÁBOS, prof. D. V. IONESCU, conf. I. POP, prof. GH. PIC,**  
**prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei**

# STUDIA

## UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

### SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

#### FASCICULUS 2

1968

---

Redacția: CLUJ, str. Kogălniceanu 1 • Telefon: 13450

---

#### SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

- M. FRODA-SCHECHTER, Relations induites par une relation de préordre • Relații induse de o relație de preordonare • Соотношения, введенные соотношением предпорядка . . . 3
- GR. MOLDOVAN, Comportarea soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, care depind de un parametru mic • Поведение решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от малого параметра • Comportement des solutions des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants dépendant d'un petit paramètre . . . 21
- G. PAVEL, Generalization of N. I. Lobachevski's Functional Equation by Means of Matrices • Generalizarea ecuației funcționale a lui N. I. Lobachevski cu ajutorul matricelor • Обобщение функционального уравнения Н. И. Лобачевского при помощи матриц . . . 31
- P. SZILÁGYI, Sur les formes canoniques pour systèmes elliptiques de deuxième ordre à coefficients constants • Asupra formelor canonice pentru sisteme eliptice de ordinul al doilea cu coeficienți constanți • О канонических формах для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами . . . 35
- I. BALÁZS, Despre rezolvarea ecuațiilor prin metoda iperbolelor tangente • О решении уравнений методом касательных гипербол • Sur la résolution des équations par la méthode des hyperboles tangentes . . . 45
- H. COMAN, Asupra unor formule de cubatură cu noduri fixe • О некоторых кубатурных формулах с неподвижными узлами • Sur des formules de cubature à noeuds fixes . . . 51
- B. JANKO, G. GOLDNER, Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale prin metoda lui Cebîșev (II) • О решении операторных уравнений методом Чебышева (II) • Sur la résolution d'équations opérationnelles par la méthode de Tchébychev (II) . . . 55
- M. MARUȘCIAC, Une forme explicite de la solution du problème de la programmation quadratique • О формă explicită a problemei programării pătratice • Явная форма задачи квадратичного программирования . . . 59
- P. PAVEL, Asupra restului unor formule de cuadratură de tip Gauss-Christoffel • Об остатке некоторых квадратурных формул Гаусс-Кристоффеля • Sur le reste de formules de quadrature du type Gauss-Christoffel . . . 67
- POP, Mișcarea hidromagnetică nestaționară cu sucțiune deasupra unui perete poros plan vertical • Нестационарное гидромагнитное движение с подсосом над вертикальной плоской пористой стеной • Le mouvement hydromagnétique non-stationnaire avec suction au-dessus d'une paroi poreuse plane et verticale . . . 73
- MIHOC, Determinarea elementelor fotometrice ale variabilei RV Comae Berenices • Определение фотометрических элементов переменной RV Comae Berenices • Détermination des éléments photométriques de la variable RV Comae Berenices . . . 77
- P. GÁBOS, La matrice covariante de polarisation des particules de spin quelconque • Matricea covariantă de polarizare pentru particule cu spin arbitrar • Ковариантная матрица поляризации для частиц с произвольным спином . . . 85

C. ȘERBAN, I. DĂBALĂ, D. AUSLÄNDER, E. CONSTANTIN, Acțiunea ultrasunetelor asupra unor pile de concentrație ● Действие ультразвуков на некоторые элементы концентрации ● L'action des ultrasons sur des piles de concentration . . . . .	95
E. CONSTANTIN, D. AUSLÄNDER, I. DĂBALĂ, C. ȘERBAN, Contribuții la studiul separării efectelor ultrasunetelor în măsurătorile de conductibilitate a unor dielectrici ● К исследованию отделения эффектов ультразвуков при измерениях электропроводности некоторых диэлектриков ● Contribution à l'étude de la séparation des effets des ultrasons dans les mesurages de la conductibilité de certains diélectriques . . . . .	101
AL. NICULA, AL. DARABONT, S. FĂRCAȘ, Influența radiațiilor UV asupra halogenurilor alcaline impurificate cu cationi ● Влияние УФ излучений на щелочные галоиды, загрязненные катионами ● Influence of UV Radiations upon Alkaline Halogens Doped with Cations . . . . .	105
D. DEMCO, R. BAICAN, Măsurarea timpilor de relaxare utilizând observarea simultană a absorbției și dispersiei ● Измерение времени релаксации, используя одновременное наблюдение поглощения и дисперсии ● Measurements of the Relaxation Times using Simultaneous Observation of Absorbtion and Dispersion . . . . .	115
I. POP, V. NICULESCU, O. POP, L. STĂNESCU, Magnetische Kernresonanz des Isotopes Li <sup>7</sup> im Lithiumkarbonat, -Oxyd und -Chromit ● Резонанța magnetică nucleară a izotopului Li <sup>7</sup> în carbonat, oxid și cromit de litiu ● Ядерный магнитный резонанс изотопа Li <sup>7</sup> в карбонате, окиси и хромите лития . . . . .	117
V. ZNAMIROVSCHI, Otrăvirea cu hidrogen a electrozilor cu pulberi catalitice ● Отравление водородом электродов с каталитическими порошками ● Poisoning with Hydrogen of the Catalytic Powder Electrodes . . . . .	125
V. MARIAN, J. JÓZSA, Plenitudo vacui a lui Pápai Páriz Ferenc ● Plenitudo vacui Папая Париза Ференца ● Plenitudo vacui belonging to Pápai Páriz Ferenc . . . . .	129

Note ● Заметки ● Notes ● Notizen

I. BARBUR, Efecte feroelectrice în (NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> și (ND <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> iradiat ● Ферроэлектрические эффекты в облученных (NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> и (ND <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ● Ferroelectric Effects in Irradiated (NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> and (ND <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	139
---	-----

Recenzii ● Рецензии ● Livres parus ● Books ● Bücherbesprechung Franz von Kutchera, Elementare Logik (GH. PIC) . . . . .	143
P. L. Hammer (Ivănescu), S. Rudeanu, Boolean Methods in Operation Research and Related Areas (C. TARȚIA) . . . . .	143
Bruno Brosowski, Nicht - lineare Tschebyscheff - Approximation (WOLFGANG W. BRECKNER) . . . . .	144

Cronică ● Хроника ● Chronique ● Chronicle ● Chronik Contributions to the Qualitative Study of Nonlinear Oscillations (Abstract of the doctor thesis prepared by IOAN MUNTEAN) . . . . .	145
Ședințe de comunicări . . . . .	146
Participări la manifestări științifice internaționale . . . . .	147
Participări la manifestări științifice din țară . . . . .	147
Comunicări . . . . .	148
Vizite . . . . .	149

# RELATIONS INDUITES PAR UNE RELATION DE PRÉORDRE

par

MICHELINE FRODA-SCHECHTER

*Présenté au III<sup>e</sup> Congrès Interbalkanique des Mathématiciens, Bucarest, 12-17 septembre 1966*

Soit  $\leq$  une relation de préordre (relation réflexive et transitive) définie sur un ensemble  $T$ . On considère les relations suivantes induites sur l'ensemble  $\mathcal{P}(T)$  des parties de  $T$ :

$$E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \Leftrightarrow \forall_{e_1 \in E_1} \exists_{e_2 \in E_2} e_1 \leq e_2 \quad \text{D 1}$$

$$E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \Leftrightarrow \forall_{e_2 \in E_2} \exists_{e_1 \in E_1} e_1 \leq e_2 \quad \text{D 1'}$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont des parties de  $T$ . Il est facile de vérifier que  $\overset{\iota}{<}$  et  $\overset{\iota}{<}$  sont des préordres et on les dénommera respectivement préordres induits  $\overset{\iota}{<}$ -supérieur,  $\overset{\iota}{<}$ -inférieur. Évidemment ce ne sont pas les seules relations possibles induites par  $\leq$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(T)$  de cette manière. Le problème général a été étudié dans [6]. Les exemples exposés au dernier paragraphe, ainsi que [7] justifient ce choix.

Ces préordres conduisent respectivement aux équivalences:

$$E_1 \overset{\iota}{=} E_2 \Leftrightarrow E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \ \& \ E_2 \overset{\iota}{<} E_1 \quad \text{D 2}$$

$$E_1 \overset{\iota}{=} E_2 \Leftrightarrow E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \ \& \ E_2 \overset{\iota}{<} E_1 \quad \text{D 2'}$$

dont on conviendra de noter les classes correspondantes

$$\mathcal{X}^{\iota}(E) = \{E \in \mathcal{P}(T) \mid E^* \overset{\iota}{=} E\}; \quad \mathcal{X}_i(E) = \{E^* \in \mathcal{P}(T) \mid E^* \overset{\iota}{=} E\}$$

On sait que chaque préordre induit dans l'ensemble des classes d'équivalence correspondantes une relation d'ordre [3]. On désignera ici ces relations d'ordre par  $\overset{\iota}{<}$  et  $\overset{\iota}{<}$ . Elles se définissent donc de la manière suivante:

$$\mathcal{X}^{\iota}(E_1) \overset{\iota}{<} \mathcal{X}^{\iota}(E_2) \Leftrightarrow \exists_{E^1 \in \mathcal{X}^{\iota}(E_1)} \exists_{E^2 \in \mathcal{X}^{\iota}(E_2)} E^1 \overset{\iota}{<} E^2 \quad \text{D 3}$$

$$\mathcal{X}_i(E_1) \overset{\iota}{<} \mathcal{X}_i(E_2) \Leftrightarrow \exists_{E^1 \in \mathcal{X}_i(E_1)} \exists_{E^2 \in \mathcal{X}_i(E_2)} E^1 \overset{\iota}{<} E^2 \quad \text{D 3'}$$

Dans ce qui suit on se propose d'étudier : §1. Les propriétés des relations définies. § 2. Les propriétés de la réunion des ensembles d'une classe. § 3. Les propriétés de l'intersection des ensembles d'une classe. § 4. Les possibilités de coïncidence de deux classes de partitions différentes. § 5. Les propriétés de l'ensemble ordonné des classes  $\iota$ -supérieur (respectivement  $\iota$ -inférieur). § 6: On y exposera quelques exemples.

Deux définitions supplémentaires sont encore nécessaires. Si l'ensemble  $T$  est ordonné et réticulé et  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  désignent respectivement l'union et l'intersection des éléments  $x$  et  $y$ , on pose

$$E_1 \overset{\iota}{\wedge} E_2 = \{e_1 \wedge e_2 \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\} \quad D 4$$

$$E_1 \overset{\iota}{\vee} E_2 = \{e_1 \vee e_2 \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\} \quad D 4'$$

Si  $E_2 = \emptyset$  on pose  $E_1 \overset{\iota}{\wedge} E_2 = E_1 \overset{\iota}{\vee} E_2 = E_1$ .

§ 1. Les définitions D 1 et D 1' sont duales. D'une manière plus précise si  $(T, \leq)$  est l'ensemble  $T$  préordonné par la relation  $\leq$  et si  $(T, \geq)$  est son dual, on a  $E_1 \overset{\iota}{<} E_2$  dans  $(T, \leq) \Leftrightarrow E_2 \overset{\iota}{<} E_1$  dans  $(T, \geq)$ .

$$\text{En effet } E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \Leftrightarrow \forall_{\substack{\text{dans } (T, \leq) \\ e_1 \in E_1, e_2 \in E_2}} e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow \forall_{\substack{\text{dans } (T, \leq) \\ e_1 \in E_1, e_2 \in E_2}} e_1 \geq e_2 \Leftrightarrow E_2 \overset{\iota}{<} E_1 \quad \text{dans } (T, \geq)$$

Il en résulte que

$E_1 \overset{\iota}{=} E_2$  dans  $(T, \leq) \Leftrightarrow E_1 \overset{\iota}{=} E_2$  dans  $(T, \geq)$ , donc une classe  $\mathcal{X}(E)$  dans  $(T, \leq)$  est une classe  $\mathcal{X}_\iota(E)$  dans  $(T, \geq)$ .

Par dualité l'inclusion, la réunion et l'intersection des parties de  $T$  ne changent pas. On peut donc exprimer ces observations en disant qu'à toute propriété  $P' [\leq, <, \overset{\iota}{<}, \subset, \cap, \cup, \overset{\iota}{\cup}, \overset{\iota}{>}]$  correspond une propriété duale  $P'' [\geq, >, \overset{\iota}{>}, \supset, \cap, \cup, \overset{\iota}{\supset}, \overset{\iota}{>}]$ . Si  $T$  est un ensemble réticulé, les opérations  $\overset{\iota}{\vee}$  et  $\overset{\iota}{\wedge}$  définies plus haut (D 4, D 4') sont aussi duales.

Si la relation  $\leq$  est une relation d'ordre partiel, les relations induites  $\overset{\iota}{<}$  et  $\overset{\iota}{>}$ , sont encore seulement des préordres. Elles ne sont des relations antisymétriques que dans des cas particuliers. Ainsi, si on considère les relations induites relativement à une famille de parties disjointes et telle que chaque classe contient au moins un ensemble convexe<sup>1</sup>, celles-ci sont des relations d'ordre. En effet soit  $E_{\alpha_1} \overset{\iota}{=} E_{\alpha_2}$  et  $E_{\alpha_3}$  un ensemble convexe équivalent. On a donc  $E_{\alpha_2} \overset{\iota}{=} E_{\alpha_3}$ , c'est-à-dire que

$$\forall a \in E_{\alpha_3} \exists a_1 \in E_{\alpha_1} \exists a' \in E_{\alpha_2} \quad a \leq a_1 \leq a'$$

donc,  $E_{\alpha_3}$  étant convexe,  $a_1 \in E_{\alpha_1}$ , et par conséquent  $E_{\alpha_2} = E_{\alpha_1}$ , d'où  $E_{\alpha_1} = E_{\alpha_2}$ . La même remarque est valable pour la relation induite duale  $\overset{\iota}{<}$ .

<sup>1</sup> On dit que  $E$  est convexe si de  $e_1, e_2 \in E$  et  $e_1 \leq x \leq e_2$  il résulte  $x \in E$ .

Quelques propriétés résultent immédiatement des définitions si  $T$  est supposé préordonné et si  $E_1, E_2, E_\alpha, E'_\alpha \in \mathcal{P}(T)$ .

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow E_1 \overset{\cdot}{<} E_2 \text{ et } E_2 \overset{\cdot}{<} E_1 \quad (1.1)$$

et en particulier

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 \overset{\cdot}{=} E_2 \text{ et } E_2 \overset{\cdot}{=} E_1 \quad (1.1)'$$

$$\bigvee_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} E'_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha; \quad \bigvee_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} E'_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha \quad (1.2)$$

En effet soit  $x \in \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$  donc  $\exists_{\alpha \in A} x \in E_\alpha$  et de l'hypothèse

$$\exists_{y \in E'_\alpha} x \leq y \text{ c'est-à-dire } y \in \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha.$$

On aura donc aussi

$$E_\alpha \overset{\cdot}{=} E'_\alpha, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{=} \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha \quad (1.3)$$

$$E_\alpha \overset{\cdot}{=} E'_\alpha, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{=} \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha$$

En particulier

$$E_\alpha \overset{\cdot}{=} E, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{=} E; \quad E_\alpha \overset{\cdot}{=} E, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E'_\alpha \overset{\cdot}{=} E \quad (1.3)'$$

Il n'y a pas de propriétés analogues de l'intersection, qui n'est pas toujours, comme la réunion d'éléments d'une classe, élément de cette classe. On peut dire seulement que

$$\bigvee_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} E \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} E; \quad \bigvee_{\alpha \in A} E \overset{\cdot}{<} E_\alpha \Rightarrow E \overset{\cdot}{<} \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \quad (1.4)$$

car

$$\bigvee_{\alpha \in A} \alpha \in A : \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \subseteq E_\alpha \text{ donc } \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \overset{\cdot}{<} E_\alpha$$

ce qui nous donne (1.4) avec l'hypothèse et la transitivité de la relation  $\overset{\cdot}{<}$ .

Les propriétés des opérations  $\overset{\cdot}{\wedge}$  et  $\overset{\cdot}{\vee}$  définies plus haut (D 4 et D 4') dans l'ensemble  $\mathcal{P}(T)$  des parties d'un ensemble réticulé  $T$ , seront utiles par la suite (§ 5).

$$E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \overset{\cdot}{<} E_1, \quad E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \overset{\cdot}{<} E_1 \quad (1.5)$$

En effet quel que soit  $x \in E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2$  on a  $x = e_1 \wedge e_2$ , donc  $x \leq e_1$ . De même, quel que soit  $e_1 \in E_1$ , si  $E_2 \neq \emptyset$  et  $e_2 \in E_2$   $e_1 \wedge e_2 \leq e_1$  (si  $E_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 = E_1 \overset{\cdot}{<} E_1$ ).

De la même manière, ou bien par dualité, on obtient

$$E_1 < E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2, \quad E_1 < E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 \quad (1.6)$$

On voit aussi que

$$E \subset E \underset{\downarrow}{\wedge} E, \quad E \subset E \underset{\downarrow}{\vee} E \quad (1.7)$$

Il est clair que l'égalité  $E = E \underset{\downarrow}{\vee} E$  exprime la condition nécessaire et suffisante pour que  $E$  soit un demi sous-treillis. De même si  $E = E \underset{\downarrow}{\wedge} E$ ,  $E$  est un demi sous-treillis par rapport à l'intersection et réciproquement. Enfin  $E$  est un sous-treillis si et seulement si  $E = E \underset{\downarrow}{\vee} E = E \underset{\downarrow}{\wedge} E$ , et un sous-treillis complet si on a

$$E = \underset{\alpha \in A}{\vee} E_\alpha = \underset{\alpha \in A}{\wedge} E_\alpha \quad \text{où} \quad E_\alpha = E \quad \text{et} \quad A \quad \text{quelconque.}$$

Il résulte des formules (1.5), (1.6) et (1.7) qu'on a pour toute partie  $E$  de  $T$

$$E \underset{\downarrow}{\vee} E = E \quad \text{et} \quad E \underset{\downarrow}{\wedge} E = E \quad (1.8)$$

En effet (1.7) implique  $E \underset{\downarrow}{\vee} E < E$ , et (1.6) que  $E < E \underset{\downarrow}{\vee} E$ . La seconde formule (1.8) résulte par dualité de la première. On vérifie aussi facilement les formules suivantes duales deux par deux

$$E_1 \cup E_2 < E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2, \quad E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 < E_1 \cup E_2 \quad (1.9)$$

$$E_1 \cap E_2 \subset E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2, \quad E_1 \cap E_2 \subset E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2 \quad (1.10)$$

En effet si  $x \in E_1 \cup E_2$ ,  $x \in E_1$  ou  $x \in E_2$ . Si  $x = e_1 \in E_1$  on a quel que soit  $e_2 \in E_2$   $e_1 < e_1 \underset{\downarrow}{\vee} e_2$ , donc la première des formules (1.9). La seconde est sa duale. Soit  $x \in E_1 \cap E_2$  donc  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ ; les formules (1.10) sont vraies puisque  $x = x \underset{\downarrow}{\wedge} x = x \underset{\downarrow}{\vee} x$ . Il résulte de (1.5) et (1.6) par transitivité

$$E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 < E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2 \quad \text{et} \quad E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 < E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2$$

Il y a des propriétés de monotonie de ces opérations :

$$\begin{aligned} E_1 < E'_1 \quad \text{et} \quad E_2 < E'_2 \quad \text{impliquent} \\ E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 < E'_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E'_2 \quad \text{et} \quad E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2 < E'_1 \underset{\downarrow}{\vee} E'_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

et dualement

$$\begin{aligned} E_1 < E'_1 \quad \text{et} \quad E_2 < E'_2 \quad \text{impliquent} \\ E_1 \underset{\downarrow}{\vee} E_2 < E'_1 \underset{\downarrow}{\vee} E'_2 \quad \text{et} \quad E_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E_2 < E'_1 \underset{\downarrow}{\wedge} E'_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$



En vérité  $E_1 \overset{\cdot}{<} E'_1$  et  $E_2 \overset{\cdot}{<} E'_2 \Rightarrow \forall e_1 \in E_1 \exists e'_1 \in E'_1 e_1 \leq e'_1$  et  $\forall e_2 \in E_2 \exists e'_2 \in E'_2 e_2 \leq e'_2 \Rightarrow \forall e_1 \forall e_2 \exists e'_1 \exists e'_2 e_1 \wedge e_2 \leq e'_1 \wedge e'_2 \Rightarrow \forall e \in E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \exists e' \in E'_1 \overset{\cdot}{\wedge} E'_2 e \leq e' \Rightarrow E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \overset{\cdot}{<} E'_1 \overset{\cdot}{\wedge} E'_2$ . De même on voit que  $E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2 \overset{\cdot}{<} E'_1 \overset{\cdot}{\vee} E'_2$ .

On a évidemment aussi les conséquences immédiates suivantes des propriétés précédentes :

$E_1 \overset{\cdot}{=} E'_1$  et  $E_2 \overset{\cdot}{=} E'_2$  impliquent  $E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2 \overset{\cdot}{=} E'_1 \overset{\cdot}{\vee} E'_2$  et  $E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \overset{\cdot}{=} E'_1 \overset{\cdot}{\wedge} E'_2$  (1.11)'  
et dualement

$E_1 \overset{\cdot}{=} E'_1$  et  $E_2 \overset{\cdot}{=} E'_2$  impliquent  $E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \overset{\cdot}{=} E'_1 \overset{\cdot}{\wedge} E'_2$  et  $E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2 \overset{\cdot}{=} E'_1 \overset{\cdot}{\vee} E'_2$  (1.12)'

Il résulte, avec (1.8), des formules (1.11) et (1.12)

$$E \overset{\cdot}{<} E_1 \text{ et } E \overset{\cdot}{<} E_2 \text{ impliquent } E \overset{\cdot}{<} E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \quad (1.13)$$

$$E_1 \overset{\cdot}{<} E \text{ et } E_2 \overset{\cdot}{<} E \text{ impliquent } E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2 \overset{\cdot}{<} E \quad (1.14)$$

Les opérations  $\overset{\cdot}{\vee}$  et  $\overset{\cdot}{\wedge}$  sont évidemment commutatives et associatives. Cependant elles ne sont pas distributives ; même si  $T$  est un treillis distributif on n'a que les inclusions (cf. § 6 exemple 1)

$$E_1 \overset{\cdot}{\vee} (E_2 \overset{\cdot}{\wedge} E_3) \subseteq (E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2) \overset{\cdot}{\wedge} (E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_3) \quad (1.15)$$

$$E_1 \overset{\cdot}{\wedge} (E_2 \overset{\cdot}{\vee} E_3) \subseteq (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2) \overset{\cdot}{\vee} (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_3) \quad (1.16)$$

On a cependant les distributivités suivantes par rapport à la réunion, même si  $T$  est un treillis quelconque

$$E_1 \overset{\cdot}{\wedge} (E_2 \cup E_3) = (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2) \cup (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_3) \quad (1.17)$$

$$E_1 \overset{\cdot}{\vee} (E_2 \cup E_3) = (E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_2) \cup (E_1 \overset{\cdot}{\vee} E_3) \quad (1.18)$$

Démontrons l'égalité (1.17), l'égalité (1.18) est sa duale.

$$x \in E_1 \overset{\cdot}{\wedge} (E_2 \cup E_3) \Leftrightarrow x = e_1 \overset{\cdot}{\wedge} e, e_1 \in E_1, e \in E_2 \cup E_3 \Leftrightarrow x = e_1 \overset{\cdot}{\wedge} e, e \in E_2 \text{ ou}$$

$$e \in E_3 \Leftrightarrow x = e_1 \overset{\cdot}{\wedge} e_2 \text{ ou } x = e_1 \overset{\cdot}{\wedge} e_3, e_2 \in E_2, e_3 \in E_3 \Leftrightarrow x \in E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2 \text{ ou}$$

$$x \in E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_3 \Leftrightarrow x \in (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_2) \cup (E_1 \overset{\cdot}{\wedge} E_3).$$

La „distributivité” de la réunion par rapport à  $\overset{\cdot}{\wedge}$  n'est qu'une équivalence ou bien une inclusion (cf. § 6 exemple 1) :

$$E_1 \cup (E_2 \overset{\cdot}{\wedge} E_3) \overset{\cdot}{=} (E_1 \cup E_2) \overset{\cdot}{\wedge} (E_1 \cup E_3) \quad (1.19)$$

ainsi que sa duale

$$E_1 \cup (E_2 \overset{\vee}{\vee} E_3) = (E_1 \cup E_2) \overset{\vee}{\vee} (E_1 \cup E_3) \quad (1.20)$$

Pour montrer la première on remarque que si  $x_1 \in E_1 \cup (E_2 \overset{\wedge}{\wedge} E_3)$ , alors ou bien 1°  $x_1 = e_1 \in E_1$  ou bien 2°  $x_1 = e_2 \wedge e_3$ ,  $e_2 \in E_2$ ,  $e_3 \in E_3$ . Si  $x_2 \in (E_1 \cup E_2) \overset{\wedge}{\wedge} (E_1 \cup E_3)$  on a 3°  $x_2 = e_1 \wedge e'_1$  ou 4°  $x_2 = e_1 \wedge e_3$  ou 5°  $x_2 = e_2 \wedge e'_1$  ou 6°  $x_2 = e_2 \wedge e_3$ ,  $e'_1 \in E_1$ . On voit donc que si  $x_1$  a la forme 1° ou 2° il existe toujours un élément du deuxième membre qui le majore : 1°  $e_1 \leq e_1 \wedge e_1$  ou 2°  $e_2 \wedge e_3 \leq e_2 \wedge e_3$ ; de même si  $x_2$  est un élément du deuxième membre il existe un élément du premier qui le majore : 3°  $e_1 < e'_1 \leq e_1$ , 4°  $e_1 \wedge e_3 \leq e_1$ , 5°  $e_2 \wedge e_1 \leq e_1$ , 6°  $e_2 \wedge e_3 \leq e_2 \wedge e_3$ . Ce raisonnement montre aussi que les inclusions suivantes sont valables :

$$E_1 \cup (E_2 \overset{\wedge}{\wedge} E_3) \subseteq (E_1 \cup E_2) \overset{\wedge}{\wedge} (E_1 \cup E_3) \quad (1.21)$$

$$E_1 \cup (E_2 \overset{\vee}{\vee} E_3) \subseteq (E_1 \cup E_2) \overset{\vee}{\vee} (E_1 \cup E_3) \quad (1.22)$$

Remarquons que si  $T$  est un treillis complet, les propriétés précédentes de  $\overset{\wedge}{\wedge}$  et  $\overset{\vee}{\vee}$  peuvent se transcrire pour une infinité quelconque de parties  $E \in \mathcal{P}(T)$ .

§ 2. La propriété (1.3)' montre que la réunion de tous les ensembles d'une classe est un élément de cette classe. Cependant il est à remarquer que cette réunion, qui est donc le plus grand élément de la classe par rapport à l'inclusion, peut être déterminée à partir d'un seul ensemble. En effet si on considère les ensembles :

$$M^{\vee}(E) = \{m \in T \mid \exists_{e \in E} e \geq m\}; \quad M_{\wedge}(E) = \{m \in T \mid \exists_{e \in E} e \leq m\}$$

on peut démontrer le

LEMME.

$$E < E' \Rightarrow M^{\vee}(E) \subseteq M^{\vee}(E') \text{ et } E < E' \Rightarrow M_{\wedge}(E') \subseteq M_{\wedge}(E) \text{ et par conséquent}$$

$$E \overset{\wedge}{\wedge} E' \Rightarrow M^{\vee}(E) = M^{\vee}(E') \text{ et } E \overset{\vee}{\vee} E' \Rightarrow M_{\wedge}(E) = M_{\wedge}(E').$$

En effet si  $E < E'$  et  $m \in M^{\vee}(E)$  il existe  $e \in E$  tel que  $m \leq e$ . Mais par hypothèse il existe  $e' \in E'$  tel que  $e \leq e'$  donc  $m \leq e'$  et  $m \in M^{\vee}(E')$ .

THÉOREME 1. La réunion des ensembles de la classe représentée par  $E \in \mathcal{P}(T)$  est l'ensemble  $M(E)$ , c'est-à-dire que

$$\bigcup_{E_{\alpha} \in \mathcal{X}^{\vee}(E)} E_{\alpha} = M^{\vee}(E) \text{ respectivement } \bigcup_{E_{\alpha} \in \mathcal{X}_{\wedge}(E)} E_{\alpha} = M_{\wedge}(E)$$

Démonstration. A) On a  $E \subseteq M^{\vee}(E)$  car pour tout  $e \in E$   $e \leq e$

B)  $M^{\vee}(E) \in \mathcal{X}^{\vee}(E)$  : selon A) et la formule (1.1) on a  $E < M^{\vee}(E)$ , et  $M^{\vee}(E) < E$  par la définition de  $M^{\vee}(E)$ .

C) Il résulte de A) et de la deuxième partie du lemme que  $M'(E)$  englobe tous les ensembles de la classe  $\mathcal{X}'(E)$ , donc aussi leur réunion. Mais B) assure que  $M'(E)$  est lui-même contenu dans cette réunion.

D) L'ensemble  $M'(E)$  est le dual de  $M'(E)$ , la seconde partie s'obtient donc par dualité.

**COROLLAIRE 1.** On a  $E \stackrel{\iota}{=} E' \Leftrightarrow M'(E) = M'(E')$  et  $E \stackrel{\iota}{=} E' \Leftrightarrow M_i(E) = M_i(E')$ .

*Démonstration.* Il reste à montrer que  $M'(E) = M'(E') \Rightarrow E \stackrel{\iota}{=} E'$ . Soit  $e \in E \subseteq M'(E) = M'(E')$ , donc  $e \in M'(E')$ . Par la définition  $\exists e' \in E', e \leq e'$ , c'est-à-dire  $E < E'$ . De même  $E' < E$ , donc  $E \stackrel{\iota}{=} E'$ .

**COROLLAIRE 2.**  $M'(M'(E)) = M'(E)$  et de même pour  $M_i(E)$ , donc  $M'$  est une fermeture dans  $\mathcal{P}(T)$ .

Une dernière conséquence est une propriété des ensembles  $M(E)$  qui se rapporte aux relations d'ordre  $>$  et  $<$  induites dans les ensembles de classes :

**COROLLAIRE 3.**  $\mathcal{X}'(E_1) < \mathcal{X}'(E_2) \Leftrightarrow M'(E_1) \subseteq M'(E_2)$   
 $\mathcal{X}_i(E_2) < \mathcal{X}_i(E_1) \Leftrightarrow M_i(E_1) \subseteq M_i(E_2)$

En vérité si  $\mathcal{X}'(E_1) < \mathcal{X}'(E_2)$ , on a  $E_1 < E_2$  et en appliquant le lemme il résulte que  $M'(E_1) \subseteq M'(E_2)$ ; l'implication inverse est une conséquence du théorème précédent et des formules (1.1), les  $M(E)$  appartenant aux classes respectives.

**§ 3.** Il est naturel de se demander si on n'a pas de résultats analogues aux précédents pour l'intersection des ensembles d'une classe. Tout d'abord l'intersection n'est pas en général élément de cette classe. Pourtant si  $T$  est un ensemble ordonné on peut exprimer l'intersection à l'aide d'un seul ensemble quelconque de cette classe. Posons donc :

$$N'(E) = \{n \in E \mid \forall_{e \in E - \{n\}} e \not> n, e \neq n\}; \quad N_i(E) = \{n \in E \mid \forall_{e \in E - \{n\}} e \not< n, e \neq n\}$$

On prouvera d'abord le

**LEMME.**  $E \stackrel{\iota}{=} E' \Rightarrow N'(E) = N'(E')$ ;  $E \stackrel{\iota}{=} E' \Rightarrow N_i(E) = N_i(E')$

c'est-à-dire  $N$  ne dépend pas du représentant de la classe.

*Démonstration.* Soit  $n \in N'(E)$ . Montrons que  $n \in N'(E')$  c'est-à-dire que A)  $n \in E'$ ; B)  $\forall e' \in E' - \{n\} e' \not> n$ .

A) Si  $n \in N'(E)$ ,  $n \in E$ ; mais  $E < E'$  donc  $\exists e' \in E' n \leq e'$ ; d'autre part  $E' < E$  donc  $\exists e \in E e' \leq e$ , c'est-à-dire  $n \leq e' \leq e$ . Mais  $n \in N'(E)$  donc par la définition il faut que  $e = n$  et par conséquent, à cause de l'antisymétrie de  $\leq$ ,  $n = e' \in E'$ .

B) Supposons, au contraire, qu'il existe  $e' \in E'$   $e' \neq n$  tel que  $e' > n$ ,  $n \in N'(E)$ ; mais  $E' < E$  donc  $\exists e \in E$   $e \geq e'$ , c'est-à-dire que  $e > n$  contrairement à la définition de  $N'(E)$ .

Si  $N'(E) = \emptyset$ , comme  $E = E' \Rightarrow N'(E') \subseteq N'(E)$  on a aussi  $N'(E') = \emptyset$

**THÉORÈME 2.** *L'intersection des ensembles de la classe représentée par  $E$  coïncide avec l'ensemble  $N(E)$ , c'est-à-dire*

$$\bigcup_{E_\alpha \in \mathcal{X}(E)} E_\alpha = N'(E) \quad \text{respectivement} \quad \bigcup_{E_\alpha \in \mathcal{X}_i(E)} E_\alpha = N_i(E)$$

*Démonstration:* Il résulte du lemme que  $\forall E' \in \mathcal{X}(E)$ ,  $N'(E) \subseteq E'$  donc  $N'(E) \subseteq \bigcap_{E_\alpha \in \mathcal{X}(E)} E_\alpha$ . Démontrons l'inclusion inverse par l'absurde. Soit  $x \in \bigcap E_\alpha$  et  $x \notin N'(E)$ , donc il existe  $y \in E$ ,  $y \neq x$ , tel que  $x < y$ . On aurait alors  $E_1 = E - \{x\} \stackrel{!}{=} E$  et pourtant  $E_1 \notin \bigcap E_\alpha$ . On voit en effet que  $E_1 \stackrel{!}{=} E$  car  $E_1 \subseteq E$  donc  $E_1 < E$  et  $E < E_1$  car, quel que soit  $e \in E$  il existe  $e_1 \in E_1$  tel que  $e \leq e_1$ : si  $e = x$ ,  $x < y$ ,  $y \in E_1$ ; si  $e \neq x$  on a  $e \in E_1$  et  $e \leq e$ . Si  $\bigcap E_\alpha = \emptyset$  il résulte de l'inclusion  $N'(E) \subseteq \bigcap E_\alpha$  que  $N'(E) = \emptyset$ .

**COROLLAIRE 1.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection des ensembles d'une classe, soit  $\mathcal{X}(E)$  (respectivement  $\mathcal{X}_i(E)$ ) soit élément de cette classe est que l'on ait*

$$E < N'(E), \quad \text{respectivement} \quad N'(E) < E \quad (3.1)$$

En effet  $N'(E) \subseteq E$ , donc selon (1.1),  $N'(E) < E$  et  $E < N_i(E)$ .

**COROLLAIRE 2.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection des ensembles de la classe  $\mathcal{X}(E)$  appartienne à la classe est que l'on ait  $M(N(E)) = M(E)$ ; Ceci résulte en effet du corollaire précédent.*

**COROLLAIRE 3.**  $N(M(E)) = N(E)$ .

C'est une conséquence du corollaire 1.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que l'intersection des ensembles d'une classe appartienne à cette classe.

**THÉORÈME 3.** *Si une classe  $\mathcal{X}(E)$  possède un élément minimal (par rapport à l'inclusion des ensembles), soit  $N$  cet ensemble, l'intersection  $I$  des ensembles de la classe appartient à la classe et l'on a  $I = N$ .*

*Démonstration:* Soit  $N$  un élément minimal de la classe  $\mathcal{X}(E)$  c'est-à-dire que  $N \in \mathcal{X}(E)$  et  $\forall E' \in \mathcal{X}(E)$   $E' \subseteq N \Rightarrow E' = N$ . On a donc  $N \supseteq I = N'(E)$ . Prouvons que  $N \subseteq N'(E)$ . Soit  $x \in N$ , il faut montrer que  $x \in N'(E)$  donc que A)  $x \in E$ ; B)  $\forall e \in E - \{x\}$   $e \geq x$ .

A) On a  $N \stackrel{!}{=} E$ , donc  $\exists e \in E$   $x \leq e$  et  $\exists x_1 \in N$   $e \leq x_1$ , donc  $x \leq e \leq x_1$ . Mais on ne peut avoir  $x < x_1$ , donc il faut que  $x = e \in E$ . En vérité soit  $N^* = N - \{x\}$ ; on voit que  $N^* \stackrel{!}{=} N$ , donc  $N$  ne serait plus minimal.

B) Si on suppose, au contraire, qu'il existe  $e \in E$  tel que  $e > x$ , comme  $E \stackrel{!}{<} N$  donc  $\exists x' \in N$   $e \leq x$ , on aurait  $x < e \leq x'$  ce qui conduit comme plus haut à la même contradiction.

**THÉORÈME 4.** Une classe  $\mathcal{X}(E)$  (respectivement  $\mathcal{X}_i(E)$ ) contient l'intersection  $I$  de ses ensembles si et seulement s'il existe un ensemble de la classe vérifiant la condition de chaîne ascendante (respectivement descendante)<sup>2</sup>.

*Démonstration:* La condition est suffisante. En effet supposons que  $I \notin \mathcal{X}(E)$ . Selon le corollaire 1 du théorème 2 la condition (3.1) n'est vérifiée par aucun ensemble  $E$  de la classe car  $E_1 \stackrel{!}{<} N^i(E_1)$ ,  $E_1 \stackrel{!}{=} E$  et  $N^i(E) = N^i(E_1)$  impliquent  $E \stackrel{!}{<} N^i(E)$ . On en déduira que chaque ensemble de la classe contient une suite ascendante infinie

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots \quad (\sigma)$$

contrairement à l'hypothèse.

Si l'ensemble  $E$  ne satisfait pas la condition (3.1) on a

$$\exists_{x_0 \in E} \forall_{y \in N^i(E)} x_0 \not\leq y, x_0 \neq y \quad (3.2)$$

Mais  $x_0 \notin N^i(E)$  sinon, comme on peut écrire  $x_0 \leq x_0$  la relation (3.2) serait contredite. Il résulte alors de la définition de  $N^i(E)$  qu'il existe  $x_1 \in E$  tel que  $x_0 < x_1$  sinon  $x_0 \in N^i(E)$ ;  $x_1$  ne peut donc pas être élément de  $N^i(E)$  à cause de la condition (3.2). En répétant le raisonnement pour  $x_1$  il en résulte l'existence d'un élément  $x_2 \in E$  tel que  $x_1 < x_2$  et  $x_2 \notin N^i(E)$ , et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie  $(\sigma)$  d'éléments de  $E$ .

La condition est banalement nécessaire car  $N^i(E)$  ne contient selon sa définition que des éléments incomparables; tout sous-ensemble de  $N^i(E)$  possède donc un élément maximal, et cette condition attirant celle de chaîne ascendante il résulte que la classe  $\mathcal{X}(E)$  possède un ensemble vérifiant cette condition.

*Observation:* Il résulte de la définition que  $N(N(E)) = N(E)$ .

**§ 4.** Si  $T$  est un ensemble ordonné quelconque les relations  $\stackrel{!}{<}$  et  $\stackrel{!}{>}$  sont tout-à-fait indépendantes. Mais on peut remarquer que si  $E \subset T$  est un ensemble convexe,  $E \stackrel{!}{<} E'$  et  $E' \stackrel{!}{<} E$  impliquent  $E' \subset E$ . On a donc, si  $E$  et  $E'$  sont tous deux convexe, que de  $E \stackrel{!}{=} E'$  et de  $E \stackrel{!}{=} E'$  il résulte  $E = E'$ .

Il est aussi possible que pour certains  $E, E' \in \mathcal{P}(T)$  on ait l'équivalence  $E \stackrel{!}{<} E' \Leftrightarrow E \stackrel{!}{<} E'$  (exemple 6 du § 6), donc aussi  $E \stackrel{!}{=} E' \Leftrightarrow E \stackrel{!}{=} E'$ . Cependant ceci n'implique pas encore la coïncidence des classes, c'est-à-dire  $\mathcal{X}(E) = \mathcal{X}_i(E)$ . D'une

<sup>2</sup> Un ensemble ordonné vérifie la condition de chaîne ascendante (descendante) si et seulement si toute chaîne ascendante (descendante) est finie ([2], chapitre III théorème 5).

manière plus générale si  $E \stackrel{!}{=} E'$  et  $E \stackrel{=}{=} E'$  il peut exister une partie  $E_1$  telle que  $E_1 \stackrel{!}{=} E$ , mais sans que  $E_1 \stackrel{=}{=} E$ . Considérons en effet l'exemple simple suivant :  $T$  est l'ensemble des nombres entiers ordonné naturellement,  $E$  les nombres pairs,  $E'$  les nombres impairs. On voit que  $E \stackrel{!}{=} E'$  et  $E \stackrel{=}{=} E'$  ; si  $E_1$  est l'ensemble des nombres positifs on a  $E \stackrel{!}{=} E_1$  mais la relation  $E_1 \stackrel{=}{=} E$  n'est pas vérifiée, donc  $E_1 \notin \mathcal{X}_i(E)$ .

La question se pose de caractériser les ensembles ordonnés  $T$  et les parties  $E$  d'un tel ensemble pour lesquelles une égalité (4.2) est ou n'est pas possible. Une réponse complète n'a pas été donnée. Il semble qu'une telle égalité n'est possible que dans des cas singuliers. Ainsi la partie vide  $\emptyset$  de  $T$  constitue toujours une classe à un seul élément :  $\mathcal{X}'(\emptyset) = \mathcal{X}_i(\emptyset)$ . De même si  $E$  se compose d'éléments incomparables, c'est-à-dire si pour tout  $e \in E$  et  $t \in T$ ,  $t$  est incomparable à  $e$ , chacune des deux classes  $\mathcal{X}'(E)$  et  $\mathcal{X}_i(E)$  contient le seul ensemble  $E$ .

D'autre part pour des catégories assez larges d'ensembles ordonnés une égalité (4.2) n'est pas possible ou se réduit au cas banal précédent. En voici deux cas ; nous supposerons  $E \neq \emptyset$ .

I. Si l'intersection  $I$  des ensembles de la classe  $\mathcal{X}'(E)$  appartient à la classe (en particulier<sup>s</sup> si  $T$  est un ensemble ordonné vérifiant la condition de chaîne ascendante ou descendante) l'égalité (4.2) n'est possible que si  $E$  est un ensemble d'éléments incomparables de  $T$ .

En effet de (4.2) et du théorème 2 il résulte

$$I = N'(E) = N_i(E) \quad (4.3)$$

Mais par sa définition  $N'(E)$  est composé par les éléments maximaux, s'il y en a, de  $E$  et  $N_i(E)$  par les éléments minimaux de  $E$ . Si ces deux ensembles coïncident  $I$  est vide ou ne contient que des éléments incomparables aux éléments de  $E$ . Mais  $I$  ne peut être vide car  $I \stackrel{!}{=} E$ . D'autre part (4.3) montre, selon le théorème 2, que les éléments de  $I$  sont incomparables également aux éléments de chaque ensemble  $E$  de la classe considérée ; il résulte du corollaire 2 du théorème 2 que  $M'(I) = M'(E)$  donc  $M'(I) \in \mathcal{X}'(E)$  et par suite les éléments de  $I$  sont incomparables aux éléments de  $M'(I)$ . Mais la définition de  $M'(I)$  affirme que pour tout  $m \in M'(I)$  il existe  $a \in I$  tel que  $m \leq a$ , donc  $m = a$ , c'est-à-dire  $M'(I) \subseteq I$ , d'où  $M'(E) = I$ . Cela signifie, selon les théorèmes 1 et 2 que

$$\bigcup_{E_\alpha \in \mathcal{X}'(E)} E_\alpha = \bigcap_{E_\alpha \in \mathcal{X}'(E)} E_\alpha$$

c'est-à-dire que la classe se réduit à un seul ensemble  $I$  composé d'éléments incomparables *entre eux*. Mais les éléments de  $I$  ne sont comparables à aucun  $x \in T$ , sinon la classe  $\mathcal{X}'(I)$  pourrait contenir encore un ensemble, à savoir,  $E = I \cup \{x\}$ .

II. Si  $T$  est un ensemble ordonné possédant un élément nul  $o$  (ou bien un élément universel  $u$ ) il ne peut y avoir d'égalité (4.2) pour aucune partie  $E$  de  $T$ .

\* On ne demande pas dans le théorème 4 que la condition de chaîne ascendante soit satisfaite par l'ensemble  $T$ , mais seulement par un élément de la classe considérée.

En effet: 1° Si  $E = 0$ , où  $0$  désigne l'ensemble  $\{o\}$ , contenant uniquement l'élément  $o$  de  $T$ , on voit qu'il existe  $E' \in \mathcal{X}_i(0)$  tel que  $E' \notin \mathcal{X}'(0)$ , à savoir  $E' = \{o, x\}$  où  $x \in T$ .

2° Si  $o \in E$  et  $E_1 = E \setminus 0$  on a  $E_1 \stackrel{\dot{}}{=} E$  mais  $E_1 \notin \mathcal{X}_i(E)$ .

3° Si  $o \notin E$  et l'on pose  $E^* = E \cup 0$  alors  $E^* \in \mathcal{X}'(E)$  mais  $E^* \notin \mathcal{X}_i(E)$ .

On raisonne par dualité si  $u \in T$ .

§ 5 THÉORÈME 5. Soit  $T$  un ensemble préordonné. L'ensemble des classes  $\mathcal{X}'(E)$  où  $E \in \mathcal{P}(T)$  est un demi-treillis complet par rapport à la relation d'ordre  $\dot{}$ . On a, désignant par  $\dot{\cup}$  l'union:

$$\mathcal{X}'(E_1) \dot{\vee} \mathcal{X}'(E_2) = \mathcal{X}'(E_1 \dot{\cup} E_2).$$

Ce treillis possède un élément nul,  $\mathcal{X}'(\emptyset)$  et un élément universel  $\mathcal{X}'(T)$ .

Les classes duales  $\mathcal{X}_i(E)$  ordonnées par la relation  $\dot{}$  forment un demi-treillis complet par rapport à l'intersection

$$\mathcal{X}_i(E_1) \dot{\vee} \mathcal{X}_i(E_2) = \mathcal{X}_i(E_1 \dot{\cup} E_2)$$

et l'élément nul en est  $\mathcal{X}_i(T)$ , l'élément universel  $\mathcal{X}_i(\emptyset)$ .

Démonstration. Les définitions de  $\dot{\vee}$  et de  $\dot{\wedge}$  ne dépendent pas des représentants  $E_i$  des classes car, selon les formules (1.3),  $E_1 \stackrel{\dot{}}{=} E'_1$  et  $E_2 \stackrel{\dot{}}{=} E'_2$  impliquent  $E_1 \dot{\cup} E_2 \stackrel{\dot{}}{=} E'_1 \dot{\cup} E'_2$ .

$\mathcal{X}'(\dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha)$  est un majorant de l'ensemble des classes  $\mathcal{X}'(E_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ ; en effet l'inclusion  $E_\alpha \subseteq \dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha$  implique  $E_\alpha \dot{<} \dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha$  donc  $\mathcal{X}'(E_\alpha) \dot{<} \mathcal{X}'(\dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha)$ .  $\mathcal{X}'(\dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha)$  est un majorant minimum: s'il existait un ensemble  $M$  tel que pour tout

$\alpha \in A$   $\mathcal{X}'(E_\alpha) \dot{<} \mathcal{X}'(M)$ , par définition on aurait  $E_\alpha \dot{<} M$ ,  $\alpha \in A$  et, en vertu de de (1.2),  $\dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha \dot{<} M$ , donc  $\mathcal{X}'(\dot{\cup}_{\alpha \in A} E_\alpha) \dot{<} \mathcal{X}'(M)$ .

Enfin on a pour tout  $E \in \mathcal{P}(T)$ ,

$$\emptyset \subseteq E \subseteq T$$

d'où  $\emptyset \dot{<} E \dot{<} T$  et  $T \dot{<} E \dot{<} \emptyset$ , donc

$$\mathcal{X}'(\emptyset) \dot{<} \mathcal{X}'(E) \dot{<} \mathcal{X}'(T) \text{ et } \mathcal{X}_i(T) \dot{<} \mathcal{X}_i(E) \dot{<} \mathcal{X}_i(\emptyset).$$

Quelles conditions doit-on imposer à l'ensemble  $T$  pour que les classes forment un treillis? La réponse est donnée par le

THÉORÈME 6. Si  $T$  est un ensemble ordonné qui est un demi-treillis par rapport à l'intersection, les classes  $\mathcal{X}'(E)$  forment un treillis distributif qui est complet si  $T$  est complet par rapport à l'intersection  $\dot{\wedge}$  et

$$\mathcal{X}'(E_1) \dot{\wedge} \mathcal{X}'(E_2) = \mathcal{X}'(E_1 \dot{\wedge} E_2)$$

De manière duale on voit que, si  $T$  est un ensemble ordonné qui est un demi-treillis, les classes  $\mathcal{X}_i(E)$  forment un treillis distributif qui est complet si  $T$  est complet par rapport à l'union  $\vee$  et

$$\mathcal{X}_i(E_1) \vee \mathcal{X}_i(E_2) = \mathcal{X}_i(E_1 \vee E_2)$$

*Démonstration.* On a vu que les classes  $\mathcal{X}'(E)$  forment un demi-treillis. Il suffit de montrer que, avec ces hypothèses supplémentaires,  $\mathcal{X}'(E_1 \wedge E_2)$  est un minorant maximum des classes  $\mathcal{X}'(E_1)$  et  $\mathcal{X}'(E_2)$ . Selon (1.5)  $E_1 \wedge E_2 \leq E_1$  et  $E_1 \wedge E_2 \leq E_2$  donc

$$\mathcal{X}'(E_1 \wedge E_2) \leq \mathcal{X}'(E_i), \quad i = 1, 2$$

Supposons qu'il existe  $M \in \mathcal{P}(T)$  tel que  $\mathcal{X}'(M) \leq \mathcal{X}'(E_i)$ , donc  $M \leq E_i$ ,  $i = 1, 2$ . On aurait alors, selon (1.13),  $M \leq E_1 \wedge E_2$  c'est-à-dire  $\mathcal{X}'(M) \leq \mathcal{X}'(E_1 \wedge E_2)$ .

De plus, les propriétés (1.11)' montrent que  $\mathcal{X}'(E_1 \wedge E_2)$  ne dépend pas des représentants des classes  $\mathcal{X}'(E_1)$  et  $\mathcal{X}'(E_2)$ .

Enfin ce treillis est évidemment complet si  $T$  est complet par rapport à l'intersection. La distributivité de ce treillis est une conséquence immédiate des propriétés (1.17) et (1.19). Le treillis des classes duales  $\mathcal{X}_i(E)$  est distributif selon (1.18) et (1.20).

Un treillis  $T$  est complémenté s'il possède un élément nul  $0$  et un élément universel  $u$  et pour tout  $x \in T$  il existe  $y \in T$  tel que  $x \vee y = u$  et  $x \wedge y = 0$ . On voit que les treillis de classes  $\mathcal{X}$  ne sont généralement pas complémentés même si  $T$  est un treillis complémenté. En effet l'exemple 1, § 6 est un treillis de Boole  $T$  dont les treillis de classes ne sont pas complémentés.

Un treillis  $T$  se nomme orthocomplémenté, [2], s'il possède un élément nul  $0$  et un élément universel  $u$  et si à chaque  $x \in T$  correspond un seul élément  $x' \in T$  tel que

$$x \wedge x' = 0 \quad x \vee x' = u \quad (5.1)$$

$$(x')' = x \quad (5.2)$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'. \quad (5.3)$$

Le même exemple prouve que même si  $T$  est orthocomplémenté, le treillis des classes peut ne pas jouir de cette propriété. Cependant en ce cas il subsiste certaines propriétés de dualité. En particulier on observe que le treillis des classes  $\mathcal{X}_i$  est le treillis dual du treillis des classes  $\mathcal{X}'$  (cf. (5.6)).

Posons en effet

$$E' = \{x \in T \mid x' \in E\}$$

c'est-à-dire,  $x \in E' \Leftrightarrow x' \in E$ , ou bien, avec (5.2),  $x' \in E' \Leftrightarrow x \in E$ . On a donc

$$(E')' = E$$

car  $x \in (E')' \Leftrightarrow (x')' \in (E')' \Leftrightarrow x' \in E' \Leftrightarrow x \in E$ , et aussi

$$E_1 \subseteq E_2 \Leftrightarrow E'_1 \subseteq E'_2$$

car  $x \in E'_1 \Rightarrow x' \in E_1 \Rightarrow x' \in E_2 \Rightarrow x \in E'_2$  et  $x \in E_1 \Rightarrow x' \in E'_1 \Rightarrow x' \in E'_2 \Rightarrow x \in E_2$



On voit aussi facilement que

$$E_1 \overset{\iota}{<} E_2 \Leftrightarrow E'_1 \overset{\iota}{<} E'_1 \tag{5.4}$$

car  $e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow e_1 \wedge e_2 = e_1 \Leftrightarrow e'_1 \vee e'_2 = e_1 \Leftrightarrow e'_2 \leq e'_1$ . Donc

$$E_1 \overset{\iota}{=} E_2 \Leftrightarrow E'_1 \overset{\iota}{=} E'_2 \tag{5.5}$$

De (5.4) et (5.5) il résulte

$$\mathcal{X}^{\iota}(E_1) \overset{\iota}{<} \mathcal{X}^{\iota}(E_2) \Leftrightarrow \mathcal{X}_i(E'_2) \overset{\iota}{<} \mathcal{X}_i(E'_1) \tag{5.6}$$

On prouve aussi que

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} E'_{\alpha} \text{ et } \left(\bigcup_{\alpha \in A} E'_{\alpha}\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha} \tag{5.7}$$

d'où on obtient à l'aide des théorèmes 1 et 2

$$[M^{\iota}(E)]' = M_i(E'), \quad [N^{\iota}(E)]' = N_i(E')$$

Enfin il résulte de (5.3)

$$(E_1 \overset{\iota}{\vee} E_2)' = E'_1 \overset{\iota}{\wedge} E'_2 \text{ et } (E_1 \overset{\iota}{\wedge} E_2)' = E'_1 \overset{\iota}{\vee} E'_2$$

car  $x \in (E_1 \overset{\iota}{\vee} E_2)' \Leftrightarrow x' \in E_1 \overset{\iota}{\vee} E_2 \Leftrightarrow x' = e_1 \vee e_2, e_1 \in E_1, e_2 \in E_2 \Leftrightarrow x = e'_1 \wedge e'_2, e'_1 \in E'_1, e'_2 \in E'_2 \Leftrightarrow x \in E'_1 \overset{\iota}{\wedge} E'_2$ .

§ 6 *Exemple 1.* Soit  $T = \{0, a, b, u\}$  le treillis de Boole défini par le diagramme de la figure 1. Désignons les parties de  $T$  par  $\emptyset, E_o, E_a, E_b, E_u, E_{oa}, E_{ob}, E_{ou}, E_{ab}, E_{au}, E_{bu}, E_{oab}, E_{oau}, E_{obu}, E_{abu}, E_{oabu} = T$ . On peut vérifier sur cet exemple qu'il n'y a pas de distributivité de l'opération  $\overset{\iota}{\wedge}$  par rapport à  $\overset{\iota}{\vee}$ , mais seulement des inclusions (1.15) et (1.16).

$$E_{ab} \overset{\iota}{\vee} (E_o \overset{\iota}{\wedge} E_a) = E_{ab} \text{ et } (E_{ab} \overset{\iota}{\vee} E_o) \overset{\iota}{\wedge} (E_{ab} \overset{\iota}{\vee} E_a) = E_{oab}$$

et dualement

$$E_{ab} \overset{\iota}{\wedge} (E_u \overset{\iota}{\vee} E_a) = E_{ab} \text{ et } (E_{ab} \overset{\iota}{\wedge} E_u) \overset{\iota}{\vee} (E_{ab} \overset{\iota}{\wedge} E_a) = E_{abu}$$

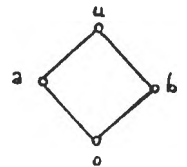


Fig. 1.

On vérifie aussi qu'il n'y a pas de distributivité de la réunion  $\bigcup$  par rapport à  $\overset{\iota}{\wedge}$  ou  $\overset{\iota}{\vee}$ , car

$$E_a \bigcup (E_b \overset{\iota}{\wedge} E_u) = E_{ab} \text{ et } (E_a \bigcup E_b) \overset{\iota}{\wedge} (E_a \bigcup E_u) = E_{oab};$$

on a seulement (1.19):  $E_{ab} \stackrel{\iota}{=} E_{oab}$  et (1.21):  $E_{ab} \subset E_{oab}$  et aussi, dualement

$$E_a \cup (E_b \stackrel{\iota}{\vee} E_o) = E_{ab} \quad \text{et} \quad (E_a \cup E_b) \stackrel{\iota}{\vee} (E_a \cup E_u) = E_{abu}$$

c'est-à-dire (1.20):  $E_{ab} \stackrel{\iota}{=} E_{abu}$  et (1.22):  $E_{ab} \subset E_{abu}$

Pour déterminer les classes  $\mathcal{X}^i(E)$ , il est plus commode de former les ensembles  $M^i(E)$  et d'appliquer ensuite le résultat du corollaire 1 du théorème 1.

$$M^i(\emptyset) = \emptyset$$

$$M^i(E_o) = \{x \in T \mid x \leq o\} = \{o\} = E_o$$

$$M^i(E_a) = \{x \in T \mid x \leq a\} = E_{oa}$$

$$M^i(E_b) = E_{ob}$$

$$M^i(E_u) = \{x \in T \mid x \leq u\} = E_{oabu}$$

$$M^i(E_{ou}) = \{x \in T \mid x \leq o \text{ ou } x \leq u\} = E_{oabu}$$

$$M^i(E_{ow}) = \{x \in T \mid x \leq a \text{ ou } x \leq b\} = E_{oab}$$

$$M^i(E_{au}) = M^i(E_{bu}) = M^i(E_{oau}) = M^i(E_{obu}) = M^i(E_{abu}) = E_{oabu}$$

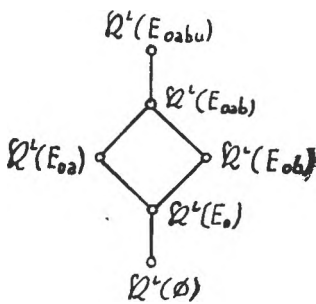


Fig. 2.

On a donc six classes, à savoir

$$\mathcal{X}^i(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{X}^i(E_o) = \{E_o\}$$

$$\mathcal{X}^i(E_{oa}) = \{E_a, E_{oa}\}$$

$$\mathcal{X}^i(E_{ob}) = \{E_b, E_{ob}\}$$

$$\mathcal{X}^i(E_{oab}) = \{E_{ab}, E_{oab}\}$$

$$\mathcal{X}^i(E_{oabu}) = \{E_u, E_{ou}, E_{au}, E_{bu}, E_{oau}, E_{obu}, E_{abu}, E_{oabu}\}$$

Ces classes sont ordonnées par la relation  $<$ , ou ce qui est la même chose, par la relation  $\subseteq$  entre leurs réunions (corollaire 3 du théorème 1) de la manière figurée sur le diagramme de la fig. 2. On voit que l'ensemble des classes est un treillis non complémenté.

On peut déterminer de même les classes  $\mathcal{X}_i(E)$ . D'ailleurs l'ensemble ordonné dual de l'ensemble considéré s'obtient par simple permutation des éléments  $o$  et  $u$ .

$$M_i(\emptyset) = \emptyset.$$

$$M_i(E_u) = \{x \in T \mid x \geq u\} = E_u$$

$$M_i(E_a) = \{x \in T \mid x \geq a\} = E_{au}$$

$$M_i(E_b) = E_{bu}$$

$$M_i(E_o) = \{x \in T \mid x \geq o\} = E_{oabu}$$

$$M_i(E_{ou}) = \{x \in T \mid x \geq o \text{ ou } x \geq u\} = E_{oabu}$$

$$M_i(E_{ab}) = \{x \in T \mid x \geq a \text{ ou } x \geq b\} = E_{abu}$$

$$M_i(E_{oa}) = M_i(E_{ob}) = M_i(E_{oau}) = M_i(E_{obu}) = M_i(E_{oab}) = E_{oabu}$$

Les classes  $\mathcal{X}_i(E)$  sont donc

- $\mathcal{X}_i(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{X}_i(E_u) = \{E_u\}$
- $\mathcal{X}_i(E_{au}) = \{E_a, E_{au}\}$
- $\mathcal{X}_i(E_{bu}) = \{E_b, E_{bu}\}$
- $\mathcal{X}_i(E_{oabu}) = \{E_o, E_{ou}, E_{oa}, E_{ob}, E_{oau}, E_{obu}, E_{oab}, E_{aobu}\}$

et le diagramme de leur treillis se trouve sur la figure 3 ; il s'obtient en appliquant la deuxième relation du corollaire 3 du théorème 1.

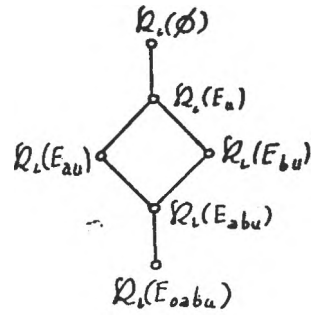


Fig. 3.

*Exemple 2.* Les diagrammes des ensembles de classes  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}_i$  sont en général tout-à-fait différents. Considérons en effet l'ensemble ordonné  $T$  défini par le diagramme de la figure 4. En ce cas on a,

- $\mathcal{P}(T) = \{\emptyset, E_u, E_b, E_u, E_{ab}, E_{au}, E_{bu}, E_{abu}, = T\}$
- $M^i(\emptyset) = \emptyset$
- $M^i(E_a) = \{x \in T \mid x \leq a\} = E_a$
- $M^i(E_b) = E_b$
- $M^i(E_u) = E_{abu}$
- $M_i(E_{ab}) = \{x \in T \mid x \leq a \text{ ou } x \leq b\} = E_{ab}$
- $M^i(E_{au}) = E_{au}$
- $M^i(E_{bu}) = E_{bu}$



Fig. 4.

Le diagramme de la figure 5 représente l'ensemble ordonné des classes  $\mathcal{X}^i$ . Mais on a

- $M_i(\emptyset) = \emptyset$
- $M_i(E_a) = \{x \in T \mid x \leq a\} = E_{au}$
- $M_i(E_b) = E_{bu}$
- $M_i(E_u) = E_u$
- $M_i(E_{ab}) = \{x \in T \mid x \geq a \text{ ou } x \geq b\} = E_{abu}$

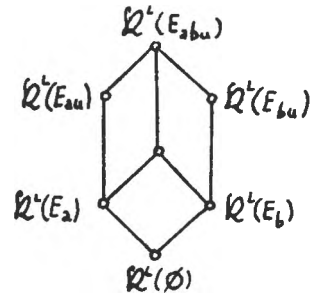


Fig. 5.

donc il n'y a que 5 classes et leur diagramme est celui de la figure 6.

*Exemple 3.* Soit  $E$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{R}_\alpha = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$  une famille d'ensembles tels que  $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \supseteq E$ . On dit que  $\mathcal{R}_\alpha$  est plus fine que la famille  $\mathcal{R}_\beta = \{E_\beta \mid \beta \in B\}$  si  $\forall E_\alpha \exists E_\beta E_\alpha \subseteq E_\beta$ , c'est-à-dire si  $\mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\beta$ .

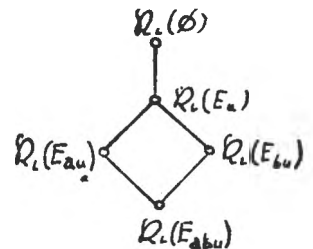


Fig. 6.

\* On conviendra de noter les préordres induits par la relation d'inclusion  $\subseteq$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  par  $\subset$  et  $\subset$  (exemples 3, 4, 5).

Si chaque  $\mathcal{R}_\alpha$  est un ensemble de parties de  $E$  tel qu'il n'y a pas de partie recouvrant complètement une autre, la relation  $\subset$  est une relation d'ordre. En effet de  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_\beta$  il résulte  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_\beta$ : on a  $\forall E_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha \exists E_\beta \in \mathcal{R}_\beta E_\alpha \subseteq E_\beta$  et aussi  $\exists E_{\alpha'} \in \mathcal{R}_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha'}$  donc  $E_\alpha \subseteq E_{\alpha'}$ , c'est-à-dire, selon l'hypothèse,  $E_\alpha = E_{\alpha'}$ , et  $E_\alpha = E_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ .

*Exemple 4.* Un filtre sur un ensemble  $E$  est un ensemble  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$  tel que  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  et que

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{F} \quad (6.1)$$

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \quad (6.2)$$

En effet on peut vérifier que ces conditions sont équivalentes à la définition habituelle (cf. BOURBAKI [1]). Les axiomes sont

( $\mathcal{F}_I$ ) Tout ensemble contenant un ensemble de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$

( $\mathcal{F}_{II}$ ) Toute intersection finie d'ensembles de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$

( $\mathcal{F}_{III}$ )  $\emptyset \notin \mathcal{F}$

( $\mathcal{F}_I$ ), ( $\mathcal{F}_{II}$ )  $\Rightarrow$  (6.1), (6.2):

(6.1): Soit  $L \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}(E)$  alors  $L = F \cup E_1$ ,  $F \in \mathcal{F}$ ,  $E_1 \in \mathcal{P}(E)$ ; mais  $L = F \cup E_1 \supseteq F$  donc selon ( $\mathcal{F}_I$ )  $L \in \mathcal{F}$ .

(6.2): Soit  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ . Mais  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  selon ( $\mathcal{F}_{II}$ ) donc  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$ , d'où par (1.1)  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ ,

(6.1), (6.2)  $\Rightarrow$  ( $\mathcal{F}_I$ ), ( $\mathcal{F}_{II}$ )

( $\mathcal{F}_I$ ): Soit  $L \supseteq F$ ,  $F \in \mathcal{F}$ . On peut poser  $L = F \cup (L \setminus F)$  donc  $L \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}(E)$  et selon (6.1) on a  $L \in \mathcal{F}$ .

( $\mathcal{F}_{II}$ ): On voit d'abord que si  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$   $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  car  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$  et selon (6.2) il existe  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F \subseteq F_1 \cap F_2$ . Mais (6.1), c'est-à-dire ( $\mathcal{F}_I$ ) nous assure qu'on a donc  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ . ( $\mathcal{F}_{II}$ ) résulte par induction finie.

De même, une base de filtre sur l'ensemble  $E$  est un ensemble non vide de parties de  $E$  tel que  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  et que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{B}$ .

Le filtre engendré par une base de filtre  $\mathcal{B}$  est par définition l'ensemble  $M_i(\mathcal{B})$ . Deux bases de filtre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont équivalentes (engendrent le même filtre) si et seulement si  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  (corollaire 1, th. 1). Pour qu'une partie  $\mathcal{B}$  d'un filtre  $\mathcal{F}$  soit une base de ce filtre il faut et il suffit que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ , (1.1). Enfin pour qu'un filtre  $\mathcal{F}$  soit plus fin qu'un filtre  $\mathcal{F}'$  il faut et il suffit que l'on ait pour des bases quelconques  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{F}$  respectivement de  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$  (coroll. 3 du théorème 1 et définition 3).

*Exemple 5.* Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux topologies définies sur l'ensemble  $E$  par les systèmes fondamentaux de voisinages de chaque point  $x \in E$ ,  $\mathcal{O}_1(x)$  respectivement  $\mathcal{O}_2(x)$ . On dit que la topologie  $\tau_1$  est plus fine que la topologie  $\tau_2$  si

$$\mathcal{O}_1(x) \subset \mathcal{O}_2(x)$$

Il est clair alors que  $\mathcal{X}_i(\mathcal{O}(x))$  est la classe de toutes les bases de filtre de voisinages qui engendrent le même filtre des voisinages de  $x$  définissant une topologie  $\tau$  sur  $E$ , et que  $M_i(\mathcal{O}(x))$  est le filtre des voisinages de  $x$ . On peut exprimer la condition nécessaire et suffisante connue pour que la topologie  $\tau_1$  définie sur  $E$  par les systèmes fondamentaux de voisinages  $\mathcal{O}_1(x)$  des points  $x \in E$  soit plus fine que la topologie  $\tau_2$  définie par  $\mathcal{O}_2(x)$  par la relation

$$\mathcal{X}_i(\mathcal{O}_1(x)) \prec \mathcal{X}_i(\mathcal{O}_2(x))$$

*Exemple 6.* Soit  $G$  un groupe partiellement ordonné par la relation  $\leq$  et  $N$  un sous-groupe normal convexe de  $G$ . On peut introduire une relation d'ordre dans le groupe  $G/N$  par la relation induite  $\prec$  dans l'ensemble des classes par rapport à  $N$  (Fuchs [4]). On dira donc que  $aN$  est plus petit que  $bN$  si  $aN \prec bN$ . Cette relation est ici une relation d'ordre dans l'ensemble quotient  $G/N$ . En effet  $N$  étant convexe les classes à gauche sont aussi convexes; en vérité si  $an_1 \in aN$ ,  $an_2 \in aN$  et  $an_1 \leq x \leq an_2$  on a  $n_1 \leq a^{-1}x \leq n_2$  donc  $a^{-1}x \in N$  c'est-à-dire  $x \in aN$ . Comme ces classes sont aussi disjointes, la relation  $\prec$  est antisymétrique (cf. §1).

Si  $N$  n'est pas convexe la relation  $\prec$  n'est qu'une relation de préordre. L'étude détaillée de ce cas sera exposé dans un travail prochain [8]. Remarquons ici, seulement, que l'on ne doit étudier que la relation  $\prec$ ; en effet si  $H$  est un sous-groupe quelconque de  $G$ , on a

$$aH \prec bH \Leftrightarrow aH \prec bH$$

(Manuscrit reçu le 22 mai 1967)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, ch. I. Paris, 1940.
- [2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*. New-York, 1948.
- [3] P. Dubreil, *Algèbre*, I. Paris, 1954.
- [4] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems*. Budapest, 1963.
- [5] M. Balázs, D. Borşan, M. Froda-Schechter, P. Hamburg, *Opérateurs dans des ensembles de parties* (en roumain, résumé français). „Studii și cercetări matematice, Acad. R.P.R.” **XIII**, 1 (1962), 113–125.
- [6] Idem, *Relations entre parties d'ensembles*. „Rev. Math. pures et appl.” **VII**, 3(1963), Acad. R.P.R., 477–491.
- [7] M. Froda-Schechter, *Préordres et équivalences dans l'ensemble des familles d'un ensemble*. „Archivum mathematicum” (Brno), **I** (1965), 39–56.
- [8] M. Froda-Schechter, *Sous-groupes et groupes quotients d'un groupe préordonné*. „Archivum mathematicum” (Brno), **IV**, 3(1968).

## RELAȚII INDUSE DE O RELAȚIE DE PREORDONARE

(R e z u m a t)

Dacă  $\leq$  este o relație de preordonare definită pe o mulțime  $T$  se introduc relațiile de preordonare duale  $<$  și  $<$  induse în mulțimea părților  $E$  ale lui  $T$  ( $D1$  și  $D1'$ ). Se notează prin  $\mathcal{K}'(E)$  respectiv  $\mathcal{K}_i(E)$  clasele în raport cu echivalențele corespunzătoare ( $D2$ ,  $D2'$ ). Mulțimea acestor clase este ordonată în raport cu  $<$  ( $D3$ ) respectiv  $<$  ( $D3'$ ). Pentru studiul cazului particular al unei mulțimi  $T$  ordonată

laticial se introduc operațiile duale  $\bigwedge$  ( $D4$ ) și  $\bigvee$  ( $D4'$ ). În §1 se studiază proprietățile relațiilor introduse, în §2 proprietățile reunirii și în §3 proprietățile intersecției mulțimilor unei clase: se arată că reunirea coincide cu mulțimea  $M'(E)$ , respectiv  $M_i(E)$ , iar intersecția cu mulțimea  $N'(E)$ , respectiv  $N_i(E)$ . Reunirea aparține totdeauna clasei respective, spre deosebire de intersecție; se dau condiții pentru ca intersecția să aparțină clasei. În §4 se cercetează cazurile de egalitate dintre o clasă  $\mathcal{K}'(E)$  și o clasă  $\mathcal{K}_i(E)$ . În §5 se arată că mulțimea claselor  $\mathcal{K}'(E)$  este o semi-latică completă, iar cea a claselor duale  $\mathcal{K}_i(E)$  o semilatică de intersecție completă (Teor. 5). Dacă  $T$  este o mulțime ordonată care este o semi-latică de intersecție, (respectiv semi-latică) se arată cu ajutorul proprietăților operației  $\bigwedge$  (respectiv  $\bigvee$ ) că clasele  $\mathcal{K}'(E)$  (respectiv  $\mathcal{K}_i(E)$ ) constituie o latică distributivă care este completă dacă  $T$  este completă în raport cu intersecția (reunirea) (Teor. 6). În §6 se dau unele exemple pentru completarea demonstrațiilor precum și pentru a ilustra cum se folosesc de fapt în mod natural noțiunile din lucrare în diferite domenii (teoria filtrelor, topologie generală, grupuri ordonate).

## СООТНОШЕНИЯ, ВВЕДЁННЫЕ СООТНОШЕНИЕМ ПРЕПОРЯДКА

(Резюме)

Если  $\leq$  является соотношением предпорядка, определённым на одном множестве  $T$ , вводят ся дуальные соотношения предпорядка  $<$  и  $<$ , введённые в множество частей  $E$  множества  $T$  ( $D1$  и  $D1'$ ). Обозначим через  $\mathcal{K}'(E)$ , соответственно  $\mathcal{K}_i(E)$ , классы по соотношению к соответствующим эквивалентностям ( $D2$ ,  $D2'$ ). Множество этих классов упорядочено по соотношению  $<$  ( $D3$ ), соответственно  $<$  ( $D3'$ ). Для изучения частного случая одного структурно упорядоченного множества  $T$

вводятся дуальные операции  $\bigwedge$  ( $D4$ ) и  $\bigvee$  ( $D4'$ ). В §1 изучаются свойства введённых соотношений, в §2—свойства объединения и в §3—свойства пересечения множеств одного класса; показывается, что объединение совпадает со множеством  $M'(E)$ , соответственно  $M_i(E)$ , а пересечение — со множеством  $N'(E)$ , соответственно  $N_i(E)$ . Объединение всегда принадлежит соответствующему классу, в отличие от пересечения; даются условия для того, чтобы пересечение принадлежало классу. В §4 исследуются случаи равенства между одним классом  $\mathcal{K}'(E)$  и одним классом  $\mathcal{K}_i(E)$ . В §5 показывается, что множество классов  $\mathcal{K}'(E)$  является полной полуструктурой, а множество дуальных классов  $\mathcal{K}_i(E)$  — полной полуструктурой пересечения (Теорема 5). Если  $T$  — упорядоченное множество, являющееся полуструктурой пересечения, (соответственно полуструктурой), показывается при помощи свойств операции  $\bigvee$  (соответственно  $\bigwedge$ ), что классы  $\mathcal{K}'(E)$  (соответственно  $\mathcal{K}_i(E)$ ) являются распределительной структурой, которая полная, если  $T$  полное по отношению к пересечению (объединению) (Теорема 6). В §6 даются некоторые примеры для дополнения доказательств, а также для того, чтобы проиллюстрировать как используются фактически естественным образом понятия из статьи в различных областях (в теории фильтров, в общей топологии, в упорядоченных группах).

# COMPORTAREA SOLUȚIILOR SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI, CARE DEPIND DE UN PARAMETRU MIC

de

GRIGOR MOLDOVAN

1. **Introducere.** În această notă\* ne ocupăm de studiul soluțiilor unor sisteme de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți de forma

$$x' = Ax + By; \quad \varepsilon y' = A_1x + B_1y, \quad (1)$$

unde  $A, A_1, B, B_1$  sînt matrici constante, iar  $\varepsilon$  este un parametru mic. Vom studia numai cazul cînd  $y$  este unidimensional și bidimensional. Soluția sistemului (1) pentru  $\varepsilon \neq 0$ , o notăm

$$x = x(t, \varepsilon); \quad y = y(t, \varepsilon) \quad (2)$$

și satisface condițiile inițiale

$$x(0, \varepsilon) = x^0; \quad y(\varepsilon, 0) = y^0 \quad (3)$$

Sistemul (1) pentru  $\varepsilon = 0$  devine

$$\bar{x}' = A\bar{x} + B\bar{y}; \quad 0 = A_1\bar{x} + B_1\bar{y}, \quad (4)$$

iar dacă matricea  $B_1$  este nesingulară, acest sistem se poate scrie sub forma

$$\bar{x}' = (A - B \cdot B_1^{-1} A_1) \bar{x} \quad (5)$$

și poartă denumirea de *sistem degenerat*. Notăm soluția sistemului degenerat cu

$$\bar{x} = \bar{x}(t). \quad (6)$$

Ea verifică condițiile inițiale

$$\bar{x}(0) = x^0. \quad (7)$$

Problema care se pune este următoarea: În ce condiții soluția (2) a sistemului (1) tinde către soluția (6) a sistemului (4), respectiv (5), cînd  $\varepsilon \rightarrow 0$ ? Această problemă a fost rezolvată de către A. T i h o n o v [5], [6] în cazul cînd în membrul drept figurează funcții oarecare ce depind de  $t, x, y$ . Acest studiu a fost extins și la sisteme de altă formă, în lucrările lui K. V. Z a d i r a d a [8]. Cu studiul sistemelor

---

\* Este o parte din lucrarea de diplomă, susținută la examenul de stat, în 1963.

de ecuații diferențiale, ce depind de un parametru mic, de forma celor considerate de A. Tihonov s-a ocupat și L. Flatto și N. Levinson [1]. De asemenea cu unele cazuri speciale s-a ocupat și Y. Sibuya [4]. Datorită particularității sistemului considerat, problema care s-a pus, se poate rezolva printr-o metodă directă, diferită de cele folosite în lucrările autorilor mai sus amintiți. Această metodă ne-a fost sugerată de M. Frenkel.

## 2. Parametrul mic figurează pe lângă o singură derivată a sistemului (1).

În acest paragraf va fi vorba de sistemul

$$x' = Ax + By; \quad \varepsilon y' = A_1x + B_1y, \quad (8)$$

unde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

$$y = (y), \quad A_1 = (a_{n,1} \dots a_{n,n-1}), \quad B_1 = (a_{n,n}).$$

Relațiile matriciale din paragraful precedent rămân aceleași, ținînd doar seama de notațiile făcute aici. Prin urmare sistemul (5), devine

$$\dot{\bar{x}}' = \left( A - \frac{B \cdot A_1}{a_{nn}} \right) \bar{x}. \quad (9)$$

Pentru acest caz considerat, avem următoarea

TEOREMĂ. Dacă  $a_{nn} < 0$ , atunci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t); \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \frac{-A_1}{a_{nn}} \bar{x}(t), \quad t > 0.$$

Demonstrația acestei teoreme rezultă din două leme pe care le vom demonstra în continuare.

Ecuația caracteristică a sistemului (8) este

$$\begin{vmatrix} A - \lambda E & B \\ \frac{A_1}{\varepsilon} & \frac{a_{nn}}{\varepsilon} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

unde  $E$  este o matrice unitate de ordinul  $n - 1$ . Ea este de forma

$$\varepsilon \lambda^n + a_1(\varepsilon) \lambda^{n-1} + \dots + a_n(\varepsilon) = 0, \quad (10')$$

unde  $a_k(\varepsilon)$  sînt funcții continue de  $\varepsilon$  și

$$a_1(\varepsilon) = a_1 \varepsilon + a_{nn}. \quad (11)$$

LEMA 1. Ecuația (10) are o rădăcină de forma  $\lambda = \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}$  unde  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon) = a_{nn}$ , iar toate celelalte rădăcini  $\lambda_i = \omega_i(\varepsilon)$  sînt funcții continue de  $\varepsilon$ .

Demonstrație. Să punem  $\lambda = \frac{s}{\varepsilon}$ , iar în (10) să înmulțim fiecare linie cu  $\varepsilon$ .

O să avem

$$\begin{vmatrix} \varepsilon A - sE & \varepsilon B_1 \\ A_1 & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$



Făcînd pe  $\varepsilon$  să tindă la zero, primim

$$\begin{vmatrix} -sE & 0 \\ A_1 & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

sau

$$(-s)^{n-1}(a_{nn} - s) = 0 \quad (13')$$

de unde rezultă  $s^{n-1} = 0$  și  $s = a_{nn}$ . Avem, deci, rădăcinile

$$s_1 = a_{nn}, s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0.$$

Să notăm cu  $\Omega(\varepsilon)$ ,  $s_2(\varepsilon)$ ,  $\dots$ ,  $s_n(\varepsilon)$  rădăcinile ecuației (12). Din cauza continuității coeficienților ecuației (12) în raport cu  $\varepsilon$ , rădăcinile acestei ecuații tind către rădăcinile ecuației (13) adică și a lui (13'), astfel încît avem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon) = a_{nn}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_i(\varepsilon) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Revenind la schimbarea de variabilă întrebuițată, rădăcinile acestei ecuații (10), respectiv (10'), vor fi

$$\lambda_1 = \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \lambda_i(\varepsilon) = \frac{s_i(\varepsilon)}{\varepsilon} = \omega_i(\varepsilon) \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Continuitatea funcțiilor  $\omega_i(\varepsilon)$  fiind imediată, rezultă valabilitatea lemei enunțate.

Cunoscînd o rădăcină a ecuației caracteristice, putem scrie o soluție particulară a sistemului de ecuații diferențiale (8)

$$\begin{aligned} x &= A^{(1)} \exp \left\{ \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\} \\ y &= B^{(1)} \exp \left\{ \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\}, \end{aligned} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ B_1^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

unde  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$  sînt niște mărimi ce depind de  $\varepsilon$  și din acest motiv le vom determina.

Matricei caracteristice  $i$  se atașează următorul sistem de ecuații algebrice, omogen

$$\begin{pmatrix} A - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} E & B \\ \frac{A_1}{\varepsilon} & \frac{a_{nn}}{\varepsilon} - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \quad (15)$$

în necunoscutele  $A^{(1)}$  și  $B^{(1)}$ . Acest sistem are o soluție diferită de cea banală, deoarece determinantul său este egal cu zero. Independente vor fi chiar  $n - 1$ , după cum va rezulta din

**LEMA 2.** Dacă  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  (această valoare va fi precizată în cursul demonstrației), atunci determinantul

$$\left| A - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} E \right| \quad (16)$$

este diferit de zero.

*Demonstrație.* Notăm ecuația caracteristică (10) cu  $f(\lambda) = 0$ .  $\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}$  fiind o rădăcină simplă a acestei ecuații, avem  $f'_\lambda\left(\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 0$ . Pe de altă parte  $f'(\lambda) = \Sigma |A_{ii}(\lambda)|$ , unde  $A_{ii}(\lambda)$  sînt determinanți principali de ordinul  $n - 1$ . Deoarece  $f'_\lambda\left(\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \neq 0$ , rezultă că există cel puțin un determinant de ordinul  $n - 1$  diferit de zero. Observăm că

$$\left| A_{nn}\left(\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \right| = \left| A - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} E \right|.$$

Vom arăta că dacă  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , acest determinant este diferit de zero. În acest scop să considerăm ecuația  $|A - \lambda E| = 0$ . Această ecuație fiind de gradul  $n - 1$ , are  $n - 1$  rădăcini  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{n-1}$  (reale sau complexe) care nu depind de parametrul  $\varepsilon$ . Relația  $\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} = \bar{\lambda}_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$  poate avea loc pentru anumite valori ale lui  $\varepsilon$  egale cu  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_1}$ . Notăm  $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_1})$ . Atunci pentru orice  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , vom avea  $\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \neq \bar{\lambda}_i$  și deci  $\left| A - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} E \right| \neq 0$ .

Din sistemul de  $n - 1$  ecuații

$$\left( A - \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} E \right) A^{(1)} = - B B^{(1)}, \quad (17)$$

folosind lemele anterioare rezultă

$$\frac{A^{(1)}}{B^{(1)}} = \varepsilon \left[ \frac{B}{a_{nn}} + \alpha(\varepsilon) \right] \text{ unde } \alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \text{ cînd } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17')$$

Cunoscînd o soluție particulară a sistemului (8), printr-o transformare de forma

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} X_n + X \\ y &= y^{(1)} X_n \end{aligned} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

el se transformă într-un sistem de  $n - 1$  ecuații diferențiale cu  $n - 1$  funcții necunoscute.

Din a doua relație a transformării (18) obținem prin derivare  $y^{(1)} X'_n = \frac{1}{\varepsilon} A_1 X$ , iar din prima  $x^{(1)} X'_n + X' = AX$ . Așa încît sistemul (8) devine

$$X' = \left( A - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{x^{(1)}}{y^{(1)}} A_1 \right) X.$$

Ținînd seama de (14) se observă că avem  $\frac{x^{(1)}}{y^{(1)}} = \frac{A^{(1)}}{B^{(1)}}$ , iar acest raport e dat de (17').

După înlocuire obținem

$$X' = \left( A - \frac{BA_1}{a_{nn}} \right) X + \alpha(\varepsilon) A_1 X. \quad (19)$$

Condițiile inițiale (3) în urma transformării (18), devin condiții inițiale pentru sistemul (19),  $X_n(0, \varepsilon) = \frac{1}{B} x_0$ ,  $X(0, \varepsilon) = x_0 - \frac{A}{B} y_0 = x_0 - 0(\varepsilon)$ . Se observă că avem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(0, \varepsilon) = x_0. \quad (20)$$

În membrul drept al sistemului (19) avem funcții continue în raport cu  $t$  precum și în raport cu  $\varepsilon$ . Pe baza teoremei de continuitate a soluțiilor dependente de un parametru, soluțiile

$$X = X(t, \varepsilon) \quad (21)$$

ale sistemului (19) vor fi funcții continue în raport cu  $\varepsilon$ .

Trecînd la limită în sistemul (19),  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obținem

$$X' = \left( A - \frac{BA_1}{a_{nn}} \right) X, \quad (22)$$

care nu este altceva decît sistemul degenerat (9).

Ținînd seama de (20), soluția (21) va tinde către soluția sistemului (22), adică a sistemului (9)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(t, \varepsilon) = \bar{x}(t). \quad (23)$$

Mai departe vom arăta că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(t, \varepsilon). \quad (24)$$

Pentru aceasta e suficient să dovedim relația

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x X_n = 0. \quad (25)$$

Calculăm în acest scop pe  $X_n$ . Prin integrare obținem  $X_n = C + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{A_1}{y} X ds$ .

Ținînd seama de (14) și notînd  $\Phi(t, \varepsilon) = A_1 X(t, \varepsilon)$  putem scrie

$$X_n = X + \frac{1}{\varepsilon B} \int_0^t \exp \left\{ -\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} s \right\} \Phi(s, \varepsilon) ds.$$

Constanta de integrare  $C$  se determină ținînd seama de condițiile inițiale obținute în urma transformării (18). Rezultă

$$X_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{B} \left[ x_0 - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp \left\{ -\frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} s \right\} \Phi(s, \varepsilon) ds \right].$$

Ușor se constată că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^{(1)} x X_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A}{B} {}^{(1)} \left[ x_0 \exp \left\{ \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} + \Phi_1(t, \varepsilon) \right] = 0,$$

unde funcția  $\Phi_1(t, \varepsilon)$  este mărginită, dacă ținem seama de condiția din teoremă  $a_{nn} < 0$  și de expresia (17'), precum și de faptul că  $t > 0$ . Trecînd la limită în transformarea (18) se obține relația (24), așa că avem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t).$$

Să dovedim și a doua relație din teoremă. Înlocuind pe  $y$ , avem <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\Omega(\varepsilon)} \Phi(t, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\Omega^2(\varepsilon)} \Phi(t, \varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{\Omega^3(\varepsilon)} \Phi''(\xi, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \left[ y_0 + \frac{1}{\Omega(\varepsilon)} \Phi(0, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\Omega^2(\varepsilon)} \Phi'(0, \varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{\Omega^3(\varepsilon)} \Phi''(\xi, \varepsilon) \right] \exp \left\{ \frac{\Omega(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\} \right\}, \end{aligned}$$

unde  $\xi \in (0, t)$ . De aici se vede imediat că pentru  $t > 0$  și  $a_{nn} < 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = -\frac{\Phi(t, 0)}{a_{nn}}$ . Să precizăm funcția  $\Phi(t, 0)$ . Avem  $\Phi(t, 0) = A_1 X(t, 0)$ , iar din (23) rezultă  $\Phi(t, 0) = A_1 \bar{x}(t)$ . În fine  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = -\frac{A_1 \bar{x}(t)}{a_{nn}}$ . Cu aceasta teorema este demonstrată în întregime.

**3. O aplicație.** Fie dată o ecuație diferențială liniară, omogenă și cu coeficienți constanți de forma

$$\varepsilon y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

unde  $\varepsilon$  este un parametru mic. Această ecuație diferențială are o soluție  $y = y(t, \varepsilon)$  ce verifică condițiile inițiale  $y^{(i)}(0, \varepsilon) = y_0^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Dacă  $\varepsilon = 0$ , ecuația dată devine

$$a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_n \bar{y} = 0.$$

Această ecuație diferențială, dacă  $a_1 \neq 0$ , are o soluție  $\bar{y} = \bar{y}(t)$ , care verifică condițiile inițiale  $y^{(i)} = y_0^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Problema care se pune este, în ce condiții avem  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t)$ ? Această problemă este rezolvată într-un caz mai general, de către M. Frenkel [2], printr-o metodă directă, diferită de cea a lui L. S. Gradstein [3], V. M. Volosov [7] și A. Tihonov [5].

Ecuația dată fiind cu coeficienți constanți, se poate transforma într-un sistem de ordinul întâi cu coeficienți constanți de forma (8). Datorită acestui fapt problema enunțată apare ca o consecință a teoremei demonstrate mai sus și deci e adevărată

**TEOREMA.** Dacă  $a_1 > 0$ , atunci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(i)}(t, \varepsilon) = y^{(i)}(t), \quad t > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2).$$

**4. Parametrul mic figurează pe lângă două derivate ale sistemului de ecuații cu coeficienți constanți.** În acest paragraf ne vom ocupa de un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți de forma (1) unde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Avem următoarea

**TEOREMĂ.** Dacă

a) *determinantul*  $|B_1|$  *este diferit de zero;*

b) *rădăcinile*  $s_1, s_2$  *ale ecuației*  $|B_1 - s E_1| = 0$  ( $E_1$  *este o matrice de ordinul doi)* *sînt distincte și au partea reală negativă,*

*atunci*  $x(t, \varepsilon)$  *fiind soluția sistemului (1), cu notațiile (26) și condițiile inițiale (3), iar*  $\bar{x}(t)$  *soluția sistemului (4) ce verifică condițiile (7), avem*  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t), t > 0.$

Ecuația caracteristică a sistemului (1) este

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda E & B \\ \frac{A_1}{\varepsilon} & \frac{B_1}{\varepsilon} - \lambda E_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

unde  $E$  este o matrice unitate de ordinul  $n - 2$ , iar  $E_1$  o matrice unitate de ordinul 2.

**LEMA 1.** *Ecuația (27) are două rădăcini de forma*  $\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon}$  *unde limitele lui*  $\Omega_1(\varepsilon)$  *și*  $\Omega_2(\varepsilon)$  *pentru*  $\varepsilon \rightarrow 0$  *sînt rădăcinile ecuației*  $|B_1 - s E_1| = 0$  *iar toate celelalte rădăcini sînt funcții continue de*  $\varepsilon$ .

Demonstrația acestei leme se face în mod analog cu demonstrația lemei 1, din paragraful anteprecedent și de aceea nu o reproducem.

Rădăcinile  $s_1$  și  $s_2$  fiind distincte, înseamnă că și  $\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon}$  vor fi distincte, și putem scrie două soluții particulare ale sistemului (1):

$$x = \overset{(i)}{A} \exp \left\{ \frac{\Omega_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\} \quad \text{unde } \overset{(i)}{A} = \begin{pmatrix} \overset{(i)}{A}_1 \\ \vdots \\ \overset{(i)}{A}_{n-2} \end{pmatrix} \quad \overset{(i)}{B} = \begin{pmatrix} \overset{(i)}{B}_1 \\ \vdots \\ \overset{(i)}{B}_2 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (28)$$

$$y = \overset{(i)}{B} \exp \left\{ \frac{\Omega_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\}$$

Mărimile  $\overset{(i)}{A}, \overset{(i)}{B}$  depind de parametrul  $\varepsilon$ . Pentru a le determina, sistemului de ecuații diferențiale (1) îi vom atașa sistemul de ecuații algebrice omogen

$$\begin{pmatrix} A - \frac{\Omega_i(\varepsilon)}{\varepsilon} E & B \\ \frac{A_1}{\varepsilon} & \frac{B_1}{\varepsilon} - \frac{\Omega_i(\varepsilon)}{\varepsilon} E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{(i)}{A} \\ \overset{(i)}{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (29)$$

Determinantul acestui sistem este egal cu zero, deci sistemul (29) admite soluții diferite de cea banală. E adevărată

LEMA 2. Pentru  $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$  determinantul principal de ordinul  $n - 1$

$$\Delta = \Delta \left( \frac{\Omega_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) = \begin{vmatrix} A - \frac{\Omega_1(\varepsilon)}{\varepsilon} E & \bar{B} \\ \bar{A}_1 & \frac{a_{n-1,n-1}}{\varepsilon} - \frac{\Omega_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \end{vmatrix} \quad (30)$$

unde

$$\bar{A} = (a_{n-1,1} \dots a_{n-1,n-2}) \quad \text{iar} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-2,n-1} \end{pmatrix}$$

este diferit de zero.

Pe baza lemelor 1 și 2 se deduce că

$$A_i^{(1)} = \varepsilon \frac{B_2^{(1)}}{s_1} \left[ \frac{a_{in} a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n} a_{i,n-1} - s_1 a_{in}}{a_{n-1,n-1} - s_1} + \alpha^{(i)}(\varepsilon) \right]$$

unde  $\alpha^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ , când  $\varepsilon \rightarrow 0$ , iar

$$B_1^{(1)} = -B_2^{(1)} \left[ \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - s_1} + \alpha^{(n-1)}(\varepsilon) \right]$$

și  $\alpha^{(n-1)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ , când  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Expresii absolut analoge obținem pentru  $A_i^{(2)}$  și  $B_i^{(2)}$ , dacă considerăm rădăcina  $\frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon}$  (se înlocuiește  $s_1$  cu  $s_2$  și se obțin niște funcții dependente de  $\varepsilon$  care converg de asemenea către zero când  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Raționamentul este valabil dacă  $\varepsilon < \varepsilon''_0$ .

Vom considera în continuare  $\varepsilon < \varepsilon_0$  unde  $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon'_0, \varepsilon''_0)$ . Aplicând sistemului (1) o transformare de forma

$$x = x^{(1,2)} Y - X; \quad y = y^{(1,2)} Y \quad (31)$$

unde

$$\begin{matrix} x^{(1,2)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ x & x \end{pmatrix} \\ y^{(1,2)} = \begin{pmatrix} y^{(1)} & y^{(2)} \\ y & y \end{pmatrix} \end{matrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

el se transformă într-un sistem de  $n - 2$  ecuații diferențiale, cu  $n - 2$  funcții necunoscute și anume

$$X' = \left( A - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} x^{(1,2)} & y^{(1,2)} \\ x & y \end{pmatrix}^{-1} A_1 \right) X, \quad (32)$$

iar apoi se vede imediat că

$$X(0, \varepsilon) = x_0 + 0(\varepsilon). \quad (33)$$

Sistemul (32), ținând seama, pe de o parte, că

$$x \quad y = \frac{\epsilon}{|B_1|} (a_{i,n-1} a_{nn} - a_{in} a_{n,n-1}, - a_{i,n-1} a_{n-1,n} - a_{in} a_{n-1,n-1}) + \gamma(\epsilon)$$

unde  $\gamma(\epsilon) \rightarrow 0$  când  $\epsilon \rightarrow 0$ , iar pe de altă parte că

$$B \cdot B_1^{-1} = \frac{1}{|B_1|} (a_{i,n-1} a_{nn} - a_{in} a_{n,n-1}, - a_{i,n-1} a_{n-1,n} - a_{in} a_{n-1,n-1})$$

se poate scrie astfel:

$$X' = (A - B B_1^{-1} A_1) X + \gamma(\epsilon) X, \quad (34)$$

cu condițiile inițiale (33).

Acum, comparînd sistemul (34) cu sistemul (5) pe baza teoremei de continuitate se vede clar că

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X(t, \epsilon) = \bar{x}(t).$$

Ușor se arată de asemenea că are loc relația

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} X(t, \epsilon)$$

și în consecință

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t, \epsilon) = \bar{x}(t).$$

**6. Completări.** Metoda dezvoltată în paragrafele anterioare se poate extinde și la cazul când parametrul  $\epsilon$  figurează pe lângă un număr oarecare de derivate, dar necesită un volum foarte mare de calcule. Însă, odată rezolvat acest caz general și știind că un sistem cu coeficienți periodici se poate întotdeauna transforma într-un sistem cu coeficienți constanți, evident putem considera sisteme de ecuații diferențiale dependente de un parametru mic, ai cărui coeficienți sînt funcții periodice de  $t$ .

(Intrai în redacție la 10 octombrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Flatto L., Levinson N., „Journal of Rational Mechanics and Analysis”, 4 (1955), 943–950.
2. Fertig. M., „Studia Univ. Babeș-Bolyai” Seria 1, fasc. 1 (1960), 121–130.
3. Gradstein I. S., „Mat. Sbornik” 27(69), (1950), 47–68.
4. Sibuya Y., „Funkcialaj Ekvacioj” 4 (1962), 83–113.
5. Tihonov A. N., „Mat. Sbornik” 27(69), (1950), 147–156.
6. Tihonov A. N., „Mat. Sbornik” 31(73), (1952), 575–586.
7. Volosov V. M., „Mat. Sbornik” 31(73), 3 (1952), 645–686.
8. Zadiraka K. V., „D.A.N.”, 109 (1956), 256–259.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

( Р е з ю м е )

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By \\ \varepsilon y' &= A_1 x + B_1 y\end{aligned}\quad (1)$$

где  $A, A_1, B, B_1$  суть постоянные матрицы, а  $\varepsilon$  — малый параметр и  $y$  — одномерный и двухмерный. Если  $\varepsilon = 0$ , и  $B_1$  является невырожденным, то имеем вырожденную систему

$$\bar{x}' = (A - BB_1^{-1}A_1)\bar{x}.\quad (2)$$

В случае, если  $B_1 = (a_{nn})$  доказывается следующая теорема:

*Теорема.* Если  $a_{nn} < 0$

$$\text{то } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \frac{-A_1}{a_{nn}} \bar{x}(t), \quad t > 0,$$

где  $x = x(t, \varepsilon)$ ,  $y = y(t, \varepsilon)$  — решение системы (1), а  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  — решение системы (2). Методом доказательства является прямой метод, отличный от методов других авторов. Дается одно применение для одного обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами специального вида.

Доказывается аналогичная теорема, в случае, когда  $y$  двухмерный.

COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS DÉPENDANT D'UN PETIT PARAMÈTRE

(R é s u m é)

On considère un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By \\ \varepsilon y' &= A_1 x + B_1 y\end{aligned}\quad (1)$$

où  $A, A_1, B, B_1$  sont des matrices constantes,  $\varepsilon$  un petit paramètre et  $y$  uni et bidimensionnel. Si  $\varepsilon = 0$  et si  $B_1$  est non-singulier, nous avons le système dégénéré :

$$\bar{x}' = (A - B \cdot B_1^{-1} A_1) \bar{x}\quad (2)$$

On démontre, dans le cas où  $B_1 = (a_{nn})$ , le

*Théorème :* Si  $a_{nn} < 0$

alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \frac{-A_1}{a_{nn}} \bar{x}(t), \quad t > 0$$

où  $x = x(t, \varepsilon)$ ,  $y = y(t, \varepsilon)$  est la solution du système (1), et  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  la solution du système (2). La méthode de démonstration est une méthode directe, différente de celle d'autres auteurs. On donne une application pour une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants d'une forme spéciale.

On démontre un théorème analogue, dans le cas où  $y$  est bidimensionnel.







By identification we have :

$$F_1(x) = e^{a_{11}x} [A_{11}a_{p_1}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x) + A_{12}a_{p_2}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x) + \dots + A_{1n}a_{p_n}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x)]$$

$$F_n(x) = e^{a_{11}x} [A_{11}a_{p_n}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x) + A_{12}a_{p_n}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x) + \dots + A_{1n}a_{p_1}(a_{12}x, a_{13}x, \dots, a_{1n}x)]$$

(Received February 15, 1968)

#### REFERENCES

1. Aczél J., *Uspechi matematicheskikh nauk*. 1956, XI, 3 (69), 1—66.
2. Lobachevski N. I., *Geometrische Untersuchungen*. Berlin, 1840, parag. 33—36.
3. O. Gheorghiu, V. Micc, B. Cristici, *Generalizarea matricilor a unei ecuații funcționale, care cuprinde drept caz particular ecuația funcțională D'Alembert-Poisson*. Comunic. Acad. R.P.R., nr. 7, XI, 1961.

#### GENERALIZAREA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A LUI N. I. LOBACHEVSKI CU AJUTORUL MATRICELOR

(R e z u m a t)

Se consideră ecuația funcțională (1) pe care o generalizăm considerînd în locul funcției  $f(x)$  o matrice ciclică de ordinul  $n$ .

Ecuația devine (3) cu ajutorul variabilelor hipercomplexe conjugate de variabilă reală obținînd sistemul (6) cu soluția (7). Se exprimă apoi această soluție cu ajutorul cosinuşilor lui Appell.

#### ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЦ

(Р е з ю м е)

Рассматривается функциональное уравнение (1), которое обобщаем, считая вместо функции  $f(x)$  циклическую матрицу порядка  $n$ .

Получается уравнение (3) при помощи сопряжённых гиперкомплексных переменных действительного переменного, получая систему (6) с решением (7). Затем это решение выражается при помощи косинусов Аппелля.



SUR LES FORMES CANONIQUES POUR SYSTÈMES ELLIPTIQUES DE  
DEUXIÈME ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

par  
P. SZILÁGYI

Nous considérons des systèmes de la forme

$$Lu \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = F(x_1, x_2) \quad (1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

sont des matrices à éléments réels et constants,  $u$  et  $F$  des fonctions vectorielles aux composantes respectives  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$  et  $F_1(x_1, x_2)$ ,  $F_2(x_1, x_2)$ . Nous supposons que le système (1) est elliptique, c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation caractéristique

$$P(1, \lambda) = \begin{vmatrix} P_{11}(1, \lambda) & P_{12}(1, \lambda) \\ P_{21}(1, \lambda) & P_{22}(1, \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

sont complexes. Ici  $P_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)$  sont les polynômes homogènes

$$P_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) = a_{ij}\lambda_1^2 + 2b_{ij}\lambda_1\lambda_2 + c_{ij}\lambda_2^2. \quad (2)$$

Dans la première partie de ce travail nous voulons transformer le système (1) en un système de la forme

$$\mathcal{L}v \equiv \mathcal{A} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\mathcal{B} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = \mathcal{F}(y_1, y_2) \quad (3)$$

tel que les racines de l'équation caractéristique pour le système (3) soient  $i$ ,  $-i$ ,  $ki$ ,  $-ki$ , où  $k$  est une constante réelle, positive, et que les matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  aient la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, pour le moins, qu'une de ces équations ne contienne qu'une seule fonction inconnue. Ces conditions une fois remplies, nous dirons que (3) a la forme canonique. Dans ce but nous recourons aux transformations suivantes :

1. Changement des variables indépendantes au moyen d'une transformation linéaire de la forme

$$y_j = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

2. Changement des fonctions inconnues par une transformation de la forme  $u = \mathcal{K}v$ , où  $\mathcal{K}$  est une matrice quadratique non-singulière à éléments constants.

3. Multiplication du système (1) par une matrice quadratique d'ordre 2, non-singulière  $K$ .

Nous observons que le problème « comment ramener à la forme canonique le système (1) à l'aide des transformations mentionnées » a été débattu dans le travail [1]. Nous en complétons les résultats en construisant effectivement les transformations utilisées.

Dans la deuxième partie de ce travail nous allons étudier la résolubilité du problème de Dirichlet pour les systèmes elliptiques ramenés à leur forme canonique.

I. Nous démontrons que pour tout système elliptique de la forme (1) existent les transformations énumérées aux points 1—3, grâce auxquelles ce système se transforme en forme canonique.

LEMME 1. Si le système (1) est elliptique, alors il existe une transformation non-singulière de la forme (4) telle que les racines de l'équation caractéristique du système transformé soient  $i$ ,  $-i$ ,  $ki$ ,  $-ki$ , où  $k$  est une constante positive.

Démonstration. Nous considérons le polynôme homogène

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} P_{11}(\lambda_1, \lambda_2) & P_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \\ P_{21}(\lambda_1, \lambda_2) & P_{22}(\lambda_1, \lambda_2) \end{vmatrix} = a_0\lambda_1^4 + a_1\lambda_1^3\lambda_2 + a_2\lambda_1^2\lambda_2^2 + a_3\lambda_1\lambda_2^3 + a_4\lambda_2^4.$$

Les racines de l'équation caractéristique  $P(1, \lambda) = 0$  étant des complexes conjugués,  $P(\lambda_1, \lambda_2)$  peut être écrit sous la forme :

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = a_0(\lambda_1^2 + 2p_1\lambda_1\lambda_2 + q_1\lambda_2^2)(\lambda_1^2 + 2p_2\lambda_1\lambda_2 + q_2\lambda_2^2)$$

où  $p_1, p_2, q_1, q_2$  sont des nombres réels remplissant les conditions  $p_1^2 - q_1^2 < 0$ ,  $p_2^2 - q_2^2 < 0$ . A l'aide d'une transformation de la forme  $\mu_i = \alpha'_{1i}\lambda_1 + \alpha'_{2i}\lambda_2$  nous transformons la forme quadratique  $a(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2p_1\lambda_1\lambda_2 + q_1\lambda_2^2$  en sa forme canonique. Ceci fait, nous avons  $a(\lambda_1, \lambda_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2$  et  $b(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2p_2\lambda_1\lambda_2 + q_2\lambda_2^2 = b_0(\mu_1^2 + 2p'_2\mu_1\mu_2 + q'_2\mu_2^2)$ , ( $p_2^2 - q_2^2 < 0$ ). Cette dernière forme quadratique est elliptique, donc il existe une transformation linéaire, orthogonale  $v_i = \alpha''_{1i}\mu_1 + \alpha''_{2i}\mu_2$  laquelle transforme  $b(\lambda_1, \lambda_2)$  en  $b'_0(k^2v_1^2 + v_2^2)$ , où  $b'_0$  et  $k$  sont des constantes réelles qui diffèrent de 0. Nous pouvons supposer que  $k > 0$ . La dernière transformation ne change pas la forme de  $a(\lambda_1, \lambda_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2$ , car la transformation est orthogonale. Ainsi nous avons  $a(\lambda_1, \lambda_2) = v_1^2 + v_2^2$ . Par conséquent la transformation

$$v_i = \alpha_{1i}\lambda_1 + \alpha_{2i}\lambda_2 \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

où

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} & \alpha''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

transforme  $a(\lambda_1, \lambda_2)$  en  $v_1^2 + v_2^2$  et  $b(\lambda_1, \lambda_2)$  en  $b'_0(k^2 v_1^2 + v_2^2)$ . De là résulte que  $P(\lambda_1, \lambda_2)$  se transformera en

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \mathfrak{E}(v_1, v_2) = A(v_1^2 + v_2^2)(k^2 v_1^2 + v_2^2) \quad (7)$$

Nous faisons aussi remarquer qu'aussitôt effectuée la transformation (4) avec  $\alpha_{ij}$  définis par la relation (6), le système (1) se transformera en un système pour lequel l'équation caractéristique est (7), ce qui prouve le lemme.

Par la suite nous pouvons donc supposer que les racines de l'équation caractéristique pour le système (1) sont  $i, -i, ki, -ki$ . Dans ce cas-là, entre les coefficients du système (1), il existe quelques liaisons que nous allons exprimer dans le

LEMME 2. Si les racines de l'équation caractéristique sont  $i, -i, ki, -k$  où  $k$  est un nombre positif, alors entre les coefficients du système (1) auront lieu les relations suivantes :

$$|A| = k^2|C|, |A + B| = |A| + |B|, |B + C| = |B| + |C|, |A - C| = 4|B| \quad (8)$$

et inversement, si entre les coefficients du système (1) ont lieu les relations (8), alors les racines de l'équation caractéristique sont  $i, -i, ki, -ki$ .

Ici nous avons noté par  $|A|$  le déterminant formé d' $A$ . La démonstration du lemme est immédiate si nous utilisons le fait que  $i, -i, ik, -ik$  satisfont à l'équation caractéristique.

Par la suite nous voulons effectuer les transformations nos 2 et 3 mentionnées dans l'introduction, sans changer toutefois les racines de l'équation caractéristique. La propriété suivante aura lieu :

LEMME 3. Si pour le système (1) ont lieu les conditions (8), alors les mêmes conditions restent valables quand nous effectuons un changement de fonction par  $u = \mathfrak{X}v$ , où  $\mathfrak{X}$  est une matrice non-singulière, ou quand nous multiplions le système avec une matrice quadratique non-singulière  $K$ .

Démonstration. Après avoir effectué la transformation  $u = \mathfrak{X}v$ , nous avons

$$Lu = L\mathfrak{X}v = A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$$

où  $A_1 = A\mathfrak{X}$ ,  $B_1 = B\mathfrak{X}$ ,  $C_1 = C\mathfrak{X}$ . En utilisant le fait que  $|\mathfrak{X}| \neq 0$ , il en résulte de manière évidente les relations (8) pour matrices  $A_1, B_1, C_1$ , si celles-ci ont été vraies pour  $A, B, C$ . On démontre de même la deuxième affirmation.

Par la suite nous supposons que  $C$  est la matrice-unité et que les racines de l'équation caractéristique sont  $i, -i, ki, -ki$ . Alors il résulte des conditions (8) que

$$\begin{aligned} \text{a) } & |A| - a_{11} - a_{22} + 1 = 4|B|, & \text{b) } & b_{11} + b_{22} = 0 \\ \text{c) } & \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 & \text{d) } & |A| = k^2 \end{aligned} \quad (9)$$

On passe maintenant à l'effectuation des transformations 2 et 3. Dans ce but nous faisons la combinaison suivante des deux équations du système (1) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [(k_1 a_{11} + k_2 a_{21})u_1 + (k_1 a_{12} + k_2 a_{22})u_2] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} [(k_1 b_{11} + k_2 b_{21})u_1 + \\ & + (k_1 b_{12} + k_2 b_{22})u_2] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [k_1 u_1 + k_2 u_2] = k_1 F_1 + k_2 F_2 \end{aligned}$$

et nous désirons déterminer  $k_1$  et  $k_2$ , dont au moins l'un soit différent de zéro, tels que

$$a_{11}k_1 + a_{21}k_2 = \alpha k_1, \quad a_{12}k_1 + a_{22}k_2 = \alpha k_2. \quad (10)$$

Pour cela il est nécessaire et suffisant que le déterminant du système soit égal à zéro, c'est-à-dire que  $\alpha$  satisfasse à l'équation

$$\alpha^2 - (a_{11} + a_{22})\alpha + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (11)$$

Nous observons qu'à cause de l'ellipticité du système (1)  $|A| \neq 0$ , donc  $\alpha = 0$  ne satisfait pas à l'équation (11). De même nous précisons que les racines de l'équation (11) sont réelles. Supposons le contraire, que l'équation (11) ait des racines complexes pour un système elliptique pour lequel les conditions (9) ont été remplies. Dans ce cas-là le discriminant de l'équation (11) est négatif, c'est-à-dire

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0.$$

En utilisant ce fait et la condition (9a), aboutissons à  $(a_{11} + a_{22} - 2)^2 - 16|B| < 0$ , ce qui démontre que  $|B| > 0$ . D'autre part de  $\Delta < 0$  et de (9b, 9c) il résulte  $|B| < 0$  si  $b_{11} \neq 0$ . Ainsi nous avons abouti aux deux inégalités contradictoires  $|B| > 0$ ,  $|B| < 0$ . Si  $b_{11} = 0$  et donc  $b_{22} = 0$ , on aboutit de même à une contradiction.

Nous avons donc les deux possibilités:  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ .

A. *Le cas  $\Delta > 0$ .* Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les racines de l'équation (11) et  $(k_{11}, k_{12})$ ,  $(k_{21}, k_{22})$  les solutions du système (10) correspondant respectivement à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Nous notons par  $K$  la matrice formée par les lignes  $k_{11}, k_{12}$  et  $k_{21}, k_{22}$ . Du fait que  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , il résulte que  $|K| \neq 0$ , donc le  $K^{-1}$  existe. En introduisant la fonction  $v = K^{-1}u$  et en multipliant le système (1) avec la matrice  $K$ , nous obtenons

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\mathfrak{B} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = KF \quad (12)$$

où  $\mathcal{A} = KAK^{-1}$ ,  $\mathfrak{B} = KBK^{-1}$ ,  $\mathcal{C} = KCK^{-1} = C$  ( $C$  étant la matrice-unité). En utilisant la fait que  $(k_{11}, k_{12})$ ,  $(k_{21}, k_{22})$  satisfont au système (10) respectivement pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , il résulte

$$KA = \begin{pmatrix} \alpha_1 k_{11} & \alpha_1 k_{12} \\ \alpha_2 k_{21} & \alpha_2 k_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A} = KAK^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Nous notons par  $b'_{ij}$  les éléments de  $B$ . Nous avons

$$|K|b'_{11} = b_{11}k_{11}k_{22} + k_{21}k_{12}k_{22} - b_{12}k_{11}k_{21} - b_{22}k_{12}k_{21}$$

Nous supposons que  $a_{21} \neq 0$ . Alors sur la base des équations (10) et de la condition (9b) nous avons

$$k_{12} = \frac{\alpha_1 - a_{11}}{a_{21}} k_{11}, \quad k_{22} = \frac{\alpha_2 - a_{11}}{a_{21}} k_{21}, \quad b_{22} = -b_{11}.$$

En remplaçant ces valeurs dans  $|K|b'_{11}$  et en utilisant tant le fait que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des racines de l'équation (11) que la condition (9c), nous obtenons  $b'_{11} = 0$ . De façon analogue on démontre que  $b'_{22} = 0$ . Si  $a_{21} = 0$ , alors en utilisant des calculs similaires nous obtenons le même résultat, c'est-à-dire  $b'_{11} = 0$ ,  $b'_{22} = 0$ . En notant  $\beta_1 = b'_{12}$ ,  $\beta_2 = b'_{21}$  nous avons

$$\mathfrak{B} = KBK^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$



Par conséquent, ayant effectué les transformations indiquées, notre système (1) aura la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \mathfrak{F} \quad (13)$$

et sur la base des conditions (9) les relations suivantes ont lieu entre les coefficients  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $k$ :

$$\alpha_1 \alpha_2 = k^2 > 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 + 1 = \alpha_1 + \alpha_2 - 4\beta_1 \beta_2 \quad (14)$$

B. Le cas  $\Delta = 0$ . a)  $a_{21} \neq 0$ . ( $a_{12} \neq 0$ ). Dans ce cas-là les racines de l'équation (11) sont  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ . Nous notons par  $(k_{11}, k_{12})$  une solution non-banale du système (10) pour  $\alpha = \alpha_1$  et par  $(k_{21}, k_{22})$  une solution non-banale du système

$$a_{11}k_{21} + a_{21}k_{22} = \alpha_1 k_{21} + k_{11}, \quad a_{12}k_{21} + a_{22}k_{22} = \alpha_1 k_{22} + k_{12} \quad (10')$$

On peut démontrer aisément que le système (10') a une solution non-banale et que le déterminant formé de  $(k_{11}, k_{12})$ ,  $(k_{21}, k_{22})$  diffère de zéro. Dans ce cas aussi nous introduisons la nouvelle fonction  $v = K^{-1}u$  et nous multiplions le système (1) avec la matrice  $K$  formée de  $(k_{11}, k_{12})$ ,  $(k_{21}, k_{22})$ . Ainsi l'on obtient à nouveau un système de la forme (12), dans lequel les coefficients ont les mêmes significations qu'auparavant. Nous calculons les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathfrak{B}$ . En utilisant les équations (10) pour  $\alpha = \alpha_1$  et les équations (10'), nous obtenons

$$KA = \begin{pmatrix} \alpha_1 k_{11} & \alpha_1 k_{12} \\ \alpha_1 k_{21} + k_{11} & \alpha_1 k_{22} + k_{12} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A} = KAK^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le système transformé est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \mathfrak{F}$$

Les relations (9) continuent à avoir lieu entre les coefficients de ce système. Il résulte des conditions (9c) et (9b):  $\alpha_1(b'_{11} + b'_{22}) - b'_{12} = 0$ ,  $b'_{11} + b'_{22} = 0$  ce qui prouve que  $b'_{12} = 0$ , c'est-à-dire que la première équation du système transformé ne contient que  $v_1$ . En utilisant aussi la relation (9a) nous obtenons  $(\alpha_1 - 1)^2 = 4|B| = 4b'_{11}b'_{22} = -4b'_{11}{}^2$ . Il en résulte que  $b'_{11} = 0$ ,  $b'_{22} = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$  et le système sera

$$\Delta v_1 = \mathfrak{F}_1, \quad \Delta v_2 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2b'_{21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \mathfrak{F}_2.$$

b)  $a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = 0$ . Dans ce cas-là il résulte de  $\Delta = 0$  que  $a_{11} = a_{22} = \alpha$ , et de la condition (9a) il s'ensuit  $(\alpha - 1)^2 = 4|B|$ . Si  $|B| = 0$  et tous les éléments de  $|B|$  sont nuls, alors nous avons deux équations indépendantes. Si  $|B| \neq 0$ , mais tous les  $b'_{ij}$  ne sont pas nuls, alors nous déterminons les constantes  $k_1$  et  $k_2$  de manière qu'au moins l'une d'elles diffère de zéro et qu'ait lieu:

$$b_{11}k_1 + b_{21}k_2 = 0, \quad b_{12}k_1 + b_{22}k_2 = 0.$$

Nous supposons que  $k_1 \neq 0$  et nous notons par  $K$  la matrice formée des lignes  $(k_1, k_2)$  et  $(0, 1)$ . Nous introduisons la nouvelle fonction  $v = K^{-1}u$  et nous multiplions le système avec  $K$ . Les matrices du système (12) auront la forme

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b'_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la première équation du système (12) ne contient que  $v_1$ .

Si  $|B| > 0$ , nous considérons le système

$$b_{11}k_1 + b_{21}k_2 = \beta k_1, \quad b_{12}k_1 + b_{22}k_2 = \beta k_2.$$

Ce système a une solution non-banale si  $\beta^2 + |B| = 0$ . Ici nous avons utilisé la condition  $b'_{11} + b'_{22} = 0$ . Soit  $\beta = \sqrt{|B|}$  et  $(k_1, k_2)$  une solution non-banale du système antérieur. Nous formons une combinaison linéaire des équations du système (1) avec les constantes  $k_1$  et  $k_2$ . Nous avons

$$a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (k_1 u_1 + k_2 u_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (k_1 u_1 + k_2 u_2) + 2\beta i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 F_1 + k_2 F_2$$

En introduisant les fonctions complexes

$$v = v_1 + iv_2 = k_1 u_1 + k_2 u_2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = k_1 F_1 + k_2 F_2$$

l'équation précédente devient

$$a_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\beta i \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \mathfrak{F}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation obtenue, nous avons un système de la forme (12) où

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition (9a) a pour effet que  $(a_{11} - 1)^2 = 4\beta^2$ . Dans ce cas-là aussi nous avons réduit le système (1) à la forme voulue. Ainsi nous avons abouti à la conclusion suivante :

**THÉOREME 1.** Si le système (1) est elliptique, alors il existe une transformation linéaire de la forme (4) et une matrice carrée non-singulière  $K$  telle qu'aussitôt effectuée la transformation (4), changée la fonction inconnue par  $v = K^{-1}u$  et multiplié le système de gauche avec  $K$ , l'on obtient un système de la forme

$$\mathfrak{L}v = \mathfrak{A} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\mathfrak{B} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathfrak{C} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = \mathfrak{F} \quad (15)$$

où

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

et entre les coefficients ont lieu les relations suivantes :

$$\alpha_1 \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 + 1 = \alpha_1 + \alpha_2 - 4\beta_1 \beta_2, \quad (17)$$

ou bien on obtient un système où la première équation est  $\Delta v_1 = \mathfrak{F}_1$  et la seconde peut comprendre tant le  $v_1$  que le  $v_2$ . Au surplus si  $\alpha_1 = \alpha_2$  et  $\beta_1\beta_2 \neq 0$ , alors  $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$ .

II. Nous étudions par la suite la résolubilité du problème de Dirichlet relatif au système elliptique (15).

Soit  $\Omega$  un domaine du plan  $x_1Ox_2$  ayant une frontière  $\Gamma$  assez lisse. Nous cherchons la fonction vectorielle  $u(x_1, x_2) = (u_1, u_2)$  de l'espace  $W_2^2(\Omega)$  satisfaisant au système

$$\mathfrak{L}_1 u = \alpha_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2\beta_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = F_1, \quad \mathfrak{L}_2 u = 2\beta_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = F_2 \quad (18)$$

en  $\Omega$  et les conditions à la limite

$$u_1|_{\Gamma} = 0, \quad u_2|_{\Gamma} = 0 \quad (19)$$

où nous avons noté par  $W_2^2(\Omega)$  l'espace Sobolew des fonctions de carré sommables pour lesquelles il existe les dérivées généralisées d'ordre 1 et 2 de carré sommables et  $F_i \in L_2(\Omega)$ . Ici nous supposons que les coefficients du système satisfont aux conditions (17).

THÉORÈME 2. Si  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ , alors

a) Le problème  $\mathfrak{L}u = 0$  dans  $\Omega, u|_{\Gamma} = 0$  a la seule solution  $u = 0$ .

b) Le problème non-homogène  $\mathfrak{L}u = F$  dans  $\Omega, u|_{\Gamma} = 0$  a une solution pour tout  $F \in L_2(\Omega)$ .

c) Soit  $T$  un opérateur différentiel, linéaire aux coefficients constants d'ordre 1. Le problème de Dirichlet  $\mathfrak{L}u + Tu = F$  dans  $\Omega, u|_{\Gamma} = 0$  est du type Fredholm.

Démonstration. Si  $\beta_1\beta_2 \neq 0$ , alors nous multiplions la première équation de (18) avec  $|\beta_2|$  et la seconde avec  $|\beta_1|$ . Le système ainsi obtenu est fortement elliptique, car la partie symétrique de la matrice

$$\begin{pmatrix} |\beta_2|(\alpha_1 \xi_1^2 + \xi_2^2) & 2\beta_1|\beta_2| \xi_1 \xi_2 \\ 2|\beta_1|\beta_2 \xi_1 \xi_2 & |\beta_1|(\alpha_2 \xi_1^2 + \xi_2^2) \end{pmatrix}$$

est positivement définie [2]. En effet  $|\beta_2|(\alpha_1 \xi_1^2 + \xi_2^2) > 0$  et

$$\begin{vmatrix} |\beta_2|(\alpha_1 \xi_1^2 + \xi_2^2) & (\beta_1|\beta_2| + |\beta_1|\beta_2) \xi_1 \xi_2 \\ (\beta_1|\beta_2| + |\beta_1|\beta_2) \xi_1 \xi_2 & |\beta_1|(\alpha_2 \xi_1^2 + \xi_2^2) \end{vmatrix} = \beta_1\beta_2[\alpha_1\alpha_2 \xi_1^4 + \xi_2^4 + (\alpha_1\alpha_2 + 1)\xi_1^2 \xi_2^2] > 0$$

si  $\beta_2\beta_2 > 0$  et  $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$ . Ici nous avons utilisé les relations (17).

Si  $\beta_1\beta_2 < 0$ , nous avons  $\beta_1|\beta_2| + |\beta_1|\beta_2 = 0$  et le déterminant de tantôt sera égal à  $|\beta_1\beta_2|(\alpha_1 \xi_1^2 + \xi_2^2)(\alpha_2 \xi_1^2 + \xi_2^2)$  lequel est positif si  $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$ . Si  $\beta_1\beta_2 = 0$ , alors l'une des équations ne contient qu'une seule fonction inconnue. On peut supposer que la première équation est  $\Delta u_1 = F_1$ . Dans ce cas-là on voit aisément que le système

$$c\mathfrak{L}_1 u = c\Delta u_1 = cF_1, \quad \mathfrak{L}_2 u = F_2$$

est fortement elliptique, à condition que  $c$  soit une constante positive assez grande. En conclusion, dans tous les cas, après multiplication par des constantes positives, le système (18) devient un système fortement elliptique, pour lequel les affirmations a), b), c) du théorème sont connues [2].

THÉORÈME 3. Si  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 < 0$  mais  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  alors

a) Il existe au moins un domaine  $\Omega$  où le problème homogène  $\mathfrak{L}u = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  a une solution non-banale.

b) Le problème de Dirichlet  $\mathfrak{L}u = F$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  est du type Fredholm.

Démonstration. a) Soit  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 < 0$  et  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , et soit  $\Omega$  l'intérieur de l'ellipse  $x_1^2 - \alpha_1 x_2^2 - 1 = 0$ . On voit aisément que  $u_1 = x_1^2 - \alpha_1 x_2^2 - 1$ ,  $u_2 = 0$  satisfait au système (18) et aux conditions (19).

b) On sait [3] que la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Dirichlet soit de type Noether pour le système (1), est que les matrices

$$\begin{pmatrix} P_{11}(1, z_1) & P_{12}(1, z_1) \\ P_{21}(1, z_1) & P_{22}(1, z_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{11}(1, z_2) & P_{12}(1, z_2) \\ P_{21}(1, z_2) & P_{22}(1, z_2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

ne soient pas proportionnelles au cas où  $z_1 \neq z_2$  et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial \lambda_2}(1, z_1) & \frac{\partial P_{12}}{\partial \lambda_2}(1, z_1) \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial \lambda_2}(1, z_1) & \frac{\partial P_{22}}{\partial \lambda_2}(1, z_1) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (20')$$

au cas où  $z_1 = z_2$ . Ici  $P_{ij}$  sont les polynômes introduits par (2),  $z_1$  et  $z_2$ , les racine de l'équation caractéristique du système (18) se trouvant au semi-plan complexe  $\text{Im } z > 0$ . Dans notre cas  $z_1 = i$ ,  $z_2 = ki$  et les matrices mentionnées plus haut sont

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 1 & 2i\beta_1 \\ 2i\beta_2 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 - k^2 & 2i\beta_1 k \\ 2i\beta_2 k & \alpha_2 - k^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

et le déterminant (20') pour  $z_1 = i$  est égal à  $-4 - 4\beta_1\beta_2$ . Si  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  les matrices (21) ne sont pas proportionnelles. L'expression  $-4 - 4\beta_1\beta_2$  diffère de zéro si  $z_1 = z_2 = i$  ( $k = 1$ ), car au cas contraire, en utilisant les relations (17), nous aboutissons à la contradiction  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ .

Pour la démonstration intégrale de l'affirmation b) il faut encore préciser que le nombre des solutions linéairement indépendantes du problème homogène  $\mathfrak{L}u = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  coïncide avec le nombre des solutions linéairement indépendantes du problème homogène conjugué. Le système homogène conjugué est

$$\mathfrak{L}_1^* w = \alpha_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} + 2\beta_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \mathfrak{L}_2^* w = 2\beta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = 0. \quad (22)$$

Nous introduisons les variables complexes  $z_1 = x_1 + ix_2$ ,  $z_2 = x_1 + kix_2$  et les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{k}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = -\frac{1}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{i}{k-1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Le système (18) se transformera en

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + 2(\alpha_1 - k) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2} + (\alpha_1 - k^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_2^2} + 2\beta_1 i \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2} + (k+1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1 \partial z_2} + k \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} \right] &= 0 \\ 2\beta_2 i \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + (k+1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2} + k^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_2^2} \right] + (\alpha_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2} + 2(\alpha_2 - k) \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1 \partial z_2} + (\alpha_2 - k) \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Nous multiplions la première équation avec  $2i\beta_2$ , la deuxième avec  $1 - \alpha_1$  et introduisons la fonction  $v = v_1 + iv_2 = 2i\beta_2u_1 + (1 - \alpha_1)u_2$ , nous obtenons

$$\mathfrak{L}'v = \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} [(k + \alpha_2)v_1 + i(k + \alpha_1)v_2] + \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} [(1 + \alpha_2)v_1 + i(1 + \alpha_1)v_2] = 0. \quad (18')$$

Il résulte des calculs effectués que le nombre des solutions linéairement indépendantes des problèmes homogènes  $\mathfrak{L}u = 0$  dans  $\Omega$ ,  $u|_\Gamma = 0$  et  $\mathfrak{L}'v = 0$  dans  $\Omega$ ,  $v|_\Gamma = 0$  est le même. En effectuant les mêmes opérations pour le système conjugué (22) (et en prenant seulement  $\beta_2$  au lieu de  $\beta_1$ , la nouvelle fonction devenant  $W = 2i\beta_1w_1 + (1 - \alpha_1)w_2$ ) nous obtiendrons

$$\mathfrak{L}^*W = \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} [(k + \alpha_2)W_1 + i(k + \alpha_1)W_2] + \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} [(1 + \alpha_2)W_1 + i(1 + \alpha_1)W_2] = 0 \quad (22')$$

Ici aussi le nombre des solutions linéairement indépendantes des problèmes  $\mathfrak{L}^*w = 0$  dans  $\Omega$ ,  $w|_\Gamma = 0$  et  $\mathfrak{L}^*W = 0$  dans  $\Omega$ ,  $W|_\Gamma = 0$  coïncide. Toutefois les équations (18') et (22') ont la même forme, donc l'espace des solutions du problème homogène et celui du problème homogène conjugué ont la même dimension.

**THÉORÈME 4.** Le problème de Dirichlet pour le système (18) n'est pas du type Noether alors et seulement alors, si  $\alpha_1 = \alpha_2 = -k < 0$ . Dans ce cas-là le système a la forme

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \pm i(k + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = F \quad (23)$$

où  $u = u_1 + iu_2$  et  $F = F_1 + iF_2$ .

**Démonstration.** Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = -k < 0$ , alors les matrices (20) seront

$$\begin{pmatrix} -k - 1 & 2i\beta_1 \\ 2i\beta_2 & -k - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k - k^2 & 2ik\beta_1 \\ 2ik\beta_2 & -k - k^2 \end{pmatrix}$$

lesquelles sont proportionnelles. Donc le problème de Dirichlet (18), (19) n'est pas du type Noether.

De façon inverse, si les matrices (20) sont proportionnelles, il résulte aisément que  $\alpha_1 = \alpha_2 = -k < 0$ .

Pour démontrer la formule (23), nous précisons que dans le cas où  $\alpha_1 = \alpha_2$  nous avons  $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$  et à la base des relations (17)  $4\beta^2 = (k + 1)^2$ , c'est-à-dire  $2\beta = \pm(k + 1)$ . En formant la combinaison  $\mathfrak{L}_1u + i\mathfrak{L}_2u$ , l'on obtient aussitôt l'équation (23).

Nous procéderons à l'étude détaillée du problème de Dirichlet pour ce cas-là dans un autre travail.

(Manuscrit reçu le 1-er décembre 1967)

BIBLIOGRAPHIE

1. Hua Loo Keng, Wu Tze-chien, Lim Wei, *On the classification of the system of differential equations of the second order*. Scientia Sinica, XIV, no. 3. p. 461-465.
2. M. I. Visik, *O silno elliptičeskich sistemach differencialnyh uravnenij*. Mat. Sbornik (1951), 29, p. 615-676.

3. C. Kalik, P. Szilágyi, *Une condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'alternative de Fredholm dans le cas de problèmes de Dirichlet et de systèmes elliptiques*. C.R. Acad. Sc. Paris, 257, p. 2231—2233.

ASUPRA FORMELOR CANONICE PENTRU SISTEME ELIPTICE DE ORDINUL  
AL DOILEA CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

(R e z u m a t)

În prima parte a lucrării autorul arată că orice sistem eliptic, cu coeficienți constanți, de forma (1) poate fi transformat într-un sistem de formă mai simplă, în forma canonică (formulele (15), (16)). Pentru aceasta se folosește o transformare liniară a variabilelor independente, o transformare liniară a funcțiilor necunoscute și se înmulțește sistemul cu o matrice constantă.

În partea a doua se studiază rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet pentru sistemele aduse la forma canonică. Se arată că toate sistemele aduse la forma canonică, pentru care problema lui Dirichlet nu este de tip Noether, au forma (23).

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Р е з ю м е)

В первой части статьи автор показывает, что любую эллиптическую систему с постоянными коэффициентами вида (1) можно превратить в систему более простого вида, в каноническую форму (формулы 15), (16). Для этой цели используется линейное преобразование независимых переменных, линейное преобразование неизвестных функций и умножается система с постоянной матрицей.

Во второй части изучается разрешимость задачи Дирихле для систем, приведённых к канонической форме. Показано, что все системы, приведённые к канонической форме, для которых задача Дирихле не является задачей типа Нетера, имеют вид (23).

# DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR PRIN METODA IPERBOLELOR TANGENTE

de

MARTIN BALÁZS

Fie ecuația reală sau complexă  $P(x) = 0$ . G. S. Salehov [1] a studiat problema unui procedeu de iterație pentru această ecuație. Această metodă a fost generalizată de M. A. Mertvețova [2] la ecuații operaționale nelineare  $P(x) = 0$ , unde  $P(x)$  transformă elementele unui spațiu linear și normat  $X$  în elementele unui alt spațiu linear și normat  $Y$ . B. Jan k ó [3] a stabilit noi condiții de convergență pentru procedeuul dat de Salehov și Mertvețova, îmbunătățind condițiile puse de acești autori.

În lucrarea de față vom stabili teoreme referitoare la existența și unicitatea soluției ecuației complexe (sau reale)  $P(x) = 0$ , unde  $P(x)$  este o funcție de o variabilă complexă (sau reală) definită într-un domeniu convex  $D$ ; mai presupunem că  $P(x)$  are derivate pînă la ordinul trei inclusiv.

TEOREMA 1. Dacă există un  $x_0 \in D$ , astfel încît următoarele condiții sînt satisfăcute:

$$1^\circ P'(x_0) \text{ are inversă } \Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1} \text{ și } |\Gamma_0| \leq B_0;$$

$$2^\circ \left| \frac{2P'(x_0)P(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)} \right| \leq \eta_0;$$

3° Derivatele de ordinul 2 și 3 sînt mărginite în domeniul  $C(x_0, r)$ ,

$$|P''(x)| \leq M, \quad |P'''(x)| \leq N,$$

unde  $C(x_0, r)$  este un cerc în planul complex cu centrul în  $x_0$  și de rază  $r = 2\eta_0$ ;

$$4^\circ h_0 = B_0 M \eta_0 \leq \frac{1}{2};$$

$$5^\circ a_0 = \frac{N}{B_0 M^2} \leq \frac{33}{10},$$

atunci ecuația  $P(x) = 0$  are o soluție  $x^*$  în cercul  $C(x_0, r)$ , către care converge șirul aproximațiilor obținute prin formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2P'(x_n)P(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)} \quad (1)$$

unde rapiditatea convergenței este caracterizată prin inegalitatea

$$|x^* - x_n| \leq 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0$$

**Demonstrație.** Se arată că în trecerea de la  $x_0$  la  $x_1$  condițiile 1° – 5° rămân îndeplinite.

a) Deoarece  $|\Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]| = |\Gamma_0 P''(x_0 + \theta h)(x_1 - x_0)| \leq B_0 M \eta_0 = = h_0 \leq \frac{1}{2}$ , există  $H_0 = \{1 - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}$  și avem

$$|H_0| \leq \frac{1}{1 - h_0}.$$

Din identitatea evidentă  $\Gamma_1 = H_0 \Gamma_0$  rezultă că

$$|\Gamma_1| \leq \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1, \quad (2)$$

adică condiția 1° este satisfăcută pentru  $x_1$ .

b) Să considerăm următoarea funcție ajutătoare:

$$F_{u,v,w}(x) = x + \frac{P(x)}{2[P'(u)]^2 - P''(u)P(u)} [-2P'(u) + P''(u)(x - u)] - \frac{P''(u)P'''(v)(x - u)^2(x - v)^2(x - w)}{6(v - u)^2(v - w)\{2[P'(u)]^2 - P''(u)P(u)\}} \quad (3)$$

unde  $u, v, w$  sînt puncte arbitrare ( $u \neq v, v \neq w$ ) din cercul  $C(x_0, 2\eta_0)$ .

Următoarele proprietăți ale funcției  $F_{u,v,w}(x)$  se verifică imediat:

1)  $F_{x_0,v,w}(x_0) = x_1$ , pentru orice  $v, w \in C(x_0, 2\eta_0)$ ;

2)  $F_{x_0,v,x_1}(x_1) = x_1 - \frac{4[P'(x_0)]^2 P(x_1)}{\{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)\}^2}$ , pentru orice  $v \in C(x_0, 2\eta_0)$ ;

3)  $F'_{x_0,v,w}(x_0) = 0$ ;  $F''_{x_0,v,w}(x_0) = 0$ , pentru orice  $v, w \in C(x_0, 2\eta_0)$ ;

4)  $F'''_{x_0,v,w}(v) = \frac{-2P'''(v)P'(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)} + \frac{3P''(v)P''(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)}$ , pentru orice  $v, w \in C(x_0, 2\eta_0)$ ;

Considerăm formula lui Taylor pentru funcția  $F_{x_0,v,x_1}(x)$ , unde  $v$  este un punct arbitrar din  $C(x_0, 2\eta_0)$ ,

$$F_{x_0,v,x_1}(x_1) = F_{x_0,v,x_1}(x_0) + \frac{1}{6} F'''_{x_0,v,x_1}(\xi_0)(x_1 - x_0)^3, \quad (4)$$

de unde, dacă punem  $v = \xi_0$  obținem

$$\frac{P(x_1)}{P'(x_0)} \cdot \frac{2[P'(x_0)]^2}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{P'''(\xi_0)}{P'(x_0)} - \frac{3P''(\xi_0)P''(x_0)}{2[P'(x_0)]^2} \right\} (x_1 - x_0)^3,$$

sau

$$|\Gamma_0 P(x_1)| = \left| \frac{P(x_1)}{P'(x_0)} \right| \leq \frac{1}{6} \left( B_0 N + \frac{3}{2} B_0^2 M^2 \right) \eta_0^3 \quad (5)$$

deci

$$|\Gamma_1 P(x_1)| \leq \frac{h_0^2 \eta_0}{1 - h_0} \left[ \frac{N}{6B_0 M^2} + \frac{1}{4} \right] = A_1. \quad (6)$$



Din (6) rezultă

$$|x_2 - x_1| = \eta_1 \leq \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2} B_0 M A_1}. \quad (7)$$

Folosind delimitarea (7) și condiția 5° din teoremă obținem

$$\eta_1 \leq 2h_0^2 \eta_0 \leq \frac{\eta_0}{2}. \quad (8)$$

Deci condiția 2° este verificată pentru  $x_1$ .

c) Verificarea condiției 3° se face pentru cazul general, la sfârșitul demonstrației.

d) Pe baza inegalităților (8) și (2) obținem

$$h_1 \leq 4h_0^3 \leq h_0 \leq \frac{1}{2},$$

deci și condiția 4° este satisfăcută.

e) Din (2) rezultă că  $B_1 \geq B_0$  și deci urmează că

$$a_1 \leq a_0 \leq \frac{33}{10}.$$

Așadar, condițiile 1° – 5° sînt îndeplinite pentru  $x_1$ , unde numerele  $B_0$ ,  $\eta_0$ ,  $h_0$ ,  $a_0$  au fost înlocuite cu  $B_1$ ,  $\eta_1$ ,  $h_1$ ,  $a_1$ .

Cu metoda inducției matematice se obțin următoarele relații:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \leq 2B_{n-1}, \quad \eta_n \leq 2h_{n-1}^2 \cdot \eta_{n-1}, \quad h_n \leq 4h_{n-1}^3, \quad a_n = \frac{N}{B_n M^2} \leq \frac{33}{10}. \quad (9)$$

Din a doua și a treia inegalitate din (9) rezultă

$$\eta_n \leq 2^{-n} (2h_0)^{3^{n-1}} \cdot \eta_0 \quad (10)$$

Deoarece  $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta_n$ , din inegalitatea (10) obținem

$$|x_{n+p} - x_n| \leq 2^{1-n} (2h_0)^{3^{n-1}} (1 - 2^{-p}) \eta_0, \quad (11)$$

de unde rezultă că există limita  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Dacă în (11) trecem la limita cînd  $p \rightarrow +\infty$ , obținem inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenței.

În sfârșit se demonstrează că  $x_n$  și  $\xi_{n-1}$  pentru orice  $n$  aparțin cercului  $C(x_0, 2\eta_0)$ ;  $\xi_{n-1} = x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1})$ ,  $0 < \theta < 1$ .

$$\begin{aligned} |x_0 - x_n| &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \leq \\ &\leq \eta_0 + \frac{\eta_0}{2} + \dots + \frac{\eta_0}{2^n} + \dots = 2\eta_0 \end{aligned}$$

și deoarece  $|\xi_{n-1} - x_{n-1}| \leq |x_n - x_{n-1}|$ , avem

$$|x_0 - \xi_{n-1}| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - \xi_{n-1}| \leq 2\eta_0.$$

În continuare arătăm că  $x^*$  este soluția ecuației  $P(x) = 0$ . În adevăr, din relația (5) avem

$$|P(x_1)| \leq \frac{4}{5} \frac{h_0^2}{B_0} \eta_0 \quad (5a)$$

și în general

$$|P(x_n)| \leq \frac{4}{5} \frac{h_{n-1}^2}{B_{n-1}} \eta_{n-1} \quad (5b)$$

Din relațiile (5a) și (5b) obținem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P(x_n)| = 0$ , de unde pe baza continuității lui  $P(x)$  avem  $P(x^*) = 0$ .

*Observație.* Menționăm că  $a_0 \leq \frac{33}{10}$  este mai puțin restrictivă decât condiția  $\rho_0 \leq 4$  (vezi lucrarea [3]), sau condiția  $R_0 \leq 9$  (vezi lucrarea [1]).

**TEOREMA 2.** Fie îndeplinite următoarele condiții :

1°  $|\Gamma(x)| \leq B < +\infty$  pentru orice  $x$  din cercul  $C(x_0, K\eta) : |x - x_0| \leq K\eta$ , din planul complex, unde s-a notat  $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$  și  $K = \sum_{i=0}^{\infty} (h \cdot f)^{3^i - 1}$ ;

2° Avem delimitarea  $|x_1 - x_0| \leq \eta < +\infty$ ;

3° Derivatele de ordinul 2 și 3 sînt mărginite în  $C(x_0, K\eta) : |P''(x)| \leq M$ ,  $f|P'''(x)| \leq N$ ;

4° Sînt satisfăcute inegalitățile  $h = B\eta M < 2$  și  $h \cdot f < 1$ , unde am notat  $a = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left( \frac{N}{6BM^2} + \frac{1}{4} \right)$ .

În acest caz ecuația  $P(x) = 0$  are o soluție  $x^* \in C(x_0, K\eta)$  și șirul aproximațiilor succesive calculat cu ajutorul formulei (1) tinde către  $x^*$ . Rapiditatea convergenței este caracterizată de inegalitatea  $|x^* - x_n| \leq K\eta(hf)^{3^n - 1}$ .

Teorema se demonstrează analog ca în cazul precedent.

*Observație.* Menționăm că  $f$  este mai mic decât  $f$ -ul corespunzător din lucrarea [3].

**TEOREMA 3.** Dacă condițiile 1° – 5° ale teoremei 1 sînt satisfăcute și ecuația  $P(x) = 0$  are soluție în cercul  $C\left(x_0, \frac{3}{2} \eta_0\right)$ , atunci are o singură soluție, egală cu limita șirului construit prin formula (1).

*Demonstrație.* Fie  $\tau$  o soluție a ecuației  $P(x) = 0$  din cercul  $C\left(x_0, \frac{3}{2} \eta_0\right)$ . Avem în mod evident  $F_{u,v,\tau}(\tau) = \tau$  pentru orice  $u, v \in C(x_0, 2\eta_0)$ .

Aplicînd formula lui Taylor la funcția  $F_{x_n,v,\tau}(x)$  obținem

$$F_{x_n,v,\tau}(\tau) = F_{x_n,v,\tau}(x_n) + \frac{1}{6} F_{x_n,v,\tau}'''(\xi_n)(\tau - x_n)^3,$$

unde  $v$  este un punct arbitrar din  $C(x_0, 2\eta_0)$  și  $\bar{\xi}_n = x_n + \bar{\theta}(\tau - x_n) \in C(x_0, 2\eta_0)$ . Dacă punem  $v = \bar{\xi}$  obținem

$$\tau - x_{n+1} = \frac{1}{6} \frac{2[P'(x_n)]^2}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)} \left[ -\frac{P'''(\bar{\xi}_n)}{P'(x_n)} + \frac{3P''(\bar{\xi}_n)P''(x_n)}{2[P'(x_n)]^2} \right] (\tau - x_n)^3 \quad (12)$$

Din (12) folosind prima inegalitate din (9) obținem

$$|\tau - x_{n+1}| \leq \frac{10}{9} \frac{2^n \eta_0^2}{\eta_0^2} \left| \frac{N}{6B_n M^2} + \frac{1}{4} \right| |\tau - x_n|^3,$$

de unde pe baza condițiilor 4° și 5° avem

$$|\tau - x_{n+1}| \leq \frac{8}{9\eta_0^2} 2^{2n-2} |\tau - x_n|^3 \quad (13)$$

Presupunând că  $|\tau - x_0| \leq \eta_0$  și folosind inegalitatea (13) se poate demonstra ușor prin metoda inducției matematice următoarea inegalitate:

$$|\tau - x_{n+1}| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \eta_0 \cdot 2^{-\frac{2n+1}{2}} \left(\frac{2\rho}{3}\right)^{3^{n+1}}.$$

Prin urmare dacă  $\rho \leq \frac{3}{2}$ , atunci  $\lim |\tau - x_{n+1}| = 0$ , adică  $\tau = x^*$ , ceea ce era de demonstrat.

*Observație.* Cercul în care am demonstrat unicitatea soluției ecuației are raza mai mare decât cercul corespunzător din lucrarea [1] sau [2].

(Intrat în redacție la 5 aprilie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Salehov G. S., *O shodimosti professa kasatelnih ghiperbol*. DAN SSSR, **88**, 4, 525–528 (1952).
2. Mertvețova M. A., *Analog professa kasatelnih ghiperbol dlea obșcih funkționalnih uravnenii*. DAN SSSR, **88**, 4, 611–614 (1953).
3. B. Jankó, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale nelineare prin metoda iperbolelor tangente generalizate*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **2**, XIV, 265–271 (1963).

#### О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

(Резюме)

Изучается решение уравнений  $P(x) = 0$  и единство решения методом касательных гипербол. Устанавливаются новые условия существования решения, соответственно сходимости последовательности, построенной Г. С. Салеховым. Дана затем одна теорема единства.

#### SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS PAR LA MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES

(Résumé)

L'auteur étudie la résolution des équations  $P(x) = 0$  et l'unicité de la solution par la méthode des hyperboles tangentes. Il établit de nouvelles conditions d'existence de la solution, ainsi que de convergence de la séquence construite par G. S. Salehov. On donne enfin un théorème d'unicité.



## ASUPRA UNOR FORMULE DE CUBATURĂ CU NODURI FIXE

de

GH. COMAN

Fie  $KWL_2(0, 1; 0, 1)$  mulțimea funcțiilor  $f(x, y)$  definite pe domeniul  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ , absolut continue pe acest domeniu și satisfăcând condițiile  $f(x, 0) = 0$ ,  $f(0, y) = 0$ ,  $\|f''_{xy}\|_{L_1} \leq K$ .

Se consideră formula de cubatură

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} f(x_i, y_j) + R_{m,n}(f), \quad (1)$$

unde  $f \in KWL_2(0, 1; 0, 1)$ ,  $C_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ;  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) sînt coeficienții, iar  $M(x_i, y_j)$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ;  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) sînt nodurile formulei, despre care presupunem că sînt fixate, coordonatele lor alegîndu-se astfel:

$$x_i = \frac{2i+2}{2m+1}, \quad y_j = \frac{2j+2}{2n+1} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2)$$

Fie

$$R_{m,n} = \sup_{f \in KWL_2(0, 1; 0, 1)} |R_{m,n}(f)|. \quad (3)$$

În lucrările [1] și [2] au fost studiate cele mai bune formule de cuadratură cu noduri fixe. În nota de față se pune problema studiului celor mai bune formule de cubatură (1) cu nodurile  $M(x_i, y_j)$  avînd coordonatele (2), adică a determinării coeficienților  $C_{ij}$  astfel încît restul  $R_{m,n}$  să ia valoarea minimă.

Folosind identitatea

$$f(x, y) = \iint_D f''_{uv}(u, v) E(x-u, y-v) du dv$$

unde

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } M(x, y) \in D_1 = \{0 < x \leq 1; 0 < y \leq 1\} \\ 0 & \text{dacă } M(x, y) \in \mathbb{C}(D_1) \end{cases},$$

formula (1) devine

$$\iint_D f''_{uv}(u, v) \left[ (1-u)(1-v) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} E(x_i - u, y_j - v) \right] dudv = R_{m,n}(f)$$

sau

$$R_{m,n}(f) = \iint_D f''_{uv}(u, v) \Phi(u, v) dudv, \quad (4)$$

unde

$$\Phi(u, v) = (1-u)(1-v) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} E(x_i - u, y_j - v).$$

Aplicînd lui (4) inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski se obține

$$R_{m,n} \leq K \left\{ \iint_D \Phi^2(u, v) dudv \right\}^{1/2} \quad (5)$$

În felul acesta problema pusă s-a redus la determinarea coeficienților  $C_{ij}$  pentru care integrala

$$I = \iint_D \Phi_2(u, v) dudv \quad (6)$$

ia valoarea minimă.

Minimul acestei integrale este dat de sistemul de ecuații

$$I'_{C_{kl}} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1; l = 0, 1, \dots, n-1)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} \iint_D E(x_i - u, y_j - v) E(x_k - u, y_l - v) dudv = \left( x_k - \frac{x_k^2}{2} \right) \left( y_l - \frac{y_l^2}{2} \right)$$

pentru

$$(k = 0, 1, \dots, m-1; l = 0, 1, \dots, n-1)$$

sau

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m x_i \left[ \sum_{j=0}^l C_{ij} y_j + y_l \sum_{j=l+1}^{n-1} C_{ij} \right] + x_k \sum_{i=k+1}^{m-1} \left[ \sum_{j=0}^l C_{ij} y_j + y_l \sum_{j=l+1}^{n-1} C_{ij} \right] = \\ = \frac{1}{4} x_k y_l (2 - x_k) (2 - y_l). \end{aligned}$$

Ținând seamă de (2) sistemul (8) devine

$$\sum_{i=0}^k (i+1) \left[ \sum_{j=0}^l C_{ij} (j+1) + (l+1) \sum_{j=l+1}^{n-1} C_{ij} \right] + (k+1) \sum_{i=k+1}^{m-1} \left[ \sum_{j=0}^l (j+1) C_{ij} + (l+1) \sum_{j=l+1}^{n-1} C_{ij} \right] = \frac{(k+1)(l+1)(2m-k)(2n-l)}{(2m+1)(2n+1)},$$

( $k=0, 1, \dots, m-1; l=0, 1, \dots, n-1$ ),

care este un sistem de  $mn$  ecuații cu  $mn$  necunoscute:  $C_{ij}$ . Rezolvând acest sistem obținem

$$C_{ij} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} (i=0, 1, \dots, m-1; j=0, 1, \dots, n-1).$$

În felul acesta, cea mai bună formulă de cubatură cu nodurile fixe  $M(x_i, y_j)$ , având coordonatele (2), pentru mulțimea de funcții considerată, este

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+2}{2m+1}, \frac{2j+2}{2n+1}\right) + R_{m,n}(f) \tag{9}$$

Din (5) se obține

$$R_{m,n} \leq \frac{\sqrt{4(m^2 + n^2 + m + n) + 1}}{3(2m+1)(2n+1)} K.$$

(Intrat în redacție la 2 octombrie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. Doronin G. I., *K voprosu o formulah mehaniceskikh kvadratur.* „Sb. trudov Dnepropetrovskogo inj.-str. in-ta”, 1955, nr. 1-2, pp. 210-217.
2. Levin M., *O nailučiših kvadraturnih formulah s fiksirovannimi uzlamii.* „Izv. AN Estonsko SSSR” XIII, seria fiz.-matem. i tehn. nauk, 1964, nr. 2, str. 110-114.
3. Nikolskii S. M. *Kvadraturnie formulii*, Moskva, 1968.

О НЕКОТОРЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ  
(Резюме)

Изучается кубатурная формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} f(x_i, y_j) + R_{m,n}(f),$$

где  $f(x, y) \in KW_{L_1}(0,1; 0,1)$  (множество функций  $f(x, y)$ , определяемых на области  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ , абсолютно непрерывных на этой области и удовлетворяющих условиям  $f(x, 0) = 0, (0, y) = 0, \|f''_{xy}\| \leq K$ ),  $C_{ij}$  — коэффициенты формулы, а  $M(x_i, y_j)$  — узлы формулы, которые считаются фиксированными, причём их координаты выбираются следующим образом:

$$x_i = \frac{2i+2}{2m+1}, y_j = \frac{2j+2}{2n+1} (i=0, 1, \dots, m-1; j=0, 1, \dots, n-1)$$

Пусть

$$R_{m,n} = \sup_{f \in KW_2(0,1; 0,1)} |R_{m,n}(f)|.$$

Ставится проблема определения коэффициентов  $C_{ij}$  так, чтобы  $R_{m,n}$  принимало минимальное значение.

Получается

$$C_{ij} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n-1),$$

a

$$R_{m,n} \leq \frac{\sqrt{4(m^2 + n^2 + m + n) + 1}}{3(2m+1)(2n+1)} K.$$

### SUR DES FORMULES DE CUBATURE A NOEUDS FIXES

(R é s u m é)

On étudie la formule de cubature

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij} f(x_i, y_j) + R_{m,n}(f),$$

où  $f(x, y) \in KW_{L_2}(0,1; 0,1)$  (ensemble des fonctions  $f(x, y)$  définies sur le domaine  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ , absolument continues sur ce domaine et satisfaisant aux conditions  $f(x, 0) = 0, f(0, y) = 0, \|f''_{yy}\|_{L_2} \leq K$ ); où  $C_{ij}$  sont les coefficients de la formule, et  $M(x_i, y_j)$  sont les noeuds de la formule, qu'on suppose être fixés, leurs coordonnées étant choisies comme suit:

$$x_i = \frac{2i+2}{2m+1}, y_j = \frac{2j+2}{2n+1} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n-1)$$

Soit

$$R_{m,n} = \sup_{f \in KW_{L_2}(0,1; 0,1)} |R_{m,n}(f)|.$$

Le problème se pose de la détermination des coefficients  $C_{ij}$  de façon que  $R_{m,n}$  ait la valeur minima.

On obtient

$$C_{ij} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n-1)$$

et

$$R_{m,n} \leq \frac{\sqrt{4(m^2 + mn^2 + m + n) + 1}}{3(2m+1)(2n+1)} K.$$



# DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE PRIN METODA LUI CEBIȘEV (II)

de

B. JANKÓ și G. GOLDNER

În lucrarea de față se dau unele teoreme de existență a soluției ecuației operaționale  $P(x) = 0$ . Se arată că șirul aproximațiilor obținute prin metoda lui Cebîșev dată de algoritmul:

$$(C) \quad x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2$$

converge către o soluție a ecuației. Teoremele 1 și 2 din lucrarea de față generalizează teoremele din [1], lărgind clasa ecuațiilor pentru care metoda lui Cebîșev se poate aplica, deoarece elimină condiția de mărginire a operatorului  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ .

Fie

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

$P(x)$  neliniară, definită într-un domeniu  $S$  convex din  $X$ , spațiu Banach, cu valori în  $Y$  de același tip.

$P(x)$  este continuă și admite derivate tip Fréchet pînă la ordinul 3 inclusiv. Metoda lui Cebîșev e dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2 \quad (2)$$

unde

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

$x_0$  se alege în  $S$  astfel ca să satisfacă condițiile 1°–5° din teorema 1, iar  $x_i \in X$  rezultă din algoritmul.

**TEOREMA 1.** *Dacă pentru  $x_0$  sînt satisfăcute următoarele condiții:*

1° *există*  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$

2°  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$

3°  $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \tilde{M}$  și  $\|\Gamma_0 P'''(x)\| \leq \tilde{K}$

$$4^\circ 0 < \tilde{h}_0 = \tilde{M}\eta_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$5^\circ \tilde{E}_0 \leq 2$$

$$\text{unde } \tilde{E}_0^2 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{4}\right) + \frac{\tilde{K}}{6\tilde{M}^2} \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{2}\right)^3}{\tilde{H}_0^2} \quad \text{și } \tilde{H}_0 = 1 - \tilde{h}_0 \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{2}\right)$$

atunci pentru ecuația (1) există o soluție

$$x^* \in S \left( x_0, \frac{\eta_0}{h_0} \right)$$

care este limita aproximațiilor succesive  $x_n$  obținute prin algoritmul (2). Rapiditatea convergenței e caracterizată prin delimitarea:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{\tilde{h}_0} \tilde{H}_0^n (\tilde{E}_0 \tilde{h}_0)^{3^{n-1}} \eta_0$$

*Demonstrație.* Considerăm ecuația:

$$\tilde{P}(x) = 0 \quad \text{unde} \quad (1')$$

$$\tilde{P}(x) = \Gamma_0 P(x) \quad (4)$$

a) Arătăm că ecuația (1') este echivalentă cu (1).

Într-adevăr, fie  $x^*$  o soluție a ecuației (1), deci  $P(x^*) = 0$ . Atunci pe baza liniarității lui  $\Gamma_0$

$$\Gamma_0 P(x^*) = 0$$

Reciproc: fie  $\tilde{x}^*$  o soluție a ecuației (1') adică

$$\Gamma_0 P(\tilde{x}^*) = 0 \quad (1'')$$

Deoarece există inversul lui  $\Gamma_0$  și anume  $P'(x_0)$ , aplicînd pe  $P'(x_0)$  lui (1'') obținem:

$$P(\tilde{x}^*) = 0$$

deci  $\tilde{x}^*$  este soluție a ecuației (1), deci afirmația e demonstrată.

b) Arătăm că pornind de la o aproximație inițială  $x_0$ , aplicînd algoritmul lui Cebîșev la rezolvarea ecuației (1') obținem aceleași aproximații  $x_n$  ca și prin aplicarea algoritmului la ecuația (1).

Demonstrăm prin inducție matematică: pentru  $n = 0$

$$\tilde{x}_1 = x_0 - \tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}_0 - \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}_0'' [\tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}_0]^2$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = [\tilde{P}_0']^{-1} = [(\Gamma_0 P_0)']^{-1} = [\Gamma_0 P_0']^{-1} = I$$

$$\tilde{P}_0'' = \Gamma_0 P_0''$$

$$\tilde{x}_1 = x_0 - \Gamma_0 P_0 - \frac{1}{2} \Gamma_0 P_0'' [\Gamma_0 P_0]^2 = x_1$$

mai departe

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_n \tilde{P}(x_n) &= \{[\tilde{P}(x_n)]'\}^{-1} \cdot \tilde{P}(x_n) = [\Gamma_0 P'(x_n)]^{-1} \cdot \Gamma_0 P(x_n) = \\ &= [P'(x_n)]^{-1} \cdot \Gamma_0 \Gamma_0^{-1} P(x_n) = \Gamma_n P(x_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_n \tilde{P}''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2 &= -\frac{1}{2} [\Gamma_0 P'(x_n)]^{-1} \Gamma_0 P''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2\end{aligned}$$

Presupunînd  $\tilde{x}_n = x_n$  rezultă  $\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1}$ .

c) Arătăm că  $\tilde{P}(x)$  satisface condițiile teoremei 1 din [1].

$\alpha$ ) Există  $\tilde{\Gamma}_0 = [\tilde{P}'(x_0)]^{-1}$  și are loc delimitarea:  $\|\tilde{\Gamma}_0\| \leq \tilde{B}_0$ . În adevăr, din demonstrația de la punctul b) rezultă că există  $\tilde{\Gamma}_0$  și  $\|\tilde{\Gamma}_0\| = 1$ , adică  $\tilde{B}_0 = 1$ , deci condiția 1 a teoremei 1 din [1] e îndeplinită.

$\beta$ ) Are loc inegalitatea  $\|\tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}(x_0)\| \leq \tilde{\eta}_0$ , adică e îndeplinită condiția 2 a teoremei 1 din [1]. În adevăr  $\|\tilde{\Gamma}_0\| = 1$ , deci  $\|\tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}(x_0)\| \leq \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \tilde{\eta}_0$ .

$\gamma$ ) Condiția 3 a teoremei 1 din [1] e îndeplinită conform condiției 3 a prezentei teoreme, la fel condițiile 4 și 5 ale teoremei 1 din [1].

d) De aici rezultă că ecuația (1') are cel puțin o soluție  $x^* \in S\left(x_0, \frac{\tilde{\eta}_0}{\tilde{h}_0}\right)$  care este limita aproximațiilor succesive  $\{x_n\}$ .

Rapiditatea convergenței e caracterizată prin delimitarea:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{\tilde{h}_0} \tilde{H}_0^n (\tilde{E}_0 \tilde{h}_0)^{3^n - 1} \cdot \tilde{\eta}_0$$

e) Din demonstrațiile de la a, b, c, rezultă că cele scrise la punctul d sînt adevărate și pentru ecuația (1) și teorema 1 este demonstrată.

**TEOREMA 2.** Dacă pentru aproximația inițială  $x_0$  sînt satisfăcute următoarele condiții:

1° Există  $\Gamma_0$

2°  $\|\Gamma_0 P_0\| \leq \tilde{\eta}_0$

3°  $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \tilde{M}$ ;  $\|\Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'')\| \leq \tilde{N} \|x' - x''\| \tilde{\alpha}$

4°  $0 < \tilde{h}_0 = \tilde{M} \tilde{\eta}_0 \leq \frac{1}{2}$

5°  $\tilde{E}_0(\tilde{\alpha}) \leq 2$  unde

$$\tilde{E}_0(\tilde{\alpha}) = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{2}\right) + \frac{\tilde{N} \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{2}\right)^{2+\tilde{\alpha}}}{(1+\tilde{\alpha})(2+\tilde{\alpha})\tilde{M}^2} \cdot \tilde{\eta}_0^{\tilde{\alpha}-1}}{\tilde{H}_0^2} \quad \text{și} \quad \tilde{H}_0 = 1 - \tilde{h}_0 \left(1 + \frac{\tilde{h}_0}{2}\right),$$

atunci ecuația (1) admite în sfera  $S$  o soluție care este limita aproximațiilor succesive  $\{x_n\}$ . Rapiditatea convergenței se exprimă prin delimitarea

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{h_n} (\tilde{E}_0(\tilde{\alpha}) \cdot \tilde{h}_0)^{3^n - 1} \cdot \tilde{H}_0^n \cdot \tilde{\eta}_0$$

Demonstrația se face la fel ca în teorema precedentă.

(Intrat în redacție la 15 aprilie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. B. Jankó și A. Gaidici, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale prin metoda lui Cebîșev.* „St. cerc. mat.” XVIII, 8, 1966.
2. Wertheim V. A., *Ob usloviah primeneniia metoda Newtona*, DAN SSSR, 110, 5, 1956.
3. Necepurenko M. I., *O metode Cebîșeva dlia funktsionalnih uravnenii.* „Usp. mat. nauk” IX, 2(60), (1954).

#### О РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЧЕБЫШЕВА (II)

(Резюме)

Авторы изучают решение операторных уравнений  $P(x) = 0$  при помощи метода Чебышева, улучшая условия, данные в [1] для существования решения уравнения.

#### SUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES PAR LA MÉTHODE DE TCHÉBYCHEV (II)

(Résumé)

Les auteurs étudient la résolution des équations opérationnelles  $P(x) = 0$  par la méthode de Tchébychev, en améliorant les conditions données dans [1] pour l'existence de la solution de l'équation.

# UNE FORME EXPLICITE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE

par  
**I. MARUŚCIAC**

Soit la forme quadratique

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (1)$$

positive définie et la fonction convexe

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m b_i x_i + b.$$

Le problème de la programmation quadratique que nous considérons est le suivant : trouver le minimum de la fonction  $\varphi(x)$ , pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un domaine convexe fermé défini par les inégalités

$$L_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + d_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

On suppose que le domaine  $\Omega$  n'est pas vide (le système des inégalités est compatible).

On peut avoir deux cas. La solution optimale  $x^0 \in \text{int}(\Omega)$ , ou  $x^0 \in \text{fr}(\Omega)$ . Dans le premier cas nous disons que nous avons un problème de la programmation quadratique banal, parce que dans ce cas la solution du problème ne dépend pas des restrictions (2), et elle s'obtient en cherchant le minimum relatif de la fonction  $\varphi(x)$ . Dans le deuxième cas la solution optimale est atteint sur une arête de dimension  $q (0 \leq q \leq n - 1)$  de  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$L_{i_k}(x^0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

D'un autre côté, comme la forme quadratique (1) est positive définie, la fonction quadratique  $\varphi(x)$  peut être réduite à une somme de carrés. Par conséquent, nous sommes conduits au problème suivant de la programmation quadratique canonique : trouver le minimum de la fonction

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n c_k (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)^2, \quad (1')$$

où  $c_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , dans les conditions

$$L_i(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k + \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2')$$

On peut supposer ici que  $\sum |\alpha_i| \neq 0$ , parce que dans le cas contraire la solution optimale est  $x^0 = (0, 0, \dots, 0)$ .

2. Dans ce qui suit nous donnons une forme explicite pour la solution optimale du problème, en utilisant une méthode de G. Călugăreanu [1, 2], utilisée aussi par l'auteur dans un problème analogue [3], pour déterminer le polynôme d'écart minimum de zéro, dont les coefficients vérifient quelques relations linéaires données.

Ainsi, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on considère a fonction

$$\Phi(x) = F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(x)$$

let on cherche le minimum. On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^n c_k a_{ki} (a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ji} = 0,$$

ou

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} x_k + \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \lambda_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

où

$$A_{ik} = 2 \sum_{j=1}^m c_j a_{ji} a_{jk}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Si au système (3) on ajoute les relations (2) on obtient un système de  $n+m$  équations en  $x_i, \lambda_j$ .

Pour que ce système soit compatible et pour qu'il admette une solution unique il faut que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En développant le déterminant  $\Delta$  d'après les premières  $n$  lignes on a

$$\Delta = \sum_{v_1, \dots, v_m} (-1)^s \begin{vmatrix} \alpha_{1j_1} & \dots & \alpha_{mj_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1j_m} & \dots & \alpha_{mj_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{k_1 1} & \dots & A_{k_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k_{n-m} 1} & \dots & A_{k_{n-m} n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

où  $s = j_1 + j_2 + \dots + j_m + mn + \frac{m(n+1)}{2}$ .

Considérons, par exemple, le premier terme de la somme, qui correspond à  $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_m = m$ , et qui peut être écrit

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{m+1,1} & \dots & A_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix} = \\
 & = (-1)^{nm} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \sum_{j=1}^n c_j a_{j,m+1} a_{j1} & \dots & 2 \sum_{j=1}^n c_j a_{jn,m+1} a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2 \sum_{j=1}^n c_j a_{jn} a_{j1} & \dots & 2 \sum_{j=1}^n c_j a_{jn} a_{jn} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

où „en mettant en facteur les sommes”, ce terme peut être écrit

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{mn} 2^{n-m} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \sum_{v_1, \dots, v_{n-m}=1}^n c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} \begin{vmatrix} a_{v_1, m+1} a_{v_1 1} & \dots & a_{v_1, m+1} a_{v_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v_{n-m}, n} a_{v_{n-m} 1} & \dots & a_{v_{n-m}, n} a_{v_{n-m} n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix} \\
 & = (-1)^{mn} 2^{n-m} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \sum_{v_1, \dots, v_{n-m}=1}^n c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} a_{v_1, m+1} \dots a_{v_{n-m}, n} \begin{vmatrix} a_{v_1 1} & \dots & a_{v_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v_{n-m} 1} & \dots & a_{v_{n-m} n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

En permutant les indices  $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$  de toutes les manières possibles et puis en additionnant, on obtient

$$\frac{(-1)^{mn} 2^{n-m}}{(n-m)!} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \sum_{v_1, \dots, v_{n-m}=1}^n c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} \begin{vmatrix} a_{v_1, m+1} & \dots & a_{v_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v_{n-m}, m+1} & \dots & a_{v_{n-m} n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{v_1 1} & \dots & a_{v_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v_{n-m} 1} & \dots & a_{v_{n-m} n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

En procédant de la même manière avec chaque terme de la somme (5) et en observant que le dernier déterminant de tous les termes est le même et qu'il peut être mis en facteur, alors ce qu'il reste dans la parenthèse est le déterminant

$$D(v_1, v_2, \dots, v_{n-r}; \alpha) = \begin{vmatrix} a_{v_1 1} & \dots & a_{v_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v_{n-m} 1} & \dots & a_{v_{n-m} n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

multiplié par  $(-1)^m$ , développé d'après les  $m$  premières colonnes.

Ainsi le déterminant  $\Delta$  peut être écrit sous la forme

$$\Delta = \frac{(-1)^m 2^{n-m}}{(n-m)!} \sum_{v_1, \dots, v_{n-m}=1}^n c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} [D(v_1, v_2, \dots, v_{n-r}; \alpha)]^2 \quad (6)$$

Si nous considérons maintenant le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1n} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{n2} & \dots & A_{nn} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \\ \alpha_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

et si nous poursuivrons de la même manière, nous pourrons écrire

$$\Delta_1 = \frac{(-1)^m 2^{n-m}}{(n-m)!} \sum_{v_1, \dots, v_{n-m}=1}^n c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha) D^{(1)}(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)$$

où  $D^{(k)}(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)$  est le déterminant qui s'obtient de  $D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)$  en posant  $a_{v_i k} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-m$  et  $\alpha_{ik} = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ainsi nous avons, en tenant compte de (6) et (7), pour  $x_1$  l'expression

$$x_1 = \frac{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha) D^{(1)}(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)}{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} [D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)]^2}, \quad (8)$$

où  $\Sigma$  est pris pour tous les indices  $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$  de 1 à  $n$ .

Il est évident que, en général  $x_k$  peut être écrit sous la forme

$$x_k = \frac{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha) D^{(k)}(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)}{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} [D(v_1, v_2, \dots, v_{n-m}; \alpha)]^2} \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$



Si  $F(x)$  est une somme de carrés, c'est-à-dire

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

alors on a

$$x_k = \frac{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} \Delta(k_1, k_2, \dots, k_m) \Delta^{(k)}(k_1, k_2, \dots, k_m)}{\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-m}} [\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)]^2} \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

où

$$\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m) = \begin{vmatrix} \alpha_{1k_1} & \alpha_{1k_2} & \dots & \alpha_{1k_m} \\ \alpha_{2k_1} & \alpha_{2k_2} & \dots & \alpha_{2k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{mk_1} & \alpha_{mk_2} & \dots & \alpha_{mk_m} \end{vmatrix}$$

et  $\Delta^{(i)}(k_1, k_2, \dots, k_m)$  s'obtient de  $\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)$  en posant  $\alpha_{1k_j} = \alpha_1, \dots, \alpha_{mk_j} = \alpha_m$ . Les indices  $k_1, k_2, \dots, k_m$  sont les compléments des indices  $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$ , c'est-à-dire, si  $N = 1, 2, \dots, n$  et si  $v_1, v_2, \dots, v_{n-m} \in N_1$ , alors  $k_1, k_2, \dots, k_m \in N - N_1$ .

Ainsi la solution de chaque problème de la programmation quadratique est donnée par les formules (9) pour certaines  $m$  formes linéaires,  $L_{i_1}(x) = 0, \dots, L_{i_m}(x) = 0$ , où  $0 < m \leq n$ .

On remarque que la solution du problème de la programmation quadratique donnée par (9), s'obtient toujours après un nombre fini de pas.

Évidemment, si le nombre des restrictions (2') est élevé, alors l'application des formules (9) n'est pas pratique. Mais si le nombre des restrictions n'est pas élevé et si la fonction  $F(x)$  a une forme particulière, par exemple, une somme de carrés, alors l'utilisation des formules (9) est pratique, parce que dans ce cas les déterminants qui interviennent sont simples.

Supposons d'abord que  $\text{rang } \|\alpha_{ik}\| = m$ . Alors l'algorithme est le suivant : on calcule d'abord  $x_k^1, k = 1, 2, \dots, n$ , pour  $m = 1$ , correspondants à la restriction

$$L_1(x) = 0.$$

Soit  $x^1$  la solution trouvée. Si  $x^1 \in \Omega$ , c'est-à-dire  $L_i(x^1) \geq 0, i = 2, 3, \dots, m$ , alors  $x^1$  est la solution optimale. Dans le cas contraire on calcule  $x_k^2$ , correspondants à  $m = 2$  et

$$L_2(x) = 0$$

avec lesquels on poursuit de la même manière.

Si pour  $m = 1$  aucune solution  $x^h$  n'appartient à  $\Omega$ , alors on calcule  $x_k$  correspondants à  $m = 2$ , en commençant par les restrictions

$$L_1(x) = 0, L_2(x) = 0,$$

et l'on poursuit de la même manière que dans le cas  $m = 1$ . Si pour  $m = 2$  les solutions  $x^i \notin \Omega$ , alors on passe à  $m = 3$ , etc. Parce que dans ce cas  $m \leq n$ , il existe toujours un  $m$  tel que la solution correspondant à  $m : x^h \in \Omega$  et par conséquent,  $x^h$  soit la solution optimale.

Si  $\text{rang} \|\alpha_{ik}\| = r < m$ , alors on calcule la solution optimale pour chaque variété  $n - r -$  dimensionnelle, définie par  $L_i(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . La solution optimale du problème sera celle pour laquelle la fonction  $F(x)$  prend la valeur minimale-

*Exemple.* Trouver le minimum de la fonction

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$$

pour  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ , où  $\Omega$  est le domaine défini par les inégalités

$$L_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3 + 2 \geq 0$$

$$L_2(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 \geq 0$$

$$L_3(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 \geq 0.$$

1) On calcule la solution correspondante à la restriction  $L_1(x) = 0$ , d'après les formules (10). On a  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $c_3 = 2$ , et ainsi

$$\sum c_{v_1} c_{v_2} |\alpha_{i k_1}|^2 = c_1 c_2 \alpha_{13}^2 + c_1 c_3 \alpha_{12}^2 + c_2 c_3 \alpha_{12}^2 = 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5.$$

$$\Sigma^{(1)} c_{v_1} c_{v_2} \alpha_{1 k_1} \alpha_1 = c_2 c_3 \alpha_{11} \alpha_1 = 2(-1)(-2) = 4;$$

$$\Sigma^{(2)} c_{v_1} c_{v_2} \alpha_{1 k_1} \alpha_1 = c_1 c_3 \alpha_{12} \alpha_1 = 2(-1)(-2) = 4;$$

$$\Sigma^{(3)} c_{v_1} c_{v_2} \alpha_{1 k_1} \alpha_1 = c_1 c_2 \alpha_{13} \alpha_1 = 1(-1)(-2) = 2,$$

donc  $x^1 = (4/5, 4/5, 2/5)$  et  $x^1 \notin \Omega$ , parce que  $L_2(x^1) = -7/5 < 0$ .

En calculant de la même manière la solution correspondante à  $L_2(x) = 0$  et  $L_3(x) = 0$ , on trouve respectivement  $x^2 = (20/19, 10/19, 15/19)$  et  $x^3 = (3/7, -6/7, 3/7)$ , qui n'appartiennent pas à  $\Omega$ , parce que  $L_1(x^2) = -7/19 < 0$  et  $L_2(x^3) = -26/7 < 0$ .

2) Maintenant on calcule la solution correspondant à  $m = 2$ , en commençant par les restrictions  $L_1(x) = 0$ ,  $L_2(x) = 0$ .

On a

$$\sum c_{v_1} \begin{vmatrix} \alpha_{1 k_1} & \alpha_{1 k_2} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{2 k_1} & \alpha_{2 k_2} \end{vmatrix}^2 = c_1 \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 4 + 1 + 2 = 7.$$

De même on calcule  $\Sigma^{(1)} = 7$ ,  $\Sigma^{(2)} = 0$ ,  $\Sigma^{(3)} = 7$ .

Par conséquent  $x^4 = (1, 0, 1) \in \Omega$  et il résulte que  $x^4$  est la solution optimale et

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = f(x^4) = 3.$$

3. Nous donnons maintenant une application de cette méthode à la théorie des erreurs. Soit

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

une fonction réelle donnée, qui a les dérivées partielles continues dans un voisinage de  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . On calcule la valeur

$$u^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*),$$

où  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  sont des valeurs approximatives des arguments. Un des problèmes généraux de la théorie des erreurs est le suivant : étant donné  $\varepsilon > 0$ , de quelle grandeur peut on prendre les écarts des variables indépendantes  $\varepsilon_i = x_i - x_i^*$  pour que nous ayons

$$|u^* - u| < \varepsilon. \quad (11)$$

Par conséquent, il faut résoudre le problème

$$\text{Max} \min_{(i)} |\varepsilon_i| \quad (12)$$

dans les conditions (11), ce qui est un problème de la programmation mathématique. Au lieu de (12) on peut demander

$$\text{max} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2. \quad (13)$$

Mais si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a les dérivées partielles continues, alors le problème (11)–(13) peut être réduit au problème suivant : trouver

$$\text{max} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

dans les conditions

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon_i \right| < \varepsilon. \quad (14)$$

C'est-à-dire que nous avons un problème de la programmation quadratique aux restrictions linéaires. Ce problème de maximum peut être réduit à un problème de minimum pour la somme

$$\sum_{i=1}^n (M - \varepsilon_i)^2,$$

où  $M$  est un nombre positif suffisamment grand. En posant  $M - \varepsilon_i = X_i$  nous avons le problème

$$\min \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (15)$$

dans les conditions

$$L_1(X) = \sum_{i=1}^n A_i X_i + \varepsilon - A \geq 0, \quad L_2(X) = \sum_{i=1}^n (-A_i) X_i + \varepsilon + A \geq 0, \quad (16)$$

où

$$A = M \sum_{i=1}^n A_i.$$

On voit que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ -A_1 & -A_2 & \dots & -A_n \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc il faut résoudre deux problèmes d'optimum et après comparer les solutions.

En prenant la première restriction  $L_1(X) = 0$ , on a

$$\sum c_{v_1} \dots c_{v_{n-1}} A_i^2 = \sum_{i=1}^n A_i^2, \quad \sum^{(k)} c_{v_1} \dots c_{v_{n-1}} A_1(A - \varepsilon) = A_k(A - \varepsilon).$$

Donc

$$X_k^{(1)} = \frac{(A - \varepsilon)A_k}{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

De manière analogue on calcule la solution correspondant à la restriction  $L_2(X) = 0$ :

$$X_k^{(2)} = \frac{(A + \varepsilon)A_k}{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Comme

$$\sum_{k=1}^n [X_k^{(2)}]^2 > \sum_{k=1}^n [X_k^{(1)}]^2,$$

il résulte que la solution optimale est celle de (17). Par conséquent, les écarts maximaux  $\varepsilon_k$  des variables indépendantes sont donnés par les formules

$$\varepsilon_k = M - \frac{(A - \varepsilon)A_k}{\sum_{i=1}^n A_i^2}.$$

(Manuscrit reçu le 8 décembre 1967)

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1 G. Călugăreanu, *Asupra polinoamelor lui Cebîșev ale mulțimilor mărginite și închise*. Bul. șt. seria mat., fiz., chim., II, nr. 1, 1950, pp. 7—15.
- 2 G. Călugăreanu, *Despre polinoamele lui Cebîșev ale mulțimilor finite de puncte din plan* Studia Univ. V. Babeș et Bolyai, III, nr. 3, seria I, fasc. mat., 1959, pp. 25—28.
- 3 I. Marușciac, *Polinoame de abatere minimă de la zero pe o mulțime compactă din planul complex, ai căror coeficienți verifică mai multe relații liniare*. Studii și cerc. matem. (Cluj), 2, XIV, 1963, pp. 301—311.
- 4 I. Marușciac et M. Rădulescu, *Un algorithme pour résoudre le problème de la programmation quadratique*. Mathematica, 7 (30), 2, 1965, pp. 287—296.

#### ЯВНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Резюме)

Рассматривается задача квадратичного программирования (1') — (2') и даётся явная форма (9) её решения. Показано затем как можно использовать формулы (9) или (10) для решения одной задачи квадратичного программирования, в которой ограничения содержат и неравенства. В заключение даётся применение этого алгоритма для решения одной общей задачи теории погрешностей

# ASUPRA RESTULUI UNOR FORMULE DE CUADRATURĂ DE TIP GAUSS-CHRISTOFFEL,

de

PARASCHIVA PAVEL

1. Se consideră integrala definită

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \quad (1)$$

unde  $p(x)$  este o funcție continuă în intervalul  $[a, b]$  și pozitivă în intervalul  $(a, b)$ , iar  $f(x)$  este o funcție de clasa  $C^N[\alpha, \beta]$  și  $N$  fiind un număr ce se va preciza mai jos.

În cele ce urmează se studiază formulele de cuadratură

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} f^{(j)}(a_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} B_i^{(j)} f^{(j)}(x_i) + R \quad (2)$$

unde  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sînt noduri date, multiple cu ordinele de multiplicitate, respectiv  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  iar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt noduri multiple cu ordinele de multiplicitate respectiv  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , noduri ce se determină astfel încît gradul de exactitate al formulei să fie  $N - 1$ , unde

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + r_1 + r_2 + \dots + r_n + n. \quad (3)$$

Aceste formule se vor studia în ipoteza că nodurile date  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , sînt supuse condiției :

$$S(x) = A \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \text{ pentru } x \in (a, b) \quad (4)$$

unde  $A$  este o constantă.

Formulele de cuadratură (2) au mai fost studiate de D. D. Stancu [9] ele constituind o generalizare a formulei clasice de cuadratură a lui Gauss.

D. V. Ionescu [4] a studiat formulele de cuadratură (2) în cazul cînd nodurile  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sînt simple și exterioare intervalului de integrare, iar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt noduri duble.

În această lucrare se studiază formulele de cuadratură (2) folosind metoda descrisă de D. V. Ionescu [3] și [4].

**2. TEOREMA 1.** *Formulele de cuadratură (1) cu gradul de exactitate  $N-1$ , pot exista numai dacă  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sînt numere impare.*

Făcînd un raționament asemănător cu cel dat de T. Popoviciu [7] să presupunem că  $r_i, r_{i+1}, \dots, r_n$  sînt numere pare, iar  $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}$  sînt numere impare ( $1 < i$ ). Fie

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{r_i} \quad (5)$$

Înlocuind în formula (1)  $f(x)$  prin  $P(x)S(x)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})$  obținem

$$\int_a^b p(x)P(x)S(x)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) dx = 0$$

Această egalitate nu este posibilă, funcția de sub semnul integralei fiind pozitivă. Contradicția demonstrează teorema.

**3.** Pentru simplificarea expunerii vom presupune în cele ce urmează că nodurile  $a_1, a_2, \dots, a_n$  date, sînt situate în afara intervalului de integrare, astfel:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_q < a, \quad b < a_{q+1} < \dots < a_p \quad \text{unde } 0 \leq q \leq p \quad (6)$$

La intervalele  $[a_1, a_2], \dots, [a_q, a], [a, x_1], \dots, [x_n, b], [b, a_{q+1}], \dots, [a_{p-1}, a_p]$  atașăm funcțiile  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1}, \dots, \varphi_{q+n+1}, \varphi_{q+n+2}, \dots, \varphi_{p+n+1}$  soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(N)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i = 1, 2, \dots, q \\ p(x) & \text{pentru } i = q + 1, \dots, q + n + 1 \\ 0 & \text{pentru } i = q + n + 2, \dots, p + n + 1 \end{cases} \quad (7)$$

care satisfac condițiile la limită

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_1) = 0, \quad \varphi_1'(a_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_1^{(N-\alpha_1-1)}(a_1) = 0 \\ \varphi_1(a_2) = \varphi_2(a_2), \quad \varphi_1'(a_2) = \varphi_2'(a_2), \quad \dots, \quad \varphi_1^{(N-\alpha_2-1)}(a_2) = \varphi_2^{(N-\alpha_2-1)}(a_2) \\ \varphi_{q-1}(a_q) = \varphi_q(a_q), \quad \varphi_{q-1}'(a_q) = \varphi_q'(a_q), \quad \dots, \quad \varphi_{q-1}^{(N-\alpha_q-1)}(a_q) = \varphi_q^{(N-\alpha_q-1)}(a_q) \\ \varphi_q(a) = \varphi_{q+1}(a), \quad \varphi_q'(a) = \varphi_{q+1}'(a), \quad \dots, \quad \varphi_q^{(N-1)}(a) = \varphi_{q+1}^{(N-1)}(a) \\ \varphi_{q+1}(x_1) = \varphi_{q+2}(x_1), \quad \varphi_{q+1}'(x_1) = \varphi_{q+2}'(x_1), \quad \dots, \quad \varphi_{q+1}^{(N-r_1-1)}(x_1) = \varphi_{q+2}^{(N-r_1-1)}(x_1) \\ \varphi_{q+n}(x_n) = \varphi_{q+n+1}(x_n), \quad \varphi_{q+n}'(x_n) = \varphi_{q+n+1}'(x_n), \quad \dots, \quad \varphi_{q+n}^{(N-r_n-1)}(x_n) = \varphi_{q+n+1}^{(N-r_n-1)}(x_n) \\ \varphi_{q+n+1}(b) = \varphi_{q+n+2}(b), \quad \varphi_{q+n+1}'(b) = \varphi_{q+n+2}'(b), \quad \dots, \quad \varphi_{q+n+1}^{(N-1)}(b) = \varphi_{q+n+2}^{(N-1)}(b) \\ \varphi_{q+n+2}(a_{q+1}) = \varphi_{q+n+3}(a_{q+1}), \quad \varphi_{q+n+2}'(a_{q+1}) = \varphi_{q+n+3}'(a_{q+1}), \quad \dots, \quad \varphi_{q+n+2}^{(N-\alpha_{q+1}-1)}(a_{q+1}) = \\ = \varphi_{q+n+3}^{(N-\alpha_{q+1}-1)}(a_{q+1}) \\ \dots \\ \varphi_{p+n+1}(a_p) = 0, \quad \varphi_{p+n+1}'(a_p) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{p+n+1}^{(N-\alpha_p-1)}(a_p) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

4. Soluția sistemului de ecuații diferențiale (7) cu condițiile la limită (8) este

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= - \sum_{j=0}^{\alpha_1-1} \lambda_j^{(1)} \frac{(x-a_1)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 \varphi_2(x) &= - \sum_{j=0}^{\alpha_1-1} \lambda_j^{(1)} \frac{(x-a_1)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} - \sum_{j=2}^{\alpha_2-1} \lambda_j^{(2)} \frac{(x-a_2)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 &\dots \\
 \varphi_q(x) &= - \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_j^{(i)} \frac{(x-a_i)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 \varphi_{q+1} &= \int_a^x \frac{(x-s)^{N-1}}{(N-1)!} \dot{p}(s) ds - \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_j^{(i)} \frac{(x-a_i)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 &\dots \\
 \varphi_{q+n+1}(x) &= \int_a^x \frac{(x-s)^{N-1}}{(N-1)!} \dot{p}(s) ds - \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_j^{(i)} \frac{(x-a_i)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} - \sum_{s=1}^n \sum_{j=0}^{r_s-1} \mu_j^{(s)} \frac{(x-x_n)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 &\dots \\
 \varphi_{q+n+2}(x) &= \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_j^{(i)} \frac{(x-a_i)^{N-j-1}}{(N-j-1)!} \\
 &\dots \\
 \varphi_{p+n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{\alpha_p-1} \lambda_j^{(p)} \frac{(x-a_p)^{N-j-1}}{(N-j-1)!}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Relațiile dintre coeficienții formulei de cuadratură (2) și coeficienții  $\lambda$  și  $\mu$  din expresiile (9) ale funcțiilor  $\varphi(x)$  sînt

$$A_i^{(j)} = (-1)^{(j)} \lambda_j^{(i)} \quad j = 0, 1, \dots, \alpha_{i-1} - 1; \quad i = 1, 2, \dots, p \tag{10}$$

$$B_s^{(j)} = (-1)^{(j)} \mu_j^{(s)} \quad i = 0, 1, \dots, r_s - 1; \quad s = 1, 2, \dots, n \tag{11}$$

Utilizînd și condițiile (8) din punctul  $x = b$ , obținem după transformări elementare, sistemul de ecuații algebrice cu necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n, A_i^{(j)}, B_s^{(j)}$

$$\begin{aligned}
 A_1^{(0)} + A_2^{(0)} + \dots + A_p^{(0)} + B_1^{(0)} + \dots + B_n^{(0)} &= \int_a^b \dot{p}(x) dx \\
 A_1^{(0)} x_1 + A_1^{(1)} + A_2^{(0)} a_2 + A_2^{(1)} + \dots + A_p^{(0)} a_p + A_p^{(1)} + B_1^{(0)} x_1 + B_1^{(1)} + \dots + B_n^{(0)} x_n + B_n^{(1)} &= \\
 &= \int_a^b \dot{p}(x) x dx \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\alpha_1-1} A_1^{(j)} \frac{a_1^{N-j-1}}{(N-j-1)!} + \dots + \sum_{j=0}^{\alpha_p-1} A_p^{(j)} \frac{a_p^{N-j-1}}{(N-j-1)!} + \sum_{j=0}^{r_1-1} B_1^{(j)} \frac{x_1^{N-j-1}}{(N-j-1)!} + \dots + \\
 + \sum_{j=0}^{r_n-1} B_n^{(j)} \frac{x_n^{N-j-1}}{(N-j-1)!} = \frac{1}{(N-1)!} \int_a^b \dot{p}(x) x^{N-1} dx
 \end{aligned}$$

Se observă că sistemul (12) este echivalent cu sistemul de ecuații ce s-ar obține dacă am scrie că formula (2) este exactă pentru  $1, x, \dots, x^{N-1}$ .

5. Pentru rezolvarea sistemului (12), scriem că formula (2) este adevărată pentru  $S(x) P(x) x^h, h = 0, 1, \dots, n-1$  și obținem sistemul de ecuații cu necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\int_a^b p(x) S(x) P(x) x^h dx = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

D. D. S t a n c u [9] a arătat că acest sistem are cel puțin o soluție compusă din  $n$  numere reale distincte și situate în interiorul intervalului  $(a, b)$

În cazul când ordinele de multiplicitate ale nodurilor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt egale între ele, P. T u r a n [10] a arătat pe baza unui rezultat al lui D. J a c k s o n [5] că sistemul de ecuații (13) are soluție unică.

Coeficienții (10) și (11) se determină din aproape în aproape înlocuind pe rînd  $f(x)$  cu

$$S(x) (x - x_1)^j \dots (x - x_n)^j x^h, \quad h = 0, 1, \dots, n-1. \quad (14)$$

respectiv cu

$$P_n(x) (x - a_1)^j \dots (x - a_p)^j x^h \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \quad (15)$$

6. Restul formulei de cuadratură (2) este

$$R = (-1)^N \int_{a_1}^{a_p} \varphi(x) f^{(N)}(x) dx \quad (16)$$

unde funcția  $\varphi(x)$  coincide pe rînd cu funcțiile  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{p+n+1}(x)$ .

TEOREMA 2. Funcția  $\varphi(x)$  păstrează un semn constant în intervalul  $(a_1, a_p)$ .

Pentru demonstrarea acestei teoreme se folosesc rezultatele teoremelor următoare:

TEOREMA 3. Polinoamele  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x), \varphi_{p+n+1}(x), \dots, \varphi_{q+n+2}(x)$  date de formulele (9) sînt de gradul efectiv  $N-1$ .

Ideea demonstrației acestei teoreme se găsește în lucrarea lui D. V. I o n e s c u [4].

Considerăm nodurile  $a_1, a_2, \dots, a_q, a, x_1, \dots, x_n, b, a_{q+1}, \dots, a_p$  cu ordinele de multiplicitate respective  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, 0, r_1, \dots, r_n, 0, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_p$  pe care le vom nota cu  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+p+2}^*$  iar ordinele lor de multiplicitate le vom nota cu  $k_1, k_2, \dots, k_{n+p+2}$ .

Să presupunem că  $x_i$  este nodul care corespunde la cea mai mică dintre diferențele  $N - k_2 - 1, \dots, N - k_{n+p+1} - 1$ . În aceste condiții avem

TEOREMA 4. Numărul total al zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-k_i-1)}(x)$  în intervalul  $(x_1^*, x_{p+n+2}^*)$  este cel mult

$$v = N + \alpha_i - \alpha_1 - \alpha_p + 1 \text{ dacă } N - k_1 - 1 \text{ și } N - k_{p+n+2} - 1 < N - k_i - 1 \quad (\text{I})$$

$$v = N - \alpha_1 \text{ dacă } N - k_1 - 1 < N - k_i - 1 \text{ și } N - k_{n+p+2} - 1 \geq N - k_i - 1 \quad (\text{II})$$

$$v = N - \alpha_p \text{ dacă } N - k_1 - 1 \geq N - k_i - 1 \text{ și } N - k_{n+p+2} - 1 < N - k_i - 1 \quad (\text{III})$$

$$v = N - \alpha_i - 1 \text{ dacă } N - k_1 - 1 \text{ și } N - k_{n+p+2} - 1 \geq N - k_i - 1 \quad (\text{IV})$$



Demonstrația teoremei este asemănătoare cu cea dată în [3] p. 201.

Pentru a demonstra teorema 2, presupunem că funcția  $\varphi(x)$  s-ar anula într-un punct din intervalul  $(x_1^*, x_{p+n+2}^*)$ .

Pornind de la această ipoteză, pe baza teoremei lui Rolle se ajunge la concluzia că numărul zerourilor lui  $\varphi^{(N-k_i-1)}(x)$  în intervalul  $(x_1^*, x_{p+n+2}^*)$  este

$$v = N + \alpha_i - \alpha_1 - \alpha_p + 2 \text{ dacă } N - k_1 - 1 \text{ și } N - k_{p+n+2} - 1 < N - k_i - 1 \quad (\text{I}')$$

$$v = N - \alpha_1 + 1 \text{ dacă } N - k_1 - 1 < N - k_i - 1 \text{ și } N - k_{p+n+2} - 1 \geq N - k_i - 1 \quad (\text{II}')$$

$$v = N - \alpha_p + 1 \text{ dacă } N - k_1 - 1 \geq N - k_i - 1 \text{ și } N - k_{p+n+2} - 1 < N - k_i - 1 \quad (\text{III}')$$

$$v = N - \alpha_i - 1 \text{ dacă } N - k_i - 1 \text{ și } N - k_{p+n+2} - 1 \geq N - k_i - 1 \quad (\text{IV}')$$

Se observă deci că numărul zerourilor lui  $\varphi^{(N-k_i-1)}(x)$  găsit pornind de la ipoteza că  $\varphi(x)$  s-ar anula într-un punct din  $(a, b)$  depășește cu o unitate numărul real al zerourilor lui  $\varphi^{(N-k_i-1)}(x)$  dat de teorema 4. Teorema este astfel demonstrată.

7. Restul (16) poate fi scris sub forma

$$R = (-1)^N f^{(N)}(\xi) \int_{a_1}^{a_p} \varphi(x) dx; \quad \xi \in (a_1, a_p) \quad (17)$$

sau

$$|R| \leq M_N \cdot I \quad (18)$$

unde

$$M_N = \sup_{\xi \in (a_1, a_p)} |f^{(N)}(\xi)| \quad (19)$$

iar

$$I = \frac{1}{N!} \int_{a_1}^{a_p} \rho(x) (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_p)^{\alpha_p} P(x) dx \quad (20)$$

8. În același mod se pot construi formulele de cuadratură (2) dacă nodurile date  $a_1, \dots, a_p$  sînt și interioare intervalului  $(a, b)$  și supuse condiției (4). În prealabil însă trebuie rezolvat sistemul de ecuații (13) pentru a putea determina poziția nodurilor  $x_1, \dots, x_n$  în raport cu nodurile date  $a_1, a_2, \dots, a_p$ .

De asemenea, dacă extremitățile intervalului sînt considerate ca aparținînd sistemului de noduri date  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , rezultatele stabilite anterior rămîn valabile, formula de cuadratură (2) fiind o formulă de tip Gauss-Lobatto.

(Intrat în redacție la 21 septembrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. E. B. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. „Journ. f. Math.” 55 (1858), pp. 61–82.
2. F. C. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*. „Werke”, 3, pp. 163–196.
3. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, „Editura tehnică”, Acad. R.P.R., 1957.
4. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*. „Mathematica”, XXIV, (1959).
5. D. Jackson, *On Functions of Closest Approximation*. „Transactions of the American Mathematical Society” 22 (1921), pp. 117–128.

6. V. I. Krilov, *Približennoie včislenie integralov*. Moskva, 1959.
7. T. Popoviciu, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. „Studii și cercetări științifice, Iași”, 1–2 (1955), pp. 29–57.
8. J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadratur-Formeln durch bestimmte Integralen*. „Monatshefte für Mathematik und Physik” 42, (1935), p. 389–396.
9. D. D. Stancu, *Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel*. „Mathematica” 1, (24) (1959), p. 167–182.
10. P. Turán, *On the Theory of the Mechanical Quadrature*. „Acta Sci. Math. (Szeged)” 12 (1950).
11. L. Tschakaloff, *Obști kvadraturni formuli ot Gaussov tip*. „Izvestia na mat. inst. Bulg. Akad.” 1, 2 (1954) pp. 67–81.

## ОБ ОСТАТКЕ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ГАУСС-КРИСТОФФЕЛЯ (Резюме)

В работе изучаются квадратурные формулы типа Гаусс-Кристоффеля

$$(2) \quad \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} f^{(j)}(a_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} B_i^{(j)} f^{(j)}(x_i) + R,$$

где узлы  $a_1, a_2, \dots, a_p$  даны и имеют порядки кратности соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , а узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  кратные с порядками кратности  $r_1, r_2, \dots, r_n$  определяются так, чтобы степень точности формулы была  $N-1$  где  $N$  дано формулой (3).

Эти формулы были изучены и Д. Д. Станку (9) и Д. В. Ионеску (4).

В работе определяются квадратурные формулы (2) в предположении, что узлы  $a_1, a_2, \dots, a_p$  даны, таким образом, чтобы имели

$$s(x) = A \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \text{ для } x \in (a, b)$$

и что числа  $r_1, \dots, r_n$  нечётные. Решением граничной задачи (7) — (8) доказывается, что остаток формулы даётся формулой (16). Автор показывает также, что функция  $\varphi(x)$  сохраняет постоянный знак в промежутке  $(a_1, a_p)$ .

## SUR LE RESTE DE FORMULES DE QUADRATURE DU TYPE GAUSS-CHRISTOFFEL

(Résumé)

On étudie dans cet article les formules de quadrature du type Gauss-Christoffel

$$(2) \quad \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_i^{(j)} f^{(j)}(a_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i-1} B_i^{(j)} f^{(j)}(x_i) + R$$

où les noeuds  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sont donnés, multiples à ordres de multiplicité  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  et où les noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_n$  multiples à ordres de multiplicité  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sont déterminés de façon que le degré d'exactitude de la formule soit  $N-1$ , où  $N$  est donné par la formule (3).

Ces formules ont été étudiées par D. D. Stancu [9] et D. V. Ionescu [4].

L'auteur détermine les formules de quadrature (2) dans l'hypothèse où les noeuds  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sont donnés, de manière telle que

$$s(x) = A \prod_{i=0}^p (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \text{ pour } x \in (a, b)$$

et que les nombres  $r_1, \dots, r_n$  soient impairs, par la résolution d'un problème à la limite (7) — (8).

On démontre que le reste de la formule est donné par la formule (16) en montrant que la fonction  $\varphi(x)$  conserve un signe constant dans l'intervalle  $(a_1, a_p)$ .

# MIȘCAREA HIDROMAGNETICĂ NESTAȚIONARĂ CU SUȚIUNE DEASUPRA UNUI PERETE POROS PLAN VERTICAL

de

IOAN POP

**1. Introducere.** Efectul suțiuunii asupra mișcării cu convecție liberă nestaționară a unui fluid vâcos, incompresibil, deasupra unui perete poros, vertical și infinit, a fost analizat în numeroase lucrări [1], [2], [3] etc. În schimb efectul câmpului magnetic asupra convecției libere nestaționare a fost mai puțin studiat [4], [5]. Aici, ne propunem să analizăm efectul câmpului magnetic orizontal constant, asupra convecției libere nestaționare cu suțiuune a unui fluid vâcos, incompresibil și conductor electric, deasupra unui perete poros, vertical și infinit. Pentru simplificarea problemei, vom presupune că peretele este izolat electric și că toate proprietățile fizice ale fluidului ca, viscozitatea, conductivitatea electrică, permeabilitatea magnetică etc., sînt constante. De asemenea, presupunem că numărul Prandtl magnetic al fluidului este atît de mic încît curentul electric indus nu afectează câmpul magnetic aplicat, adică, câmpul magnetic aplicat este esențial neperturbat de câmpul scurgerii. În aceste ipoteze se determină câmpul vitezelor și raportul dintre frecarea pe perete în prezența și în lipsa câmpului magnetic. Rezultatele obținute se reprezintă grafic pentru diferite valori ale parametrului ce caracterizează suțiuunea.

**2. Ecuațiile de bază.** Alegînd axa  $x$  verticală și axa  $y$  perpendiculară pe ea, ecuațiile care descriu mișcarea hidromagnetică nestaționară cu suțiuune a unui fluid vâcos, incompresibil și conductor electric, deasupra unui perete vertical și infinit, în prezența unui câmp magnetic orizontal constant, sînt

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta \theta + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (4)$$

În aceste ecuații  $u$  este viteza în lungul peretelui;  $v$  — viteza de suțiuune;  $t$  — timp;  $\rho$  — densitatea;  $p$  — presiunea;  $\nu$  — coeficientul de viscozitate cinematică;  $\theta$  — diferența dintre temperatura locală și temperatura la mare distanță de perete unde

ea este constantă și egală cu  $T_\infty$ ;  $g$  — accelerația gravitațională;  $\beta$  — coeficientul de expansiune;  $B_0$  — câmpul magnetic constant, aplicat orizontal;  $\sigma$  — conducitivitatea electrică a fluidului.

Ecuatiile (1)–(4) le vom rezolva cu următoarele condiții inițiale și la limită :

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) pentru } t < 0; \\ \quad u = v = \theta = 0 \\ \text{b) pentru } t \geq 0; \\ \quad u = 0, v = -v_p(t), \theta_0 = at^n \quad \text{pentru } y = 0, \\ \quad u = \theta = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{pentru } y \rightarrow \infty, \end{array} \right\} \quad (5)$$

unde  $a$  este o constantă.

**3. Soluția problemei.** Deoarece în ecuația energiei (4) temperatura nu este afectată de câmpul magnetic aplicat, vom căuta soluția ei sub forma [4]

$$\left. \begin{array}{l} \theta(t, \eta) = at^n f(\eta), \\ v(t) = -v_p(t) = -ct, \quad -1/2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

unde  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}$  iar  $c$  este o constantă.

Înlocuind (6) în (4) rezultă ecuația

$$f'' + 2\sigma(\eta + \eta_0)f' - 4\sigma n f = 0, \quad (7)$$

$\eta_0 = cv^{-1/2}$  fiind parametrul ce caracterizează suucțiunea ( $\eta_0 > 0$ ) iar accentul notează derivarea în raport cu  $\eta$ .

Condițiile la limită ale ecuației (7) sînt

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (8)$$

Presupunînd că numărul lui Prandtl  $\sigma = 1$  (caz întîlnit des în problemele practice), soluția ecuației (7) este

$$f(\eta) = \frac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)}, \quad (9)$$

unde

$$g_n(s) = \frac{2^{1/2-n}}{\sqrt{\pi}} e^{1/2 s^2} D_{-1-2n}(s\sqrt{2}), \quad (10)$$

$D \alpha(s)$  fiind funcția cilindrului parabolic definită de ecuația [6]

$$\frac{d^2 D \alpha}{ds^2} + \left( \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s^2 \right) D \alpha = 0. \quad (11)$$

Acum, putem determina soluția ecuației (2). În acest scop presupunem că produsul  $mt$ , unde  $m = \frac{\sigma B_0^2}{\rho}$  este mic, și căutăm soluția ei sub forma [4]:

$$u(t, \eta) = 2g\gamma at^{n+1} [u_0(\eta) + (mt)u_1(\eta) + (mt)^2 u_2(\eta) + \dots]. \quad (12)$$

Înlocuind seria (12) în (2) și identificînd coeficienții aceluiași puteri ale lui  $mt$ , obținem pentru funcțiile  $u_0, u_1$  etc., sistemul de ecuații

$$\left. \begin{aligned} u_2'' + 2(\eta + \eta_0)u_2' - 4(n+1)u_2 &= -4f, \\ u_1'' + 2(\eta + \eta_0)u_1' - 4(n+2)u_1 &= 4u_0, \\ u_2'' + 2(\eta + \eta_0)u_2' - 4(n+3)u_2 &= 4u_1, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

care trebuie rezolvat cu condițiile la limită

$$u_i(0) = u_i(\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Soluția sistemului (13) este

$$\left. \begin{aligned} u_0(\eta) &= \frac{g_n(\eta + \eta_0)}{g(\eta_0)} - \frac{g_{n+1}(\eta + \eta_0)}{g_{n+1}(\eta_0)}, \\ u_1(\eta) &= \frac{g_{n+1}(\eta + \eta_0)}{g_{n+1}(\eta_0)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)} + \frac{g_{n+2}(\eta + \eta_0)}{g_{n+2}(\eta_0)} \right], \\ u_2(\eta) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{g_{n+1}(\eta + \eta_0)}{g_{n+1}(\eta_0)} - \frac{g_{n+2}(\eta + \eta_0)}{g_{n+2}(\eta_0)} \right] + \\ &+ \left[ \frac{1}{6} \frac{g_{n+2}(\eta + \eta_0)}{g_{n+2}(\eta_0)} - \frac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)} \right], \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Frecarea dintre fluid și perete este

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho g \beta \theta_0 \sqrt{\nu t} [u_0'(0) + (mt)u_1'(0) + (mt)^2u_2'(0) + \dots], \quad (16)$$

iar în lipsa cîmpului magnetic frecarea locală este

$$\tau_0 = \rho g \beta \theta_0 \sqrt{\nu t} u_0'(0). \quad (17)$$

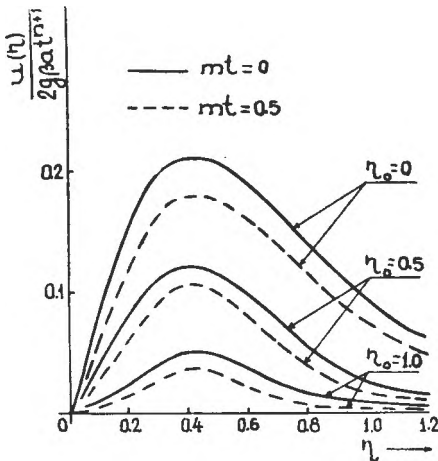


Fig. 1. Profilul vitezei adimensionale pentru  $n = 0$ .

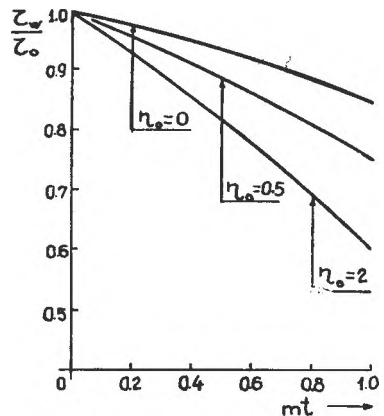


Fig. 2. Raportul frecărilor pentru  $n = 0$ .

Combinând (16) cu (17), rezultă formula

$$\frac{\bar{\sigma}_\omega}{\bar{\sigma}_0} = 1 + \frac{u'_2(0)}{u'_0(0)} (mt) + \frac{u''_2(0)}{u''_0(0)} (mt)^2 + \dots \quad (18)$$

Distribuția vitezei adimensionale  $u/At^n$  pentru  $n = 0$ ;  $mt = 0$  și  $0,5$ ;  $\eta_0 = 0$ ;  $0,5$  și  $1$  este reprezentată în fig. 1. Observăm că efectul sucțiunii este de a apropia viteza spre perete în timp ce efectul cîmpului magnetic este de a descrește această viteză. Raportul frecărilor  $\frac{\bar{\sigma}_\omega}{\bar{\sigma}_0}$  pentru  $n = 0$ ;  $\eta_0 = 0, 0,5$  și  $2$  este arătat în fig. 2. Se observă că frecarea scade cu creșterea cîmpului magnetic.

(Intrat în redacție la 2 decembrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. R. S. Nanda and V. P. Sharma, *Possible Similarity Solutions of Unsteady Free Convection Flow Past a Vertical Plate with Suction*. J. Phys. Soc. Japan, **17**, 10, 1651–1656 (1962).
2. D. Singh, *Effect of suction upon unsteady laminar free convection flow on a vertical infinite flat plate*. Appl. Sci. Res., A, **13**, 6, 437–450 (1965).
3. I. Pop, *Effect of periodic suction upon unsteady free convection flow past a vertical porous flat plate*. Rev. Sci. Techn., Méc. Appl., **12**, 1, 41–46 (1968).
4. D. Singh, *Unsteady Hydromagnetic Free Convection Flow past a Vertical Infinite Flat Plate*. J. Phys. Soc. Japan, **19**, 5, 751–755 (1964).
5. I. Pop, *On the Unsteady Hydromagnetic Free Convection Flow past a Vertical Infinite Flat Plate*. Sub tipar.
6. T. E. Whittaker and N. G. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge Univ. Press, 927.

#### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ГИДРОМАГНИТНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОДСОСОМ НАД ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ПОРИСТОЙ СТЕНОЙ

(Резюме)

В работе рассматривается эффект постоянного горизонтального магнитного поля на нестационарную свободную конвекцию с подсосом несжимаемой и электропроводящей вязкой жидкости над вертикальной и бесконечной пористой стеной.

Поле скоростей и сила трения на стене определяются посредством разложений по степеням гидромагнитного параметра.

Установлено, что эффект магнитного поля состоит в убывании скорости, в то время как эффект подсоса состоит в приближении скорости к стене.

#### LE MOUVEMENT HYDROMAGNÉTIQUE NON STATIONNAIRE AVEC SUCCION AU-DESSUS D'UNE PAROI POREUSE PLANE ET VERTICALE

(Résumé)

On examine l'effet du champ magnétique horizontal constant sur la convection libre non stationnaire avec succion d'un fluide visqueux, incompressible et conducteur électrique, au-dessus d'une paroi poreuse, verticale et infinie.

Le champ des vitesses et la force de frottement sur la paroi se déterminent par des développements en série d'après les puissances du paramètre hydromagnétique.

On constate que l'effet du champ magnétique est de diminuer la vitesse, alors que l'effet de la succion est de rapprocher la vitesse de la paroi.

# DETERMINAREA ELEMENTELOR FOTOMETRICE ALE VARIABILEI RV COMAE BERENICES

de  
IOAN MIHOC

Variabilitatea steii *RV Comae Berenices* a fost descoperită de W. Baade [1] la Bergerdorf în anul 1921, care studiind variabilele din roiul M 53 a dat peste încă șapte stele variabile la o distanță mai mare de 34 minute de arc, dintre care, cinci sînt stele variabile de tipul *RR Lyrae*. Printre aceste cinci stele variabile de tipul *RR Lyrae* se găsește și steaua variabilă *RV Comae Berenices*.

Mai tîrziu, în anul 1933, tot la Bergerdorf, E. Grosse [2] folosind stele de comparație stabilite de W. Baade, urmărește această variabilă, stabilește 19 maxime și dă următoarele elemente ale variației de lumină :

$$\text{Max. hel.} = \text{J.D. } 2423113;393 + 0;3499545.E \quad (1)$$

Din curba medie de lumină obținută de E. Grosse rezultă :

$$m_{\max} = 13^m,80, m_{\min} = 14^m,21, m_{\text{med}} = 14^m,00,$$

$$\text{amplitudine} = m_{\min} - m_{\max} = 0^m,41,$$

precum și forma curbei de lumină de tipul *RR Lyrae*, subclasa *RRc*. Tot E. Grosse determină și coordonatele ecuatoriale ale variabilei pentru anul 1900,0 și anume :

$$\alpha_{1900,0} = 13^h 13^m 01^s,$$

$$\delta_{1900,0} = +19^\circ 13'.$$

Pe baza planului de colaborare cu Observatorul astronomic din Odesa și a indicațiilor primite din partea pro-

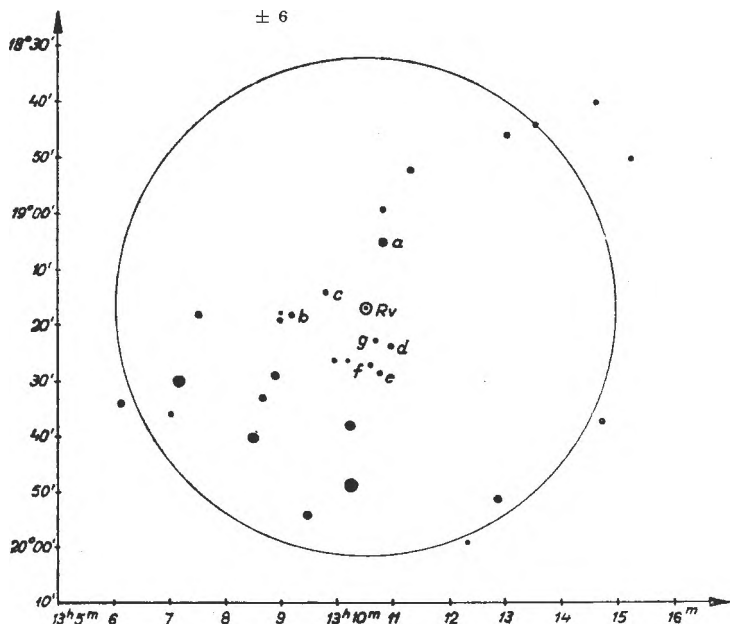


Fig. 1

fesorului V. P. Tesevici, steaua variabilă *RV Comae Berenices* a fost inclusă în planul de observații al Observatorului astronomic din Cluj. Astfel, în intervalul de la 14.V.1963 pînă la 7.IV.1965 s-au obținut 242 de expuneri de cîte 10 minute, cu ajutorul reflectorului de tip Newton ( $D = 50$  cm,  $F = 250$  cm) pe plăci Guilleminot. Observațiile au fost efectuate de colectivul Observatorului (Popa 36%, Ureche 21%, Todoran 19%, Mihoc 19%, Oproiu 5%).

Pentru determinarea magnitudinilor fotografice ale stelelor de comparație, notate în fig. 1 prin a, b, c, d, e, f, g, s-au utilizat șapte plăci Guilleminot pe care s-a fotografiat, cu o expunere de 10 minute, atît Secvența Polară de Nord cît și regiunea variabilei *RV Comae Berenices*. Imaginile stelelor de comparație le-am măsurat pe plăci cu ajutorul unui microfotometru fotoelectric MΦ-2 modificat. Cu ajutorul a 19 stele standard din Secvența Polară de Nord s-au trasat curbele caracteristice ale plăcilor; eroarea de seară s-a eliminat prin medierea rezultatelor. Magnitudinile fotografice determinate în acest mod sînt date în tabelul 1.

Tabel 1

Steaua	$m_{pg}$	Eroarea medie pătatică
a	13,02	$\pm 0,054$
b	14,08	$\pm 0,070$
c	14,13	0,044
d	14,24	0,041
e	14,28	0,062
f	14,70	0,078
g	14,80	0,107

Utilizînd același microfotometru fotoelectric MΦ-2, am măsurat înnegririle imaginilor variabilei determinînd magnitudinile fotografice pe baza curbelor caracteristice ale plăcilor construite cu ajutorul stelelor de comparație de mai sus. Magnitudinile fotografice corespunzătoare celor 242 de observații precum și momentele corespunzătoare ale variabilei *RV Comae Berenices* sînt date în tabelul 7.

Grupînd observațiile după fazele calculate cu ajutorul elementelor (1) s-au format puncte normale, și anume: 25 puncte normale din 121 de observații obținute în anul 1964 și 17 puncte normale din observațiile, în număr de 82, ale anului 1965. Aceste puncte normale sînt date în tabelele 2 și 3 în care prima

coloană reprezintă numărul de ordine al punctului normal, a doua faza  $\varphi$ , a treia magnitudinea fotografică  $m_{pg}$ , iar a patra numărul de observații individuale

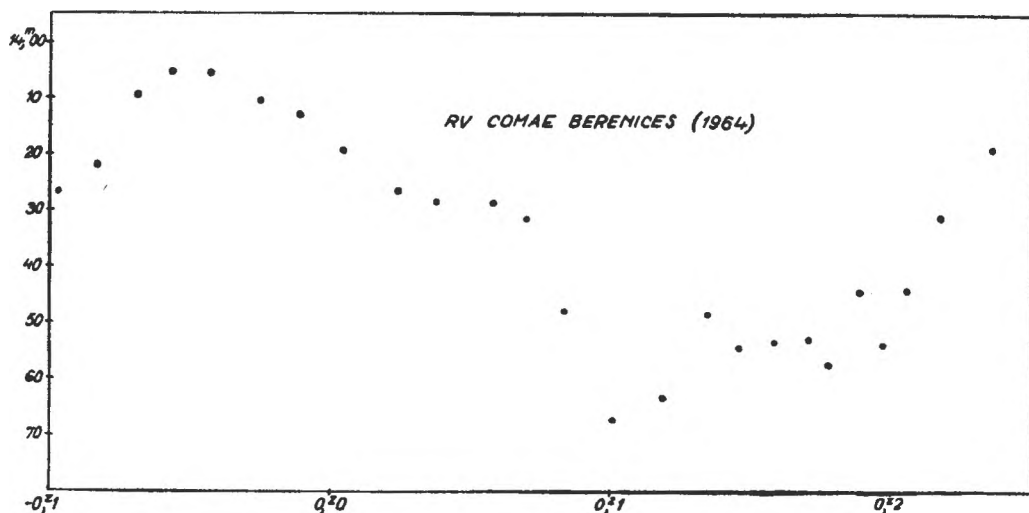


Fig. 2



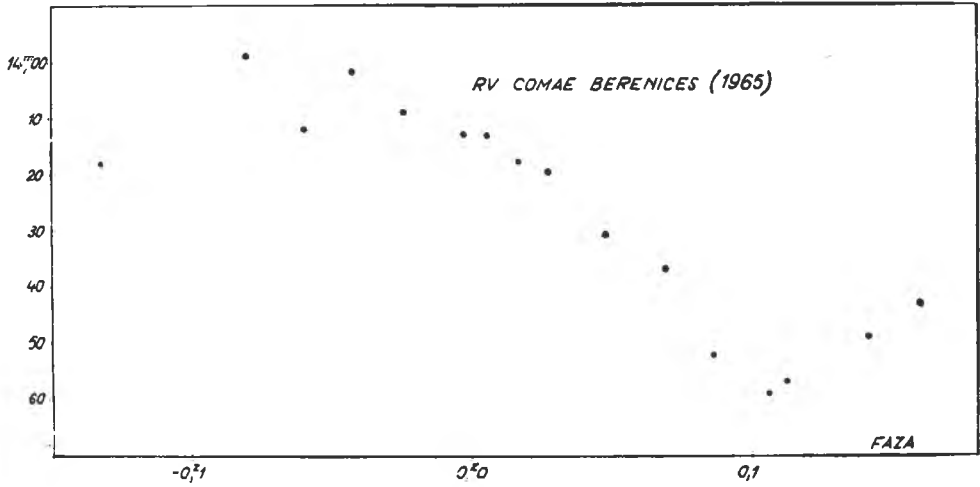


Fig. 3

incluse într-un punct normal. Pe baza tabelelor 2 și 3 s-au construit curbele medii de lumină pentru anii 1964 și 1965, reprezentate în fig. 2 și 3. Pentru anul 1963 nu s-a construit curba medie de lumină deoarece observațiile (în număr de 39) sînt dispuse doar pe ramura ascendentă.

Din curbele medii de lumină se obțin următoarele limite între care variază luminozitatea :

— pentru anul 1964,

$$m_{max} = 14^m04, m_{min} = 14^m67, \text{ amplitudinea} = 0^m63;$$

— pentru anul 1965

$$m_{max} = 13^m97, m_{min} = 14^m59, \text{ amplitudinea} = 0^m63.$$

Asimetria în fază corespunzătoare acestor curbe s-a calculat utilizînd formula

$$\xi = \varphi(\max) - \varphi(\min)$$

găsiindu-se :

— pentru anul 1964  $\xi = 0^s56$ ,

— pentru anul 1965  $\xi = 0^s51$ ,

Tabel 2

Nr. crt.	Faza medie	$m_{pg}$	$n$	Nr. crt.	Faza medie	$m_{pg}$	$n$
1	0,0126	14 <sup>m</sup> 18	4	14	0,1906	14 <sup>m</sup> 44	5
2	,0240	14,26	4	15	,2016	14,54	4
3	,0386	14,28	5	16	,2099	14,44	4
4	,0574	14,28	5	17	,2003	14,31	4
5	,0708	14,31	5	18	,2393	14,19	5
6	,0842	14,47	4	19	,2535	14,27	5
7	,1028	14,68	5	20	,2673	14,21	5
8	,1196	14,63	5	21	,2818	14,09	4
9	,1367	14,48	5	22	,2922	14,05	6
10	,1480	14,54	5	23	,3065	14,05	6
11	,1600	14,53	5	24	,3242	14,10	6
12	,1718	14,53	5	25	,3395	14,12	6
13	0,1816	14,57	4				

iar asimetria în magnitudine, calculată pe baza formulei

$$\zeta = m_{\left(\varphi_{max} + \frac{1}{2}P\right)} - \frac{1}{2}(m_{max} + m_{min})$$

este  $\zeta = 0^m20$  pentru 1964 și  $\zeta = 0^m20$  pentru 1965.

Tabel 3

Nr. crt.	Faza medie	$m_{pg}$	$n$	Nr. crt.	Faza medie	$m_{pg}$	$n$
1	0 <sup>o</sup> 0061	14 <sup>m</sup> 13	5	10	0 <sup>o</sup> 1424	14 <sup>m</sup> 49	5
2	,0171	14,18	5	11	,1606	14,43	4
3	,0291	14,20	5	12	,2195	14,18	6
4	,0478	14,31	6	13	,2716	13,94	4
5	,0702	14,37	5	14	,2903	14,13	5
6	,0865	14,54	5	15	,30833	14,02	5
7	,1062	14,59	3	16	,3255	14,09	5
8	,1132	14,57	3	17	,3485	14,13	6
9	0,1278	14,50	5				

Analiza curbelor de lumină și a valorilor obținute pentru asimetrii confirmă concluziile lui E. Grosse asupra apartenenței acestei stele la grupa cefeidelor de tipul *RR Lyrae*, subclasa *RRc*.

Din observațiile efectuate în maxim am determinat un număr de 10 maxime, dintre care unul în anul 1963, 6 în anul 1964 și 3 în anul 1965. Metoda de determinare a lor a fost metoda Pogson pentru maximele cu observații pe ambele ramuri și cu ajutorul curbelor medii pentru maximele cu observații pe o singură ramură a curbei de lumină. Maximele observate sînt date în tabelul 4, în care prima coloană reprezintă numărul de ordine al maximumului observat, a doua coloană reprezintă momentul observat al maximumului, a treia numărul de observații pe ramura ascendentă și pe cea descendentă, a patra ponderea  $p$ , a cincea diferențele  $O-C_1$  (momentul observat minus momentul calculat) calculate pe baza elementelor (1), iar a șasea epocile E.

Diferențele  $O-C_1$  fiind destul de mari și negative, rezultă că maximumul observat are loc mai devreme decît cel indicat de efemeridă. Din această cauză este necesară o nouă redeterminare a elementelor. În acest scop am întocmit tabelul 5, al tuturor maximelor observate pînă în prezent, unde diferențele  $O-C_1$  sînt raportate la elementele lui E. Grosse [2].

Tabel 4

Nr. crt.	Max. hel. D.J. 2438 ...	Numărul observațiilor		Pondere	$O-C_1$	E
		ramura ascend.	ramura descend.			
1	203,4386	5	—	1	+0 <sup>o</sup> 0076	+43120
2	505,4252	5	5	1	-0,0166	43983
3	524,3198	2	10	1 1/2	,0195	44037
4	525,3589	1	6	1/2	,0304	44040
5	527,4446	—	6	1/2	,0443	44046
6	528,5012	15	—	1/2	,0375	44049
7	529,5255	20	1	1	,0631	44052
8	848,3370	—	10	1	,0602	44963
9	849,3815	—	20	1	,0655	44966
10	856,3886	—	10	1	-0,0629	44986

Tabel 5

Nr. crt.	Max. hel. D.J. 24 ...	Pondere	E	O-C <sub>1</sub>	O-C <sub>2</sub>	O-C <sub>3</sub>	Observatori și surse
1	22789,680	½	- 925	-0,005	-0,0089		E. Grosse 2
2	790,380	2	- 923	-0,005	-0,0088		"
3	811,394	½	- 863	+0,012	+0,0088		"
4	23081,548	2	- 91	+0,001	-0,0022		"
5	083,650	1	- 85	+0,003	+0,0001		"
6	113,400	2	0	+0,007	+0,0040		"
7	143,487	2	+ 86	-0,002	-0,0050		"
8	24975,488	1	+ 5321	-0,013	0,0111		"
9	25002,470	2	+ 5398	+0,023	+0,0245		"
10	003,484	1	+ 5401	-0,013	-0,0110		"
11	004,515	½	+ 5404	-0,032	-0,0302		"
12	005,580	½	+ 5407	-0,017	0,0151		"
13	26368,680	½	+ 9302	+0,010	+0,0156		"
14	395,610	½	+ 9379	-0,006	-0,0008		"
15	417,310	2	+ 9441	-0,003	+0,0021		"
16	418,348	2	+ 9444	-0,015	-0,0098		"
17	419,417	1	+ 9447	+0,004	+0,0094		"
18	420,480	1	+ 9450	+0,017	+0,0225		"
19	440,420	1	+ 9507	+0,010	+0,0151		"
20	38203,4386	1	+43120	+0,0076	+0,0434	+0,0005	I. Mihoc
21	505,4252	1	+43983	-0,0166	+0,0200	+0,0087	"
22	524,3198	1½	+44037	-0,0195	+0,0171	+0,0078	"
23	525,3589	½	+44040	-0,0304	+0,0064	-0,0029	"
24	527,4446	½	+44046	-0,0443	-0,0077	-0,0166	"
25	528,5012	½	+44049	-0,0375	-0,0009	-0,0098	"
26	529,5255	1	+44052	-0,0631	-0,0265	-0,0353	"
27	848,3370	1	+44963	-0,0602	-0,0227	+0,0019	"
28	849,3815	1	+44966	-0,0655	-0,0281	-0,0034	"
29	38856,3886	1	+44986	-0,0629	-0,0200	+0,0054	"

Maximele din tabelul 5 au fost grupate, pe ani de observații, în 7 maxime normale care sînt date în tabelul 6, unde  $n$  reprezintă numărul maximelor individuale din care este alcătuit maximul normal respectiv, ponderea este egală cu suma ponderilor individuale iar  $\epsilon$  este eroarea medie pătratică cu care s-a determinat maximul normal respectiv.

Prin metoda celor mai mici pătrate, pe baza maximelor normale din tabelul 6, am găsit corecțiile elementelor lui E. Grosse:

$$\Delta T = +0,003; \quad \Delta P = -0,0000009$$

$$\pm 6 \qquad \qquad \qquad \pm 3$$

Tabel 6

Nr. crt.	Maximul normal D.J. hel. 24 ...	$\epsilon$	$n$	Pondere	O-C <sub>1</sub>	O-C <sub>2</sub>	E
1	22790,3827	$\pm 0,0004$	3	3	+0,0033	-0,0051	- 923
2	23113,3965	$\pm ,0002$	4	7	,0021	+0,0005	0
3	25003,4962	,0002	5	5	-0,0008	,0008	+ 5401
4	26418,3627	,0004	7	8	,0037	,0049	+ 9444
5	38203,4386	-	1	1	+0,0076	+0,0434	+43120
6	38525,3293	,0002	6	5	-0,0296	-0,0232	+44040
7	38849,3859	,0002	3	3	-0,0619	-0,0237	+44966

De aici rezultă noile elemente :

$$\text{Max.hel.} = \text{D.J. } 2423113;396 + 0;3499536.E \quad (2)$$

$$\pm 6 \qquad \qquad \pm 3$$

Cu ajutorul acestor elemente am calculat diferențele O—C<sub>2</sub> din tabelele 5 și 6. Cu aceste noi elemente se obține o ușoară ameliorare a diferențelor O—C avînd

$$\frac{\Sigma(O-C_1)^2}{\Sigma(O-C_2)^2} = 1,58$$

Procedînd la determinarea unor noi elemente numai pe baza maximelor observate în perioada 1963—1965, date în tabelul 4, am găsit următoarele elemente ale variației de lumină :

$$\text{Max.hel.} = \text{D.J.} 2438527;458 + 0;349920.E \quad (3)$$

iar cu ajutorul lor am calculat diferențele O—C<sub>3</sub> date în tabelul 5. Aceste noi elemente (3) verifică cu mult mai bine maximele observate în perioada 1963—1965.

(Intrat în redacție la 1 octombrie 1967)

Tabel 7

D. J. hel. 2438 ...	m <sub>pg</sub>	D. J. hel. 2438 ...	m <sub>pg</sub>	D. J. hel. 2438 ...	m <sub>pg</sub>
164,4414	14 <sup>m</sup> 30	203,4261	14 <sup>m</sup> 21	505,4047	14 <sup>m</sup> 24
,4483	14,45	,4386	13,87	,4172	14,40
,4552	14,11	,4538	14,20	505,4324	14,11
,4670	14,11	207,3558	14,42	505,4484	13,97
,4719	14,07	,3684	14,70	,4609	14,19
,4789	14,12	,3802	14,91	,4810	14,17
,4872	14,36	,3921	14,59	,4977	14,17
,4927	14,07	,4045	14,00	514,4218	14,08
174,4483	14,28	,4233	14,24	,4554	14,39
188,3465	14,07	208,4007	14,18	,4693	14,13
194,3897	14,08	,4305	14,20	,4839	13,89
,4035	14,02	209,3273	14,16	,4978	13,99
195,3800	14,31	,3356	13,94	515,3238	14,47
,3891	14,58	501,5336	14,11	,3384	14,78
,3974	13,93	,5461	14,07	,3502	14,50
,4050	14,11	,5607	14,16	,3627	14,60
,4134	14,09	502,5253	14,11	,3766	14,69
200,3644	14,56	,5385	14,26	,3870	14,75
,3783	14,27	,5503	14,18	,4002	14,44
203,3372	14,18	503,5379	14,54	,4120	14,50
,3497	14,10	,5483	14,36	,4231	14,39
,3601	14,24	505,2963	14,68	522,4216	14,67
,3761	14,16	,3095	14,54	,4355	14,43
,3899	13,90	,3331	13,97	,4577	14,40
,3997	14,13	,3762	14,11	,4855	14,42
,4101	14,07	,3919	13,97	,5132	14,16

Tabel 7 (continuare)

D. J. hel. 2438 ...	$m_{pg}$	D. J. hel. 2438 ...	$m_{pg}$	D. J. hel. 24 38 ...	$m_{pg}$
522,5257	14 <sup>m</sup> 25	528,4161	14 <sup>m</sup> 03	849,3747	13 <sup>m</sup> 88
523,4438	14,44	529,4251	14,08	849,3832	14,14
524,4543	14,59	,4334	14,69	,3866	14,26
,4647	14,34	,4480	14,12	849,4027	13,83
524,3015	14,12	,4556	14,28	849,4110	13,97
,3091	14,10	,4716	14,09	,4193	13,90
,3168	13,77			,4311	14,03
,3244	14,10	,4799	14,01	,4402	14,09
,3320	14,19	,4883	14,10	,4485	14,10
,3431	14,50	529,3018	14,63	,4582	14,16
,3661	14,36	,3167	14,44	,4666	14,19
,3737	14,30	,3375	14,71	,4777	14,19
,3813	14,17	,3465	14,78	,4860	14,21
,4008	14,35	,3611	14,43	,5013	14,45
,4083	14,59	,3708	14,39	,5103	14,49
,4161	14,50	,3812	14,32	,5193	14,57
,4237	14,65	,3917	14,47	,5277	14,41
,4313	14,34	,4021	14,52	,5381	14,65
,4390	14,61	,4139	14,42	,5568	14,52
524,4508	14,72	,4229	14,56	,5798	14,38
,4544	14,73	,4354	14,69	,5888	14,57
,4661	14,69	,4458	14,50	,5985	14,54
,4737	14,41	,4548	14,38	,6082	14,43
,4813	14,52	,4965	14,36	,6180	14,41
,4890	14,34	,5104	14,00	,6318	14,05
,5070	14,63	,5201	14,04	856,3399	14,07
,5230	14,78	,5305	13,93	,3496	14,07
,5306	14,35	575,3491	14,24	,3663	13,95
,5383	14,42	830,4466	14,15	,3767	13,92
,5459	14,41	,4577	14,03	856,3850	14,15
525,3418	13,90	,4897	14,13	856,3940	13,96
,3549	14,02	,4987	14,08	,4107	14,11
525,3709	14,13	830,5070	14,13	,4197	14,06
,3793	14,42	830,5168	14,09	,4288	14,16
,3904	14,07	,5326	14,26	,4385	14,29
,4279	14,54	,5410	14,26	,4475	14,13
,4362	14,13	,5493	14,05	,4565	14,12
,4487	14,13	,5576	14,16	,4663	14,11
,4563	14,17	,5660	14,30	,4746	14,02
527,4743	14,02	,5743	14,24	,4906	14,03
,4826	13,89	833,4756	14,53	,4996	14,27
,4951	14,20	,4846	14,47	,5100	14,19
,5097	14,28	,4178	14,60	,5190	14,43
,5187	14,22	848,3963	14,08	,5288	14,45
,5285	14,22	,4067	14,15	,5378	14,75
,5548	14,11	,4151	14,15	,5482	14,46
,5652	14,20	,4234	14,16	,5572	14,46
528,3279	14,39	,4324	14,40	,5732	14,72
,3369	14,82	,4406	14,40	,5829	14,40
,3466	14,66	,4491	14,53	,5940	14,43
,3584	14,75	,4748	14,17	,6051	14,36
,3668	14,46	,4838	14,43	857,6027	14,79
,3744	14,31	,5102	14,56	,6116	14,68
,3987	14,47	,5192	14,54	858,3897	14,34
,4070	14,27	,5276	14,35	858,3957	14,39



# LA MATRICE COVARIANTE DE POLARISATION DES PARTICULES DE SPIN QUELCONQUE

par

ZOLTÁN GÁBOS

Dans cet article on donne une étude systématique de la polarisation des particules de spin quelconque.

Pour les particules de spin  $1/2, 1, 3/2, 2$  et de masse de repos zéro et différente de zéro, nous obtenons quelques résultats utiles pour les applications pratiques.

**1. La matrice de densité de spin.** On sait que les composantes du vecteur de spin  $\vec{S}$  satisfont à la relation de commutation

$$[S_j, S_k] = i\varepsilon_{jkl}S_l, \quad j, k, l = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Les fonctions propres communes des opérateurs  $\vec{S}^2, S_3$  forment une base orthogonale

$$\begin{aligned} S^2\varphi_{sm} &= s(s+1)\varphi_{sm}, \quad S_3\varphi_{sm} = m\varphi_{sm}, \\ \langle \varphi_{sm} | \varphi_{sm} \rangle &= \delta_{mm}, \quad m = \overline{-s, s}, \quad \hbar = 1. \end{aligned}$$

Si nous adaptons une représentation dans laquelle  $S_3$  est diagonale, la composante  $j$  de la fonction d'onde est donnée par

$$\varphi_{sm}(j) = \delta_{j, s+1-m}, \quad j = \overline{1, 2s+1}.$$

Pour la superposition cohérente des états purs

$$\varphi_s(j) = \sum_{m=-s}^s c_{s+1-m} \varphi_{sm}(j) = c_j \quad \langle \varphi_s | \varphi_s \rangle = 1,$$

la polarisation des particules peut être caractérisée à l'aide de la matrice de densité de spin, définie par

$$\rho_{jk} = \varphi_s(j)\varphi_s^*(k) = c_j c_k^*, \quad j, k = \overline{1, 2s+1}. \quad (2)$$

Pour la superposition incohérente des états purs nous avons

$$\rho = \sum_{m=-s}^s W_m \rho(s, m), \quad \sum_{m=-s}^s W_m = 1 \quad (3)$$

où

$$\rho_{jk}(s, m) = \varphi_{sm}(j) \varphi_{sm}^*(k). \quad (4)$$

$\rho$  est une matrice hermitique, à  $2s + 1$  lignes et  $2s + 1$  colonnes. Nous avons encore

$$\text{Tr } \rho = 1,$$

et

$$\text{Tr } \rho^2 \leq 1$$

(l'égalité est valable pour les états purs).

Lorsque  $\rho$  est une matrice hermitique, elle peut être exprimée, dans le cas général, à l'aide des  $(2s + 1)^2$  matrices de base indépendantes. Si nous adoptons une base cartésienne, nous avons les matrices  $(2s + 1) \times (2s + 1)$

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}, \quad n = \overline{0, 2s}, \quad i_k = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

avec les propriétés suivantes :

- a) elles sont hermitiques ;
- b) elles sont symétriques par rapport aux indices  $i_k$  ;
- c) après la contraction des deux indices nous avons

$$\delta_{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = 0.$$

On peut obtenir les matrices (5) en partant des matrices  $S_i$  [28] (voir l'appendice A.).

En utilisant les matrices (5) nous pouvons écrire

$$\rho = \sum_{n=0}^{2s} t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}, \quad (6)$$

où

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \quad (7)$$

sont les composantes du tenseur de la polarisation d'ordre  $n$ . Lorsque les conditions b) et c) sont valables aussi pour les grandeurs (7), on a

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = \text{Tr} (\rho T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}) = \langle \varphi_s | T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} | \varphi_s \rangle. \quad (8)$$

Dans ce qui suit nous complétons ces résultats connus avec :

- a) les composantes des tenseurs de la polarisation pour les états purs et  $s = 3/2, 2$  ;
- b) les matrices de densité de spin pour les états purs.



Tenant compte des expressions données dans l'appendice A., et des relations (1), (8) on obtient pour les composantes différentes de zéro des tenseurs  $t^{(n)} (n = \overline{0,4})$ :

$$t^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2s+1}}, \quad t_3^{(1)} = \frac{m}{\sqrt{N(1,s)}} = t^{(1)}(s, m),$$

$$t_{33}^{(2)} = -2t_{11}^{(2)} = -2t_{22}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} t^{(2)}(s, m), \quad t^{(2)}(s, m) = \frac{3m^2 - s(s+1)}{\sqrt{6N(2,S)}}$$

$$t_{333}^{(3)} = -2t_{113}^{(3)} = -2t_{223}^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{5}} t^{(3)}(s, m),$$

$$t^{(3)}(s, m) = \sqrt{\frac{2}{5N(3,s)}} m [5m^2 - 3s(s+1) + 1],$$

$$t_{3333}^{(4)} = \frac{8}{3} t_{1111}^{(4)} = \frac{8}{3} t_{2222}^{(4)} = 8t_{1122}^{(4)} = -2t_{1133}^{(4)} = -2t_{2233}^{(4)} = 2 \sqrt{\frac{2}{35}} t^{(4)}(s, m),$$

$$t^{(4)}(s, m) = \sqrt{\frac{2}{35N(4,5)}} \{35m^4 + 5m^2 [5 - 6s(s+1)] + 3(s-1)s(s+1)(s+2)\},$$

par conséquent

$$\rho(s, m) = \sum_{r=0}^{2s} A_r(s, m) S_r^z.$$

Les coefficients  $A_r(s, m)$  sont donnés dans l'appendice B. pour  $s = 1/2, 1, 3/2$ .

2. Les grandeurs  $t^{(n)}(s, m)$  satisfont les relations

$$\sum_{n=0}^{2s} [t^{(n)}(s, m)]^2 = 1, \quad \sum_{m=-s}^s [t^{(n)}(s, m)]^2 = 1.$$

Au lieu de l'axe 3 on peut avoir comme axe privilégié l'axe de verueur  $\vec{e}$  ( $\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta$ ). Dans ce cas les fonctions de base sont les fonctions propres communes des opérateurs  $\vec{S}^2, (\vec{S}, \vec{e})$ :

$$\vec{S}^2 \varphi_{e\lambda} = s(s+1) \varphi_{e\lambda}, \quad (\vec{S}, \vec{e}) \varphi_{e\lambda} = \lambda \varphi_{e\lambda}, \quad \lambda = -\overline{s, s}.$$

Les fonctions  $\varphi_{e\lambda}$  sont liées à  $\varphi_{sm}$  par l'opérateur de rotation d'angle  $\vartheta$  autour d'un axe de verueur  $\vec{n}(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$

$$\varphi_{e\lambda} = R(\vartheta, \varphi) \varphi_{sm}, \quad \text{où } m = \lambda, \text{ et } R(\vartheta, \varphi) = \exp [i\vartheta (\vec{S}, \vec{n})].$$

Après des calculs simples nous obtenons

$$\varphi_{e\lambda}(j; \vartheta, \varphi) = D_{s+1-j, \lambda}^{(j)}(\varphi, \vartheta, -\varphi),$$

$$S_j^z = R(\vartheta, \varphi) S_j R^{-1}(\vartheta, \varphi) = e_{ij} S_i,$$

avec

$$((e_{ik})) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e_1^2}{1+e_3} & -\frac{e_1 e_2}{1+e_3} & -e_1 \\ -\frac{e_1 e_2}{1+e_3} & 1 - \frac{e_2^2}{1+e_3} & -e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

Lorsque

$$S'_3 = e_{3k} S_k = (\vec{e}, \vec{S})$$

au lieu de l'expression (9) on peut écrire

$$\rho(s, \lambda) = \sum_{r=0}^{2s} A_r(s, \lambda) (\vec{S}, \vec{e})^r. \quad (10)$$

**2. La matrice covariante de polarisation ( $m_0 \neq 0$ ).** Considérons l'équation

$$\gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} \frac{\partial^{2s} \psi}{\partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2} \dots \partial x_{\mu_{2s}}} + m_0^{2s} \psi = 0$$

— correspondant à des particules libres de spin  $s$  et de masse de repos  $m_0 \neq 0$  — et ses solutions planes

$$\psi = u(\vec{p}) e^{i p x}$$

( $\vec{p}$  est l'impulsion de la particule,  $u$  est un spineur à  $2(2s+1)$  composantes).

La matrice covariante de polarisation est définie

par

$$P_{\alpha\beta} = u(\alpha) \bar{u}(\beta), \quad \alpha, \beta = \overline{1, 2(2s+1)}, \quad (11)$$

où

$$\bar{u} = u^+ \gamma_{44 \dots 4}.$$

Les matrices  $2(2s+1) \times 2(2s+1)$

$$\gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}}, \quad \mu_k = \overline{1, 4}, \quad (12)$$

ont les propriétés suivantes

- elles sont hermitiques;
- elles sont symétriques par rapport aux indices  $\mu_k$ ;
- après la contraction des deux indices  $\mu_k$  nous obtenons

$$\delta_{\mu_1 \mu_2} \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} = 0;$$

d) pour une transformation Lorentz homogène on a

$$u(\vec{p}) = L(-\vec{p}) u(0), \quad (13 a)$$

$$L(-\vec{p}) \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2s}} L(\vec{p}) = l_{\mu_1 \nu_1} l_{\mu_2 \nu_2} \dots l_{\mu_{2s} \nu_{2s}} \gamma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s}}, \quad (13 b)$$

où  $l_{\mu\nu}$  sont les coefficients dans les formules de transformation

$$x'_\mu = l_{\mu\nu} x_\nu,$$

donc

$$l_{jk} = \delta_{jk} + (\beta - 1) e_j e_k, \quad l_{4\mu} = -\frac{i}{m_0} \hat{p}_\mu, \quad l_{j4} = -l_{4j},$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

L'expression de l'opérateur  $L(-\vec{p})$  est donnée dans l'appendice C.)

Nous adopterons la représentation usuelle, dans laquelle les matrices (12) et les spineurs  $u(0)$  ont la structure

$$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_n 44 \dots 4} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n M_{i_1 i_2 \dots i_n 44 \dots 4} \\ M_{i_1 i_2 \dots i_n 44 \dots 4} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\varphi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(Les matrices (12) sont données dans l'appendice D. pour  $s = 1/2, 1, 3/2, 2$ .)

Des relations (11), (15), (14) il résulte que pour le système de référence lié aux particules nous avons

$$P(0) = \frac{(-1)^{2s+1}}{2} \begin{pmatrix} \rho - \rho \\ -\rho \rho \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{2s+1}}{2} [1 + (-1)^{2s+1} \gamma_{44 \dots 4}] \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} [1 + (-1)^{2s+1} \gamma_{44 \dots 4}] \left[ \frac{(-1)^{2s+1}}{2s+1} + \sum_{n=1}^{2s} \mathbf{C}(n, s) t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \gamma_{55 \dots 5}^\varepsilon \gamma_{i_1 i_2 \dots i_n 44 \dots 4} \right], \quad (16)$$

où

$$\gamma_{55 \dots 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n], \quad \mathbf{C}(n, s) = \frac{(-i)^n}{D(n) \sqrt{N(n, s)}} \prod_{k=0}^{n-1} (2s - k),$$

$$D(1) = 2, \quad D(2) = D(3) = D(4) = 4, \dots$$

(Nous pouvons exprimer la matrice  $\gamma_{55 \dots 5}$  à l'aide des matrices  $\gamma_{j44 \dots 4}, \gamma_{44 \dots 4}$

$$\gamma_{55 \dots 5} = \frac{s^2}{2(s+1)} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \gamma_{44 \dots 4} \gamma_{i_1 44 \dots 4} [\gamma_{i_1 44 \dots 4}, \gamma_{i_2 44 \dots 4}].$$

Pour les fermions nous avons encore

$$(\gamma_{55 \dots 5} = -\gamma_{11 \dots 1} \gamma_{22 \dots 2} \gamma_{33 \dots 3} \gamma_{44 \dots 4})$$

Lorsque

$$L^+(-\vec{p}) \gamma_{44 \dots 4} = \gamma_{44 \dots 4} L(\vec{p})$$

nous avons

$$P(\vec{p}) = L(-\vec{p})P(0)L(\vec{p}). \quad (17)$$

Il est facile de voir, que

$$L(-\vec{p})\gamma_{55\dots 5}L(\vec{p}) = \gamma_{55\dots 5}. \quad (18)$$

Tenant compte des relations (16), (17), (13 b),(18) nous obtenons finalement

$$P(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{i}{m_0} \right)^{2s} \hat{p}^{(s)} \right] \left[ \frac{(-1)^{2s+1}}{2s+1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{2s} \left( -\frac{i}{m_0} \right)^{2s-n} \mathbf{C}(n, s)_{S_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}} \hat{p}_{\mu_{n+1}} \hat{p}_{\mu_{n+2}} \dots \hat{p}_{\mu_{2s}} \gamma_{55\dots 5}^{\#} \gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}} \right], \quad (19)$$

où

$$\hat{p}^{(s)} = \hat{p}_{\mu_1} \hat{p}_{\mu_2} \dots \hat{p}_{\mu_s} \gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}, \quad S_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = l_{i_1\mu_1} l_{i_2\mu_2} \dots l_{i_n\mu_n} l_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}.$$

**3. La matrice covariante de polarisation pour les états purs** (les cas  $m_0 \neq 0$  et  $m_0 = 0$ ). A. *Le cas  $m_0 \neq 0$ .*

Dans ce paragraphe nous allons appliquer la représentation d'hélicité. Tenant compte de l'expression (16) et de la relation

$$[1 + (-1)^{2s+1} \gamma_{44\dots 4}] \gamma_{44\dots 4} = (-1)^{2s+1} [1 + (-1)^{2s+1} \gamma_{44\dots 4}]$$

on obtient

$$P_{s\lambda}(\vec{e}) = \frac{1}{2} (-1)^{2s+1} [1 + (-1)^{2s+1} \gamma_{44\dots 4}] \sum_{r=0}^{2s} B_r(\lambda, s) \gamma_{55\dots 5}^{\#} e^{(n)},$$

avec

$$e^{(n)} = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n} \gamma_{i_1 i_2 \dots i_n 44\dots 4}.$$

(Les coefficients  $B_r(s, m)$  sont donnés dans l'appendice E., pour  $s = 1/2, 1, 3/2, 2$ .)

Les matrices  $P_{s\lambda}(\vec{p})$  et  $P_{s\lambda}(\vec{e})$  ont la même structure. Nous obtenons  $P_{s\lambda}(\vec{p})$  en partant de  $P_{s\lambda}(\vec{e})$ , en effectuant les substitutions

$$\gamma_{44\dots 4} \rightarrow \left( -\frac{i}{m_0} \right)^{2s} \hat{p}_{\mu_1} \hat{p}_{\mu_2} \dots \hat{p}_{\mu_s} \gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}, \quad (20)$$

$$e^{(n)} \rightarrow \left( -\frac{i}{m_0} \right)^{2s-n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n} l_{i_1\mu_1} l_{i_2\mu_2} \dots l_{i_n\mu_n} \hat{p}_{\mu_{n+1}} \hat{p}_{\mu_{n+2}} \dots \hat{p}_{\mu_{2s}} \gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}}. \quad (21)$$

Pour la superposition incohérente des états purs nous avons

$$P_s = \sum_{\lambda=-s}^s W_\lambda P_{s\lambda}(\vec{p}). \quad (22)$$

Les expressions qu'on obtient en partant de (22) sont en concordance avec celles données par Arif-Uz-Zaman et Y. S. Liu [29] pour  $s = 1/2, 1, 3/2$ . Nous avons complété les résultats connus avec l'expression valable pour  $s = 2$ .

B. *Le cas*  $m_0 = 0$ . Dans le cas  $m_0 = 0$  nous avons les états d'hélicité possibles  $\lambda = \pm s$ . La fonction d'onde a la structure

$$u(\vec{e}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{P}}{|\vec{p}|},$$

par conséquent pour la matrice  $P^{(+)}$  nous avons

$$P^{(+)} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_{55} \dots s) \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \pm \rho \end{pmatrix}, \quad P_{\alpha\beta}^{(+)} = u(\alpha) u^{(+)}(\beta), \quad (23)$$

Après des calculs simples -en utilisant les relations (6), (14), (23) - nous obtenons pour  $\lambda = s$

$$P^{(+)}(s) = \frac{i^{2s}}{2^{2s+1}} (1 + \gamma_{55} \dots s) \gamma_{44} \dots \widehat{e^{(s)}},$$

pour  $\lambda = -s$

$$P^{(+)}(-s) = \frac{(-i)^{2s}}{2^{2s+1}} (1 + \gamma_{55} \dots s) \gamma_{44} \dots \widehat{e^{(s)}},$$

avec

$$\widehat{e^{(s)}} = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \dots e_{\mu_s} \gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s}.$$

$e$  et  $\bar{e}$  sont des quadrivecteurs avec les composantes

$$e(\vec{e}, -i), \quad \bar{e} = e^*(\vec{e}, i).$$

## APPENDICE

A. *Les matrices*  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ . Nous avons

$$\sqrt{N(0,s)} T^{(0)} = 1, \quad \sqrt{N(1,s)} T^{(1)} = S_i,$$

$$\sqrt{N(2,s)} T_{i_1 i_2}^{(2)} = \frac{1}{2} S_2 (i_1 i_2) - \frac{1}{3} s(s+1) \delta_{i_1 i_2},$$

$$\sqrt{N(3,s)} T_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} = \frac{1}{3} S_6 (i_1 i_2 i_3) - \frac{2}{5} \left[ s(s+1) - \frac{1}{3} \right] (S_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + S_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + S_{i_3} \delta_{i_1 i_2}),$$

$$\sqrt{N(4,s)} T_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = \frac{1}{6} S_{24} (i_1 i_2 i_3 i_4) - \frac{2}{7} \left[ s(s+1) - \frac{5}{6} \right] \cdot [S_2(i_1 i_2) \delta_{i_3 i_4} + S_2(i_1 i_3) \delta_{i_2 i_4} +$$

$$+ S_2(i_1 i_4) \delta_{i_2 i_3} + S_2(i_2 i_3) \delta_{i_1 i_4} + S_2(i_2 i_4) \delta_{i_1 i_3} + S_2(i_3 i_4) \delta_{i_1 i_2}] + \frac{4}{35} s(s+1)[s(s+1)-2].$$

$$(\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}),$$

avec

$$N(n,s) = \frac{1}{\Phi(n)} \prod_{k=-(n-1)}^{n+1} (2s+k),$$

où

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi(1) = 12, \quad \Phi(2) = 120, \quad \Phi(3) = 280, \quad \Phi(4) = 630.$$

$S_m(i_1 i_2 \dots i_n)$  est le symbole d'une somme

$$S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} + S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} + \dots$$

contenant toutes les expressions différentes (en nombre  $m$ ) qu'on obtient par permutation des éléments dans le produit

$$\prod_{k=1}^n S_{i_k}.$$

B. Les coefficients  $A_r(s, m)$ .  $s = 1/2$ :  $A_0 = \frac{1}{2}$ ,  $A_1 = 2m$ ;

$$s = 1: \quad A_0 = 1 - m^2, \quad A_1 = \frac{1}{2} m, \quad A_2 = \frac{1}{2} (3m^2 - 2);$$

$$s = 3/2: \quad A_0 = \frac{1}{64} (41 - 20 m^2), \quad A_1 = \frac{1}{144} m(365 - 164 m^2), \quad A_2 = \frac{1}{16} (4m^2 - 5)$$

$$A_3 = \frac{1}{36} m(20m^2 - 41);$$

$$s = 2: \quad A_0 = \frac{1}{4} (m^2 - 4)(m^2 - 1), \quad A_1 = \frac{1}{72} m(65 - 17m^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{288} (-155 m^4 + 707m^2 - 360),$$

$$A_3 = \frac{1}{72} m (5m^2 - 17), \quad A_4 = \frac{1}{288} (35m^4 - 155m^2 + 72).$$

C. L'opérateur  $L(-\vec{p})$ . L'opérateur  $L(-\vec{p})$  a l'expression

$$L(-\vec{p}) = \exp [\varphi(\vec{\alpha}, \vec{e})]$$

où

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{S} & 0 \\ 0 & -\vec{S} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \operatorname{arcth} v.$$

Nous pouvons écrire  $L(-\vec{p})$  aussi sous la forme finie

$$L(-\vec{p}) = \sum_{n=0}^{2s} A_{s,n}(\vec{\alpha}, \vec{e})^n,$$

avec

$$A_{\frac{1}{2}0} = \sqrt{\frac{\beta+1}{2}}, \quad A_{\frac{1}{2}1} = 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}},$$

$$A_{10} = 1, \quad A_{11} = \beta v, \quad A_{12} = \beta - 1,$$

$$A_{\frac{3}{2}0} = \frac{1}{4}(5 - \beta) \sqrt{\frac{\beta+1}{2}}, \quad A_{\frac{3}{2}1} = -\frac{1}{6}(\beta - 13) \sqrt{\frac{\beta-1}{2}},$$

$$A_{\frac{3}{2}2} = (\beta - 1) \sqrt{\frac{\beta + 1}{2}}, \quad A_{\frac{3}{2}3} = \frac{2}{3} (\beta - 1) \sqrt{\frac{\beta - 1}{2}},$$

$$A_{20} = 1, \quad A_{21} = \frac{1}{3} \beta(4 - \beta)v, \quad A_{22} = \frac{1}{6} (\beta - 1)(7 - \beta),$$

$$A_{23} = \frac{1}{3} \beta(\beta - 1)v, \quad A_{24} = \frac{1}{6} (\beta - 1)^2.$$

D. Les matrices  $M_{i_1 i_2 \dots i_n 44 \dots 44}$ .  $M_{44 \dots 44} = (-1)^{2s} 1$ ,  $M_{i_1 44 \dots 44} = i(-1)^{2s+1} \frac{1}{s} S_{i_1}$

$$M_{i_1 i_2 44 \dots 44} = (-1)^{2s+1} \frac{1}{2s-1} \left[ \frac{1}{s} S_2(i_1 i_2) - \delta_{i_1 i_2} 1 \right],$$

$$M_{i_1 i_2 i_3 44 \dots 44} = i(-1)^{2s} \frac{1}{3s(2s-1)(s-1)} [S_6(i_1 i_2 i_3) - (3s-1)(S_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + S_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + S_{i_3} \delta_{i_1 i_2})]$$

$$M_{i_1 i_2 i_3 i_4 44 \dots 44} = (-1)^{2s} \frac{1}{(2s-1)(2s-3)} \left\{ \frac{1}{6s(s-1)} S_{24}(i_1 i_2 i_3 i_4) + \right.$$

$$+ \frac{2-3s}{3s(s-1)} [S_2(i_1 i_2) \delta_{i_3 i_4} + S_2(i_1 i_3) \delta_{i_2 i_4} + S_2(i_1 i_4) \delta_{i_2 i_3} + S_2(i_2 i_3) \delta_{i_1 i_4} + S_2(i_2 i_4) \delta_{i_1 i_3} +$$

$$\left. + S_2(i_3 i_4) \delta_{i_1 i_2} ] + [\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} ] 1 \right\}.$$

E. Les coefficients  $B_r(s, \lambda)$ .  $s = \frac{1}{2}$  :  $B_0 = \frac{1}{2}$ ,  $B_1 = -i\lambda$ ;

$$s = 1 : \quad B_0 = \frac{1}{4} (2 - \lambda^2), \quad B_1 = \frac{i}{2} \lambda, \quad B_2 = \frac{1}{4} (3\lambda^2 - 2);$$

$$s = \frac{3}{2} : \quad B_0 = \frac{1}{32} (13 - 4\lambda^2), \quad B_1 = -\frac{i}{16} \lambda(13 - 4\lambda^2), \quad B_2 = -\frac{3}{8} \left( \lambda^2 - \frac{5}{4} \right),$$

$$B_3 = \frac{i}{12} \lambda \left( 5\lambda^2 - \frac{41}{4} \right);$$

$$s = 2 : \quad B_0 = \frac{1}{64} (\lambda^4 - 9\lambda^2 + 24), \quad B_1 = \frac{i}{8} \lambda(5 - \lambda^2), \quad B_2 = -\frac{1}{32} (5\lambda^4 -$$

$$- 29\lambda^2 + 24), \quad B_3 = -\frac{i}{24} \lambda (5\lambda^2 - 17), \quad B_4 = -\frac{1}{192} (35\lambda^4 - 155\lambda^2 + 72).$$

(Manuscrit reçu le 3 mai 1968)

B I B L I O G R A P H I E

1. R. H. Dalitz, Proc. Phys. Soc. London, A, **65**, p. 175, 1952.
2. L. Wolfenstein-J. Ashkin, Phys. Rev., **85**, p. 947, 1952.
3. W. L. Bade-H. Jehle, Revs. Mod. Phys., **25**, p. 714, 1953.
4. W. Lakin, Phys. Rev., **98**, p. 169, 1955.
5. H. Stapp, Phys. Rev., **103**, p. 425, 1956.
6. H. A. Tolhoek, Revs. Mod. Phys., **28**, p. 277, 1956.
7. U. Fano, Revs. Mod. Phys., **29**, p. 74, 1957.

8. L. C. Biedenharn, *Ann. of Phys.*, **4**, p. 104, 1958.
9. A. I. Ahiezer—V. B. Beresteŭki, *Kvantovaja elektrodinamika*, Izd. vtoroe, Moskova, 1959, p. 31, 59—67, 283—284.
10. M. Jacob—G. C. Wick, *Ann. of Phys.*, **7**, p. 404, 1959.
11. A. R. Edmonds, *Angular Momenta in Quantum Mechanics*, Princeton-New Jersey, second ed., 1960.
12. A. J. Mc Farlane, *Revs. Mod. Phys.*, **34**, p. 41, 1962.
13. H. Joos, *Fortschritte der Physik*, **10**, p. 65, 1962.
14. A. O. Barut—I. Muzinich—D. N. Williams, *Phys. Rev.*, **130**, p. 442, 1963.
15. N. Byers—S. Fenster, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, p. 52, 1963.
16. A. J. Mc Farlane, *Journ. Math. Phys.*, **4**, p. 490, 1963.
17. R. H. Dalitz, *Lectures given at the Intl. School of Physics „Enrico Fermi” on Strong Interaction*. Varena, 1964.
18. D. L. Weaver—C. L. Hammer—R. H. Good, jr., *Phys. Rev.*, **135**, B. 241, 1964.
19. S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **133**, B. 1318, 1964; **134**, B. 882, 1964.
20. D. Zwanziger, *Phys. Rev.*, **133**, B. 1036, 1964; **137**, B. 1535, 1965.
21. R. A. Berg, *Journ. of Math. Phys.*, **6**, p. 24, 1965.
22. Z. Gábos—É. Simon, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, seria Math.-Phys.*, fasc. 1, p. 115, 1965.
23. K. Hehl, *Fortschritte der Physik*, **13**, p. 557, 1965.
24. W. Konar, *Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci. (série math.-astr.-phys.)*, **13**, p. 495, 1965.
25. A. Sankaranarayanan—R. H. Good, jr., *Il Nuovo Cimento*, **36**, p. 1303, 1965.
26. R. Shaw, *Il Nuovo Cimento*, **33**, p. 1074, 1964.
27. D. Shay—H. S. Song—R. H. Good, jr., *Suppl. Nuovo Cimento*, **3**, p. 455, 1965.
28. Ch. Zemach, *Phys. Rev.*, **140**, B. 97, 1965.
29. Arif—Uz—Zaman, Y. S. Liu, *Il Nuovo Cimento*, **44**, p. 903, 1966.
30. R. A. Berg, *Il Nuovo Cimento*, **42**, A. 148, 1966.
31. R. H. Dalitz, *Nuclear Phys.*, **87**, p. 89, 1966.
32. P. Minnaert, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, p. 672, 1966.
33. C. J. Mullin—J. M. Keller—C. L. Hammer—R. H. Good, jr., *Ann. of Phys.*, **37** p. 55, 1966.
34. A. Sankaranarayanan, *Il Nuovo Cimento*, **41**, p. 532, 1966.
35. J. Nilsson—A. Beskow, *Arkiv för Fysik*, **34**, p. 307, 1967.
36. A. D. Steiger—K. J. Fritz, *Il Nuovo Cimento*, **51**, A. 461, 1967.
37. Wu—Ki—Tung, *Phys. Rev.*, **156**, p. 1385, 1967.
38. Z. Gábos—S. Blonder, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, seria Math.-Phys.*, fasc. 1, p. 107, 1968

## MATRICEA COVARIANTĂ DE POLARIZARE PENTRU PARTICULE CU SPIN ARBITRAR

(R e z u m a t)

În lucrare se dă structura matricei covariante de polarizare pentru

a) particule cu masa de repaus zero și diferită de zero;

b) superpoziția coerentă și necoerentă a stărilor pure.

Se stabilesc — în cazurile  $s = 1/2, 1, 3/2, 2$  — expresii utile pentru aplicații practice.

## КОВАРИАНТНАЯ МАТРИЦА ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

(Р е з ю м е)

В работе даётся структура ковариантной матрицы поляризации для

a) частиц с нулевой массой покоя и с массой, различной от нуля;

б) когерентной и некогерентной суперпозиции чистых состояний.

Устанавливаются — в случаях  $s = 1/2, 1, 3/2, 2$  — полезные выражения для практических применений.



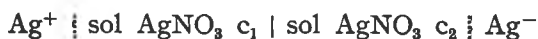
# ACȚIUNEA ULTRASUNETELOR ASUPRA UNOR PILE DE CONCENTRAȚIE

de

CORINA ȘERBAN, IOANA DĂBALĂ, D. AUSLÄNDER, EMILIA CONSTANTIN

Avînd în vedere importanța pilelelor de concentrație în metodele curente fizico-chimice, cît și în elucidarea unor procese electrochimice, s-a considerat ca nefiind lipsită de interes studiarea efectelor exercitate asupra lor de ultrasunete prin intermediul măsurătorilor de forță electromotoare.

**Metoda de lucru.** Cercetările au fost efectuate pentru următoarele pile :



Concentrațiile soluțiilor  $c_1$  și  $c_2$  ( $c_1 > c_2$ ) au fost modificate într-un domeniu cuprins între 0,001 M și 0,1 M. Determinările au fost efectuate în condiții de termostatare la temperaturile de 20°C, 25°C și 30°C.

Forța electromotoare s-a măsurat printr-o metodă de compensație, cu un compensator tip QTK alimentat la un acumulator de 4 V. Fenomenul s-a urmărit timp de 45 minute, din 3 în 3 minute, pînă la stabilirea unui efect constant, măsurîndu-se și timpul de revenire la valoarea inițială a forței electromotoare, după încetarea ultrasunării.

Fasciculul ultrasonic de frecvență 1 MHz, parametrii circuitului oscilant fiind  $U = 1,2 \text{ kV}$ ,  $I = 70 \text{ mA}$ , s-a dirijat paralel cu electrozii, alternativ asupra electrolitului mai concentrat și asupra celui mai diluat. În vederea evitării efectelor de electrod ultrasunarea s-a efectuat și lateral prin intermediul sifonului de legătură a electroliților.

**Rezultate experimentale.** Notînd cu  $\Delta E$  variația de forță electromotoare datorită ultrasunetelor și cu  $A$  și  $B$  soluția de concentrație mai mare, respectiv mai mică, se constată la ambele pile creșterea efectului cu timpul de ultrasunare pînă la atingerea unei valori constante.

După cum se vede în fig. 1, valoarea acestui timp este de aproximativ 15 minute la temperatura de 30°C, prelungindu-se pentru temperaturi mai mici. În ceea ce privește temperatura de lucru, aceasta, în toate cazurile cercetate a avut drept consecință o variație în același sens a efectului.

Cele două pile se comportă în sens invers față de ultrasunarea alternativă a soluțiilor ; astfel la pila de  $\text{CuSO}_4$  ultrasunarea soluției  $A$  are un efect de creștere a forței electromotoare și de scădere a ei cu valori simetrice față de axa timpului la ultrasunarea soluției  $B$ . La pila de  $\text{AgNO}_3$  semnul lui  $\Delta E$  se inversează, valoarea

absolută a efectului fiind superioară celei care s-a obținut în condiții identice de lucru la pila de  $\text{CuSO}_4$ .

După încetarea ultrasonării se restabilește valoarea inițială a forței electromotoare,  $\Delta E$  tinzând spre zero mai rapid în cazul pilei de  $\text{CuSO}_4$ , unde fenomenul se încheie în 3 minute și mai lent la pila de  $\text{AgNO}_3$ . Se mai remarcă de asemenea în fig. 2 dispariția mai rapidă a efectului obținut prin ultrasonarea soluției B la pila de  $\text{CuSO}_4$  și A la pila de  $\text{AgNO}_3$ .

În condițiile ultrasonării prin intermediul sifonului, în vederea evitării efectului de electrod, fasciculul ultrasonic nefiind dirijat direct asupra acestuia, s-au obținut efectele reprezentate în fig. 3.

Astfel, în toate cazurile se constată că  $\Delta E$  scade cu timpul de ultrasonare după o alură asemănătoare curbelor din

Fig. 1. Variația efectului ultrasunetului asupra f.e.m. în funcție de timpul de ultrasonare la diferite temperaturi, pentru soluții de concentrație 0,1 M (A) și 0,01 M (B).

fig. 1. Valorile efectelor sînt mai mari în cazul pilei de  $\text{AgNO}_3$  decît la cea de  $\text{CuSO}_4$ . Valoarea absolută a efectului este mai mare la ultrasonarea laterală a soluției mai concentrate decît a celei mai diluate la pila de  $\text{CuSO}_4$  și invers la pila de  $\text{AgNO}_3$ .

În ceea ce privește variația forței electromotoare cu raportul concentrațiilor, după cum se vede din fig. 4 pentru pile de  $\text{CuSO}_4$  de diferite concentrații, valoarea

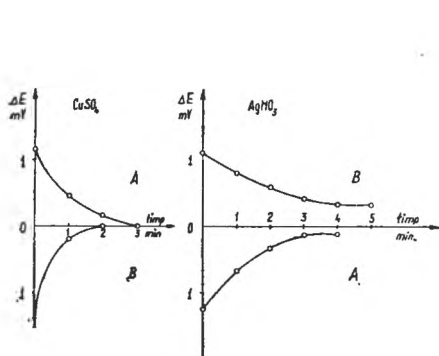


Fig. 2. Revenirea în timp a f.e.m. la valoarea inițială după încetarea ultrasonării pentru concentrațiile 0,1 M (A) respectiv 0,01 M (B).

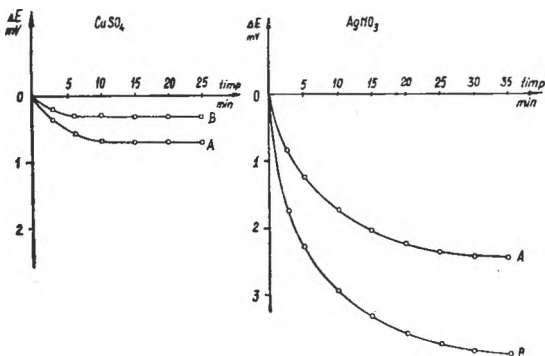


Fig. 3. Variația f.e.m. în funcție de timp la ultrasonarea laterală a soluțiilor de concentrație 0,1 M (A) și 0,01 M (B) la temperatura de 30°C.

absolută a lui  $\Delta E$  crește o dată cu mărirea raportului concentrațiilor celor două soluții care formează pila.

Domeniile de efecte pozitive sau negative corespund ultrasunării celulei cuprinzând soluția A, respectiv B.

**Interpretarea rezultatelor.** Efectele puse în evidență rezultă din suprapunerea mai multor factori aparținând următoarelor două categorii de fenomene: 1. procese ce au loc în masa lichidului, 2. efecte de electrod.

În soluția expusă acțiunii ultrasunetelor, va avea loc o modificare a potențialului de difuzie:

$$E = \frac{RT}{ZF} \frac{u_- - u_+}{u_- + u_+} \log \frac{c_1}{c_2} \quad (1)$$

unde  $u_-$  și  $u_+$  sînt vitezele anionului și cationului în soluție, în urma variației mobilității ionilor și a concentrației acestora în soluție, provocate de ultrasunete prin distrugerea parțială a sferei de hidratare a cationilor. Pe de altă parte, micșorarea gradului de asociere a moleculelor de apă, acțiune pusă la baza explicării multor procese datorate cîmpului ultrasonic, are drept consecință favorizarea hidratației ionilor metalici, acționînd deci în sens invers primului efect.

Variații ale viscozității soluției ultrasonate se repercutează de asemenea asupra mobilității ionilor, în mod diferit, producînd variații ale potențialelor de difuzie.

Toate elementele de mai sus converg asupra termenului  $\frac{u_- - u_+}{u_- + u_+}$  din expresia (1) și dau efecte diferite asupra anionului și cationului, în funcție de mărimile lor caracteristice, deci de natura electrolitului.

Probabil că ultrasunetele acționează și asupra efectului Debye modificîndu-i intervenția asupra mobilității ionilor.

Datorită acestui efect mobilitatea relativă a ionilor unui electrolit binar este:

$$u_c = u_0 - \left[ \frac{8,205 \cdot 10^5}{(\epsilon_0 T)^{3/2}} Z^2 u_0 + \frac{41,42 Z}{\eta_0 (\epsilon_0 T)} \right] \frac{1}{3} \sqrt{ZC} \quad (2)$$

unde:

- $u_0$  — mobilitatea „liberă” corespunzătoare diluției infinite
- $Z$  — valența ionului
- $\epsilon_0$  — constanta dielectrică a solventului
- $\eta_0$  — viscozitatea soluției
- $C$  — concentrația electrolitului.

Prin urmare s-ar putea ca efectele ultrasunetelor să se manifeste în variația unui număr destul de mare de termeni, ca:  $u_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\epsilon_0$  cu valori și în sensuri diferite.

Potențialul de electrod, compus din potențialul termodinamic și potențialul electrocinetic, este influențat de ultrasunete prin intermediul celui de-al doilea factor; probabil că asupra potențialului termodinamic ultrasunetele nu au nici un efect.

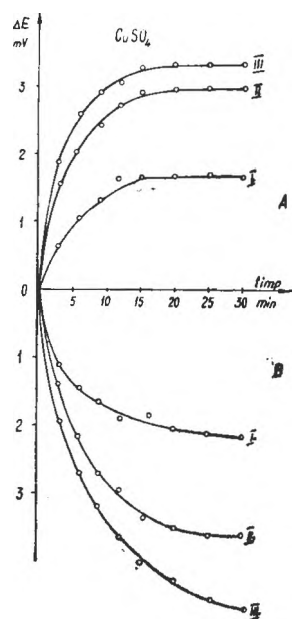


Fig. 4. Variația f.e.m. în funcție de timpul de ultrasonare pentru diferite rapoarte de concentrație: 5(I), 10(II), 50(III), la temperatura de 30°C.

Potențialul electrocinetic depinde de distribuția ionilor de semn contrar în stratul adsorbit fix și în stratul difuz mobil ce înaintea înspre interiorul lichidului. Această distribuție depinde în mare măsură de concentrația electrolitului în soluție, fiind foarte sensibilă la cele mai mici variații de concentrație precum și de valența ionilor din soluție.

Ultrasunetele, prin acțiunea lor mecanică, produc variații locale de concentrație în stratul difuz, ceea ce poate avea ca efect o variație a potențialului electrocinetic. Nu se poate vorbi de un sens determinat al variațiilor, ele avînd loc de obicei după curbe complicate.

Dacă se consideră stratul electric difuz similar cu atmosfera ionică a lui Debye și Hückel, se poate ajunge prin calcul la expresia potențialului electrocinetic pentru o anumită valoare a concentrației electrolitului și o anumită temperatură :

$$\xi = \frac{4 \pi \rho_s \sigma}{D} \quad (3)$$

unde :

- $\rho_s$  — densitatea de curenți a sarcinilor,
- $D$  — constanta dielectrică a electrolitului,
- $\sigma$  — grosimea stratului difuz.

Parametrii influențați de ultrasunet sînt  $D$  și  $\sigma$ . Se știe că în câmp constanta dielectrică a apei crește, ceea ce provoacă probabil și o mărire slabă a constantei soluției. Conform formulei (3) aceasta ar duce la micșorarea potențialului electrocinetic.

Parametrul  $\sigma$  este puternic perturbat de ultrasunet care la fel ca agitația termică duce la mărirea acestuia și deci la creșterea potențialului electrocinetic. Cele două influențe asupra potențialului electrocinetic sînt de sens contrar și prevalează una sau alta în funcție de diverse condiții.

În câmp ultrasonic, în prezența cavitației, apare o dispersie a electrozilor. Gradul de dispersie depinde de parametrii acustici și de caracteristicile electrodului. După cum se știe, argintul are un grad mare de dispersie, pe cînd al cuprului poate fi considerat nul. Efectul nu se va manifesta deci la pila de  $\text{CuSO}_4$ . La pila de  $\text{AgNO}_3$ , prin dispersarea electrodului de argint, se formează niște microelectrozi cu un strat dublu propriu, analog cu stratul dublu al electrodului de argint, ceea ce duce la o variație a potențialului electrocinetic.

În privința variației cu temperatura a efectului, se poate spune că ea acționează în același sens cu ultrasunetul, atît asupra potențialului de difuzie (factorul  $\frac{RT}{ZF}$  din formula 1), cît și asupra celui electrocinetic prin mărirea agitației termice.

**Concluzii.** 1. Ultrasunetul modifică potențialul pilelor de concentrație de  $\text{CuSO}_4$  și  $\text{AgNO}_3$ .

2. Mărirea și sensul efectului depind de natura pilei.

3. Efectul crește cu temperatura și cu raportul  $\frac{c_1}{c_2}$ .

(Intrat în redacție la 6 aprilie 1968)

## BIBLIOGRAFIE

1. Ludwig Bergmann, *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*. Stuttgart. S. Hirzel Verlag, 1954.
2. Șt. Vădeanu, F. Kelemen, *Metode ultrasonice de măsurare și control*. Referate și comunicări, Buc. 29–31 oct. 1964. IV, p. 27–35.
3. B. B. Kudreavțev, *Aplicarea metodelor ultraacustice în practica cercetărilor. fizico-chimice*. Moskova-Leningrad, Gostehteorizdat, 1952.
4. E. Constantin, D. Ausländer, I. Dăbală, C. Șerban, *Contribuții la studiul separării efectelor ultrasunetelor în măsurătorile de conductibilitate a unor dielectrici* (v. prezenta fasciculă (p. 111)).
5. A. Weinmann, Proc. Phys. Soc. 1959, nr. 73, p. 345.

## ДЕЙСТВИЕ УЛЬТРАЗВУКОВ НА НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ

(Резюме)

В работе изучается посредством измерений электродвижущей силы действие ультразвуков на элементы концентрации, в зависимости от разности концентраций, температуры и ориентации ультразвукового пучка. Результаты анализируются посредством двух категорий явлений, вызванных ультразвуками: электродных явлений и явлений в массе жидкости.

## L'ACTION DES ULTRASONS SUR DES PILES DE CONCENTRATION

(Résumé)

Dans ce travail on étudie par des mesurages de force électromotrice l'action des ultrasons sur certaines piles de concentration, en fonction des différences des concentrations, de la température et de l'orientation du faisceau ultrasonique.

Les résultats sont analysés dans deux catégories de phénomènes produits par les ultrasons; phénomènes d'électrode et phénomènes dans la masse du liquide.



# CONTRIBUȚII LA STUDIUL SEPARĂRII EFECTELOR ULTRASUNETELOR ÎN MĂSURĂTORILE DE CONDUCTIBILITATE A UNOR DIELECTRICI

de

EMILIA CONSTANTIN, D. AUSLÄNDER, IOANA DĂBALĂ, CORINA ȘERBAN

Măsurătorile de conductibilitate a lichidelor dielectrice au pus în evidență creșterea acestora sub acțiunea cîmpului ultrasonic. Astfel la tetraclorură de carbon și toluen variația de conductibilitate electrică atinge 30% din valoarea inițială [3]. Același lucru s-a observat la amestecuri de lichide dielectrice organice cum ar fi cele de alcooli și amine alifactice [4, 5].

În ceea ce privește cauzele efectului, părerile sînt împărțite; astfel unii autori [6] le atribuie proceselor de electrod, alții [7, 8] modificărilor provocate de cîmpul ultrasonic în interiorul lichidului, sau, în sfîrșit, ambelor grupe de fenomene.

Lucrarea de față urmărește separarea celor două efecte amintite la cîțiva dielectrice: apă bidistilată și apă purificată cu ajutorul rășinilor schimbătoare de ioni, clorofom, dioxan, clorbenzen, benzen, eter etilic.

**Procedeeul experimental.** S-a folosit un generator de ultrasunete tip TESLA cu frecvența de 1 MHz, intensitatea cîmpului corespunzînd unui curent de placă  $I = 70$  mA, și unei tensiuni de placă  $U = 1,2$  kV. Fasciculul ultrasonic a fost orientat paralel cu electrozii celulei de conductibilitate, care s-a termostatat.

Măsurătorile s-au efectuat la diferite temperaturi, cuprinse între 8°C și 50°C și la diferite intervale de timp pînă la 6 ore.

Electrozii de platină, cu suprafața de 0,25 cm<sup>2</sup> și distanța dintre plăci 0,5 cm, erau așezați în regim de egală intensitate a cîmpului ultrasonic. O pereche de electrozi s-a găsit în permanență în lichid iar cealaltă pereche s-a introdus periodic din 20 în 20 minute numai pe durata unei măsurători. Astfel s-a încercat localizarea efectelor ultrasunetelor în masa lichidului, respectiv la electrozi.

Măsurătorile de conductibilitate s-au efectuat în curent continuu, folosind o sursă de 70 V.

**Rezultate experimentale.** Variația densității de curent în cazul apei bidistilate, datorită ultrasunetelor,  $\Delta i$ , crește atît cu timpul de ultrasonare cît și cu temperatura pînă la stabilirea unui echilibru, după cum rezultă din fig. 1. Se constată valorile superioare ale efectului pentru electrozii ficși față de cei mobili, precum și modificarea cu temperatura a timpului de ultrasonare necesar atingerii palierului.

La temperatura de 8°C, curba  $\Delta i = f(t)$  prezintă un maxim pentru timpul de aproximativ o oră, după care efectul scade tînzînd asimptotic spre axa timpului.

Compararea efectelor în funcție de gradul de puritate al apei este semnificativă după cum rezultă din fig. 2. Astfel la temperatura de 20°C, valorile creșterii densității de curent în urma ultrasonării sînt mai mari la apa bidistilată decît la cea purificată cu ajutorul rășinilor schimbătoare de ioni.

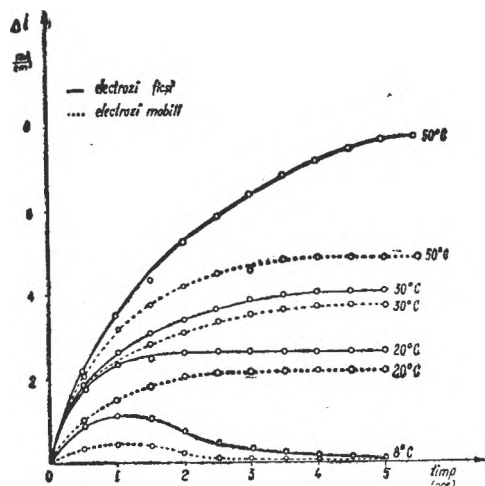


Fig. 1. Variația lui  $\Delta i$  în funcție de timp, pentru electrozii fiși și mobili la diferite temperaturi, în cazul apei bidistilate.

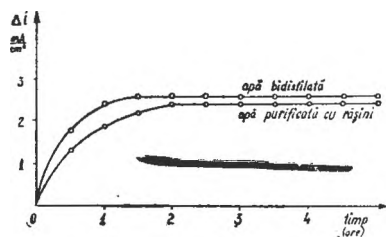


Fig. 2. Variația lui  $\Delta i$  în funcție de timp, pentru electrozii fiși la apa bidistilată și apa purificată cu ajutorul rășinilor.

Diferența efectelor redată pentru electrozii fiși în fig. 2, își menține alura și la determinările efectuate prin intermediul electrozilor mobili, pe întreaga durată de 6 ore de ultrasonare.

Celelalte lichide dielectrice enumerate, datorită conductibilității lor foarte mici n-au dat nici un efect în condițiile noastre de lucru.

În cazul cloroformului, folosind o altă pereche de electrozi cu suprafața 0,6 cm<sup>2</sup> și distanța între ei 0,8 mm, s-a obținut curent de conductibilitate de ordinul microamperilor.

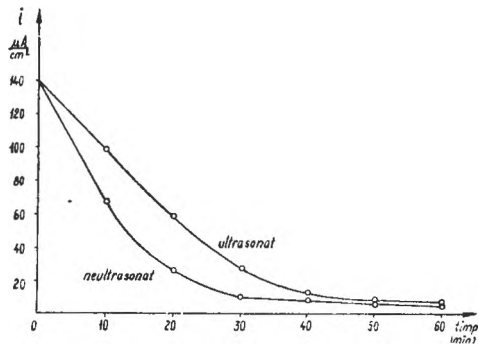


Fig. 3. Variația densității de curent în funcție de timp, cu și fără cîmp ultrasonic, pentru cloroform.

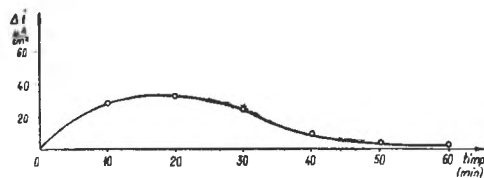


Fig. 4. Variația lui  $\Delta i$  în funcție de timp în cazul cloroformului.



În fig. 3 se vede că spre deosebire de apă, la cloroform, la  $t = 20^\circ\text{C}$ , densitatea de curent scade cu timpul atât în prezența cât și în absența cîmpului ultrasonic.

Efectul cîmpului ultrasonic în funcție de timp din fig. 4, prezintă o variație asemănătoare celei corespunzătoare apei bidistilate pentru temperatura de  $8^\circ\text{C}$ , prin prezența unui maxim la 20 minute.

**Interpretarea rezultatelor.** Ambele tipuri de apă cu care s-a lucrat prezintă o conductibilitate proprie, datorită impurităților dizolvate ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{NH}_3$ , praf, urme de substanțe solide dizolvate din pereții vasului) precum și existenței unui număr mic de ioni  $\text{H}^+$  și  $\text{OH}^-$ .

Mărirea conductibilității în timp este rezultatul impurificării apei în contact cu aerul, prin creșterea cantității de  $\text{CO}_2$  dizolvat pînă la atingerea unei valori de echilibru, ceea ce duce la formarea de noi ioni conform reacției:



Temperatura, după cum se știe, favorizează ruperea legăturilor de hidrogen dintre moleculele de apă asociate, avînd drept urmare creșterea produsului ionic al apei, fapt care explică mărirea conductibilității cu temperatura.

Fenomenele de electrod care dau efecte de sens opus celor amintite pînă acuma, au valori mult mai mici în cazul apei, fiind probabil esențiale în cazul cloroformului, ceea ce explică scăderea conductibilității acestuia cu timpul.

Acțiunea ultrasunetelor în masa lichidului s-a manifestat sistematic prin mărirea conductibilității, analog efectului de temperatură, ceea ce era de prevăzut pe baza cercetărilor cu privire la modificarea permitivității dielectricilor lichizi de către ultrasunete [9].

Pe de altă parte, este probabilă și modificarea în cîmp ultrasonic a gradului de hidratare a ionilor, avînd drept urmare mărirea mobilității lor.

În privința absorbției de  $\text{CO}_2$  în apă, ultrasunetul acționează în două sensuri opuse, prin îmbogățirea în  $\text{CO}_2$  a lichidului, respectiv degazarea lui. În condițiile de lucru date se pare că predomină primul efect datorită agitației ultrasonice, prin favorizarea transportului straturilor de lichid saturate cu  $\text{CO}_2$  de la suprafața liberă înspre interiorul lichidului; astfel, procesul de distrugere a gradientului de concentrație în  $\text{CO}_2$  este accelerat prin suprapunerea acestui efect cu agitația termică care acționează în același sens.

O a doua categorie de efecte ale cîmpului ultrasonic se manifestă asupra proceselor de electrod, puse în evidență prin caracterul diferit al electrozilor folosiți (fiecși și mobili), procese foarte complexe, chiar și în absența cîmpului ultrasonic.

Astfel introducerea în apă a electrozilor mobili după menținerea lor în aer timp de 20 minute, datorită adsorbției de gaze, le micșorează potențialul în comparație cu al electrozilor fiecși.

Durata diferită de trecere a curentului față de cele două tipuri de electrozi (de ordinul orelor, respectiv al secundelor) are drept consecință polarizarea lor diferită.

Pe lîngă acestea, deplasarea electrozilor mobili în masa de lichid provoacă apariția unui potențial electrocinetic, contribuind astfel la o polarizare diferențiată a celor două tipuri de electrozi.

În sfîrșit, interdependența dintre cele două perechi de electrozi se manifestă prin variația densității de curent măsurată cu ajutorul electrozilor fiecși, în momentul introducerii și scoaterii electrozilor mobili.

Modificarea densității de curent, prin acțiunea ultrasunetelor asupra proceselor de electrod, are diferite cauze [10].

În primul rînd ultrasunetele au o acțiune depolarizantă, prin degazarea electrozilor. Apoi, prin agitarea mecanică a lichidului, ultrasunetele introduc un potențial electrocinetic la electrozii fiși, mărind probabil și pe cel al electrozilor mobili. În fine, ultrasunetele modifică valoarea polarizării de concentrație dată de relația :

$$\Delta e = \frac{RT}{ZF} en \frac{K}{K-1} \quad (1)$$

unde :

$$K = \frac{ZFD}{n\delta} \quad (2)$$

este o constantă,

$D$  — coeficientul de difuzie,

$\delta$  — grosimea stratului difuz,

$n$  — suma numerelor de transport a tuturor ionilor din soluție, minus numărul de transport al ionului ce se descarcă.

Polarizarea de concentrație este cu atît mai mică cu cît valoarea constantei  $K$  este mai mare. După cum se vede din formula (2) valoarea lui  $K$  se mărește fie prin mărirea lui  $D$ , fie prin micșorarea lui  $\delta$ .

Ultrasunetele modifică ambele aceste mărimi în sensul micșorării polarizării de concentrație, ceea ce duce la creșterea densității de curent [11].

Avînd în vedere că la temperaturi scăzute polarizarea este mai mare, ea crescînd și cu timpul, acțiunea depolarizantă a ultrasunetelor ajunge la un moment dat la o valoare maximă, după care acest efect scade. Pentru cloroform, același proces se produce în timp mult mai scurt, chiar la temperatura de 20°C.

Diferența efectelor produse de ultrasunet în cazul apei bidistilate și a apei purificate cu ajutorul rășinilor schimbătoare de ioni, atît pentru electrozii fiși, cît și pentru cei mobili, se explică prin gradul diferit de puritate a celor două tipuri de apă.

**Concluzii.** 1. Ultrasunetele produc mărirea conductibilității electrice a apei și a cloroformului.

2. Efectul crește cu temperatura și cu timpul de ultrasonare.

3. Modificările observate se datoresc atît efectelor de electrod, cît și celor produse în masa lichidului.

(Intrat în redacție la 6 aprilie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Crawford A. E., *Technique des ultrasons*. Paris, Dunod, 1959, p. 227.
2. Eugen Bădărău, Mircea Grumăzescu, *Ultraacustica*. București, Ed. tehnică, 1967.
3. Griffing V. J., „J. Chem. Phys.” (1950), nr. 18, p. 997.
4. Ludwig Bergmann, *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*, Stuttgart, S. Hirzel Verlag, 1954.
5. Hatem S., „Compt. Rend.”, (1949), nr. 229, p. 42.
6. Seidl F., „Zs. f. Phys”, (1940), nr. 116, p. 359.
7. Tumanski S., Suiman H. S., „Koloidnii J.” (1939), nr. 5., p. 961.

8. Porter C. L. Young, „J. Amer. Chem. Soc.” (1938) nr. 60, p. 1497.
9. D. Ausländer, E. Constantin, A. Ciupe, „Acustica”, (1966) XVII, nr. 4, p. 204.
10. D. Ausländer, E. Constantin, „Studii și cercet. fizică”, (1963), nr. 6, XIV, p. 747
11. Jacques Guitton, „Journal des Recherches du C.N.R.S.”, (1955), nr. 48 (sept), p. 199.
12. W. Berkowitz, „Can. J. Chem.”, (1959), nr. 37, p. 13.

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ОТДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТОВ УЛЬТРАЗВУКОВ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

(Резюме)

Электропроводность хлороформа, бидистиллированной воды и воды, очищенной с помощью ионообменных смол, изменена ультразвуками.

Авторы измеряли плотности тока двумя парами электродов, из которых одна пара находилась всё время в жидкости при обработке ультразвуками, а другая — лишь при проведении одного измерения. Исползованный метод позволил сделать выводы о локализации эффектов в массе жидкости, соответственно у электродов.

Выявлены обе категории процессов, а также зависимость эффектов от природы жидкостей, времени обработки ультразвуками и температуры.

## CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DE LA SÉPARATION DES EFFETS DES ULTRASONS DANS LES MESURAGES DE LA CONDUCTIBILITÉ DE CERTAINS DIÉLECTRIQUES

(Résumé)

La conductibilité électrique du chloroforme, de l'eau bidistillée et de l'eau purifiée à l'aide des résines échangeuses d'ions, est modifiée par les ultrasons.

Les auteurs ont mesuré les densités de courant au moyen de deux paires d'électrodes, dont une paire était introduite dans le liquide pendant toute la durée de l'ultrasonorisation, tandis que l'autre l'était seulement pendant qu'on effectuait un mesurage. La méthode utilisée a permis de tirer des conclusions sur la localisation respective des effets dans la masse du liquide, et aux électrodes.

On a mis en évidence les deux catégories de processus, ainsi que la dépendance des effets de la nature des liquides, du temps d'ultrasonorisation et de la température.



# INFLUENȚA RADIAȚIILOR UV ASUPRA HALOGENURILOR ALCALINE IMPURIFICATE CU CATIONI

de

AL. NICULA, AL. DARABONT și S. FĂRCAȘ

**Introducere.** Halogenurile alcaline dopate cu diferiți cationi au fost obiectul a numeroase studii elaborate în ultimul timp. Interacțiunea rețelei cristaline a acestora cu radiațiile ultraviolete (UV) și defectele produse de acestea s-au studiat atît cu metode optice cît și cu metode de rezonanță magnetică. Astfel Bettica, Santucci și Stefanini [1] și Santucci și Stefanini [2] au urmărit influența radiațiilor UV asupra spectrelor de RES a ionului  $Mn^{2+}$  introdus în NaCl și KCl în diferite condiții experimentale. Metodele optice s-au bazat pe faptul că halogenurile alcaline sînt transparente pe o largă bandă a spectrului electromagnetic [3].

În lucrarea de față ne-am propus a studia influența radiațiilor UV asupra monocristalelor NaCl dopate natural cu cationi neparamagnetici și dopate controlat cu ionul paramagnetic de mangan. Sarea dopată natural cu cationi neparamagnetici a provenit de la „Salina Cacica” iar creșterea monocristalului pe care l-am numit NaCl—Y, s-a făcut prin metoda Czockralski-Kyropoulos, în atmosferă de aer și argon. Prin aceeași metodă s-au crescut și monocristalele dopate controlat adăugîndu-se în topitură într-o proporție de 0,1—0,05 moli %  $MnCl_2$  și  $CdCl_2$  rezultînd monocristalele dopate NaCl—Mn și NaCl—Cd.

Probele astfel obținute (NaCl—Y, NaCl—Mn, NaCl—Cd) au fost iradiate cu lumină UV la temperatura camerei și a azotului lichid. Iradierile s-au făcut cu o lampă Theta-Sonne tip Q 99 timp de 2—30 de ore.

Măsurătorile RES s-au efectuat cu instalația JES—3B în banda X, cu o modulație de 100 kc/sec la temperatura camerei și cea a azotului lichid. În intervalul 20—200 °C s-au urmărit intensitățile liniilor RES în funcție de temperatură pentru proba NaCl—Y. Pentru determinarea benzii optice de absorbție în infraroșu (I.R.) a probelor amintite, înainte și după iradiere s-a folosit spectrometrul U.R. 10 Zeiss.

**Rezultate experimentale.** Studiind prin RES monocristalele NaCl—Mn și NaCl—Cd am obținut în ambele semnalul ionului  $Mn^{2+}$  ceea ce înseamnă că  $CdCl_2$  conține ca impurități ionul de Mn. De fapt studiind acest spectru constatăm că ionul de mangan din NaCl—Cd este în concentrație foarte mică. Nu am observat nici un fel de influență asupra spectrului, a ionului de Cd. Din analiza spectrului  $Mn^{2+}$  în NaCl—Cd înainte de iradiere constatăm că el este compus numai din șase linii de structură hiperfină ceea ce înseamnă că ionul  $Mn^{2+}$  se află situat într-un câmp cristalin de simetrie cubică (fig. 1).

După iradiere cu UV spectrul nu se modifică esențial în ceea ce privește parametrii lui, constatându-se în schimb o micșorare considerabilă a intensității liniilor. Spectrul obținut în fig. 1 poate fi descris cu următorul hamiltonian de spin [4]

$$\mathcal{H} = g\beta\vec{H}S + ASI \quad (1)$$



Fig. 1.

unde  $S = 5/2$ ,  $I = 5/2$ . Folosind teoria perturbațiilor pînă la ordinul 3 obținem expresia care dă cîmpurile unde au loc tranzițiile de structură hiperfină. [5]

$$H_m = H_0 - Am - \frac{A^2}{2H_0} \left[ \frac{35}{4} - 2m^2 \right] - \frac{A^3}{2H_0^2} \left[ m^2 - \frac{65}{4} m \right] \quad (2)$$

Folosind ecuațiile (2) în care  $H_m$  au fost determinate experimental, s-au obținut constantele hamiltonianului (1)

$$|A| = 83,6 \pm 1 \text{ Gs}$$

$$g = 1,999 \pm 1,1 \cdot 10^{-3}$$

și intervalele de structură hiperfină calculate teoretic. În tabelul 1, intervalele de cîmp calculate teoretic sînt comparate cu cele experimentale.

Monocristalul NaCl—Mn prezintă un spectru REȘ ceva mai complicat. Înainte de iradiere cu UV el este compus din 6 componente de structură hiperfină situate în centru, suficient de intense, corespunzătoare tranziției electronice  $1/2 \leftrightarrow -1/2$ . Pe lîngă acest grup se mai văd în spectru alte grupuri laterale de intensitate mult mai mică. Acestea sînt grupuri de structură hiperfină, corespunzătoare altor tran-

Tabel 1

	$\Delta H_1$	$\Delta H_2$	$\Delta H_3$	$\Delta H_4$	$\Delta H_5$
exp.	79	81	83	85	88
teor.	80,5	80,3	83	85	88

ziții electronice. De fapt putem considera acest spectru (fig. 2) ca fiind format din două tipuri de spectre REȘ a ionului  $Mn^{2+}$ .

Spectrul de tip I corespunzător ionului  $Mn^{2+}$  într-un cîmp cristalin de simetrie cubică și spectrul de tip II, pentru ionul  $Mn^{2+}$  în cîmp cristalin de simetrie axială: din spectrul de simetrie axială am dedus că hamiltonianul de spin trebuie să fie de forma

$$\mathcal{H} = g\beta\vec{H}S + D \left[ S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + ASI \quad (3)$$

Calculînd analog ca și pentru NaCl—Cd nivelele de energie, am obținut o expresie asemănătoare cu (2) în care mai apare un termen ce conține pe  $D$  și anume  $-\frac{AD^2}{2H_0^2} \frac{64}{4} m$ . Cu ajutorul acestor relații și al cîmpurilor determinate experimental am găsit constantele hamiltonianului (3) și anume:

$$|A| = 87,9 \pm 3 \text{ Gs}$$

$$|D| = 117,89 \pm 3 \text{ Gs}$$

$$g = 1,991 \pm 2,0 \cdot 10^{-3}$$

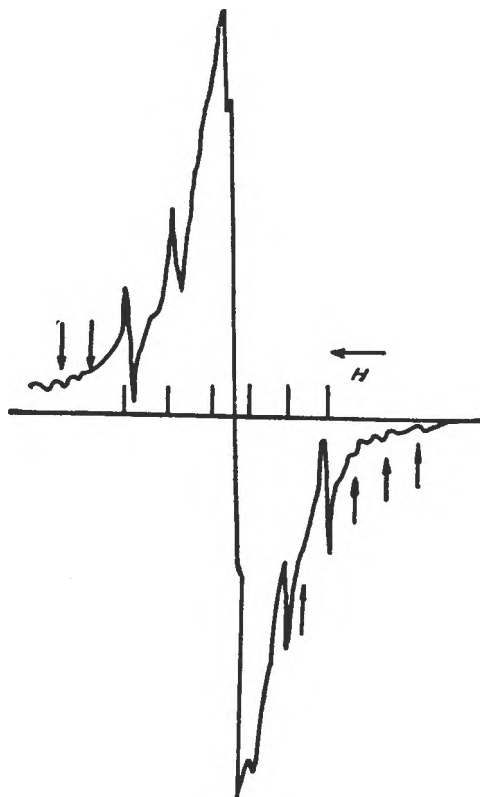


Fig. 2.



Fig. 3.

Intervalele de structură hiperfină pentru porțiunea centrală (tranziția electronică  $1/2 \rightleftharpoons -1/2$ ) a spectrului II calculate teoretic sînt comparate cu cele experimentale în tabelul 2.

Tabel 2

	$\Delta H_1$	$\Delta H_2$	$\Delta H_3$	$\Delta H_4$	$\Delta H_5$
exp.	79,12	82,31	87,53	91,97	94,88
teor.	77,82	86,50	87,52	93,92	99,00

După iradiere cu UV se observă dispariția structurii fine și hiperfine. Aceasta se datorește faptului că iradierea cu lumină UV provoacă trecerea manganului din poziție substituțională (cubică sau axială) în agregate de mangan care se formează interstițial sau în anumite regiuni ale rețelei. În urma acestui fenomen se obține o linie centrală suficient de intensă cu un  $g = 2,017$  și o lărgime de  $122,4 \pm 3$  Gs.

O comportare deosebită din punct de vedere RES o are monocristalul NaCl—Y după iradiere cu UV. Înainte de iradiere el nu prezintă nici o absorbție RES, iar după aceasta obținem un spectru care depinde pronunțat de unghiul dintre cîmpul magnetic și axele cristalului. În fig. 3 este redat spectrul probei NaCl—Y cînd axa [100] este paralelă cu H.

El este compus din patru linii. Trei componente sînt mai intense, amplitudinea lor crescînd pe măsură ce sînt situate la cîmpuri mai puternice. În spectru mai apare o linie care este mai puțin intensă. Spectrul din figura 3 seamănă din punctul de vedere al formei liniei și al comportării în funcție de unghi cu cel găsit în NaCl și NaBr dopat cu calciu și aluminiu [6]. Dependența de unghi în planul (110) este dată de o lege de forma ( $3 \cos^2 \Theta - 1$ ), adică la un unghi de  $54,34^\circ$  dintre axa [100] și H, spectrul constă dintr-o singură tranziție al cărei factor  $g = 2,067$ .

Studiind în funcție de temperatură liniile din fig. 3 și cea pentru  $\Theta = 54,34^\circ$  se observă că centrul paramagnetic obținut după iradiere cu UV dispăre la aproximativ  $140^\circ \text{C}$ .

**Discuții.** În urma analizei rezultatelor experimentale se constată că după iradierea cu UV a probei NaCl—Y apar în cristal centri paramagnetici a căror comportare și semnal RES nu se aseamănă cu ai celor cunoscuți. Studiind dependența unghiulară a semnalului RES putem afirma că centrul format se bazează pe o interacțiune dipolară între un electron în stare diferită de starea  $s$  și spinul nuclear al unuia sau mai mulți nuclei. Interesant de relatat e faptul că centrul despre care este vorba nu apare prin iradierea probei cu UV la temperatura azotului lichid.

Noi am propus cîteva modele pentru centrul format, dintre care pe baza calculelor care sînt în curs se va alege cel corespunzător comportării experimentale a spectrului. Dintre acestea amintim centrul constituit din doi protoni a căror axă de legătură este de-a lungul direcției [100], care au captat un electron. Spectrul RES al unui astfel de sistem poate fi interpretat cu ajutorul hamiltonianului de spin

$$\mathcal{H} = g\beta\vec{H}S + \sum_{i=1}^2 SA_iI_i \quad (4)$$

unde primul termen reprezintă interacțiunea electronului cu H iar al doilea este responsabil de interacțiunea hiperfină. Constanta  $A_i$ , poate fi scrisă [7] ca și

$$A_i = A + B [3 \cos^2 \Theta - 1] \quad (5)$$

$\Theta$  fiind unghiul dintre H și direcția care leagă cei doi nuclei; primul termen din  $A_i$  reprezintă interacțiunea de contact, iar al doilea interacțiunea dipol-dipol între spinul electronului și cel nuclear.

Alt model propus de noi este cel constituit dintr-o configurație de forma (CIX) — unde X poate fi un halogen sau un cation chiar paramagnetic dar în nici un caz  $\text{Mn}^{2+}$ .

Și pentru acest model se poate folosi hamiltonianul (4) cu mici modificări care constau în introducerea unor termeni suplimentari. În orice caz spectrul obținut poate fi interpretat dacă considerăm în (5) pe  $A$  egal cu zero, obținînd deci

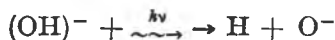
$$A_i = B [3 \cos^2 \Theta - 1] \quad (6)$$

Orientarea acestor centri de-a lungul axei [100] este afirmată de faptul că pentru H||[100] obținem cîmpul cel mai jos la care apare absorbția RES.

Numărul de modele propuse cuprinde și pe acele bazate pe apariția unor vacanțe în rețeaua cristalină, mai ales pentru că s-a obținut acest semnal în urma unei dopări controlate [6], dar aceste probleme sînt în curs de rezolvare.



■ Dintr-un anumit punct de vedere primul model este susținut de faptul că în monocristalele crescute sintetic există grupul  $(OH)^-$  care în urma iradierii cu UV se descompune conform cineticii [3]



hidrogenul ocupînd o poziție interstițială iar oxigenul una substituțională.

Măsurătorile optice efectuate asupra probei NaCl—Y indică apariția în urma iradierii cu UV a unei benzi de absorbție în I.R. la  $1650\text{ cm}^{-1}$  și  $2830\text{—}2890\text{ cm}^{-1}$  care pot fi puse pe seama deformației respectiv vibrației rețelei. Înainte de iradiere nu apare această absorbție și nici pentru probele NaCl—Cd și NaCl—Mn nu au putut fi puse în evidență.

Considerăm că aceste defecte observate prin spectroscopie optică sînt în legătură cu defectul paramagnetic produs.

Pentru probele NaCl—Cd și NaCl—Mn s-a obținut o absorbție al cărei maxim este situat la  $800\text{ cm}^{-1}$ , atît înainte cît și după iradiere. O altă bandă pusă în evidență doar înainte de iradiere este situată la  $3600\text{ cm}^{-1}$  și corespunde probabil cantității de apă sau aer din cristale. După iradiere acestea fiind active fotochimic, se descompun și rezultă dispariția benzii amintite.

(Intrat în redacție la 13 aprilie 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. P. Bettica, S. Santucci, A. Stefanini, *Nuovo Cimento*, **X**, 48, 316 (1967).
2. S. Santucci, A. Stefanini, *Nuovo Cimento*, **X**, 52 B, 552 (1967).
3. J. H. Schulman, W. D. Compton, *Color Centers in Solids*, London, (1962).
4. W. Low, *Paramagnetic Resonance in Solids*, Acad. Press. Inc., N. Y., 1960.
5. Al. Nicula, I. Ursu, S. Nistor, *Rev. Roum. Phys.*, **10**, 229 (1965).
6. Al. Nicula, S. Fărcaș, Al. Darabant, *Al XV-lea col. Ampère*. Grenoble, 1968.
7. R. Bottcher, W. Windsch, W. Lüdke, *Phys. Stat. Sol.*, **20**, 121 (1967).

#### ВЛИЯНИЕ УФ ИЗЛУЧЕНИЙ НА ЩЕЛОЧНЫЕ ГАЛОИДЫ, ЗАГРЯЗНЕННЫЕ КАТИОНАМИ

(Резюме)

В работе изучается влияние УФ излучений на монокристаллы NaCl, естественно загрязненные непарамагнитными катионами и загрязненные под контролем ионом марганца. Что касается образцов, загрязненных марганцем путём ЭПР, отмечилось что облучение УФ светом благоприятствует осаждению марганца.

Спектры ЭПР до и после облучения были интерпретированы спиновым гамильтонианом

$$\mathcal{H} = g\beta H \cdot S + \vec{A}\vec{S} \cdot I$$

в случае иона  $Mn^{2+}$  в кубическом кристаллическом поле и гамильтонианом

$$\mathcal{H} = g\beta H \cdot S + D \left[ S \frac{2}{z} \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \vec{A}\vec{S} \cdot I$$

в случае появления осевой пертурбации.

Естественно загрязненные образцы представляют после облучения особый спектр, который ведёт себя в зависимости от угла, по закону вида  $(3 \cos^2 - 1)$ . В этом случае предполагается, что спектр является результатом центра вида  $(OH)^-$  или  $(ClX)^-$ . На этих образцах проводились измерения поглощения в ИК области и после облучения УФ излучениями в образцах отмечалось это поглощение. Сигнал ЭПР естественно загрязненных образцов исчезает при  $140^\circ C$ .

## INFLUENCE OF UV RADIATIONS UPON ALKALINE HALOGENS DOPED WITH CATIONS

### ( S u m m a r y )

The authors study the influence of UV radiations on NaCl single crystals, naturally doped with non-paramagnetic cations and controllably doped with manganese ion. As far as the manganese doped samples are concerned, it has been observed by ESR that irradiation with UV light favours the precipitation of manganese. The ESR spectrum, before and after the irradiation, can be explained by the spin Hamiltonian

$$\mathcal{H} = g\beta H \cdot S + \vec{A}S \cdot I$$

in the case of  $Mn^{2+}$  ion in a cubic crystalline field, and in case of an axial perturbation by the Hamiltonian

$$\mathcal{H} = g\beta H \cdot S + D \left[ S \frac{2}{z} - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \vec{A}S \cdot I$$

The samples doped naturally show after irradiation a special spectrum which depends on angle after a law of the form  $(3 \cos^2 - 1)$ . It is assumed in this case that the spectrum is due to a center of the form  $(OH)^-$  or  $(ClX)^-$ . IR absorption measurements were performed. After irradiation with UV the samples showed IR absorption. The ESR signal of the naturally doped samples decays at  $140^\circ C$ .

# MĂSURAREA TIMPILOR DE RELAXARE UTILIZÎND OBSERVAREA SIMULTANĂ A ABSORBȚIEI ȘI DISPERSIEI

de

D. DEMCO, R. BAICAN

**I. Introducere.** Timpii de relaxare constituie parametri importanți ce caracterizează proprietățile magnetice ale materiei. Pentru determinarea lor absorbția cît și dispersia de rezonanță constituie instrumente folositoare.

Dispersia și-a evidențiat în ultimii ani marile posibilități în studiul saturației și a determinării cu mare precizie și selectivitate a susceptibilității statice [1]. Studiul dependenței formei liniei de dispersie de frecvența de modulare ( $\omega_m$ ) la cîmpuri de r.f. suficient de puternice pentru a satura absorbția permite determinarea timpilor de relaxare. Rezultatele sînt aplicate pentru cazul simplificat  $T_1 = T_2$ , [2]. Tot pentru cazul rezonanței magnetice nucleare în [3], se determină  $T_2$  din punctele unde derivata curbei de dispersie se anulează. Timpul de relaxare  $T_1$  se obține pe calea comparării amplitudinii semnalelor pentru diferiți factori de saturație.

În această lucrare studiem determinarea timpilor de relaxare pentru cazul cîmpului perturbator foarte slab în jurul rezonanței, utilizînd simultan curba de dispersie și derivata curbei de absorbție. Valoarea obținută pentru  $T_2$  în cazul octoclorfenotiazinilului este mai precisă ca cea determinată în [4] deoarece ținem cont și de valoarea cîmpului de microunde în cavitatea de măsură.

**II. Expresiile timpilor de relaxare.** Ecuațiile Bloch dau o descriere cantitativă corectă în cazul probelor lichide. În general aceste ecuații sînt de asemenea aplicabile pentru magnetizarea electronică de spin în solidele cu linii de rezonanță lorentziene ca un rezultat al unei puternice interacțiuni de spin. Ele sînt consistente cu experiențele efectuate în metale și radicali liberi organici [5]. În solide cu toate acestea ele sînt numai calitativ valabile și pot să conducă la concluzii greșite [6], [7].

În condițiile cîmpului perturbator foarte slab în jurul rezonanței  $\omega_1$ ,  $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ ,  $\tau_c^{-1}(\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega)$ ,  $\tau_c \equiv$  timpul de corelare,  $\omega_1 \equiv \gamma H_1$  și  $\omega_m T_1 \ll 1$ , [2] expresiile componentelor susceptibilității dinamice sînt:

$$\chi' = \frac{\frac{1}{2} \omega_0 T_2^2 \Delta\omega \chi_0}{1 + \gamma^2 H_0^2 T_1 T_2 + (\Delta\omega T_2)^2} \quad (1)$$

$$\chi'' = \frac{\frac{1}{2} \omega_0 T_2 \chi_0}{1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2 + (\Delta\omega T_2)^2} \quad (2)$$

unde  $H_1$  este intensitatea câmpului în cavitatea de măsură,  $\chi_0$  susceptibilitatea statică iar  $\gamma$  factorul giromagnetic.

Ne propunem a obține timpul de relaxare  $T_1$  și  $T_2$  utilizând (1) și (2) ce dau suficient de corect mărimea și forma semnalului de dispersie și absorbție pentru valori suficient de mici ale lui  $H_1$ . Dispersia conține aceleași informații ca și absorbția dar permite măsurători cu precizie mai mare deoarece  $\chi'$  poate fi determinat absolut iar lărgimea liniei nu este afectată de liniaritatea instalației. Pentru cazul  $\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2 \ll 1$  utilizând curba de dispersie s-a putut determina  $T_2$  pentru DPPH găsindu-se o valoare ce concordă cu cea din literatură [8].

Pentru determinarea și a lui  $T_1$  utilizând (1) și (2) obținem următoarele mărimi a căror semnificație este dată în fig. 1 și fig. 2.

$$|\Delta\omega|_e^a = \delta \quad (3)$$

$$|\chi'|_e = \frac{1}{4} \omega_0 \chi_0 \delta^{-1} \quad (4)$$

$$\left( \left| \frac{d\chi'}{d(\Delta\omega)} \right| \right)_{\Delta\omega=0} \equiv \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \omega_0 \chi_0 \delta^{-2} \quad (5)$$

$$|\Delta\omega|_e^a = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \quad (6)$$

$$\left| \frac{d\chi''}{d(\Delta\omega)} \right|_e = \frac{9}{16\sqrt{3}} \frac{\omega_0 \chi_0}{a} \delta^{-2} \quad (7)$$

$$\left( \left| \frac{d^2\chi''}{d(\Delta\omega)^2} \right| \right)_{\Delta\omega=0} \equiv \text{tg } \beta = \frac{\omega_0 \chi_0}{a} \delta^{-3} \quad (8)$$

unde  $\delta \equiv \frac{a}{T_1}$  și  $a^2 \equiv 1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2$

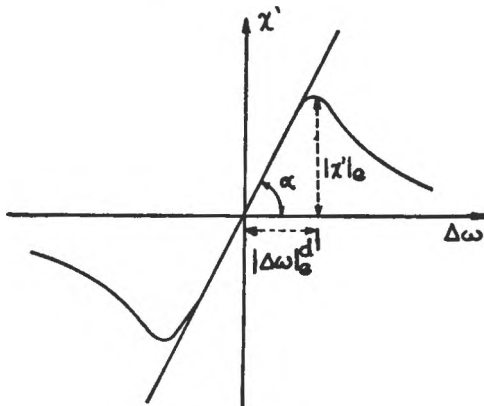


Fig. 1.

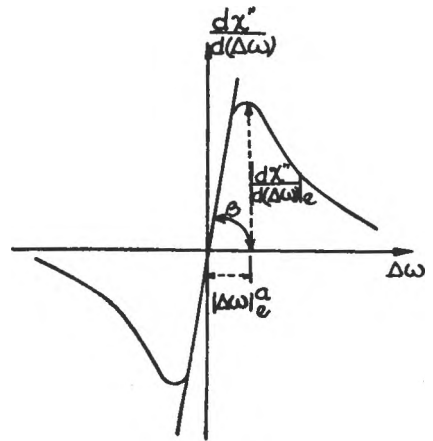


Fig. 2.

Din (3)–(5) observăm că pentru o valoare determinată a lui  $H_1$  din curba de dispersie se obține numai raportul  $\delta$ . Trebuie să utilizăm și curba de absorbție și anume acei parametri ai curbei ce nu depind numai de  $\delta$ . Obținem imediat două metode echivalente ce permit în principiu determinarea simultană a lui  $T_1$  și  $T_2$ .

*Metoda A.* Din combinarea lui (7) și (3) ce poate fi determinată mai precis decât (6) din motive de liniaritate, obținem:

$$T_2 = \frac{9}{16\sqrt{3}} \frac{\omega_0 \chi_0}{\left(\frac{d\omega}{d\omega}\right)_e^3} \left| \frac{d\chi''}{d(\Delta\omega)} \right|_e^{-1} \quad (9)$$

*Metoda B.* Compararea raportului  $\text{tg } \beta / \text{tg } \alpha$  cu (3) ne permite a scrie:

$$T_2 = \frac{2 \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta \left(\frac{d\omega}{d\omega}\right)_e^2} \quad (10)$$

În ambele metode  $T_1$  se determină din expresia:

$$T_1 = \frac{T_2 \left| \frac{d\omega}{d\omega} \right|_e^2 - 1}{\gamma^2 H_1^2 T_2} \quad (11)$$

Rezultatele obținute sînt valabile pentru cazul unei linii lorentziene simetrice și pot fi extinse pentru linii gaussiene sau pentru combinația lor [9].

**III. Metodica experimentală.** Vom aplica metodele *A* și *B* în cazul radicalilor liberi organici solizi, a căror linie poate fi considerată cu suficientă precizie ca fiind lorentziană [10]. Pentru observarea simultană a absorbției și dispersiei a fost utilizat un spectrometru comercial JES-3B a cărui bloc de microunde a fost completat astfel încît să permită înregistrarea curbei de dispersie [8]. Valoarea lui  $\chi'$  și deci  $\text{tg } \alpha$  se poate determina măsurînd direct variația de frecvență.

Valorile  $\left| \frac{d\chi''}{d(\Delta\omega)} \right|_e$  și  $\text{tg } \beta$  le vom determina utilizînd o metodă relativă [1].

Utilizînd ca etalon DPPH-ul [8], din (7) obținem  $\left| \frac{d\chi''}{d(\Delta\omega)} \right|_e^{\text{etalon}}$  iar din spectru tensiunea corespunzătoare  $U^e$ , la atenuare zero. Pentru constanta de proporționalitate:

$$k^e \equiv \frac{U^e}{\left| \frac{d\chi''}{d(\Delta\omega)} \right|_e^{\text{etalon}}} = A \eta^e \quad (12)$$

obținem valoarea  $3,576 \cdot 10^{13} \frac{mv \cdot \text{gr}}{uem \cdot \text{sec}}$ , unde  $A$  este un factor de aparat iar  $\eta^e$  factorul de umplere pentru etalon.

Urmînd aceeași cale, pentru metoda *B* obținem  $k^e = 3,867 \cdot 10^{13} \frac{mV \cdot \text{gr}}{uem \cdot \text{sec}}$  ce este în bună concordanță cu valoarea dată anterior.

**IV. Discutarea rezultatelor pentru octoclorfenotiazinil.** Radicalul liber octoclorfenotiazinil [11] a fost mojarat fin pentru a diminua asimetria liniei.

Constanta de proporționalitate pentru probă  $k^p$  se obține cunoscînd factorul de umplere al probei  $\eta^p$ ,

$$k^p = \frac{\eta^p}{\eta^e} k^e \quad (13)$$

Măsurînd lărgimea liniei de dispersie și tensiunea maximă de la linia de zero pentru derivata curbei de absorbție, în aceleași condiții ca la etalonare și utilizînd (13), (12) și (9) obține  $T_2 = 1,42 \cdot 10^{-8}$  sec. iar din (10),  $T_2 = 1,43 \cdot 10^{-8}$  sec. Deci în limita erorilor experimentale ambele metode furnizează aceleași rezultate.

Analog DPPH-ului este de așteptat ca și în acest caz  $T_1 \simeq T_2$ . Deoarece intensitatea cîmpului de microunde în cavitatea de măsură este aproximativ  $10^{-2}$  G s limita inferioară a lui  $T_1$  ce poate fi determinată cu suficientă precizie este  $10^{-4}$  sec. Mărirea puterii clistronului instalației permite micșorarea acestei limite inferioare, astfel ca  $\omega_1 \tau_c \ll 1$  să fie îndeplinită și linia de absorbție să nu dispară.

În concluzie, observarea simultană a absorbției și dispersiei permite în principiu, fără a modifica puterea cîmpului perturbator sau frecvența de modulare de a determina pe  $T_1$  și  $T_2$ .

(Intrat în redacție la 15 aprilie 1968)

#### B I B L I O G R A F I E

1. J. Talpe, L. van Gerven, Phys. Rev. **145**, 718 (1966)
2. H. Nagasawa, J. Phys. Soc. Japan, **20**, 1808 (1965).
3. A. Dezhavsky, A. Petrov, Dokl. Bolg. An, **19**, 1127 (1966).
4. R. Baican, D. Demco, Comunicare internă.
5. M. A. Gartens, J. I. Kaplan, Phys. Rev. **99**, 459 (1955).
6. A. G. Redfield, Phys. Rev. **98**, 1787 (1955).
7. I. Solomon, J. Ezraatty, Phys. Rev. **127**, 78 (1962).
8. R. Baican, A. Bódi, D. Demco, (sub tipar).
9. H. A. Farach, H. Teitelbaum, Canad. J. Phys. **45**, 2913, (1967).
10. I. Ursu, Rezonanță electronică de spin, Ed. Acad. (1965).
11. C. Bodea, I. Silberberg, Rev. Roum. Chim., **9**, 505 (1965).

#### ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ, ИСПОЛЬЗУЯ ОДНОВРЕМЕННОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ

(Резюме)

Используя выражение действительной и мнимой части динамической восприимчивости в условиях слабого пертурбирующего поля вокруг резонанса, указывается на возможность одновременного определения  $T_1$  и  $T_2$  из кривой поглощения и дисперсии. Метод применяется для определения  $T_2$  у октохлорфенотиазинила. Указывается также на нижний предел измерения  $T_1$ .

#### MEASUREMENTS OF THE RELAXATION TIMES USING SIMULTANEOUS OBSERVATION OF ABSORPTION AND DISPERSION

(Summary)

Using the expression of real and imaginary part of the dynamic susceptibility under the conditions of weak perturbing field about resonance the authors indicate the possibility to determine simultaneously  $T_1$  and  $T_2$  from the absorption and dispersion curve.

The method is applied for the determination of  $T_2$  in case of octochlorphenothiazinyl. The lower measure limit of  $T_1$  is showed.

# MAGNETISCHE KERNRESONANZ DES ISOTOPES $\text{Li}^7$ IM LITHIUMKARBONAT, —OXYD UND —CHROMIT

von

IULIU POP, VASILE NICULESCU, OLIVIA POP, LIVIU STĂNESCU

**Einführung.** Das Isotop  $\text{Li}$  wird durch einen Kernspin  $I = 3/2$  charakterisiert. Die Folge davon ist das Erscheinen von elektrischen Quadrupoleffekten in Netzen mit niedriger Symmetrie. Ausserdem ruft seine chemische Wirksamkeit ein besonderes Verhalten dieses Elementes im Rahmen der magnetischen Kernresonanz hervor.

Die vorliegende Arbeit verfolgt die magnetischen Kerneffekte im Lithiumchromit, das aus Lithiumkarbonat und Chromtrioxyd gewonnen wurde, wobei das Lithiumoxyd eine Zwischenstufe im Zersetzungsprozess des Lithiumkarbonates darstellt. Das Studium bezieht sich sowohl auf das Endprodukt Lithiumchromit, wie auch auf den Bestandteil Lithium, in Form von Karbonat und Oxyd.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der elektrischen und magnetischen Studien des oxydischen Halbleitersystems  $\text{Cr}_2\text{O}_3\text{—Li}_2\text{O}$  in welchem unter anderen auch die chemische Verbindung  $\text{Cr}_2\text{O}_3\text{Li}_2\text{O}$  [1] erhalten wurde.

Aus den statischen magnetischen Suszeptibilitätsmessungen, sowie aus den Messungen der paramagnetischen Resonanzabsorption für Verbindungen mit kristallinischer Beschaffenheit (siehe weiter oben), ist ein antiferromagnetisches Verhalten mit einem dem Chromsesquioxyd entsprechenden Néelpunkt festzustellen.

Da ein Zusammentreffen der Néelpunkte der beiden Verbindungen kaum wahrscheinlich ist, führten wir ein zusätzliches magnetisches Kernresonanzstudium durch. Dadurch wurde der Einfluss der örtlichen magnetischen Feldern auf den Kern des Isotopes  $\text{Li}^7$  verfolgt, der im antiferromagnetischen Bereich gegenüber dem paramagnetischen Bereich eine Verschiebung der Resonanzfrequenz zur Folge hat, wenn die Substanz eine antiferromagnetische Spinstruktur aufweist.

**Versuchsverfahren und Zubereitung der Proben.** Das Lithiumchromit wurde durch Vermischen des Lithiumkarbonates p.a. und des  $\text{CrO}_3$  p.a. bereitet. Um die Zersetzung des Karbonates herbeizuführen, wurde das Gemisch mit doppeltdestilliertem Wasser behandelt. Nach dem Trocknen in der Etuve und Homogenisierung, wurden die Proben 4 Stunden unter Luftzufuhr bei  $1370^\circ\text{K}$  ausgeglüht. Zusätzlich wurde noch ein Ausglühen 14 Tage lang bei  $1270^\circ\text{K}$  vorgenommen [1].

Die Kernresonanzstudien wurden mit einer Frequenz von 23 MC/s mit einem Kernresonanzspektrometer Typ JEOL, mit Brückendetektor, in einem Temperaturbereich zwischen 120–450°K durchgeführt.

**Ergebnisse und Diskussion.** 1.  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ : Da die Quadrupoleffekte, die im Netz mit niedriger Symmetrie im  $\text{Li}^{7}$  Kern mit dem Spin  $I = 3/2$  auftreten, verhältnismässig klein sind, können nur die Effekte erster Ordnung wahrgenommen werden.

Im allgemeinen Fall der Quadrupoleffekte erster Ordnung hat das Wechselwirkungshamiltonian den nachfolgenden Ausdruck:

$$\mathcal{H} = -\gamma_n h \vec{H}_0 I_x + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} [(3I_x^2 - I^2) + \eta(I_x^2 - I_y^2)] \quad (1)$$

wo  $\gamma_n$  das giromagnetische Verhältnis,  $H_0$  das äussere Feld,  $I_x, I_y, I_z$  die Komponenten des Kernspinoperators auf den Koordonatenachsen,  $(I_x || H_0)$ ,  $Q$  das elektrische Quadrupolmoment,  $q = V_{zz}/e$  der Feldgradient beim Kern und  $\eta = (V_{xx} - V_{yy})/V_{zz}$  der Parameter für die Asymmetrie des Feldes sind, wobei  $V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}$  die Diagonalkomponenten des elektrischen Potentialtensors auf den Kern und  $e$  die Last des Elektrons darstellen. Im Falle der axialen Symmetrie des kristallinen Netzes ( $V_{xx} = V_{yy}$ ), führen die Berechnungen der energetischen Stufen für den Kern mit dem Spin  $I = 3/2$  zu dem Ausdruck:

$$E_m = -\gamma_n h H_0 m + \frac{e^2 q Q}{48} [12 m^2 - 15] \quad (2)$$

von wo man die Übergänge, die für  $m = +1/2 \rightleftharpoons -1/2$  und  $m = \pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 1/2$  stattfinden, einschätzen kann, wobei  $m$  die magnetische Quantenzahl ist.

Für den Fall der axialen Symmetrie des Netzes und in Abwesenheit der Quadrupoleffekte zweiter Ordnung hat die Absorptionslinie die Form aus Abbildung 1, wo folgende Bezeichnungen vorgenommen wurden:  $\nu_0 = (\gamma_n/2\pi)H_0$  und  $\nu_Q = e^2 q Q/2h$ . Die mittlere Hauptlinie entspricht der Zeemanschen Spaltung, ( $m = +1/2 \rightleftharpoons -1/2$ )

und das Satellitenpaar, um  $\pm \nu_Q/2$  von der Hauptlinie distanziert, den Übergängen  $m = \pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 1/2$ .

Man berechnet im Allgemeinen die Grösse des Feldgradienten am Kern, indem man sämtliche Feldeffekte, die auf den Kern einwirken, in Betracht nimmt; man erhält den annähernden Ausdruck [3]:

$$q = q_0 + (1 + \gamma_s) q_i \quad (3)$$

wo  $q_0$  der Beitrag zum Gradienten des Valenzelektrons,

$q_i$  der Feldgradient des Ions und  $\gamma_s$  der Koeffizient der Antiabschirmung ist.

Für den Fall des Lithiumkarbonates ist die Ableitung der Absorptionskurve für den Kern  $\text{Li}^{7}$  in Abbildung 2 dargestellt. Die Linienform sowie das Vorhandensein eines einzigen Satellitenpaares, die denselben Übergängen  $m = \pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 1/2$  entsprechen, zeigen sowohl das Fehlen der Quadrupoleffekte höherer Ordnung an,

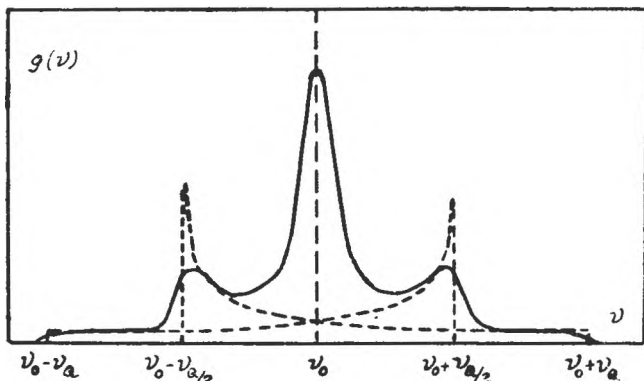
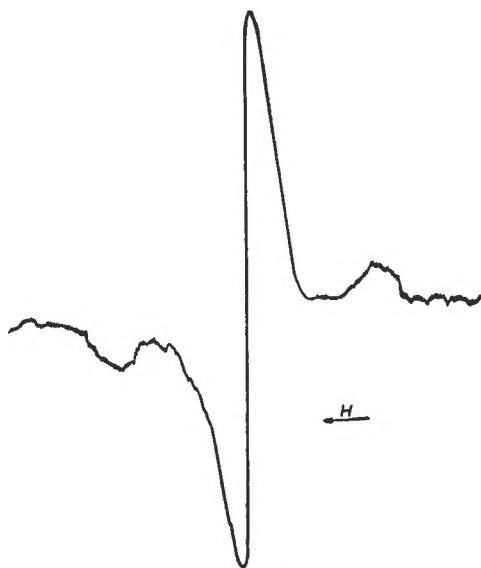


Abb. 1.

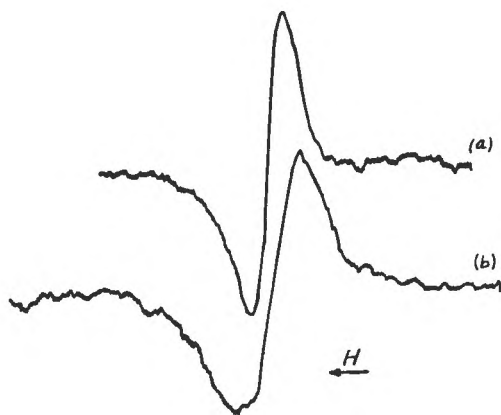


wie auch die Tatsache, dass die Lithiumionen aus dem Netz in magnetischen gleichwertigen Stellungen angeordnet sind.

\* Die aus dem Spektrum berechnete Quadrupolkopplungskonstante hat den Wert 92 kc/s, die den von P o u n d [4] gleich 92 kc/s als wahrscheinlich gefundenen



A b b. 2.



A b b. 3.

bestätigt. Ausserdem wurde der Gesamtwert des Feldgradienten am Kern  $q = 6 \cdot 10^{23}$  V/cm<sup>2</sup> bestimmt, wo der von Wharton [5] gefundene Wert des Quadrupolmomentes  $Q = -4,5 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup> in Betracht genommen wurde. Dieser Wert des Gradienten kann vor allem aus dem Glied  $q_i$  der Gleichung (3) bestimmt werden, beziehungsweise kann man den Grad der Kovalenzen der Bindungen im Netz als klein annehmen. Berücksichtigt man den Wert, den Bersohn [6] für den Antiabschirmungskoeffizienten des Ions  $\text{Li}^7$ ,  $\gamma_s = -0,256$  angibt, erhält man für  $q_i$  den Wert  $8 \cdot 10^{23}$  V/cm<sup>2</sup>.

Andererseits wurde durch das Resonanzabsorptionsstudium, in Abhängigkeit von der Temperatur keine Veränderung der Linienbreite, die den Übergängen  $m = \pm 1/2 \rightleftharpoons -1/2$  entsprechen, hervorgehoben. Ihr Wert bleibt konstant 7,48 kc/s im ganzen Bereich von 120–450 °K und auch die Stellung der Satelliten bleibt konstant.

2.  $\text{Li}_2\text{O}$ : Das Lithiumoxyd wurde in Form von polykristallinischem Pulver studiert, das durch die Zersetzung des Karbonates erhalten wurde. Diese chemische Verbindung kristallisiert im kubischen System, und deshalb sind keine Quadrupoleffekte feststellbar. Das Resonanzspektrum weist eine einfache Linie auf (Abb. 3a), die eine Breite von 7,48 kc/s hat und mit der Breite der Hauptlinie des Lithiumkarbonates identisch ist; für das Moment zweiter Ordnung wurde der Wert  $(14,2 + 0,1)10$  (kc/s)<sup>2</sup> erhalten. Vergleichbar dem Lithiumkarbonat bleibt die Linienbreite und das Moment zweiter Ordnung im untersuchten Bereich unabhängig von der Temperatur.

3.  $\text{Cr}_2\text{O}_3 \cdot \text{Li}_2\text{O}$ : Infolge der Entstehung des Lithiumchromites, in Gegenwart von paramagnetischen  $\text{Cr}^{3+}$  Ionen im Netz, wird das Erscheinen von Wechselwirkungen hervorgerufen, die eine zusätzliche Verbreiterung der Absorptionslinie von 7,48 kc/s beim Lithiumoxyd, bis zu 11,88 kc/s beim Chromit (Abb. 3b), und ebenso auch ein Anwachsen des Momentes zweiter Ordnung auf  $46,2 \cdot 10$  (c/s)<sup>2</sup> mit sich bringen. Aus der Temperaturabhängigkeit der elektronischen Spinresonanzlinienbreite und der statischen magnetischen Suszeptibilität geht im allgemeinen hervor, dass die chemische Verbindung  $\text{Cr}_2\text{O}_3 \cdot \text{Li}_2\text{O}$  ein antiferromagnetisches Betragen aufweist [1], mit einer Néeltemperatur bei 313°K, die auch dem Chromtrioxid eigen ist.

Die Tatsache, dass die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Kernresonanzabsorption beim Lithiumchromit keine Änderung der Linienbreite und der Resonanzfrequenz im untersuchten Bereiche hervorhob, widerlegt das Vorhandensein einer antiferromagnetischen Struktur dieser chemischen Verbindungen bei einer Temperatur, die über 120°K liegt. Der antiferromagnetische Effekt, der durch die elektronische Spinresonanz und die statische magnetische Suszeptibilität gewonnen wurde, kann durch das Vorhandensein eines Überschusses von nicht-reagiertem  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  — welches ein mechanisches Gemisch mit dem Lithiumchromit bildet — hervorgerufen worden sein.

Zur Unterstützung dieser Behauptung dient die Tatsache, dass die Art der chemischen Zubereitung des Lithiumchromites einen grossen Einfluss auf das nichtreagierte Chromsesquioxyd ausübt. Eine andere Zubereitungsart, verschieden von der oben beschriebenen zeigte, dass das so erhaltene Lithiumchromit dem Curie-Weiss'schen Gesetz im Temperaturbereich zwischen 90°—970°K folgt. Die Ergebnisse der elektronischen Spinresonanz zeigen aber trotzdem einen schwachen antiferromagnetischen Effekt an, was voraussetzen lässt, dass noch immer eine sehr kleine Menge nichtreagiertes  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  vorhanden ist.

**Schlussfolgerung.** Aus den Studien der magnetischen Kernresonanz mit dem Lithiumkarbonat, -oxyd und -chromit ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

1. Das Lithiumkarbonat kristallisiert in einem Netz mit axialer Symmetrie, da der Wert des asymmetrischen Koeffizienten Null ist.
2. Die Form der Absorptionslinie für das Lithiumkarbonat zeigt an, dass die Lithiumionen gleichwertige magnetische Stellungen im Netz einnehmen.
3. Der für die Quadrupolkopplungskonstante bestimmte Wert bestätigt den von P o u n d als wahrscheinlich gefundenen Wert in der Höhe von 92 kc/s. Ebenso wurde der Wert des elektrischen Feldgradienten am Kern gleich  $6 \cdot 10^{22}$  V/cm<sup>2</sup> gefunden.
4. Als Folge der Zersetzung des Karbonates in Lithiumoxyd verschwinden durch das Bilden des kubischen Netzes im Oxyd die Quadrupoleffekte, wobei aber die dipolare Wechselwirkung konstant bleibt.
5. Das Vorhandensein der paramagnetischen  $\text{Cr}^{3+}$ -Ionen im Netz des Lithiumchromites bewirken ein starkes Verbreitern der Resonanzlinien, hingegen hebt das Fehlen der Frequenzverschiebung mit der Temperatur im Bereiche zwischen 120—450°K ein paramagnetisches Betragen dieser chemischen Verbindung hervor.
6. Die Form der Absorptionslinien des Lithiumchromites zeigt eine magnetische Gleichwertigkeit, sowie eine hohe Symmetrie des Netzes an, eine Tatsache, die auch durch das Verschwinden der den Quadrupoleffekten entsprechenden Satelliten bestätigt wird.

7. Die Art der chemischen Bereitung des Lithiumchromites hat einen grossen Einfluss auf die Menge nichtreagierten Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, welches bei hohen Temperaturen antiferromagnetische Effekte hervorruft, die dem Chromsesquioxid eigen sind.

(Eingegangen am 12. April 1968)

#### L I T E R A T U R

1. O. Pop, L. Stănescu und Iuliu Pop, *Studia Universitatis Babeş—Bolyai, series Math. Phys.*, **2**, 151 (1967).
2. A. Abragam, *Jadernyi magnetism. Igd. Innostr. Lit.*, Moskva, (1963), 199—202.
3. M. H. Cohen und F. Reif., *Solid State Phys.*, **5**, 321 (1957).
4. R. V. Pound, *Phys. Rev.*, **79**, 685 (1950).
5. L. Wharton, L. P. Gold und W. Klemperer, *Phys. Rev.* **133**, B 270 (1964).
6. T. P. Das und R. Bersohn, *Phys. Rev.*, **102**, 733 (1956).

#### REZONANȚA MAGNETICĂ NUCLEARĂ A IZOTOPULUI Li<sup>7</sup> IN CARBONAT, OXID ȘI CROMIT DE LITIU

(R e z u m a t)

În lucrare sînt prezentate rezultatele studiului de rezonanță magnetică nucleară asupra carbonatului de litiu, a oxidului de litiu și a cromitului de litiu. S-a pus în evidență la carbonatul de litiu existența efectelor de cvadripol de ordinul întii, mărimea cuplajului cvadripolar fiind 92 kc/s, iar gradientul de cîmp electric pe nucleu de litiu  $6 \cdot 10^{22}$  V/cm<sup>2</sup>. Oxidul de litiu prezintă o linie de absorbție simplă, confirmînd structura de simetrie cubică a rețelei. În cromitul de litiu lipsa dependenței de temperatură a frecvenței de rezonanță între 120 și 450 °K pune în evidență o comportare pur paramagnetică a compusului.

#### ЯДЕРНЫЙ МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ИЗОТОПА Li<sup>7</sup> В КАРБОНАТЕ, ОКИСИ И ХРОМИТЕ ЛИТИЯ

(Р е з ю м е)

В работе приведены результаты исследования ядерного магнитного резонанса у карбоната лития, окиси лития и хромита лития. У карбоната лития выявилось присутствие квадрупольных эффектов первого порядка, причём величина квадрупольной связи равна 92 к /сек., а градиент электрического поля на ядре лития  $6 \cdot 10^{22}$  в/см<sup>2</sup>. Окись лития представляет простую абсорбционную линию, подтверждая структуру кубической симметрии решётки. Отсутствие в хромите лития температурной зависимости частоты резонанса между 120 и 450°К выявляет чисто парамагнитное поведение соединения.



## OTRĂVIREA CU HIDROGEN A ELECTROZILOR CU PULBERI CATALITICE

de

V. ZNAMIROVSKI

În literatura de specialitate au apărut lucrări care confirmă existența unui efect de otrăvire cu hidrogen a catalizatorilor. Astfel, cercetîndu-se reacția de schimb izotopic hidrogen—apă grea pe un catalizator de Pt—C [1] s-a observat o scădere a activității catalitice în timp. Această scădere a fost atribuită otrăvirii catalizatorului cu hidrogen, care, prin chemisorbția sa puternică, blochează suprafața activă a platinei. S-a constatat de asemenea că tratarea cu oxigen a catalizatorului otrăvit regenerează activitatea acestuia. Aceeași problemă a fost studiată și pe un catalizator de Pd—C [2] constatîndu-se de asemenea un efect de otrăvire cu hidrogen. Deosebirea constă în faptul că aici se atinge totuși o valoare constantă a activității catalitice.

Unele procese de electrod fiind de asemenea catalitice, s-a pus problema observării acestui efect al otrăvirii cu hidrogen pe calea măsurării potențialului de electrod. Pentru acest studiu s-a ales electrodul normal de hidrogen (e.n.h.) care prezintă un deosebit interes datorită rolului său fundamental în electrochimie și a multiplelor sale aplicații.

**Procedeeul experimental.** Se știe că potențialul electrodului de hidrogen depinde de gradul de acoperire a suprafeței cu hidrogen [3]. În consecință putem considera lanțul electrochimic:



unde  $\theta_1$  și  $\theta_2$  reprezintă gradul de acoperire cu hidrogen a celor doi electrozi la un moment dat.

Dacă considerăm că  $\theta_1$  reprezintă gradul de acoperire limită, iar  $\theta_2 < \theta_1$ , reacția va decurge în timp datorită adsorbției hidrogenului producînd o t.e.m. descrescătoare, pînă cînd  $\theta_2 = \theta_1$ , ceea ce corespunde condiției de echilibru.

Acest lucru se poate urmări experimental dacă între suprafețele celor doi electrozi există o diferență mare. Pentru aceasta s-a folosit așa-numitul „electrod cu pulbere”, cu ajutorul căruia se pot foarte bine observa și studia particularitățile care apar în structura superficială a fazelor solide disperse [4], [5].

Electrodul cu pulbere este o semipilă de o construcție specială (fig. 1). Un fir mic și subțire de platină sudat în sticlă (a) este înconjurat de pulberea metalică respectivă (b). Firul de platină împreună cu pulberea se găsesc într-o eprubetă de sticlă (c) prevăzută cu un mic orificiu (d). Eprubeta este plasată într-o celulă de sticlă cu pereți dubli (f), fapt care permite termostatarea ei. În celulă se pune soluția electrolițică (e).

Pulberile metalice utilizate în electrod au fost platina și paladiul. Acestea au fost preparate prin reducerea din acid hexacloroplatinic și respectiv prin reducerea tetraclorurii de paladiu [6].

Utilizând un electrod cu pulbere și un electrod obișnuit de platină platinată, s-a putut construi o pilă galvanică cu o singură soluție electrolică (2N, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) în care barbotează hidrogen gazos la presiunea de 1 atm., punându-se problema

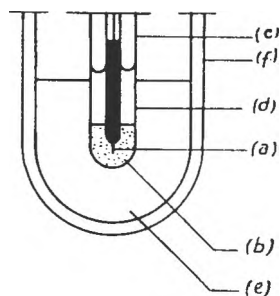


Fig. 1. Electrodul cu pulbere.

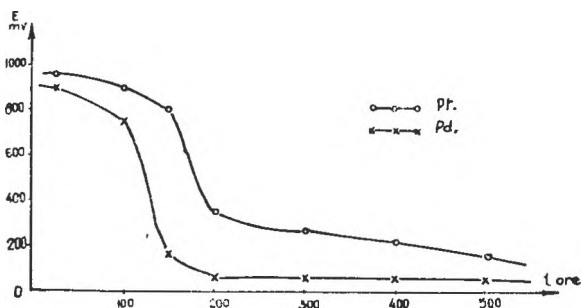


Fig. 2. Variația în timp a potențialului electrodului cu pulbere de platină și paladiu.

variației în timp a potențialului de electrod. Această variație poate fi corelată cu variația în timp a gradului de acoperire conform relației:

$$E(t) = -\frac{RT}{2F} \ln \theta(t) \quad (1)$$

După începerea barbotării cu hidrogen s-a măsurat timp de 10 ore evoluția potențialului electrodului cu pulbere, obținându-se după circa 3 ore o valoare de palier cu o pantă foarte mică. Apoi barbotarea hidrogenului a încetat pentru o durată de 14 ore. După reînceperea barbotării hidrogenului măsurătorile ne indică o evoluție analogă a potențialului în timp, doar că palierul se atinge la valori mai mici. Reprezentând în timp valorile de palier ale potențialului de electrod obținem curbele din fig. 2 care vor fi discutate în cele ce urmează.

Măsurătorile de t.e.m. s-au făcut în mod clasic prin metoda Poggendorf. Pentru aceasta s-a folosit un potențiomtru cu ploturi tip E.K.M. care permite măsurarea t.e.m. cu o precizie de  $10^{-4}$  V, iar ca instrument de zero un galvanometru Multiflex. Termostatarea s-a făcut cu ajutorul unui ultratermostat U 10. Hidrogenul necesar barbotării continue în pilă a fost furnizat de un electrolizor confecționat în laborator și având un debit de circa 1,5 l/h. De aici hidrogenul a fost trecut printr-un cuptor pentru arderea completă a urmelor de oxigen, iar apoi uscat trecându-l printr-un tub cu silicagel. Catalizatorul utilizat în cuptorul de ardere a fost platina pe silicagel.

**Rezultate și discuții.** S-a determinat după procedeul descris mai sus evoluția în timp a potențialului de electrod ajungându-se la următoarele rezultate:

Potențialul electrodului cu pulbere de platină scade în timp, scădere ce se observă și după trecerea unui timp de circa 700 ore, tinzând spre zero (fig. 2).

Potențialul electrodului cu pulbere de paladiu scade la început, dar după un timp de circa 200 ore ajunge la o valoare constantă și reproductibilă (fig. 2).

Căderea bruscă a potențialului la început (fig. 2) se datorește reducerii unui strat superficial de oxid ce s-a format probabil în contact cu aerul. Evoluția

ulterioară se datorește absorbției hidrogenului, adică creșterii gradului de acoperire  $\theta_2$ .

Pentru explicarea efectului de otrăvire cu hidrogen a electrozilor cu gaz ne bazăm pe conceptul de potențial termodinamic molar ( $G$ ).

Reacția determinantă de potențial este:



Din condiția de echilibru  $\Delta G = 0$  rezultă:

$$G_{\text{H}_2} - 2 G_{\text{H}^+} = 2 G_{\text{e}} \quad (3)$$

unde  $G_{\text{H}_2}$  este potențialul termodinamic molar al hidrogenului absorbit pe metal (în echilibru cu hidrogenul gazos la presiunea de 1 atm.) și  $G_{\text{e}}$  potențialul termodinamic molar al electronilor.

Considerînd  $G_{\text{e}} = -\varepsilon F$ , unde  $\varepsilon$  este saltul de potențial la interfața electrod-soluție,  $F$  este numărul lui Faraday și raportînd la un electrod de referință,  $\varepsilon$  devine  $E$  avînd următoarea expresie:

$$E = \frac{2G_{\text{H}^+} - G_{\text{H}_2}}{2F} \quad (4)$$

adică, la temperatură și presiune constantă, potențialul de electrod este determinat de diferența dintre potențialul termodinamic molar al ionilor de hidrogen din soluție și cel al ionilor de hidrogen adsorbiți în echilibru cu hidrogenul gazos. Se observă din (4) că dacă:

$$\begin{aligned} 2 G_{\text{H}^+} &> G_{\text{H}_2}, & E &> 0 \\ 2 G_{\text{H}^+} &= G_{\text{H}_2}, & E &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Deoarece valoarea măsurată a potențialului de electrod este pozitivă, ne vom situa evident în cazul  $2 G_{\text{H}^+} > G_{\text{H}_2}$ .

Vom presupune că suprafața electrodului este din punct de vedere energetic neomogenă, adică pulberea este formată din centri cu capacitate de adsorbție diferită. Fie nivelele energetice respective cuprinse în dreptunghiul ABCD (fig. 3) și de asemenea nivelele  $2 G_{\text{H}^+}$  și  $G_{\text{H}_2}$ .

Nivelele inferioare corespund centrilor celor mai activi, cu energia de adsorbție cea mai mare, pe care adsorbția se face ușor sau chiar spontan. Cele superioare corespund unor energii de adsorbție mai mici, ocuparea lor făcîndu-se din ce în ce mai greu.

Acoperirea suprafeței metalului cu hidrogen chemosorbit este un proces treptat ce se realizează în timp, neutralizîndu-se întîi centrii cei mai activi, cu energia de adsorbție cea mai mare. Creșterea gradului de acoperire a suprafeței active are drept consecință scăderea potențialului de electrod conform relației (4).

Neomogenitatea energetică a suprafeței determină sensul de creștere a gradului de acoperire.

Dacă stratul adsorbțiv se găsește în echilibru cu hidrogenul gazos la presiunea de 1 atm., înseamnă că nivelul 1' (fig. 3) nu poate fi depășit, potențialul de electrod luînd în acest caz valoarea zero, fapt ce explică comportarea electrodului cu pulbere de platină.

În cazul electrodului de platină platinată obișnuit, scăderea potențialului din cauza adsorbției hidrogenului la interfață este foarte rapidă, deoarece cantitatea

de hidrogen necesară saturării centrilor activi este foarte mică și potențialul atinge, practic instantaneu, valoarea zero. Electrozii cu pulbere, însă, oferind o suprafață incomparabil mai mare, au dat dovadă de eficacitate în studiul schimbărilor superficiale la electrozi.

Deosebirea de comportare a electrodului cu pulbere de paladiu manifestată prin constanța potențialului de electrod, se datorește faptului că echilibrul pe supra-

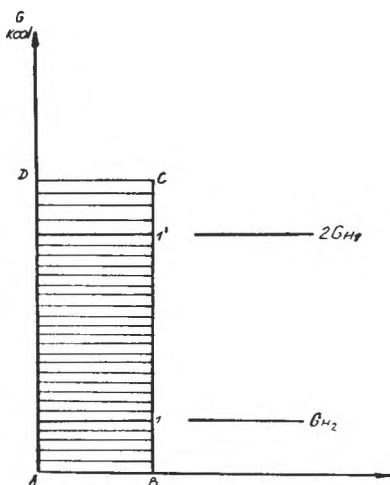


Fig. 3. Diagrama energetică a otrăvirii electrozilor cu hidrogen.

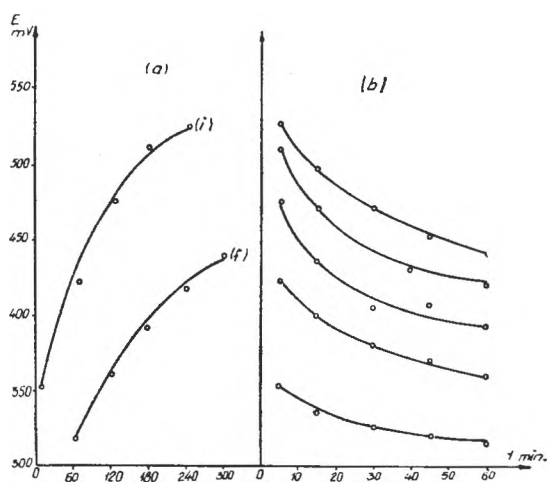


Fig. 4. Variația potențialului în timp, în urma anodizării.

față este dictat de hidrogenul care s-a dizolvat în faza metalică. Valoarea potențialului de electrod se păstrează constantă în timp pentru o durată ce depinde de mărimea suprafeței și activitatea ei [7]. Se înțelege că, datorită suprafeței enorme a electrodului utilizat, acest timp va fi foarte lung. Diferența de comportare între electrozii cu pulbere de platină și paladiu apare în etapa de tranziție, premergătoare stabilirii echilibrului termodinamic global.

Aceste rezultate pun în evidență existența efectului de otrăvire cu hidrogen a electrozilor cu pulbere și de asemenea, deosebirea de comportare a pulberii de paladiu față de cea de platină în concordanță cu metodele de schimb izotopic [2] amintite anterior.

A fost de asemenea verificată regenerarea activității catalitice a pulberii prin anodizare procedându-se în felul următor:

Curentul de anodizare (1mA) a fost întrerupt după un timp oarecare (3 min.) și s-a măsurat variația potențialului în timp (1 oră), trecând apoi la o nouă anodizare. Variațiile potențialului în timp au fost reprezentate după fiecare întrerupere în fig. 4b. Reprezentând acum valorile inițiale (i) și finale (f) în timp, obținem curbele din fig. 4a, care ne indică o creștere a potențialului de electrod în timp, ca urmare a evoluției oxigenului la electrod.

Se observă și în cazul considerat că potențialul de electrod este o funcție inversă a cantității de hidrogen rămasă adsorbită [8].







*PLENITUDO VACUI*  
A LUI PÁPAI PÁRIZ FERENC

de

V. MARIAN și J. JÓZSA

Dezvoltarea economică din secolul al XVII-lea a pregătit un climat prielnic în Transilvania pentru pătrunderea unor curente ideologice ca puritanismul, presbiterianismul și cartezianismul<sup>1</sup>. Acest din urmă curent propaga concepția filozofică a lui René Descartes (1596—1650) — concepție care avea trei trăsături fundamentale: raționalismul, mecanismul și dualismul. Cartezianismul a avut un rol hotărâtor în crearea condițiilor pentru dezvoltarea independentă a unor științe ca de pildă a medicinei și a fizicii<sup>2</sup>.

Cei mai de seamă reprezentanți ai cartezianismului transilvănean au fost: Apáczai Csere János, Szatmári Pap János, Enyedi Sámuel, Kaposi Sámuel și Pápai Páriz Ferenc (1649—1716)<sup>3</sup>. Pápai a desfășurat o activitate rodnică în domeniul învățămîntului, literaturii, istoriei, medicinei și al lexicografiei. Această activitate multilaterală a fost studiată detaliat, scoțîndu-i-se lui Pápai Páriz în evidență mai ales meritele lui dobîndite în medicină și lexicografie<sup>4</sup>. A rămas însă necunoscută pînă în zilele noastre activitatea sa depusă în răspîndirea ideilor filozofice ale lui Descartes.

Orientarea sa spre fizica carteziană se desprinde clar dintr-o disertație intitulată *Plenitudo vacui* (Plenitudinea vidului) păstrată în manuscris în Biblioteca Academiei R.S.R., filiala Cluj, secția periodice, și descoperită de curînd de V. Marian, unul din autorii prezentului studiu.

Înainte de a trece la descrierea și analiza manuscrisului, trebuie să arătăm pe scurt geneza lui.

<sup>1</sup> *Din Istoria Transilvaniei*, Buc., 1963, vol. I, edit. III, p. 221.

<sup>2</sup> Sötér István, *A magyar irodalom története* (Istoria literaturii maghiare), Budapeșt, 1964, vol. II, p. 227.

<sup>3</sup> *Din Istoria Transilvaniei*, I, 221 și V. Marian, *Introducerea fizicii lui Descartes în Transilvania*, în „*Studia Universitatis Babeș-Bolyai*”, Series Mathematica-Physica, fasciculus 2, Cluj, 1966, p. 81.

<sup>4</sup> Dr. Dézsi Lajos, *Pápai Páriz Ferenc* (1649—1716), în „*Magyar történeli életrajzok*” (Biografii din istoria maghiară), Bp., 1898; Nicolae Drăganu, *Mihail Halici, Contribuție la istoria culturală românească din secolul XVII*, Cluj, 1926, p. 105—109, unde se tratează viața și opera lui Pápai Páriz, care a fost coleg de școală cu M. Halici la colegiul Bethlen din Aiud. Cînd Pápai și-a luat doctoratul în medicină la Basel în 1674, Halici a dedicat o odă românească prietenului său: Sötér István, op. cit., pp. 253—257). Nici unul nu amintește de existența lucrării *Plenitudo vacui* a lui Pápai.

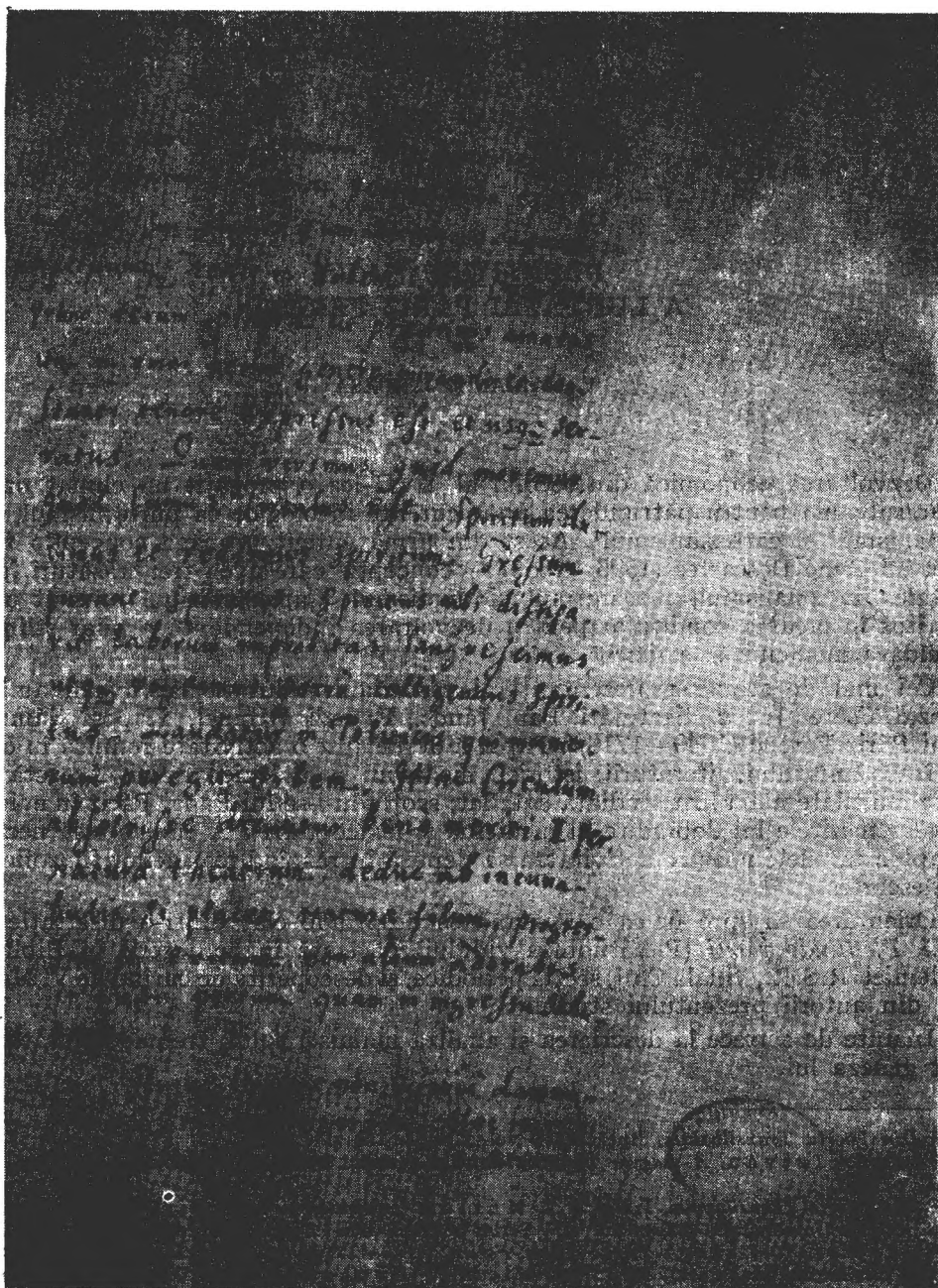


Fig. 1. Prima pagină a manuscrisului *Plenitudo vacui*.

Trimis în Germania pentru completarea studiilor sale, Pápai Páriz a frecventat universitățile protestante din Leipzig și Marburg. În primul oraș a studiat filozofia, iar în cel de-al doilea medicina. Apoi a trecut la Heidelberg, unde a stat două luni, martie și aprilie 1673. Dorind să rămână student în acest oraș și fiind într-o grea situație materială, a cerut să i se acorde un loc gratuit (alumni gratuită) în căminul universitar — după cum menționează în jurnalul său scris în limbile latină și maghiară<sup>5</sup>. Cu toate că protectorul său, profesorul Ludovicus Fabricius, a intervenit personal la principele elector, totuși i s-a refuzat bursa cerută. I s-a dat numai un loc cu plată. În schimb consiliul bisericesc (Senatus ecclesiasticus) i-a oferit catedra de filozofie la „Collegium Sapientiae”, precum reiese fără îndoială din rîndurile consemnate la sfîrșitul disertației *Plenitudo vacui*: „Distrus în singurătatea sa deplină, acestea le-a scris Fr. P. P. cu ajutorul lui D-zeu, în Heidelberg, luna aprilie, anul 1673, pentru ca să fie o dovadă filozofică pe cînd i s-a oferit de către veneratul Senat Bisericesc catedra de fizică (professio physica)<sup>6</sup>. Așadar, Pápai a scris lucrarea pentru a-și dovedi pregătirea filozofică necesară ocupării postului oferit. Redactarea disertației a durat zece zile: de la 12 aprilie 1673 pînă la 22 aprilie 1673<sup>7</sup>. Data de 12 aprilie se referă la respingerea cererii pentru locul gratuit, iar cea de-a doua la pregătirea de plecare din Heidelberg. Din motive încă necunoscute, Pápai n-a acceptat catedra de filozofie<sup>8</sup> și a părăsit Heidelbergul, plecînd, în ziua de 25 aprilie 1673 la Basel, unde s-a dedicat științei sale preferate, medicinei. Reîntors în patrie în 1675, a funcționat la Aiud ca medic și profesor.

Concepția sa de natură carteziană se reflectă întocmai în disertația *Plenitudo vacui*.

Disertația lui Pápai Páriz Ferenc face parte din colecția de manuscrise numite Mss Basiliensa, tomul I, un coligat care conține diverse însemnări din timpul studiilor sale în străinătate<sup>9</sup>. Coligatul are formatul de 160 × 200 mm și e legat în pergament. Lucrarea *Plenitudo vacui* cuprinde 49 pagini nenumerotate, scrise de mîna lui Pápai, cu cerneală neagră, îngrijit și citeț. A fost terminată la 22 aprilie 1673 la Heidelberg și la sfîrșit poartă și iscălitura autorului.

<sup>5</sup> *Pápai Páriz Ferenc naplója: Vitae meae cursus* (Jurnalul lui Fr. P.P.), în „Irodalomtörténeti Közlemények” (Comunicări de istorie literară), Budapest, 1892, anul II, p. 499.

*Plenitudo vacui*, Heidelberg, 1673, p. 49. „Heidelbergae cum Assistentia Dei haec scripsit tota solitudine discussus Fr. P.P.A. 1673. M. April. Specimen ut esset Philosophicum, cum a Venerato Senatu Ecclesiastico Professio Physica offerretur” cf. și Dr. Dézsi Lajos, *Pápai Páriz Ferenc*, în „Magyar történeti életrajzok” (Biografii din istoria maghiară), B-pest, 1898, p. 241.

<sup>7</sup> Jurnal cit. pp. 499—500.

<sup>8</sup> Dr. Dézsi L., *op. cit.*, p. 248.

<sup>9</sup> Coligatul de manuscrise cuprinde titlurile următoare:

- Nr. 1442/a. S. Rom. Imperii Academiae Naturae Curiosorum Leges;
- Nr. 1442/b. (Jonston, Dr. A.) *Ideae Medicinae Practicae, Liber V—VI*, Basel, 1673.
- Nr. 1442/c. *Idem. Liber VII.*
- Nr. 1442/d. *Idem. Liber VIII.*
- Nr. 1443. *De fabre ephemera.*
- Nr. 144. *Principes Facult.*
- Nr. 1445. *Plenitudo vacui.*
- Nr. 1446. *De Symptomatibus Embrionum.*
- Nr. 1447. ΠΕΡΙ ΦΑΡΜΑΚΟΝ.
- Nr. 1448. *Chymiae Definitio et Principia Chymica.*
- Nr. 1449. *Visitatio 1674 martii 14. Sirupus de succo Hederae astris.*
- Nr. 1450. *Prolegomena.*
- Nr. 1451. *Cap. I. De principio primo Metaphysica et Sapientia tradent principia cognitionis humanae.*

Din această înșirare reiese că majoritatea însemnărilor are un caracter medical și chimic.

Manuscrisul redactat în latinește se ocupă cu următoarele chestiuni: I. plenitudo vacui; II. atomorum tmesis; III. materiae primae et formae substantiali degradatio; IV. qualitatum occultorum mutum oraculum, pe care le tratează în spirit cartezian.

I. *Plenitudo vacui* începe cu considerații generale asupra mișcării în cerc. Astfel, după ce afirmă că în geometrie dintre figurile plane cea mai perfectă este cercul, iar dintre cele solide sfera, spune că însăși viața noastră, mișcarea noastră, inspirația și respirația sînt fenomene circulare. Nu numai întreg universul e supus unei mișcări circulare, ci însuși „ziditorul” este un cerc. Menționează că cel care a exprimat mai clar această idee a fost Platon în *Timeu*, unde scrie că suflul ce iese din noi nu trece în vid, ci alungă ceea ce se află în apropierea sa, acesta alungă la rîndul său pe vecinul său, astfel că respirația și inspirarea au loc în cerc. Totul se întîmplă la fel ca roata care se învîrtește, fiindcă nu există vid.

După aceste considerații relevă că deși toată lumea cunoaște aceste lucruri, nu toți cunosc cauzele lor, căci, după cum spune cineva, „două impedimente împiedică accesul la filozofia adevărată: prejudiciul și copilul lui servitutea”<sup>10</sup>. Nu știe

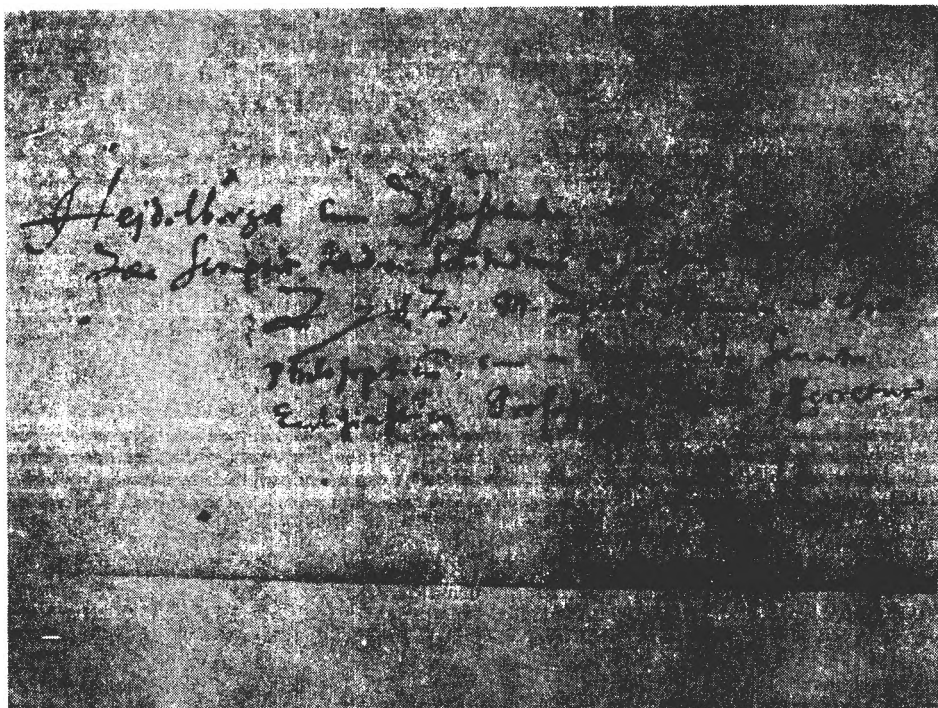


Fig. 2. Iscălitura lui Pápai Páriz Ferenc.

de care din două trebuie să se mire mai mult și depînge că „Niciodată nu a fost încurajată experiența, ci urdoarea întunecoasă acoperea ochii minții dictatorilor”<sup>11</sup>. În continuare rezumă concepțiile celor vechi cu privire la vid. Astfel scolasticii

<sup>10</sup> *Plenitudo vacui*, 3 (după numerotarea noastră).

<sup>11</sup> *Ibidem*.

au aprobat — spunea el — celebra minciună a vidului, pe care nu au susținut-o nici stoicii, nici platonicienii și pe care o consideră drept cheie a generaliiilor (*generalium*). Dar pentru filozofii care caută în mod ordonat constituția lucrurilor naturii din semințe și nu în subtilitățile minții sau în labirintele fanteziei, este clar că succesiune a continuă în cerc a părților nu servește vidului și nu are loc din cauza groazei de vid (*horror vacui*). Ea se poate însă explica admitând că universul fiind plin de la început cu materie, aceasta a primit un impuls și continuă să se miște în cerc.

Fiind convins că natura nu e un arbore porfirian care crește din vârful ramurilor, ci răsare din semințe, păstrând legile naturale, Pápai adoptă acest procedeu fecund și critică vidul. Își propune deci să arate pe scurt principiile lucrurilor care sînt fundamentale naturii și ale științei.

După ce aruncă o privire generală asupra teoriilor vechilor filozofi despre vid și plin etc., Pápai trece la Descartes, despre care scrie că „a dedus semințele lucrurilor dintr-un punct de vedere mai înalt<sup>12</sup>. Își propune deci să expună principiile acestuia. Mai întii expune critica lui Willis<sup>13</sup> asupra teoriilor lui Epicur, pe care o consideră valoroasă, dar nu demonstrată, conținînd noțiuni subtile, însă depărtate de simțuri. Principiile lui Willis sînt utile în lumea sublunară, dar nu sînt cheia universului. Se întreabă ce este forța activă sau principiul activ al lucrurilor, și încheie precizînd că „va veni timpul cînd principiile chimice vor ceda față de cele precedente tratate cu aceeași artă”<sup>14</sup>.

Principiile fizicii carteziene le rezumă în următoarele puncte: 1. Natura și fenomenele ei se explică prin materie și mișcare; 2. Materia întregului univers este aceeași, iar proprietatea sa esențială extinderea; 3. Mișcarea acestei materii extinse și divizibile nu e nici acțiune, nici pasiune, ci continuarea mișcării inițiale.

De aici rezultă că: 1. Materia umple întreg universul, deci acesta este plin; 2. Mișcarea materiei are loc în cerc; 3. Universul fiind plin, vidul de asemenea este plin. Această problemă promite să o discute. Mai întii analizează noțiunea de vid, susținînd cu Descartes că un vid în care să nu fie nici un fel de substanță nu e compatibil cu natura universului. În sprijinul acestei afirmații citează pe Constantinus<sup>15</sup>, care de asemenea identifică materia cu spațiul, afirmînd că „după cum corpul nu se poate înțelege fără loc, la fel locul nu poate exista fără corp”<sup>16</sup>.

Combate apoi pe peripateticieni și scolastici, îndeosebi pe Suarezius<sup>17</sup>, pe care-l consideră lipsit de firul Ariadnei cînd el susține că, lipsite de cantitate, părțile corpurilor curg spre centru. Revenind la cei vechi, combate pe pitagorieni, care au introdus vidul și între numere, ca și pe Melissus. În schimb aprobă pe Aristotel, cînd îndeamnă ca problemei vidului să-i preceadă studiul naturii „locului”<sup>18</sup>. Îl critică însă pe Aristotel în problema „locului” și a condensării și rarefierii.

Ocupîndu-se cu noțiunile de spațiu, loc, substanță etc., Pápai arată ce ar trebui să se răspundă lui Melissus și acelor care susțin imposibilitatea mișcării, negînd vidul. Într-un univers plin mișcarea poate avea loc în cerc, fără a avea nevoie nici de vid, nici de o mișcare nouă sau de un mediu prin care să se miște corpurile, ci numai de o determinare sigură a acelor care deja sînt în mișcare continuă.

<sup>12</sup> *Plenitudo vacui*, 5.

<sup>13</sup> Thomas Willis (1621–1675), medic englez.

<sup>14</sup> *Plenitudo vacui*, 8.

<sup>15</sup> Constantinus Thomas Cornelius, medic și filozof italian din Neapole în secolul XVII.

<sup>16</sup> *Plenitudo vacui*, 10.

<sup>17</sup> Francisco Suarez (1546–1617), teolog iezuit, filozof și jurist spaniol.

<sup>18</sup> *Plenitudo vacui*, 14–17.

Cu un cuvînt, la mişcarea corpurilor nu e nevoie decît de mişcare. Prin rărirea corpurilor nu se măreşte rarefierea, nici prin condensare nu se micşorează. Extensiunea corpurilor nu se schimbă, ci numai un anumit schematism al părţilor materiei. Aşadar, în condensare şi rarefiere nu are loc decît o schimbare a figurii şi anume, în rarefiere a intervalelor particulelor materiei unor corpuri, de exemplu intervalele apei sau ale uleiului fierbinte se umplu cu un corp eterogen, de exemplu aer etc. Căci, se întrebă el, în ce fel separă laturile particulelor vidul sau neantul? În adevăr în condensare se poate spune că pereţii particulelor se apropie alungînd corpul intermediar. Dar nici în rarefiere nu este materie extinsă mai multă, nici în condensare mai puţină.

La obiecţiunea posibilă că între vas şi conţinutul său nu există nici o legătură necesară, răspunde: este adevărat că între vasul conţinător şi vreunul din corpurile particulare nu există o conexiune necesară, totuşi ea există între vas şi corpul cuprins în general sau un conţinut material oarecare. De asemenea, celor care obiectează că omnipotenţa creatorului poate scoate conţinutul dintr-un vas, le răspunde, după Descartes, că aceasta se poate, dar numai aşa că prin ea anihilează în acelaşi timp şi cuprinzătorul. De altfel, remarcă, „să nu căutăm ce poate Dumnezeu, ci ceea ce a făcut, şi ne-a dat să contemplăm”. Apoi adaugă: „Eu consider că acest argument este demn, mai mult, pentru aprehensiune decît pentru răspuns”. Şi în adevăr „atari patroni ai spaţiului imaginar aduc injurii înţelepciunii lui Dumnezeu, căci e acelaşi lucru ca şi cînd ar spune că Dumnezeu poate crea un corp care să nu fie corp, ceea ce e un argument ridicol”<sup>19</sup>. Se referă apoi la părerea lui Descartes din *Responsio* VI, că nu e nevoie să ne întrebăm din ce cauză ar fi putut creatorul din etern să facă să nu fie adevărat că de două ori 4 fac 8 etc., căci acest factor nu poate fi înţeles de noi.

Astfel, creatorului i-a plăcut să umple din belşug vidul şi crăpăturile materiei universului, care celor miopi li se pare că lipsesc, cu merinde de aceeaşi materie. Apoi trage concluzia că argumentele contrare cedează în urma celor expuse de el, iar flecăriile se spulberă de la sine. Peripateticienii sau, mai bine zis, scolasticii, în această perioadă nu sînt aristotelieni, imitînd pe chirurgii zgîrciţi, care înfrumuseţează rana vidului lipind universul, nedrepti în integritatea aceluia şi violenţi în judecată. Concluzia lui Pápai este că nu există vid filozofic nici mare, nici mic, nici mijlociu, iar vidul obişnuit este compatibil cu plenitudinea universului.

II. *Atomorum imesis*, adică disecarea atomilor începe cu o expunere scurtă a teoriei atomistă a lui Leucip, Democrit şi Epicur, pe care Pápai promite să o lămurească. Atomişti spun că atomii sînt corpuscule minuscule, solide, indivizibile, nenumărate, diferite între ele în mărime şi figură, care cu ajutorul cîrligilor se aranjează în așa fel că formează toate corpurile.

Acestei concepţii îi opune teoria lui Descartes, potrivit căreia „corp este ceea ce are extensiune, şi tot ce este extins e corp”<sup>20</sup>. Corpurile însă sînt divizibile la infinit, cel puţin în gînd. El admite particule minime într-o anumită specie a fiinţei, totuşi numai întrucît sînt corpuscule divizibile necontenit. Cum ne putem explica că deşi atomişti neagă părţile atomilor, totuşi le atribuie mărime, figură etc.? Atomii fără părţi se pot acumula la infinit, dar nu vor da naștere la o masă însuflită. Apoi se întrebă: Cum vei designa ceea ce nu există în act? Cum vor reprezenta aceste părţi corpurile? Ce este figura decît determinarea corpului de la mar-

<sup>19</sup> *Plenitudo vacui*, 18—19.

<sup>20</sup> *Ibidem*, 22



ginile ei definite? Fie deajuns să considerăm că corpurile sînt divizibile la infinit, cel puțin prin puterea divină<sup>21</sup>.

Apelînd la simțuri, care ne indică existența unor particule și efluvii oarte fine ale unor corpuri ca ceapa, hreanul etc., afirmă din nou că există corpuri minuscule, dar nu minime și indivizibile. Apoi adaugă că dacă efluviile cepei, hreanului etc. sînt argumente pentru existența atomilor, puțin lipsește ca și spiritele să lovească atît de puternic simțurile. Conchide deci că părțile materiei universului se mișcă în cerc, dar nu și universul și că „cîtă mișcare a pus la început Dumnezeu, cauza mișcării universale”, atîta se păstrează în univers<sup>22</sup>.

III. *Materiae primae et formae substantialis degradatio*, are de scop să distrugă acei idoli ai peripateticienilor care sînt materia primă și formele substanțiale. Păpai amintește aici că după ce doctrina atomistă a fost distrusă și scrierile atomiștilor care ni s-au transmis în mod fals au fost interzise, din aceasta au profitat Aristotel și adepții lui, care l-au considerat ca singurul izvor al înțelepciunii. Acesta a dictat că principiile lucrurilor sînt trei: „două contrare, forma și privațiunea, și al treilea, subiectul lor materia primă”<sup>23</sup>. Aceasta a rămas atîtea secole ca ceva sfînt în ochii urmașilor. Dar cei care însuflețiți de exemplul unor ingenii și-au dat seama că natura trebuie explicată prin ea însăși, iar nu din cărțile lui Aristotel, nu se tem să distrugă mai întîi materia primă, apoi formele substanțiale. În ce privește privațiunea sînt convinși că cine nu are nu poate da nimic.

După ce definește în sensul lui Aristotel materia primă ca „primul subiect al oricărui lucru, din care se naște orice corp natural prin sine, iar nu prin accident”<sup>24</sup> etc., critică această definiție, întrebîndu-se cum se poate subșterne existenței corpurilor ceea ce încă nu este. „Dar dacă ne-am angajat să explicăm natura materială a universului, întrucît depinde de generare și pieire, nu avem credință”<sup>25</sup>. Trecînd la afirmația peripateticienilor că toate substanțele naturale sînt transformabile, spune că orice transformare este de la contrar la contrar. În acest scop trebuie să existe materia primă care primește contrarul ca din el să nască altul. De exemplu, cînd căldura se transformă în frig, nu căldura în sine primește frig, ci materia primă este subiectul schimbării. Fără materia primă ar trebui să se treacă, în sens peripatetician, de la nimic la un lucru și de la un lucru la nimic, astfel transformarea ar fi imposibilă.

Păpai rezumă apoi teoria carteziană în două puncte: I. Materia întregului univers este aceeași; II. Materia aceasta fiind divizibilă de la început, ea este divizată în părți infinite în diferite feluri și trebuie să se miște în cerc; apoi cîtă mișcare a fost creată, atîta se menține în materie. Orice transformare în natură se face dintr-o dispoziție și configurație în alta prin mișcare. Căldura și frigul depind de agitația particulelor materiei, care este cînd mai mare, cînd mai mică. Apa, cînd particulele ei sînt în mișcare potrivită nu e nici caldă, nici rece; o simțim caldă cînd ele sînt încălzite de foc la mișcare mai rapidă, și rece cînd ele se mișcă mai încet. Pentru generare și pieire nu e necesară materia primă, fiindcă generarea are loc prin agitația rapidă dintr-o cauză internă a particulelor, care se amestecă într-o infinitate de chipuri, producînd o specie sau alta; pieire dimpotrivă, se face dintr-o cauză externă, care separă particulele prin aceeași mișcare neîntreruptă,

<sup>21</sup> *Ibidem*, 22.

<sup>22</sup> *Ibidem*, 25.

<sup>23</sup> *Ibidem*, 27.

<sup>24</sup> *Ibidem*, 28.

<sup>25</sup> *Ibidem*, 29.

evaporînd pe cele mai subtile și menținînd pe cele mai terestre. Dă ca exemplu explicația putrefacției cașului. Chimisții năzuiesc să dea în chip fericit explicarea comodă a corpurilor ce se nasc din pămînt, și cu cît ea înaintează, cu atît progresează cunoașterea fenomenelor.

Trecînd la formele substanțiale, Pápai spune: din cele de mai sus se desprinde că chestiunea e lămurită; totuși o atinge să nu se creadă că a înlăturat-o din motive ascunse. Peripateticienii zic că formei îi compete să acționeze, materiei să sufere. De aceea au introdus forma substanțială, prin care înțeleg o substanță subtilă, materială, care pătrunde în materie și este cauza tuturor acțiunilor compuse. Ei justifică această afirmînd că: 1. Deoarece lucrurile materiale sînt compuse, trebuie să existe forma substanțială ca o altă componentă substanțială; 2. Materia lucrurilor naturale fiind aceeași, toate lucrurile ar fi identice dacă nu le-ar distinge forma substanțială. Aici el scoate în evidență contradicția: substanța subtilă, materială compune ceea ce e substanțial. Dar pune întrebările: 1. În ce fel poate acționa forma substanțială materia? 2. Prin ce fel de contact poate avea loc această acțiune? 3. În ce fel se generează corpurile compuse dacă materia primă și substanța sînt ingenerabile? El răspunde că materia produce mai bine materie decît substanța imaterială. Apoi fiindcă mișcarea părților materiei este suficientă, nu ne putem teme că înlăturînd formele substanțiale vom confunda calul cu măgarul etc. În concluzie, cele două principii contrare: forma și privațiunea, și al treilea, subiectul acestora, materia primă, nu posedă nici o condiție a principiilor, ele nu merită acest nume și pe tot dreptul se degradează.

IV. *Qualitatum occultarum mutum oraculum* este ultima parte a disertației. Pápai constată că chestiunile filozofice sînt obscure, fapt care a dat ocazie să se născocoască calitățile oculte de către unele oracole doritoare de a-și menține prestigiul de atotștiutor. „Calitatea ocultă, zicele, este o putere oarecare, prin care lucrurile naturale acționează sau suferă ceva, a cărei cauză nu se poate deduce din calitățile primare sau secundare”<sup>26</sup>. De această natură este atracția fierului de către magnet, curățirea bilei de către măslina etc. La aceasta se întreabă cu ce sînt mai puțin oculte materia primă, formele substanțiale și privațiunea? Unele calități considerate oculte sînt fabuloase, altele s-au explicat astfel că ne putem aștepta ca cu timpul toate să se explice. De ce să ne mirăm mai mult că struțul digerează fierul decît că stomacul omului digerează carnea de vacă?<sup>27</sup>

Mai recent Descartes a explicat numai prin singura mișcare, figurare, combinare etc. a particulelor materiei proprietățile corpurilor și a făcut să înceteze minunea magneților, ale căror efecte le-a dedus cu ajutorul acelorași principii pe un plan mai înalt. Proprietățile considerate oculte ale magneților au devenit astfel evidente prin efluvii ce intră prin porii corpului. Anumite efluvii afectează și simțurile omenești: unele mirosul, cum face cașul, trandafirul etc., altele vîzul, cum e racul, dihorul etc., altele pipăitul, cum sînt insectele etc. Acestea fiind neobișnuite, stîrnesc fie admirație, fie oroare prin efluviile lor. Acțiunea efluviilor nu e, cum vrea Melissus, ca a unor spirite, ci ca a unei coarde vibrante. Efluviile se urăsc reciproc în organele senzitive ale plantelor, așa că să nu ne mirăm dacă cîrceii de viță de vie se îndepărtează de varză etc.

Calitățile oculte sînt folosite mai ales de medici, care atribuie cauza bolilor cînd acestor calități, cînd influxiunilor, fiindcă le lipsesc cunoștințe mai clare. Ei procedează ca poeții antici, care, necunoscînd genealogia vreunei ginți sau familii

<sup>26</sup> *Ibidem*, 41.

<sup>27</sup> *Ibidem*, 43.

de seamă, o deduceau de la tatăl ceresc, mama pământul, Jupiter, Luna etc. Medicii credeau că tot ce se poate ști în medicină a fost expus de Galenus, iar cele rămase necunoscute de el se datoresc calităților oculte. Profesorii, pentru a-și menține prestigiul, atribuiau cele mai multe boli calităților oculte, iar studenții rămâneau satisfăcuți și nu cercetau mai departe. „Trebuie să mărturisim că interpretativ calitățile oculte sînt același lucru cu neștiința!”<sup>28</sup>. În sfîrșit, cercetătorii naturii au reușit să rupă gheața și să meargă înainte. Pe aceștia îi îndeamnă, împreună cu Alexandru Mavrocordat,<sup>29</sup> spre libertatea sufletului, ca să nu mai fie sclavii jurați ai nimănui, nici să nu fie grîu tot ce se macină, ci „discipolul să fie în ziua următoare mai înțelept decît în cea precedentă. Și ca Bruno la Constantinus să nu apreciem virtutea după ani, și nici prestața ingeniilor după bătrîneț”<sup>30</sup>.

Din expunerea de mai sus a conținutului disertației lui Pápai Páriz se vede atașamentul său la doctrina lui Descartes și intenția sa de a distruge unele concepții ale lui Aristotel, ale peripateticienilor și ale atomiștilor asupra vidului și materiei.

În același timp, *Plenitudo vacui* reflectă și preocupările filozofice ale autorului în sens strict cartezian.

(Intrat în redacție la 18 octombrie 1967)

#### PLENITUDO VACUI ПАПАИ ПАРИЗА ФЕРЕНЦА

(Резюме)

В Библиотеке Клужского филиала Академии Социалистической Республики Румынии находится сборник (*colligatum*) с номером 1442—1451, имеющий размеры 160 × 200 мм и содержащий неизданные рукописи врача Папай Париза Ференца. Среди них находится и рукопись, озаглавленная *Plenitudo vacui*, редактированная её автором в 1673 г. Рукопись носит характер философской диссертации и обсуждает в картезианском смысле следующие вопросы: *Plenitudo vacui*; *atomorum tmesis*; *materiae primae et formae substantialis degradatio* и *qualitatum occultarum mutum oraculum*.

#### PLENITUDO VACUI BELONGING TO PÁPAI PÁRIZ FERENC

(Summary)

The Academy of the Socialist Republic of Romania, Cluj Branch possesses a collection (*colligatum*) which contains some unpublished manuscripts of Dr. Pápai Páriz Ferenc. The *colligatum* has the number 1442—1451, its dimensions being 160 × 200 mm. The title of the manuscript which has been found among the others is *Plenitudo vacui* and it was written by author in Heidelberg, in 1673. The manuscript has the character of a philosophical dissertation and treats in a Cartesian sense the following problems: *Plenitudo vacui*; *atomorum tmesis*; *materiae primae et formae substantialis degradatio*; and also *qualitatum occultarum mutum oraculum*.

<sup>28</sup> *Plenitudo vacui*, 48.

<sup>29</sup> Alexandru Mavrocordat (1636—1709), medic și diplomat grec.

<sup>30</sup> *Plenitudo vacui*, 49.



EFECTE FERROELECTRICE ÎN  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  ȘI  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$  IRADIAT

de

I. BARBUR

Studii recente [1, 2] au arătat că sub acțiunea radiației gama, în  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  și  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$  apar defecte de natură paramagnetică — radicali liberi. Metoda RES a pus în evidență, în acești compuși, existența a două tipuri de defecte: unul provenit de la grupul cu sulf iar altul de la grupul amoniu. La ambele tipuri de defecte s-a studiat cinetica de revenire a acestora și de asemenea, cu ajutorul metodei RES [3] s-au putut face presupuneri asupra naturii defectelor.

Cercetări anterioare [4, 5] au pus în evidență la sulfatul de amoniu, o fază de tranziție feroelectrică la  $-50^\circ\text{C}$ . Sub această temperatură compusul are o comportare feroelectrică. Pentru elucidarea mecanismului de tranziție, asupra sulfatului de amoniu au fost efectuate studii RMN și I.R. [6] și de asemenea rezonanță magnetică deuteronică [7].

Din aceste studii se ajunge la concluzia că feroelectricitatea în  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  s-ar datora momentului de dipol al tetraedrului  $\text{NH}_4^+$  distorsionat. În acest sens este propus un model de mecanism ordine—dezordine pentru tranziția de fază și este prezentată aproximația cîmpului molecular modificat pentru tranziția feroelectrică de ordinul întâi în  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  [8].

Ca o continuare a cercetărilor noastre, s-a măsurat variația constantei de interacțiune hiperfină  $A$  legată de defectul provenit de la grupul amoniu (rezultată din interacțiunea electronului neîmperecheat cu nucleul

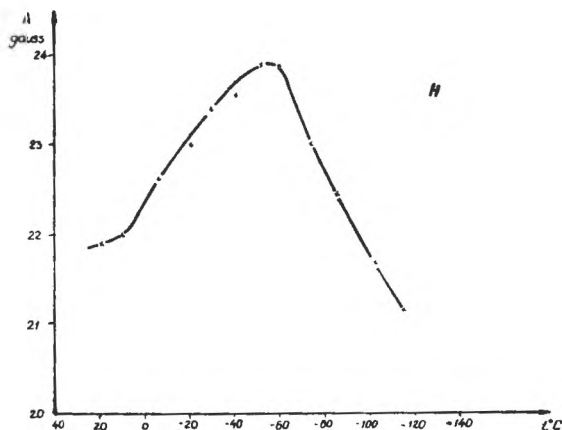


Fig. 1.

$^{14}\text{N}$ ) în funcție de temperatură atât pentru proba cu H cât și cu D. Măsurătorile au fost efectuate pe monocristale, orientate cu axa C în lungul cîmpului magnetic H.

Temperatura a fost variată în cavitatea rezonantă a spectrometrului RES, de la temperatura camerei și pînă la  $-140^\circ\text{C}$ , astfel încît să se treacă prin punctul de tranziție feroelectric.

Comportarea mărimii A în funcție de temperatură este redată în fig. 1 pentru  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ .

Pornind de la temperatura camerei se observă o creștere a lui A, atingând o valoare maximă la temperatura de tranziție. Sub temperatura de tranziție valoarea lui A scade din nou.

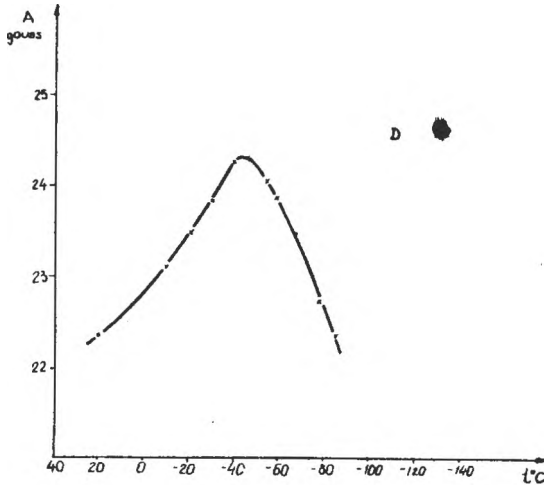


Fig. 2.

O comportare asemănătoare are A și pentru proba deuterată. Efectul izotopic se observă doar în forma celor două curbe.

Menționăm că la temperatura camerei, pentru orientarea dată, valorile lui A sînt :

$$A_H = 22,3 \pm 0,2 \text{ Oe}$$

$$A_D = 21,9 \pm 0,2 \text{ Oe}$$

iar la temperatura de tranziție aceste valori cresc cu aprox. 10%.

Cîteva concluzii, se pot desprinde din măsurătorile efectuate :

a) Defectul localizat pe grupul amoniu suferă modificări la trecerea prin temperatura de tranziție, lucru ce denotă, așa cum presupun și alți

autori [7] că grupul amoniu este responsabil de apariția feroelectricității în sulfatul de amoniu.

b) Conform ipotezelor făcute de O'Reilly în tranziția de fază, sistemul de coordonate ale tensorului gradient cîmp electric suferă o rotație cu aproximativ 30°.

Din variația lui A cu temperatura precum și din dependența lui A de unghi efectuată în lucrările anterioare [1, 2] se poate presupune că variația lui A cu temperatura în jurul punctului de tranziție s-ar datora unei rotații a defectului de amoniu.

c) Reorganizarea rețelei prin trecerea de la grupul spațial  $P_{nma}$  la temperatura camerei, în grupul  $P_{na21}$  la temperaturi joase, probabil că aduce modificări în mărimea constantei A.

Măsurătorile ulterioare vor încerca să elucideze problemele puse în studiu.

(Intrat în redacție la 3 mai 1968)

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. Călușaru, I. Barbur, I. Ursu, J. Chem. Phys., nr. 2, p. 249, 1966.
2. A. Călușaru, I. Barbur, I. Ursu, J. Chim. Phys., nr. 6, p. 809, 1966.
3. I. Ursu, *Rezonanța electronică de spin*, Ed. Academiei, 1965, p. 200.
4. B. T. Matthias, Phys. Rev., **103**, 262, 1956.
5. R. Pepinsky, Phys. Rev., **105**, 344, 1957.
6. R. Blinc, I. Levstek, J. Phys. Chem. Solids, 1960, **12**, 295.
7. D. E. O'Reilly, Tung-Tsang, J. Chem. Phys., **46**, nr. 4, 1291, 1967.
8. D. E. O'Reilly, Tung-Tsang, J. Chem. Phys., **46**, nr. 4, 1301, 1967.

ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ОБЛУЧЕННЫХ  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  И  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$ 

(Резюме)

В  $\gamma$ -облученных монокристаллах  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$  появляются два парамагнитных центра — свободные радикалы. Методом ЭПР изучен радикал, происходящий из группы аммония, около переходной ферроэлектрической температуры сульфата аммония. Константа сверхтонкого взаимодействия, которая появляется в результате взаимодействия неспаренного электрона с ядром азота, испытывает изменение с температурой, достигая максимума при переходной температуре. Тот же самый эффект наблюдался и у образца с дейтерием. Автор делает предположения в связи с природой этого изменения.

FERROELECTRIC EFFECTS IN IRRADIATED  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  AND  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$ 

(Summary)

Two paramagnetic species appear in  $\gamma$ -irradiated single crystals of  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  and  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$ . These species are free radicals. Using the ESR method the radical resulted from ammonium group in the region of ferroelectric transition temperature of ammonium sulphate is studied. The constant of the hyperfine interaction of the unpaired electron with the nitrogen nucleus changes with temperature reaching a maximum at the transition temperature. The same effect has been observed for the  $(\text{ND}_4)_2\text{SO}_4$  sample. Some comments on the nature of this variation are presented.





Franz von Kutschera, **Elementare Logik**, Springer-Verlag, Wien—New-York, 1967, VIII + 392 S.

Die formelle oder mathematische Logik ist eine Wissenschaft, die heute nicht nur von Mathematikern, sondern auch von Philosophen und anderen Wissenschaftlern studiert und angewandt wird. Trotz ihrer delikaten Überlegungen bietet sie den Vorteil, dass in sie auch ein Nichtmathematiker eindringen kann, da sie nicht besondere Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Mathematik anfordert.

Kutscheras Buch ist eine ausgezeichnete Einführung in die formelle Logik, in erster Reihe für Nichtmathematiker, kann aber auch Mathematikern nützlich sein. Es behandelt auch Kapitel, die man selten in Lehrbüchern findet, wie z.B. die Theorie des natürlichen Schliessens von Gentzen.

Die Aussagenlogik wird breit behandelt, alle möglichen einstelligen und zweistelligen Funktoren und ihre Anwendungen werden angegeben. Alles wird mit vielen Beispielen illustriert und sämtliche Gesetze der klassischen Logik werden angeführt. Der Verfasser gelangt dann bald zur Notwendigkeit zwischen Semantik und Syntax zu unterscheiden. Dies wird in 1.2.7 zusammengefasst, so dass der Leser nach dem Studium von etwa 1/5 des Buches mit den Begriffen Theorem und Metatheorem, Sprache und Metasprache im klaren ist.

Die syntaktische Behandlung der Aussagenlogik wird auf Grund der „Axiome“ von Frege-Lukasiewicz durchgeführt, desgleichen wird auch die Technik, die Lukasiewicz zu diesem Zweck eingeführt hat auseinandergesetzt. Auch dieser Teil ist reich an Beispielen.

Das 2-te Kapitel behandelt den Prädikatenkalkül erster Stufe. Ausser den „Axiomen“ von Frege die der Verfasser benützt oder deren von Hilbert-Bernays, die wohl häufiger benützt werden, wird auch die Methode des natürlichen Schliessens sehr ausführlich, auf etwa 70 Seiten (also 20% des Umfanges des ganzen Buches) behandelt.

Im 3-ten Kapitel wird der Prädikatenkalkül durch die Einführung der Identität und des Begriffs

„Term“ erweitert. Der Begriff des elementaren Systems wird ausführlich behandelt, wobei er mit den Axiomen der Gruppentheorie und der Arithmetik als Beispielen illustriert wird.

Im 4-ten Kapitel wird die Prädikatenlogik zweiter Stufe behandelt, die Vollständigkeit bzw. Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls genau diskutiert und das Problem der Kategorizität ausführlich am Beispiel der Peanoaxiome erörtert.

Im vorletzten Kapitel wird die Klassenlogik, die Boolesche Klassenlogik mitbegriffen, behandelt. Den Abschluss bildet ein logisches Modell der Peanoaxiome, die Behandlung des Problems der Geschlossenheit des Aufbaus der Logik und das Problem der Antinomien. Letzteres wird mit Hilfe von Auszügen aus der Korrespondenz von Frege und B. Russell sehr eindrucksvoll beleuchtet.

Den Abschluss des Buches bilden Fragen, deren Behandlung mehr historisches Interesse hat, aber doch eine nützliche Ergänzung der vorigen Kapitel bildet.

Ich möchte die Besprechung dieses wertvollen Buches, das auch vom didaktischen Standpunkt aus als sehr gelungen zu bezeichnen ist, mit einem Wunsch abschliessen und zwar, dass in einer neuen Auflage auch die Betrachtungen von Gödel Platz finden. Sie sind auch für den Philosophen von grosser Bedeutung.

GH. PIC

P. L. Hammer (Ivănescu) and S. Rudeanu, **Boolean Methods in Operation Research and Related Areas**. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg—New-York, XVI + 329 pages.

Numerous questions arising in modern control theory, mathematical economics, scheduling theory, operations research, and other areas lead to the optimizing problems over structures. The present book by P. L. Hammer (Ivănescu) and S. Rudeanu represents an important contribution to the development of minimizing theory over

Boolean algebras. The main tools described and employed are: Boolean matrix calculus, Boolean equations and pseudo-Boolean programming. The book has two parts. The first part (Chapters I to VII) presents a mathematical background: Boolean functions, Boolean equations, pseudo-Boolean functions, pseudo-Boolean equations and inequalities, pseudo-Boolean programming. The core of the presented book is pseudo-Boolean programming, that is the problem of minimizing (maximizing) pseudo-Boolean functions. The pseudo-Boolean functions are real valued functions of Boolean variables. The method of pseudo-Boolean programming enables the solution of linear and non-linear bivalent program as well as of various generalizations including integer polynomial programming. In the second part (Chapter VIII to XIV) there are presented various applications of pseudo-Boolean programming to the theory of graphs, networks, partially ordered sets, sequencing problems, assignment and transportation problems, time-table scheduling, optimal plant location, minimization problems in switching circuits. The book includes an Appendix written by I. Rozenberg on a generalization of pseudo-Boolean programming. By content and fashion of exposition this book is intended for those interested in operation research or in applications of Boolean algebras.

C. TARȚIA

**Bruno Brosowski, Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation.** Bibliographisches Institut Mannheim, Hochschultaschenbücher-Verlag, 1968, 153 Seiten.

Das in der Reihe „B.I.-Hochschulschriften“ erschienene Büchlein (Nr. 808/808a) ist die mit einigen Änderungen versehene und im Mai 1967 mit gleichem Titel vom Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik München veröffentlichte Habilitationsschrift des Verfassers zur Erlangung der Venia legendi in der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwigs-Maximilians-Universität zu München. Es enthält die vom Verfasser erzielten Ergebnisse bei Approximationen im normierten linearen Raum  $C[Q, H]$  der stetigen Abbildungen des kompakten metrischen Raumes  $Q$  in den unitären Raum  $H$ . Dabei werden insbesondere Fragen

der Charakterisierung und der Eindeutigkeit der Minimallösungen behandelt.

Das erste Kapitel enthält eine allgemeine Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Untersuchungen bei nicht-linearen Tschebyscheff-Approximationen, die Formulierung des vom Verfasser behandelten Approximationsproblems und eine Zusammenfassung der Hauptergebnisse der Arbeit. Abschliessend werden noch einige bekannte Sätze angeführt, die in der Arbeit öfters benötigt werden.

Das zweite Kapitel behandelt Approximationen mit allgemeinen Funktionensystemen, wobei mehrere Paragraphen dem Studium der Extremalnaturen gewidmet sind.

Im dritten Kapitel, meiner Meinung nach das interessanteste, führt der Verfasser sogenannte reguläre Funktionensysteme ein und zeigt, dass für ein Funktionensystem das erweiterte Kolmogoroffsche Kriterium genau dann eine notwendige Bedingung für eine Minimallösung darstellt, wenn dieses System regulär ist. Für reguläre Funktionensysteme werden ausserdem Eindeutigkeitskriterien bewiesen und für eine gewisse Klasse regulärer Systeme auch Dimensionssätze. Mehrere bekannte Sätze über lineare und rationale Approximationen werden nach entsprechender Modifikation auf reguläre Funktionensysteme übertragen.

Diese Arbeit enthält eine einheitliche Darstellung einiger Aspekte der Theorie nicht-linearer Tschebyscheff-Approximationen, wobei die grösstmögliche Allgemeinheit erreicht wird. Sie ist eine Fortsetzung der Untersuchungen des Verfassers über Approximationen mit verallgemeinerten rationalen Funktionen, asymptotisch konvexen Funktionenfamilien und Tschebyscheff-Approximationen an differenzierbaren Funktionen. Die dabei von ihm erzielten Ergebnisse waren schon öfters Gegenstand von Referaten und Diskussionen im Rahmen der am Recheninstitut Cluj von Professor Tiberiu Popoviciu und Dozent Elena Popoviciu geleiteten Seminarien. Dieses ist ein weiterer Beweis dafür, dass sie grosses Interesse gefunden haben.

Jedem, der sich mit Fragen der Approximationstheorie beschäftigt, ist diese Arbeit bestens zu empfehlen, da sie einerseits auf mehrere bisher offene Fragen eine Antwort erteilt und andererseits durch die neuen Ideen die sie enthält, Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen sein kann.

WOLFGANG W. BRECKNER

CONTRIBUTIONS TO THE QUALITATIVE STUDY OF NONLINEAR OSCILLATIONS

Abstract of the doctor thesis of Mathematical Sciences, prepared by IOAN MUNTEAN under Prof. T. POPOVICIU's guidance and maintained at the Faculty of Mathematics and Mechanics of the University of Cluj, on October 7, 1967

The first part of the work is devoted to the research of free oscillations for the autonomous differential system

$$\dot{x} = h(y) - F(x), \dot{y} = -g(x). \quad (1)$$

The differential systems

$$\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = -g(x); \quad \dot{x} = \psi(y) - \Phi(x), \dot{y} = -x,$$

associated with the S. Lefschetz's equation  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  [including the classical van der Pol's equation  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ ], respectively with the H. Kauderer's equation  $\ddot{x} + \Phi(\dot{x}) + \psi(x) = 0$  [including the well-known Rayleigh's equation  $m\ddot{x} + (-A + B\dot{x}^2)\dot{x} + kx = 0$ ], are particular cases of the system (1).

The problem of existence, uniqueness and stability of free oscillations of (1) has an answer in the following theorem:

**THEOREM A.** If 1° the functions  $F, g, h: R \rightarrow R$  are continuous, odd and subjected to a certain requirement of uniqueness of solutions of (1); 2° there exists a number  $a > 0$ , such that  $F(x) < 0$  for  $0 < x < a$ ,  $F$  increases in the interval  $(a, \infty)$ , and  $F(x) \rightarrow \infty$  when  $x \rightarrow \infty$ ; 3°  $g(x) \cdot \text{sign } x > 0$  for  $x \neq 0$ ; 4°  $h$  increases and  $h(y) \rightarrow \infty$  when  $y \rightarrow \infty$ ; then there exists a unique limit cycle of (1) and this is orbitally stable. The corresponding free oscillation is unique with the exception of a phase difference.

Under further assumptions concerning the functions  $F, g, h$  the relaxation oscillations of  $\varepsilon \dot{x} = h(y) - F(x), \dot{y} = -\varepsilon g(x)$  are studied. Moreover, we give an algorithm for the computation of these oscillations. Then, one proves other theorems on the existence, nonuniqueness, relative position or asymptotical stability of solutions of (1).

For other autonomous systems we have obtained the following:

**THEOREM B.** If 1° the functions  $f: R^2 \rightarrow R, g, h, u, v, w: R \rightarrow R$  are continuous and subjected to a certain condition of uniqueness and prolongability to  $\infty$  of the solutions of the system

$$\dot{x} = u(x) \cdot v(y), \dot{y} = g(x) \cdot h(y) + f(x, y) \cdot w(y); \quad (2)$$

2° the functions  $u, h$  are positive; 3°  $g(z) \cdot \text{sign } z < 0, v(z) \cdot \text{sign } z > 0, w(z) \cdot \text{sign } z > 0$  for  $z \neq 0$ ; 4°  $f(0, 0) > 0$  and there is a bounded domain  $Z \subset R^2$ , such that  $f(x, y) \leq 0$  for  $(x, y) \notin Z$ ; 5°

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{g(\xi)}{u(\xi)} d\xi = -\infty, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{v(\eta)}{h(\eta)} d\eta = \infty;$$

then the system (2) possesses at least one nontrivial free oscillation.

Our principal result of the second part of the work is the following:

**THEOREM C.** If 1° the functions  $f: R^2 \rightarrow R$ ,  $e, g, h: R \rightarrow R$  are continuous and  $e$  is periodic; 2° there exist positive numbers  $a, b, c, M$ , such that  $f(x, y) > -M$  for  $|x| \geq a$  and  $0 \leq y \leq b$ ;  $|y| \cdot f(x, y) > E + A$  for  $x^2 + y^2 \geq c^2$  and  $|y| \geq b$ , with  $E = \max_{t \in R} |e(t)|$  and  $A > \max_{|x| < a} |g(x)|$ ;

3°  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) \cdot \text{sign } x > Mb + E$ ; 4°  $h(y) \cdot \text{sign } y > 0$  for  $y \neq 0$  and  $\int_0^y h(\eta) d\eta \rightarrow \infty$  when  $|y| \rightarrow \infty$ ; then

the system

$$\dot{x} = h(y), \quad \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) + e(t)$$

possesses at least one harmonic oscillation i.e., a periodic solution having the same period with the function  $e$ .

The machinery developed for Theorem C is used to establish some theorems of relative or global boundedness in the future for the systems

$$\dot{x} = h(y) - F(x) + E(t), \quad \dot{y} = -g(x)$$

and

$$\dot{x} = h(y), \quad \dot{y} = -g(x) - F(y) + e(t).$$

A criterion of boundedness on all real axis of at least one solution for a special system of several differential equations is given in the last paragraph of the work.

#### REVIEWERS:

Prof. dr. doc. GH. MARINESCU,  
University of Bucharest,  
Prof. dr. doc. A. HAIMOVICI, University  
of Jassy,  
Dr. D. RIPIANU, Computation Institute  
of Cluj.

#### Ședințe de comunicări.

La ședințele de comunicări organizate în anul 1967 de Facultățile de Matematică-mecanică și Fizică s-au prezentat următoarele referate:

13 ianuarie

D. D. Stancu, Aproximarea funcțiilor prin șiruri de operatori liniari pozitivi.

C. Kalik, O observație asupra problemei la limită pentru sisteme eliptice.

1 februarie

E. Dezső, Refracția metalelor.

S. Nistor, Contribuții la calculul nivelelor energetice ale ionilor din starea  $S_{5/2}$  situați într-un câmp cristalin cu simetrie axială.

3 martie

D. V. Ionescu, Aplicații ale reprezentării diferențelor divizate sub formă de integrală definită.

G. h. Pic, O proprietate a reticulelor distributive.

14 aprilie

G. Călugăreanu, Asupra elementelor simple ale unui grup fundamental.

B. Orbán, Despre polara birațională în raport cu o cubică.

W. W. Breckner, Asupra unor probleme de cea mai bună aproximație.

26 aprilie

Atanas Atanasov Anghelov (Institutul Pedagogic din Plovdiv, R.P. Bulgaria), Aplicațiile ecuației lui Fadeev la unele probleme ale fizicii moleculare.

Dumitru Spiridon, Noi momente pentru liniile de rezonanță paramagnetică.

D. Demco, Teoria relaxării cu memorie.

12 mai

C. Kalik, Despre probleme la limită generale în semispații.

M. Schechter, Subgrupuri convexe în grupuri ordonate.

7 iunie

P. Pavel, Asupra unor formule de cuadratură de tip Gauss.

A. I. Rus, Problema lui Dirichlet.

I. Pop, Mișcarea hidromagnetică datorită unei plăci accelerate.

11 octombrie

Jean de Prins (Universitatea Bruxelles), Stadiul actual al dezvoltării studiului maserilor moleculari.

13 octombrie

G. Călugăreanu, Asupra automorfismelor unui grup cu o relație.

A. I. Rus, Unicitatea soluției problemei lui Dirichlet pentru sisteme eliptice.

17 noiembrie

I. Kolumbán, W. W. Breckner, Aproximare neliniară în spații normate.

6 decembrie

F. Puskás, Studiul proprietăților electrice ale sistemului  $ZnO-Al_2O_3$  (partea I).

E. Tătaru, Informare asupra călătoriei de documentare în R.D.G.

8 decembrie

I. Marușciac, Algoritmi cu scheme graf și mașini Turing.

V. Zelmer, Algebre booliene generalizate.

13 decembrie

F. Puskás, Studiul proprietăților electrice ale sistemului de  $ZnO-Al_2O_3$  (partea a II-a).

E. Tătaru, Metoda acumulării datelor.

22 decembrie

A. Puri (Institutul Politehnic București), Referat informativ asupra cercetărilor din domeniul materialelor de construcții la catedra de Chimie industrială.

F. Constantinescu, D. Demco, Aplicații ale funcției Green în problema de relaxare.

**Participări la manifestări științifice internaționale.**

1. Acad. prof. T. Popoviciu și conf. E. Popoviciu au participat la al IV-lea Congres internațional I.K.M. de la Weimar, în luna iunie, și au ținut următoarele conferințe:

T. Popoviciu, *Über die Einwertigkeit und die Mehrwertigkeit der Funktionen einer reellen Veränderlichen.*

E. Popoviciu, *Über die beste Approximation im Sinne von Tschebyscheff.*

2. Acad. prof. G. Călugăreanu a participat la Congresul matematicienilor bulgari, ținut la Varna, în luna august, unde a prezentat comunicarea *Sur les générateurs de certains groupes d'automorphismes.*

3. Între 21-30 august, prof. Gh. Chiș, conf. A. Pál, cercet. principal I. Todoran, asist. V. Ureche, cerc. T. Oproiu, cerc. V. Pop au participat la a XIII-a Adunare generală a Uniunii Astronomice Internaționale. La această adunare conf. A. Pál și cercet. principal I. Todoran au fost aleși membri ai U.A.I.

4. Între 11-14 septembrie prof. Gh. Chiș a participat la cea de a 11-a Consfătuire în problema cercetării științifice cu ajutorul observațiilor sate-

liilor artificiali ai Pământului, care s-a ținut la Zakopane, și a prezentat comunicarea *Opređenje izmenenii perioda iskusvennih spuinikov 63171 (Kosmos 17) i 64531 (Kosmos 44)* (autori Gh. Chiș, A. Pál și T. Oproiu).

5. Prof. D. V. Ionescu a participat, între 9-13 octombrie, la Colocviul de ecuații funcționale de la Zakopane (R.P. Polonă) și a ținut comunicarea *L'extension d'une équation fonctionnelle de D. Pompeiu à l'aide d'une formule de dérivation numérique.* În 17 octombrie prof. D. V. Ionescu a ținut conferința *Sur une classe de formules de dérivation numérique* la Filiala din Cracovia a Societății de Matematică din Polonia, iar în 19 octombrie conferința *La représentation des différences divisées d'une fonction par une intégrale définie et application à la détermination des restes des formules de quadrature de Gauss et Turán.*

**Participări la manifestări științifice din țară.**

20 mai

SESIUNEA DE COMUNICĂRI  
A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN ORADEA  
I. Muntean, Mărginirea globală în viitor a soluțiilor sistemului diferențial al lui Rayleigh.

I. Marușciac, Asupra unor polinoame de abatere minimă de la zero.

M. Rădulescu, Integralele  $M_*$  și  $M$  în spații liniare.

26 mai

SESIUNEA DE COMUNICĂRI  
A INSTITUTULUI PEDAGOGIC  
DIN BAIJA-MARE

I. Muntean, Neunicitatea și poziția ciclurilor unor sisteme de ecuații diferențiale.

8-11 iunie

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ  
A CENTRULUI DE CALCUL ECONOMIC ȘI  
CIBERNETICĂ ECONOMICĂ BUCUREȘTI

E. Popoviciu, Aplicarea teoriei celei mai apropiate în programarea parametrică.

I. Kolumbán, M. Magyarosi, Despre o generalizare a problemei programării liniare.

27-30 iunie

COLOCVIUL DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ,  
BUCUREȘTI

M. Frenkel, O observație asupra unor probleme în legătură cu sisteme de ecuații diferențiale, care depind de un parametru mic.

C. Kalik, Asupra problemelor la limită în semispații.

E. Popoviciu, Proprietăți ale operatorilor liniari și pozitivi.

30 iunie - 5 iulie

COLOCVIUL INTERNAȚIONAL  
DE VARIETAȚI DIFERENȚIABILE

M. Țarină, Grupuri de oloonomie ale spațiilor proiectiv euclidiene.

27 august — 5 septembrie

CONGRESUL INTERNAȚIONAL  
DE LINGVISTICĂ

I. Stan, Contribution to the vocabulary length.

15—20 septembrie

COLOCVIUL DE TEORIA APROXIMĂRII  
FUNCȚIILOR, CLUJ

Conferințe

G. Călugăreanu, Sur les automorphismes du groupe fondamental d'une surface fermée orientable.

D. V. Ionescu, Sur une classe des formules de cubature.

E. Popoviciu, Quelques problèmes posés par la théorie comparative des ensembles interpolatoires.

T. Popoviciu, Sur la conservation de l'allure d'une fonction par interpolation.

F. Radó, V. Peteanu, Structures algébriques rattachées aux problèmes d'ordonnement.

Comunicări

W. W. Breckner, Unele observații privind existența unor soluții minimale.

Gh. Chiș, A. Pál, T. Oproiu, Calculele de orbite ale sateliților artificiali ai Pământului cu ajutorul calculatorului electronic DACICC-1.

Gh. Coman, Formule de cubatură cu noduri fixe.

D. V. Ionescu, A. Coțiu, O nouă extindere a formulei de cuadratură a lui Lacroix.

D. V. Ionescu, Le reste de la formule de dérivation numérique pour  $f'(x)$ , dans le cas des noeuds fixes.

I. Kolumbán, Asupra unei probleme de aproximare optimală.

I. Lupaș, A property of the S. N. Bernstein operator.

I. Marușciac, The zeros of some extremal linear combinations of polynomials.

P. Mocanu, Asupra geometriei reprezentării conforme.

G. Moldovan, Aproximarea funcțiilor continue prin polinoamele lui Bernstein generalizate.

I. Muntean, Solutions bounded in the future for some systems of differential equation.

A. Ney, Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence dans le sens classique et dans celui de I. G. Van der Corput, des processus discrets ou continus.

P. Pavel, Sur quelques formules de quadrature de type Gauss-Christoffel.

F. Radó, Sur l'interprétation de la méthode du simplex dans la théorie des graphes.

I. A. Rus, Asupra pozitivității funcției lui Riemann.

E. Schechter, Stability and convergence of some difference schemes satisfying difference inequalities.

D. D. Stancu, On the moments of Pólya distribution.

I. Todoran, Asupra unui procedeu pentru determinarea extremelor la funcțiile empirice.

21—23 septembrie

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ  
A OBSERVATORULUI ASTRONOMIC  
BUCUREȘTI

Gh. Chiș, A. Pál, T. Oproiu, Variația perioadei dracoonitice la sateliții artificiali Kosmos 17 și Kosmos 44.

Gh. Chiș, Urmărirea efectului Blajko la variabilele de tip RR Lyrae.

Gh. Chiș, V. Pop, Determinarea corecțiilor fotometrice ale telescopului Newton al Observatorului astronomic din Cluj.

Gh. Chiș, N. Lungu (Institutul pedagogic de 3 ani Oradea), Determinarea elementelor fotometrice preliminare la steaua de tipul RR Lyrae, WZ Bootis.

T. Oproiu, Asupra unui procedeu pentru determinarea unor elemente orbitale ale sateliților artificiali ai Pământului.

A. Pál, Asupra fundamentării matematice a metodelor de mediere a ecuațiilor din problema celor trei corpuri.

I. Todoran, Determinarea primelor elemente fotometrice ale cefeidei scurt periodice SX Cancri.

I. Todoran, Asupra variației perioadei Ia trei binare fotometrice.

I. Todoran, Utilizarea metodei lui Hertsprung pentru determinarea minimelor și maximelor la stele variabile.

V. Ureche, Evaluarea teoretică a variației de lumină la sisteme binare strînse pentru un model elipsoidal.

V. Ureche, O metodă pentru calculul orbitelor fotometrice ale stelelor binare strînse.

22—26 septembrie  
COLOCVIUL TEHNICI DE CALCUL  
ȘI CALCULATORARE BUCUREȘTI

D. V. Ionescu, Asupra formulelor de derivare numerică.

Gh. Micula—M. Micula, Asupra formulei de cuadratură a lui Tricomi.

28—29 octombrie

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ  
A FILIALEI DIN CLUJ  
A ACADEMIEI R.S. ROMÂNIA

D. V. Ionescu, Clase de formule de cubatură relative la un dreptunghi  $D$  pe o rețea de noduri interioare și pe frontiera lui  $D$ .

E. Popoviciu, Asupra aproximării distribuțiilor prin șiruri de distribuții polinomiale.

T. Popoviciu, Asupra convergenței seriilor cu termeni pozitivi.

F. Radó, V. Peteanu, Semigrupe de ordonanțare.

16-18 noiembrie

COLOCVIUL PROBLEME MATEMATICE  
ALE MECANICII MEDIILOR CONTINUI  
DEFORMABILE, BUCUREȘTI

T. Petrilă, Un algoritm pentru determinarea liniilor de curent în mișcarea plană în jurul unor profile simetrice.

I. Pop, Mișcarea hidromagnetică nestaționară datorită unui disc rotitor.

I. Stan, Ecuația difuziei în cazul unei plăci ce exercită o mișcare oscilatorie.

18-21 decembrie

COLOCVIUL DE TEORIA CATEGORIILOR,  
BUCUREȘTI

Au participat: prof. Gh. Pic, asist. Purdea.

Vizite.

1 noiembrie

Prof. Emile Durand, decanul Facultății de științe a Universității din Toulouse; Solution numérique de l'équation de Laplace et de l'équation biharmonique.

25 noiembrie

Acad. prof. B. N. Gnedenko, Universitatea de stat din Moscova; Despre teoria siguranței.

20 decembrie

Prof. Zabrean Zabreanov Dimitrov, Facultatea de matematică-mecanică a Universității din Sofia; Unele probleme din dinamica gazelor.





**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**  
**Str. M. Kogălniceanu 1, Cluj (Republica Socialistă România)**

**NUMERE APĂRUTE – ВЫШЕДШИЕ НОМЕРА**  
**NUMÉROS PARUS – ISSUED NUMBERS –**  
**ERSCHIENENE NUMMERN**

**1956**

**BULETINUL UNIVERSITAŢILOR „V. BABEŞ” ŞI „BOLYAI” CLUJ, Seria Ştiinţe sociale, vol. I, nr. 1–2**

**A KOLOZSVÁRI BABEŞ ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, társadalomtudományi sorozat, I. évfolyam, 1–2. szám**

**1957**

**BULETINUL UNIVERSITAŢILOR „V. BABEŞ” ŞI „BOLYAI” CLUJ, Seria Ştiinţele naturii, vol. II, nr. 1–2**

**A KOLOZSVÁRI BABEŞ ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, természettudományi sorozat, II. évfolyam, 1–2. szám**

**1958**

**STUDIA UNIVERSITATUM VICTOR BABEŞ ET BOLYAI, Tomus III**

**Nr. 1, Series III Fasciculus 1, Philosophia**

**Nr. 2, Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia**

**Nr. 3, Series I Fasciculus 1, Mathematica**

**Nr. 4, Series I Fasciculus 2, Chemia**

**Nr. 5, Series II Fasciculus 1, Geologia–Geographia**

**Nr. 6, Series IV Fasciculus 1, Philologia**

**Nr. 7, Series II Fasciculus 2, Biologia**

**Nr. 8, Series IV Fasciculus 2, Historia**

**1959**

**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**

**Series I Fasciculus 1, Physica**

**Series I Fasciculus 2, Chemia**

**Series II Fasciculus 1, Geologia–Geographia**

**Series II Fasciculus 2, Biologia**

**Series III Fasciculus 1, Psychologia–Paedagogia**

**Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia**

**Series IV Fasciculus 1, Historia**

**Series IV Fasciculus 2, Philologia**

**1960**

**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**

**Series I Fasciculus 1, Mathematica–Physica**

**Series I Fasciculus 2, Chemia**

**Series II Fasciculus 1, Geologia–Geographia**

**Series II Fasciculus 2, Biologia**

**Series III Fasciculus 1, Philosophia et Oeconomica**

**Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia**

Series IV Fasciculus 1, Historia  
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1961

**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**

Series I Fasciculus 1, Mathematica—Physica  
Series I Fasciculus 2, Chemia  
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia  
Series II Fasciculus 2, Biologia  
Series III Fasciculus 1, Psychologia—Paedagogia  
Series III Fasciculus 2, Oeconomica et Iurisprudentia  
Series IV Fasciculus 1, Historia  
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1962, 1963, 1964, 1965

**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1  
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2  
Series Chemia, fasciculus 1  
Series Chemia, fasciculus 2  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2  
Series Biologia, fasciculus 1  
Series Biologia, fasciculus 2  
Series Philosophia et Oeconomica  
Series Psychologia—Paedagogia  
Series Iurisprudentia  
Series Historia, fasciculus 1  
Series Historia, fasciculus 2  
Series Philologia, fasciculus 1  
Series Philologia, fasciculus 2

1966, 1967, 1968

**STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI**

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1  
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2  
Series Chemia, fasciculus 1  
Series Chemia, fasciculus 2  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1  
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2  
Series Biologia, fasciculus 1  
Series Biologia, fasciculus 2  
Series Philosophia  
Series Oeconomica  
Series Psychologia—Paedagogia  
Series Iurisprudentia  
Series Historia, fasciculus 1  
Series Historia, fasciculus 2  
Series Philologia, fasciculus 1  
Series Philologia, fasciculus 2

## ERRATA

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
Page	Line	Instead of:	Read:
32	The fourth from below		$e^{(a_{11} + \theta a_{12} + \dots + \theta^{n-1} a_{1n})x}$
97	in formula (2)	$(\epsilon_0 T)$	$(\epsilon_0 T)^{1/2}$
113	in formula (1)	$T_2^2$ și $H_9^2$	$T_2$ , resp. $H_1^2$







În cel de al XIII-lea an de apariție (1968) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde seriile :  
matematică—fizică (2 fascicule) ;  
chimie (2 fascicule) ;  
geologie—geografie (2 fascicule) ;  
biologie (2 fascicule) ;  
filozofie ;  
științe economice ;  
psihologie—pedagogie ;  
științe juridice ;  
istorie (2 fascicule) ;  
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIII году издания (1968) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериям  
математика—физика (2 выпуска) ;  
химия (2 выпуска) ;  
геология—география (2 выпуска) ;  
биология (2 выпуска) ;  
философия ;  
экономические науки ;  
психология—педагогика ;  
юридические науки ;  
история (2 выпуска) ;  
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XIII-me année de publication (1968) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent  
les séries suivantes :  
mathématiques—physique (2 fascicules) ;  
chimie (2 fascicules) ;  
géologie—géographie (2 fascicules) ;  
biologie (2 fascicules) ;  
philosophie ;  
sciences économiques ;  
psychologie—pédagogie ;  
sciences juridiques ;  
histoire (2 fascicules) ;  
linguistique—littérature (2 fascicules).

43875

Abonament anual: 20 lei seria, 160 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și prin difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

**Prețul 10 lei**