

491307

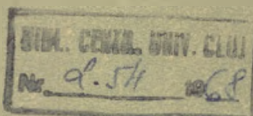
Ex. 3

# STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1968



C L U J

**REDACTOR ȘEF : Acad. prof. C. DAICOVICIU**

**REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI : Prof. N. LASCU, acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. I. URSU,  
membru corespondent al Academiei**

**COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ : Acad. prof. G. CĂLU-  
GĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ, prof. Z. GÁBOS, prof. D. V. IONESCU,  
conf. I. POP, prof. GH. PIC, prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei**





PRAECLARISSIMO AC DOCTISSIMO VIRO  
CONSTANTINO DAICOVICIU  
DACORVM ET ROMANORVM ANTIQVITATVM  
SINGVLARI MENTIS ACIE INVESTIGATORI  
MAGISTRO INCOMPARABILI  
ALMAE MATRIS NAPOCENSIS  
RECTORI MAGNIFICO  
CIVI IN REPUBLICA PRAESTANTISSIMO  
SEPTVAGENARIO  
COLLEGAE DISCIPVLI AMICI



# STUDIA

## UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

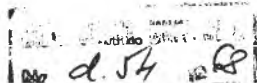
### SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

#### FASCICULUS 1

Redacția: CLUJ, str. Kogălniceanu 1 • Telefon: 13 4 50

#### SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — INHALT — CONTENTS

- I. GY. MAURER und M. SZILÁGYI, Über ein unendliches Produkt von geordneten Systemen beliebiger Mächtigkeit in Operatorgruppen mit Untergruppentopologie — Despre produsul infinit al unor sisteme ordonate de putere oarecare definite în grupuri cu operatori înzestrate cu o topologie filtrantă — О бесконечном произведении некоторых упорядоченных систем произвольной степени, определяемых в группах с операторами, обладающих фильтрующей топологией . . . . . 3
- I. MARUȘCIAC, Sur certains polynômes d'écart minimum à racines multiples — Asupra unor polinoame de abatere minimă de la zero cu rădăcini multiple — О полиномах наименее уклоняющихся от нуля с многократными корнями. . . . . 7
- E. KOLOZSI, O caracterizare geometrică a funcțiilor de pondere slab crescătoare polinomiale — Геометрическая характеристика слабо растущих многочленных весовых функций Une caractérisation géométrique des fonctions polynômes de poids faiblement croissant 15
- I. A. RUS, Sur les propriétés des normes des solutions d'un système d'équations différentielles du second ordre — Asupra proprietăților normelor soluțiilor unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea — О свойствах норм решений одной системы дифференциальных уравнений второго порядка . . . . . 19
- D. D. STANCU, On the Moments of Negative Order of the Positive Bernoulli and Poisson Variables — Asupra momentelor de ordin negativ ale variabilelor Bernoulli și Poisson pozitive — О моментах отрицательного порядка положительных переменных Бернулли и Пуассона. . . . . 27
- I. TORSAN, Asupra distribuțiilor variabilelor aleatorii discrete — О распределениях дискретных случайных переменных — Sur les distributions des variables aléatoires discrètes. . . . . 33
- W. W. BRECKNER, O teoremă de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximație — Одна теорема, характеризующая элементы наилучшей аппроксимации — Un théorème de caractérisation des éléments de la meilleure approximation . . . . . 39
- I. KOLUMBÁN, Despre caracterizarea infraelementelor — О характеристике инфраэлементов — Sur la caractérisation des infraéléments . . . . . 43
- P. PAVEL, Asupra unor formule de cuadratură de tip Gauss — О некоторых квадратурных формулах типа Гаусса — Sur certaines formules de quadrature de type Gauss . . . . . 51
- E. SCHECHTER, On a Connection between the Chaplygin and Newton Methods — Asupra unei legături dintre metoda lui Ciaplighin și a lui Newton — Об одной связи между методами Чаплыгина и Ньютона . . . . . 59
- F. RADÓ, Sur le problème du flot à coût minimum — Despre problema fluxului cu cost minim — О задаче потока с минимальной стоимостью . . . . . 67
- I. POP, Asupra scurgerii hidromagnetice între două discuri torsional oscillatorii — О гидромагнитном течении между двумя торсионно колеблющимися дисками — Sur le mouvement hydromagnétique entre deux disques animés d'oscillations torsionnelles . . . . . 73
- A. DARABONT and S. V. NISTOR, The Atmosphere Influence on the Decomposition Process of  $Mn^{2+}$  Ions Aggregates in  $LiF-MnF_2$  System — Influența atmosferei în procesul de descompunere a aglomeratelor de ioni  $Mn^{2+}$  în sistemul  $LiF-MnF_2$  — Влияние атмосферы в процессе разложения агломератов ионов  $Mn^{2+}$  в системе  $LiF-MnF_2$  . . . . . 81



I. COSMA et I. POP, L'antiferromagnétisme des alliages ternaires de nickel-cuivre-manganèse — Antiferomagnetismul aliajelor ternare de nichel-cupru-mangan — Антиферромагнетизм тройной системы сплавов никель-медь-марганец . . . . .	85
I. POP, GH. ILONCA und H. HENNING, Halleffektanomalien in Ni-Cr-Legierungen — Anomalia efectului Hall în aliaje de Ni-Cr — Аномалия эффекта Холла в сплавах Ni — Cr . . . . .	89
GH. CRISTEA, I. CHIȘ, Asupra orientării monocristalelor prin metoda Laue — Об ориентации монокристаллов методом Лауэ — On the Orientation of Single Crystals Using Laue Method . . . . .	95
F. PUSKÁS, C. BÁLINTFFY, Măsurarea curentului alternativ cu traductoare semiconductoare termorezistive — Измерение переменного тока датчиком полупроводникового термосопротивления — Measurement of Alternating Current by Thermoresistive Semiconductor Transducers . . . . .	101
Z. GÁBOS, S. BLONDER, Asupra matricei densității stărilor de spin — О матрице плотности спиновых состояний — On the Density Matrix of the Spin States . . . . .	107
D. DEMCO, Ecuații Bloch generalizate pentru relaxarea scalară — Обобщенные уравнения Блоха для скалярной релаксации — Generalized Equations of Bloch for Scalar Relaxation . . . . .	115
S. V. NISTOR and G. MIHALI, Calculation of the Energetic Levels for an ${}^6\text{S}_{5/2}$ Ion Situated in Cubic Crystalline Field with Axial Deformation in the $\langle 111 \rangle$ Direction — Calculul nivelelor energetice pentru un ion ${}^6\text{S}_{5/2}$ situat într-un câmp cristalin cubic cu deformare axială pe direcție $\langle 111 \rangle$ — Вычисление энергетических уровней для иона ${}^6\text{S}_{5/2}$ , находящегося в кубическом кристаллическом поле с осевым искажением в направлении $\langle 111 \rangle$ . . . . .	123
M. CRISTEA, Propagarea perturbațiilor slabe într-o plasmă ideală în prezența radiației — Распространение слабых возмущений в идеальной плазме в присутствии излучения — Propagation of Weak Disturbances in an Ideal Plasma in Presence of Radiation . . . . .	131
M. CRISTEA, Adiabata de șoc în prezența radiației — Ударная адиабата в присутствии излучения — Shock Adiabats in Presence of Radiation . . . . .	139

Note — Заметки — Notes — Notizen

F. KOCH, Un detector simplu RMN și RES cu tranzistor — Простой детектор ЯМР и ЭПР с транзисторами — A Simple NMR and ESR Detector with Transistors. . . . .	145
---	-----

Recenzii — Рецензии — Livres parus — Bücherbesprechung — Books

I. Marușciac, Teoria algoritmilor (GH. PIC) . . . . .	149
Proceedings of the Second Australasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics (I. POP) . . . . .	149
Lieve Van Gerven, Lijvormen in paramagnetische rezonantie (AL. BÓDI) . . . . .	150
H. Pfeifer, Elektronik für den Physiker (E. TĂTARU) . . . . .	150
G. Lancaster, Electron Spin Resonance in Semiconductors (V. LUPEI) . . . . .	151



# ÜBER EIN UNENDLICHES PRODUKT VON GEORDNETEN SYSTEMEN BELIEBIGER MÄCHTIGKEIT IN OPERATORGRUPPEN MIT UNTER- GRUPPENTOPOLOGIE

I. GY. MAURER und M. SZILÁGYI

In der Mitteilung [2] haben wir uns mit einer sogenannten Untergruppentopologie — die man in einer Gruppe  $G$  mit einem rechtseitigen Operatorenbereich  $O^1$  (kurz:  $O$ -Gruppe) einführen kann — beschäftigt. Für die Einführung dieser Topologie setzt man voraus, dass  $G$  eine von  $O$  zulässige Untergruppenmenge  $\{G_{\xi}\}_{\xi \in I}$  besitzt, so dass:

1\*.  $I$  eine beliebige (mit der Relation  $\leq$ ) gerichtete Indexmenge ist;

2\*. Wenn  $\xi_1 \geq \xi_2$  ( $\xi_1, \xi_2 \in I$ ), dann  $G_{\xi_1} \leq G_{\xi_2}$ .

$G$  wird ein topologischer Raum, wenn man diese Untergruppenmenge der Gruppe  $G$  als vollständiges System von Umgebungen des neutralen Elements  $e$  von  $G$  wählt.  $G$  ist genau dann ein Hausdorffscher Raum, wenn

$$\bigcap_{\xi \in I} G_{\xi} = \{e\} \quad (1)$$

und wenn noch die Untergruppen  $G_{\xi}$  ( $\xi \in I$ ) von  $O$  zulässige Normalteiler von  $G$  sind, so ist  $G$  eine topologische  $O$ -Gruppe.

Ein beliebiges Elementensystem  $\{a_{\nu}\}_{\nu \in \Delta}$  von  $G$  — wobei  $\Delta$  eine beliebige, nicht notwendig geordnete Indexmenge ist — wird genau dann ein Cauchy-System bzw. ein konvergentes System mit dem Grenzwert  $a \in G^2$  genannt, wenn für ein beliebiges  $\xi \in I$  die Indexmenge  $\Delta$  eine endliche Untermenge  $\Delta_0 = \Delta_0(\xi)$  besitzt, so dass

$$a_{\nu}^{-1} a_{\mu} \in G_{\xi} \text{ für alle } \nu, \mu \in \Delta \setminus \Delta_0 \quad (2)$$

bzw.

$$a_{\nu}^{-1} a \in G_{\xi} \text{ für alle } \nu \in \Delta \setminus \Delta_0 \quad (3)$$

gilt<sup>3</sup>.

In der zitierten Arbeit haben wir uns auch mit (unendlichen) Produkten von Elementensystemen vom Typus  $\omega(\Delta = N_0)^4$  — unter Voraussetzung der Bedin-

<sup>1</sup> Die Multiplikation mit den Operatoren sei distributiv bezüglich der Gruppenoperation.

<sup>2</sup> Bezeichnung:  $a_{\nu} \xrightarrow{\Delta} a$ .

<sup>3</sup> Man kann zu jedem System  $\{a_{\nu}\}_{\nu \in \Delta}$  ein System  $\{a_{\lambda}\}_{\lambda \in \Phi}$  mit einer gerichteten Indexmenge  $\Phi$  zuordnen, so dass  $\{a_{\nu}\}_{\nu \in \Delta}$  ein Cauchy-System bzw. ein konvergentes System ist genau dann, wenn  $\{a_{\lambda}\}_{\lambda \in \Phi}$  ein Cauchy-System bzw. konvergentes System im Sinne Moore-Smith's ist. Der in dieser Mitteilung betrachtete Konvergenzbegriff ist also mit einem speziellen Moore-Smith-Konvergenzbegriff gleichwertig (siehe [2]).

<sup>4</sup>  $N_0$  ist die mit der Zahl 0 ergänzte Menge der natürlichen Zahlen.

gungen 1\*, 2\*, (1) — beschäftigt. Wir haben ein unendliches Produkt  $\Pi a_n$  der Elemente  $a_n \in G$  ( $n \in N_0$ ) ein System  $\{A_n\}_{n \in N_0}$  genannt, wobei  $A_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$  ( $n \in N_0$ ).  $\Pi a_n$  heisst genau dann ein Cauchy-Produkt bzw. ein konvergentes Produkt, wenn  $\{A_n\}_{n \in N_0}$  ein Cauchy-System bzw. ein konvergentes System ist. Wenn  $A_n \xrightarrow{\Delta} a \in G$ , dann sagen wir, dass  $a$  der Wert des Produktes  $\Pi a_n$  ist:  $\Pi a_n = a$ . Wir haben gezeigt, dass  $\Pi a_n$  genau dann ein Cauchy-Produkt ist, wenn  $a_n \xrightarrow{\Delta} e$ . Ist  $G$  komplett, so ist dies eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Produktes  $\Pi a_n$ .

Wir setzen in dieser Mitteilung voraus, dass die Untergruppenmenge  $\{G_\xi\}_{\xi \in I}$  der O-Gruppe  $G$  eine, die Bedingung (1) erfüllende absteigende Kette von O zu lässigen Normalteilern von  $G$  ist<sup>5</sup>. Wir definieren unter diesen Bedingungen den Begriff des (unendlichen) Produktes eines Systems  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ , wobei  $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$  und  $\Delta$  eine beliebige geordnete Indexmenge ist.

Wir werden zuerst eine Eigenschaft der in [2] untersuchten Produkten beweisen, die den Grundgedanken für unsere Definition bilden wird. Wir bilden mit den Elementen des Systems  $\{a_n\}_{n \in N_0}$  das System  $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ , wobei  $A_\xi$  das Produkt derjenigen — nach der zunehmenden Ordnung der Indizes geordneten — Elemente  $a_k \in \{a_n\}_{n \in N_0}$  ist, für die  $a_k \notin G_\xi$ <sup>6</sup>. Behält man jedes Element des Systems  $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$  nur einmal, so gelangt man zu einem System  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  ( $I' \subseteq I$ ), dessen Elemente paarweise verschieden sind. Wir ordnen dieses System  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  dem System  $\{a_n\}_{n \in N_0}$  zu. Es gilt: Ist  $\Pi a_n$  ein Cauchy-System (also  $a_n \xrightarrow{\Delta} e$ ), so ist auch  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  ein Cauchy-System und ist  $\Pi a_n = a$ , so haben wir auch  $A_\lambda \xrightarrow{\Delta} a$ . In der Tat, es sei  $\xi$  ein beliebiges Element von  $I$ . Da  $\Pi a_n$  ein Cauchy-Produkt ist, so gibt es eine endliche Untermenge  $\Delta_0 = \Delta_0(\xi)$  von  $N_0$ , so dass

$$A_n^{-1} A_m \in G_\xi \text{ für alle } n, m \in N_0 \setminus \Delta_0 \quad (4)$$

Wir bezeichnen mit  $A_\nu$  bzw. mit  $A_\mu$  ein beliebiges Element von  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  das nur Faktoren aus  $A_n$  bzw. aus  $A_m$  enthält, und zwar diejenigen die nicht zu  $G_\xi$  gehören. Da die Relation (4) nur für eine endliche Anzahl von  $n$  bzw. von  $m$  ( $n, m \in \Delta_0$ ) nicht gültig ist und da man für ein beliebiges  $n$  bzw.  $m$  nur eine endliche Anzahl von  $A_\nu$  bzw.  $A_\mu$  bilden kann, so gibt es eine endliche Untermenge  $I'_0 = I'_0(\xi)$  von  $I$ , so dass  $A_\nu^{-1} A_\mu \in G_\xi$  für alle  $\nu, \mu \in I'_0 \setminus I'_0$ . (Hier haben wir auch die Vertauschbarkeit der Elemente der Normalteiler  $G_\xi$  mit den Elementen von  $G$  verwendet.) Demnach ist  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  ein Cauchy-System.

Es sei nun  $\Delta$  eine beliebige geordnete Indexmenge und  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  ein System, das die Bedingung  $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$  erfüllt. Mit den Elementen des Systems  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  bilden wir das System  $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ , wobei  $A_\xi$  das — von der Ordnung  $R$  der Indexmenge  $\Delta$  bestimmte — Produkt derjenigen Elemente  $a_k \in \{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  ist, für die  $a_k \notin G_\xi$ . Da  $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$ , so enthält  $A_\xi$  ( $\xi \in I$ ) nur eine endliche Anzahl von Elementen. Behält man jedes Element des Systems  $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$  nur einmal, so gelangt man zu einem System  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  ( $I' \subseteq I$ ) mit paarweise verschiedenen Elementen. Dieses System ist dem System  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  zugeordnet.

<sup>5</sup> Offenbar sind dann die Bedingungen 1\* — 2\* erfüllt.

<sup>6</sup> Da  $a_n \xrightarrow{\Delta} e$ , so ist  $A_\xi$  ( $\xi \in I$ ) ein endliches Produkt.

DEFINITION 1. Das System  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  heisst das (von der gegebenen Ordnung  $K$  der Indexmenge  $\Delta$  bestimmte) Produkt  $\pi a_\nu$  des Systems  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ .  $\pi a_\nu$  heisst genau dann Cauchy-Produkt bzw. konvergentes Produkt, wenn  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  ein Cauchy-System bzw. ein konvergentes System ist. Ist  $A_\lambda \xrightarrow{\Delta} a \in G$ , so sagen wir, dass  $a$  der Wert des Produktes  $\pi a_\nu$  ist:  $\pi a_\nu = a$ . Die Elemente von  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  bzw. von  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$  heissen Faktoren bzw. Teilprodukte des Produktes  $\pi^1$ .

B e m e r k u n g. Aus der Definition von  $\pi a_\nu$  und aus der bewiesenen Eigenschaft des Produktes  $\pi a_\nu$ , folgt, dass  $\pi a_\nu = a$ , wenn  $\Delta$  eine Indexmenge vom Typus  $\omega$  ist und wenn  $\Pi a_\nu = a$ .

SATZ 1.  $\pi a_\nu$  ist ein Cauchy-Produkt.

B e w e i s. Es sei  $\xi$  ein beliebiges Element von  $I$ . Aus  $a_\nu \xrightarrow{\Delta} c$  folgt, dass höchstens eine endliche Anzahl von Elementen des Systems  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  der Untergruppe  $G_\xi$  nicht angehört. Wir bezeichnen diese Elemente mit  $a_{\nu_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Es folgt aus der Definition von  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$ , dass es ein einziges Element  $\lambda_0 \in I'$  gibt, so dass  $A_{\lambda_0} = a_{\nu_1} a_{\nu_2} \dots a_{\nu_k}$ , wobei  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_k$ . Es sei  $I'_0 = \{\lambda \in I' ; \lambda < \lambda_0\}$ . Die Untermenge  $I'_0 = I'_0(\xi)$  von  $I'$  ist endlich, weil  $A_\lambda$  ( $\lambda \in I'_0$ ) ein nur mit einiger Faktoren von  $A_{\lambda_0}$  gebildetes Produkt ist. Wenn  $\nu, \mu \in I \setminus I'_0$ , so folgt dass  $A_\nu$  und  $A_\mu$  die Elemente  $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_k}$  als Faktoren enthalten und die übrigen Faktoren von  $A_\nu$  und  $A_\mu$  zu  $G_\xi$  gehören. Da die Elemente der Normalteiler  $G_\xi$  mit der Elementen von  $G$  vertauschbar sind, so gilt  $A_\nu^{-1} A_\mu \in G_\xi$ . Demnach ist  $\pi a_\nu$  ein Cauchy-Produkt.

Wir bezeichnen nun mit  $R'$  eine beliebige — von  $R$  verschiedene — Ordnung der Indexmenge  $\Delta$  und mit  $\pi a'_\nu$  das entsprechende — mit den Faktoren von  $\pi a_\nu$  gebildete — Produkt. Es folgt aus Satz 1, dass  $\pi a'_\nu$  ein Cauchy-Produkt ist und wenn ausserdem  $G$  komplett ist, dann sind  $\pi a_\nu$  und  $\pi a'_\nu$  konvergent. Ist  $\pi a_\nu = a$  dann ist  $\pi a'_\nu$  ein Cauchy-Produkt (im allgemeinen aber nicht konvergent). Selbst wenn  $\pi a'_\nu$  konvergent ist, gilt die Relation  $\pi a_\nu = \pi a'_\nu$  im allgemeinen nicht.

DEFINITION 2. Das Produkt  $\pi a_\nu$  ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sein Wert von der Ordnung der Indexmenge  $\Delta$  unabhängig ist.

LEMMA 1. Es sei  $\pi a_\nu$  unbedingt konvergent,  $\pi a_\nu = a$  und  $\pi_p$  das aus  $\pi a_\nu$  durch Streichung des Elementes  $a_p$  entstehende Produkt. Dann ist  $\pi_p$  unbedingt konvergent und  $\pi_p = a_p^{-1} a$ .

B e w e i s. Wir betrachten eine beliebige Ordnung  $R'$  von  $\Delta$ , bei der  $a$  das erste Element des Systems  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$  ist. Ferner sei  $\pi a'_\nu$  das Produkt, das der Ordnung  $R'$  entspricht. Da  $\pi a_\nu$  unbedingt konvergent ist, so gilt  $\pi a'_\nu = a$ . Demnach gibt es für beliebiges  $\xi \in I$  eine endliche Untermenge  $I'_0 = I'_0(\xi) \subset I' \subseteq I$ , so dass  $(A'_\lambda)^{-1} a \in G_\xi$  für alle  $\lambda \in I \setminus I'_0$ . Hier sind  $A'_\lambda$  ( $\lambda \in I'$ ) die Teilprodukte von  $\pi a'_\nu$

<sup>7</sup> Auch N. BOURBAKI und T. SZELE beschäftigten sich mit der Definition des Produktes eines Systems (von beliebiger Mächtigkeit) von Elementen, die zu gewissen kommutativen topologischen Gruppen gehören. Die Konstruktion von N. BOURBAKI (s. [1], S. 60) ist eine ganz andere Konstruktion. Die von T. SZELE [3] hat nur formale Analogien mit unserer Konstruktion.

Wir bezeichnen mit  $\pi'_\rho$  das aus  $\pi a'_\rho$  durch Streichung des Elementes  $a_\rho$  entstehende Produkt und mit  ${}_\rho A'_\lambda (\lambda \in I)$  die Teilprodukte von  $\pi'_\rho$ . Dann gilt für  $\lambda \in I \setminus I_0$ :

$$({}_\rho A'_\lambda)^{-1} (a_\rho^{-1} a) = [a_\rho ({}_\rho A_\lambda)]^{-1} a = \begin{cases} (A'_\lambda)^{-1} a \in G_\xi \text{ wenn } a \notin G_\xi \\ [({}_\rho A'_\lambda)^{-1} a] a_\rho^* \in G_\xi \text{ wenn } a_\rho \in G_\xi. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass im zweiten Fall  ${}_\rho A'_\lambda = A'_\lambda$  ist und  $a_\rho^*$  das mit der Relation  $a_\rho^{-1} a = a a_\rho^*$  bestimmte Element der Normalteiler  $G_\xi$  ist. Es folgt, dass  $\pi'_\rho = a_\rho^{-1} a$  und da  $\pi'_\rho$  das aus  $\pi_\rho$  gemäss der beliebigen Ordnung  $R'$  entstehende Produkt ist, so ist  $\pi_\rho$  unbedingt konvergent und  $\pi_\rho = a_\rho^{-1} a$ .

**SATZ 2.**  $\pi a_\nu$  ist genau dann ein unbedingt konvergentes Produkt, wenn seine Faktoren paarweise kommutativ sind.

**Beweis.** Es sei  $\pi a_\nu$  unbedingt konvergent und  $\pi a_\nu = a$ . Bezeichnet man mit  $\pi_{\rho\tau}$  das Produkt, das aus  $\pi a_\nu$  durch Streichung der beliebig gewählten Faktoren  $a_\rho$  und  $a_\tau$  entsteht, so folgt auf Grund des Lemmas, dass das Produkt  $\pi_{\rho\tau}$  unbedingt konvergent ist und  $\pi_{\rho\tau} = (a_\rho a_\tau)^{-1} a = (a_\tau a_\rho)^{-1} a$ . Daraus folgt, dass  $a_\rho a_\tau = a_\tau a_\rho$  ( $\rho, \tau \in \Delta$ ).

Umgekehrt, sei  $a_\rho a_\tau = a_\tau a_\rho$  ( $\rho, \tau \in \Delta$ ) und  $\pi a_\nu = a$  vorausgesetzt. Wegen der vorausgesetzten Kommutativität stimmt das System  $\{A'_\lambda\}_{\lambda \in I'}$ , das das Produkt  $\pi a_\nu$  definiert, mit dem System  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ , das das Produkt  $\pi a_\nu$  definiert, überein. Demnach ist  $\pi a'_\nu = a$ .

(Eingegangen am 3. April 1967)

#### L I T E R A T U R

1. N. Bourbaki, *El. de Math., Livre III, Topologie générale*, Paris, 1960.
2. I. Gy. Maurer — M. Szilágyi, *Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen*, „Miskolci Nehézipari Egyetem Közleményei“ (unter Druck).
3. T. Szele, *On a Topology in Endomorphism Rings of Abelian Groups*, „Publicationes Math. Debrecen“, 5 (1957), 1—4.

#### DESPRE PRODUSUL INFINIT AL UNOR SISTEME ORDONATE DE PUTERE OARE-CARE DEFINITE ÎN GRUPURI CU OPERATORI ÎNZESTRATE CU O TOPOLOGIE FILTRANTĂ

(R e z u m a t)

Fie  $G$  un grup cu operatori, în care s-a introdus o topologie filtrantă pe baza unui anumit sistem de divizori normali permiși ai lui  $G$ . Lucrarea se ocupă cu anumite produse (infinite) care se pot forma cu elementele unui sistem  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ , unde  $\Delta$  este o mulțime ordonată de o putere oarecare și  $a_\nu \in G$  ( $\nu \in \Delta$ ). Dacă  $\Delta$  este o mulțime de tipul  $\omega$ , atunci studiul produselor considerate se reduce la studiul produselor definite în sensul obișnuit al analizei.

#### О БЕСКОНЕЧНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ. ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ, ОБЛАДАЮЩИХ ФИЛЬТРИРУЮЩЕЙ ТОПОЛОГИЕЙ

(Р е з ю м е)

Пусть  $G$  группа с операторами, в которую была введена фильтрующая топология на основе определённой системы допущенных нормальных делителей  $G$ . Работа занимается определёнными (бесконечными) произведениями, которые можно образовать с элементами одной системы  $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ , где  $\Delta$  — упорядоченное множество произвольной степени и  $a_\nu \in G$  ( $\nu \in \Delta$ ). Если  $\Delta$  множество типа  $\omega$ , то изучение рассматриваемых произведений сводится к изучению произведений, определяемых в обычном смысле анализа.

# SUR CERTAINS POLYNÔMES D'ÉCART MINIMUM A RACINES MULTIPLES

par

I. MARUȘCIAC

1. Quand on étudie les polynômes d'écart minimum de zéro, on considère l'ensemble des polynômes de degré  $n$  de la forme

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

au premier coefficient fixé, ou bien l'ensemble des polynômes à plusieurs coefficients fixés, ou aussi les polynômes dont les coefficients vérifient certaines relations linéaires données. On pose le problème d'étudier les polynômes dont les coefficients vérifient une ou plusieurs relations non nécessairement linéaires. Dans cette note nous nous proposons d'étudier le cas où l'on fixe l'ordre de multiplicité des racines des polynômes, cas qui fait partie de la classe des problèmes de ce type, et qui a été posé par T. Popoviciu.

Soit  $K$  un ensemble compact du plan complexe  $z$  et  $\mathcal{P}_n(\alpha)$  l'ensemble des polynômes de la forme

$$P_n(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m}, \quad (1)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  est une suite de nombres naturels donnés, vérifiant la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n. \quad (2)$$

L'écart minimum de zéro des polynômes de  $\mathcal{P}_n(\alpha)$  est

$$\mu_n = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n(\alpha)} \sup_{z \in K} |P_n(z)|.$$

Si l'on pose  $a_k = a'_k + i a''_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $z = x + iy$ , alors on voit que la fonction

$$\begin{aligned} F(x, y; a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, \dots, a'_m, a''_m) &= |P_m(z)| = \\ &= \sqrt{[(x - a'_1)^2 + (y - a''_1)^2]^{\alpha_1} \dots [(x - a'_m)^2 + (y - a''_m)^2]^{\alpha_m}} \end{aligned}$$

n'est pas linéaire par rapport aux paramètres  $a'_k, a''_k$  et par conséquent ce problème de meilleure approximation n'est pas un problème linéaire.

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de notre problème, nous considérons le problème général de la meilleure approximation. Soit  $D$  un ensemble quelconque non vide d'élément  $\xi$ , et  $F(\xi, X)$ ,  $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  — une fonction réelle non négative définie pour  $\xi \in D$  et  $X \in R_n$ , où  $R_n$  est l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Alors par l'écart minimum de zéro on désigne le nombre

$$\mu(D) = \inf_{X \in R_n} \sup_{\xi \in D} F(\xi, X).$$

Notons par  $H(\xi, \lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , l'ensemble des points  $X \in R_n$  pour lesquels  $F(\xi, X) \leq \lambda$  et par  $H(\lambda) = H(D, \lambda) = \bigcap_{\xi \in D} K(\xi, \lambda)$ .

On sait que le théorème d'existence suivant a lieu (voir par exemple [5] p. 380).

**THÉORÈME 1.** *S'il existe  $\lambda_0 > \mu$  tel que pour chaque  $\lambda$ ,  $\mu < \lambda < \lambda_0$  et  $\xi \in L$  l'ensemble  $H(\lambda_0)$  est borné, pendant que  $H(\xi, \lambda)$  est fermé, alors il existe  $X_0 \in R_n$  tel que l'on ait l'égalité*

$$\inf_{X \in R_n} \sup_{\xi \in D} F(\xi, X) = \sup_{\xi \in D} F(\xi, X_0). \quad (3)$$

Dans notre cas la fonction  $F(x, y; a'_1, a''_1, \dots, a'_m, a''_m)$  est un polynôme par rapport aux paramètres  $a'_1, a''_1, \dots, a'_m, a''_m$  pour chaque  $z \in K$ , et, par conséquent, elle est continue. L'ensemble  $H(\lambda_0)$  représente la totalité des points  $X \in R_{2m}$   $X = (a'_1, a''_1, \dots, a'_m, a''_m)$  pour lesquels

$$F(z, X) = |z - a_1|^{\alpha_1} |z - a_2|^{\alpha_2} \dots |z - a_m|^{\alpha_m} \leq \lambda_0, \quad z \in K.$$

En écrivant la formule d'interpolation de Lagrange pour le polynôme  $P_n(z)$  et les noeuds  $z_0, z_1, \dots, z_n$  dans lesquels

$$|P_n(z_k)| \leq \lambda_0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

et dérivant successivement, on constate que les dérivées successives, et par conséquent les coefficients du polynôme  $P_n(z)$ , sont uniformément bornées sur  $K$ , c'est-à-dire en écrivant

$$P_n(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n,$$

on a

$$|b_k| < M \lambda_0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

où  $M$  dépend seulement de l'ensemble  $K$  et ne dépend pas de  $P_n(z)$ .

D'autre part on sait que les racines du polynôme  $P_n(x)$  ne dépassent pas le plus grand des nombres

$$\sqrt[n]{n |b_k|}.$$

Il résulte donc que les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — les racines du polynôme  $P_n(z)$  — sont bornés sur  $K$  et par conséquent l'ensemble  $H(\lambda_0)$  est borné par rapport à  $X \in R_{2m}$  quand  $z \in K$ .

**THÉORÈME 2.** *Si l'ensemble  $K$  est compact, alors il existe un polynôme  $P_n^*(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$  d'écart minimum de zéro sur  $K$ , c'est-à-dire pour lequel on a*

$$\inf_{P_n^* \in \mathcal{P}_n(\alpha)} \sup_{z \in K} |P_n^*(z)| = \sup_{z \in K} |P_n^*(z)|. \quad (4)$$

En effet, la fonction  $F(z, X)$ ,  $z \in K$  étant continue par rapport à  $X$  et  $H(\lambda_0)$  est bornée sur  $K$ , les conditions du théorème 1 sont vérifiées, par conséquent il existe  $X_0 \in R_{2m}$  pour lequel on a (3), d'où il résulte immédiatement (4).

En général,  $H(z, \lambda)$  n'étant pas convexe, l'unicité n'est pas toujours assurée, comme on le voit par l'exemple suivant.

EXEMPLE 1. Soit  $K = \{0, 1\}$ , alors parmi les polynômes de la forme

$$P_3(z) = (z - a_1)^2(z - a_2),$$

il existe deux polynômes d'écart minimum de zéro sur  $K$ . Ce sont

$$p_3(z) = z^2(z - 1) \quad \text{et} \quad q_3(z) = z(z - 1)^2.$$

2. Pour envisager aussi les polynômes d'écart minimum de zéro dans les autres métriques, nous introduirons la notion d'infrapolynôme.

DÉFINITION 1. Le polynôme  $Q_n(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ ,  $Q_n(z) \neq P_n(z)$ , est appelé un  $\alpha$ -polynôme adjoint de  $P_n(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$  sur  $K$ , si les conditions suivantes sont remplies :

- I  $P_n(z) = 0, z \in K, \Rightarrow Q_n(z) = 0,$
- II  $P_n(z) \neq 0, z \in K, \Rightarrow |Q_n(z)| < |P_n(z)|.$

L'ensemble des  $\alpha$ -polynômes adjoints de  $P_n(z)$  sur  $K$  sera désigné par  $\mathcal{A}_n(\alpha, P_n, K)$ .

DÉFINITION 2. On appelle le polynôme  $P_n(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$   $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$ , si  $\mathcal{A}_n(\alpha, P_n, K) = \emptyset$ , c'est-à-dire quand  $P_n(z)$  n'admet aucun  $\alpha$ -polynôme adjoint sur  $K$ .

L'ensemble des  $\alpha$ -infrapolynômes sur  $K$  sera désigné par  $\mathcal{I}_n(\alpha, K)$ .

On peut vérifier immédiatement que chaque polynôme  $P_n(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$  d'écart minimum de zéro sur  $K$  est également un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$ .

Un autre exemple de  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$  est le polynôme  $B_n(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$  qui minimise l'intégrale sur  $K$ , c'est-à-dire

$$\int_K |B_n(z)|^p \cdot |dz| = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n(\alpha)_K} \int_K |P_n(z)|^p |dz|,$$

où  $K$  est un arc de courbe rectifiable, et  $p \geq 1$ .

3. Nous présentons maintenant quelques propriétés des  $\alpha$ -infrapolynômes. Soit

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r, \text{ et } q = \alpha_{r+1} + \dots + \alpha_m,$$

où  $p + q = n$ , et

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_r)^{\alpha_r} \\ Q(z) &= (z - a_{r+1})^{\alpha_{r+1}} \dots (z - a_m)^{\alpha_m} \\ R(z) &= P(z)Q(z). \end{aligned}$$

THÉORÈME 3. Si  $R(z) \in \mathcal{I}_n(\alpha, K)$ , où  $\alpha = \{\alpha_k\}_1^m$  et  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$ , alors  $P(z) \in \mathcal{I}_p(\beta, K)$ ,  $Q(z) \in \mathcal{I}_q(\gamma, K)$ , où  $\beta = \{\alpha_l\}_1^r$ ,  $\gamma = \{\alpha_k\}_{r+1}^m$ ,  $1 \leq p < n$ .

En effet, considérons un diviseur  $P(z)$  de  $R(z)$ . Si  $\mathcal{A}_p(\beta, P, K) \neq \emptyset$ , il existe  $P^*(z) \in \mathcal{A}_p(\beta, P, K)$ , c'est-à-dire il existe un polynôme  $P^*(z)$ , vérifiant les conditions I-II.

Nous considérons aussi le polynôme

$$R^*(z) = P^*(z)Q(z).$$

On voit que  $R^*(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ , parce que  $P^*(z) \in \mathcal{P}_p(\beta)$ ,  $\beta = \{\alpha_k\}'$  et  $Q(z) \in \mathcal{P}_q(\gamma)$ ,  $\gamma = \{\alpha_k\}_{r+1}^m$ .

Nous montrerons que  $R^*(z) \in \mathcal{A}_n(\alpha, R, K)$ . En effet, si  $R(z) = 0$ ,  $z \in K$ ,  $\Rightarrow P(z) = 0$ , où  $Q(z) = 0$ . Si  $P(z) = 0$ , alors  $P^*(z) = 0$ , donc  $R^*(z) = 0$ . Si  $Q(z) = 0$ , il résulte  $R^*(z) = 0$ . Par conséquent, dans les deux cas, de  $R(z) = 0$  il résulte  $R^*(z) = 0$ .

Si  $R(z) \neq 0$ ,  $z \in K$ , alors  $P(z) \neq 0$  et  $Q(z) \neq 0$ . Donc

$$|P^*(z)| < |P(z)|$$

et

$$|R^*(z)| = |P^*(z)| |Q(z)| < |P(z)Q(z)| = |R(z)|.$$

Par conséquent  $R^*(z) \in \mathcal{A}_n(\alpha, R, K)$ , ce qui contredit le fait que  $R(z)$  est un  $\alpha$ -infrapolynôme. Cette contradiction montre que  $\mathcal{A}_p(\beta, K) = \emptyset$ , donc  $P(z) \in \mathcal{I}_p(\beta, K)$ .

De la même manière on peut montrer que  $Q(z) \in \mathcal{I}_q(\gamma, K)$ .

**CONSÉQUENCE 1.** Chaque facteur de la forme  $(z - a_k)^{\alpha_k}$  d'un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$ , est un  $\alpha_k$ -infrapolynôme sur  $K$ , où  $\alpha_k = \{\alpha_k\}$ .

La réciproque est en défaut. Les facteurs peuvent être  $\alpha$ -infrapolynômes sur  $K$ , sans que le polynôme soit un  $\alpha$ -infrapolynôme, comme on le voit dans l'exemple suivant.

**EXEMPLE 2.** Soit  $K = \{0, 1, 3\}$  et  $P(z) = z^2$ ,  $Q(z) = z - 1$ . On voit que  $P(z)$  est un 2-infrapolynôme sur  $K$  et  $Q(z)$  — un 1-infrapolynôme sur  $K$ . Mais le polynôme

$$R(z) = P(z)Q(z) = z^2(z - 1)$$

n'est pas un  $\alpha$ -infrapolynôme, où  $\alpha = \{2, 1\}$ , parce que le polynôme

$$R^*(z) = z(z - 1)^2 \in \mathcal{P}_3(\alpha)$$

et  $R^*(z) \in \mathcal{A}_3(\alpha, R, K)$ , car  $R^*(z)$  s'annule sur les mêmes points de  $K$  que  $R(z)$ , mais pour  $z = 3$ ,  $R^*(3) = 12$ , et  $R(3) = 18$ , donc  $R(z) \notin \mathcal{I}_3(\alpha, K)$ .

Par infrapolynôme classique nous entendrons dans ce qui suit, un infrapolynôme défini par M. Fekete, c'est-à-dire un polynôme de la forme

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n \quad (5)$$

qui n'admet aucun polynôme adjoint sur  $K$  de la même forme, donc pour lequel  $\mathcal{A}_n(P, K) = \emptyset$ . Nous désignerons l'ensemble des infrapolynômes classiques par  $\mathcal{I}_n(K)$ .

**THÉORÈME 4.** Si  $P(z) \in \mathcal{I}_n(K)$ , alors il existe une suite de nombres  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  avec  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$ , telle que  $P(z) \in \mathcal{I}_n(\alpha, K)$ .



En effet, soit  $P(z) \in \mathcal{J}_n(K)$ , alors nous avons

$$P(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sont des nombres naturels et

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n.$$

Nous montrerons que  $P(z) \in \mathcal{J}_n(\alpha, K)$ . En effet, supposons que  $\mathcal{A}_n(\alpha, P, K) \ni Q(z)$ , où

$$Q(z) = (z - \zeta_1)^{\alpha_1} (z - \zeta_2)^{\alpha_2} \dots (z - \zeta_m)^{\alpha_m}.$$

Mais, évidemment,  $Q(z)$  est de la forme (5) et  $Q(z) \in \mathcal{A}_n(P, K)$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $P(z) \in \mathcal{J}_n(K)$ .

Par conséquent chaque infrapolynôme classique est également un  $\alpha$ -infrapolynôme pour une certaine suite  $\alpha$ , c'est-à-dire qu'on a l'inclusion

$$\mathcal{J}_n(K) \supset \bigcup_{\alpha} \mathcal{J}_n(\alpha, K).$$

L'inclusion contraire n'est pas vraie, c'est-à-dire un polynôme  $P(z)$  peut être  $\alpha$ -infrapolynôme sans qu'il soit un infrapolynôme classique, comme nous le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 3. Soit  $K = \{1, 2, 4\}$ . Le polynôme

$$P(z) = (z - 4)^2$$

est évidemment un 2-infrapolynôme sur  $K$ , car il n'admet aucun polynôme adjoint sur  $K$  de la forme  $(z - a)^2$ . Mais il n'est pas un infrapolynôme classique sur  $K$ , car le polynôme

$$Q(z) = z^2 - 6z + 8 \in \mathcal{A}_n(P, K).$$

En effet,  $P(4) = 0$  et  $Q(4) = 0$ , mais  $P(1) = 9$ ,  $Q(1) = 3$ ,  $P(2) = 4$ ,  $Q(2) = 0$ . Donc,  $P(z) \notin \mathcal{J}_2(K)$ .

Le résultat bien connu de L. Fejér relativement à la localisation des racines des infrapolynômes classiques est vrai aussi dans le cas des  $\alpha$ -infrapolynômes.

THÉORÈME 5. *Toutes les racines d'un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$  sont situées dans l'enveloppe convexe fermée de  $K$ .*

En effet, soit

$$P(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m}$$

un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$  et  $\mathcal{X}$  l'enveloppe convexe fermée de  $K$ . Nous devons montrer que  $a_k \in \mathcal{X}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Supposons le contraire,  $a_r \notin \mathcal{X}$ . Alors, en construisant en  $a$  la normale au domaine  $\mathcal{X}$ , soit  $a_r^*$  le point d'intersection de la normale et de la frontière de  $\mathcal{X}$ . Quel que soit  $z \in K$ , on a évidemment

$$|z - a_r^*| < |z - a_r|,$$

car le côté  $za_r$  du triangle  $z, a_r^*, a_r$  s'oppose à un angle obtus, pendant que le côté  $za_r^*$  s'oppose à un angle aigu. Par conséquent, le polynôme

$$P^*(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} \dots (z - a_{r-1})^{\alpha_{r-1}} (z - a_r^*)^{\alpha_r} (z - a_{r+1})^{\alpha_{r+1}} \dots (z - a_m)^{\alpha_m} \in \mathcal{A}_n(\alpha, P, K),$$

car si  $P(z) \neq 0$ ,  $z \in K$ , on a

$$|P^*(z)| < |P(z)|,$$

pendant que les racines sur  $K$  de  $P(z)$  et  $P^*(z)$  coïncident. Ceci contredit le fait que  $P(z) \in \mathcal{J}_n(\alpha, K)$ , donc  $a_r$  ne peut pas être dans l'extérieur de  $\mathcal{X}$ . Donc  $a_j \in \mathcal{X}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

On voit par l'exemple 3 qu'il existe des  $\alpha$ -infrapolynômes qui ne sont pas des infrapolynômes classiques. Il se pose la question suivante : dans quelles conditions un  $\alpha$ -infrapolynôme est en même temps un infrapolynôme classique ? Dans le cas où l'ensemble  $K$  est réel, nous obtiendrons la réponse à cette question par le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.** *Soit  $M$  un ensemble réel (contenant au moins  $n + 1$  points). La condition nécessaire et suffisante pour qu'un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $M$*

$$P(z) = (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_n)^{\alpha_m}$$

*soit en même temps un infrapolynôme classique sur  $M$ , qui ne s'annule pas sur  $M$ , est que  $\alpha_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , c'est-à-dire que toutes les racines de  $P(z)$  soient simples.*

La condition est nécessaire. Soit,

$$P(z) = (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m} \in \mathcal{J}_n(\alpha, M).$$

Si  $P(z) \in \mathcal{J}_n(M)$  et  $P(z) \neq 0$ ,  $z \in M$ , alors il résulte d'un théorème de M. M a r d e n [3], que toutes les racines de  $P(z)$  sont réelles, distinctes et contenues dans l'intervalle  $[A, B]$ , où

$$A = \min_{x \in M} x, \quad B = \max_{x \in M} x.$$

Par conséquent, tous les nombres  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  sont réels et distincts et donc  $\alpha_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , et la nécessité est démontrée.

La condition est suffisante. Soit le polynôme

$$Q(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) \in \mathcal{J}_n(\alpha, M),$$

où  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ , et  $Q(z) \neq 0$ ,  $z \in M$ , c'est-à-dire  $a_k \notin M$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Il résulte du théorème 5 que les racines  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont réelles et contenues dans l'intervalle  $[A, B]$ . Nous montrerons que les racines  $a_k$  sont séparées par les points de  $M$ , c'est-à-dire  $[a_k, a_{k+1}] \cap M \neq \emptyset$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . En effet, soit

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_n$$

et supposons le contraire que  $[a_k, a_{k+1}] \cap M = \emptyset$ .

Compte tenu de  $[a_k, a_{k+1}] \cap M = \emptyset$ , il résulte qu'il existe un nombre  $\delta > 0$  suffisamment petit tel que  $[a_k^*, a_{k+1}^*] \cap M = \emptyset$ , où  $a_k^* = a_k - \delta$ ,  $a_{k+1}^* = a_{k+1} + \delta$ .

Nous montrerons que le polynôme

$$Q^*(z) = (z - a_1) \dots (z - a_{k-1})(z - a_k^*)(z - a_{k+1}^*) \dots (z - a_n) \in \mathcal{A}_n(\alpha, Q, M),$$

où  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ . Ainsi, nous avons

$$|z - a_k^*| \cdot |z - a_{k+1}^*| < |z - a_k| \cdot |z - a_{k+1}|, \quad z \in M,$$

parce que

$$|z - a_k^*| + |z - a_{k+1}^*| = |z - a_k| + |z - a_{k+1}|$$

et que le produit de deux facteurs positifs, dont la somme est constante est maximum quand ils sont égaux. Par conséquent,

$$|Q^*(z)| < |Q(z)|, \quad z \in M,$$

c'est-à-dire que  $Q^*(z) \in \mathcal{A}_n(\alpha, Q, M)$  est une contradiction. Ainsi, les racines  $a_k$  sont séparées par les points de l'ensemble  $M$ . Mais alors du même résultat de M. MARDEN [3], il suit que  $Q(z) \in \mathcal{J}_n(M)$ , et la suffisance est démontrée.

Enfin nous insistons sur la liaison entre les  $\alpha$ -infrapolynômes et leurs dérivées.

**THÉORÈME 7.** *La dérivée de chaque  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$*

$$P_n(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m},$$

avec toutes les racines dans  $K$ , est le produit entre un  $\alpha$ -infrapolynôme sur  $K$  de degré  $n - m$  avec toutes les racines en  $K$ , et un infrapolynôme classique de degré  $m - 1$ , à un facteur constant près.

En effet, nous avons

$$P'_n(z) = P_n(z) \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{z - a_k}.$$

En désignant

$$Q_{n-m}(z) = (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_m)^{\alpha_m - 1} \quad (6)$$

$$R_{m-1}(z) = \omega(z) \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{z - a_k}, \quad \lambda_k = \frac{\alpha_k}{n}, \quad (7)$$

$$\omega(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_m),$$

nous avons

$$P'_n(z) = n Q_{n-m}(z) R_{m-1}(z). \quad (8)$$

De  $a_k \in K$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , il résulte que  $Q_{n-m}(z)$  est un  $\beta$ -infrapolynôme sur  $K$  de degré  $n - m$  avec toutes les racines dans  $K$ , où  $\beta = \{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_m - 1\}$ .

De (7), parce que  $\lambda_k > 0$  et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$$

il résulte, en tenant compte d'un théorème de M. FEKETE [2], que  $R_{m-1}(z)$  est un infrapolynôme classique sur  $K$ . La dérivée  $P'_n(z)$  ayant la forme (8), le théorème est démontré.

(Manuscrit reçu le 20 juin 1967)

## BIBLIOGRAPHIE

1. Fejér L., *Über die Lage der Nullstellen von Polynomen die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen.* „Math. Ann.” **85**, 44 (1922) pp. 41—48.
2. Fekete M., *On the Structure of Extremal Polynomials.* „Proc. Acad. Sci.” **37** (1951), pp. 95—103.
3. Marden M., *Location of the Zeros of Intrapolynomials.* „Amer. Math. Monthly” **70**, no 4(1963), pp. 361—371.
4. Marușciac I., *Infrapolinoame și legătura lor cu derivata unui polinom.* „Studii și cerc.” **19**, 4 (1967), pp. 515—521.
5. Smirnov V. I., Lebedev N. A., *Konstruktivnaja teorija funkcii kompleksnogo peremennogo.* Moskva, 1964.

ASUPRA UNOR POLINOAME DE ABATERE MINIMĂ DE LA ZERO CU RĂDĂCINI MULTIPLE  
(R e z u m a t)

Fie  $K$  o mulțime compactă din planul  $z$  și  $\mathcal{P}_n(\alpha)$  mulțimea polinoamelor de forma

$$\mathcal{P}_n(z) = (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m},$$

unde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  este un șir de numere naturale date care verifică relația

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n.$$

În lucrare se studiază existența și unicitatea polinomului din  $\mathcal{P}_n(\alpha)$  de abatere minimă de la zero pe mulțimea  $K$ . Se arată că există un polinom  $P_n^*(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$  de abatere minimă de la zero pe  $K$ , însă acesta nu este unic.

Se introduce apoi noțiunea de  $\alpha$ -infrapolinom (Definiția 2) și se arată câteva proprietăți ale acestor infrapolinoame cu rădăcini multiple, cu multiplicități date. Printre altele, se arată (Teorema 5) că teorema lui Fejér relativă la localizarea rădăcinilor infrapolinoamelor clasice are loc și în acest caz. Se studiază de asemenea (Teorema 6) condițiile în care un  $\alpha$ -infrapolinom este în același timp și un infrapolinom clasic. În încheiere se arată (Teorema 7) că derivata unui  $\alpha$ -infrapolinom pe  $K$ , cu toate rădăcinile pe  $K$ , este un produs dintre un polinom cu toate rădăcinile pe  $K$  și un infrapolinom clasic pe  $K$ .

О ПОЛИНОМАХ НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ С МНОГОКРАТНЫМИ  
КОРНЯМИ

(Р е з ю м е)

Пусть  $K$  — компактное множество плоскости  $z$  и  $\mathcal{P}_n(\alpha)$  — множество полиномов вида

$$\mathcal{P}_n(z) = (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m},$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  — последовательность данных натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n.$$

В статье изучается существование и единственность полинома из  $\mathcal{P}_n(\alpha)$ , наименее уклоняющегося от нуля на множестве  $K$ . Показывается, что существует полином  $P_n^*(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ , наименее уклоняющийся от нуля на  $K$ , однако он не является единственным.

Вводится затем понятие  $\alpha$ -инфраполинома (Определение 2) и показываются некоторые свойства этих инфраполиномов с кратными корнями, с данными кратностями. Между прочим, показывается (Теорема 5), что теорема Фейера относительно локализации корней классических инфраполиномов имеет место и в этом случае. Изучаются также (теорема 6) условия, при которых  $\alpha$ -инфраполином является одновременно и классическим инфраполиномом. В заключение показывается (Теорема 7), что производная любого  $\alpha$ -инфраполинома на  $K$ , со всеми корнями на  $K$ , является произведением двух полиномов, из которых один имеет все корни на  $K$ , а другой является классическим инфраполиномом на  $K$ .

# O CARACTERIZARE GEOMETRICĂ A FUNCȚIILOR DE PONDERE SLAB CRESCĂTOARE, POLINOMIALE

de  
E. KOLOZSI

L. H ö r m a n d e r [1] și L. P. V o l e v i c i, B. P. P a n e i a h [2] studiază în mod sistematic o clasă de funcții numite funcții de pondere slab crescătoare, cu ajutorul cărora pot fi caracterizate spațiile funcționale care intervin în studierea ecuațiilor cu derivate parțiale. Funcția pozitivă  $\mu(\xi)$  se numește funcție de pondere slab crescătoare, dacă există două constante pozitive  $C$  și  $N$  în așa fel ca

$$\mu(\xi + \eta) \leq (1 + C |\xi|)^N \mu(\eta) \text{ pentru orice } \xi, \eta \in R_n \quad (1)$$

S. M. N i k o l s k i, pentru a defini unele clase de funcții care intervin în probleme variaționale legate de anumite ecuații cu derivate parțiale [3], introduce o mulțime  $\mathcal{S}$  a vectorilor întregi pozitivi cu ajutorul căreia, după cum se va vedea mai jos, se poate caracteriza o clasă importantă a funcțiilor de pondere. Mulțimea  $\mathcal{S}$  este definită astfel:

1. Este convexă în sensul că, submulțimea punctelor cu coordonate întregi și pozitive a celui mai mic corp convex care conține pe  $\mathcal{S}$ , coincide cu  $\mathcal{S}$ .

2. Dacă  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{S}$  atunci  $\mathcal{S}$  conține orice proiecție a lui  $\alpha$  pe toate subspațiile de coordonate, și  $\mathcal{S}$  conține cel puțin un vector de forma  $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ ,  $\alpha_j^0 > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Din aceste condiții rezultă că în  $\mathcal{S}$  se poate determina un sistem de puncte

$$0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N \quad (2)$$

care formează bază în  $\mathcal{S}$ , adică astfel că, oricare ar fi  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , ea se poate scrie sub forma

$$\alpha = \sum_1^N \lambda_s \alpha^s; \lambda_s \geq 0 \quad \sum_1^N \lambda_s \leq 1 \quad (3)$$

La fiecare mulțime  $\mathcal{S}$  se poate atașa polinomul

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} \xi^{2\alpha}$$

unde  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ .

Din condițiile impuse mulțimii  $\mathcal{S}$  rezultă următoarele două condiții pentru polinomul  $P(\xi)$ .

1. Conține termenii de forma  $\xi_1^{2l_1}, \xi_2^{2l_2}, \dots, \xi_n^{2l_n}$ ;  $l_j > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

unde

$$l_i = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} \alpha_i$$

2. Restul termenilor  $\xi^{2\alpha}$  verifică relația  $\alpha_i \leq l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (4)

Prin urmare polinomul  $P(\xi)$  are următoarea formă

$$P(\xi) = 1 + \xi_1^{2l_1} + \dots + \xi_n^{2l_n} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i \leq l_i \\ \bar{\alpha} \in \mathcal{S} - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \xi^{2\bar{\alpha}} \quad (5)$$

unde  $\{l\} = \{(l_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, l_n)\}$ .

iar coeficienții  $a_{\bar{\alpha}}$  sînt egali cu 1 sau 0 în funcție de mulțimea  $\mathcal{S}$  considerată.

Demonstrăm următoarea

**TEOREMĂ 1.** Polinomul  $P(\xi)$  care se atașează unei mulțimi convexe  $E$  este funcție de pondere slab crescătoare.

Pentru a demonstra acest lucru, pe baza definiției (1) trebuie să arătăm că există două constante pozitive  $C$  și  $N$  astfel încît să avem

$$P(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|^N) P(\eta) \quad (6)$$

pentru orice  $\xi, \eta \in R_n$ . Nouă ne este mai convenabil să verificăm o inegalitate [2], echivalentă cu (6)

$$P(\xi + \eta) \leq C(1 + |\xi|^N) P(\eta) \quad (7)$$

adică mai explicit

$$\frac{1 + \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i)^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i \leq l_i \\ \bar{\alpha} \in \mathcal{S} - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} (\xi + \eta)^{2\bar{\alpha}}}{(1 + |\xi|^N) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i \leq l_i \\ \bar{\alpha} \in \mathcal{S} - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \eta^{2\bar{\alpha}} \right)} \leq C$$

Însă are loc

$$\frac{1 + \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i)^{2l_i}}{(1 + |\xi|^N) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i \leq l_i \\ \bar{\alpha} \in \mathcal{S} - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \eta^{2\bar{\alpha}} \right)} \leq C$$

deoarece  $\mu(\xi) = 1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^{2l_i}$  este funcție de pondere.

Este suficient deci să arătăm că

$$\frac{\sum_{\substack{\bar{\alpha}_i < l_i \\ \bar{\alpha} \in \delta - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} (\xi + \eta)^{2\bar{\alpha}}}{(1 + |\xi|^N) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i < l_i \\ \bar{\alpha} \in \delta - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \eta^{2\bar{\alpha}} \right)} \leq C$$

Avem

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)^{2\alpha} &= (\xi_1 + \eta_1)^{2\alpha_1} (\xi_2 + \eta_2)^{2\alpha_2} \dots (\xi_n + \eta_n)^{2\alpha_n} \leq \\ &\leq C (1 + |\xi|^N) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i < l_i \\ \bar{\alpha} \in \delta - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \eta^{2\bar{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

dacă se alege  $N = \max_i l_i$ , deoarece fiecare termen al produsului din membrul stîng poate fi estimat cu un termen corespunzător al produsului din membrul drept.

Prin urmare există un număr pozitiv  $K$  în așa fel încît

$$\sum_{\substack{\bar{\alpha}_i < l_i \\ \bar{\alpha} \in \delta - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} (\xi + \eta)^{2\bar{\alpha}} \leq K(1 + |\xi|^N) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2l_i} + \sum_{\substack{\bar{\alpha}_i < l_i \\ \bar{\alpha} \in \delta - \{l\}}} a_{\bar{\alpha}} \eta^{2\bar{\alpha}} \right)$$

ceea ce demonstrează că polinomul  $P(\xi)$  este funcție de pondere.

În continuare vom arăta că are loc și proprietatea inversă.

**TEOREMA 2.** : Dacă polinomul  $P(\xi) = \sum_{\alpha^i} \xi^{2\alpha^i}$  este o funcție de pondere slab crescătoare, atunci el determină o mulțime  $\delta$  convexă. Pentru a demonstra teorema, trebuie să arătăm că mulțimea multiinducilor  $\alpha^i$  determină o mulțime convexă  $\delta$  definită de S. M. Nikolski. Pentru a determina mulțimea  $\delta$ , se construiește cel mai mic poliedru convex care conține punctele  $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ , iar submulțimea punctelor cu coordonate întregi ne dă mulțimea  $\delta$  căutată.

Evident, această corespondență între polinoamele  $P(\xi)$  — funcții de pondere slab crescătoare — și mulțimile convexe  $\delta$  nu este biunivocă, deoarece există mai multe polinoame  $P(\xi)$  la care corespunde aceeași mulțime  $\delta$ . De exemplu, polinoamelor

$$\begin{aligned} P_1(\xi) &= 1 + \xi_1^6 + \xi_2^4 + \xi_1^4 \xi_2^4 \\ P_2(\xi) &= 1 + \xi_1^6 + \xi_2^4 + \xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_1^2 \xi_2^4 \end{aligned}$$

le corespunde mulțimea

$$\delta = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

Observăm însă că diferitele polinoame care corespund la aceeași mulțime  $\delta$  sînt echivalente în sensul că există constantele  $C_1$  și  $C_2$  pentru care au loc.

$$C_1 \leq \frac{P_1(\xi)}{P_2(\xi)} \leq C_2.$$

Toate aceste polinoame pot fi însă caracterizate cu ajutorul polinomului  $P_b(\xi)$ , care se atașează bazei convexe minimale (2), adică cu acel polinom  $P(\xi) = \sum \xi^{2\alpha^i}$  pentru care punctele  $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$  formează o bază convexă minimală în mulțimea  $\mathcal{S}$  care se atașează în modul arătat mai sus.

Prin alegerea convenabilă a mulțimii  $\mathcal{S}$  regăsim o serie de spații funcționale cunoscute. Astfel:

1. dacă  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq l$  pentru toți  $\alpha \in \mathcal{S}$ , atunci

$P_b(\xi) = 1 + \xi_1^{2l} + \dots + \xi_n^{2l}$  și  $P_b(\xi)^{\frac{1}{2}}$  generează spațiul Sobolev  $W_2^{(l)}$ . Dacă  $l = 1$   $P_b(\xi)^{\frac{s}{2}}$  generează spațiul  $H_{(s)}$  introdus de P. D. Lax;

2. fiind date numerele  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , mulțimea  $\mathcal{S}$  a punctelor care verifică condiția

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \min_i (l_i)$$

ne conduce la  $P_b(\xi) = 1 + \xi_1^{2l_1} + \dots + \xi_n^{2l_n}$  iar  $P_b(\xi)^{\frac{1}{2}}$  generează spațiul Sobolevski  $W_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$

(Intrat în redacție la 2 octombrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg (1963).
2. L. P. Volevici—B. P. Paneiah, *Nekotorie prostranstva obobščionnih funkții i teoremi vlojenia*. U.M.H. XX, v. 1(121) (1965).
3. S. M. Nikolski, *Ob ustoičivih granicnih značenijah differenciruemoi funkții mnogih peremennih*, „Mat. Zbornik” 61(103), 2 (1963).

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛАБО РАСТУЩИХ МНОГОЧЛЕННЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Автор даёт геометрическую характеристику слабо растущих весовых функций, введённых Л. Гёрмандером, при помощи выпуклых множеств точек с целыми координатами, использованными С.М. Никольским. Показывается, что к каждому выпуклому множеству  $\mathcal{S}$  можно присоединить полином, являющийся весовой функцией и, обратно, каждой слабо растущей многочленной весовой функции соответствует выпуклое множество  $\mathcal{S}$ . Путём подходящего выбора множества  $\mathcal{S}$  получаем известные функциональные пространства.

#### UNE CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS DE POIDS POLYNOMIALES FAIBLEMENT CROISSANTES

(Résumé)

L'auteur de la présente note donne une caractérisation géométrique des fonctions de poids polynomiales faiblement croissantes introduites par L. Hörmander, à l'aide d'ensembles convexes de points à coordonnées entières  $\mathcal{S}$  employées par S. M. Nikolski. On montre qu'on peut attacher à chaque ensemble convexe  $\mathcal{S}$  un polynôme qui est une fonction de poids et, inversement, qu'à chaque fonction de poids polynomiale faiblement croissante correspond un ensemble convexe  $\mathcal{S}$ . En choisissant convenablement l'ensemble  $\mathcal{S}$  on retrouve des espaces fonctionnels connus.



# SUR LES PROPRIÉTÉS DES NORMES DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

par

IOAN A. RUS

Dans la présente note nous nous proposons de donner une méthode pour étudier quelques propriétés des normes des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles du second ordre. On peut considérer cette méthode, comme une généralisation d'une méthode donnée [par A. V. Bitsadze [2] et A. Wintner [10] (voir également L. Koks [6], T. Stus' [8] et [9], J. Bochenek [3]).

On commence par donner un modèle abstrait et après cela un certain nombre d'exemples.

Je tiens à remercier M. J. Peetre qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce travail.

**1. Modèle abstrait.** Soit  $M$  et  $N$  deux espaces vectoriels sur le corps  $R$  des nombres réels. De plus  $N$  est un espace semi-ordonné linéaire, c'est-à-dire qu'il possède une structure d'ordre compatible avec sa structure d'espace vectoriel (voir Kantorovici [5]). Munissons  $M$  d'un produit scalaire généralisé de la manière suivante. On appelle produit scalaire généralisé une application

$$(f, g) \rightarrow [f, g]$$

de  $M \times M$  dans  $N$  possédant les propriétés suivantes :

- i)  $[f, g] = [g, f]$  pour tout  $f$  et  $g \in M$
- ii)  $|\lambda f, g| = \lambda |f, g|$  pour tout  $f, g \in M$  et  $\lambda \in R$
- iii)  $[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$  pour tout  $f_1, f_2, g \in M$
- iv)  $[f, f] \geq \theta_N$  et  $[f, f] = \theta_N \Leftrightarrow x = \theta_M$

où  $\theta_M$  et  $\theta_N$  sont les éléments nuls des espaces  $M$  et  $N$ .

Soit  $L$  une application linéaire de  $M$  dans lui-même. Considérons le produit  $[f, Lf]$ . On suppose que pour tout  $f \in M$  il existe une application linéaire  $T_f$ , définie sur les éléments de  $N$ , tel que

$$[f, Lf] = T_f([f, f])$$

pour tout  $f \in M$ .

Considérons maintenant l'équation

$$Lf = \theta_M \quad (\text{I})$$

Si  $f$  est une solution de l'équation (I), il en résulte que

$$T_f([f, f]) = \theta_N.$$

Autrement dit, nous avons l'équation

$$T_f(u) = \theta_N \quad (\text{II})$$

sur  $N$ . Si on étudie les propriétés des solutions positives ( $u > \theta_N$ ) de l'équation (II), des propriétés s'obtiennent pour  $u = [f, f]$  où  $f$  est une solution de l'équation (I).

**2. Exemple 1.** Soit  $M = C^{2,n}(a, b) \cap C^{0,n}[a, b]$  (notons par  $C^{k,u}(a, b)$  l'espace vectoriel des fonctions  $y = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ ,  $k$  fois continûment différentiables dans  $(a, b)$ ) et  $N = C^2(a, b) \cap C[a, b]$ .  $N$  est muni de la relation d'ordre habituelle et dans  $M$  le produit scalaire est défini par

$$[y, f] = y_1(x)z_1(x) + \dots + y_n(x)z_n(x)$$

Considérons sur  $M$  l'opérateur

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + B \frac{d}{dx} + C$$

où  $B = \|b_{ij}(x)\|$ ,  $C = \|c_{ij}(x)\|$  sont des matrices carrées définies sur  $[a, b]$ . Soit  $y = y(x)$  une solution de l'équation

$$y'' + By' + Cy = 0 \quad (\text{I}_1)$$

Avec les notations

$$R = R(x) = [y, y]^{\frac{1}{2}}, \quad y = Re, \quad e = (e_1, \dots, e_n)$$

dans l'hypothèse que  $R(x) \neq 0$ , pour  $x \in (a, b)$  il résulte de

$$[y, Ly] = 0$$

que

$$R'' + [e, Be]R' + ([e, e''] + [e, B e'] + [e, Ce])R = 0 \quad (\text{II}_1)$$

Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. On suppose que

$$\xi \begin{pmatrix} -I & 0 \\ B_1 & C \end{pmatrix} \xi^* < 0 \text{ pour tout } \xi \in R^{2n}, \xi \neq 0, x \in (a, b)$$

où  $B = bI + B_1$ ,  $I$  est la matrice unité et  $b$  nombre réel.

Alors si  $y = y(x)$  est une solution de l'équation  $T_1$  sa norme  $\|y\| = |y, y|^{\frac{1}{2}} = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$  prend ses valeurs maximales sur  $[a, b]$  dans  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* Supposons que  $R(x) \neq 0$  dans  $(a, b)$ . Alors  $R = R(x)$  satisfait l'équation (II<sub>1</sub>) et comme

$[e, e''] + [e, Be'] + [e, Ce] = -|e', e'| + [e, B_1e'] + [e, Ce] \leq 0$  notre théorème résulte d'après un résultat classique. Si  $R(x_1) = R(x_2) = 0$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  et  $R(x) = 0$  dans  $(x_1, x_2)$ , on a  $R(x) \equiv 0$  sur  $[x_1, x_2]$  et donc sur  $[a, b]$ .

*Remarque 1.* Si

$$\xi C \xi^* \leq -\varepsilon^2 \|\xi\|^2 \text{ pour tout } \xi \in R^n \text{ et } \|B_1\| \leq 2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

alors les conditions du théorème 1 ont lieu.

*Remarque 2.* La même méthode a été utilisée par A. Winter [10] pour étudier des critères concernant le caractère oscillatoire des solutions. Les équations (9) et (11) dans [10] sont erronées. Pour les corriger on peut voir (II<sub>1</sub>).

**3. Exemple 2.** Soit  $M = C^{2,n}(\Omega) \cap C^{0,n}(\bar{\Omega})$  et  $N = C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , où  $\Omega$  est un domaine qui est contenu dans le demi-plan  $y > 0$  et a une portion de la frontière sur  $y = 0$  (voir fig. 1) L'espace  $N$  est muni de la relation d'ordre habituelle et dans  $M$  le produit scalaire est défini par

$$|u, v| = u_1(x, y) v_1(x, y) + \dots + u_n(x, y) v_n(x, y)$$

Considérons sur  $M$  l'opérateur suivant

$$L = \frac{\partial}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial}{\partial y^2} + A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C$$

où

$$A = \|a_{ij}(x, y)\|, B = \|b_{ij}(x, y)\|, C = \|c_{ij}(x, y)\|$$

sont des matrices carrées définies dans  $\bar{\Omega}$  et  $m$  un nombre réel positif.

L'opérateur  $L$  est elliptique dans  $\Omega$  et parabolique sur  $\hat{PQ}$ .

Soit  $u = u(x, y)$ , une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C u = 0 \quad (I_2)$$

Posons pour abrégier

$$R = R(x, y) = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}, u = Re, e = (e_1, \dots, e_n)$$

Admettons que  $R(x, y) \neq 0$  dans  $\Omega$ . Alors du

$$[u, Lu] = 0$$

On a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + [e, Ae] \frac{\partial R}{\partial x} + [e, Be] \frac{\partial R}{\partial y} + \\ & + \left( \left[ e, \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right] + y^m \left[ e, \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right] + \left[ e, A \frac{\partial e}{\partial x} \right] + \left[ e, B \frac{\partial e}{\partial y} \right] + [e, ce] \right) R = 0 \end{aligned} \quad (II_2)$$

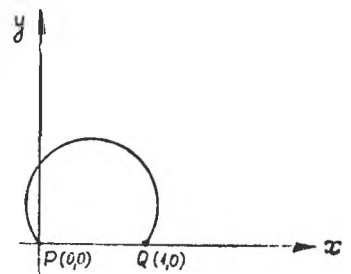


Fig. 1.

En effet à l'aide d'un théorème de Bitsadze (voir [1] pp. 69) on trouve le résultat suivant :

**THÉORÈME 2.** Admettons que les coefficients de l'équation  $(I_2)$  remplissent les conditions suivantes

$$i) \quad \xi \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -y^m I & 0 \\ A_1 & B_1 & C \end{pmatrix} \xi^* < 0 \text{ pour tout } \xi \in R^{2n}, \xi \neq 0, \text{ et } (x, y) \in \Omega$$

où  $A = aI + A_1$ ,  $B = bI + B_1$ ,  $a$  et  $b$  nombres réels.

ii)  $B$  est une matrice symétrique telle que si  $\lambda_1(x, y)$  est la première valeur propre,  $\lambda_1(x, 0) > 0$ .

iii) Si  $u = u(x, y)$  est une solution régulière de l'équation  $(I_2)$  et  $R = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} > 0$  dans  $\Omega$

iv)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial R(x, y)}{\partial y}$  existe et est bornée

alors  $R = R(x, y)$  ne prend pas ses valeurs maximales sur  $\widehat{PQ}$  (ouvert).

*Démonstration.* Soit  $u = u(x, y)$  une solution de l'équation  $(I_2)$  qui satisfait les conditions iii) et iv). La fonction  $R(x, y) = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}$  satisfait l'équation  $(II_2)$ . Comme

$$[e(x, 0), B(x, 0)e(x, 0)] \geq \lambda_1(x, 0) \cdot [e(x, 0), e(x, 0)] = \lambda_1(x, 0) > 0$$

et

$$\begin{aligned} & [e, e_{xx}] + y^m [e, e_{yy}] + [e, Ae_x] + [e, Be_y] + [e, ce] = \\ & = -[e_x, e_x] - y^m [e_y, e_y] + [e, A_1 e_x] + [e, B_1 e_y] + [e, ce] \leq 0 \end{aligned}$$

on peut appliquer le théorème de Bitsadze.

*Remarque 3.* Si

$$\xi C \xi^* \leq -(\xi_1^2 + \xi_2^2) \cdot \|\xi\|^2 \text{ pour tout } \xi \in R^n \text{ et}$$

$$\|A_1\| \leq 2\varepsilon_1, \|B_1\| \leq 2y^{\frac{m}{2}} \varepsilon_2 \quad (\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0)$$

alors la condition i) du théorème 2 a lieu.

**4. Exemple 3.** Soit  $M = \{u \mid u \in C^{2,n}(\overline{\Omega}) \cap C^{0,n}(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$  et  $N = C^2(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega)$ , où  $\Omega = (a, b) \times \Omega$  est un domaine borné contenu dans  $R^m$ ,  $\Gamma_1$  est la frontière de  $\Omega_1$  dans  $R^{m-1}$ .  $N$  est muni de la relation d'ordre habituelle et dans  $M$  le produit scalaire est défini par

$$[u, v] = \int_{\Omega_1} (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n) dx', \quad x = (x_1, x'), \quad x_1 \in (a, b), \quad x' \in \Omega_1$$

Considérons sur  $M$  l'opérateur

$$L = \sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + C$$

où  $A_{ij} = ||a_{ki}^{ij}||$ ,  $B_i^i = ||b_{ki}^i||$ ,  $C = ||C_{ki}||$  sont des matrices carrées constantes.  
Soit  $u = u(x)$  une solution de l'équation

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u = 0 \tag{I_2}$$

Nous utilisons maintenant les notations suivantes

$$R(x_1) = \left( \int_{\Omega_1} (u_1^2 + \dots + u_n^2) dx' \right)^{\frac{1}{2}}, u = Re, e = (e_1, \dots, e_n)$$

Dans l'hypothèse que  $R(x_1) \neq 0$ ,  $x_1 \in (a, b)$ , du

$$[u, Lu] = 0$$

on a

$$[e, A_{11}e] R'' + \left( 2 \sum_{j=1}^m [e, A_{1j}e_{x_j}] + [e, B_1e] \right) R' + [e, Le] R = 0 \tag{II_3}$$

Nous pouvons donner maintenant un théorème qui a été donné essentiellement par M. M. L a v r e n t i e f f [7] mais est un peu plus général.

**THÉORÈME 3.** On suppose que

- i)  $A_{11} = \alpha I$ ,  $\alpha > 0$
- ii)  $\sum_{i,j=1}^m \zeta_i A_{ij} \zeta_j^* \geq 0$  pour tout  $\zeta_k \in R^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ .  
(condition de Somigliana)
- iii)  $B_i = b_i I$
- iv)  $\xi C \xi^* \leq 0$  pour tout  $\xi \in R^n$

Si  $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ ,  $u \in M$ , est une solution de (I<sub>2</sub>) alors  $||u|| =$

$$= \left( \int_{\Omega_1} (u_1^2 + \dots + u_n^2) dx' \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ prend ses valeurs maximales sur } [a, b], \text{ dans } a \text{ et } b.$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que  $R(x_1) \neq 0$ , dans  $(a, b)$ . Alors  $R = R(x_1)$  satisfait l'équation (II<sub>3</sub>). Mais

$$\begin{aligned} [e, Le] &= - \sum_{i,j=1}^m [e_{x_i}, A_{ij}e_{x_j}] + \sum_{i=1}^m b_i [e, e_{x_i}] + [e, ce] = \\ &= - \int_{\Omega_1} \left( \sum_{i,j=1}^m e_{x_i} A_{ij} e_{x_j}^* \right) dx' + \int_{\Omega_1} e C e^* dx' \leq 0. \end{aligned}$$

et il en résulte notre théorème.

**5. Exemple 4.** Soit  $M$  l'espace linéaire des fonctions vectorielles  $u = u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$  qui appartiennent à  $C(\Omega)$  et sont deux fois continûment différentiables par rapport à  $x$  et continûment différentiables par rapport à  $t$ .  $N$  est l'espace de fonctions scalaires avec les mêmes propriétés;  $\Omega$  est un domaine borné qui est contenu dans  $E^2$ . Dans  $M$  le produit scalaire est défini par

$$[u, v] = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Considérons sur  $M$  l'opérateur suivant

$$L = a^2 I \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial}{\partial x} + C - I \frac{\partial}{\partial t}$$

où  $a$  est un nombre réel  $\neq 0$ ,  $B = \|b(x, t)\|$ ,  $C = \|C(x, y)\|$  sont des matrices carrées.  $L$  est un opérateur parabolique dans  $\Omega$ . Soit  $P_0(x_0, t_0) \in \Omega$ .  $S(P_0)$  désigne l'ensemble des points  $Q$  pour lesquels il existe un arc, le long duquel l'ordonnée  $t$  sera non-décroissante à partir du point  $Q$ .

Soit maintenant  $u = u(x, t)$  une solution de l'équation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{I}_4)$$

Avec les notations

$$R = R(x, t) = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u = Re, \quad e = (e_1, \dots, e_n)$$

dans l'hypothèse que  $R(x, t) \neq 0$ , dans  $\Omega$ , du

$$[u, Lu] = 0$$

on a

$$a^2 R_{xx} + [e, Be] R_x + (a^2 [e, e_{xx}] + [e, Be_x] + [e, Ce]) R - R_t = 0 \quad (\text{II}_4)$$

En effet d'après un théorème bien connu (voir A. F r i e d m a n [4] pp. 34) nous avons le résultat suivant (voir K u k s [6] pp. 183).

THÉORÈME 4. Admettons que

$$\xi \begin{pmatrix} -a^2 I & 0 \\ B_1 & C \end{pmatrix} \xi^* < 0 \text{ pour tout } \xi \in R^{2n}, \quad \xi \neq 0 \text{ et } (x, t) \in \Omega$$

où  $B = bI + B_1$ .

Si  $u = u(x, t)$  est une solution de l'équation (I<sub>4</sub>)  $R(x, t) = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}$  prend sa valeur maximale dans  $P_0 \in \Omega$ , il résulte que  $R(Q) = P(P_0)$  pour chaque  $Q \in S(P_0)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $R(x, t) \neq 0$  dans  $\Omega$ . Alors  $R = R(x, t)$  satisfait l'équation (II<sub>4</sub>) et comme

$$a^2 [e, e_{xx}] + [e, Be_x] + [e, Ce] = -a^2 [e_x, e_x] + [e, B_1 e_x] + [e, Ce] \leq 0$$

on peut appliquer le théorème de Friedman.

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. Bitsadze, *Equations of the Mixed Type*. Pergamon Press, 1964.
2. A. V. Bitsadze, *Sur les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre* (en russe). „Dokl. Akad. Nauk SSSR”, **112** (1957), 983–986.
3. J. Bochenek, *On the Dirichlet's Problem for a Class of the Elliptic Systems of Differential Equations of the Second Order*. „Prace Mat.” (Kraków), **11** (1966), 21–26.
4. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, 1964.
5. L. Kantorovici, *Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires*. „C.R.Acad. Sc. Paris”, **202** (1936), 813–816.
6. L. M. Kuks, *Theoremes of the Quatitative Theory of Strong Elliptical Systems of Second Order* (Russian). „Usp. Mat. Nauk. SSSR”, **17** (1962), 3, 181–184.
7. M. M. Lavrentieff, *Sur le principe du maximum pour les solutions d'un système fort elliptique du second ordre* (en russe). „Dokl. Akad. Nauk. SSSR”, **116** (1957), 175–176.
8. T. Stys, *Hopf's Theorem for a Certain Elliptic System of the Second-order Linear Differential Equations*. „Prace Mat.”, **8** (1964), 143–146.
9. T. Stys, *Aprioristic Estimations of Solutions of a Certain Elliptic System of Partial Differential Second Order Equations*. „Bull. Acad. Pol. Sc.”, **13** (1965), 639–640.
10. A. Wintner, *A Comparison Theorem for Sturmian Oscillation Numbers of Linear Systems of Second Order*. „Duke Math. J.”, **25** (1958), 515–518.

ASUPRA PROPRIETĂȚILOR NORMELOR SOLUȚIILOR UNUI SISTEM  
DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

(R e z u m a t)

În această lucrare se stabilesc proprietăți de maxim pentru normele soluțiilor unui sistem de ecuații diferențiale ordnare și ale unui sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale de ordinul al doilea. La început se dă următorul

*Model abstract*: Fie  $M$  și  $N$  două spații vectoriale peste cprul numerelor reale  $R$ . Mai mult  $N$  este un spațiu semiordonat liniar. În  $M$  se definește un produs scalar generalizat cu valori în  $N$ . Fie  $L$  o aplicație liniară a lui  $M$  în el însuși. Se consideră produsul  $[f, Lf]$ . Se presupune că pentru orice  $f \in M$  există o aplicație liniară  $T_f$ , definită pe elementele lui  $N$ , astfel ca

$$[f, Lf] = T_f([f, f]) \text{ pentru orice } f \in M$$

Se consideră ecuația (I). Dacă  $f$  este o soluție a ecuației (I), rezultă că  $T_f([f, f]) = 0_N$ .

Se obține astfel ecuația (II). Studiind proprietățile soluțiilor pozitive ( $u > 0_N$ ) a ecuației (II), se obțin proprietăți pentru  $u = [f, f]$ , unde  $f$  este o soluție a ecuației (I).

Ca aplicație se stabilesc principii de maxim pentru soluțiile sistemelor  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$   $(I_1)$ .

Aceste teoreme vor fi folosite într-o notă viitoare pentru studiul problemelor la limită.

О СВОЙСТВАХ НОРМ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Резюме)

В статье определяются свойства максимума для норм решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и одной системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Сначала дается следующая

*Абстрактная модель*: Пусть  $M$  и  $N$  — два векториальных пространства над телом вещественных чисел  $R$ . Более того,  $N$  является линейным полуупорядоченным пространством. В  $M$  определяется

обобщённое скалярное произведение со значениями в  $N$ . Пусть  $L$  — линейное отображение пространства  $M$  в нём самом. Рассматривается произведение  $[f, Lf]$ . Предполагается, что для любого  $f \in M$  имеется линейное отображение  $T_f$ , определённое на элементах пространства  $N$ , так, чтобы

$$[f, Lf] = T_f(f, f) \text{ для любого } f \in M.$$

Рассматривается уравнение (I). Если  $f$  является решением уравнения (I), тогда следует, что  $T_f f([f, f]) = \theta_N$ .

Получается таким образом уравнение (II). Изучая свойства положительных решений ( $u > \theta_N$ ) уравнения (II), получают свойства для  $u = [f, f]$ , где  $f$  — решение уравнения (I).

В качестве применения устанавливаются принципы максимума для решений систем  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$ ,  $(I_4)$ .

Эти теоремы будут использованы в будущей работе для изучения граничных задач.



# ON THE MOMENTS OF NEGATIVE ORDER OF THE POSITIVE BERNOULLI AND POISSON VARIABLES

by  
**D. D. STANCU**

## I. Introduction

1. Let  $X$  be a random variable having a Bernoulli distribution

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

where  $0 < p \leq 1$ ,  $q = 1 - p$  and  $k = 0, 1, \dots, n$ .

In the papers [6], [4] and [5] there have been shown some typical situations where it is necessary to consider a random variable  $X'$  having a *positive* Bernoulli distribution

$$P(X' = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (1 - q^n)^{-1},$$

where  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$  and  $k = 1, 2, \dots, n$ . It is a Bernoullian distribution truncated from its lower end.

The moment of a positive order  $r$  of the reciprocal  $1/X'$  coincides with the moment of the negative order  $-r$  of  $X'$ :

$$\nu_r \left( \frac{1}{X'}; n, p \right) = \nu_{-r}(X'; n, p) = \nu_{-r}(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=1}^n k^{-r} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (1)$$

In order to obtain the corresponding formula for a positive Poisson variable  $Y'$  we may put  $np = \lambda$  above and let  $n \rightarrow \infty$ . One finds

$$\nu_r \left( \frac{1}{Y'}; \lambda \right) = \nu_{-r}(Y'; \lambda) = \nu_{-r}(\lambda) = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

2. F. F. Stephan [6] considered, for the first time, the problem of computing the moments  $\nu_{-r}(n, p)$ . E. I. Grab and I. R. Savage [4] gave some tables, to 5D, for the mean value  $\nu_{-1}(n, p)$  [for  $p = .01, .05(.05).95, .99$  when  $n = 2(1)20$  and  $p = .01, .05(.05).50$  when  $n = 21(1)30$ ] and for the mean value  $\nu_{-1}(\lambda)$  [when  $\lambda = .01, .05(.05)1.80$ ]. P. Thionet [8] established an approximation formula for  $\nu_{-1}(n, p)$ . J. Tiago de Oliveira [7] has derived a differential equation for  $\nu_{-1}(n, p)$ . F. N. David and N. L. Johnson [1] has

indicated an approximate procedure for calculating the moments  $v_{-r}(n, p)$ ,  $v_{-r}(\lambda)$ . W. Mendenhall and E. H. Lehman, Jr. [5], who encountered the moments of negative order of a positive Bernoulli variable in a research problem on life testing, tabulated [by the aid of formula (1)], to 5D, the values of  $v_{-r}(n, p)$  for  $r = 1(1)4$ ,  $p = .05(.05).95$  and  $n = 5(5)20,30,40$ .

In order to avoid complex computations in the calculuses of  $v_{-r}(n, p)$ , Z. Govindarajulu [3] established a recurrence relationship among the moments of negative order of the positive Bernoulli variable.

3. In the present paper we give some explicit formulas, in terms of the differences of reciprocals of unity, for the moments  $v_{-r}(n, p)$ ,  $v_{-r}(\lambda)$ .

We mention that in the new book by F. N. David, M. G. Kendall and D. E. Barton [2] there can be found tables of 10D values of  $\Delta^n 1^{-r}$  for  $r, n = 1(1)20$ . With the help of these tables our principal formula (6) can be effectively used for calculating the moments of negative order of the positive Bernoulli variables.

**II. Formulas, in Terms of Finite Differences, for the Moments  $v_{\pm r}(n, p)$  and  $v_{\pm r}(\lambda)$ .**

4. It is obvious that the moment of the positive (integer) order  $r$  of  $X'$  is given by

$$v_r(n, p) = v_r(X'; n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=1}^n k^r \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

One observes that for calculating the moments  $v_r(n, p)$  and  $v_{-r}(n, p)$  we need to know an useful representation of a sum of the following form

$$Q_s(n, p) = \sum_{k=1}^n k^s \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

where  $s$  is an integer.

By application of the binomial formula we obtain

$$Q_s(n, p) = \sum_{k=1}^n k^s \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} p^{k+i} = \sum_{j=1}^n A_j p^j.$$

In order to find the coefficient  $A_j$  one observes that we should give to the pair  $(k, i)$  the following sequence of values

$$(j, 0), (j - 1, 1), \dots, (j - h, h), \dots, (2, j - 2), (1, j - 1).$$

Hence, if we make  $h = 0, 1, \dots, j - 1$  we get

$$Q_s(n, p) = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{n}{j-h} \binom{n-j+h}{h} (j-h)^s \right] p^j.$$

Since

$$\binom{n}{j-h} \binom{n-j+h}{h} = \binom{n}{j} \binom{j}{h},$$

we obtain

$$Q_s(n, p) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \left[ \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j}{h} (j-h)^s \right] p^j. \tag{2}$$

Therefore

$$A_j = D_s(j) = \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j}{h} (j-h)^s.$$

Let  $r$  be a natural number. If we take  $s = r$  then we have

$$v_r(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} D_r(j) p^j.$$

Taking  $s = -r$  we find

$$v_{-r}(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} D_{-r}(j) p^j. \tag{3}$$

5. Now let us consider the finite difference of order  $m$  of a function  $f(x)$ , with the step  $l$  and the starting point  $a$ :  $\Delta_l^m f(a)$ . As it is well known, we have

$$\Delta_l^m f(a) = \sum_{h=0}^m (-1)^{m-h} \binom{m}{h} f(a + hl) = \sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} f(a + \overline{m - hl}). \tag{4}$$

For  $f(x) = x^r$ ,  $l = 1$ ,  $a = 0$  and  $m = j$  it reduces to

$$\Delta_1^j 0^r = \Delta^j 0^r = \sum_{h=0}^j (-1)^h \binom{j}{h} (j-h)^r = D_r(j).$$

Accordingly, we arrive at the following formula for the moment of the positive order  $r$  of  $X'$ :

$$v_r(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (\Delta^j 0^r) p^j.$$

It should be noticed that this formula can also be written under the form

$$v_r(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^r \binom{n}{j} (\Delta^j 0^r) p^j, \tag{5}$$

which is useful when  $r < n$ .

6. For the calculus of the differences of zero  $\Delta^j 0^r$  it is suitable to make use of the recurrence relation (see, e.g., [9])

$$\Delta^j 0^r = j (\Delta^j 0^{r-1} + \Delta^{j-1} 0^{r-1}),$$

which permits to tabulate them in a very easy way.

7. If we take in (4)  $f(x) = x^{-r-1}$ ,  $l = 1$ ,  $a = 1$  and  $m = j - 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} \Delta_1^{j-1} 1^{-r-1} &= \Delta^{j-1} 1^{-r-1} = [\Delta^{j-1} x^{-r-1}]_{x=1} = \\ &= \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j-1}{h} (j-h)^{-r-1} = \frac{1}{j} \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{h}{j} (j-h)^{-r} = \frac{1}{j} D_{-r}(j). \end{aligned}$$

Consequently, formula (3) leads us to the following expression for the moment of negative order  $-r$  of  $X'$ :

$$v_{-r}(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} (\Delta^{j-1} 1^{-r-1}) p^j. \tag{6}$$

8. If we take into account the relationship between a divided difference or equally spaced nodes of a function  $f(x)$  and the corresponding finite (forward) difference

$$[a, a, \dots, a + ml; f] = \frac{\Delta_l^m f(a)}{m! l^m},$$

we can write the formulas (5) and (6) respectively under the following forms

$$v_r(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^r n^{[j]} [0, 1, \dots, j; x^r] p^j,$$

$$v_{-r}(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n n^{[j]} \left[ 1, 2, \dots, j; \frac{1}{x^{r+1}} \right] p^j,$$

where  $n^{[j]} = n(n-1) \dots (n-j+1)$ .

9. Assuming that for a fixed  $k$  we let  $n \rightarrow \infty$  and  $p \rightarrow 0$ , so that  $np = \lambda$  we have

$$q^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \binom{n}{j} p^j = \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \lambda^j \rightarrow \frac{\lambda^j}{j!}$$

and the formulas (5) and (6) lead us to the following expressions for the moments of positive order, respectively of negative order, of the Poisson variable  $Y'$ , truncated from the lower end,

$$v_r(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{j=1}^r \frac{\lambda^j}{j!} \Delta^j 0^r,$$

$$v_{-r}(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \Delta^{j-1} 1^{-r-1}.$$

10. We shall end this paper by an attempt to unify the results corresponding to the moment  $v_s(n, p)$ . According to the formula (4) we have

$$\Delta^{j-1} 1^{s-1} = \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j-1}{h} (j-h)^{s-1}$$

and we readily find

$$\Delta^{j-1} 1^{s-1} = \frac{1}{j} \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j}{h} (j-h)^s.$$

Consequently, formula (2) can be written under the form

$$Q_s(n, p) = \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} (\Delta^{j-1} 1^{s-1}) p^j.$$

If  $s$  coincides with the natural number  $r$  it permits us to give a formula, in terms of differences of one, for the moment of positive order  $r$  of  $X'$ :

$$v_r(n, p) = \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} (\Delta^{j-1} 1^{r-1}) p^j. \quad (7)$$

If  $s = -r$  then we arrive at the formula (6).

Remark. The reason that the moment  $v_r(n, p)$  can be written under the both forms (5) and (7) is that we have

$$[0, 1, \dots, j; x^r] = [1, 2, \dots, j; x^{r-1}],$$

or

$$\Delta^j 0^r = j \Delta^{j-1} 1^{r-1},$$

whenever  $r$  is a natural number.

(Received October 10, 1967)

#### REFERENCES

1. F. N. David and N. L. Johnson, *Reciprocal Bernoulli and Poisson variables*, *Metron* **18** (1956-57), 77-81.
2. F. N. David, M. G. Kendall and D. E. Barton, *Symmetric function and allied tables*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1966.
3. Z. Govindarajulu, *Recurrence relations for the inverse moments of the positive binomial variable*, *Journ. Statist. Assoc.*, **58** (1963), 468-473.
4. E. L. Grab and I. R. Savage, *Tables of the expected value of  $1/X$  for positive Bernoulli and Poisson variables*, *Journ. Statist. Assoc.*, **49** (1954), 169-177.
5. W. Mendenhall and E. H. Lehman, Jr., *An approximation to the negative moments of the positive binomial useful in life testing*, *Technometrics* **2** (1960), 227-242.
6. F. F. Stephan, *The expected value and variance of the reciprocal and other negative powers of a positive Bernoullian variate*, *Annals of Math. Statist.*, **16** (1945), 50-61.
7. J. Tiago de Oliveira, *Sur le calcul des moments de la réciproque d'une variable aléatoire positive de Bernoulli et Poisson*, *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, **36** (1952), 5-8.
8. P. Thionet, *Sur le moment d'ordre  $(-1)$  de la distribution binomiale tronquée. Application à l'échantillonnage de Hajek*, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **12** (1963), 93-102.
9. E. T. Whittaker and G. Robinson, *The calculus of observations*, London-Glasgow, Blackie, 1929.

#### ASUPRA MOMENTELOR DE ORDIN NEGATIV ALE VARIABILELOR BERNOULLI ȘI POISSON POZITIVE

(R e z u m a t)

Se dau expresii explicite, cu ajutorul diferențelor reciprocelor unității, pentru momentele de ordin negativ ale variabilelor aleatoare de tip Bernoulli și Poisson pozitive. De asemenea se exprimă momentele de ordin pozitiv ale acestor variabile aleatoare cu ajutorul diferențelor unității.

#### О МОМЕНТАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ БЕРНУЛЛИ И ПУАССОНА

(Р е з ю м е)

Даются явные выражения, при помощи разности взаимных единицы, для моментов отрицательного порядка положительных случайных переменных типа Бернулли и Пуассона. Выражены, также, моменты положительного порядка этих случайных переменных при помощи разности единицы.



# ASUPRA DISTRIBUȚIILOR VARIABILELOR ALEATORII DISCRETE

de  
ILIE TORSAN

1. Fie  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o funcție reală de  $n$  variabile reale  $x_i$  și să considerăm dezvoltarea ei în serie de puteri

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1)$$

pentru  $x_i \in \Omega$  unde  $\Omega = \{x_i; |x_i| < r_i\}$ . În cele ce urmează vom asigura întotdeauna restricția funcției  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la acel  $\Omega_1 \subseteq \Omega$  pentru care  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \geq 0$ .

Presupunind că  $Z$  este o variabilă aleatorie discretă  $n$ -dimensională, vom defini funcția ei de frecvență prin

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (2)$$

unde  $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Din observația de mai sus noi putem asigura întotdeauna condiția ca  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0$  și avînd

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = 1$$

rezultă că (2) este o funcție de frecvență.

Prin  $M(\alpha_i)$  vom nota momentul inițial de ordinul întâi în raport cu  $\alpha_i$  adică

$$M(\alpha_i) = \frac{1}{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \alpha_i A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Observînd că

$$x_i \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \alpha_i A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i} \dots x_n^{\alpha_n}$$

rezultă că momentele de ordinul întâi ale acestei distribuții sînt

$$M(\alpha_i) = x_i \frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)}{F(x_1, \dots, x_n)} \text{ pentru } i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

În general momentul de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  este

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{1}{F(x_1, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_j^{k_j} \dots \alpha_n^{k_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_j^{\alpha_j} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (4)$$

Derivînd această relație în raport cu  $x_j$  și apoi înmulțind cu  $x_j$  obținem

$$\begin{aligned} x_j \frac{\partial M_{k_1, \dots, k_n}}{\partial x_j} &= -x_j \frac{F'_{x_j}(x_1, \dots, x_n)}{F(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{1}{F(x_1, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_j^{k_j} \dots \alpha_n^{k_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &+ \frac{1}{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \alpha_1^{k_1} \dots x_j^{k_j-1} \dots \alpha_n^{k_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_j^{\alpha_j} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Ținînd seama de (3) și (4), relația de mai sus devine

$$x_j \frac{\partial M_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n}}{\partial x_j} = -M(\alpha_j) M_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n} + M_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n}$$

de unde rezultă că momentele inițiale ale acestei distribuții verifică relațiile de recurență

$$M_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n} = x_j \frac{\partial M_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n}}{\partial x_j} + M(\alpha_j) M_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n} \quad (5)$$

pentru  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Momentul centrat de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  al distribuției este

$$\begin{aligned} \mu_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n} &= \frac{1}{(F_{x_1, \dots, x_n})} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} [\alpha_1 - M(\alpha_1)]^{k_1} \dots [\alpha_j - M(\alpha_j)]^{k_j} \dots [\alpha_n - \\ &- M(\alpha_n)]^{k_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (6)$$

Derivînd această relație în raport cu  $x_j$  și amplificînd apoi cu  $x_j$ , obținem

$$x_j \frac{\partial \mu_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n}}{\partial x_j} = -x_j \left[ \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial M(\alpha_i)}{\partial x_j} \mu_{k_1, \dots, k_i-1, \dots, k_n} \right] + \mu_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n}$$

de unde rezultă că momentele centrate verifică relațiile de recurență

$$\mu_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n} = x_j \left\{ \frac{\partial \mu_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial M(\alpha_i)}{\partial x_j} \mu_{k_1, \dots, k_i-1, \dots, k_n} \right\} \quad (7)$$

pentru  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Prin definiție, funcția caracteristică a acestei distribuții este

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{F(x_1, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} e^{i(t_1 \alpha_1 + \dots + t_n \alpha_n)} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

adică

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{F(x_1, \dots, x_n)} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} [x_1 e^{it_1}]^{\alpha_1} \dots [x_n e^{it_n}]^{\alpha_n}$$



de unde rezultă că funcția caracteristică a distribuției este

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{F(e^{it_1} x_1, e^{it_2} x_2, \dots, e^{it_n} x_n)}{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{8}$$

De aici rezultă imediat următoarea

**TEOREMĂ.**

Dacă 
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = A^{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j} \text{ cu } A > 0$$

atunci distribuția a cărei funcție de frecvență este dată de (2), este o distribuție stabilă.

Într-adevăr, dacă  $U$  și  $V$  sînt două variabile aleatorii independente avînd această distribuție, funcțiile lor caracteristice sînt

$$\varphi_U(t_1, \dots, t_n) = A^{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j (e^{it_j} - 1)} \quad \text{și} \quad \varphi_V(t_1, \dots, t_n) = A^{\sum_{j=1}^n \mu_j y_j (e^{it_j} - 1)}$$

Din independența lor rezultă că funcția caracteristică  $\Phi$  a sumei lor este

$$\Phi = \varphi_U \cdot \varphi_V = A^{\sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j + \mu_j y_j) (e^{it_j} - 1)}$$

și deci distribuția este stabilă.

**2. Aplicații.** Să presupunem că funcția (1) are forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \tag{9}$$

În acest caz funcția de frecvență (2) devine

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} - \sum_j x_j}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} e \tag{10}$$

adică am obținut funcția de frecvență a distribuției Poisson  $n$ -dimensionale.

Din relațiile (3), (5) și (7) rezultă că momentele inițiale de ordinul întâi, momentele inițiale de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  și momentele centrate de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  ale distribuției Poisson  $n$ -dimensionale verifică relațiile de recurență

$$M(\alpha_i) = x_i \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, n \tag{11}$$

$$M_{k_1 \dots k_{j+1}, \dots, k_n} = x_j \left[ \frac{\partial M_{k_1 \dots k_j \dots k_n}}{\partial x_j} + M_{k_1 \dots k_j \dots k_n} \right] \text{ pentru } j = 1, 2, \dots, n \tag{12}$$

$$\mu_{k_1 \dots k_{j+1}, \dots, k_n} = x_j \left[ \frac{\partial \mu_{k_1 \dots k_j \dots k_n}}{\partial x_j} + k_j \mu_{k_1 \dots k_{j-1}, \dots, k_n} \right] \text{ pentru } j = 1, 2, \dots, n \tag{13}$$

Din (8) rezultă că funcția caracteristică a distribuției Poisson  $n$ -dimensionale este

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = e^{\sum_{j=1}^n x_j (e^{it_j} - 1)} \tag{14}$$

Din teorema demonstrată mai sus rezultă că această distribuție este stabilă. Dacă presupunem că funcția (1) are forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 - x_1)^{-k_1} (1 - x_2)^{-k_2} \dots (1 - x_n)^{-k_n} \text{ unde } k_i > 0 \quad (15)$$

și  $0 < x_i < 1$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$

atunci funcția de frecvență definită de (2) devine

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{k_1(k_1 + 1) \dots (k_1 + \alpha_1 - 1)}{\alpha_1!} \cdot \frac{k_2(k_2 + 1) \dots (k_2 + \alpha_2 - 1)}{\alpha_2!} \dots \dots \frac{k_n(k_n + 1) \dots (k_n + \alpha_n - 1)}{\alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} (1 - x_1)^{k_1} \dots (1 - x_n)^{k_n} \quad (16)$$

sau introducînd funcția gamma, rezultă că

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \alpha_i)}{\alpha_i! \Gamma(k_i)} x_i^{\alpha_i} (1 - x_i)^{k_i} \quad (17)$$

care este chiar funcția de frecvență a distribuției lui Pascal (binomială cu exponentul negativ)  $n$ -dimensională. Din relațiile (3), (5), (7) rezultă că momentele de ordinul întâi, momentele inițiale de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  și momentele centrate de ordinul  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  ale distribuției Pascal verifică relațiile de recurență

$$M(\alpha_i) = \frac{k_i x_i}{1 - x_i} \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$M_{k_1 \dots k_j+1, \dots, k_n} = x_j \left[ \frac{\partial M_{k_1 \dots k_j \dots k_n}}{\partial x_j} + \frac{k_j}{1 - x_j} M_{k_1 \dots k_j \dots k_n} \right] \quad (19)$$

$$\mu_{k_1 \dots k_j+1, \dots, k_n} = x_j \left[ \frac{\partial \mu_{k_1 \dots k_j \dots k_n}}{\partial x_j} + \frac{k_j^2}{(1 - x_j)^2} \mu_{k_1 \dots k_j-1, \dots, k_n} \right] \quad (20)$$

pentru  $j = 1, 2, \dots, n$

Din (8) rezultă că funcția caracteristică a distribuției Pascal  $n$ -dimensionale este

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n [1 - e^{it_j} x_j]^{-k_j} [1 - x_j]^{k_j} \quad (21)$$

(Intrat în redacție la 16 august 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. Albert Noack, *A Class of Random Variables with Discrete Distributions*, „The Annals of Mathematical Statistics” XXI (1950) pag. 127–132.
2. G. Mihoc, D. Fireșcu, *Statistică matematică*. București, 1966.

## О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Резюме)

Автор статьи, используя представление в виде степенного ряда вещественной функции,  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с  $n$  вещественными переменными, определяет распределение одной  $n$ -мерной дискретной случайной переменной через частотную функцию данную (2). Вычисляются затем начальные моменты первого порядка, начальные моменты порядка  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  и центрированные моменты порядка  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  этого распределения, получая отношения (3), (5) и (7).

Отношением (8) определяется характеристическая функция этого распределения.

Во второй части, считая, что функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет вид (9) или (15), автор получает частотные функции для  $n$ -мерного распределения Пуассона, данного (10) и, соответственно,  $n$ -мерное распределение Паскала (17) (биномиальное, с отрицательным показателем).

SUR LES DISTRIBUTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES<sub>3</sub>

(Résumé)

En employant le développement en série de puissances d'une fonction  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  réelle de  $n$  variables réelles, on définit la distribution d'une variable aléatoire discrète  $n$ -dimensionnelle par la fonction de fréquence donnée par (2). On calcule ensuite les moments initiaux de premier ordre, les moments initiaux d'ordre  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  et les moments centrés d'ordre  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ , de cette distribution, et l'on obtient les relations (3), (5) et (7).

Par la relation (8) on détermine la fonction caractéristique de cette distribution.

Dans la deuxième partie, en considérant que la fonction  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est de la forme (9) ou (15), on obtient respectivement les fonctions de fréquence pour la distribution Poisson  $n$ -dimensionnelle donnée par (10), et la fonction de distribution de Pascal (binomiale à exposant négatif)  $n$ -dimensionnelle donnée par (17).



# O TEOREMĂ DE CARACTERIZARE A ELEMENTELOR DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAȚIE

de

WOLFGANG W. BRECKNER

Fie  $X$  un spațiu vectorial normat real sau complex,  $V$  o submulțime proprie a lui  $X$  și  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  un sistem de  $n$  puncte din  $X \setminus \overline{V}$ .

Elementul  $v_0 \in V$  se numește element de cea mai bună aproximație al sistemului de puncte  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  dacă

$$\sum_{j=1}^n m_j \|x_j^0 - v_0\| = \inf_{v \in V} \left( \sum_{j=1}^n m_j \|x_j^0 - v\| \right) \quad (1)$$

unde  $m_j > 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) sînt numere date.

O teoremă de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximație în sensul acestei definiții a fost demonstrată de G. S. Rubinștein [3]. Noi vom demonstra în această notă următoarea

**TEOREMĂ.** *Pentru ca elementul  $v_0 \in V$  să fie un element de cea mai bună aproximație al sistemului de puncte  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , este suficient, iar dacă  $V$  este convexă și necesar, ca pentru fiecare element  $v \in V$  să existe  $n$  funcționale  $f_1, f_2, \dots, f_n$  care se bucură de proprietățile:*

A.  $f_j \in E(S_{X^*})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , unde cu  $E(S_{X^*})$  s-a notat mulțimea funcționalelor extreme de pe sfera unitate  $S_{X^*}$  a spațiului dual  $X^*$  al lui  $X$ .

B.  $\operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n m_j f_j(v_0 - v) \right) \geq 0$

C.  $f_j(x_j^0 - v_0) = \|x_j^0 - v_0\| \quad j = \overline{1, n}$

Deoarece demonstrația suficienței este imediată, vom demonstra doar necesitatea. Fie deci  $v_0 \in V$  un element de cea mai bună aproximație al sistemului de puncte  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . În spațiul  $Z = \{z \mid z \in X^n\}$  introducem norma  $\|z\|_Z = \sum_{j=1}^n m_j \|x_j\|$  unde  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z$  și notăm cu  $Z_V = \{z_v \mid z_v \in Z, z_v = (v, v, \dots, v), v \in V\}$ . Conform ipotezei noastre punctul  $z_{v_0} = (v_0, v_0, \dots, v_0) \in Z_V$  este un punct de cea mai bună aproximație al punctului  $z_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  în norma spațiului  $Z$ .

Conform unei teoreme cunoscute, de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximație (a se vedea [1], [2], sau [4]) aplicată spațiului  $Z$  și submulțimii  $Z_V$ , există pentru  $z_v = (v, v, \dots, v) \in Z_V$ , o funcțională  $f$  care se bucură de proprietățile:

$$A_1. f \in E(S_{Z^*})$$

$$B_1. \operatorname{Re} f(z_{v_0} - z_v) \geq 0$$

$$C_1. f(z_0 - z_{v_0}) = \|z_0 - z_{v_0}\|_Z$$

Funcționala  $f \in Z^*$  se poate reprezenta sub forma  $f(z) = \sum_{j=1}^n m_j f_j(x_j)$  și  $\|f\|_{Z^*} = \max_{j=1, \dots, n} \|f_j\|_{X^*}$ , unde  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z$ ,  $f_j \in X^*$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Din proprietatea  $B_1$  rezultă atunci

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n m_j f_j(v_0 - v) \right) \geq 0$$

adică tocmai proprietatea B.

Deoarece  $\|f\|_{Z^*} = 1$ , rezultă că oricare ar fi  $1 \leq j \leq n$ , avem  $\|f_j\|_{X^*} \leq 1$ . Atunci oricare ar fi  $x \in X$  avem  $|f_j(x)| \leq \|x\|$ , de unde se obține

$$\operatorname{Re} f_j(x_j^0 - v_0) \leq |f_j(x_j^0 - v_0)| \leq \|x_j^0 - v_0\| \quad 1 \leq j \leq n \quad (2)$$

Pe de altă parte egalitatea  $C_1$  se mai poate scrie în felul următor:

$$\sum_{j=1}^n m_j f_j(x_j^0 - v_0) = \sum_{j=1}^n m_j \|x_j^0 - v_0\|$$

deci

$$\sum_{j=1}^n m_j [\operatorname{Re} f_j(x_j^0 - v_0) - \|x_j^0 - v_0\|] = 0$$

În baza relației (2) aceasta e atunci și numai atunci posibil, dacă pentru toți  $j = \overline{1, n}$  avem  $f_j(x_j^0 - v_0) = \|x_j^0 - v_0\|$ .

Din proprietatea C rezultă că oricare ar fi  $1 \leq j \leq n$ ,  $\|f_j\|_{X^*} = 1$ . Să arătăm că funcționalele  $f_j$  sînt extremale. Presupunem că există un indice  $1 \leq j \leq n$  astfel ca funcționala  $f_j$  să nu fie extremală. Atunci ea se poate reprezenta sub forma  $f_j = \frac{1}{2} [f_j^{(1)} + f_j^{(2)}]$  unde  $f_j^{(1)}, f_j^{(2)} \in S_{X^*}$ . Rezultă că  $f = \frac{1}{2} [f^{(1)} + f^{(2)}]$  unde

$$f^{(1)}(z) = m_1 f_1(x_1) + m_2 f_2(x_2) + \dots + m_{j-1} f_{j-1}(x_{j-1}) + m_j f_j^{(1)}(x_j) + \\ + m_{j+1} f_{j+1}(x_{j+1}) + \dots + m_n f_n(x_n)$$

$$f^{(2)}(z) = m_1 f_1(x_1) + m_2 f_2(x_2) + \dots + m_{j-1} f_{j-1}(x_{j-1}) + m_j f_j^{(2)}(x_j) + \\ + m_{j+1} f_{j+1}(x_{j+1}) + \dots + m_n f_n(x_n)$$

ceea ce contrazice faptul că  $f \in E(S_{Z^*})$ .

B I B L I O G R A F I E

1. Choquet G., *Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés.* „Rev. Math. Pures Appl.” **8** (1963), 541—542.
2. Garkavi A. L., *O kriterii elementa nailučšego približenia.* „Sibirsk. Mat. Jurnal” **5** (1964), 472—476.
3. Rubinštejn G. S., *Ob odnoi ekstremalnoi zadace v lincinom normirovannom prostranstve.* „Sibirsk. Mat. Jurnal” **6** (1965), 711—714.
4. Singer I., *On the Extension of Continuous Linear Functionals and Best Approximation in Normed Linear Spaces.* „Math. Ann.” **159** (1965), 344—355.

ОДНА ТЕОРЕМА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩАЯ ЭЛЕМЕНТЫ НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

(Резюме)

Пусть  $X$  — действительное или комплексное нормированное пространство,  $V$  — собственное подмножество пространства  $X$  и  $x_j^0 \in X \setminus V, j = \overline{1, n}$ , —  $n$  — данные точки.

Элемент  $v_0 \in V$  называется элементом наилучшей аппроксимации системы точек  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  если

$$\sum_{j=1}^n m_j \|x_j^0 - v_0\| = \inf_{v \in V} \left( \sum_{j=1}^n m_j \|x_j^0 - v\| \right).$$

В статье доказывается следующая теорема, характеризующая элементы наилучшей аппроксимации в смысле вышеуказанного определения:

Для того, чтобы элемент  $v_0 \in V$  был элементом наилучшей аппроксимации системы точек  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  достаточно, а если  $V$  — выпукло и необходимо, чтобы для каждого элемента  $v \in V$  существовали  $n$  функционалы  $f_1, f_2, \dots, f_n$  со следующими свойствами:

А.  $f_j \in E(S_{X^*}), j = \overline{1, n}$ , где через  $E(S_{X^*})$  обозначено множество экстремальных функционалов на сфере-единице  $S_{X^*}$  дуального пространства  $X^*$  пространства  $X$ .

Б.  $\operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n m_j f_j(v_0 - v) \right) \geq 0$

В.  $f_j(x_j^0 - v_0) = \|x_j^0 - v_0\| \quad j = \overline{1, n}$

EIN SATZ ZUR CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN

(Zusammenfassung)

Es sei  $X$  ein reeller oder komplexer normierter Vektorraum,  $V$  eine echte Teilmenge von  $X$  und  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  ein System von  $n$  Punkten aus  $X \setminus \overline{V}$ .

$v_0 \in V$  nennen wir eine Minimallösung für das System  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  wenn die Beziehung (1) erfüllt ist, wobei  $m_j > 0 (j = \overline{1, n})$  vorgegebene Zahlen sind.

Es gilt der folgende

**SATZ:** Damit  $v_0 \in V$  eine Minimallösung für das System  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  ist, ist es hinreichend und wenn  $V$  konvex, auch notwendig, dass es für jedes  $v \in V$   $n$  Funktionale  $f_1, f_2, \dots, f_n$  gibt, die folgende Bedingungen erfüllen:

A.  $f_j \in E(S_{X^*})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , wobei  $E(S_{X^*})$  die Menge der Extremalfunktionale der Einheitskugel  $S_{X^*}$  des dualen Raumes  $X^*$  bezeichnet;

$$\text{B. } \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n m_j f_j(v_0 - v) \right) \geq 0;$$

$$\text{C. } f_j(x_j^0 - v_0) = \|x_j^0 - v_0\|. \quad j = \overline{1, n}$$



## DESPRE CARACTERIZAREA INFRAELEMENTELOR

de

IOSIF KOLUMBÁN

În lucrarea de față se dau câteva caracterizări ale infraelementelor definite în [6].

1. Fie  $X$  un spațiu vectorial real sau complex și fie  $T$  un spațiu topologic Hausdorff compact. Se presupune că la orice element  $t$  din  $T$  se atașează o seminormă  $\|\cdot\|_t$  definită pe  $X$ , cu următoarele proprietăți:

a) Oricare ar fi  $x \in X$ , funcția  $a(t) = \|x\|_t$  este continuă pe  $T$ .

b) Pentru orice  $x \in X$ ,  $x \neq \theta$  există  $t \in T$ , astfel încît  $\|x\|_t > 0$ , unde prin  $\theta$  s-a notat elementul nul al spațiului  $X$ .

Fie  $Y \subset X$  astfel încît  $\theta \notin Y$ .

DEFINIȚIA 1. Elementul  $x_0 \in Y$  se numește infraelement față de  $Y$  și față de familia de seminorme  $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in T}$ , dacă pentru orice  $x \in Y$  există  $t \in T$  astfel încît să aibă loc inegalitățile

$$0 < \|x_0\|_t \leq \|x\|_t \quad (1)$$

Mulțimea infraelementelor față de  $Y$  și față de familia de seminorme  $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in T}$  se va nota prin  $I(Y, T)$ .

Dacă  $T$  are un singur element, atunci  $I(Y, T)$  coincide cu mulțimea elementelor de cea mai bună aproximație din  $Y$  ale lui  $\theta$  în sensul normei  $\|\cdot\|_t$ .

Fie  $f$  o funcție definită și continuă pe  $T$ , astfel încît  $f(t) > 0$  pentru orice  $t \in T$ , și fie

$$C_f = \{x \in X : \|x\|_t \leq f(t) \text{ pentru orice } t \in T\}$$

Mulțimea  $C_f$  este convexă și  $\theta \in C_f$ . Fie  $p_f$  funcționala lui Minkowski atașată la  $C_f$ , adică

$$p_f(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{1}{\alpha} x \in C_f \right\}, \quad x \in X$$

Are loc egalitatea

$$p_f(x) = \max_{t \in T} \frac{\|x\|_t}{f(t)}, \quad x \in X$$

Evident  $p_f$  este o normă definită pe  $X$ .

**PROPOZIȚIA 1.** Fie  $x_0 \in Y$  astfel încât să aibă loc inegalitatea  $\|x_0\|_f > 0$ , oricare ar fi  $t \in T$ . Pentru ca să aibă loc relația  $x_0 \in I(Y, T)$ , este necesar și suficient ca  $x_0$  să fie element de cea mai bună aproximație (din  $Y$ ) al lui  $\theta$  în sensul normei  $p_f$ , unde  $f(t) = \|x_0\|_f$ ,  $t \in T$ .

**Demonstrație. Necesitatea.** Dacă  $x_0 \in I(Y, T)$ , atunci oricare ar fi  $x \in Y$  există  $t \in T$  astfel încât să aibă loc inegalitățile (1), deci  $p_f(x) \geq 1$ . Din egalitatea  $p_f(x_0) = 1$  rezultă că are loc inegalitatea  $p_f(x_0) \leq p_f(x)$  pentru orice  $x \in Y$ .

**Suficiență.** Dacă  $p_f(x_0) \leq p_f(x)$ , atunci există  $t \in T$  astfel încât să aibă loc inegalitățile (1). Se deduce că  $x_0 \in I(Y, T)$ .

Fie  $C_f^* = \{\varphi \in X^\#: |\varphi(x)| \leq p_f(x) \text{ pentru orice } x \in X\}$ , unde prin  $X^\#$  s-a notat mulțimea tuturor funcționalelor liniare definite pe  $X$ .

**TEOREMA 1.** Fie  $Y$  o submulțime convexă a lui  $X$ , fie  $x_0 \in Y$  astfel încât să aibă loc inegalitatea  $\|x_0\|_f > 0$  oricare ar fi  $t \in T$  și fie  $f(t) = \|x_0\|_f$  pentru orice  $t \in T$ . Pentru ca să aibă loc relația  $x_0 \in I(Y, T)$  este necesar și suficient să existe o funcțională  $\varphi$  cu următoarele proprietăți:

- 1°.  $\varphi \in C_f^*$
- 2°.  $\varphi(x_0) = 1$
- 3°.  $Re\varphi(x_0 - x) \leq 0$  oricare ar fi  $x \in Y$ .

**Demonstrație. Necesitatea.** Dacă  $x_0 \in I(Y, T)$ , atunci pe baza propoziției 1  $x_0$  este element de cea mai bună aproximație (din  $Y$ ) al lui  $\theta$ , în sensul normei  $p_f$ . De aici rezultă că există funcționala  $\varphi$  cu proprietățile 1° - 3° (a se vedea [5], teorema 2).

**Suficiența.** Dacă funcționala  $\varphi$  satisface condițiile 1° - 3°, atunci au loc inegalitățile

$$p_f(x_0) = 1 = \varphi(x_0) = Re\varphi(x_0) \leq Re\varphi(x) \leq p_f(x)$$

pentru orice  $x \in Y$ . Din propoziția 1 rezultă că  $x_0 \in I(Y, T)$ .

**Observații.** 1. Dacă  $Y$  este o varietate liniară atunci proprietatea 3° din teorema 1 este echivalentă cu proprietatea

$$3'. \varphi(x_0 - x) = 0 \text{ oricare ar fi } x \in Y.$$

Într-adevăr, dacă spațiul  $X$  este complex și dacă  $Y$  este o varietate liniară, atunci oricare ar fi  $x \in Y$ , au loc relațiile  $2x_0 - x \in Y$  și  $(1-i)x_0 + ix \in Y$ , unde  $i = \sqrt{-1}$ . Dacă se pune  $x_1 = 2x_0 - x$ , atunci  $x_0 - x_1 = -(x_0 - x)$ , deci pe baza proprietății 3° au loc inegalitățile  $Re\varphi(x_0 - x) \leq 0$  și  $-Re\varphi(x_0 - x) \leq 0$ . Prin urmare, are loc egalitatea  $Re\varphi(x_0 - x) = 0$ , oricare ar fi  $x \in Y$ . Dacă pentru  $x \in Y$  se pune  $x_2 = (1-i)x_0 + ix$ , atunci  $x_0 - x_2 = i(x_0 - x)$ , deci  $Re\varphi[i(x_0 - x)] = 0$ . Din egalitatea  $\varphi(z) = Re\varphi(z) - iRe\varphi(iz)$ ,  $z \in X$  rezultă că are loc proprietatea 3'. Din 3' rezultă imediat 3°. Dacă  $X$  este real, atunci afirmația rezultă în mod analog.

2. În cazul cînd  $T$  are un sigur element,  $X$  este real și  $Y$  este o varietate liniară din  $X$ , teorema 1 a fost demonstrată pentru prima dată de I. Singer [7].

2. Fie  $\|\cdot\|$  o normă definită pe  $X$ . Fie  $r > 0$  și

$$S(r) = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$$

$$\mathring{S}(r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

$$S^* = \{\varphi \in X^\#: |\varphi(x)| \leq \|x\| \text{ oricare ar fi } x \in X\}$$

Fie  $x_0, x_1 \in X$  și fie

$$[x_0, x_1] = \{x \in X : x = \alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1, \text{ unde } 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Dacă  $M$  este o mulțime dintr-un spațiu vectorial real sau complex, atunci mulțimea elementelor extremale ale lui  $M$  se notează prin  $\mathcal{E}(M)$ . Fie  $\Lambda$  mulțimea vidă.

**PROPOZIȚIA 2.** *Dacă  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\|x_0\| > 0$  și dacă  $[x_0, x_1] \cap \overset{\circ}{S}(\|x_0\|) = \Lambda$ , atunci există o funcțională  $\varphi$  cu următoarele proprietăți:*

1.  $\varphi \in \mathcal{E}(S^*)$
2.  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$
3.  $\operatorname{Re} \varphi(x_0 - x_1) \leq 0$

*Demonstrație.* Fie  $y, z \in X$  și fie

$$yz = \{x \in X : x = \alpha y + (1 - \alpha)z, \alpha \in R\}$$

Pe  $\theta x_0$  se definește funcționala  $\xi$  în felul următor:  $\xi(x) = \alpha \|x_0\|$  unde  $x = \alpha x_0$ ,  $\alpha \in R$ . Funcționala  $\xi$  este liniară și  $\|\xi\| = 1$ . Funcționala  $\xi$  este extremală, adică este un element extremal de pe sfera unitate a dualului lui  $\theta x_0$ . Într-adevăr, dacă  $\xi(x) = \frac{1}{2} [\xi_1(x) + \xi_2(x)]$  pentru orice  $x \in \theta x_0$ , unde  $\|\xi_1\| = \|\xi_2\| = 1$ ,  $\xi_1 \neq \xi_2$ , atunci din inegalitățile

$$\|x_0\| = \frac{1}{2} [\xi_1(x_0) + \xi_2(x_0)] \leq \frac{1}{2} [|\xi_1(x_0)| + |\xi_2(x_0)|] \leq \|x_0\|$$

rezultă  $\xi_1(x_0) = \xi_2(x_0) = \|x_0\|$ . Dacă  $x = \alpha x_0$ ,  $\alpha \in R$ , atunci din egalitățile  $\xi_1(x) = \alpha \xi_1(x_0)$ ,  $\xi_2(x) = \alpha \xi_2(x_0)$  rezultă că  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , în contradicție cu ipoteza.

Distingem două cazuri.

**Cazul I:**  $x_0 x_1 \cap \overset{\circ}{S}(\|x_0\|) = \Lambda$ . Evident, ecuația lui  $x_0 x_1$  se poate scrie sub forma  $\eta(x) = \|x_0\|$ , unde  $\eta$  este o funcțională liniară definită pe spațiul real

$$x_0 x_1 = \{x \in X : x = \alpha x_0 + \beta x_1, \text{ unde } \alpha, \beta \in R\}$$

și  $\|\eta\| = 1$ . Funcționala  $\eta$  este o prelungire a lui  $\xi$  pe  $x_0 \theta x_1$ . Într-adevăr, oricare ar fi  $x = \alpha x_0$ ,  $\alpha \in R$ , au loc egalitățile  $\eta(x) = \eta(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| = \xi(x)$ .

Fie  $C$  mulțimea numerelor  $c \in R$  pentru care funcționala  $\xi(x) + \beta c$ , definită pe  $x_0 \theta x_1$ , unde fiecare element se reprezintă sub forma  $x + \beta x_1$ ,  $\beta \in R$ ,  $x \in \theta x_0$ , are norma 1. Din teorema lui Hahn-Banach rezultă că  $C \neq \Lambda$ . Mulțimea  $C$  este mărginită și închisă. Fie  $c_0 = \max C$ . Pe spațiul  $x_0 \theta x_1$ , se definește funcționala

$$\chi(z) = \xi(x) + \beta c_0, \text{ unde } z = x + \beta x_1, \beta \in R, x \in \theta x_0 \quad (2)$$

Funcționala  $\chi$  se bucură de următoarele proprietăți.

- a)  $\chi$  este un element extremal de pe sfera unitate a dualului lui  $x_0 \theta x_1$ ,
- b)  $\chi(x_0) = \|x_0\|$ ,
- c)  $\chi(x_0 - x_1) \leq 0$ .

Într-adevăr, dacă  $\chi(z) = \frac{1}{2} [\chi_1(z) + \chi_2(z)]$  pentru orice  $z \in x_0 \theta x_1$ , unde  $\|\chi_1\| = \|\chi_2\| = 1$  și  $\chi_1 \neq \chi_2$ , atunci  $\chi_1(z) = \xi_1(x) + \beta c_1$  și  $\chi_2(z) = \xi_2(x) + \beta c_2$ , pentru orice  $z = x + \beta x_1$ ,  $\beta \in R$ ,  $x \theta x_0$ , funcționalele liniare  $\xi_1, \xi_2$  fiind astfel definite pe  $\theta x_0$  încît  $\|\xi_1\| \leq 1$ ,  $\|\xi_2\| \leq 1$ , iar  $c_1, c_2 \in R$ . Rezultă că  $\xi(x) = \frac{1}{2} [\xi_1(x) + \xi_2(x)]$  pentru orice  $x \in \theta x_0$  și  $c_0 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ . Însă  $\xi$  este o funcțională extremală, deci  $\xi_1 = \xi_2$ . Din  $\chi_1 \neq \chi_2$  rezultă  $c_1 \neq c_2$ . Prin urmare, sau  $c_1 > c_0$ , sau  $c_2 > c_0$ , ceea ce contrazice definiția lui  $c_0$ .

Evident  $\chi(x_0) = \xi(x_0) = \|x_0\|$ . Din relațiile

$$\chi(x_1) = c_0 \geq \eta(x_1), \quad \chi(x_0) = \eta(x_0) = \eta(x_1)$$

rezultă că  $\chi(x_0) \leq \chi(x_1)$

**C a z u l I I:**  $x_0 x_1 \cap S(\|x_0\|) \neq \Lambda$ . Funcționala  $\chi$  definită prin egalitatea (2) se bucură și în acest caz de proprietățile a), b), c). Este suficient să arătăm că proprietatea c) este satisfăcută. Din  $x_0 x_1 \cap S(\|x_0\|) \neq \Lambda$  rezultă că punctul  $x_1$  din  $x_0 \theta x_1$  se situează pe partea opusă a dreptei  $\chi(z) = \|x_0\|$  față de  $\theta$ . Dai  $\chi(\theta) < \|x_0\|$ , deci  $\chi(x_1) \geq \|x_0\|$ . Din  $\chi(x_0) = \|x_0\|$  rezultă că  $\chi(x_0) \leq \chi(x_1)$ .

Fie  $\Phi$  o prelungire extremală a lui  $\chi$  pe spațiul  $X$ . (Existența unei astfel de prelungiri a fost demonstrată de I. S i n g e r [8, 10]. A se vedea și [4]). Funcționala  $\varphi(x) = \Phi(x) - i\Phi(ix)$  se bucură de proprietățile 1° - 3° din enunțul propoziției 2. Într-adevăr, dacă  $\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$ , unde  $\|\varphi_1\| \leq 1$ ,  $\|\varphi_2\| \leq 1$  și  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , atunci  $\Phi(x) = \frac{1}{2} [Re\varphi_1(x) + Re\varphi_2(x)]$  pentru orice  $x \in X$  și  $\|Re\varphi_1\| \leq 1$ ,  $\|Re\varphi_2\| \leq 1$ ,  $Re\varphi_1 \neq Re\varphi_2$ . Aceasta este în contradicție cu faptul că  $\Phi$  este o funcțională extremală.

Din  $|\varphi(x_0)| \leq \|x_0\| = Re\varphi(x_0)$  rezultă că  $Im\varphi(x_0) = 0$ , deci  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ . Proprietatea 3° rezultă din proprietatea c) a funcționalei  $\chi$ .

**3.** Fie  $t \in T$  și

$$S_t^* = \{\varphi \in X^\# : |\varphi(x)| \leq \|x\|_t, \text{ pentru orice } x \in X\}. \quad (3)$$

**PROPOZIȚIA 3.** Oricare ar fi  $\varphi \in \mathcal{S}(C_f^*)$ , există  $t \in T$  și  $\psi \in \mathcal{S}(S_t^*)$ , astfel încît să aibă loc egalitatea

$$\varphi = \frac{1}{f(t)} \psi \quad (4)$$

**Demonstrație.** Fie  $t \in T$ ,  $A_t = \left\{ \frac{1}{f(t)} \psi : \psi \in S_t^* \right\}$  și  $A = \bigcup_{t \in T} A_t$ . Are loc relația  $A \subseteq C_f^*$ . Într-adevăr, dacă  $\varphi \in A_t$ , atunci există  $\psi \in S_t^*$ , astfel încît să aibă loc egalitatea (4). Din inegalitățile

$$|\psi(x)| \leq \|x\|_t = f(t) \frac{\|x\|_t}{f(t)} \leq f(t) p_f(x), \quad x \in X$$

rezultă că  $|\varphi(x)| \leq p_f(x)$  pentru orice  $x \in X$ . Prin urmare,  $\varphi \in C_f^*$ .

Din relația  $A \subseteq C_f^*$  rezultă că învelitoarea convexă și închisă în sensul topologiei  $\sigma(X^*, X)$  a mulțimii  $A$  face parte din  $C_f^*$  adică  $\overline{co}(A) \subseteq C_f^*$ . Aici prin  $X^*$  s-a notat dualul lui  $X$  în sensul normei  $p_f$ .

Dacă  $\varphi_0 \notin \overline{co}(A)$ , atunci pe baza teoremei lui Eidelheit există  $x \in X$  și există numerele reale  $\alpha$  și  $\varepsilon > 0$ , astfel încît

$$Re\varphi_0(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq Re\varphi(x) \text{ oricare ar fi } \varphi \in A.$$

(A se vedea [3] pag. 456, teorema 9 și pag. 452 teorema 10). Fie  $t_0 \in T$  astfel încît  $\frac{\|x\|_{t_0}}{f(t_0)} = p_f(x)$  și fie  $\psi \in S_{t_0}^*$  astfel încît  $\psi(x) = \|x\|_{t_0}$ . Dacă se pune  $\varphi = \frac{1}{f(t_0)} \psi$ , atunci  $\varphi \in A$  și  $Re\varphi(x) = \varphi(x) = p_f(x)$ , deci  $p_f(x) < Re\varphi_0(x)$ . De aici se deduce că  $\varphi_0 \notin C_f^*$ . Din cele de mai sus rezultă că are loc egalitatea  $\overline{co}(A) = C_f^*$ .

Mulțimea  $A$  este închisă în sensul topologiei  $\sigma(X^*, X)$ . Într-adevăr, fie  $(\varphi_i)_{i \in I}$  un șir generalizat din  $A$  convergent către  $\varphi \in X^{\#}$  în sensul topologiei  $\sigma(X^*, X)$ . La orice  $i \in I$  se atașează un element  $t_i \in T$  astfel încît  $\varphi_i \in A_{t_i}$ . Din compactitatea lui  $T$  rezultă că pentru  $(t_i)_{i \in I}$  există un subsir generalizat  $(t_{i_v})$  convergent către un anumit  $t_0 \in T$ . Din continuitatea funcției  $b(t) = \frac{1}{f(t)} \|x\|_t$ ,  $t \in T$ , rezultă că oricare

ar fi  $x \in X$ , are loc egalitatea  $\lim_{i_v} \frac{1}{f(t_{i_v})} \|x\|_{t_{i_v}} = \frac{1}{f(t_0)} \|x\|_{t_0}$ . Pentru orice  $x \in X$  au

loc relațiile  $\lim_{i_v} |\varphi_{i_v}(x)| = |\varphi(x)|$  și  $|\varphi_{i_v}(x)| \leq \frac{1}{f(t_{i_v})} \|x\|_{t_{i_v}}$ , deci  $|\varphi(t)| \leq \frac{1}{f(t_0)} \|x\|_{t_0}$ .

Prin urmare  $\varphi \in A_{t_0} \subseteq A$ . Mulțimea  $C_f^*$  fiind compactă în sensul topologiei  $\sigma(X^*, X)$ , din relația  $A \subseteq C_f^*$  rezultă că  $A$  este compactă în sensul topologiei  $\sigma(X^*, X)$ . Din  $\overline{co}(A) = C_f^*$  rezultă  $\mathcal{S}(C_f^*) \subseteq A$  (a se vedea de exemplu [3], pag. 477 lema 5). Deci oricare ar fi  $\varphi \in \mathcal{S}(C_f^*)$  există  $t \in T$  și  $\psi \in S_t^*$  astfel încît  $\varphi = \frac{1}{f(t)} \psi$ . Dacă ar

exista  $\psi_1, \psi_2 \in S_t^*$ ,  $\psi_1 \neq \psi_2$ , astfel încît să aibă loc egalitatea  $\psi = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2)$ , atunci punînd  $\varphi_1 = \frac{1}{f(t)} \psi_1$  și  $\varphi_2 = \frac{1}{f(t)} \psi_2$ , ar rezulta că  $\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$ , unde  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_f^*$ ,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Prin urmare  $\psi \in \mathcal{S}(S_t^*)$ .

Consecință. Dacă

$$\|x\| = \max_{t \in T} \|x\|_t, \quad x \in X$$

și dacă  $S^*$  este sfera unitate a dualului lui  $X$  față de norma  $\|\cdot\|$ , atunci

$$\mathcal{S}(S^*) \subseteq \bigcup_{t \in T} \mathcal{S}(S_t^*) \tag{5}$$

Observații. 1. În general în relația (5) egalitatea nu are loc. Într-adevăr, fie  $X = R^2$ ,  $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$ ,  $\|x\|_2 = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$  oricare ar fi  $x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ , și fie  $T = \{1, 2\}$ . În acest caz

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S^*) &= \mathcal{S}(S_1^*) = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\} \neq \\ &\neq \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\} = \mathcal{S}(S_2^*) \end{aligned}$$

2. Propoziția 2 este o generalizare a următorului rezultat al lui R. F. Arens și J. L. Kelley [1]: Fie  $X$  un subspațiu al spațiului  $C(Q)$  al tuturor funcțiilor continue definite pe spațiul topologic Hausdorff compact  $Q$ . Pentru orice  $q \in Q$  se definește prin egalitatea

$$\varphi_q(x) = x(q), \quad x \in X$$

funcționala  $\varphi_q$ . În aceste condiții orice funcțională extremală de pe sfera unitate a dualului lui  $X$  față de norma

$$\|x\| = \max_{q \in Q} |x(q)|, \quad x \in X$$

este de forma  $\alpha \varphi_q$ , unde  $|\alpha| = 1$  și  $q \in Q$ .

4. Din propozițiile 2 – 3 se poate deduce următoarea caracterizare a infraelementelor.

**TEOREMA 2.** Fie  $Y$  o submulțime convexă a lui  $X$  și fie  $x_0 \in Y$  astfel încât să aibă loc inegalitatea  $\|x_0\|_t > 0$ , oricare ar fi  $t \in T$ . Pentru ca să aibă loc relația  $x_0 \in I(Y, T)$ , este necesar și suficient ca pentru orice element  $x_1 \in Y$  să existe  $t_0 \in T$  și să existe o funcțională  $\psi$ , astfel încât să fie verificate următoarele condiții:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{S}(S_{t_0}^*) \\ \psi(x_0) = \|x_0\|_{t_0} \\ \operatorname{Re} \psi(x_0 - x_1) \leq 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

**Demonstrație. Necesitatea.** Dacă  $x_0 \in I(Y, T)$  și  $f(t) = \|x_0\|_t$  pentru orice  $t \in T$  atunci pe baza propoziției 1  $x_0$  este element de cea mai bună aproximație (din  $Y$ ) al lui  $\theta$  în sensul normei  $p_f$ . Prin urmare, dacă se pune  $\|\cdot\| = p_f(\cdot)$ , atunci oricare ar fi  $x_1 \in Y$ , are loc egalitatea  $[x_0, x_1] \cap \mathring{S}(\|x_0\|) = \Lambda$ . Deci există o funcțională  $\varphi$  care se bucură de proprietățile 1° – 3° din propoziția 2. Din propoziția 3 rezultă că există  $t_0 \in T$  și  $\psi \in \mathcal{S}(S_{t_0}^*)$ , astfel încât să aibă loc egalitatea (4). Din egalitățile

$$\frac{1}{\|x_0\|_{t_0}} \psi(x_0) = \varphi(x_0) = p_f(x_0) = 1$$

se deduce că funcționala  $\psi$  satisface condițiile (6).

**Suficiența.** Din condițiile (6) rezultă

$$\|x_0\|_{t_0} = \psi(x_0) = \operatorname{Re} \psi(x_0) \leq \operatorname{Re} \psi(x_1) \leq |\psi(x_1)| \leq \|x_1\|_{t_0}$$

Prin urmare, dacă se pune  $f(t) = \|x_0\|_t$  pentru orice  $t \in T$ , atunci  $p_f(x_0) \leq p_f(x_1)$ . Se deduce că  $x_0$  este element de cea mai bună aproximație (din  $Y$ ) a lui  $\theta$  în sensul normei  $p_f$ . Din propoziția 1 rezultă  $x_0 \in I(Y, T)$ .

**Observație.** În cazul cînd  $T$  are un singur element și  $Y$  este o varietate liniară din  $X$ , teorema 2 a fost demonstrată de I. Singer [9], [10] și de G. Choquet [2]. În cazul cînd  $T$  are un singur element și  $Y$  este o mulțime convexă din  $X$ , teorema 2 a fost demonstrată de A. L. Garkavi [4].

## BIBLIOGRAFIE

1. R. F. Arens — J. L. Kelley, *Characterizations of the Space of Continuous Functions over a Compact Hausdorff Space*, Trans. Amer. Math. Soc., 1947, **62**, 499—508.
2. G. Choquet, *Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés*, Rev. Math. pures appl., 1963, **8**, 541—542.
3. N. Dunford — J. Schwartz, *Linear Operators, Part. I: General Theory*. Interscience Publishers, 1958. (Traducere în limba rusă).
4. A. L. Garkavi, *O kriterii elementa nailucisego približenia*. Sibirsk. mat. jurnal, 1964, 472—476.
5. S. Ia. Havinson, *Ob aproksimații elementami vîpuklîh množestv*. DAN SSSR 1967, **172**, 294—297.
6. I. Kolumbán, *Sur un problème d'approximation optimale*, Mathematica, 1966, **8(31)**, 267—273.
7. I. Singer, *Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque*. Acta Sci. Math., 1956, **17**, 181—189.
8. I. Singer, *Sur l'extension des fonctionnelles linéaires*. Rev. math. pures appl. 1956, **1**, 99—106.
9. I. Singer, *Choquet Spaces and Best Approximation*. Math. Ann., 1962, **148**, 330—340.
10. I. Singer, *On the Extension of Continuous Linear Functionals and Best Approximation in Normed Linear Spaces*, Math. Ann., 1965, **159**, 344—355.

## О ХАРАКТЕРИСТИКЕ ИНФРАЗЭЛЕМЕНТОВ

(Резюме)

Пусть  $X$  — действительное или комплексное векторное пространство и  $T$  — компактное топологическое пространство Хаусдорфа. К любому элементу  $t$  из  $T$  присоединяется полунорма  $\|\cdot\|_t$ , определяемая на  $X$ , со следующими свойствами: а) какой бы ни была  $x \in X$ , функция  $a(t) = \|x\|_t$  непрерывна на  $T$ , б) для любой  $x \in X$ ,  $x \neq \theta$ , существует  $t \in T$  так, чтобы  $\|x\|_t > 0$ . Пусть  $Y \subset X$  так, чтобы  $\theta \notin Y$ .

*Определение.*  $x_0$  из  $Y$  называется инфраэлементом по отношению к  $Y$  и к семейству полунорм  $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in T}$ , если для любой  $x \in Y$  существует  $t \in T$  так, чтобы имели место неравенства (1). Множество инфраэлементов обозначается через  $I(Y, T)$ .

*Теорема 2.* Пусть  $Y$  выпуклое множество пространства  $X$  и  $x_0 \in Y$  так, чтобы имело место неравенство  $\|x_0\|_t > 0$  какой бы ни была  $t \in T$ . Для того, чтобы имело место отношение  $x_0 \in I(Y, T)$  необходимо и достаточно, чтобы для любой  $x_1 \in Y$  существовало  $t_0 \in T$  и функционал  $\psi$  так, чтобы были удовлетворены условия (6), где  $\mathfrak{S}(S_{t_0}^*)$  — множество крайних элементов множества  $S_{t_0}^*$ , определяемых равенством (3).

## SUR LA CARACTÉRISATION DES INFRAÉLÉMENTS

(Résumé)

Soit  $X$  un espace vectoriel réel ou complexe et soit  $T$  un espace topologique Hausdorff compact. A chaque élément  $t$  de  $T$  on attache une semi-norme  $\|\cdot\|_t$ , définie pour  $X$  et possédant les propriétés suivantes: а) quel que soit  $x \in X$ , la fonction  $a(t) = \|x\|_t$  est continue en  $T$ ; б) pour tout  $x \in X$ ,  $x \neq \theta$ , il existe  $t \in T$  tel que  $\|x\|_t > 0$ . Soit  $Y \subset X$  tel que  $\theta \notin Y$ .

*Définition.*  $x_0$  de  $Y$  est appelé infraélément par rapport à  $Y$  et à la famille de semi-normes  $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in T}$  si pour chaque  $x \in Y$  il existe  $t \in T$  tel qu'ait lieu les inégalités (1). L'ensemble des infraéléments a pour notation  $I(Y, T)$ .

*Théorème 2.* Soit  $Y$  un ensemble convexe de  $X$  et soit  $x_0 \in Y$  tel qu'ait lieu l'inégalité  $\|x_0\|_t > 0$  quel que soit  $t \in T$ . Pour qu'ait lieu la relation  $x_0 \in I(Y, T)$  il est nécessaire et suffisant que pour tout  $x_1 \in Y$  il existe  $t_0 \in T$  et une fonctionnelle  $\psi$  telle que soient satisfaites les conditions (6), où  $\mathfrak{S}(S_{t_0}^*)$  est l'ensemble des éléments extrémaux de l'ensemble  $S_{t_0}^*$  défini par l'égalité (3).





## ASUPRA UNOR FORMULE DE CUADRATURĂ DE TIP GAUSS

de

PARASCHIVA PAVEL

1. Se consideră formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{r_i-1} A_i^{(k)} f^{(k)}(x_i) + R \quad (1)$$

unde  $p(x)$  este o funcție continuă în  $[a, b]$  și pozitivă în  $(a, b)$ , iar  $f(x)$  o funcție de clasa  $C^N[a, b]$ , unde

$$N = \sum_{i=1}^n [r_i + 1] \quad (2)$$

$n > 0$ ,  $r_k > 0$  fiind niște numere întregi date, iar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noduri situate în interiorul intervalului  $(a, b)$ .

În această lucrare se vor determina nodurile, coeficienții și restul formulei de cuadratură (1) astfel încît gradul său de exactitate să fie  $N - 1$ ; folosind metoda descrisă de D. V. Ionescu în [3].

Această problemă a mai fost studiată pe altă cale de T. Popoviciu [6] și L. Tchakaloff [11].

**2. TEOREMA 1.** Formulele de cuadratură (1) cu gradul de exactitate  $N - 1$ , pot exista numai dacă toate numerele  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sînt numere impare.

Pentru a demonstra această teoremă presupunem că numerele  $r_i, r_{i+1}, \dots, r_n$  sînt numere pare, iar  $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}$  sînt numere impare ( $1 < i$ ). Înlocuind în (1)  $f(x)$  prin

$$P(x)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})$$

unde

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{r_i} \quad (3)$$

obținem

$$\int_a^b p(x) P(x)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) dx = 0. \quad (4)$$

Dar egalitatea (4) nu poate avea loc, deoarece funcția de sub semnul de integrare este pozitivă pentru orice  $x \in (a, b)$ . Teorema este astfel demonstrată.





unde prin  $P(x)$  s-a notat polinomul (3), se obține sistemul de ecuații algebrice cu necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\int_a^b p(x) x^h P(x) dx = 0 \quad h = 0, 1, \dots, n-1. \quad (15)$$

Existența soluției acestui sistem de ecuații algebrice a fost demonstrată de T. Popoviciu [6].

În cazul când ordinele de multiplicitate ale nodurilor sînt egale între ele, adică

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = 2k - 1$$

P. Turan [10] a arătat că această soluție este și unică.

7. Pentru determinarea coeficienților  $A_k^{r_k-1}$  se înlocuiește în (1)

$$f(x) = (x - x_1)^{r_1-1} (x - x_2)^{r_2-1} \dots (x - x_n)^{r_n-1} x^h, \quad h = 0, 1, \dots, n \quad (16)$$

și se obține sistemul de ecuații algebrice

$$(r_1 - 1)! x_1^h (x_1 - x_2)^{r_2-1} \dots (x_1 - x_n)^{r_n-1} A_1^{(r_1-1)} + \dots + (r_n - 1)! x_n^h (x_n - x_1)^{r_1-1} \dots \\ \dots (x_n - x_{n-1})^{r_{n-1}-1} A_n^{r_n-1} = \int_a^b p(x) (x - x_1)^{r_1-1} \dots (x - x_n)^{r_n-1} x^h dx \quad h = 0, 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

al cărui determinant este diferit de zero, adică sistemul de ecuații (17) are soluție unică.

Procedînd în același mod pentru determinarea coeficienților  $A_k^{(r_k-2)}$  adică înlocuind în formula (1)

$$f(x) = (x - x_1)^{r_1-2} \dots (x - x_n)^{r_n-2} x^h \quad h = 0, 1, \dots, n-1,$$

se obține un sistem de ecuații algebrice de aceeași formă cu sistemul de ecuații (17), cu determinantul diferit de zero. În membrul al doilea al sistemului vor intra și termeni care conțin coeficienții  $A_k^{(r_k-1)}$  deja determinați.

Notăm cu  $r_s$  cel mai mic dintre numerele  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Pentru a determina coeficienții  $A_k^{(r_k-r_s)}$  se va înlocui în (1).

$$f(x) = (x - x_1)^{r_1-r_s} \dots (x - x_s)^0 \dots (x - x_n)^{r_n-r_s} x^h \quad h = 0, 1, \dots, n-2$$

și se va obține un sistem de ecuații lineare, cu determinantul diferit de zero.

Pentru a determina coeficienții următori  $A_k^{(r_k-r_s-1)}$  se înlocuiește în formula (1)

$$f(x) = (x - x_1)^{r_1-r_s-1} \dots (x - x_{s-1})^{r_{s-1}-r_s-1} (x - x_{s+1})^{r_{s+1}-r_s-1} \dots (x - x_n)^{r_n-r_s-1}$$

adică cu o expresie care nu mai conține pe  $x - x_s$ . Procedînd în acest mod se pot determina din aproape în aproape toți coeficienții formulei de cuadratură (1).

În felul acesta sistemul de ecuații (12) este rezolvat, iar funcțiile  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$  sînt complet determinate.

8. **TEOREMA 2.** Funcția  $y = \varphi(x)$  dată de soluția sistemului de ecuații diferențiale (5) cu condițiile de limită (6), este pozitivă în intervalul  $(a, b)$ .

Demonstrarea acestei teoreme se bazează pe următoarele leme:

*Lema 1.* Presupunând că  $N - r'_1 - 1$  și  $N - r'_i - 1 < N - r'_2 - 1 \dots, N - r'_{i-1} - 1$ , numărul zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-r'_i-1)}(x)$  în intervalul  $[x'_1, x'_i)$  este cel mult

$$m = (r'_1 + 1) + (r'_2 + 1) + \dots + \dots + (r'_{i-1} + 1)$$

iar ale lui  $\varphi^{(N-r'_i-1)}(x)$  în intervalul  $[x'_1, x'_i)$  este cel mult

$$m' = (r'_2 + 1) + (r'_3 + 1) + \dots + (r'_i + 1).$$

*Lema 2.* Dacă  $x_i$  este nodul care corespunde la cel mai mic dintre  $N - r_1 - 1, N - r_2 - 1, \dots, N - r_n - 1$  și dacă la stînga lui  $x_i$  nici unul dintre numerele  $N - r - 1$  corespunzătoare nodurilor de la stînga lui  $x_i$  nu este egal cu  $N - r_i - 1$ , atunci numărul zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  în intervalul  $(a, x_i)$  este cel mult

$$m = (r_1 + 1) + \dots + (r_{i-1} + 1).$$

*Lema 3.* Lema 2 este valabilă și dacă unele dintre numerele  $N - r_1 - 1, \dots, N - r_n - 1$  sînt egale între ele și sînt mai mici decît celelalte numere  $N - r_1 - 1, \dots, N - r_n - 1$ .

*Lema 4.* În mod analog cu lemele 2 și 3, numărul zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  în intervalul  $[x_i, b)$  este cel mult

$$(r_{i+1} + 1) + (r_{i+2} + 1) + \dots + (r_n + 1)$$

Demonstrarea acestor leme se face prin metoda inducției complete, ea fiind analogă cu demonstrația folosită în [3] p. 201.

*Lema 5.* Numărul total al zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  din intervalul  $(a, b)$  este

$$N - (r_i + 1)$$

Într-adevăr datorită lemelor 2, 3, 4 numărul zerourilor lui  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  este

$$m = N - (r_i + 1)$$

**TEOREMA 3.** Funcția  $y = \varphi(x)$  păstrează un semn constant în intervalul  $(a, b)$ .

Pentru a demonstra acest lucru, presupunem contrarul, și anume că  $\varphi'(x)$  s-ar anula în două puncte  $\xi_1, \xi_2$  din intervalul  $(a, b)$ .

Să presupunem că  $N - r_{i1} - 1$ , este cel mai mic dintre numerele

$$N - r_1 - 1, \dots, N - r_n - 1$$

Deoarece funcția  $\varphi(x)$  este continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul  $N - r_i - 1$ , înseamnă că  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  (ținînd seama de condițiile (6) și aplicînd teorema lui Rolle) s-ar anula în  $N - r_i$  puncte din intervalul  $(a, b)$ . Acest lucru nu este posibil; lema 5 a arătat că numărul zerourilor posibile ale lui  $\varphi^{(N-r_i-1)}(x)$  este  $N - r_i - 1$ , adică cu unul mai puțin decît acela la care s-a ajuns prin presupunerea că ar avea două zerouri în intervalul  $(a, b)$ .

*Demonstrarea teoremei 2.* Se observă că funcțiile  $\varphi_1(x)$  și  $\varphi_n(x)$  date de relațiile (9)

$$\varphi_1(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{N-1}}{(N-1)!} p(s) ds, \quad \varphi_n(x) = \int_b^x \frac{(x-s)^{N-1}}{(N-1)!} p(s) ds$$

sînt pozitive în intervalul  $(a, x_1)$  respectiv  $(x_n, b)$ .

Ținînd seama de teorema 3 și de această observație, se deduce că funcția  $\varphi(x)$  este pozitivă în intervalul  $(a, b)$ . Acest rezultat a mai fost stabilit pe altă cale și de L. Tchakaloff.

9. Restul în formula de cuadratură (1) este

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(N)}(x) dx \quad (8)$$

unde funcția  $\varphi(x)$  coincide pe rînd cu funcțiile  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$  date de relațiile (9).

Pe baza teoremei mediei avem

$$R = f^{(N)}(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Notînd

$$M_N \leq \sup_{(a,b)} |f^{(N)}(x)|$$

avem

$$|R| \leq M_N K \quad (9)$$

unde

$$K = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Pentru a calcula valoarea lui  $K$ , înlocuim în formula (1)

$$f(x) = \frac{1}{N!} (x - x_1)^{r_1+1} (x - x_2)^{r_2+1} \dots (x - x_n)^{r_n+1}$$

și obținem

$$K = \frac{1}{N!} \int_a^b p(x) (x - x_1)^{r_1+1} \dots (x - x_n)^{r_n+1} dx$$

(Intrat în redacție la 6 iunie 1967)

## BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Krylov, I. T. Šulgiņa, *Spravočnaja kniga po cislennomu integririvaniju*. Moskva, 1966.
2. A. Gizetti, *Sulle formule di quadratura*. „Rendiconti del Sem. Mat. e Fisico di Milano”, XXVI (1954–1955) pp. 45–60.
3. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, București, 1957.
4. D. V. Ionescu, *Restul în formula de cuadratură a lui Gauss și P. Turan*. Comunicare prezentată la „Colocviul de teoria funcțiilor convexe cu aplicații la calcul numeric” Cluj, 1965.
5. A. Ossicini, *Costruzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano*, „Annali matematica”, LXXII (1966) pp. 213–237.
6. T. Popoviciu, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, „Studii și cerc. șt., Iași”, 1–2 (1955), pp. 29–57.
7. J. Radon, *Restausdrucke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integral*. Monatsh. Math. Phys.” 42 (1935), pp. 389–96.
8. D. D. Stancu, *Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel*, „Mathematica” 24, (1959) pp. 167–182.
9. A. H. Stroud, D. D. Stancu, *Quadrature Formulas with Multiple Gaussian Nodes*. „J. S. Am. Numer. Anal.” Ser. B. 2 (1966) nr. 1, 1966.
10. P. Turan, *On the Theory of the Mechanical Quadrature*” Acta Sci. Math. (Szeged) 12, 1950.
11. L. Tchakaloff, *General Quadrature Formulas of Gaussian Type* „Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst.” 1, (1954) pp. 67–84.

## О НЕКОТОРЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ТИПА ГАУССА

## (Резюме)

В статье построены квадратурные формулы (1) с помощью функции  $\varphi(x)$ , совпадающей в интервалах  $[x_{i-1}, x_i]$  с функциями  $\varphi_i(x)$ ,  $i=1, 2, \dots, n+1$ , данными решениями дифференциальных уравнений (5), которые удовлетворяют граничным условиям (6).

Определяются коэффициенты, узлы и остаток этой формулы, так, чтобы её степень точности была  $N-1 = \sum_{i=1}^n (r_i + 2) - 1$ .

Остаток формулы поставлен в виде определённого интеграла

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(N)}(x) dx$$

и показывается (теорема 2), что функция  $\varphi(x)$  является положительной в интервале  $(a, b)$ .

На основе этих результатов получается для остатка оценка (9).

## SUR CERTAINES FORMULES DE QUADRATURE DE TYPE GAUSS

(R é s u m é)

L'auteur du présent travail construit les formules de quadrature (1) à l'aide de la fonction  $\varphi(x)$  qui coïncide dans les intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  avec les fonctions  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , données par les solutions des équations différentielles (5) satisfaisant aux conditions à la limite (6).

On détermine les coefficients, les noeuds et le reste de cette formule de manière que son degré d'exactitude soit  $N - 1 = \sum_{i=1}^n (r_i + 2) - 1$ .

Le reste de la formule est mis sous forme d'intégrale définie

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(N)}(x) dx$$

montrant (théorème 2) que la fonction  $\varphi(x)$  est positive dans l'intervalle  $(a, b)$ .

En partant de ces résultats on obtient pour le reste l'évaluation (8).



## ON A CONNECTION BETWEEN THE CHAPLYGIN AND NEWTON METHODS

by  
**E. SCHECHTER**

As it was remarked by many authors (see e.g. [3], [4]) there exists a close connection between the Newton and Chaplygin methods for ordinary differential equations. In this paper we show that in some cases the Chaplygin method for difference analogues of partial differential equations coincides with the Newton method. We shall be concerned with the backward difference equation for the parabolic equation:

$$z_t = z_{xx} - f(x, t, z) \quad (1)$$

with the first Fourier problem. Our considerations may also be extended to other equations and difference methods, provided that the required difference inequalities hold.

Consider in the  $xOt$  plane a rectangular lattice of points and let  $h$  and  $k$  be the increments of the independent variables  $x, t$ . Let  $\Pi$  denote a connected and bounded set of lattice points. Let  $[x_0, x_e]$  be the smallest interval containing the projection of  $\Pi$  on  $Ox$ , and  $[t_0, t_e]$  the corresponding interval on the  $Ot$  axis. The coordinates of points  $(x_i, t_j) \in \Pi$  are:

$$x_j = x_0 + jh, \quad t_i = t_0 + ik$$

where  $0 \leq j \leq p, 0 \leq i \leq q$ ,  $p, q$  are fixed integers. Throughout the paper  $w_{ij}$  will stand for a discrete function defined on  $\Pi$ . For its differences we shall use the following notations:

$$\begin{aligned} \Delta w_{j,i+1} &= w_{j,i+1} - w_{ji}, & \delta w_{ji} &= w_{j+1,i} - w_{j-1,i} \\ \nabla^2 w_{j+1,i} &= w_{j+1,i} - 2w_{ji} + w_{j-1,i}. \end{aligned}$$

We shall consider a partition of  $\Pi$ ;  $\Pi = \Pi_I \cup \Pi_R$ , into the set  $\Pi_I$  of interior points and the set  $\Pi_R$  of boundary points. The set  $\Pi_I$  is supposed to have the following property: If  $(x_j, t_i) \in \Pi_I$  then

$$(x_j, t_{i-1}), (x_{j-1}, t_i) \text{ and } (x_{j+1}, t_i) \in \Pi.$$

Now, let us consider the following problem :

$$\frac{\Delta w_{ji}}{k} = \frac{\nabla^2 w_{j+1,i}}{h^2} + f(x_j, t_i, w_{ji}), \quad (x_j, t_i) \in \Pi_I \quad (2)$$

$$w_{ji} |_{\Pi_R} = W_{ji}, \quad (3)$$

$W_{ji}$  being given on  $\Pi_R$ .

The following lemma due to R. Krawczyk [2] is fundamental to our purpose.

LEMMA 1. Suppose that

1° The function  $f(x, t, z)$  is defined on the domain :

$$x \in [x_0, x_e], \quad t \in [t_0, t_e], \quad z \text{ arbitrary.} \quad (4)$$

2° There is a constant  $C \geq 0$  such that

$$f(x_j, t_i, \bar{z}) - f(x_j, t_i, z) \leq C(\bar{z} - z)$$

for  $(x_j, t_i) \in \Pi_I$  and  $\bar{z} \geq z$ .

3°  $kC < 1$ .

4°  $v_{ji}$  and  $V_{ji}$  are defined on  $\Pi$  and satisfy the inequalities :

$$\frac{\Delta v_{ji}}{k} \leq \frac{\nabla^2 v_{j+1,i}}{h^2} + f(x_j, t_i, v_{ji})$$

on  $\Pi$

$$\frac{\Delta V_{ji}}{k} \geq \frac{\nabla^2 V_{j+1,i}}{h^2} + f(x_j, t_i, V_{ji})$$

and

$$v_{ji} \leq w_{ji} \leq V_{ji} \text{ on } \Pi_R.$$

Under these assumptions on the whole domain  $\Pi$

$$v_{ji} \leq w_{ji} \leq V_{ji}.$$

Here  $w_{ji}$  is a solution of the problem (2), (3).

The monotonic convergence of the Chaplygin—Newton sequence is stated in :

THEOREM 1. 1°. Let  $u_{ji}^{(0)}$  be a function defined on  $\Pi$  for which

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(0)}}{k} = \frac{\nabla^2 u_{j+1,i}^{(0)}}{h^2} + f(x_{j\Pi}, t_i, u_{ji}^{(0)}) \text{ on } \Pi_I \quad (5)$$

$$u_{ji}^{(0)} |_{\Pi_R} \leq W_{ji}.$$

2° Suppose that  $v_{ji}$  satisfies on  $\Pi_I$  the inequality

$$\frac{\Delta v_{ji}}{k} \geq \frac{\nabla^2 v_{j+1,i}}{h^2} + f(x_j, t_i, v_{ji}) \quad (6)$$

and

$$v_{ji} |_{\Pi_R} \geq W_{ji}.$$

3° There exists  $f_z(x, t, z)$  on (4) and it is non-decreasing in  $z$ . Let  $C \geq 0$  be such that for  $(x_j, t_i) \in \Pi_I$

$$f_z(x_j, t_i, u_{ji}) \leq C \text{ on } \Pi.$$

Assume that  $kC < 1$ .

4° Define the sequence  $u_{ji}^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , by

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(n)}}{k} = \frac{\nabla^2 u_{j+1,i}^{(n)}}{h^2} + f_z(x_j, t_i, u_{ij}^{(n-1)})(u_{ji}^{(n)} - u_{ji}^{(n-1)}) + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) \quad \text{on } \Pi_I$$

and 
$$u_{ji}^{(n-1)}|_{\Pi_R} \leq u_{ji}^{(n)}|_{\Pi_R} \leq W_{ji} \quad (7)$$

Then

a)  $u_{ji}^{(n)} \leq u_{ji}^{(n-1)} \leq \dots \leq u_{ji}^{(1)} \leq \dots$  on  $\Pi$ .

b)  $\frac{\Delta u_{ji}^{(0)}}{k} \leq \frac{\nabla^2 u_{ji}^{(1)}}{h^2} + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)})$  on  $\Pi_I$ , for  $n = 1, 2, \dots$

c) The sequence  $u_{ji}^{(n)}$   $n = 0, 1, 2, \dots$  converges to a function  $w_{ji}$  which is a solution of the problem (2), (3).

*Proof:* For  $n = 1$ ,

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(1)}}{k} = \frac{\Delta^2 u_{ji}^{(1)}}{h^2} + f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)})(u_{ji}^{(1)} - u_{ji}^{(0)}) + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)}) \quad \text{on } \Pi_I.$$

By Lemma 1, taking into account that:

$$u^{(0)} \leq u_{ji}^{(1)} \quad \text{on } \Pi_R,$$

it follows that

$$u_{ji}^{(0)} \leq u_{ji}^{(1)} \quad \text{on } \Pi.$$

Since  $f_z$  is non-decreasing in  $z$ , we get from the mean value theorem:

$$f(x_j, t_i, u_{ji}^{(1)}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)}) \geq f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)})(u_{ji}^{(1)} - u_{ji}^{(0)})$$

and 
$$\frac{\Delta u_{ji}^{(1)}}{k} \leq \frac{\nabla^2 u_{ji}^{(1)}}{h^2} + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(1)}).$$

Assume a), b) to hold for an arbitrary  $n$  and prove them for  $n + 1$ .

From

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(n)}}{k} \leq \frac{\nabla^2 u_{ji}^{(n)}}{h^2} + f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)})(u_{ji}^{(n)} - u_{ji}^{(n-1)}) + f(x_j, t_j, u_{ji}^{(n-1)}) \quad \text{on } \Pi_I.$$

and 
$$u_{ji}^{(n)} \leq u_{ji}^{(n+1)} \quad \text{on } \pi_R,$$

we have according to Lemma 1:

$$u_{ji}^{(n)} \leq u_{ji}^{(n+1)} \quad \text{on } \Pi.$$

Since  $f_z$  is non-decreasing in  $z$ ,

$$f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n+1)}) \geq f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) + f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)})(u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)}),$$

and consequently

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(n+1)}}{k} \leq \frac{\nabla^2 u_{ji}^{(n+1)}}{h^2} + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n+1)}) \quad \text{on } \Pi_I.$$

To prove c) we notice that  $u_{ji}$  is monotonic and in virtue of Lemma 1 bounded by  $v_{ji}$ . By letting  $n \rightarrow \infty$  in (7) we see that  $w_{ji}$  is a solution of (2), (3). This completes the proof.

*Remark 1.* A similar theorem may be stated for a sequence of approximations nonincreasingly convergent to the solution.

LEMMA 2. 1° Suppose the conditions 1°, 2°, 3°, of Lemma 1 to be valid. Denote by  $w_{ji}$  a solution of (2), (3).

2° Let  $u_{ji}$  be a function defined on  $\Pi$  and  $D$  a constant such that :

$$\left| \frac{\Delta u_{ji}}{k} - \frac{\nabla^2 u_{i+1,i}}{h^2} - f(x_j, t_i, u_{ji}) \right| \leq D \quad \text{on } \Pi_I \quad (8)$$

and  $u_{ji} = W_{ji}$  on  $\Pi$ .

Then

$$|w_{ji} - u_{ji}| \leq \omega D$$

where :

$$\omega = \frac{1}{C} e^{-c(t_e - t_0)}$$

*Proof:* Recall that  $C$  is the constant appearing in condition 2° of Lemma 1. Let  $P_i, i = 1, 2, \dots, q$  be a system of numbers such that :

$$\frac{\Delta P_i}{k} = C P_i + D, \quad P_0 = 0$$

and prove that

$$|u_{ji} - w_{ji}| \leq P_i \quad \text{on } \Pi.$$

We shall show e.g. that

$$u_{ji} - w_{ji} \leq P_i.$$

By 2°,

$$\frac{\Delta u_{ji}}{k} - \frac{\Delta^2 u_{j+1,i}}{h^2} - f(x_j, t_i, u_{ji}) \leq D \quad \text{on } \Pi_I.$$

Since

$$-f(x_j, t_i, u_{ji}) + C P_i \geq -f(x_j, t_i, u_{ji} - P_i)$$

and  $\nabla^2 P_i = 0$ , we get by subtraction :

$$\frac{\Delta(u_{ji} - P_i)}{k} - \frac{\nabla^2(u_{j+1,i} - P_i)}{h^2} - f(x_j, t_i, u_{ji} - P_i) \leq 0.$$

Consequently taking into account that  $w_{ji}$  is a solution of (2), (3) we have according to Lemma 2,

$$u_{ji} - P_i \leq w_{ji}.$$

In the same way

$$-P_i \leq u_{ji} - w_{ji}.$$

By straightforward computation it follows that :

$$P_i = \frac{D[(1 - kC)^{-i} - 1]}{C} \leq \frac{D}{C} [e^{-kCi} - 1] \leq \frac{D}{C} e^{-c(t_e - t_0)}. \quad \text{Q. e. d.}$$

*Corollary 1.* If conditions 1°, 2°, 3° of Lemma 1 are verified, then the problem (2), (3) has an unique solution.

Indeed, if  $w_{ji}$  is a solution, then another solution  $w'_{ji}$  will satisfy (8) with  $D = 0$  and therefore  $w_{ji} - w'_{ji} = 0$ .

*Remark 2.* Since assumptions of Theorem 1 imply those of Lemma 1,  $v_{ji}$  defined in condition 2° of this theorem, may be replaced by any function equal or greater than the unique solution  $w_{ji}$ .

**THEOREM 2.** If 1° Conditions of Theorem 1 are satisfied.

2°  $f_{zz}$  exists and is bounded by a constant  $K$  for  $(x_j, t_i) \in \Pi$  and

$$u_{ji}^{(0)} \leq z_{ji} \leq w_{ij}.$$

Then, there exists a constant  $H$  such that,

$$|w_{ji} - u_{ji}^{(0)}| \leq \frac{H}{2^{2^n}} \text{ on } \Pi,$$

provided that

$$|w_{ji} - u_{ji}^{(0)}| \leq \frac{H}{2}.$$

*Proof:* Note that if we know a function to satisfy (5) the function  $u_{ji}$  in the last inequality may be found by successive approximation.

First, let us show that for any  $n$

$$\left| \frac{\Delta w_{ji}}{k} - \frac{\nabla^2 w_{ji}}{h^2} - f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) (w_{ji} - u_{ji}^{(n-1)}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) \right| \leq K (w_{ji} - u_{ji}^{(n-1)})^2. \quad (9)$$

Indeed, by adding  $f(x_j, t_i, w_{ji}) - f(x_j, t_i, w_{ji})$  under the absolute value, we get:

$$|f(x_j, t_i, w_{ji}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) - f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) (w_{ji} - u_{ji}^{(n-1)})| \leq K (w_{ji} - u_{ji}^{(n-1)})^2.$$

Now, the theorem may be proved by induction.

For  $n = 1$ , inequality (9) becomes:

$$\left| \frac{\Delta w_{ji}}{k} - \frac{\nabla^2 w_{ji}}{h^2} - f_z(x_j, t_i, w_{ji}^{(0)}) (w_{ji} - u_{ji}^{(0)}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(0)}) \right| \leq \frac{1}{2^2 K \omega^2}.$$

Hence, from Lemma 2 with  $D = 1/2^2 K \omega^2$ , it follows that:

$$|w_{ji} - u_{ji}^{(0)}| \leq \frac{1}{2^2 K \omega} = \frac{H}{2^2}.$$

Assume now the property to be true for an arbitrary  $n$ .  
According to the same inequality (9):

$$\left| \frac{\Delta w_{ji}}{k} - \frac{\nabla^2 w_{ji}}{h^2} - f_z(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) (w_{ji} - u_{ji}^{(n)}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) \right| \leq K (w_{ji} - u_{ji}^{(n)})^2.$$

Thus from Lemma 2 with  $D = 1/2^2 K \omega^2$

$$|w_{ji} - u_{ji}^{(n-1)}| \leq \frac{H}{2^{2^{n-1}}}.$$

This completes the proof.

*Remark 3.* Inequalities  $u_{ji}^{(0)} \leq z_{ji} \leq w_{ji}$  may be replaced by  $u_{ji}^{(0)} \leq z_{ji} \leq v_{ji}$  where  $v_{ji}$  is an upper function defined as in (6).

**THEOREM 3.** 1°. Suppose conditions of Theorem 2 to be valid.

2°. There are numbers  $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, q$  such that:

$$u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)} \leq \varepsilon_i \text{ on } \Pi.$$

Then

$$|w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}| \leq P_i,$$

where  $P_i$  satisfies the inequality:

$$\frac{\Delta P_i}{k} \geq C P_i + K \varepsilon_i^2, \quad P_0 = 0. \quad (10)$$

*Proof:* Consider the problem:

$$\frac{\Delta W_{ji}}{k} - \frac{\nabla^2 W_{ji}}{h^2} - C W_{ji} = 0 \text{ on } \Pi_R, \quad (11)$$

$$W_{ji} = 0 \text{ on } \Pi_R,$$

having only the null solution. Substituting  $w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}$  in (11) we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)})}{k} - \frac{\nabla^2(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)})}{h^2} - C(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}) = f(x_j, t_i, w_{ji}) - \\ & - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) - C(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}) - f_x(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)})(u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)}) = f(x_j, t_i, w_{ji}) - \\ & - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n+1)}) - C(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}) + f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n+1)}) - f(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) - \\ & - f_x(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)})(u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)}) \leq f_{xx}(x_j, t_i, u_{ji}^{(n)}) + \theta(u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)})(u_{ji}^{(n+1)} - u_{ji}^{(n)})^2. \\ & 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Consequently

$$\frac{\Delta(u_{ji} - u_{ji}^{(n+1)})}{k} - \frac{\nabla^2(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)})}{h^2} - C(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)}) \leq K \varepsilon_i^2. \quad (12)$$

Subtracting now (10) from (12) we get, since  $\nabla^2 P_i = 0$ :

$$\frac{\Delta(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)} - P_i)}{k} - \frac{\nabla^2(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)} - P_i)}{h^2} - C(w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)} - P_i) \leq 0.$$

Comparing  $w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)} - P_i$  with the null solution of (11) we get by Lemma 1:

$$w_{ji} - u_{ji}^{(n+1)} - P_i \leq 0,$$

which is the desired result.

The above results may be extended to weakly connected difference systems:

$$\frac{\Delta w_{ji}^v}{k} - \frac{\nabla^2 w_{j+1,i}^v}{h^2} + f_v(x_j, t_i, w_{ji}) \quad v = 1, 2, \dots, m. \text{ on } \Pi_R.$$

and  $w_{ji} = W_{ji}$  on  $\Pi_R$ .

Here  $w_{ji}$  stands for the vector-function  $(w_{ji}^1, w_{ji}^2, \dots, w_{ji}^m)$  defined on  $\Pi$ . The following lemma is a generalization of Lemma 1.

LEMMA 3. 1°. The functions  $f_\nu(x, t, z)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  are defined on the domain:

$$x_0 \leq x \leq x_e, t_0 \leq t \leq t_e, z \text{ arbitrary.}$$

2° There exists a constant  $C > 0$  such that:

$$f_\nu(x_j, t_i, \bar{z}) - f_\nu(x_j, t_i, z) \leq C \sum_{k=1}^m (\bar{z}_k - z_k),$$

for  $\nu = 1, 2, \dots, m, \bar{z} \geq z$ .

3°  $mkC < 1$ .

4°  $f_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  is nondecreasing in  $z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \dots, z_m$ .

5°.  $v_{ji}$  and  $V_{ji}$  satisfy the inequalities:

$$\frac{\Delta v_{ji}^\nu}{h} \leq \frac{\nabla^2 v_{j+1, i}^\nu}{h^2} + f_\nu(x_j, t_i, v_{ji})$$

$\nu = 1, 2, \dots, m.$

$$\frac{\Delta V_{ji}^\nu}{h} \geq \frac{\nabla^2 V_{j+1, i}^\nu}{h^2} + f_\nu(x_j, t_i, V_{ji})$$

on  $\theta_i$ , and

$$v_{ji} \leq w_{ji} \leq V_{ji} \text{ on } \Pi_R.$$

Under the above assumptions:

$$v_{ji} \leq w_{ji} \leq V_{ji}, \text{ on } \Pi.$$

*Proof:* Set

$$\varphi_{ji} = V_{ji} - v_{ji}$$

and let  $i_0, j_0, \nu_0$  be integers such that:

$$\varphi_{j_0 i_0}^{\nu_0} < 0, \varphi_{j_0 i_0}^{\nu_0} = \min_{j, \nu} \varphi_{j, i_0}^\nu$$

and  $\varphi_{j_0, i_0-1}^\nu \geq 0$  for  $\nu = 1, 2, \dots, m$ .

Then,

$$\frac{\Delta \varphi_{j_0 i_0}^{\nu_0}}{h} \geq \frac{\nabla^2 \varphi_{j_0+1, i_0}^{\nu_0}}{h^2} + f_{\nu_0}(x_{j_0}, t_{i_0}, V_{j_0 i_0}) - f_{\nu_0}(x_{j_0}, t_{i_0}, v_{j_0 i_0})$$

But  $\nabla^2 \varphi_{j_0+1, i_0}^{\nu_0} \geq 0$

and  $f_{\nu_0}(x_{j_0}, t_{i_0}, V_{j_0 i_0}) - f_{\nu_0}(x_{j_0}, t_{i_0}, v_{j_0 i_0}) \geq mC \varphi_{j_0 i_0}^{\nu_0}$ .

Hence

$$\varphi_{j_0 i_0}^{\nu_0} \geq \frac{\varphi_{j_0, i_0-1}^{\nu_0}}{1 - mkC}.$$

which, by 3°, contradicts our hypothesis.

For systems, the Chaplygin—Newton sequence is given by:

$$\frac{\Delta u_{ji}^{(n)}}{h} = \frac{\nabla^2 u_{j+1,i}^{(n)}}{h^2} + \sum_{k=1}^m f_{v_{zk}}(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) (u_{ji}^{k(n)} - u_{ji}^{k(n-1)}) + f_v(x_j, t_i, u_{ji}^{(n-1)}) \text{ on } \Pi_I$$

and

$$u_{ji}^{(n+1)}|_{\Pi_R} \leq u_{ji}^{(n)}|_{\Pi_R} \leq W_{ji}.$$

On the basis of Lemma 3 one may easily state theorems similar to Theorem 1 and 2 regarding the monotonic convergence and the rate of convergence of these sequences.

(Received May ,8 1967)

#### REFERENCES

1. Kantorowitsch L. W., G. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Raumen.*, Akademie-Verlag, Berlin, 1964.
2. Krawczyk R., *Über Differenzenverfahren bei parabolischen Differentialgleichungen.* „Arch. Rational Mech. Anal.” 2 (1962), 81—121.
3. Lusin N. N., *Collected Works* (in Russian), pp. 145—208, 1956.
4. Szarski J., *Differential Inequalities*, Warszawa, 1965.

#### ASUPRA UNEI LEGĂTURI DINTRE METODA LUI CIAPLIĞHIN ȘI A LUI NEWTON

(R e z u m a t)

Se consideră ecuația neliniară (1) cu condițiile lui Fourier și se atașează problema cu diferențe (2) (3) pe o rețea dreptunghiulară. Se arată că în anumite condiții, metoda lui Ciaplighin se reduce la cea a lui Newton. Teorema 1 dă condiții suficiente de monotonie și convergență a șirurilor aproximante. Teorema a doua pune în evidență ordinul al doilea de convergență al metodei. Rezultatele se extind și la sisteme de ecuații.

#### ОБ ОДНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ МЕТОДАМИ ЧАПЛЫГИНА И НЬЮТОНА

(Р е з ю м е)

Автор рассматривает нелинейное уравнение (1) с условиями Фурье и присоединяет к этому уравнению разностную задачу (2), (3) над прямоугольной сетью. Показывается, что в определённых условиях метод Чаплыгина сводится к методу Ньютона. Теорема 1 даёт достаточные условия монотонности и сходимости аппроксимирующих последовательностей. Теорема 2 выявляет второй порядок сходимости метода. Результаты распространяются и на системы уравнений.



## SUR LE PROBLÈME DU FLOT À COÛT MINIMUM

par  
F. RADÓ

1. Les divers problèmes de transport sont des exemples du problème du flot à coût minimum (ou problème de distribution). Nous donnons dans le § 2 un autre exemple : un problème d'augmentation des capacités dans un réseau de transport.

Après une présentation de la méthode du simplexe sous une certaine forme (une formulation de la méthode du simplexe à multiplicateurs convenable pour notre but) dans le § 3, nous donnons dans le § 4 un procédé pour résoudre le problème du flot à coût minimum, fondé sur cette méthode. La méthode du simplexe a été adaptée à différents problèmes ayant trait aux graphes, par exemple aux problèmes de transport, de transbordement, du flot maximum, engendrant des algorithmes très efficaces [1]. D'autre part on connaît des méthodes pour résoudre le problème du flot à coût minimum [2], [3], mais celles-ci ne sont pas fondées sur la méthode du simplexe. Nous considérons que la méthode du simplexe conduit dans ce cas également à un algorithme avantageux. Nous étudierons un cas généralisé dans ce sens que deux sommets du graphe peuvent être reliés par plusieurs arcs dans le même sens, situation qui se présente dans le problème d'augmentation des capacités dans un réseau de transport.

2. Soit  $(N, \mathcal{U})$  un graphe fini dont l'ensemble des sommets est  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  et l'ensemble des arcs  $\mathcal{U} = \{\alpha_j \mid j \in U\}$ . Désignons respectivement les extrémités initiale et terminale de l'arc  $\alpha_j$  par  $I(\alpha_j) = \iota(j)$  et par  $T(\alpha_j) = \tau(j)$ ; les deux ensembles  $N, U$  et les deux applications  $\iota: U \rightarrow N$  et  $\tau: U \rightarrow N$  définissent le graphe  $(N, \mathcal{U})$ . L'ensemble des indices des arcs incidents à un sommet  $i$  vers l'extérieur est  $\iota^{-1}(i)$  et vers l'intérieur est  $\tau^{-1}(i)$ .

Supposons que l'on ait associé à chaque arc  $\alpha_j$  une „capacité”  $c_j > 0$ ;  $N'$  et  $N''$  étant des sous-ensembles disjoints de  $N$ , l'on a associé aux sommets  $i \in N'$  des nombres positifs, nommés „disponibilités” et aux sommets  $i \in N''$  des nombres positifs  $a'_i = -a_i$ , nommés „demandes”, tels que  $\sum_{i \in N' \cup N''} a_i = 0$ . Posons  $a_i = 0$  pour les autres sommets.

Nous commençons par formuler un premier problème: déterminer un „flot”  $\varphi_j$ ,  $j \in U$ , satisfaisant aux conditions

$$0 \leq \varphi_j \leq c_j, \quad j \in U \quad (1)$$

$$\sum_{j \in \iota^{-1}(i)} \varphi_j - \sum_{j \in \tau^{-1}(i)} \varphi_j = a_i, \quad i \in N. \quad (2)$$

Lorsque ce système d'équations et d'inégalités est incompatible, il se pose d'une manière naturelle le problème d'augmenter les capacités de sorte que les dépenses correspondantes soient minimales. Nous admettons que certains couples de sommets puissent être reliés par des arcs additionnels ayant des capacités arbitraires et qu'un tel arc réclame des dépenses proportionnelles à la capacité additionnelle (donc au flot qui circulera dans cet arc).

Considérons donc encore un graphe  $(N, \mathcal{O})$ , ayant le même ensemble de sommets  $N$ , et dont les applications définissantes sont  $\iota' : V \rightarrow N$  et  $\tau' : V \rightarrow N$  ( $\mathcal{O} = \{\alpha_j \mid j \in V\}$ ), et les „coûts unitaires”  $b_j > 0$ ,  $j \in V$ . Le problème d'augmentation des capacités se formule comme suit :

Déterminer les nombres réels  $\varphi_j$ ,  $\varphi'_j$  vérifiant les conditions

$$0 \leq \varphi_j \leq c_j, \quad j \in U, \quad \varphi'_j \geq 0, \quad j \in V$$

$$\sum_{j \in \iota^{-1}(i)} \varphi_j + \sum_{j \in \iota'^{-1}(i)} \varphi'_j - \sum_{j \in \tau^{-1}(i)} \varphi_j - \sum_{j \in \tau'^{-1}(i)} \varphi'_j = a_i, \quad i \in N$$

et de sorte que la fonction  $\sum_{j \in V} b_j \varphi_j$  prenne sa valeur minimum.

En posant  $U$  pour  $U \cup V$ , les conditions de ce problème prennent les formes (1) et (2) et la fonction à minimiser devient

$$f = \sum_{j \in U} b_j \varphi_j \quad (3)$$

où certains coefficients  $b_j$  sont égaux à zéro et certaines constantes  $c_j$  sont égales à  $\infty$ . Le graphe  $(N, U)$  peut avoir maintenant deux arcs qui joignent deux sommets dans le même sens, même dans le cas où le graphe initial n'aurait pas de tels arcs.

3. Considérons le problème de programmation linéaire sous la forme :

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n \quad (5)$$

$$f = \sum_{k=1}^n c_k x_k \text{ soit minimum.} \quad (6)$$

Le problème dual s'écrit

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} u_i \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$g = \sum_{i=1}^m b_i u_i \text{ soit maximum.} \quad (8)$$

Un couple de solutions  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  des inégalités et équations respectives (4), (5) et (7) sont des solutions optimales des problèmes primal et dual, si et seulement si les conditions d'optimalité

$$x_k (c_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} u_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

sont vérifiées.

Soit  $x' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  une solution de base du problème primal, c'est-à-dire  $x_k = x'_k, k = 1, \dots, n$  vérifiant les conditions (4), (5) et  $x'_k = 0$  pour  $k \notin B$ , où  $B$  est un sous-ensemble de  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  constitué par  $m$  éléments, tel que  $\det (a_{ik})_{i=1, \dots, m; k \in B} \neq 0$ .

Nous attachons au vecteur  $x'$  un vecteur  $u' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_m\}$  de sorte que les conditions d'optimalité (9) soient vérifiées, en résolvant le système de Cramer

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} u'_i = c_k, \quad k \in B. \tag{10}$$

Lorsque  $u'$  satisfait toutes les conditions (7),  $x'$  est une solution optimale du problème primal.

Lorsqu'il existe des valeurs de  $k$  pour lesquelles l'inégalité (7) soit contredite, nous choisissons un tel  $k$ , que nous désignerons par  $r$ ; on a

$$c_r - \sum_{i=1}^m a_{ir} u'_i < 0. \tag{11}$$

Le système d'équations

$$\sum_{k \in B} a_{ik} x_k + a_{ir} t = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{12}$$

a pour  $t = 0$  une solution positive ( $\{x'_k \mid k \in B\}$ ). Nous déterminons la plus grande valeur  $\hat{t}$  du paramètre  $t$  pour laquelle le système (12) admet une solution positive. Si pour chaque  $t > 0$  le système d'équations (12) a une solution positive, le problème primal est impropre, ayant une solution infinie.

Soit  $\{\hat{x}_k \mid k \in B\}$  la solution du système (12) pour  $t = \hat{t}$ . Il y a un  $s \in B$  tel que  $\hat{x}_s = 0$ . On pose  $\hat{x}_r = \hat{t}$  et  $\hat{x}_k = 0$  pour  $k \in N \setminus (B \cup \{r\})$ .  $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\}$  est une nouvelle solution de base du problème primal. Le rôle de l'ensemble  $B$  est pris par  $\hat{B} = (B \cup \{r\}) \setminus \{s\}$ .

La transformation de la solution de base  $x'$  en  $\hat{x}$  est la même qu'on obtient par une transformation du tableau simplexe. Ici on évite d'écrire le tableau simplexe, mais on doit résoudre les systèmes d'équations (10) et (12) à matrices transposées. La méthode du simplexe appliquée sous cette forme est avantageuse, lorsque les systèmes (10) et (12) présentent des particularités permettant une résolution facile de ces systèmes.

4. Pour mettre le problème (1), (2), (3) sous la forme (4), (5), (6), nous l'écrivons de la façon suivante :

$$\varphi_j \geq 0, \quad \psi_j \geq 0, \quad j \in U \tag{13}$$

$$\varphi_j + \psi_j = c_j, \quad j \in U \tag{14'}$$

$$\sum_{j \in \tau^{-1}(i)} \varphi_j - \sum_{j \in \tau^{-1}(i)} \psi_j = a_i, \quad i \in N \quad \left( \sum_{i \in N} a_i = 0 \right) \tag{14''}$$

$$f = \sum_{j \in U} b_j \varphi_j \text{ soit minimum.} \tag{15}$$

Nous avons admis, pour simplifier l'exposition, que tous les arcs ont des capacités  $c_j$  finies. Le problème dual s'écrit (les variables duales attachées aux équations (14') sont  $-u_j$  et aux équations (14'')  $v_i$ )

$$-u_j + v_{i(j)} - v_{\tau(j)} \leq b_j \quad j \in U \quad (16')$$

$$u_j \geq 0 \quad (16'')$$

$$g = \sum_{i \in N} a_i v_i - \sum_{j \in U} c_j u_j \text{ soit maximum.} \quad (17)$$

L'une des conditions (14'') est une conséquence des autres. Il en résulte que la valeur d'une variable duale  $v_i$  peut être choisie d'une façon arbitraire, ce qu'on voit aussi sur la forme des conditions (16'') et de la fonction  $g$ .

Une solution  $\varphi = \{\varphi_j, \psi_j \mid j \in U\}$  du système des contraintes (13), (14'), (14'') est appelée *un flot*; si celui-ci est une solution de base, alors la solution s'appelle *flot de base*. Un ensemble  $B$  correspondant se compose d'un couple  $B_\varphi, B_\psi$  de sous-ensembles de  $U$ ;  $B_\varphi, B_\psi$  contiennent ensemble  $m+n-1$  éléments,  $m$  étant le nombre des équations (14') et  $n$  celui de (14''); on a

$$\varphi_j = 0 \text{ lorsque } j \notin B_\varphi, \quad \psi_j = 0 \text{ lorsque } j \notin B_\psi \quad (18)$$

et les conditions (18) avec (14') et (14'') déterminent les valeurs  $\varphi_j, \psi_j, j \in U$  d'une façon unique. Les ensembles  $U \setminus B_\varphi, U \setminus B_\psi$  étant disjoints,  $B_\varphi \cap B_\psi$  contient  $n-1$  éléments. Le graphe partiel  $(N, U(B))$  de  $(N, U)$ , où  $U(B) = \{a_j \mid j \in B_\varphi \cap B_\psi\}$ , est appelé *un graphe de base* du flot  $\varphi$ . Si le flot de base  $\varphi$  est non-dégénéré (ce qui a lieu si et seulement si  $\varphi_j \psi_j \neq 0$  pour tout  $j \in B_\varphi \cap B_\psi$ ), alors le graphe de base est déterminé d'une façon unique.

Le graphe  $(N, U(B))$  ne contient pas de cycles. En effet, admettons que ce graphe ait un cycle. Posons  $\varphi'_j = \varphi_j + h, \psi'_j = \psi_j - h$  sur les arcs directs,  $\varphi'_j = \varphi_j - h, \psi'_j + h$  sur les arcs inverses du cycle et  $\varphi'_j = \varphi_j, \psi'_j = \psi_j$  sur les autres arcs de  $U$ . Le système des nombres  $\varphi'_j, \psi'_j$  vérifie les conditions (18), (14'), (14''), de même que  $\varphi_j, \psi_j$ , ce qui est une contradiction.

Compte tenu que le graphe  $(N, U(B))$  a un sommet de moins que d'arcs, il résulte qu'il est un arbre.

Soit maintenant  $\varphi' = \{\varphi'_j, \psi'_j \mid j \in U\}$  un flot de base; les ensembles correspondants  $B_\varphi, B_\psi, U(B)$  seront désignés par  $B'_\varphi, B'_\psi, U(B')$ . La méthode du simplexe sous la forme décrite au § 3 conduit à l'algorithme suivant:

Pas 1. On résout le système d'équations

$$\begin{cases} v'_{i(j)} - v'_{\tau(j)} = b_j + u'_j, & j \in B'_\varphi \\ u'_j = 0 & j \in B'_\psi \end{cases}$$

qui correspond au système (10), ou le système équivalent

$$\begin{cases} u'_j = 0, & j \in B'_\psi \\ v'_{i(j)} - v'_{\tau(j)} = b_j, & j \in B'_\varphi \cap B'_\psi \\ u'_j = v'_{i(i)} - v'_{\tau(i)} - b_j, & j \in B'_\varphi \setminus B'_\psi. \end{cases} \quad (19)$$

On calcule aisément les  $n$  inconnues  $v'$  : on donne une valeur arbitraire à l'une d'elles, puis les  $n-1$  autres sont déterminées par les  $n-1$  équations (19<sub>II</sub>) en substituant la valeur donnée dans ces équations, en calculant à l'aide des équations où il est resté une seule inconnue, ces inconnues, en substituant les valeurs déterminées de cette sorte, etc. On aboutit à la détermination de toutes les inconnues  $v_i$ , car au système d'équations (19<sub>II</sub>) correspond le graphe  $(N, U(B'))$ , qui est un arbre, et au procédé de calcul la construction récurrente d'un ensemble de sommets  $E$ , en partant d'un sommet quelconque et en ajoutant à  $E$ , à chaque étape, l'ensemble des sommets liés à  $E$  par un arc de l'arbre (dans n'importe quel sens). Les valeurs  $v'_i$  étant déterminées, on obtient les  $u'_j$  par les formules (19)<sub>I</sub> et (19)<sub>III</sub>.

*Pas 2.* On calcule

$$w'_j = b_j + u'_j - v'_{u(j)} + v'_{v(j)}, \quad j \in U \setminus B'_\varphi.$$

Si  $w'_j \geq 0$  pour chaque  $j \in U \setminus B'_\varphi$  et  $u'_j \geq 0$  pour chaque  $j \in U \setminus B'_\psi$ , le flot  $\varphi'$  est optimal et le procédé de calcul est terminé. S'il n'en est pas ainsi, on choisit un  $r \in U \setminus B'_\varphi$  tel que  $w'_r < 0$  (cas a)) ou un  $r \in U \setminus B'_\psi$  tel que  $u'_r < 0$  (cas b)).

*Pas 3.* On construit la seule chaîne  $L \subset U(B')$  qui constitue avec l'arc  $\alpha_r$  un cycle  $C$  dans  $(N, U)$  ; pour cela on peut employer par exemple la méthode des marquages de Ford et Fulkerson. On parcourt le cycle  $C$  dans un sens tel que  $\alpha_r$  soit un arc direct et on désigne par  $L^+$  l'ensemble des arcs directs de  $L$  et par  $L^-$  celui des arcs inverses. Dans le cas a) on continue par le pas 4a, et dans le cas b) par le pas 4b.

*Pas 4a.* On pose

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_r &= t, & \hat{\psi}_r &= c_r - t \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j + t, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j - t, & \text{lorsque } \alpha_j \in L^+ \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j - t, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j + t, & \text{lorsque } \alpha_j \in L^- \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j, & \text{lorsque } \alpha_j \in U \setminus C \end{aligned}$$

où  $t = \min \left( \min_{\alpha_j \in L^+} \psi'_j, \min_{\alpha_j \in L^-} \varphi'_j \right)$ .

Si ce minimum est atteint pour un seul arc de  $L^+ \cup L^-$ , on désigne cet arc par  $\alpha_s$ , s'il est atteint par plusieurs arcs, on désigne par  $s$  le plus petit de leurs indices. On pose

$$\begin{aligned} \hat{B}'_\varphi &= (B'_\varphi \cup \{r\}) \setminus \{s\}, & \hat{B}'_\psi &= B'_\psi, & \text{lorsque } \alpha_s \in L^+ \\ \hat{B}'_\varphi &= B'_\varphi \cup \{r\}, & \hat{B}'_\psi &= B'_\psi \setminus \{s\}, & \text{lorsque } \alpha_s \in L^-, \end{aligned}$$

*Pas 4b.* On pose

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_r &= c_r - t, & \hat{\psi}_r &= t \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j - t, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j + t, & \text{lorsque } \alpha_j \in L^+ \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j + t, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j - t, & \text{lorsque } \alpha_j \in L^- \\ \hat{\varphi}_j &= \varphi'_j, & \hat{\psi}_j &= \psi'_j, & \text{lorsque } \alpha_j \in U \setminus C \end{aligned}$$

où  $t = \min ( \min_{\alpha_j \in L^+} \varphi'_j, \min_{\alpha_j \in L^-} \psi'_j )$  et on désigne par  $s$  le plus petit des indices des arcs sur lesquels ce minimum est atteint. On pose

$$\begin{aligned} \hat{B}_\varphi &= B'_\varphi \setminus \{s\}, & \hat{B}_\psi &= B'_\psi \cup \{r\}, & \text{lorsque } \alpha_s \in L^+ \\ \hat{B}_\varphi &= B'_\varphi, & \hat{B}_\psi &= (B'_\psi \cup \{r\}) \setminus \{s\}, & \text{lorsque } \alpha_s \in L^-. \end{aligned}$$

Si l'on connaît un flot de base initial, cet algorithme conduit, après un nombre fini de pas, à la solution minimum du problème primal proposé.

Si l'on ne connaît pas un flot de base initial, on applique les deux phases de la méthode du simplexe, en introduisant comme d'habitude des variables artificielles à la phase 1.

(Manuscrit reçu le 5 avril 1967)

#### BIBLIOGRAPHIE

1. G. B. Dantzig, *Linear Programmings and Extensions*. Princeton, 1963.
2. L. R. Ford — D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton, 1962.
3. M. Simonnard, *Programmation linéaire*. Paris, 1962.

#### DESPRE PROBLEMA FLUXULUI CU COST MINIM

(R e z u m a t)

Se consideră o problemă de mărire a capacităților unei rețele de transport, care conduce la o problemă de flux cu cost minim.

Se dă un algoritm de rezolvare a problemei fluxului cu cost minim bazat pe metoda simplex.

#### О ЗАДАЧЕ ПОТОКА С МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТЬЮ

(Р е з ю м е)

Рассматривается задача увеличения способностей транспортной сети, приводящая к задаче потока с минимальной стоимостью.

Дается алгоритм решения задачи потока с минимальной стоимостью, основанный на симплексном методе.

## ASUPRA SCURGERII HIDROMAGNETICE ÎNTRE DOUĂ DISCURI TORSIONAL, OSCILATORII

de  
IOAN POP

**1. Introducere.** Mișcarea staționară a unui lichid vâcos și incompresibil între două discuri infinite, paralele, pentru valori mici ale numărului Reynolds a fost studiată de K. S t e w a r t s o n [1] în cazul când : (a) discurile se rotesc cu aceeași viteză unghiulară în același sens ; (b) discurile se rotesc în sens contrar ; (c) un disc se rotește iar celălalt este în repaus.

A. C. S r i v a s t a v a și S. K. S h a r m a [2] au considerat aceeași problemă pentru un lichid vâcos, incompresibil și conductor electric în prezența unui câmp magnetic transversal și constant când un disc se rotește uniform iar celălalt este în repaus, observînd că anumite mărimi fizice ale lichidului sînt afectate de prezența cîmpului magnetic.

Tot pe aceeași linie, recent, P. G. R e d d y [3] a analizat efectul cîmpului magnetic asupra scurgerii radiale staționare între două plăci paralele fixe.

Ulterior, într-o serie de lucrări [4], [5] etc., s-a extins problema considerată în [1] și [2] la cazul când discurile execută mișcări de rotație oscilatorii analoge oscilațiilor torsionale.

În această lucrare ne propunem să studiem mișcarea hidromagnetică pentru numere Reynolds mici a unui lichid vâcos, incompresibil și conductor electric între două discuri infinite când : (I) un disc se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\Omega$  iar celălalt execută o mișcare de rotație oscilatorie cu amplitudine mică ; (II) un disc are o mișcare de rotație oscilatorie în jurul părții staționare medii  $\Omega$  iar celălalt este în repaus.

În scopul simplificării problemei, din punct de vedere matematic, ne vom limita la cazul când numărul Prandtl magnetic ( $Pr_m = \mu_c \sigma \nu$ ) este atît de mic încît cîmpul magnetic aplicat este neperturbat de curentul electric indus în lichid. Această ipoteză este plauzibilă pentru lichide foarte slab conductoare electric ( $Pr_m \approx \approx 10^{-7}$  pentru mercur).

Pentru rezolvare vom urma metoda dată de M. J. L i g h t h i l [6], scriind viteza  $\vec{V}$  a scurgerii în forma :  $\vec{V} = \vec{V}_s + \varepsilon \vec{V}_f e^{int}$  unde  $\vec{V}_s$  și  $\vec{V}_f$  sînt independente de  $t$ , oprindu-ne la termenul de ordinul unu în  $\varepsilon$  pentru partea oscilatorie a vitezei. Cazul fluidului newtonian și neconductor a fost analizat recent de A. C. S r i v a s t a v a [7] iar D. J. B e n n e y [8] a considerat mișcarea unui lichid deasupra unui disc infinit care execută o mișcare de rotație oscilatorie

în jurul părții staționare medii  $\Omega$ , iar lichidul la infinit se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\Omega$ .

**2. Ecuațiile mișcării.** Dacă  $u, v, w$  reprezintă componenta radială, transversală și axială a vitezei, atunci ecuațiile mișcării în coordonate cilindrice  $(r, \theta, z)$  sînt [9]:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} v, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \quad (4)$$

unde  $\rho$  este densitatea;  $p$  — presiunea;  $\nu$  — coeficientul de viscozitate cinematică;  $\sigma$  — conductivitatea electrică a lichidului;  $B_0$  — mărimea caracteristică a cîmpului magnetic aplicat.

Toate cantitățile electromagnetice sînt măsurate în sistemul electromagnetic de unități iar proprietățile fizice ale lichidului ca  $\rho, \nu, \mu_c, \sigma$  etc., le presupunem constante.

I. Dacă discul ( $z = 0$ ) se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\Omega$  în jurul axei ( $r = 0$ ), perpendiculară pe planul său, iar celălalt ( $z = d$ ) execută o mișcare de rotație oscilatorie de tipul  $r\Omega \varepsilon \cos nt$ , unde  $\varepsilon$  este o mărime mică și  $n$  frecvența rotației, atunci condițiile la limită sînt:

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad v = r\Omega, \quad w = 0 & \quad \text{pentru } z = 0, \\ u = 0, \quad v = r\Omega \cos nt, \quad w = 0 & \quad \text{pentru } z = d. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

II. Dacă discul ( $z = 0$ ) execută o mișcare de rotație oscilatorie în jurul părții staționare medii  $\Omega$ , iar celălalt ( $z = d$ ) este în repaus, atunci condițiile la limită sînt:

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad v = r\Omega(1 + \varepsilon \cos nt), \quad w = 0 & \quad \text{pentru } z = 0, \\ u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 & \quad \text{pentru } z = d. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ținînd seamă de natura fizică a problemei și anume că  $u, v, w$  și  $p$  nu depind de  $r$ , vom căuta soluția sistemului (1) — (4) sub forma [7]:

$$\begin{aligned} u = r\Omega F'(\eta, T), \quad v = r\Omega G(\eta, T), \quad w = -2d\Omega F(\eta, T), \\ p = \mu\Omega \left[ -\phi_1(\eta, T) + \frac{r^2}{d^2} \lambda(T) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

unde

$$\eta = z/d, \quad t = T/n, \quad m = \frac{\sigma B_0^2}{\rho\Omega}, \quad w = \frac{n}{\Omega}, \quad R = \frac{\Omega d^2}{\nu}.$$



Substituind relațiile (7) în sistemul (1) – (4) se obține:

$$R \left[ \omega \frac{\partial F'}{\partial T} + F'^2 - 2FF'' - G^2 + mF' \right] = F'' - 2\lambda, \quad (8)$$

$$R \left[ \omega \frac{\partial G}{\partial T} + 2(F'G - FG') + mG \right] = G'', \quad (9)$$

$$2R \left[ \omega \frac{\partial F}{\partial T} - 2FF' \right] = -p'_1 + 2F'', \quad (10)$$

unde accentul înseamnă derivata în raport cu  $\eta$  iar  $\omega$  este frecvența redusă.

Pentru determinarea funcțiilor  $F$  și  $G$  din sistemul (8), (9), presupunem că [6]:

$$F(\eta, T) = F_s(\eta) + \varepsilon F_f(\eta)e^{iT}, \quad G(\eta, T) = G_s(\eta) + \varepsilon G_f(\eta)e^{iT}, \quad \lambda(T) = \lambda_s + \varepsilon \lambda_f e^{iT}, \quad (11)$$

cu condiția că în problema considerată numai partea reală a mărimilor complexe are sens fizic.

Substituind relațiile (11) în sistemul (8) – (10) și identificînd coeficienții acelorași termeni armonici (neglijînd puterile superioare ale lui  $\varepsilon$ ), se obține sistemul:

$$\begin{aligned} R [F_s'^2 - 2F_s F_s'' - G_s^2 + mF_s'] &= F_s'' - 2\lambda, & R [2(F_s' G_s - F_s G_s') + mG_s] &= G_s'', \\ R [i\omega F_f' + 2(F_s' F_f' - F_s'' F_f - F_s F_f'' - G_s G_f) + mF_f'] &= F_f'' - 2\lambda_f, & (12) \\ R [i\omega G_f + 2(F_s' G_f + G_s F_f' - F_s G_f' - G_s' F_f) + mG_f] &= G_f''. \end{aligned}$$

**3. Soluția problemei.** Presupunem că pentru numere Reynolds mici, soluția sistemului se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned} F_s(\eta) &= F_{s0}(\eta) + R F_{s1}(\eta) + R^2 F_{s2}(\eta) + \dots, \\ G_s(\eta) &= G_{s0}(\eta) + R G_{s1}(\eta) + R^2 G_{s2}(\eta) + \dots, \\ \lambda_s &= \lambda_{s0} + R \lambda_{s1} + R^2 \lambda_{s2} + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F_f(\eta) &= F_{f0}(\eta) + R F_{f1}(\eta) + R^2 F_{f2}(\eta) + \dots, \\ G_f(\eta) &= G_{f0}(\eta) + R G_{f1}(\eta) + R^2 G_{f2}(\eta) + \dots, \\ \lambda_f &= \lambda_{f0} + R \lambda_{f1} + R^2 \lambda_{f2} + \dots \end{aligned}$$

Substituind seriile (13) în sistemul (12) și identificînd coeficienții acelorași puteri ale lui  $R$ , rezultă sistemele de ecuații:

$$\begin{aligned} F_{s0}''' - 2\lambda_{s0} &= 0, & G_{s0}'' &= 0, \\ F_{s1}''' - 2\lambda_{s1} &= F_{s0}'' - 2F_{s0} F_{s0}'' - G_{s0}^2 + mF_{s0}', & G_{s1}'' &= 2(F_{s0}' G_{s0} - F_{s0} G_{s0}') + mG_{s0}, \\ F_{s2}''' - 2\lambda_{s2} &= F_{s0}' F_{s1}' - 2F_{s0} F_{s1}'' - 2F_{s1} F_{s0}'' - 2G_{s0} G_{s1} + mF_{s1}', & (14) \\ G_{s2}'' &= 2(F_{s1}' G_{s0} + F_{s0}' G_{s1} - F_{s1} G_{s0}' - F_{s0} G_{s1}') + mG_{s1}; \\ F_{f0}''' - 2\lambda_{f0} &= 0, & G_{f0}'' &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{f1}''' - 2\lambda_{f1} &= (i\omega + n)F'_{f0} + 2(F'_{s0}F'_{f0} - F''_{s0}F_{f0} - F_{s0}F''_{f0} - G_{s0}G_{f0}), \\
G_{f1}'' &= (i\omega + m)G_{f0} + 2(F'_{s0}G_{f0} + G_{s0}F'_{f0} - F_{s0}G'_{f0} - F_{f0}G'_{s0}), \\
F_{f2}''' - 2\lambda_{f2} &= (i\omega + m)F'_{f1} + 2(F'_{s1}F'_{f0} + F'_{s0}F'_{f1} - F''_{s1}F_{f0} - F''_{s0}F_{f1} - \\
&\quad - F_{s1}F''_{s0} - F_{s0}F''_{f1} - G_{f1}G_{s0} - G_{f0}G_{s1}), \\
G_{f2}'' &= (i\omega + m)G_{f1} + 2(F'_{s0}G_{f1} + G_{f0}F'_{s1} + F'_{f0}G_{s1} + G_{s1}F'_{f1} - \\
&\quad - F_{s0}G'_{f1} - G'_{f0}F_{s1} - F_{f0}G'_{s1} - G'_{s0}F_{f1}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Cazul I. Condițiile la limită (5) se scriu :

$$\begin{aligned}
F_s &= F'_s = 0, & G_s &= 1 & \text{pentru } \eta &= 0, \\
F_s &= F'_s = 0, & G_s &= 0 & \text{pentru } \eta &= 1; \\
F_f &= F'_f = 0, & G_f &= 0 & \text{pentru } \eta &= 0, \\
F_f &= F'_f = 0, & G_f &= 1 & \text{pentru } \eta &= 1.
\end{aligned} \tag{16}$$

Soluția sistemelor (14) și (15) cu condițiile la limită (16), pentru valori mici ale frecvenței reduse  $\omega$ , este :

$$\begin{aligned}
F_{s0} &= 0, & G_{s0}(\eta) &= 1 - \eta, & \lambda_{s0} &= 0, \\
F_{s1}(\eta) &= \frac{1}{60} \eta^2 (1 - \eta)^2 (3 - \eta), & G_{s1}(\eta) &= \frac{m}{6} \eta (1 - \eta) (\eta - 2), & \lambda_{s1} &= \frac{3}{20}, \\
F_{s2}(\eta) &= -\frac{m}{25200} \eta^2 (1 - \eta)^2 (39 + 297\eta - 250\eta^2 + 50\eta^3), \\
G_{s2}(\eta) &= \frac{\eta(\eta - 1)}{6300} (27 + 27\eta - 183\eta^2 + 237\eta^3 - 120\eta^4 + 20\eta^5) + \\
&\quad + \frac{m^2}{360} \eta (1 - \eta) (8 + 8\eta - 12\eta^2 + 3\eta^3), & \lambda_{s2} &= -\frac{73m}{2800}; \\
F_{f0} &= 0, & G_{f0}(\eta) &= \eta, & \lambda_{f0} &= 0, \\
F_{f1}(\eta) &= \frac{1}{60} \eta^2 (1 - \eta)^2 (2\eta - 1), & G_{f1}(\eta) &= \frac{i\omega + m}{6} \eta (\eta - 1) (\eta + 1), & \lambda_{f1} &= \frac{1}{5}, \\
F_{f2}(\eta) &= \frac{1}{25200} \eta^2 (1 - \eta)^2 [i\omega (23 - 156\eta - 20\eta^2 + 60\eta^3) + m(11 - 18\eta - 12\eta^2 + 8\eta^3)], \\
G_{f1}(\eta) &= \frac{(i\omega + m)^2}{360} \eta (1 - \eta) (7 + 7\eta - 3\eta^2 - 3\eta^3) + \frac{1}{6300} \eta (1 - \eta) (11 + 11\eta - 59\eta^2 + \\
&\quad + 221\eta^3 - 220\eta^4 + 60\eta^5), \\
\lambda_{f2} &= -\frac{101}{4200} i\omega - \frac{1}{21} m.
\end{aligned} \tag{18}$$

Forța de frecare pe discul  $z = 0$  este

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\mu r \Omega}{d} \left\{ -1 - \frac{m}{3} R + \frac{1}{6300} (140m^2 - 27) R^2 + \varepsilon \left[ 1 - \frac{i\omega + m}{6} R + \frac{1}{12600} (22 + 245(i\omega + m^2) R^2) e^{iT} \right] + 0(R^3), \right. \quad (19)$$

iar pe discul  $z = d$ , este

$$\tau_d = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=d} = \frac{\mu r \Omega}{d} \left\{ -1 - \frac{m}{6} R + \frac{1}{12600} (16 - 245m^2) R^2 + \varepsilon \left[ 1 + \frac{i\omega + m}{3} R - \frac{1}{1575} (6 + 35(i\omega + m^2) R^2) e^{iT} \right] + 0(R^3). \right. \quad (20)$$

*Cazul II.* Dacă discul ( $z = 0$ ) execută o mișcare torsional oscilatorie iar discul ( $z = d$ ) este în repaus, atunci ecuațiile mișcării rămân neschimbate și soluția părții staționare a vitezei coincide cu (17). Condițiile la limită pentru partea nestaționară a vitezei, deduse din (6), sînt:

$$\left. \begin{aligned} F_f &= F'_f = 0, & G_f &= 1 & \text{pentru } \eta &= 0, \\ F_f &= F'_f = 0, & G_f &= 0 & \text{pentru } \eta &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

iar soluția sistemului (15) cu condițiile la limită (21) este:

$$F_{f_0} = 0, \quad G_{f_0}(\eta) = 1 - \eta, \quad \lambda_{f_0} = 0, \quad (22)$$

$$F_{f_1}(\eta) = \frac{1}{30} \eta^2 (1 - \eta)^2 (3 - \eta), \quad G_{f_1}(\eta) = \frac{i\omega + m}{5} \eta (1 - \eta) (\eta - 2), \quad \lambda_{f_1} = \frac{3}{10},$$

$$F_{f_2}(\eta) = -\frac{\eta^2(1-\eta)^2}{12500} [i\omega(29 + 167\eta - 150\eta^2 + 30\eta^3) + m(39 + 297\eta - 250\eta^2 + 50\eta^3)],$$

$$G_{f_2}(\eta) = \frac{(i\omega + m)^2}{360} \eta (1 - \eta) (8 + 8\eta - 12\eta^2 + 3\eta^3) + \frac{1}{2100} \eta (\eta - 1) (27 + 27\eta - 183\eta^2 + 237\eta^3 - 120\eta^4 + 20\eta^5),$$

$$\lambda_{f_2} = -\frac{109}{4200} i\omega - \frac{73}{1400} m.$$

În acest caz forța de frecare pe discul ( $z = 0$ ) este

$$\tau_0 = \frac{\mu r \Omega}{d} \left\{ -1 - \frac{m}{3} R + \frac{1}{6300} (140m^2 - 27) R^2 + \varepsilon \left[ -1 - \frac{i\omega + m}{3} R + \frac{1}{6300} (140(i\omega + m)^2 - 81) R^2 \right] e^{iT} \right\} + 0(R^3), \quad (23)$$

iar pe discul ( $z = d$ ) este:

$$\tau_d = \frac{\mu r \Omega}{d} \left\{ -1 + \frac{m}{6} R + \frac{1}{25200} (32 - 490m^2) R^2 + \varepsilon \left[ -1 + \frac{i\omega + m}{6} R + \frac{1}{12600} (48 - 105(i\omega + m^2) R^2) e^{iT} \right] + 0(R^3). \right. \quad (24)$$

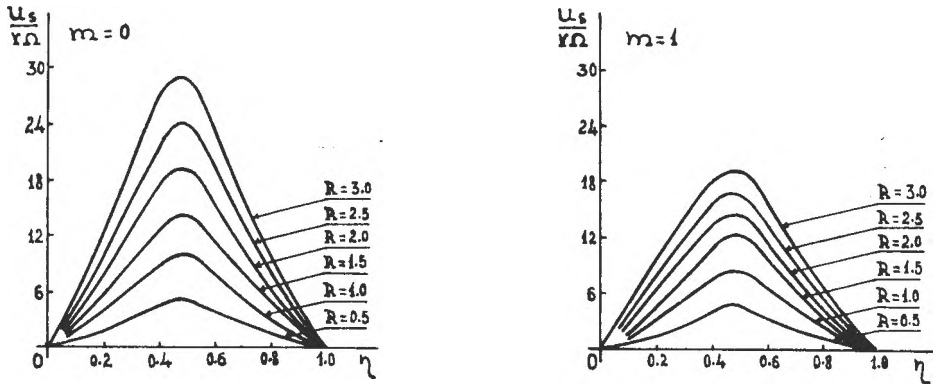


Fig. 1. Viteza radială staționară adimensională.

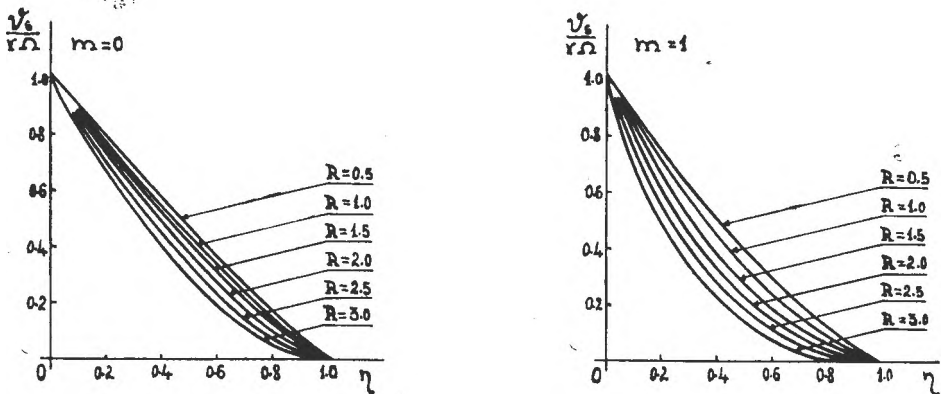


Fig. 2. Viteza transversală staționară adimensională.

În fig. 1 și 2 se arată distribuția părții staționare a vitezei radiale și transversale adimensionale pentru diferite valori ale numărului Reynolds  $R$  și pentru parametrul hidromagnetic  $m = 0$  și 1. Din figură observăm că efectul câmpului magnetic este de a descrește profilul componentelor vitezei.

(Intrat în redacție la 5 aprilie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. K. Stewartson, *On the Flow between two Rotating Coaxial Disks*. Proc. Cambr. Phil. Soc., **49**, 2, 333–341 (1953).
2. A. C. Srivastava and S. K. Sharma, *The Effect of a Transverse Magnetic Field on the Flow between two Infinite Discs – One Rotating and the Other at Rest*. Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., sêr. des Sci. Techn., **9**, 11, 639–644 (1961).
3. P. G. Reddy, *Effect of Magnetic Field on the Laminar Radial Flow between Parallel Plates*. J. Phys. Soc. Japan, **21**, 12, 2710–2715 (1966).

4. S. Rosenblat, *Flow between Torsionally Oscillating Disks*. J. Fluid Mech., **8**, 3, 388—399 (1960).
5. S. Datta, *Hydromagnetic Flow between Torsionally Oscillating Discs*. Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., sér. des Sci. Techn., **13**, 11—12, 979—986 (1965).
6. M. J. Lighthill, *The Response of Laminar Skin Friction and Heat Transfer to Fluctuations in the Stream Velocity*. Proc. Roy. Soc., A, **224**, 1—23 (1954).
7. A. C. Srivastava, *Flow of a Second-order Fluid between Torsionally Oscillating and Steadily Rotating Parallel Disks*. J. Sc. Engg. Res., **10**, 1, 89—96 (1966).
8. D. J. Benney, *The Flow Induced by a Disk Oscillating about a State of Steady Rotation*. Quart. J. Mech. and Appl. Math., **18**, 3, 333—345 (1965).
9. R. E. Kelly, *Torsional Oscillations of a Plane in Magnetohydrodynamics*. Trans. ASME., E, **31**, 3, 205—206 (1964).

## О ГИДРОМАГНИТНОМ ТЕЧЕНИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОРСИОННО КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

(Резюме)

Изучается гидромагнитное движение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в присутствии постоянного поперечного магнитного поля между двумя бесконечными и параллельными дисками, в случае если:

I. Один диск равномерно вращается, а другой совершает колебательно-вращательное движение с малой амплитудой.

II. Один диск совершает колебательно-вращательное движение вокруг средней стационарной части  $\Omega$ , а другой находится в состоянии покоя.

Считая, что число Рейнольдса  $R$  мало, стационарная и нестационарная часть составляющих скорости выражается в виде рядов по степеням  $R$ . В конце показывается распределение стационарной части радиальных и поперечных безразмерных составляющих скорости для различных значений числа Рейнольдса  $R$  и гидромагнитного параметра  $m$ .

## SUR LE MOUVEMENT HYDROMAGNETIQUE ENTRE DEUX DISQUES ANIMES D'OSCILLATIONS TORSIONNELLES

(Résumé)

On étudie le mouvement hydromagnétique d'un liquide visqueux incompressible à conductivité électrique finie entre deux disques infinis et parallèles, en présence d'un champ magnétique transversal constant, dans le cas où:

I. L'un de ces disques est animé d'un mouvement de rotation uniforme et l'autre d'un mouvement de rotation oscillatoire de petite amplitude. II. L'un des disques considérés est en mouvement rotatoire oscillatoire autour de la partie stationnaire moyenne  $\Omega$ , tandis que l'autre est en repos.

En supposant le nombre de Reynolds petit, on représente la partie stationnaire et non-stationnaire des composantes de la vitesse sous la forme de séries des puissances de  $R$ . Enfin, on donne des représentations graphiques de la distribution de la partie stationnaire des composantes adimensionnelles radiales et transversales de la vitesse en fonction du nombre de Reynolds  $R$  et du paramètre hydro-magnétique  $m$ .



## THE ATMOSPHERE INFLUENCE ON THE DECOMPOSITION PROCESS OF $Mn^{2+}$ IONS AGGREGATES IN $LiF-MnF_2$ SYSTEM

by

A. DARABONT and S. V. NISTOR

The studies of the ESR spectra of  $Mn^{2+}$  ions introduced in several alkali halides [1–5] have indicated the formation of vacancy-paramagnetic ion pairs which determine the fine structure of the ESR spectra. This hypothesis deduced from the ESR studies was verified by means of the dielectric loss and electrical conductivity measurements [6–9]. On the other hand in unannealed specimens a simple, broad line with a width of about 200–500 gauss was observed. It has been considered that this line arises from the manganese ions aggregates at or near internal boundaries or dislocations, this state being little studied.

The comparison of the experimental data obtained by different authors for this state in the  $LiF-MnF_2$  system, [10–12] show the existence of some disagreements.

- The width of the line has different values.
- The fine structure does not appear at same temperatures.
- At room temperature the stability of the vacancy-manganese ion is not the same.

We have considered that these disagreements result from the different growing and annealing conditions of the samples (The impurities which exist in the materials, the atmosphere and the growing technics employed).

From these conditions we have proposed to study the atmosphere influence on the formation and decomposition of these aggregates. For this purpose, single crystals of  $LiF-MnF_2$  were grown by the Czochralski–Kyropoulos method in a controlled atmosphere (air and argon).

The starting materials were of reagent grade purity. In addition, the  $LiF$  was purified by pulling it from the melt in an argon atmosphere. Two types of crystals were grown from a melt in which 0.05 mol %  $MnF_2$  had been added. One type was grown in air and the other in argon atmosphere. In order to eliminate the water the samples grown in argon were melted in vacuum at  $10^{-2}$  mm Hg. A broad ESR line was observed at room temperature for both types of single crystals with a width of about 500–600 gauss between maximum derivative points.

The line intensity for the sample prepared in argon was larger than for the sample prepared in air. We expected this, because in melt the  $MnF_2$  was partially oxidized and separated.

After an annealing in air or in argon for 4 hours at 750°C both types of samples have shown the same fine structure of the ESR spectra as it has been reported by Böttcher and co-workers [12].

In all these spectra no time-variation of the line intensities was observed (for one week), indicating a quite good stability of the vacancy-Mn<sup>2+</sup> ion pairs. The studies of line intensities depending on the annealing time in air have shown that for long annealing times (more than 10 hours) a decreasing of the intensity and a darkening of the samples appear. If the annealing lasts more than 100 hours, the fine structure signal disappears and the broad line intensity decreases.

We consider that this phenomenon results because an escaping process of the manganese ions from the crystal is superimposed over the aggregates dissolving process.

In the case of the samples annealed in an argon atmosphere this phenomenon also occurs but more slowly.

From the data mentioned above it turns out that the medium in which was made the preparation and the annealing of the samples has a small influence on the aggregation and dissolution of the manganese ions in the lattice.

From these data the following conclusions result:

(i) It is very uncertain that the formation of the O<sub>2</sub><sup>-</sup> - Mn<sup>2+</sup> and O<sup>-2</sup> - Mn<sup>2+</sup> pairs will have an important role in the formation of the manganese ions associations in the lattice.

(ii) The hypothesis regarding the cause of the fine structure lines in the ESR spectrum was confirmed. However, the features of the broad line which differ from those reported by other authors indicate the important role of the impurities in the formation of manganese aggregates.

A careful study of this problem is necessary to be done.

(Received October 3, 1967)

## REFERENCES

1. E. E. Schneider, J. E. Caffin, *Defects in Crystalline Solids*, „Phys. Soc.” **74** (1955).
2. P. A. Forrester, E. E. Schneider, „Proc. Phys. Soc.”. B **69**, 833 (1956).
3. G. D. Watkins, R. M. Walker, „Bull. Amer. Phys. Soc.”, ser. II, **1**, 324 (1956).
4. E. E. Schneider, „Arch. Sci.” **10**, 120 (1957).
5. G. D. Watkins, „Phys. Rev.”, **113**, 79 (1959).
6. G. D. Watkins, „Phys. Rev.” **113**, 91 (1959).
7. V. B. Laizan, A. Ia. Vitol, „Rad. Fizika” **I**, 105, (1964), Riga.
8. A. Ia. Vitol, Iu. K. Krumini, V. B. Laizan, „Rad. Fizika,” **III**, 95 (1965), Riga.
9. V. B. Laizan, K. K. Schwartz, A. Ia. Vitol, „Rad. Fizika,” **III**, 103 (1965), Riga.
10. T. P. P. Hall, W. Hayes, R. W. H. Stevens, J. Wilkens, „J. Chem. Phys.” **38**, 1977 (1963).
11. P. Bergé, M. Benveniste, G. Blanc, M. Dubois, „C. r. Acad. Sci.” **258**, 5839 (1964).
12. R. Böttcher, W. Windsch, W. Lüdke, „Phys. Stat. Solidi” **20**, 121 (1967).



INFLUENȚA ATMOSFEREI ÎN PROCESUL DE DESCOMPUNERE A AGLOMERATELOR DE IONI  $Mn^{2+}$  ÎN SISTEMUL  $LiF-MnF_2$ 

(R e z u m a t)

S-a studiat prin metoda RES influența condițiilor de creștere și călire a eșantioanelor de  $LiF-MnF_2$  asupra agregării și dizolvării ionilor de mangan în rețeaua cristalină.

ВЛИЯНИЕ АТМОСФЕРЫ В ПРОЦЕССЕ РАЗЛОЖЕНИЯ АГГЛОМЕРАТОВ ИОНОВ  $Mn^{2+}$  В СИСТЕМЕ  $LiF-MnF_2$ 

(Р е з ю м е)

Методом ЭПР изучено влияние условий повышения и закала проб  $LiF-MnF_2$  на агрегацию и растворение ионов марганца в кристаллической решетке.



## L'ANTIFERROMAGNÉTISME DES ALLIAGES TERNAIRES DE NICKEL-CUIVRE-MANGANÈSE

par

I. COSMA et IULIU POP

**Introduction.** Le système des alliages binaires à base de nickel, présente en général le phénomène d'ordre ferromagnétique, ayant le point Curie relativement élevé jusqu'à 630°K, en fonction de la concentration du composant non magnétique de l'alliage [1, 2, 3, 4, 5]. En dépassant le point Curie dans le domaine paramagnétique, la susceptibilité magnétique de ces alliages suit la loi Curie-Weiss pour les concentrations réduites. Toutefois dans les alliages de nickel-chrome on a pu observer le phénomène d'ordre antiferromagnétique (ferrimagnétique) [6].

Dans les alliages ternaires à base de nickel, — différemment des alliages binaires, — la possibilité de la réalisation des interactions antiferromagnétiques est très favorisée par la présence dans le réseau cristallin de trois sortes d'atomes. Ainsi les systèmes d'alliages Ni—Au—Al et Ni—Cu—Zn présentent un comportement ferrimagnétique [7, 8]. Des phénomènes analogues ont été observés aussi dans les alliages ternaires à base de manganèse [9—12]. En conséquence l'étude des systèmes ternaires à base de nickel avec différents composants continue de présenter de l'intérêt.

**La procédure expérimentale.** En vue de cette étude nous avons préparé seize échantillons du système Ni—Cu—Mn dans un large domaine de concentration. Les échantillons avec les concentrations données dans les tableaux I et II, ont été préparés avec des métaux d'une pureté électrolytique par fusion dans un four à atmosphère réductrice. Après leur obtention, les échantillons ont été soumis à un traitement thermique d'homogénéisation à la température de 900°C pendant une heure, ensuite ils ont été refroidis lentement. Les mesurages magnétiques ont été accomplis à l'aide d'une balance à compensation mécanique [13] de type Faraday.

**Résultats expérimentaux.** Nous avons étudié la dépendance de l'inverse de la susceptibilité magnétique  $\frac{1}{\chi}(T)$  en fonction de la température, dans l'intervalle 100°—1200°K.

Pour les échantillons d'une grande concentration en nickel les résultats des mesurages sont représentés graphiquement par la figure no. 1. On peut constater qu'au-dessus du point Curie ferromagnétique, l'inverse de la susceptibilité magnétique dépend au commencement d'une manière linéaire de la température et seulement à de hautes températures apparaît un courbement vers

les axes des températures, phénomène qui est déterminé par l'effet des électrons de conductibilité et par le peuplement des niveaux énergétiques supérieurs. Avec la diminution de la concentration du nickel, la susceptibilité magnétique baisse en même temps, les courbes  $\frac{1}{\chi}(T)$  se maintiennent approximativement parallèles, ce qui montre que le moment magnétique par atome d'alliage reste à des valeurs

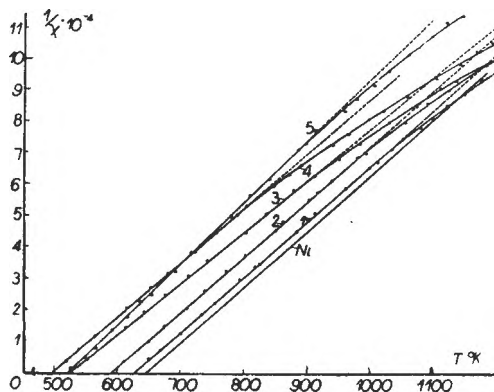


Fig. 1.

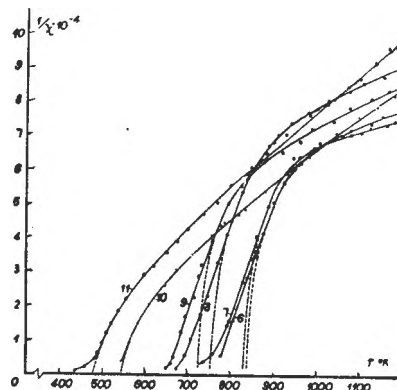


Fig. 2.

voisines. Tandis que le manganèse a un effet d'augmentation du moment magnétique, le cuivre a un effet contraire. En supposant la valeur du moment magnétique de  $4,9 \mu_B$  pour le ion  $M^{3+}$ , pour le nickel il est résulté un moment magnétique moyen de  $1,625 \mu_B$ , ce qui est en accord avec la valeur expérimentale déterminée par la susceptibilité du nickel métallique (voir tableau no. 1).

Tableau 1

Alliage no.	%at			M	$\theta_p$	$C_M$	$P_p$ , alliage, $\mu_B$	$P_p$ , Ni, $\mu_B$
	Ni	Cu	Mn					
1	98	1	1	58,68	626	0,329	1,63	1,61
2	95	3	2	58,74	590	0,335	1,64	1,625
3	88	7	5	58,85	527	0,347	1,67	1,62
4	90	9	1	59,07	522	0,30	1,565	1,65
5	85	10	5	58,95	498	0,333	1,63	1,62
—	100	—	—	58,69	645	0,327	—	1,625

La diminution de la concentration du nickel mène à l'abaissement du point Curie paramagnétique, fait qui indique l'amointrissement des interactions d'échanges ferromagnétiques dans les alliages.

Les échantillons à une concentration de nickel sous 80% at., mais avec un pourcentage élevé de manganèse présentent une dépendance de l'inverse de la susceptibilité magnétique en fonction de la température ayant un caractère non linéaire prononcé, qui est caractéristique à un comportement ferrimagnétique, comme on peut le constater sur la figure no.2.

Pour ces échantillons la dépendance est décrite justement par la loi Néel, pour le cas du ferrimagnétisme :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_0} + \frac{T}{C} - \frac{\sigma}{T - \theta},$$

où C est la constante Curie, tandis que  $\chi_0$ ,  $\sigma$  et  $\theta$  sont des constantes qui dépendent du champ moléculaire ; les valeurs de celles-ci sont données par le tableau no. 2.

Tableau 2

Alliage no.	°at			M	C <sub>p</sub>	$\frac{1}{\chi} \cdot 10^{-4}$	$\sigma \cdot 10^{-4}$	$\theta$ °K	P <sub>p</sub> , μ <sub>B</sub>
	Ni	Cu	Mn						
6	60	10	30	58,08	1,45	3,5	168	815	3,4
7	50	10	40	57,67	1,92	4,4	155	805	3,92
8	50	25	25	58,96	1,285	4,3	316	710	3,21
9	70	10	20	58,39	0,97	1,68	129	700	2,8
10	80	5	15	58,53	0,663	-2,1	81	535	2,31
11	80	10	10	58,75	0,525	-3,3	59	468	2,06
12	80	15	5	59,28					
13	70	20	10	59,25					
14	60	30	10	59,79					
15	50	40	10	60,26					
16	40	10	50	57,29					

De ce comportement magnétique on peut tirer la conclusion que dans les alliages apparaissent deux sous-réseaux magnétiques ayant des moments orientés antiparallèlement, donnant naissance ainsi à une structure ferrimagnétique.

Par suite de l'augmentation de la concentration du cuivre dans l'alliage la structure magnétique reste comme auparavant, fait qu'on peut voir sur la figure no. 3, mais la dépendance  $\frac{1}{\chi}(T)$  dans le domaine de hautes températures présente des déviations de la loi Néel, par augmentation de la susceptibilité.

Un comportement magnétique à part est présenté par les alliages dans lesquels le manganèse dépasse la proportion du nickel, tandis que la concentration du cuivre est relativement petite. Ces alliages ont une structure ferrimagnétique avec la température Néel au-dessus du point Curie, comme on peut le voir sur la figure no. 4, où est représentée la dépendance  $\frac{1}{\chi}(T)$  pour l'échantillon 40% at Ni ; 10% at Cu ; 50% at Mn soumis à un traitement thermique et non soumis à ce traitement.

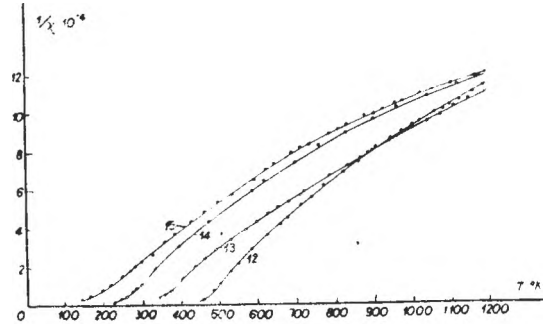


Fig. 3.

La courbe d'en haut (échantillon non soumis au traitement thermique) a un caractère non linéaire prononcé et à 960°K environ, elle présente une anomalie correspondant à la température Néel, après laquelle la dépendance  $\frac{1}{\chi}(T)$  est linéaire,

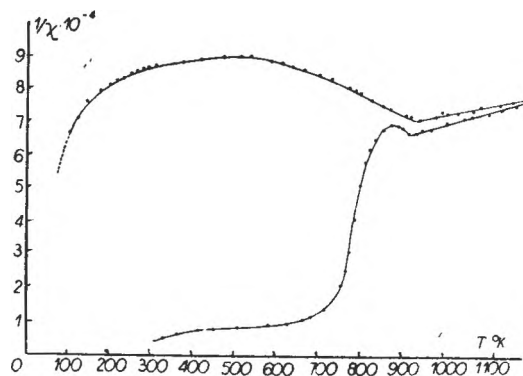


Fig. 4.

mais le phénomène est irréversible. Après le traitement thermique d'homogénéisation apparaît l'ordre ferromagnétique ayant la température Néel au-dessus du point Curie et situé à 940°K environ, ainsi qu'il se présente sur la courbe d'en bas.

En conclusion, des données présentées il résulte que les rôles des atomes de nickel, de cuivre et de manganèse sont différents, les alliages pouvant présenter un phénomène d'ordre ferromagnétique ou ferrimagnétique ayant la température Néel au-dessus ou au-dessous du point Curie ferromagnétique, en fonction de la prépondérance des atomes de nickel ou de manganèse, les atomes de cuivre accomplissant aussi un rôle de dilution magnétique.

(Manuscrit reçu le 7 octobre 1967)

#### BIBLIOGRAPHIE

1. C. Manders, „Ann. Phys.” **5**, 167 (1936).
2. L. Néel, „Ann. Phys.” **5**, 232 (1936).
3. V. Marian, „Ann. Phys.” (thèse) (1936).
4. D. I. Volkov, V. I. Tchetchernikov, „Izv. AN SSSR,” ser. fiz. **21**, 8, 1111 (1957).
5. V. I. Tchetchernikov, „Vestnik Moskovskogo Un-ta, ses. mech. astr. fizik. chimii”, **4**, 143 (1958).
6. V. I. Tchetchernikov, Iuliu Pop, F.M.M. ” **17**, 4, 636 (1964).
7. Iuliu Pop, I. Maxim, „Studia Univ. Babeş-Bolyai” ser. Math-Phys. 1, 103, (1966).
8. Iuliu Pop, I. Cosma, „Studia Univ. Babeş-Bolyai”, ser. Math-Phys. 2. 89. (1966).
9. J. Tsuboya, M. Sugihara, „J. Phys. Soc. Jap” **571**, **16** (1961).
10. J. Tsuboya, „J. Phys”. Soc. Jap.” **1875**, **16** (1961).
11. J. Tsuboya, M. Sugihara, „J. Phys. Soc. Jap.” **1257**, **16** (1961).
12. J. Tsuboya, M. Sugihara, „J. Phys. Soc. Jap”. **1534**, **16** (1960).
13. Iuliu Pop, V. I. Tchetchernikov, „Priborîi teh. exp.” **5**, 180 (1964).

#### ANTIFEROMAGNETISMUL ALIAJELOR TERNARE DE NICHEL-CUPRU-MANGAN

(Rezumat)

S-a studiat dependența de temperatură a susceptibilității magnetice pentru sistemul de aliaje Ni—Cu—Mn. Aliajele cu o concentrație mai mică de 80% at Ni prezintă o comportare ferimagnetică bine descrisă de legea lui Néel.

#### АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ ТРОЙНОЙ СИСТЕМЫ СПЛАВОВ НИКЕЛЬ-МЕДЬ-МАРГАНЕЦ

(Резюме)

Исследована температурная зависимость магнитной восприимчивости для системы сплавов Ni—Cu—Mn. Сплавы с концентрацией менее 80% ат. Ni имеют ферримангнитное поведение, описанное законом Нееля.

## HALLEFFEKTANOMALIEN IN Ni—Cr—LEGIERUNGEN

IULIU POP, GH. ILONCA und H. HENNING

Es wurde die Temperaturabhängigkeit der spontanen Hallkonstante  $R_s$ , der elektrischen Resistivität  $\rho$ , ihrer magnetischen Komponente  $\rho_m$  und der magnetischen Suszeptibilität  $\chi$  der Ni—Cr—Legierungen (bis zu 6% Cr) im Bereiche von 77°—700°K studiert.

Es wurde festgestellt, dass die spontane Hallkonstante  $R_s$ , sowie die elektrische Resistivität  $\rho$  und der magnetische Teil  $\rho_m$  der elektrischen Resistivität durch die nachfolgenden Gleichungen, im Bereiche von 77°K bis in die Nähe des Curie-Punktes, ausgedrückt werden können:

$$R_s = a\rho + b\rho^2 \quad \text{und} \quad R_c = \alpha + \beta\rho_m.$$

Die Halleffektanomalien in diesen Legierungen wurden auf Grund des Dispersionsmechanismus der Leitungselektronen auf Verunreinigungen und Phononen, so wie auf Spinwellen und magnetischen Inhomogenitäten erklärt.

**Einleitung.** In letzter Zeit erschien eine grosse Anzahl von theoretischen Arbeiten, die dem Studium des Halleffektes in ferromagnetischen Metallen gewidmet sind und auf der Spin—Bahn—Wechselwirkung fussen [1—3]. In den Arbeiten [4—7,21] wird der Dispersionsmechanismus auf Verunreinigungen, auf Phononen oder gleichzeitig auf Phononen und Gitterfehlern studiert. In beiden Fällen führen die Berechnungen zu einer Gleichung zwischen  $R_s$  und  $\rho$  und zwar  $R_s \sim \rho^2$ . Kondorski [5] zeigte, dass zwischen  $R_s$  und  $\rho$  folgende Gleichung besteht:

$$R_s = a\rho + b\rho^2 \tag{1}$$

Irhin und Abelski [8] studierten theoretisch den Dispersionsmechanismus auf Spinwellen und stellten folgende Gleichung fest:

$$R_s = \alpha + \beta\rho_m. \tag{2}$$

Die vorhandenen theoretischen Betrachtungen des spontanen Halleffektes behandeln nur den Fall der Dispersion auf Verunreinigungen, Phononen und Spinwellen. Auf diese Weise kann die Theorie keine Antwort bezüglich des Verhaltens des spontanen Halleffektes in der Nähe des Curie-Punktes geben, wo die Dispersionsprozesse auf magnetischen Inhomogenitäten eine sehr grosse Rolle spielen. Diese Inhomogenitäten werden durch starke Schwankungen, die durch die Zerstörung der ferromagnetischen Ordnung entstehen, hervorgerufen.

Diesen Theorien entsprechend entsteht die Aufgabe eines eingehenderen experimentellen Studiums der Phänomene. Zur Prüfung der oben angeführten Theorien wurden Halleffektmessungen an ferromagnetischen Metallen wie Fe und Ni durchgeführt [9–12]. Die für Ni–Sn [13], Fe–Si–Al [14], Ni–Mo [15], Ni–Si [16], Ni–Cu [17] und andere Legierungen erhaltenen Ergebnisse bestätigen die Theorie in einem vom Curie-Punkt entfernten Bereiche, wo die Dispersion auf Spinwellen vorherrscht.

Da das Chrom ein Übergangselement mit antiferromagnetischer Ordnung als Legierungselement ist, kann es zusätzliche Effekte von antiferromagnetischer Ordnung in der Legierung hervorrufen, vor allem von ferrimagnetischem Typus.

Unsere Absicht war es, in diesem Sinne den Einfluss dieses Elementes auf den anomalen Halleffekt im Nickel zu studieren. Ausserdem fanden wir in der vorangehenden Arbeit [13] über die Ni–Sn-Legierungen ein besonderes Verhalten des Verhältnisses  $R_s/\rho$  bei tiefen Temperaturen und in Abhängigkeit von der Resistivität  $\rho$ . Gleichfalls weisen die Abhängigkeitskurven  $R_s(\rho_m)$  und  $R_s(I)$  zwei verschiedene Neigungen auf. Es war interessant festzustellen, ob dieser Effekt auch bei den Ni–Cr-Legierungen erhalten bleibt.

Die Versuche wurden mit vier Ni–Cr–Proben mit einem Chromgehalt von 1%; 3%; 4,5%; 6% und einer Probe aus reinem Nickel als Vergleichsprobe durchgeführt.

**Versuchsverfahren.** Die verwendeten Proben hatten folgende Dimensionen:  $32 \times 8$  mm und eine Stärke zwischen 0,1 und 0,15 mm. Die Messungen wurden in Feldern von 9500 Gs und bei einem Strom von 4A zwischen 77°K und 700°K durchgeführt, sowohl mit den thermisch nicht behandelten Proben, wie auch mit denjenigen, die einer thermischen Behandlung unterzogen wurden. Die letzteren wurden 8 Stunden im Vakuum auf 1200°K erhitzt und langsam abgekühlt. Die zum Messen des Halleffektes verwendete Apparatur ist in [13] beschrieben.

**Versuchsergebnisse.** Die ordinäre Hallkonstante  $R_0$  wurde aus der Feldabhängigkeit der Grösse  $\rho_H$  (Hallresistivität) bestimmt, die in Abbildung 1 dargestellt ist und wo man anfangs ein lineares Anwachsen bis zu Feldern von 2,5 kGs für grössere Konzentrationen und 6,5 kGs für Nickel und 1% Chrom feststellen kann. Bei grösseren Feldern beginnt das Sättigungsphänomen.

Die mit ununterbrochenen Linien dargestellten Kurven kennzeichnen die Abhängigkeit  $\rho_H = f(H)$  für die thermisch behandelten Proben, hingegen jene mit unterbrochenen Linien kennzeichnen die nicht behandelten Proben.

Aus der Temperaturabhängigkeit der spontanen Konstante  $R_s$ , in Abbildung 2 (für reines Nickel und die Probe mit 1% Chrom) dargestellt, stellt man ein ausgeprägtes Maximum beim ferromagnetischen Curie-Punkt fest. Auf der graphischen Darstellung ist für 1% Cr eine Verschiebung des Curie-Punktes über jenen des reinen Nickels hinaus, als ein Effekt des Chroms in kleinen Mengen zu bemerken.

Die Ergebnisse für 3%, 4,5% und 6% Chromgehalt sind in Abbildung 3 dargestellt. Es ist zu bemerken, dass im Temperaturbereich zwischen 80°K und 600°K die spontane Hallkonstante einen stetigen Abfall erleidet – ein Effekt der dem paramagnetischen Bereiche entspricht.

Die spontane Hallkonstante  $R_s$  der thermisch nicht behandelten Proben ist grösser; dieses Anwachsen ist durch die Inhomogenität in der Legierung bestimmt. Aus der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Resistivität (festgestellt durch die in [18] beschriebene Methode), die in Abbildung 4 dargestellt ist, wurde der magnetische Teil der Resistivität getrennt, der in Abbildung 5 wiedergegeben wurde.



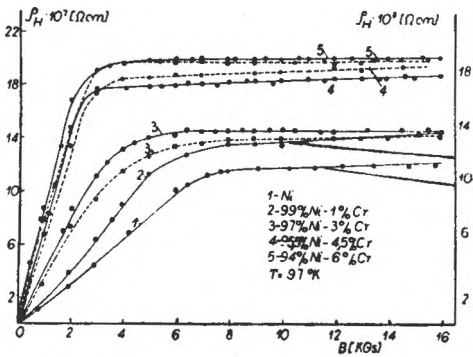


Abb. 1.

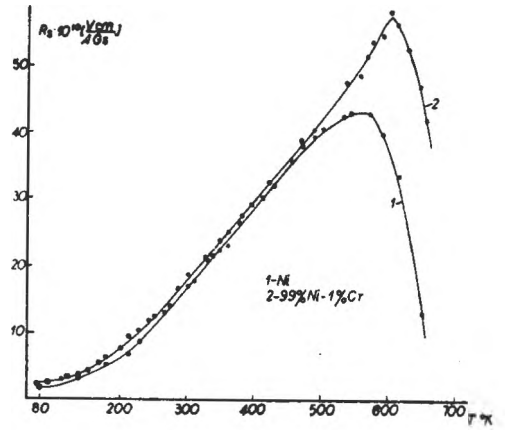


Abb. 2.

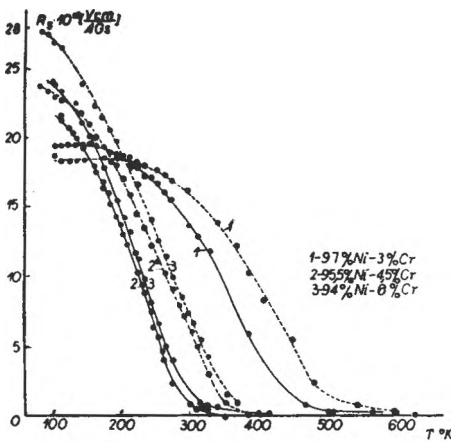


Abb. 3.

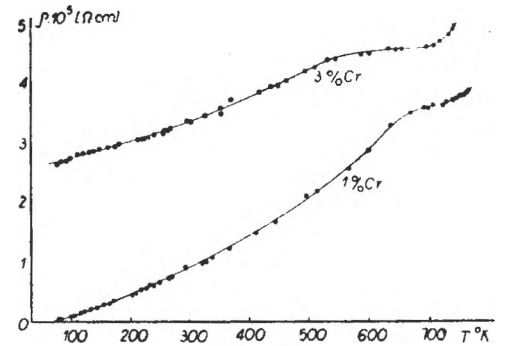


Abb. 4.

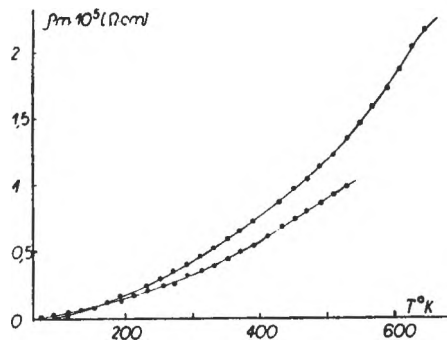


Abb. 5.

Die Verbindungsgleichung zwischen der spontanen Hallkonstante und der elektrischen Resistivität  $R_s = a\rho + b\rho^2$  [5] (wo  $\rho$  den Beitrag des Chromgehaltes, der Phononen und der Spinwellen [19] darstellt) ist auch für das Nickel und die Probe mit 1% Chromgehalt in einem vom Curie-Punkt entfernten Bereiche bestätigt, wie es auch aus Abbildung 6 hervorgeht.

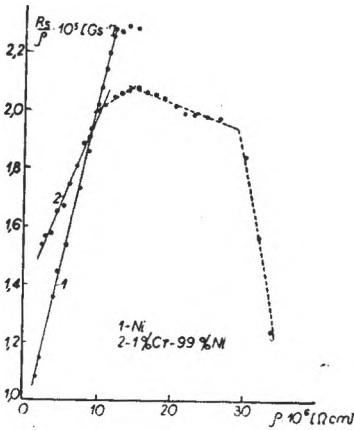


Abb. 6.

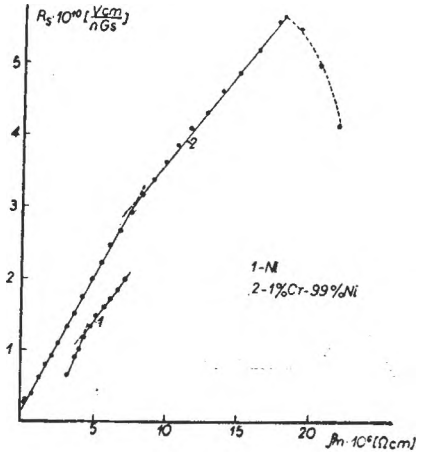


Abb. 7.

Die Versuchsergebnisse bestätigen auch die Verbindungsgleichung zwischen der spontanen Hallkonstante  $R_s$  und dem magnetischen Teil der Resistivität [8],

$$R_s = \alpha + \beta \rho_m$$

so wie aus Abbildung 7 ersichtlich ist.

Die lineare Abhängigkeit der Konstante  $R_s$  von  $\rho_m$  ist durch eine auch bei den Ni—Sn-Legierungen [13] beobachtete Neigungsänderung gekennzeichnet.

Die Temperatur, die dem Punkt, wo die Neigungsänderung stattfindet, entspricht, ist mutmasslich an die Erscheinung der magnetischen Inhomogenitäten gebunden, die immer häufiger werden, je mehr man sich dem Curie-Punkt nähert.

Zu einem besseren Erkennen des magnetischen Verhaltens der Probe mit 1% Chromgehalt unternahmen wir auch magnetische Suszeptibilitätsmessungen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8 wiedergegeben.

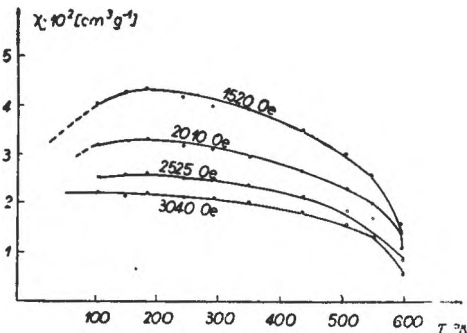


Abb. 8.

Bei kleinen Feldern erscheint ein Maximum, das ein antiferromagnetisches (ferrimagnetisches) Verhalten dieser Legierung anzeigt, ein Maximum das bei einem kritischen Feld von  $H_c \approx 3100$  Gs verschwindet. Das antiferromagnetische Verhalten der Ni—Cr-Legierungen ist in der Arbeit [20] wiedergegeben.

**Schlussfolgerungen.** Das Studium des Halleffektes im Legierungssystem Ni—Cr, zwischen den Temperaturen  $77^\circ$  und  $700^\circ\text{K}$ , zeigte das Vorhandensein einiger Anomalien, die durch das Erscheinen der antiferromagnetischen Ordnung in der Legierung hervorgerufen werden.

Durch die Streuung der Elektronen auf den magnetischen Inhomogenitäten erscheint eine Anomalie auf den Abhängigkeitskurven  $R_s(\rho_m)$ , die sich durch das Ändern der Neigung bemerkbar macht. Die theoretischen Gleichungen (1) und (2) sind nur für begrenzte Temperaturbereiche bestätigt, die durch genaue Werte der Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $\alpha$ ,  $\beta$  gekennzeichnet sind. Auf diese Weise grenzt sich der Bereich der tiefen Temperaturen, wo die Streuung auf den Spinwellen vorherrscht, vom Temperaturbereich ab, welcher sich dem Curie-Punkt nähert und wo die Streuung auf den magnetischen Inhomogenitäten erscheint.

Das Vorhandensein des Chroms in der Legierung bestimmt bei kleinem Gehalt die Verschiebung des Curie-Punktes gegen höhere Temperaturen, hingegen findet bei grossem Chromgehalt eine Verschiebung gegen tiefe Temperaturen statt. Aus riesem Grunde müssen die Messungen zum Studium des Halleffektes in den Legierungen mit grossem Chromgehalt in flüssigem Helium durchgeführt werden.

(Eingegangen am 7. September 1967)

#### L I T E R A T U R

1. R. Karplus und J. M. Luttinger, Phys. Rev. **95**, 1154 (1954).
2. J. M. Luttinger, Phys. Rev. **112**, 739 (1958).
3. J. Smit, Physica **1**, 39 (1958).
4. L. E. Gurevici, I. N. Iassievici, F. T. T. **4**, 2854 (1962) **5**, 2620 (1963).
5. E. I. Kondorski, J. E. T. F. **45**, 511 (1963); **48**, 506 (1965).
6. E. J. Kondorski, A. V. Ceremuşkina, N. Kurbaniaev, F. T. T. **6**, 539 (1964).
7. Iu. P. Irhin, V. T. Şavrov, J.E.T.F. **42**, 1233 (1962).
8. Iu, P. Irhin, S. S. Abelski, F.T.T. **6**, 1635, (1964).
9. J. P. Jan, Helv. Phys. Acta **25**, 677 (1952).
10. J. P. Jan, M. H. Gijsman, Physica den Hoog, **18**, 339 (1952).
11. J. M. Lavine, Phys. Rev. **123**, 4, 1273 (1961).
12. J. Smit, Physica, **21**, 877 (1955).
13. Iuliu Pop und Gh. Ilonca, Revue Roumaine de Physique, **12**, 4, 343 (1967).
14. A. V. Ceremuşkina, N. Arhipov, Vest. Mosk. U-ta. Ser. 3, Fizika i Astronomia **2**, 93 (1966)
15. D. I. Volkov, T. M. Kozlova, F. M. M. **17**, 6, 839 (1964).
16. D. I. Volkov, T. M. Kozlova, J. E.T.F. **48**, 65, (1965).
17. F. E. Allison und E. M. Pzgh, Phys. Rev. **102**, 5, 1281 (1956).
18. Gh. Ilonca, „Studia, Series Mathematica-Physica,” fasciculus 1, 127 (1967).
19. J. K. Kikoin, T. N. Igoseva, J. E. T. F. **46**, 1, 67 (1964).
20. B. U. Cecernikov, Iuliu Pop, F.M.M. **17**, 4, 636 (1964).
21. A. A. Abdurahmanov, Vestnik M.G.U. Ser. Fiz. **2** (1964).

#### ANOMALIA EFECTULUI HALL IN ALIAJE DE Ni—Cr

#### (R e z u m a t)

S-a studiat în intervalul  $77^\circ$ — $700^\circ\text{K}$  dependența de temperatură a constantei Hall spontane  $R_s$ , a rezistivității electrice  $\rho$ , a componenteii ei magnetice  $\rho_m$  și a susceptibilității magnetice  $\chi$ , la aliaje de NiCr, (pînă la 6% Cr).

S-a stabilit că de la 77°K și pînă în apropierea punctului Curie, constanta Hall spontană  $R_s$ , rezistivitatea electrică  $\rho$  și partea magnetică  $\rho_m$  a rezistivității electrice verifică relațiile

$$R_s = a\rho + bg^2 \quad \text{și} \quad R_s = \alpha + \beta\rho_m$$

Anomalia efectului Hall în aceste aliaje s-a interpretat pe baza mecanismului de dispersie a electronilor de conductibilitate pe impurități și fononi, pe undele de spin și pe neomogenitățile magnetice.

## АНОМАЛИЯ ЭФФЕКТА ХОЛЛА В СПЛАВАХ Ni—Cr

(Резюме)

В интервале 77°—700° К исследована температурная зависимость спонтанной постоянной Холла  $R_s$ , удельного сопротивления  $\rho$ , её магнитной составляющей  $\rho_m$  и магнитной восприимчивости  $\chi$  сплавов Ni—Cr (<до 6% Cr>)

Установилось, что между 77°K и точкой Кюри спонтанная постоянная Холла  $R_s$ , удельное сопротивление  $\rho$  и магнитная часть  $\rho_m$  проверяют отношения

$$R_s = a\rho + bg^2 \quad \text{и} \quad R_s = \alpha + \beta\rho_m.$$

Аномалия эффекта Холла в этих сплавах интерпретирована на основе механизма рассеивания электронов проводимости на примесях и фонах, на спиновых волнах и магнитных неоднородностях.

## ASUPRA ORIENTĂRI MONOCRISTALELOR PRIN METODA LAUE

de

GH. CRISTEA și ILDIKÓ CHIȘ

Cunoașterea orientării monocristalelor are mare importanță în diferitele domenii de cercetare. Metodele folosite pentru orientare au la bază proprietatea de anizotropie a diferitelor mărimi care caracterizează monocristalul.

În prezenta lucrare ne-am propus să orientăm monocristalul de rubin (trioxid de aluminiu impurificat cu crom). Din cauza proprietăților deosebite pe care le posedă, a aplicațiilor sale în special în domeniul electronicii cuantice, rubinul a fost obiectul a numeroase cercetări [1, 2]. Până în prezent pentru orientarea lui s-au folosit diverse metode cum ar fi metoda optică, a difracției de electroni [3] etc. Una din metodele cele mai universale de orientare este însă metoda röntgenografică pe care o vom folosi și noi în lucrarea de față.

Metoda Laue, după cum se știe, se poate folosi în două variante: prin transmisie și prin reflexie. Prima variantă are avantaje la interpretarea lauegramelor obținute, dar este limitată în aplicabilitate la cristalele subțiri și a căror coeficient de absorbție este mic. În cazul nostru, pe lângă faptul că rubinul are un coeficient de absorbție mare, eșantionul era destul de gros, și am fost nevoiți să aplicăm varianta prin reflexie.

În general, dificultățile care apar cu ocazia orientării monocristalelor sînt legate de complexitatea structurii lor interne și de simetria scăzută a sistemului de cristalizare. Rubinul aparține simetriei hexagonal-romboedrice ( $D_3^d$ ), în care ionii de oxigen formează o structură hexagonal compactă, iar cei de aluminiu se așază în golurile octaedrice (fig. 1). Totuși, atomii de oxigen se abat puțin de la dispunerea hexagonal compactă ideală în sensul că două locuri cationice ( $Al^{3+}$ ) sînt mai apropiate între ele decît față de ceilalți ioni ai aluminiului. În

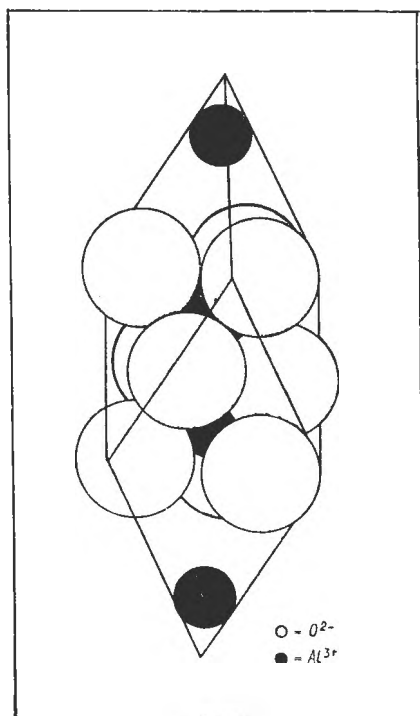


Fig. 1. Structura cristalografică a rubinului.

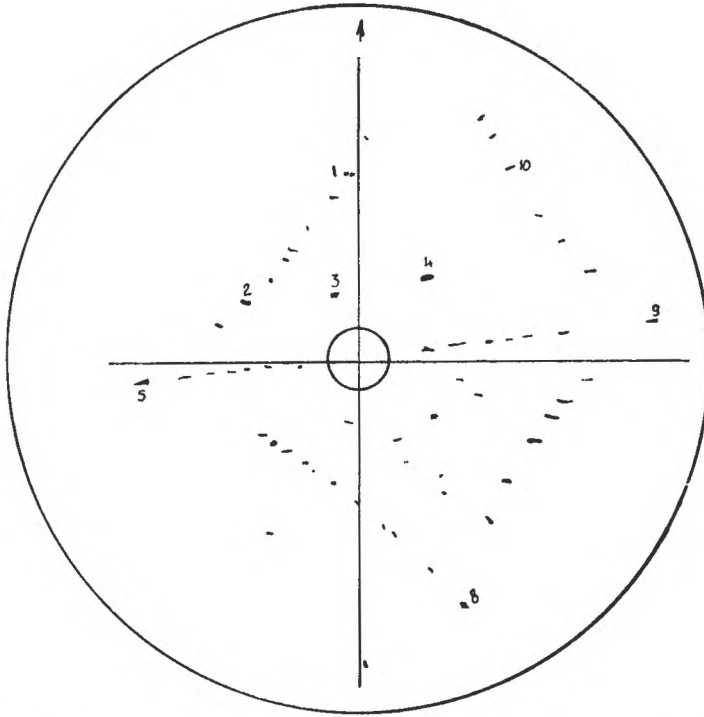


Fig. 2. Lauegrama monocristalului de rubin obținută prin reflexie.

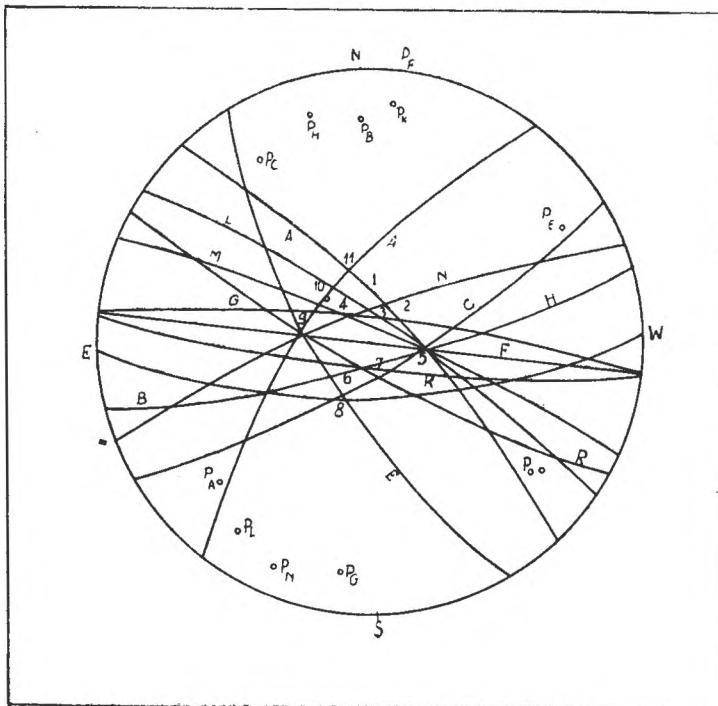


Fig. 3. Proiecția stereografică construită după lauegramă.

ansamblu se obține un romboedru cu parametrii de rețea:  $a = 5,12 \text{ \AA}$  și  $\alpha = 55^\circ 17'$  [4].

În procesul de orientare am urmărit localizarea în spațiu a axei de simetrie (c), a romboedrului, care coincide cu axa de zonă  $[0001]$  a hexagonului.

Din cauza simetriei destul de scăzute pe de-o parte, și din cauză că forma exterioară a cristalului nu oglindea simetria lui internă (creștere din topitură) pe de altă parte, fotografia Laue obținută este destul de asimetrică (fig. 2).

În fotografie se distinge un singur plan de simetrie. Din numărul spoturilor obținute se urmărește să se identifice acel spot care corespunde zonei caracterizate prin axa (c).

În prima etapă a procedurii am urmat calea obișnuită, cunoscută în literatură, construind proiecția stereografică a spoturilor obținute. În acest scop se supra-pune peste film harta Greninger. Determinând cu ajutorul ei coordonatele spoturilor, se trec pe rețeaua Wulff. Obținem în felul acesta proiecția stereografică a cristalului, în poziția în care este așezat pe capul goniometric în timpul expunerii fotografiei. Unind punctele obținute prin linii, se formează cercuri mari, fiecare dintre ele corespunzând la o zonă a cristalului (fig. 3).

În etapa următoare ar fi trebuit, cum se procedează de obicei, să marcăm polii cercurilor mari (ai zonelor) iar apoi citind unghiurile dintre ei, să determinăm după tabele indicii, Müller corespunzători. Din nefericire, pentru simetriile scăzute chiar și pentru cea romboedrică în care cristalizează rubinul, valorile unghiulare nu sînt încă tabelate, deci nu putem determina indicii Müller.

Totuși, pe baza unor coordonate unghiulare particulare luate din indicatori cristalografici [5], putem construi proiecția stereografică standard a cristalului de rubin. Proiecția obținută se referă însă la poziția cristalului în care axa de simetrie (c) ar fi paralelă cu direcția de incidență a razelor X (fig. 4).

Se observă, în proiecția standard, elementele de simetrie ale sistemului hexagonal, existente cum am remarcat deja și în cazul cristalului studiat aici: trei axe de ordinul 3 și trei digire, toate trecînd prin punctul  $[0001]$ .

Înseamnă că pentru identificarea axei (c) din fig. 3, va trebui să găsim un asemenea punct care să aibă proprietățile asemănătoare cu punctul  $[0001]$  de pe proiecția stereografică standard, adică să treacă prin el șase plane formînd între ele unghiuri de  $60^\circ$ .

Pe proiecția stereografică obținută de pe lauegramă găsim două asemenea puncte: punctul 9 și punctul 5. Prin punctul (9) trec planele  $D$ ,  $N$ ,  $F$ ,  $R$  și  $E$ , iar prin punctul 5 planele  $A$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $C$  și  $H$ . (Avem numai cinci plane, deoarece unul din spoturi a ieșit din cadrul filmului.) Urmează să decidem care din aceste puncte corespund axei (c).

Măsurînd distanțele unghiulare între aceste puncte și vecinele lor (am luat punctul 8) și identificînd cu proiecția standard, găsim că axei (c) îi corespunde punctul 9. Mai departe, măsurînd distanța unghiulară de la centrul proiecției pînă la punctul 9, care reprezintă proiecția axei  $c$ , găsim abaterea axei de simetrie de la direcția de incidență a razelor X. Această determinare se face numai după ce prin rotirea proiecției stereografice, în sensul acelor de ceasornic, în jurul centrului, am adus punctul (9) pe linia ecuatorială a rețelei Wulff. Unghiul cu care trebuie să efectuăm ultima rotație ne va furniza a doua coordonată unghiulară care va determina complet poziția axei (c). (În cazul nostru particular am obținut valorile  $28^\circ$  și respectiv  $80^\circ$ .)

Pentru a verifica procedeul folosit, reconstruim proiecția stereografică rotită, astfel ca axa (c), determinată prin coordonatele unghiulare obținute, să fie paralelă

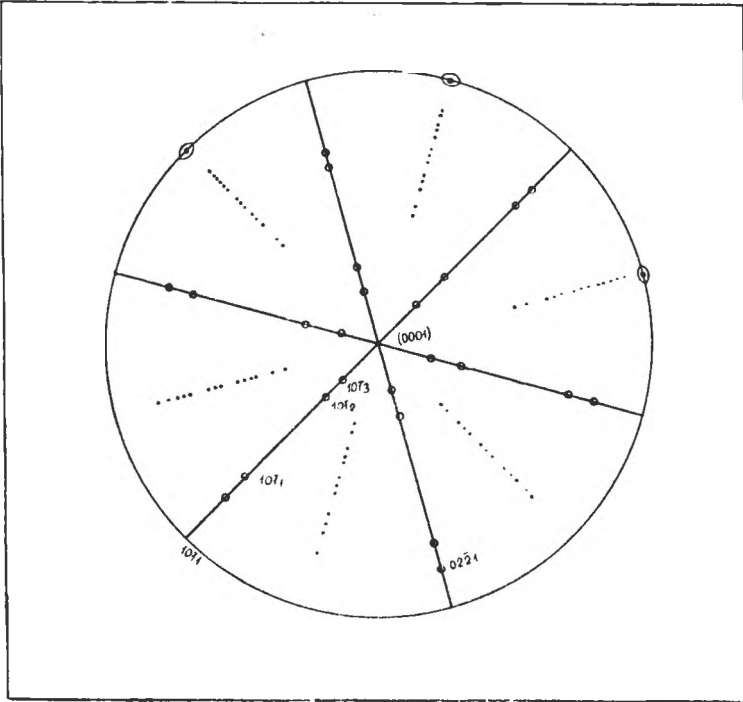


Fig. 4. Proiecția stereo-grafică standard a rubinului.

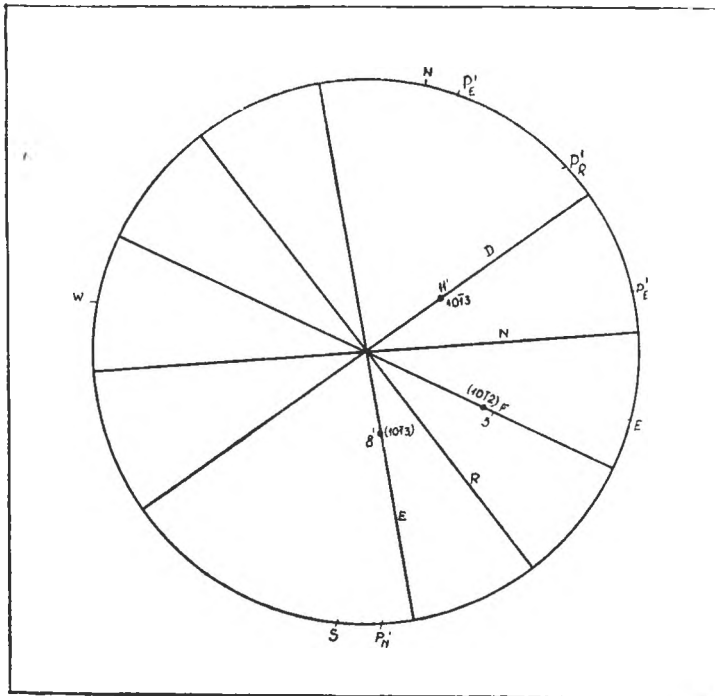


Fig. 5. Proiecția stereo-grafică rotită a proiecției din fig. 3.



cu direcția de incidență a razelor  $X$ . Dacă proiecția astfel obținută (fig. 5) coincide cu proiecția stereografică standard, înseamnă că procedeul folosit este corect. Comparând fig. 5 cu fig. 4 se vede că în cazul nostru coincidența este perfectă.

Pentru a avea un reper permanent față de care să cunoaștem poziția axei de simetrie, se taie cristalul într-un plan perpendicular pe direcția acestei axe, după ce cu ajutorul capului goneometric am suprapus-o peste direcția de incidență a razelor  $X$ .

(Intrat în redacție la 20 septembrie 1967)

#### B I B L I O G R A F I E

1. „Trudî instituta kristalografii AN SSSR”, 1953, vîp. 8.
2. I. W. W a c h m a n n, „J. Res. Nat. Bur. Standards” (1960) **64** A 213.
3. S. Y a m a g u c h i, „Naturwissenschaften” **53**, Nr. 1,15 (1966).
4. L. P a u l i n g, S. B. H e n d r i c k s, „J. Am. Chem. Soc.” **47**, 781, 1925.
5. *Mineralele*, vol. II (în l. rusă), Moscova 1959.

#### ОБ ОРИЕНТАЦИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЛАУË

(Резюме)

Автор статьи распространяет метод Лауэ для ориентации монокристаллов на ромбоэдрическую систему, имеющую относительно низкую симметрию и для которой нет табулированных угловых значений. Ориентация производится путём построения стандартной стереографической проекции кристалла на основе некоторых частных значений углов между кристаллографическими осями. Эти углы обычно можно найти в кристаллографических показателях.

#### ON THE ORIENTATION OF SINGLE CRYSTALS USING LAUE METHOD

(S u m m a r y)

The author extend Laue method of orientation of single crystals to the rhombohedral system considered as having a rather low symmetry and for which the angular values are not tabulated. The orientation is made in this case drawing the standard stereographic projection of the crystal on the basis of some particular values of the angles between the crystallographic symmetry axes, angles which usually can be found in the crystallographic indicators.



# MĂSURAREA CURENTULUI ALTERNATIV CU TRADUCTOARE SEMI- CONDUCTOARE TERMOREZISTIVE

de  
**F. PUSKÁS și C. BÁLINTFFY**

Precizia maximă cu care ampermetrele cu citire directă măsoară intensitatea curentului alternativ în domeniul audio-frecvenței este de 0,1%. În literatură sînt descrise diferite metode de comparare [1—3] cu care se poate obține o precizie de 0,01—0,05%, pînă la frecvențe de 10—20 kHz. La aceste metode de comparare în general sînt folosite traductoare termoelectrice sau termorezistive.

Scopul acestei lucrări este de a prezenta un traductor termorezistiv cu semiconductori care se bazează pe egalitatea cantităților de căldură dezvoltate de cei doi curenți, alternativ și continuu. Traductorul propriu-zis este format dintr-un termistor cu încălzire indirectă.

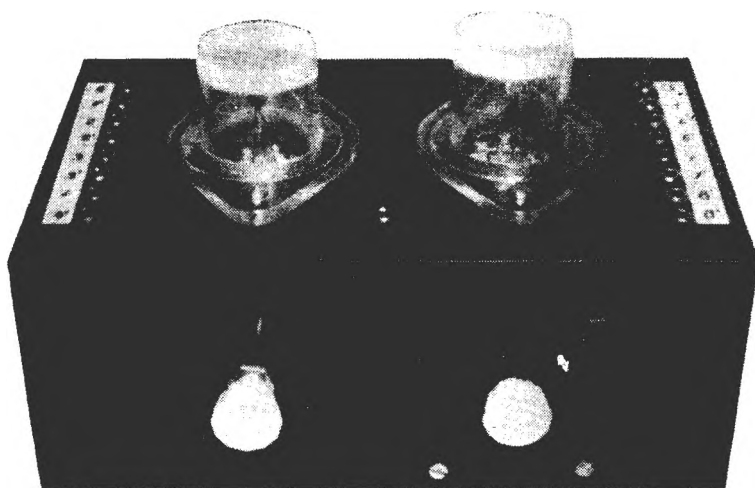


Fig. 1.

**I. Descrierea traductorului și a modului de lucru.** Traductoarele au fost confecționate din termistori puși la dispoziția noastră de către Institutul de fizică București. S-au folosit termistori cu rezistență electrică de 8—10 k $\Omega$  și coeficientul de temperatură de 3—4%/°C. Pe termistori s-a bobinat bifilar sîrmă de cupru emaiată avînd diametrul de 0,1 mm. Rezistența ohmică a bobinajului de încălzire a fost

de cca.  $8\Omega$ , iar inductanța sub  $20\ \mu\text{H}$ . Termistori astfel pregătiți au fost introduși în baloane din plexiglas (fig. 1) care apoi au fost vidate. Experiența ne-a dovedit că un vid de  $10^{-3}$  torr asigură o izolație termică suficientă pentru termistorii cu încălzire indirectă. În vederea stabilității termice a termistorilor s-a ales un montaj în punte. Am studiat diferite montaje în punte în număr de șapte, care din punct de vedere a tehnicii de măsurare pot fi împărțite în două categorii. În cazul montajelor din prima categorie (schemele 1 — a, 1—b, 1—c și 1—d) echilibrarea punții s-a făcut cu o rezistență de precizie ce s-a etalonat direct în intensitate de curent, corespunzătoare curentului de măsurat. În cazul montajelor din a doua categorie (schemele 2—a, 2—b și 2—c) echilibrarea punții se face cu ajutorul unui curent continuu de intensitate cunoscută, astfel intensitatea curentului alternativ de măsurat este comparată cu intensitatea curentului continuu necesar pentru echilibrarea punții.

**II. Rezultatele experimentale.** La traductoarele descrise în literatură [1, 2] s-a folosit un montaj de tipul schemei 1—a (fig. 2). La acest montaj în vederea stabilității termice se folosește și un termistor  $R_T$ . Termistorul stabilizator  $R_T$  se montează în același balon cu termistorul  $T$ , astfel erorile suplimentare provenite din variația temperaturii, practic, sînt eliminate. Valoarea rezistenței  $R_1$  din brațul inferior al punții este de  $2\ \text{k}\Omega$  iar  $R$  este o rezistență de precizie variabilă în decade. Alimentarea punții se face în curent continuu. Conectarea curentului alternativ de măsurat produce dezechilibrarea punții deoarece rezistența traductorului se micșorează datorită încălzirii. Echilibrul punții poate fi refăcut prin modificarea rezistenței  $R$  cu o cantitate  $\Delta R$ ; această variație de rezistență  $\Delta R$  va fi o funcție de intensitatea curentului alternativ de măsurat. Apoi bobina de încălzire a termistorului o conectăm la curent continuu. Intensitatea curentului continuu o reglăm în așa fel încît puntea să se reechilibreze cu aceeași variație  $\Delta R$  a rezistenței ca și în cazul curentului alternativ. În acest caz, în mod evident, ambii curenți au dezvoltat aceeași cantitate de căldură, deci măsurînd intensitatea curentului continuu aflăm tocmai valoarea efectivă a intensității curentului alternativ. Pentru a putea măsura

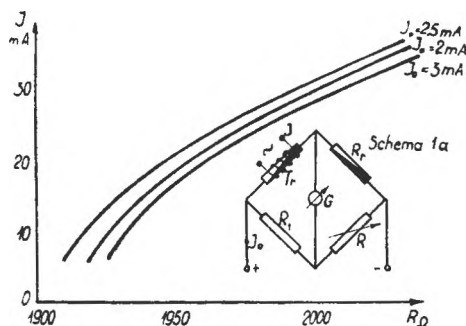


Fig. 2.

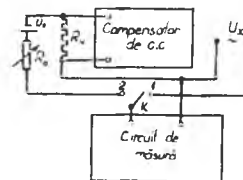


Fig. 3.

intensitatea curentului continuu cu o precizie cît mai mare, în acest scop am folosit un compensator de curent continuu. Fig. 3 reprezintă schema de principiu a montajului folosit.

Avînd în vedere că valoarea rezistenței  $R$ , pentru care puntea este în echilibru, este o funcție a intensității curentului alternativ, aceasta se poate etalona în unități de intensitate de curent. Etalonarea se face în curent continuu. În fig. 2 sînt reprezentate curbele de etalonare corespunzătoare schemei I. Schimbînd valoarea  $I_0$

a curentului de alimentare a punții, se primesc diferite curbe de etalonare. Din curbele de etalonare se poate determina și sensibilitatea aparatului. Prin sensibilitatea aparatului vom înțelege variația de rezistență  $\Delta R$  care este necesară pentru reechilibrarea punții în cazul în care ea a fost dezechilibrată de un curent cu intensitatea de 1 mA. Deoarece curbele de etalonare nu sînt liniare, nici sensibilitatea

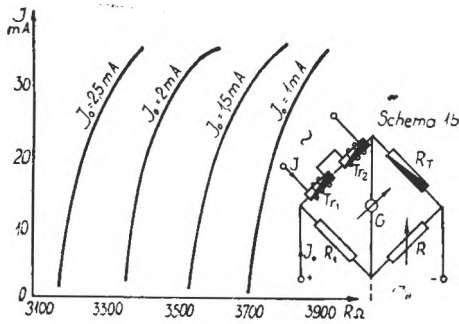


Fig. 4.

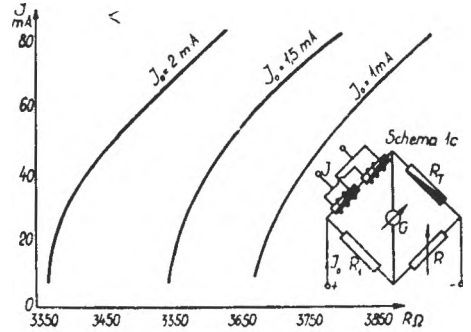


Fig. 5.

aparaturii nu va fi constantă. Sensibilitatea aparatului depinde și de intensitatea curentului de alimentare a punții: Din teoria punților de măsură se știe că sensibilitatea punții crește în mod proporțional cu creșterea intensității  $I_0$  a curentului de alimentare, în schimb efectul termic al acestui curent micșorează sensibilitatea traductorului. În fig. 2 din curbele de etalonare se vede că mărind intensitatea curentului  $I_0$ , sensibilitatea aparatului crește, apoi începe să scadă. Pentru fiecare schemă se poate determina curentul de alimentare a punții, care asigură sensibilitatea maximă. În cazul schemei 1-a intensitatea optimă de curent este de 2,5 mA, iar sensibilitatea este de 5Ω/mA (sensibilitatea s-a calculat la 30 mA).

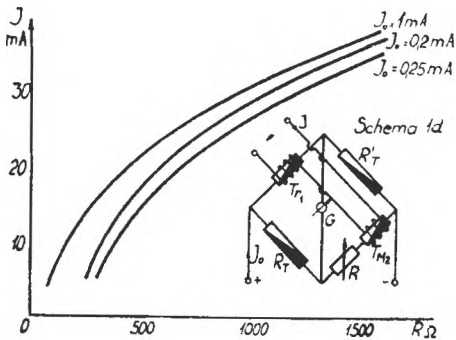


Fig. 6.

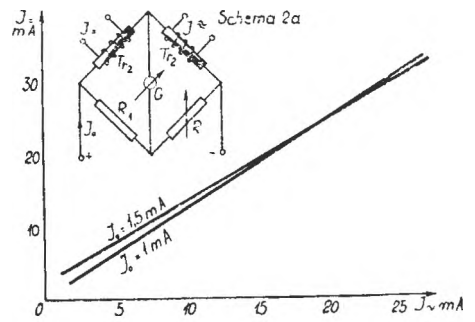


Fig. 7.

Cu traductoarele ce ne-au stat la dispoziție am realizat diferite montaje, pe de o parte cu scopul de a mări sensibilitatea, pe de altă parte pentru a mări domeniul de măsură.

În cazul schemei 1—b, în unul din brațele punții sînt puse două traductoare legate în serie (fig. 4). Din analiza curbelor de etalonare rezultă că în comparație cu schema anterioară sensibilitatea crește de două ori, în timp ce domeniul de măsură rămîne același. În cazul schemei 1—c am pus în paralel două traductoare (fig. 5).

În acest caz sensibilitatea aparatului nu se schimbă față de schema 1—a, în schimb crește domeniul de măsură.

În cazul schemei 1—d (fig. 6), bobinajele de încălzire ale termistoarelor sînt legate în serie iar termistorii se află în brațele opuse ale punții. În cazul acestui montaj se obține cea mai ridicată sensibilitate. Intensitatea optimă a curentului de alimentare a punții va fi cu mult mai mică decît în cazul montajelor anterioare, căci în toate brațele punții avem termistori.

Pentru a ușura compararea diferitelor scheme, dăm mai jos un tabel cu cîteva date mai importante:

Schema	Domeniul de măsură mA	Sensibilitatea (la 30 mA) $\Omega/\text{mA}$	Constanta de curent A/ $\Omega$	Rezistența internă $\Omega$	Consumul propriu maxim mW	cos $\varphi$ al traductorului la 20 KHz
1 a	5—35	5	$2 \cdot 10^{-4}$	8	10	0,987
1 b	5—35	10	$10^{-4}$	16	20	0,953
1 c	10—75	5	$2 \cdot 10^{-4}$	4	20	0,997
1 d	5—35	50	$2 \cdot 10^{-6}$	16	20	0,953

Pe baza datelor din tabel putem să observăm mai ușor posibilitățile de utilizare a aparatului. De asemenea rezultă că nu putem măsura curenți mai mici de 5 mA —, aceasta fiind sensibilitatea de prag a traductorului nostru —, dar în interiorul domeniului de măsură putem pune în evidență variații ale curentului de ordinul a  $10^{-4}$  A. Prin montarea corespunzătoare a traductorului (schemele 1—b și 1—d) sensibilitatea de bază a aparatului poate fi mărită de 2, respectiv de 10 ori.

Prin legarea în paralel a traductoarelor, domeniul de măsură al aparatului se dublează, sensibilitatea de bază a aparatului rămînînd aceeași, în schimb are dezavantajul că sensibilitatea de prag scade la jumătate (schema 1—c). Rezistența internă a aparatului este mult mai mică cu cel puțin un ordin de mărime) față de ampermetrele cu indicație directă care au același domeniu de măsură și sensibilitate de bază. Inductanța traductorului fiind mică, randamentul de transformare a curentului alternativ în căldură este ridicat iar factorul de putere al aparatului chiar și la 20 KHz este aproape de unitate; astfel aparatul poate fi folosit cu succes la măsurarea curenților din domeniul audiofrecvenței.

În cazul montajelor studiate anterior, curbele de etalonare nu sînt liniare. Acest lucru este dezavantajos, deoarece în interiorul domeniului de măsurare sensibilitatea nu este constantă, pe de altă parte sensibilitatea de prag a aparatului nu este folosită în întregime. În cazul realizării unui montaj care prezintă curbe de etalonare liniare, limita inferioară de măsurare a aparatului poate fi mărită cu 2—3 mA.

Curbe de etalonare liniare se pot obține folosind montajele din grupa a 2—a (schemele 2—a, 2—b, —2c).

În acest caz, în locul termistorului stabilizator  $R$ , folosim un traductor. Curentul continuu ce trece prin acest traductor este astfel reglat, încît cantitatea de căldură pe care o dezvoltă să producă o micșorare a rezistenței termistorului, necesară reechilibrării punții. În acest caz intensitatea curentului alternativ este comparată cu intensitatea curentului continuu ce trece prin celălalt traductor. Pentru etalonare, prin ambele traductoare se trece curent continuu.

În cazul acesta sensibilitatea aparatului trebuie să o definim în alt mod. Prin sensibilitatea aparatului vom înțelege acea intensitate a curentului continuu care

trecînd prin traductoare, reechilibrează puntea de măsură în cazul în care prin traductorul de măsură trece un curent de 1 mA. În cazul montajelor din categoria a doua, constanta intensității de curent a aparatului are același ordin de mărime ca și în cazul montajelor din prima categorie.

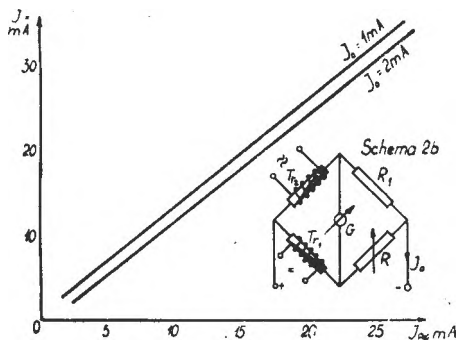


Fig. 8.

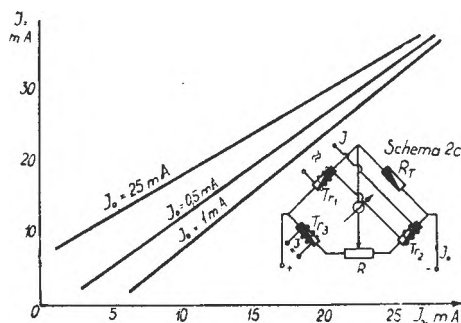


Fig. 9.

**Concluzii.** 1. Din rezultatele măsurătorilor reiese că traductoarele studiate sînt potrivite pentru măsurarea intensității curentului alternativ în domeniul audiofrecvenței.

2. Metoda folosită dă posibilitatea măsurării cu mare precizie a curentului alternativ, întrucît măsurarea intensității curentului alternativ este redusă la măsurarea intensității curentului continuu. Marele avantaj al metodei este acela că se măsoară valori efective, valoarea măsurată fiind independentă de forma curbei curentului. Astfel se poate folosi pentru curenți sinusoidali, nesinusoidali și pentru impulsuri de curent.

3. Rezistența internă este cu cca un ordin de mărime mai mică decît a ampermetrului de mare precizie (clasa de precizie 0,2) care funcționează în același domeniu de măsură. Constanta intensității de curent a aparatului este similară cu a ampermetrelor cu citire directă ce funcționează în același domeniu ( $10^{-4} - 10^{-5}$  A/div). Sensibilitatea aparatului s-ar putea ridica prin mărirea rezistenței bobinajului de încălzire. Însă, în cazul traductoarelor confecționate de noi, scopul principal pe care l-am urmărit a fost de a realiza un dispozitiv pentru măsurarea curentului alternativ cu consum propriu mic, astfel că am renunțat la o mai mare sensibilitate. Prin cuplarea traductoarelor în diferite moduri, putem schimba sensibilitatea și domeniul de măsură al aparatului, fără a utiliza șunturi.

4. Această metodă de măsurare care asigură o precizie ridicată și consum propriu mic ( $10^{-2}$  W) desigur are și dezavantaje față de ampermetrele cu citire directă, în primul rînd în ceea ce privește timpul de măsurare. Timpul de încălzire a aparatului este de cca 5 minute (se referă la puntea de măsură), iar traductoarele ating temperatura finală la aproximativ 3 minute după conectare. În cazul schemelor din categoria a doua, o măsurare necesită și mai mult timp, căci în cazul unei măsurări precise intensitatea curentului continuu de echilibrare urmează să fie măsurată cu un compensator de curent continuu.

## B I B L I O G R A F I E

1. „La technique moderne”, LIII (1961), nr. 4 (apr.), 151.
2. H. J. Schrader, „E.T.Z.” 73 (1952), 547.
3. E. S. Anțeliovici, *Radiotehniceskie izmerenia*. Gosenergoizdat, Moskva—Leningrad, 1958.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ДАТЧИКОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО  
ТЕРМОСОПРОТИВЛЕНИЯ

(Резюме)

В статье описан полупроводниковый датчик, изготовленный из термистора с косвенным нагревом, при помощи которого можно измерять с большой точностью силу переменного тока в области звуковой частоты. Работа датчика основана на равенстве количеств теплоты, испускаемых переменным и постоянным токами.

Даны различные измерительные схемы.

MEASUREMENT OF ALTERNATING CURRENT BY THERMORESISTIVE SEMICONDUCTOR  
TRANSDUCERS

(Summary)

The authors present a thermoresistive transducer, made of an indirect heating thermistor. The apparatus is used in audiofrequency to measure with great precision the intensity of the alternating current. The work of the transducer is based on the equality of the heat amounts disengaged by the alternating and direct current.

Some connecting diagrams are given.



## ASUPRA MATRICEI DENSITĂȚII STĂRILOR DE SPIN

de

Z. GĂBOS și S. BLONDER

În sistemul legat de particula cu masa de repaos  $m_0$  diferită de zero și cu spinul  $s$ , stările de spin sînt descrise de vectorii de stare  $|s, m\rangle$  în număr de  $2s+1$  ( $m = -s, \dots, 0, \dots, s$ ). Numerele cantice  $s$  și  $m$  sînt definite prin

$$\hat{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle, \quad \hat{S}_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle, \quad \hbar = 1$$

( $\hat{S}$  este operatorul momentului cinetic de spin).

Vom folosi în continuare reprezentarea în care vectorii de stare  $|s, m\rangle$  sînt dați de

$$|s, m\rangle = \begin{pmatrix} \delta_{sm} \\ \delta_{s-1 m} \\ \vdots \\ \delta_{-s+1 m} \\ \delta_{-s m} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Este avantajos dacă exprimăm operatorul  $\vec{S}$  în baza sferică

$$S_0^{(1)} = S^{(1)0} = S_3, \quad S^{(1)1} = -S_{-1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 - iS_2), \quad (2)$$

$$S^{(1)-1} = -S_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iS_2), \quad \vec{S}^2 = S_\alpha^{(1)} S^{(1)\alpha}, \quad \alpha = 1, 0, -1.$$

Aceste matrice de bază sînt reale și au  $2s+1$  linii și  $2s+1$  coloane. Ele satisfac relațiile de comutare

$$\begin{aligned} [S_0^{(1)}, S_{-1}^{(1)}] &= -S_0^{(1)} \\ [S_0^{(1)}, S_1^{(1)}] &= S_0^{(1)} \\ [S_1^{(1)}, S_1^{(1)}] &= S_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dacă starea de polarizare a particulei este o stare mixtă, funcția de undă obține printr-o combinație liniară a vectorilor de bază

$$|s\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle = \begin{pmatrix} c_s \\ c_{s-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{-s+1} \\ c_{-s} \end{pmatrix},$$

iar starea de polarizare este caracterizată cu ajutorul matricei densității  $\rho$ . Elementele acestei matrice fiind definite prin

$$c_j c_k^*, \quad j, k = s, \dots, 0, \dots, -s \quad (4)$$

matricea este hermitică:  $\rho^+ = \rho$ .

Matricea  $\rho$  satisface condiția de normare

$$S\rho S = 1. \quad (5)$$

Mai avem

$$S\rho^2 S \leq 1. \quad (6)$$

Dacă avem egalitate, polarizarea este completă, dacă avem inegalitate — polarizarea este parțială.

Una din problemele de bază este determinarea celor  $(2s+1)^2$  matrice de bază, cu ajutorul cărora se poate exprima matricea densității. În baza sferică matricele de bază se notează cu

$$S_\rho^{(n)} \quad \rho = n, \dots, 0, \dots, -n; \quad n = 0, 1, \dots, 2s. \quad (7)$$

W. K o n a r [10] ajunge la aceste matrice utilizând relațiile

$$S_{2m}^{(2m)} = C_{m m m m}^{2m} S_m^{(m)} S_m^{(m)}, \quad S_{2m+1}^{(2m+1)} = C_{2m+1 2m+1}^{2m+1} S_{2m}^{(2m)} S_1^{(1)}, \quad (8)$$

$$[S_{-1}^{(1)}, S_\rho^{(n)}] = \sqrt{(n \mp \rho)(n \pm \rho + 1)} S_\rho^{(n-1)}.$$

(Mărimile notate cu  $C$  sînt coeficienți Clebsch-Gordan).

În această lucrare ajungem la următoarele rezultate:

a) se arată că avem posibilitatea de a ajunge la matricele de bază utilizînd relația de recurență

$$S_\varepsilon^{(n+1)} = \sum_{\alpha, \beta} C_{n+1 \alpha \beta}^{n+1} \{S_\alpha^{(n)}, S_\beta^{(1)}\}, \quad \alpha + \beta = \varepsilon, \quad (9)$$

care este o generalizare a relațiilor (8). (Cu paranteză am notat anticomutatorul mărimilor  $S_\alpha^{(n)}, S_\beta^{(1)}$ );

b) se dau expresiile concrete ale matricelor de bază pentru particulele cu spinul  $1/2, 1, 3/2, 2$ ;

c) se dă o definiție a gradului de polarizare pentru particule cu spin arbitrar;

d) se stabilesc unele rezultate noi în legătură cu stările pure.

1° Utilizând

$$(S_{\alpha}^{(1)})_{jk} = \sqrt{s(s+1)} C_{sk1\alpha}^{sj}, \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 0, -1 \\ j, k = s, \dots, 0, \dots, -s \\ k + \alpha = j \end{array} \quad (10)$$

pe baza relației (9) ajungem la matricele de bază care formează o bază ortogonală

$$Sp(S_{\rho}^{(n)} S^{(m)\tau}) = \Phi(s, n) \delta_{nm} \delta_{\rho\tau}, \quad S_0^{(0)} = 1, \quad (11)$$

unde

$$S^{(m)\tau} = (-1)^{\tau} S_{-\tau}^{(m)} = (-1)^{\tau} \overline{S^{(m)-\tau}}. \quad (12)$$

Pentru matricea  $\rho$  putem scrie

$$\rho(s) = A_{s0} + \sum_{n=1}^{2s} \sum_{\tau=-n}^n A_{sn} P^{(n)\tau} S_{\tau}^{(n)}. \quad (13)$$

$P^{(n)\tau}$  sînt componentele contravariante ale unui vector sferic de rangul  $n$ , și  $A_{s0}$ ,  $A_{sn}$  sînt constante. Putem să ne convingem de acest fapt efectuînd o rotație în jurul axei  $Oz$ . Avem

$$\rho' = U_{\rho} U^{\dagger}, \quad U_{jk} = e^{ij\varphi} \delta_{jk}, \quad j = s, \dots, 0, \dots, -s.$$

Deoarece

$$U S_{\rho}^{(n)} U^{\dagger} = e^{i\rho\varphi} S_{\rho}^{(n)}$$

avem

$$P^{(n)\rho'} = e^{i\rho\varphi} P^{(n)\rho}.$$

Pentru  $Sp\rho^2$ , pe baza relațiilor (11), (13) găsim

$$Sp\rho^2 = (2s+1)A_{s0}^2 + \sum_{n=1}^{2s} \sum_{\tau=-n}^n A_{sn}^2 \Phi(s, n) P_{\tau}^{(n)} P^{(n)\tau}.$$

Putem ajunge la matricea  $\rho$  și pe o altă cale. Introducem mărimile  $M^{(n)\rho}$  prin relațiile

$$\langle s | S^{(n)\rho} | s \rangle = \overline{\langle S^{(n)\rho} \rangle} = B_{sn} M^{(n)\rho} \quad (14)$$

( $B_{sn}$  este o constantă; cu bară am notat valoarea medie a unei mărimi fizice — cea corespunzătoare operatorului  $S^{(n)\rho}$ .) Dacă completăm relațiile (14) cu relația  $Sp\rho = 1$ , pe care o putem scrie sub forma

$$\langle s | S^{(0)0} | s \rangle = 1, \quad (15)$$

avem  $(2s+1)^2$  ecuații pentru cele  $(2s+1)^2$  mărimi  $c_j c_k^*$ , deci (14) și (15) ne conduc tocmai la matricea  $\rho$ .

Dacă punem condițiile

$$M^{(n)\tau} = P^{(n)\tau}, \quad \sqrt{\Phi(s, n)} P^{(n)\tau} = Sp(\rho S^{(n)\tau}),$$

obținem

$$A_{s0} = \frac{1}{2s+1}, \quad A_{sn} = B_{sn} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(s, n)}},$$

prin urmare

$$\rho = \frac{1}{2s+1} + \sum_{n=1}^{2s} \sum_{\tau=-n}^n P^{(n)\tau} S_{\tau}^{(n)},$$

$$Sp\rho^2 = \frac{1}{2s+1} + \sum_{n=1}^{2s} \sum_{\tau=-n}^n P_{\tau}^{(n)} P^{(n)\tau},$$

Definim gradul de polarizare prin

$$P = \frac{1}{2s} [(2s+1)Sp\rho^2 - 1].$$

Se observă că pentru o stare nepolarizată  $P = 0$ , iar pentru starea complet polarizată  $P = 1$ .

2° Introducem următoarea notație

$$R_m(ab \dots pq) = S_a^{(1)} S_b^{(1)} \dots S_p^{(1)} S_q^{(1)} + S_b^{(1)} S_a^{(1)} \dots S_p^{(1)} S_q^{(1)} + \dots$$

În membrul al doilea avem suma tuturor termenii diferiți care se obțin prin permutarea elementelor din expresia  $S_a^{(1)} S_b^{(1)} \dots S_p^{(1)} S_q^{(1)}$ . Indicele  $m$  ne indică numărul acestor termeni. Folosind această notație, pe baza relației (9) găsim

$$S_2^{(2)} = R_1(11), \quad S_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_2(10), \quad S_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2R_1(00) + R_2(1-1)],$$

$$S_3^{(3)} = 2R_1(111), \quad S_2^{(3)} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} R_3(110), \quad S_1^{(3)} = 2\sqrt{\frac{1}{15}} [2R_3(100) + R_3(11-1)],$$

$$S_0^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{5}} [2R_1(000) + R_6(10-1)], \quad S_4^{(4)} = 4R_1(1111), \quad S_3^{(4)} = 2R_4(1110),$$

$$S_2^{(4)} = 2\sqrt{\frac{1}{7}} [2R_6(1100) + R_4(111-1)], \quad S_1^{(4)} = 2\sqrt{\frac{1}{7}} [2R_4(1000) + R_{12}(110-1)],$$

$$S_0^{(4)} = 2\sqrt{\frac{2}{35}} [4R_1(0000) + 2R_{12}(100-1) + R_6(11-1-1)].$$

Expresiile concrete ale matricelor de bază corespunzătoare particulelor cu spinul  $1/2, 1, 3/2, 2$  sînt cuprinse în anexă.

3° În continuare să considerăm cazul particular al stărilor pure. Avînd în vedere că prin folosirea relațiilor de comutare, matricele de tipul  $S^{(n)0}$  pot fi exprimate cu ajutorul matricilor  $S^{(1)0}$  și  $S^{(1)0} S^{(1)\alpha}$  pentru stări pure obținem următoarele expresii ale mărimilor  $P^{(n)0}$ :

$$P^{(1)0} = \frac{m_3}{\sqrt{\Phi(s, 1)}}, \quad (15)$$

$$P^{(2)0} = \frac{3m_3^2 - s(s+1)}{\sqrt{6\Phi(s, 2)}}, \quad (16)$$

$$P^{(3)0} = \sqrt{\frac{2}{5\Phi(s, 3)}} m_3 [5m_3^2 - 3s(s+1) + 1], \quad (17)$$

$$P^{(4)0} = \sqrt{\frac{2}{35\Phi(s, 4)}} [35m_3^4 + 25m_3^2 - 30m_3^2 s(s+1) + 3[s(s+1)]^2 - 6s(s+1)]. \quad (18)$$

Pentru  $n = 1, 2$  avem rezultatele bine cunoscute din literatură [5].

4° *Anexă.*

A. Spinul 1/2.

$$S_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}.$$

B. Spinul 1.

$$S_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Phi(1, 1) &= 2, \\ \Phi(1, 2) &= 1. \end{aligned}$$

C. Spinul 3/2.

$$S_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$S_2^{(2)} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1^{(2)} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_3^{(3)} = 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(3)} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1^{(3)} = 3\sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0^{(3)} = 3\sqrt{\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 5, \quad \Phi\left(\frac{3}{2}, 2\right) = 6, \quad \Phi\left(\frac{3}{2}, 3\right) = 18.$$

D. Spinul 2.

$$S_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_3^{(3)} = -6\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2^{(3)} = 6\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1^{(3)} = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0^{(3)} = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S_4^{(4)} = 24 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(4)} = 12\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2^{(4)} = \frac{12}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_1^{(4)} = 12 \sqrt{\frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_0^{(4)} = 12 \sqrt{\frac{2}{35}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(2, 1) = 10, \Phi(2, 2) = 21, \Phi(2, 3) = 144, \Phi(2, 4) = 576.$$

(Intrat în redacție la 12 iulie 1967)

BIBLIOGRAFIE

1. E. M. Condon, G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge, 1953.
2. W. Lakin, „Phys. Rev.” **98**, p. 169, 1955.
3. U. Fano, „Revs. Mod. Phys.” **29**, p. 74, 1957.
4. L. C. Biedenharn, „Ann. of Phys.” **4**, p. 104, 1958.
5. A. I. Ahiezer, V. B. Berestețki, *Kvantovata elektrodinamika*, ediția a doua, Moscova, 1959, p. 31, 59–67, 283–284.
6. A. R. Edmonds, *Angular Momenta in Quantum Mechanics*, Princeton-New Jersey, second edition, 1960.
7. N. Byers, S. Fenster, „Phys. Rev. Lett.”, **11**, p. 52, 1963.
8. R. H. Dalitz, *Lectures Given at the Intl. School of Physics „Enrico Fermi” on Strong Interactions*, Varenna, 1964.
9. I. Brînduș, „Studii și cercetări de fizică,” **17**, p. 135, 1965.
10. W. Konar, „Bull. de l’Acad. Polonaise des Sci.” (série math.—astr.—phys.), **13**, p. 495, 1965.
11. K. Hehl, *Fortschritte der Physik*, **13**, p. 557, 1965.
12. A. Sankaranarayanan, „Il Nuovo Cimento”, **41**, p. 532, 1956.
13. C. J. Mullin, J. M. Keller, C. L. Hammer, R. H. Good Jr., „Ann. of Phys.” **37**, p. 55, 1966.
14. R. H. Dalitz, „Nuclear Physics” **87**, p. 89, 1966.
15. P. Minnaert, „Phys. Rev. Lett.” **16**, 672, 1966.

О МАТРИЦЕ ПЛОТНОСТИ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ

(Резюме)

В статье даётся матрица плотности для частиц со спином 1/2, 1, 3/2, 2. Основные матрицы  $S_p^{(n)}$  получаются используя отношения (9), (10). На основе полученных результатов устанавливаются выражения (17), (18), свойственные чистым состояниям.

ON THE DENSITY MATRIX OF THE SPIN STATES

(Summary)

The density matrix for the particles with the spin 1/2, 1, 3/2, 2 is given. Making use of the relations (9), (10) the basic matrices  $S_p^{(n)}$  are obtained. The author establishes the expressions (17), (18) which are valid for pure states.





# ECUAȚII BLOCH GENERALIZARE PENTRU RELAXAREA SCALARĂ

de  
DAN DEMCO

§ 1. **Introducere.** Să considerăm două sisteme de spini  $I$  și  $S$  care nu sînt identice și pentru care facem următoarele presupuneri în scopul definirii modelului pe care ne vom baza în considerațiile ulterioare:

a) Spinii sistemului  $I$  sînt independenți, ceea ce permite a considera un singur spin avînd factorul giromagnetic  $\gamma$ . Sistemul este plasat într-un aranjament tipic de rezonanță.

b) Sistemul de spin  $I$  interacționează scalar cu sistemul de spin  $S$ . Cuplajul scalar  $\sum_i A_i I \cdot S_i$ , poate deveni un mecanism de relaxare pentru spinul  $I$ , dacă cîmpul pe care-l „vede” proporțional cu  $\sum_i A_i S_i$  are o dependență haotică de timp, cauzată fie de variația lui  $A$  din cauza schimbului chimic cu constanta de timp  $\tau_c$  sau a relaxării sistemului de spin  $S$ , unul dintre aceste procese fiind predominant. Presupunem că  $\tau_c$  este mult mai mare ca timpii de relaxare  $\tau_i$  ai sistemului  $S$  datorită unui alt mecanism decît cuplajul scalar.

c) Sistemul  $S$  se află în contact cu o „baie” propriu-zisă ( $B$ ) ce o presupunem a fi în echilibru termodinamic și a cărei comportare disipativă o caracterizăm prin timpul de corelare  $\tau_c$ . Vom considera că  $\tau_c/\tau_i \ll 1$ . Spinii  $S_i$  nu efectuează o variație destul de rapidă în jurul lui  $I$  astfel încît  $\tau_i/\tau_c$  poate fi arbitrar ( $\tau_c$  este o măsură a timpilor de relaxare a sistemului  $I$ ).

d) Interacțiunile  $I-S$  și  $S-B$  sînt presupuse a fi independente una de alta. Interacțiunea  $I-B$  este neglijabilă în comparație cu  $I-S$ . Operatorul de spin  $\sum_i S_i$  este considerat un operator de „baie” pentru sistemul  $I$  [1].

Urmarea ipotezei c) este apariția efectelor de „memorie” în ecuația de evoluție a sistemului  $I$ . Sistemul  $I$  relaxează după o ecuație nemarkoffiană în opoziție cu procesul de relaxare a lui  $S$  [2, 3].

Aplicînd teoria lui *Argyres* și *Kelly* o să obținem o ecuație nemarkoffiană pentru evoluția în timp a operatorului de densitate statistică a sistemului  $I$ , ce ne permite să studiem răspunsul sistemului la un cîmp exterior arbitrar — în particular problema apropierei de echilibru termic și fenomenul de saturație. Se

\* În elaborarea acestei lucrări autorul s-a bucurat de sprijinul prof. Ioan Ursu și lector Florin Constantinescu, cărora le aduce mulțumiri.

obține o ecuație pentru magnetizarea stării staționare cu patru timpi de relaxare, toți dependenți, în general, de frecvența și tăria cîmpului rotitor. Se discută cîteva cazuri particulare.

Rezultatele noi ca și cele ale teoriilor anterioare sînt obținute în aproximația Born cea mai joasă pentru tăria mecanismului de relaxare scalar și pentru  $\tau_i/\tau_r \ll 1$ .

§ 2. **Ecuația generală de mișcare a sistemului I.** Argyres și Kelley obțin pentru cazul unui hamiltonian de spin arbitrar  $A(t)$  (în el este inclus și  $A_0 \equiv -\omega_0 I_z$  ce reprezintă termenul Zeeman), în aproximația Born cea mai joasă și pentru  $t > \tau_i$ , următoarea ecuație de mișcare cu „memorie” pentru operatorul de densitate redus  $\sigma(t)$  a sistemului  $I$  ( $\hbar = 1$ ),

$$-\frac{d}{dt} \sigma(t) = -ia(t) \sigma(t) + \mathcal{E}_0(t, \{\sigma\}) \quad (1)$$

unde  $a(t)$  reprezintă operatorul Liouville corespunzător lui  $A(t)$  iar  $\mathcal{E}_0(t, \{\sigma\})$  este operatorul de ciocnire cu „baia”,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(t, \{\sigma\}) = & - \sum_{k\lambda} \int_0^t d\tau \{ C_{k\lambda}(\tau) [V_k, S_s(t, t-\tau) V_\lambda \tau(t-\tau)] - \\ & - C_{\lambda k}(-\tau) [V_k, S_s(t, t-\tau) \sigma(t-\tau) V_\lambda] \} \end{aligned} \quad (2)$$

În (2),  $v_k$  și  $u_k$  sînt operatori pentru spin și „baie” după care se dezvoltă interacțiunea de relaxare  $V = \sum_k u_k v_k$  iar  $S_s(t, \tau) \sigma = U(t, \tau) \sigma U^{-1}(t, \tau)$  unde

$$U(t, t-\tau) = e^{i\omega I_z t} e^{-iA' \tau} e^{-i\omega I_z (t-\tau)} \quad (3)$$

în care  $A' = -I\omega_e$  unde  $\Delta \equiv \omega_0 - \omega$  și  $\omega_1 = (\omega_1, 0, \Delta)$ .

Funcțiile de corelare termodinamice (nesimetrizate) sînt definite,

$$C_{k\lambda}(\tau) = \text{tr}_f(B) u_k(\tau) u_\lambda \quad (4)$$

unde  $f(B)$  este matricea de densitate a „băii” la echilibru termodinamic.

În opoziție cu forma semiclassicală a relaxării analizată în aplicația din [2], deoarece acum operatorii de „baie” sînt cuantici trebuie să utilizăm forma cuantomecanică a teoriei. Pentru cazul cînd avem o simetrie sferică a distribuției spinilor  $S_i$  în jurul unui spin  $I$  putem scrie,

$$C_{k\lambda}(\tau) = C^{k,-k}(\tau) \delta_{k,-\lambda} \equiv C_k(\tau) \delta_{-k\lambda} \quad (5)$$

În sistemul de referință ce se rotește în jurul axei  $z$  cu frecvența unghiulară  $\omega$ , obținem, utilizînd (5), (2) și (3), pentru starea staționară, ecuația operatorului de densitate a sistemului  $I$ ,  $\sigma^r(\omega)$ , sub forma:

$$-ia^r \sigma^r(\omega) + \mathcal{E}_0^r(\omega) \sigma^r(\omega) = 0 \quad (6)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^r(\omega) \sigma^r(\omega) = & - \sum_k [I_{-k}, j_{-k}^+(k\omega - a^r) [I_k, \sigma^r(\omega)] + \\ & + j_{-k}^-(k\omega - a^r) [I_k, \sigma^r(\omega)] + \end{aligned} \quad (7)$$

în care densitățile spectrale  $j^{\pm}$  sînt date de,

$$j_k^{\pm}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} C_k^{\pm}(\tau) \quad (8)$$

cu  $C_k^{\pm}(\tau) = \frac{1}{2}[C_k(\tau) \pm C_{-k}(-\tau)]$ . În aproximația temperaturilor înalte și pentru ordinul cel mai mic în  $\beta \equiv (kT)^{-1}$  avem :

$$j_k^+(\omega) = j_k(\omega); j_k^-(\omega) = j_k(\omega)(\beta\omega/2) - i(\beta/2)C_k^+(0) \quad (9)$$

Dacă utilizăm rezultatele din [2], (6) și (7) obținem magnetizarea stării staționare pentru un spin arbitrar în sistemul de referință rotitor,  $M'_{\mu}(\omega) = n\gamma t_r \{I_{\mu}\sigma'(\omega)\}$  ( $n$  este densitatea spinilor) sub forma :

$$\begin{aligned} & (-i)n\gamma \hbar \{ [I_{\mu}a' + \sum_{k\nu\lambda} (-1)^{\mu+k} (k-\mu)\alpha_{\mu+k,\nu}(-\theta)\alpha_{\nu\lambda}(\theta) \times \\ & \quad \times (\beta/2)C_k^+(0)[I_{\lambda}, I_{-k}]_+ \} \sigma'(\omega) \} + \\ & + \sum_{k\nu\lambda} (-1)^{\mu+k} (k-\mu)\alpha_{\mu+k,\nu}(-\theta)\alpha_{\nu\lambda}(\theta) j_k(-\nu\omega e - k\omega) \times \\ & \times \{ (-1)^{\lambda-k}(\lambda+k)M_{\lambda-k}(\omega) + (\chi_0/\gamma)(-\nu\omega e - k\omega)\delta_{\lambda k}\varepsilon_k \} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

în care  $\alpha_{\mu\nu}(\theta)$  sînt date de :

$$\begin{aligned} 2\alpha_{11} - 1 &= 2\alpha_{-1,-1} - 1 = 2\alpha_{1,-1} + 1 = 2\alpha_{-1,1} + 1 = \alpha_{00} = \cos\theta = \Delta/\omega e \equiv C \\ 2\alpha_{0,-1} &= 2\alpha_{0,-1} = -\alpha_{-10} = -\alpha_{1,0} = \sin\theta = \omega_1/\omega e \equiv s \end{aligned}$$

iar  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{-1} = 2\varepsilon_0 = 2$  și  $\chi_0 = n\gamma^2\beta I(I+1)/3$ . În primul termen al egalității (10) avem o expresie de ordinul doi în  $V$  în care în ipoteza  $|A| \gg |V|$  poate fi neglijat în comparație cu  $I_{\mu}a'$ . Putem interpreta acest lucru ca o renormalizare de ordinul doi în interacțiunea spin-baie a energiei spinilor  $I$  [4]. Prin urmare considerentel ulterioare bazate pe (10) au o natură cantitativă în opoziție cu [2].

§ 3. **Ecuațiile Bloch generalizate.** Luînd în considerație cele de mai sus, din (10) obținem pentru  $M'$  ( $\omega$ ) sistemul de ecuații :

$$\begin{pmatrix} T_x^{-1} & -(\Delta + N_0) & T_{xz}^{-1} \\ \Delta + N_0 & T_y^{-1} & -(\omega_1 + N_1) \\ T_{xy}^{-1} & \omega_1 + N_1 & T_z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\chi_0}{\gamma} \right) \begin{pmatrix} T_{xz}^{-1}\omega + D_x\omega_e \\ -N_1\omega + D_y\omega_e \\ T_z^{-1}\omega + D_z\omega_e \end{pmatrix} \quad (11)$$

unde cei patru timpi de relaxare sînt :

$$T_x^{-1} = j'_0(\omega_e) + 2c^2j'_{-1}(\omega) + s^2j'_{-1}(\omega + \omega_e) + s^2j'_{-1}(\omega - \omega_e) \quad (12a)$$

$$T_z^{-1} = T_x^{-1} + s^2[j'_0(0) - j'_0(\omega_e)] \quad (12b)$$

$$T_y^{-1} = 2s^2j'_{-1}(\omega) + (C+1)^2j'_{-1}(\omega + \omega_e) + (C-1)^2j'_{-1}(\omega - \omega_e) \quad (12c)$$

$$T_{xz}^{-1} = s[-2Cj'_{-1}(\omega) + (C+1)j'_{-1}(\omega + \omega_e) + (C-1)j'_{-1}(\omega - \omega_e)] \quad (12d)$$

cele două deplasări de frecvență,

$$N_0 = -Cj_0''(\omega_e) + 2C^2j_{-1}''(\omega) + s^2j_{-1}''(\omega - \omega_e) + s^2j_{-1}''(\omega + \omega_e) \quad (12 e)$$

$$N_1 = s[2Cj_{-1}''(\omega) - (C - 1)j_{-1}''(\omega - \omega_e) - (C + 1)j_{-1}''(\omega + \omega_e)] \quad (12 f)$$

și

$$D_x = s[j_0'(\omega_e) - (C - 1)j_{-1}'(\omega - \omega_e) + (C + 1)j_{-1}'(\omega + \omega_e)] \quad (12 g)$$

$$D_y = s[-Cj_0''(\omega_e) - (C - 1)j_{-1}''(\omega - \omega_e) + (C + 1)j_{-1}''(\omega + \omega_e)] \quad (12 h)$$

$$D_z = -(C + 1)^2j_{-1}'(\omega - \omega_e) + (C + 1)^2j_{-1}'(\omega + \omega_e) \quad (12 i)$$

În aceste expresii  $j'(\omega)$  și  $j''(\omega)$  sînt părțile reale și imaginare ale lui  $j(\omega)$ .

Ecuatiile (11) reprezintă generalizarea ecuațiilor fenomenologice ale lui Bloch pentru starea staționară referitoare la un sistem de coordonate ce se rotește cu câmpul transversal. Timpii de relaxare și deplasările de frecvență depind de toți cei trei parametri de frecvență ai sistemului  $\omega$ ,  $\omega_1$  și  $\omega_0$ , caracterizînd deci, punctual, nu global, linia de absorbție ce nu are în general un caracter lorentzian. Ecuatiile (11) conțin efecte de „memorie”.

§ 4. **Analiza cazurilor particulare.** Să analizăm expresiile timpilor de relaxare și ale deplasărilor de frecvență (12), în următoarele cazuri particulare:

A. *Cîmpul transversal slab în jurul rezonanței.* Dacă  $\omega_1, |\Delta| \gg \omega_0$  noi avem  $j_{-1}(\omega \pm \omega_e) \approx j_{-1}(\omega)$  cu toate că  $\omega_1^2 T_y T_z$  și  $\omega_1 \tau_i$  pot fi mari. Din (12) obținem:

$$T_x^{-1} = j_0'(\omega_e) + 2j_{-1}'(\omega); \quad T_y^{-1} = T_x^{-1} + s^2[j_0'(0) - j_0'(\omega_e)] \quad (13 a)$$

$$T_z^{-1} = 4j_{-1}'(\omega); \quad N_0 = -Cj_0''(\omega_e) + 2j_{-1}''(\omega) \quad (13 b)$$

$$D_x = sT_x^{-1}; \quad D_y = sN_0; \quad D_z = CT_z^{-1} \quad (13 c)$$

iar toți ceilalți sînt nuli. Analog cu Argyres și Kelley se poate arăta că la saturație avem o comportare diferită a semnalelor de absorbție și dispersie. Toate celelalte concluzii obținute în [2] rămîn valabile însă referitor la expresiile (13).

B. *Cîmpul transversal foarte slab în jurul rezonanței.*

Dacă  $\omega_1, |\Delta| \ll \omega_0, \tau_i^{-1}$  atunci,

$$T_x^{-1} = T_y^{-1} = j_0'(0) + 2j_{-1}'(\omega) \quad (14 a)$$

$$T_z^{-1} = 4j_{-1}'(\omega); \quad N_0 = 2j_{-1}''(\omega) \quad (14 b)$$

$$D_x = sT_x^{-1}; \quad D_y = sN_0; \quad D_z = CT_z^{-1} \quad (14 c)$$

toți ceilalți fiind nuli. Observăm că toți timpii de relaxare depind de frecvența câmpului rotitor și apare în plus o deplasare de frecvență Larmor.

C. *Cîmpul transversal lent rotitor.* Dacă  $\omega\tau_i \ll 1$  și  $\omega_e\tau_i \ll 1$ , însă  $\omega_1/\omega_0$  este arbitrar, din (12) obținem:

$$T_x^{-1} = T_y^{-1} = j_0'(0) + 2j_{-1}'(0) \quad (15 a)$$

$$T_z^{-1} = 4j_{-1}'(0) \quad (15 b)$$

$$N_0 = 2j_{-1}''(0) \quad (15 c)$$

ceilalți termeni fiind nuli sau dați de (13c). Expresiile magnetizărilor obținute din (11) împreună cu (15) pot fi aplicate și la cazul unui câmp rotitor pur, adică pentru  $\omega_0 = 0$ .

§ 5. **Densitățile spectrale pentru „baia” cuantică.** Interacțiunea dintre cele două sisteme  $I$  și  $S$ , responsabilă pentru relaxarea spinului  $I$  are forma ( $\hbar = 1$ ),

$$V = \sum_i AI.S_i = AI.S = \sum_k u_k v_k \quad (16)$$

unde  $S = \sum S_i$ . Operatorii de spin  $v_k$  sînt:

$$V_0 = I_z \quad ; \quad V_1 = I_+ \quad ; \quad V_{-1} = I_- \quad (17)$$

iar operatorii „băii” cuantice au forma:

$$u_0 = AS_x \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2} AS_- \quad ; \quad u_{-1} = \frac{1}{2} AS_+ \quad (18)$$

„Baia” responsabilă pentru relaxarea spinului  $I$  determină necesară forma cuanto-mecanică a teoriei relaxării, în care densitățile spectrale cuprind operatori cuanto-mecanici.

Dacă presupunem, de exemplu, că mișcarea sistemului de spin  $S$ , ca urmare a ipotezelor c) și d) poate fi descrisă prin ecuații fenomenologice Bloch [1] (relaxare scalară de speța a doua în lichide), cu timpii de relaxare  $\tau_i$ , ( $i = 1, 2$ ), putem calcula ușor funcțiile de corelare cuantice pentru „baie”,

$$C_0(\tau) = \frac{A^2 S(S+1)}{3} e^{-\tau/\tau_1} \quad (19a)$$

$$C_1 \cong (\tau) \frac{A^2 S(S+1)}{6} e^{i\omega_0^S \tau} e^{-\tau/\tau_1} \quad (19b)$$

$$C_{-1}(\tau) \cong \frac{A^2 S(S+1)}{6} e^{-i\omega_0^S \tau} e^{-\tau/\tau_1} \quad (19c)$$

unde  $\omega_0^S$  este pulsația Larmor a spinului  $S$ .

Utilizînd expresia densităților spectrale (8) pentru funcțiile de corelare  $C_k(\tau)$  date de (19), obținem:

$$J_0(\omega) = \frac{A^2 S(S+1)}{3} \frac{\tau_1 + i\omega\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (20a)$$

$$J_{+1}(\omega) = \frac{A^2 S(S+1)}{6} \frac{\tau + i\tau_2^2(\omega + \omega_0^S)}{1 + \tau_2^2(\omega + \omega_0^S)^2} \quad (20b)$$

$$J_{-1}(\omega) = \frac{A^2 S(S+1)}{6} \frac{\tau_2 + i\tau_2^2(\omega - \omega_0^S)}{1 + \tau_2^2(\omega - \omega_0^S)^2} \quad (20c)$$

În cazul unui „spectru alb” de frecvențe a „băii” propriu zise avem  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ;  $\tau_i \equiv \tau$  ce reprezintă timpul de corelare al „băii” sistemului  $I$ .

§ 6. **Concluzii.** Rezultatele obținute (11) și (12) pot fi aplicate la o mare varietate de situații fizice concrete, unde se evidențiază pregnant efectele de „memorie”. Pentru aceasta trebuie să considerăm pe viitor în acest formalism și interacțiunea dipol-dipol ca mecanism de relaxare [5–6].

Ca exemplu în cazul relaxării scalare de speța a doua, putem obține expresiile timpilor de relaxare și ale deplasărilor de frecvență în cazurile *A*, *B* și *C* utilizând densitățile spectrale (20).

Teoria cu „memorie” a relaxării dată de Argyres și Kelley diferă de o teorie în care aproximația memoriei este valabilă numai în regiunea centrală a liniei de absorbție,  $|\omega - \omega_0| \leq \tau_r^{-1}$ , dacă  $\tau_i |\tau_r| \geq 1$ . Utilizând [2], obținem pentru aproximația memoriei în cazul câmpului transversal slab în jurul rezonanței,

$$T_x^{-1} = j'_0(\omega_1) + 2J_{-1}'(\omega_0) ; T_y^{-1} = J'_0(0) + 2J_{-1}'(\omega_0) \quad (21a)$$

$$T_z^{-1} = 4j'_{-1}(\omega_0) \quad (21b)$$

$$N_1 = 2j_{-1}''(\omega_0) \quad (21c)$$

Dacă introducem în (21) expresiile densităților spectrale (20) obținem :

$$T_x^{-1} = \frac{A^2 S(S+1)}{3} \left[ \frac{\tau_1}{1 + \omega_1^2 \tau_1^2} + \frac{\tau_2}{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega_0^S)^2} \right] \quad (22a)$$

$$T_y^{-1} = \frac{A^2 S(S+1)}{3} \left[ \tau_1 + \frac{\tau_2}{1 + \tau_2^2 (\omega_0 - \omega_0^S)^2} \right] \quad (22b)$$

$$T_z^{-1} = \frac{2A^2 S(S+1)}{3} \frac{\tau_2}{1 + \tau_2^2 (\omega_0 - \omega_0^S)^2} \quad (22c)$$

$$N_0 = \frac{A^2 S(S+1)}{3} \frac{\tau_2^2 (\omega_0 - \omega_0^S)}{1 + \tau_2^2 (\omega_0 - \omega_0^S)^2} \quad (22d)$$

Pentru cazul unui „spectru alb” al lui *B* (22 a) coincide cu rezultatul din [7], unde verificarea experimentală este făcută pe formamidă, numai pentru  $T_x^{-1}$ .

Dacă câmpul transversal este foarte slab, atunci formulele (22 a–c) coincid cu rezultatele din [8] și [9]. Formula (22 d) a deplasării de frecvență poate fi comparată cu datele experimentale ale lui Dickinson. [10].

În ipoteza câmpului lent rotitor, a unui „spectru alb” de frecvențe pentru baia propriu-zisă și pentru  $\omega_0^S \tau \ll 1$  din (15) și (20) rezultă:

$$T_{x,y,z}^{-1} = \frac{2A^2 S(S+1)}{3} \tau ; N_0 = 0 \quad (23)$$

Magnetizarea stării staționare este dată prin expresiile :

$$M_x' + iM_y' = (\chi_0 \gamma) \omega_1 \left[ 1 + \frac{\omega(\Delta + iT^{-1})}{T^{-2} + \omega e^2} \right] \quad (24a)$$

$$M_z' = (\chi_0 \gamma) \left[ \omega_0 - \frac{\omega \omega_1^2}{T^{-2} + \omega e^2} \right] \quad (24b)$$

Expresiile de mai sus, împreună cu (23), ne permit să analizăm și cazul câmpului rotitor pur  $\omega_0 = 0$ .

Indicațiile cuprinse în [1] permit să obținem din (13), (14) și (15) formulele ce caracterizează și relaxarea scalară de speța întâi.

Metoda prezentată permite analiza procesului de relaxare a protonilor în soluții de  $Mn^{2+}$  datorită cuplajului hiperfin în cazul saturației sau a cîmpului rotitor pur, ceea ce completează teoria liniară dezvoltată în [11].

Formalismul mai general decît al lui Argyres și Kelley dezvoltat de Robertson [12] împreună cu [13] va fi utilizat într-o lucrare viitoare pentru analiza mecanismului de relaxare prezentat în acest articol.

(Intrat în redacție la 29 septembrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] A. Abragam *The Principles of Nuclear Magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1961.
- [2] P. N. Argyres, P. L. Kelley, „Phys. Rev.” 134, 98, (1964).
- [3] P. Borckmans, D. Walgraef, „Physica”, 35, 80 (1967).
- [4] D. Demco, „Rev. Roum. Phys.” (sub tipar).
- [5] E. L. Hahn, R. L. Strombotne, „Phys. Rev.” 133, 1616 (1964).
- [6] S. Philippot, D. Walgraef, „Physica”, 32, 1283 (1966).
- [7] I. Solomon, „C. R. Acad. Sci.” 24, 1631 (1959).
- [8] N. Bloembergen, „J. Chem. Phys.” 27, 572, (1957).
- [9] J. Winter, „C.R. Acad. Sci.” 249, 1346 (1959).
- [10] W. C. Dickinson, „Phys. Rev.” 31, 717 (1951).
- [11] D. Sames, D. Michel, „Ann. Phys.” 18, 353 (1966).
- [12] B. Robertson, „Phys. Rev.” 153, 391 (1967).
- [13] J. L. Motchane, P. Papon, „Phys. Rev.” 141, 246 (1966).

#### ОБОБЩЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЛОХА ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

(Резюме)

Применив теорию с „памятью” Аргиреса и Келли [1], в случае скалярной релаксации двух систем спинов, получаются обобщённые уравнения Блоха, что позволяет изучать ответ системы на произвольное внешнее поле. Подробно изучаются несколько частных случаев. Анализируется скалярная релаксация второго рода в жидкостях и сравнивается с результатами предыдущих теорий.

#### GENERALIZED EQUATIONS OF BLOCH FOR SCALAR RELAXATION

(Summary)

Applying Argyres and Kelley “memory” theory in the case of scalar relaxation of two spin systems one obtains the generalized equations of Bloch having thus the possibility to study the reaction of the system to an arbitrary external field. Some particular cases are discussed in detail. The scalar relaxation of the second kind in liquids has been analyzed and compared with the results of earlier theories.





CALCULATION OF THE ENERGETIC LEVELS FOR AN  ${}^6S_{5/2}$  ION  
SITUATED IN CUBIC CRYSTALLINE FIELD WITH AXIAL DEFORMATION  
IN THE  $\langle 111 \rangle$  DIRECTION

by

S. V. NISTOR and G. MIHALI

**1. Introduction.** In the last few years the ESR studies of the alkali halides crystals doped with ions in the fundamental state  ${}^6S_{5/2}$  ( $\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{Mn}^{2+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$ ) have showed the appearance of a crystalline field with axial symmetry superimposed on the cubic crystalline field which exists in the neighbourhood of the paramagnetic ion [1–6]. This results from the deformation of the cubic crystalline field because of the vacancy or impurity atoms association near the manganese ion. The most favourable directions for these deformations [5] are along the  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  and  $\langle 111 \rangle$  directions. For the detailed study of these deformations by ESR method the accurate determination of the spin Hamiltonian constants is very important. This determination can be effected knowing the expressions for the transition fields, respectively for the spinorial energetic levels. To this purpose we have calculated the values of the energetic levels of the  ${}^6S_{5/2}$  ion for the deformation along the  $\langle 111 \rangle$  direction (The deformation along the  $\langle 110 \rangle$  direction has been calculated [7]).

**2. Calculation of the Energetic Levels.** We shall consider an ion in the fundamental state  ${}^6S_{5/2}$  (the magnetic momentum of the nucleus being  $I = 0$ ) situated in a cubic crystalline field with an axial deformation. The  $Oxyz$  coordinates associated with the axial component of the crystalline field is rotated with respect to the  $O_{\xi\eta\zeta}$  coordinates associated with the cubic component by the Euler angles  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$  and  $\gamma = 0$ . In this case the  $Oz$  axis is along the direction  $[111]$  in the cubic system of coordinates.

For the calculation of the energetic levels which correspond to the fundamental state we shall employ the spin Hamiltonian [8].

$$H_s = g\beta\vec{H}\vec{S} + D \left[ S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \frac{a}{6} \left[ S_{\xi}^4 + S_{\eta}^4 + S_{\zeta}^4 - \frac{1}{5} S(S+1)(3S^2 + \right. \\ \left. + 3S + 1) \right] + \frac{F}{180} [35S_{\xi}^4 - 30S(S+1)S_{\xi}^2 + 25S_{\xi}^2 - 6S(S+1) + 3S^3(S+1)^2] \quad (1)$$

Using the spinorial operators  $O_e^m$  tabulated by Orbach [9] the spin Hamiltonian can be written as:

$$H_s = g\beta\vec{H}\vec{S} + \frac{D}{3}O_2^0(S_x, S_y, S_z) + \frac{F}{180}O_4^0(S_x, S_y, S_z) + \frac{a}{120}O_4^0(S_z, S_y, S_x) + \frac{a}{24}O_4^4(S_z, S_y, S_x) \quad (2)$$

Rotating the operators  $O_e^m$  [10–11] we obtain the homogeneous spin Hamiltonian:

$$H_s = g\beta\vec{H}\vec{S} + \frac{D}{3}O_2^0 - \frac{a-F}{180}O_4^0 - \frac{a\sqrt{2}}{9}O_4^3. \quad (3)$$

For the calculation of the eigenvalues we shall rotate the spin Hamiltonian with the Euler angles  $\alpha = \varphi$ ,  $\beta = \theta$  and  $\gamma = 0$ , the components of the magnetic field in the  $Oxyz$  coordinates being

$$H_x = H \sin\theta \cos\varphi; \quad H_y = H \sin\theta \sin\varphi; \quad H_z = H \cos\theta \quad (4)$$

In these new coordinates associated to magnetic field the expression of the spin Hamiltonian becomes:

$$H_s = g\beta HS_x + \frac{D}{3}(A_0O_2^0 + A_1O_2^1 + A_2O_2^2) + \sum_{i=0}^4 Z_i O_4^i \quad (5)$$

where

$$Z_i = -\frac{a-F}{180}B_i - \frac{a\sqrt{2}}{9}C_i \quad (i = 0, 1, \dots, 4) \quad (6)$$

and

$$A_0 = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}; \quad A_1 = -3\sin 2\theta; \quad A_2 = \frac{3}{2}\sin^2\theta \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \cos^4\theta - 3\sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{3}{8}\sin^4\theta \\ B_1 &= -10\sin\theta \left( 2\cos^3\theta - \frac{3}{2}\sin^2\theta \cos 2\theta \right) \\ B_2 &= 5\sin^2\theta \left( 3\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) \\ B_3 &= -35\sin^3\theta \cos\theta \\ B_4 &= \frac{35}{8}\sin^4\theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{8} \sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi \\
C_1 &= \frac{1}{4} [\sin^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \cos 3\varphi \mp 3i \sin 3\varphi \sin^2 \theta \cos \theta] \\
C_2 &= \frac{1}{4} [2 \sin \theta \cos^3 \theta \cos 3\varphi \mp i \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 3\varphi] \\
C_3 &= \frac{1}{4} [(4 \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta - 3) \cos 3\varphi \mp i \cos \theta (9 \cos^2 \theta - 5) \sin 3\varphi] \\
C_4 &= -\frac{1}{16} [\sin 2\theta (\cos^2 \theta + 3) \cos 3\varphi \mp 2i \sin \theta (3 \cos^2 \theta + 1) \sin 3\varphi]
\end{aligned} \tag{9}$$

If we consider the Zeeman term  $g\beta HS_z$ , the biggest in the spin Hamiltonian (5) (the strong magnetic field approximation), we can apply the perturbation method. In this case the eigenvalues of (5) are given by the relation [12]:

$$\begin{aligned}
W_M &= W_M^0 + \langle M | H_p | M \rangle + \sum_{M'} \frac{|\langle M | H_p | M' \rangle|^2}{W_M^0 - W_{M'}^0} + \\
&+ \sum_{M'} \sum_{M''} \frac{\langle M | H_p | M' \rangle \langle M' | H_p | M'' \rangle \langle M'' | H_p | M \rangle}{(W_M^0 - W_{M'}^0)(W_{M'}^0 - W_{M''}^0)} - \\
&- \langle M | H_p | M \rangle \sum_{M'} \frac{|\langle M | H_p | M' \rangle|^2}{(W_M^0 - W_{M'}^0)^2} + \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

where

$$H_s = g\beta HS_z + H_p; \quad W_M^0 = g\beta HM \tag{11}$$

Considering the magnetic field variable we obtain in the third approximation the magnetic fields which correspond to the transitions  $\Delta M = \pm 1$ :

$$\begin{aligned}
H_{\pm \frac{5}{2} \rightarrow \pm \frac{3}{2}} &= H_0 \mp 4DA_0 \pm \frac{4}{3} (a - F)B_0 \pm \frac{80\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{1}{4} \left[ 10 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 - \right. \\
&- 2 \left| \frac{1}{3} DA_1 - 15Z_1 \right|^2 + 5 \left| \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right|^2 - |DA_2 - 15Z_2|^2 + 30|Z_3|^2 \left. \right] \mp \\
&\mp \frac{1}{H^2} \left\{ 15 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right) \left( \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right) \left( \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2^* \right) + \text{compl. conj.} \right] - \right. \\
&- 25 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right) (DA_2 + 15Z_2^*) Z_3^* + \text{compl. conj.} \right] + 60 \left[ Z_3 Z_4^* \left( \frac{1}{3} DA_1 + \right. \right. \\
&+ 15 Z_1^* \left. \right) + \text{compl. conj.} \left. \right] - 60 (DA_0 + 10Z_0) |Z_3|^2 - 20 (DA_0 - 60Z_0) \left[ 18|Z_4|^2 + \right. \\
&+ \left. \left| \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right|^2 \right] + 2(DA_0 + 150Z_0) \left[ 2 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right|^2 + \frac{1}{2} |DA_2 + 15Z_2|^2 \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\pm \frac{3}{2} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2}} &= H_0 \mp 2DA_0 \mp \frac{5}{3} (a - F)B_0 \pm \frac{100\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{1}{H} \left[ 4 \left| \frac{1}{3} DA_1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 15Z_1 \right|^2 - 5 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 + 5 \left| \frac{1}{3} DA_2 + 9Z_2 \right|^2 - 30 |Z_3|^2 + 180 |Z_4|^2 \right] \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{H^2} \left\{ -10 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1^* \right) \left( \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right) (DA_2 + 15Z_2^*) + \text{compl. conj.} \right] + \right. \\
&\quad \left. + 20 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1^* \right) Z_3 (DA_2 + 15Z_2^*) + \text{compl. conj.} \right] - 210 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 15Z_1 \right) Z_3^* Z_4 + \text{compl. conj.} \right] - 45 \left[ (DA_2 + 15Z_2) \left( \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2^* \right) Z_4 + \text{compl. conj.} \right] + \\
&\quad \left. + 180 (DA_0 - 60Z_0) |Z_4|^2 + 20 (DA_0 - 60Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right|^2 - 8 (DA_0 + \right. \\
&\quad \left. + 150Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right|^2 - 2 (DA_0 + 150Z_0) |DA_2 + 15Z_1|^2 - 15 (DA_0 + \right. \\
&\quad \left. + 10Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right|^2 - 60 (DA_0 + 10Z_0) |Z_3|^2 \right\} \\
H_{+\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}} &= H_0 + \frac{1}{H} \left[ 4 \left| \frac{1}{3} DA_1 - 15Z_1 \right|^2 + 10 \left| \frac{1}{3} DA_2 + 9Z_2 \right|^2 - \right. \\
&\quad \left. - |DA_2 - 15Z_2|^2 - 60 |Z_3|^2 \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

Similarly, for the transitions  $\Delta M = \pm 2$

$$\begin{aligned}
H_{\pm \frac{5}{2} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2}} &= \frac{H_0}{2} \mp 3DA_0 \pm \frac{1}{6} (a - F)B_0 \pm \frac{10\sqrt{2}}{3} aC_0 - \frac{1}{2H} \left[ 5 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left| \frac{1}{3} DA_1 - 15Z_1 \right|^2 + 10 \left| \frac{1}{3} DA_2 + 9Z_2 \right|^2 - |DA_2 - 15Z_2|^2 + 180 |Z_1|^2 \right] \mp \\
&\quad \mp \frac{1}{2H^2} \left\{ -5 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right) (DA_2 + 15Z_2) Z_3^* + \text{compl. conj.} \right] - 45 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_2 - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 9Z_2 \right) (DA_2 + 15Z_2^*) Z_4^* + \text{compl. conj.} \right] - 150 \left[ Z_3 Z_4^* \left( \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1^* \right) + \right. \\
&\quad \left. + \text{compl. conj.} \right] - 30 (DA_0 + 10Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right|^2 - 120 (DA_0 + \\
&\quad \left. + 10Z_0) |Z_3|^2 - 180 (DA_0 - 60Z_0) |Z_4|^2 - 20 (DA_0 - 60Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right|^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4 (DA_0 + 150Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right|^2 - (DA_0 + 150Z_0) |DA_2 + 15Z_2|^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\pm \frac{3}{2} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2}} = & \frac{H_0}{2} \mp DA_0 \mp \frac{5}{3} (a - F)B_0 \mp 50 \sqrt{2} a C_0 + \frac{1}{2H} \left[ 5 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 - \right. \\
& - 2 \left| DA_2 - 15Z_2 \right|^2 - 5 \left| \frac{1}{3} DA_2 + 9Z_2 \right|^2 - 30 |Z_3|^2 - 180 |Z_4|^2 \left. \right] \pm \\
& \pm \frac{1}{2H^2} \left\{ -10 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1^* \right) \left( \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right) \left( \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1^* \right) + \text{compl. conj.} \right] + \right. \\
& + 20 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1^* \right) (DA_2 - 15Z_2^*) Z_3 + \text{compl. conj.} \right] - 210 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right) Z_3^* Z_4 + \right. \\
& + \text{compl. conj.} \left. \right] - 45 \left[ (DA_2 + 15Z_2) \left( \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2^* \right) Z_4 + \text{compl. conj.} \right] + \\
& + 180 (DA_0 - 60Z_0) |Z_4|^2 + 20 (DA_0 - 60Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right|^2 - 8 (DA_0 - \\
& - 150Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right|^2 - 2 (DA_0 + 150Z_0) |DA_2 + 15Z_2|^2 - 15 (DA_0 + \\
& + 10Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right|^2 - 60 (DA_0 + 10Z_0) |Z_3|^2 \left. \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

and for the transitions  $\Delta M = \pm 3$

$$\begin{aligned}
H_{\pm \frac{5}{2} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2}} = & \frac{H_0}{3} \mp 2DA_0 \mp \frac{1}{9} (a - F)B_0 \mp \frac{20\sqrt{2}}{9} a C_0 - \frac{1}{3H} \left[ 5 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 - \right. \\
& - 2 \left| \frac{1}{3} DA_1 - 15Z_1 \right|^2 + |DA_2 - 15Z_2|^2 + 60 |Z_3|^2 - 180 |Z_4|^2 \left. \right] \mp \\
& \mp \frac{1}{3H^2} \left\{ -5 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right) (DA_2 + 15Z_2) Z_3^* + \text{compl. conj.} \right] - 45 \left[ \left( \frac{1}{3} DA_2 - \right. \right. \right. \\
& - 9Z_2) (DA_2 + 15Z_2^*) Z_4^* + \text{compl. conj.} \left. \right] - 150 \left[ Z_3 Z_4^* \left( \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1^* \right) + \right. \\
& + \text{compl. conj.} \left. \right] - 30 (DA_0 + 10Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_2 - 9Z_2 \right|^2 - 120 (DA_0 + 10Z_0) |Z_3|^2 - \\
& - 180 (DA_0 - 60Z_0) |Z_4|^2 - 20 (DA_0 - 60Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 - 6Z_1 \right|^2 - 4 (DA_0 + \\
& + 150Z_0) \left| \frac{1}{3} DA_1 + 15Z_1 \right|^2 - (DA_0 + 150Z_0) |DA_2 + 15Z_2|^2 \left. \right\} \\
H_{+\frac{3}{2} \leftarrow -\frac{3}{2}} = & \frac{H_0}{3} + \frac{1}{3H} \left[ 10 \left| \frac{1}{3} DA_1 + 6Z_1 \right|^2 - 4 \left| \frac{1}{3} DA_1 - 15Z_1 \right|^2 - 2 |DA_2 - \right. \\
& - 15Z_2|^2 - 360 |Z_4|^2 \left. \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

In these expressions the constants  $D$ ,  $a$  and  $a - F$  are expressed in magnetic field units.

**3. Conclusions.** The relations (12–14) can be simplified in some particular cases. In this way, for  $Z_i \ll D$  we obtain:

For the transitions  $\Delta M = \pm 1$

$$\begin{aligned}
 H_{\pm \frac{5}{2} \leftrightarrow \pm \frac{3}{2}} &= H_0 \pm 4DA_0 \pm \frac{4}{3}(a - F)B_0 \pm \frac{80\sqrt{2}}{3}aC_0 - \frac{4D^3}{9H}(2A_1^2 - A_2^2) \mp \\
 &\pm \frac{D^3}{H^2} \left( \frac{10}{9}A_1^2A_2 - \frac{2}{3}A_0A_2^2 - \frac{16}{9}A_0A_1^2 \right) \\
 H_{\pm \frac{3}{2} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2}} &= H_0 \mp 2DA_0 \mp \frac{5}{3}(a - F)B_0 \mp \frac{100\sqrt{2}}{3}aC_0 - \frac{D^3}{9H}(5A_2^2 - A_1^2) \mp \\
 &\mp \frac{D^3}{H^2} \left( -\frac{20}{27}A_1^2A_2 + \frac{12}{9}A_0A_1^2 - \frac{11}{3}A_0A_2^2 \right) \\
 H_{+\frac{1}{2} \leftarrow -\frac{1}{2}} &= H_0 + \frac{4D^3}{9H}(A_1^2 - A_2^2)
 \end{aligned} \tag{15}$$

For the transitions  $\Delta M = \pm 2$

$$\begin{aligned}
 H_{\pm \frac{5}{2} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2}} &= \frac{H_0}{2} \mp 3DA_0 \mp \frac{a - F}{6}B_0 \mp \frac{10\sqrt{2}}{3}aC_0 - \frac{D^3}{2H} \left( \frac{7}{2}A_1^2 + \frac{1}{9}A_2^2 \right) \mp \\
 &\mp \frac{D^3}{2H^2} \left( -\frac{13}{3}A_0A_2^2 - \frac{24}{3}A_0A_1^2 \right) \\
 H_{\pm \frac{3}{2} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2}} &= \frac{H_0}{2} \mp DA_0 \mp \frac{5}{6}(a - F)B_0 \mp 50\sqrt{2}aC_0 + \\
 &+ \frac{D^3}{H} \left( \frac{5}{18}A_1^2 - \frac{41}{36}A_2^2 \right) \pm \frac{D^3}{2H^2} \left( -\frac{20}{27}A_1^2A_2 + \frac{12}{9}A_0A_1^2 - \frac{11}{3}A_0A_2^2 \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

For the transitions  $\Delta M = \pm 3$

$$\begin{aligned}
 H_{\pm \frac{5}{2} \leftrightarrow \mp \frac{1}{2}} &= \frac{H_0}{3} \mp 2DA_0 \mp \frac{1}{9}(a - F)B_0 \mp \frac{20\sqrt{2}}{9}aC_0 - \frac{D^3}{3H}(A_1^2 + A_2^2) \pm \\
 &\pm \frac{D^3}{3H^2} \left( \frac{13}{3}A_0A_2^2 + \frac{8}{3}A_0A_1^2 \right) \\
 H_{+\frac{3}{2} \leftarrow -\frac{3}{2}} &= \frac{H_0}{3} + \frac{2D^3}{3H}(A_1^2 - A_2^2)
 \end{aligned} \tag{17}$$

The relations (12–17) can easily be generalized for the case of the unisotropic  $g$  factor substituting the  $\theta$  and  $\varphi$  angles in the relations (7–9) by the angles  $\theta'$  and  $\varphi'$  where

$$\begin{aligned}
 \cos \theta' &= \frac{g_z}{g} \cos \theta; \quad \cos \varphi' = \frac{g_x}{g_{\perp}} \cos \varphi; \quad g_{\perp}^2 = g_x^2 \cos^2 \varphi + g_y^2 \sin^2 \varphi \\
 \sin \theta' &= \frac{g_{\perp}}{g} \sin \theta; \quad \sin \varphi' = \frac{g_y}{g_{\perp}} \sin \varphi; \quad g^2 = g_z^2 \cos^2 \theta + g_{\perp}^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{18}$$

If the constants  $D$ ,  $a$  and  $F$  for an experimental error of  $\pm 1$  gauss exceed 200 gauss in the  $X$  band and 430 gauss in the  $K$  band then it is necessary to use higher approximations or other methods of calculation.

(Received October 4, 1967)

## REFERENCES

1. G. D. Watkins, R. M. Walker, „Bull. Amer. Phys. Soc.,” ser. II, **1**, 324 (1956).
2. G. D. Watkins, „Phys. Rev.,” **113**, 79 (1959).
3. T. P. P. Hall, W. Hayes, R. W. H. Stevens, J. Wilkens, „J. Chem. Phys.,” **38**, 1977 (1963).
4. I. Ursu, S. V. Nistor, A. Nicula, V. Niculescu, „Proc. XIVth Coll. AMPERE,” Ljubljana (1966).
5. I. Ursu, S. V. Nistor, A. Nicula, V. Niculescu, „Preprint IFA”, I.S. 46(1967).
6. R. Böttcher, W. Windsch, W. Lüdke, „Phys. Stat. Solidi” **21**, 121, (1967).
7. S. V. Nistor (to be published).
8. B. Bleaney, K. W. H. Stevens, „Rept. Progr. Phys.,” **16**, 108 (1953).
9. R. Orbach, Proc. Roy. Soc., A **264**, 458 (1961).
10. J. M. Baker, F. I. B. Williams, „Proc. Phys. Soc.,” **78**, 1340 (1961).
11. C. Kikuchi, L. M. Matarrese, „J. Chem. Phys.,” **10**, 229 (1965).
12. A. Nicula, I. Ursu, S. Nistor, „Rev. Roum. Phys.,” **10**, 229 (1965).

CALCULUL NIVELELOR ENERGETICE PENTRU UN ION  ${}^6\text{S}_{5/2}$  SITUAT ÎNTR-UN CÎMP CRISTALIN CUBIC CU DEFORMARE AXIALĂ PE DIRECȚIA  $\langle 111 \rangle$

(Rezumat)

Se calculează nivelele energetice pentru un ion paramagnetic în starea  ${}^6\text{S}_{5/2}$ . Ionul se află situat într-un câmp cristalin cu simetrie axială, axa de simetrie fiind așezată în direcția  $[111]$  a sistemului cubic de axe. Calculul se face cu ajutorul hamiltonianului de spin corespunzător, pînă în aproximația de ordinul trei inclusiv, folosind ipoteza cîmpului magnetic intens.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ ДЛЯ ИОНА  ${}^6\text{S}_{5/2}$ , НАХОДЯЩЕГОСЯ В КУБИЧЕСКОМ КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ОСЕВЫМ ИСКАЖЕНИЕМ В НАПРАВЛЕНИИ  $\langle 111 \rangle$

(Резюме)

Вычисляются энергетические уровни для парамагнитного иона в состоянии  ${}^6\text{S}_{5/2}$ . Ион находится в кристаллическом поле с осевой симметрией. Ось симметрии ориентирована в направлении  $[111]$ . Вычисление производится при помощи соответствующего спинового гамильтониана в приближении третьего порядка включительно, в предположении сильного магнитного поля.





# PROPAGAREA PERTURBAȚIILOR SLABE ÎNTR-O PLASMĂ IDEALĂ ÎN PREZENȚA RADIAȚIEI

de

**M. CRISTEA**

Studiul sistematic al propagării undelor în plasmă a început în deceniul trecut, și dintre lucrările de pionierat, în acest domeniu, pot fi menționate cele ale lui **K a p l a n** [1] și **B a n o s** [2], [3]. Studiul acestei probleme a dus la elucidarea rolului exercitat de câmpul magnetic în fenomenul propagării perturbațiilor într-un mediu elastic, conductor. O sinteză a rezultatelor obținute este prezentată în lucrarea [4].

Paralel cu studierea propagării perturbațiilor slabe în plasmă, s-a cercetat propagarea acestui tip de perturbații într-un gaz, în prezența radiației. Această problemă a fost abordată inițial de **P r o k o f i e v** [5], [6] și ulterior de **V i n c e n t i** și **B a l d w i n** [7], **L i c k** [8], și **K h o s l a** și **M u r g a i** [9].

În această lucrare studiem propagarea perturbațiilor slabe într-o plasmă ideală, omogenă și infinită, situată într-un câmp magnetic omogen, în prezența radiației. Admitem că plasma poate fi asimilată cu un gaz perfect, cu căldură specifică constantă și avînd conductibilitatea electrică infinită. În aceste condiții, sistemul de ecuații necesare pentru studiul mișcării plasmă este alcătuit din ecuațiile de conservare a masei, impulsului și energiei, ecuația de stare a mediului, ecuațiile câmpului magnetic și ecuația de transport a radiației. Scriem aceste ecuații sub forma următoare:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = - \left[ \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho \vec{u} \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \vec{u} + \frac{1}{4\pi} [\vec{H} \times (\vec{u} \times \vec{H})] + \vec{q} \right\} \quad (3)$$

$$p = R \rho T \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\vec{u} \times \vec{H}) \quad (6)$$

unde  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$  reprezintă densitatea, presiunea și temperatura mediului,  $\vec{u}$  viteza,  $\gamma$  raportul căldurilor specifice ( $\gamma = C_p/C_v$ );  $\vec{H}$  este intensitatea câmpului magnetic, iar  $\vec{q}$  fluxul radiativ. La sistemul de ecuații (1) — (6) trebuie adăugată ecuația diferențială pentru  $\vec{q}$ . Vom folosi o ecuație aproximativă, care poate fi dedusă imediat din sistemul de ecuații ale fluxului radiativ, stabilite de H e l l i w e l l [10]. Această ecuație are forma următoare

$$\text{grad div } \vec{q} = 4\sigma\alpha \text{ grad } T^4 + 3\alpha^2\vec{q} \quad (7)$$

unde  $\alpha$  este coeficientul de absorbție (care admitem că este constant), iar  $\sigma$  este constanta Stefan-Boltzmann,  $\sigma = 5,75 \cdot 10^{-5}$  erg/cm<sup>2</sup> sec grad<sup>4</sup>. Ecuațiile (24) și (25) din lucrarea [10], din care rezultă imediat ecuația (7), au fost deduse în ipoteza propagării unidimensionale a radiației. Deci și ecuația (7) este de asemenea valabilă numai pentru acest caz.

Limitându-ne numai la propagarea perturbațiilor slabe, sistemul de ecuații (1) — (7) poate fi liniarizat. În acest scop, considerăm că mărimile fizice pot fi scrise sub forma :

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \vec{u} = \vec{u}', \quad p = p_0 + p', \quad T = T_0 + \theta, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{q} = \vec{q}' \quad (8)$$

unde mărimile cu indicele zero se referă la starea neperturbată, iar  $\rho'$ ,  $\vec{u}'$ ,  $p'$ ,  $\theta$ ,  $\vec{h}$ ,  $\vec{q}'$ , reprezintă perturbații, mici în raport cu mărimile neperturbate. Introducând expresiile (8) în sistemul (1) — (7) și reținând numai termenii de ordinul întâi, obținem sistemul

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{u}' = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p' + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\vec{H}_0 \times \text{rot } \vec{h}) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p'}{\gamma - 1} + \frac{\vec{H}_0 \vec{h}}{4\pi} \right) + \text{div} \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 \vec{u}' + \frac{1}{4\pi} [\vec{H}_0 \times (\vec{u}' \times \vec{H}_0)] + \vec{q}' \right\} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{\theta}{T_0} = 0 \quad (12)$$

$$\text{div } \vec{h} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{u}' \times \vec{H}_0) = 0 \quad (14)$$

$$\text{grad div } \vec{q}' - 16\sigma\alpha T_0^3 \text{grad } \theta - 3\alpha^2\vec{q}' = 0 \quad (15)$$

Căutăm soluțiile sistemului liniarizat (9) — (15) sub forma undelor plane monocromatice, adică

$$A' = A'_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (16)$$

Introducînd soluții de tipul relației (16) în sistemul (9)–(15), obținem

$$\omega \rho' - \rho_0 \vec{k} \vec{u}' = 0 \quad (17)$$

$$\rho_0 \omega \vec{u}' - \vec{k} p' - \frac{1}{4\pi} [\vec{H}_0 \times (\vec{k} \times \vec{h})] = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} p' + \frac{\omega}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} - \frac{\gamma p_0}{\gamma - 1} \vec{k} \vec{u}' + \frac{\vec{H}_0}{4\pi} [\vec{k} \times (\vec{u}' \times \vec{H}_0)] - \vec{k} \vec{q}' = 0 \quad (19)$$

$$\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{\theta}{T_0} = 0 \quad (20)$$

$$\vec{k} \vec{h} = 0 \quad (21)$$

$$\omega \vec{h} + \vec{k} \times (\vec{u}' \times \vec{H}_0) = 0 \quad (22)$$

$$-\vec{k} (\vec{k} \vec{q}') + 16 i \sigma \alpha T_0^3 \vec{k} \theta - 3 \alpha^2 \vec{q}' = 0 \quad (23)$$

Ecuția (21) o vom omite, ea fiind o consecință a ecuației (22), din care rezultă prin înmulțire scalară cu  $\vec{k}$ . Deci ecuațiile (17)–(20) și (22)–(23) formează un sistem complet de 12 ecuații scalare pentru 12 necunoscute: componentele vectorilor  $\vec{u}'$ ,  $\vec{h}$ ,  $\vec{q}'$ , și mărimile scalare  $\rho'$ ,  $p'$ ,  $\theta$ .

Alegem sistemul de coordonate astfel încît axa  $Ox$  să coincidă cu direcția vectorului de undă  $\vec{k}$ . Vectorii  $\vec{k}$ ,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{q}'$ ,  $\vec{H}_0$ ,  $\vec{h}$  au componentele

$$\vec{k}(k, 0, 0), \quad \vec{u}'(u_x, u_y, u_z), \quad \vec{q}'(q_x, q_y, q_z) \quad (24)$$

$$\vec{H}_0(H_x, H_y, H_z), \quad \vec{h}(h_x, h_y, h_z)$$

Obținem următorul sistem de ecuații scalare

$$\omega \rho' - \rho_0 k u_x = 0 \quad (25)$$

$$\rho_0 \omega u_x - k p' - \frac{k}{4\pi} (H_y h_y + H_z h_z) = 0 \quad (26)$$

$$\rho_0 \omega u_y + \frac{k}{4\pi} H_x h_y = 0 \quad (27)$$

$$\rho_0 \omega u_z + \frac{k}{4\pi} H_x h_z = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} p' + \frac{\omega}{4\pi} (H_x h_x + H_y h_y + H_z h_z) - \frac{\gamma p_0}{\gamma - 1} k u_x - k q_x + \frac{k}{4\pi} [H_x (H_y u_y + H_z u_z) - u_x (H_y^2 + H_z^2)] = 0 \quad (29)$$

$$\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{\theta}{T_0} = 0 \quad (30)$$

$$\omega h_x = 0 \quad (31)$$

$$\omega h_y - k(u_x H_y - u_y H_x) = 0 \quad (32)$$

$$\omega h_z + k(u_z H_x - u_x H_z) = 0 \quad (33)$$

$$-k^2 q_x + i\beta k\theta - 3\alpha^2 q_x = 0 \quad (34)$$

$$3\alpha^2 q_y = 0 \quad (35)$$

$$3\alpha^2 q_z = 0 \quad (36)$$

unde  $\beta = 16 \sigma \alpha T_0^3$

Din ecuația (31) rezultă că vectorul  $\vec{h}$  nu are decât componente transversale, deci componenta longitudinală  $H_x$  a câmpului magnetic rămîne constantă. Din ecuațiile (35), (36) rezultă că vectorul  $\vec{q}$  trebuie să fie orientat de-a lungul lui  $\vec{k}$ ; cu alte cuvinte, propagarea micilor perturbații nu poate avea loc decât în direcția fluxului radiativ.

Ecuațiile (25)–(30) și (32)–(34) formează un sistem omogen. Condiția pentru existența unor soluții nebanale este ca determinantul sistemului să fie egal cu zero. Egalînd cu zero acest determinant, obținem următoarea ecuație de dispersie

$$(v^2 - V_x^2)\{v[(v^2 - V^2)v^2 - (v^2 - V_x^2)c^2] - iW[\gamma(v^2 - V^2)v^2 - (v^2 - V_x^2)c^2]\} = 0 \quad (37)$$

unde am introdus notațiile

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad V^2 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0}, \quad V_x^2 = \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}, \quad c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad W = \frac{16\sigma\alpha T_0^3 k}{(k^2 + 3\alpha^2)C_p\rho_0} \quad (38)$$

Ecuația (37) este de gradul șapte în  $v$ ; deci în mediu se vor propaga șapte unde, ale căror viteze de fază  $v = \omega/k$  sînt date de rădăcinile ecuației (37). Două soluții se obțin imediat:

$$v_A = \pm V_x = \pm \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (39)$$

Pentru evaluarea celorlalte cinci soluții, vom examina ecuația ce rezultă prin egalarea cu zero a expresiei din acoladă din (37).

$$v[v^4 - (V^2 + c^2)v^2 + c^2V_x^2] - iW[\gamma v^4 - (\gamma V^2 + c^2)v^2 + c^2V_x^2] = 0 \quad (40)$$

Din (38) se vede că mărimea  $W$  depinde de coeficientul de absorbție  $\alpha$  și de cantitatea

$$N_B = \frac{C_p \rho c}{\sigma T^3} \quad (41)$$

cunoscută sub numele de „numărul lui Boltzmann”. Aici  $C_p$  reprezintă căldura specifică la presiune constantă, iar  $c$  viteza sunetului.

Vom considera cîteva cazuri particulare:

a) Dacă  $\alpha \rightarrow 0$  (gaz complet transparent), sau  $1/N_B \rightarrow 0$  (gaz complet rece), atunci și  $W \rightarrow 0$ . În acest caz, ecuația (40) se reduce la

$$v[v^4 - (V^2 + c^2)v^2 + c^2V_x^2] = 0 \quad (42)$$

ecuație bine cunoscută în magnetohidrodinamică, avînd soluțiile

$$v_0 = 0 \quad (43)$$

$$v_{1,2} = \pm \frac{1}{2} [\sqrt{V^2 + c^2 + 2cV_x} + \sqrt{V^2 + c^2 - 2cV_x}] \quad (44)$$

$$v_{3,4} = \pm \frac{1}{2} [\sqrt{V^2 + c^2 + 2cV_x} - \sqrt{V^2 + c^2 - 2cV_x}] \quad (45)$$

$v_0$  reprezintă viteza de fază a undei entropice, iar  $v_{1,2}$ , respectiv  $v_{3,4}$ , vitezele undelor magnetoacustice rapide și lente. Prin urmare, în acest caz, radiația nu influențează propagarea perturbațiilor slabe în plasmă. Faptul este explicabil, deoarece atunci cînd gazul este complet rece sau complet transparent nu pot apare efecte radiative de neechilibru.

b) Dacă  $\alpha \rightarrow \infty$  (gaz complet opac) iar  $k$  și  $N_B$  au valori finite,  $W \rightarrow 0$ . Și în acest caz sînt valabile soluțiile (43)–(45), adică perturbațiile nu sînt influențate de radiație. Chiar dacă radiația ar fi intensă, fiind reabsorbită imediat după emitere de către gazul complet opac, ea nu poate afecta propagarea perturbațiilor.

c) Dacă  $1/N_B \rightarrow \infty$  (transfer infinit de căldură datorită radiației) vom avea  $W \rightarrow \infty$  și din (40) rezultă

$$v^4 - (V^2 + a^2)v^2 + a^2V_x^2 = 0 \quad (46)$$

unde

$$a^2 = \frac{1}{\gamma} c^2 = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (47)$$

este viteza izotermică a sunetului.

Ecuația (46) are soluțiile

$$v_{1,2} = \pm \frac{1}{2} [\sqrt{V^2 + a^2 + 2aV_x} + \sqrt{V^2 + a^2 - 2aV_x}] \quad (48)$$

$$v_{3,4} = \pm \frac{1}{2} [\sqrt{V^2 + a^2 + 2aV_x} - \sqrt{V^2 + a^2 - 2aV_x}] \quad (49)$$

În acest caz, în locul vitezei izentropice a sunetului apare viteza izotermică. Explicația constă în faptul că transportul infinit de căldură, datorit radiației, împiedică apariția unor diferențe de temperatură în gaz.

d) Considerăm acum cazul limită, cînd raportul căldurilor specifice este foarte apropiat de unitate ( $\gamma \rightarrow 1$ ). În acest caz,  $c \rightarrow a$  și ecuația (40) devine

$$(v - iW)[v^4 - (V^2 + a^2)v^2 + a^2V_x^2] = 0 \quad (50)$$

Această ecuație are soluțiile

$$v_0 = iW \quad (51)$$

și  $v_{1,2}$ ,  $v_{3,4}$  date de (48) și (49).

Unda cu viteza de fază  $v_0 = iW$  corespunde undei entropice din magnetohidrodinamică. Viteza  $v_0$  este pur imaginară dacă  $W$  (deci și  $k$ ) este real. În acest

caz, frecvența circulară  $\omega$  va fi de asemenea imaginară, ceea ce implică o amortizare rapidă a undei,

e) Câmp magnetic longitudinal ( $H_0 = H_x$ ). În acest caz  $V = V_x$  și ecuația (40) ia forma

$$(v^2 - V_x^2)(v^3 - iW\gamma v^2 - c^2v + iWc^2) = 0 \quad (52)$$

iar pentru valoarea limită  $\gamma \rightarrow 1$ , ea devine

$$(v^2 - V_x^2)(v - iW)(v^2 - a^2) = 0 \quad (53)$$

avînd soluțiile

$$v_0 = iW \quad (54)$$

$$v_{1,2} = \pm V_x \quad (55)$$

$$v_{3,4} = \pm a \quad (56)$$

Deci în acest caz, undele rapide se vor propaga cu o viteză egală cu viteza undelor Alfvén, iar undele lente, cu viteza izotermică a sunetului.

Considerăm acum că  $\gamma$  este foarte apropiat de unitate și căutăm soluțiile ecuației (52) sub forma unor serii după puterile parametrului mic ( $\gamma - 1$ ). În prima aproximație obținem

$$v_0 = iW \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)W^2}{W^2 + a^2} \right] \quad (57)$$

$$v_{1,2} = \pm V_x \quad (58)$$

$$v_3 = a \left[ 1 - \frac{(\gamma - 1)a}{2(iW - a)} \right] \quad (59)$$

$$v_4 = -a \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)a}{2(iW + a)} \right] \quad (60)$$

f) Câmp magnetic transversal  $H_x = 0$ ,  $V_x = 0$ . Ecuația (40) devine

$$v^5 - iW\gamma v^4 - (V^2 + c^2)v^3 + iW(\gamma V^2 + c^2)v^2 = 0 \quad (61)$$

Această ecuație are două rădăcini nule, iar pentru ecuația rămasă

$$v^3 - iW\gamma v^2 - (V^2 + c^2)v + iW(\gamma V^2 + c^2) = 0 \quad (62)$$

vom căuta în primul rînd soluțiile corespunzătoare cazului  $\gamma \rightarrow 1$ . Obținem

$$v_0 = iW \quad (63)$$

$$v_{1,2} = \pm \sqrt{V^2 + a^2} \quad (64)$$

Deci, ca și în magnetohidrodinamică, viteza de fază a undei lente este nulă, iar cea a undei rapide este dată de (63).

Dezvoltarea soluțiilor ecuației (62) după  $(\gamma - 1)$  dă, în primă aproximație

$$v_0 = iW \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)(W^2 + V^2)}{(W^2 + V^2 + a^2)} \right] \quad (65)$$

$$v_1 = \sqrt{V^2 + a^2} - \frac{(\gamma - 1)a^2}{2(iW - \sqrt{V^2 + a^2})} \quad (66)$$

$$v_2 = -\sqrt{V^2 + a^2} - \frac{(\gamma - 1)a^2}{2(iW + \sqrt{V^2 + a^2})} \quad (67)$$

În concluzie, într-o plasmă ideală, în prezența radiației, se pot propaga șapte tipuri de perturbații slabe, ale căror viteze de fază sînt date de soluțiile ecuației de dispersie (37). Două unde se propagă în cele două sensuri ale axei  $Ox$  cu viteze egale cu

$$V_x = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

Celelalte cinci unde sînt analoge undelor magnetoacustice rapide și lente și undei entropice, cunoscute în magnetohidrodinamică. Datorită radiației, în locul undei entropice cu viteză de fază nulă, apare o undă a cărei viteză depinde de numărul lui Boltzmann și de coeficientul de absorbție al mediului.

S-au obținut expresiile vitezelor acestor cinci tipuri de unde numai pentru câteva cazuri particulare. Este posibil să se găsească expresii cu un caracter mai general, căutînd soluțiile ecuației (40) sub forma unor dezvoltări în serie. Rezultatele obținute în acest caz sînt însă foarte complicate, astfel încît utilizarea lor în practică ar fi dificilă.

Pentru o cercetare mai riguroasă a propagării perturbațiilor va fi necesar să se ia în considerare o serie de factori, care au fost neglijați în această lucrare: existența efectelor disipative, anizotropia plasmă și în special faptul că  $\alpha$ , coeficientul de absorbție nu este constant.

(Intrat în redacție la 7 octombrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] S. A. Kaplan, K. P. Staniukovici, „DAN SSSR”, **95**, 769, (1954).
- [2] A. Banos, „Proc. Roy. Soc.” **A 233** 350 (1955).
- [3] A. Banos, „Phys. Rev.” **97**, 1435 (1955).
- [4] A. G. Kulikovskii, G. A. Liubimov, *Magnitnaia ghidrodinamika*, Moskva, 1962.
- [5] V. A. Prokofiev, „Prikl. Mat. i Meh.” **21**, 775 (1957).
- [6] V. A. Prokofiev „U. zap. MGU” **172**, Mehanika, 79 (1954).
- [7] W. Vincenti, B. Baldwin, „J. Fluid Mech.” **12**, 449 (1962).
- [8] W. J. Lick, „J. Fluid Mech.” **18**, 274 (1964).
- [9] P. K. Khosla, M. P. Murgai, „Phys. Fluids” **8**, 2087 (1965).
- [10] J. B. Helliwell, „Phys. Fluids” **9**, 1868 (1966).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ В ПРИСУТСТВИИ  
ИЗЛУЧЕНИЯ

(Резюме)

Изучается распространение слабых возмущений в идеальной плазме в присутствии излучения. Получается уравнение дисперсии и выводятся решения этого уравнения для некоторых частных случаев.

PROPAGATION OF WEAK DISTURBANCES IN AN IDEAL PLASMA  
IN PRESENCE OF RADIATION

(Summary)

Propagation of weak disturbances in an ideal plasma in presence of radiation is investigated. The equation of dispersion is obtained and then the solutions of this equation for some particular cases are deduced.



## ADIABATA DE ȘOC ÎN PREZENȚA RADIAȚIEI

de

M. CRISTEA

Adiabata de șoc este o ecuație care exprimă legătura dintre mărimile termodinamice din cele două părți ale unei unde de șoc [1]. O astfel de ecuație a fost stabilită în hidrodinamică încă de la sfârșitul secolului trecut, de către Hugoniot.

O dată cu dezvoltarea studiului plasmei, a apărut problema propagării undelor de șoc într-un mediu conductor, în prezența câmpului magnetic [2]. Forma adiabatei de șoc pentru acest caz este cunoscută [3], [4], și pe baza ei s-au putut trage o serie de concluzii în legătură cu influența exercitată de către câmpul magnetic [5].

Problema undelor de șoc a fost abordată însă, în ultimele două decenii, și dintr-un alt punct de vedere, și anume luându-se în considerare existența radiațiilor electromagnetice. Dacă temperatura mediului este foarte înaltă (ca în cazul propagării unei unde de șoc intense), sau densitatea mediului este foarte mică, energia și presiunea radiației de echilibru devin comparabile cu energia și presiunea substanței, și este necesar să fie luate în considerație la stabilirea adiabatei de șoc [6], [7], [8].

În această notă deducem expresia adiabatei de șoc magnetohidrodinamice în prezența radiației, și din examinarea ei deducem că saltul maxim al densității nu poate depăși valoarea 7. Acest rezultat a fost admis fără demonstrație într-o lucrare anterioară [9].

În hidrodinamică, parametrii fluidului de cele două părți ale discontinuității sînt legați prin relațiile lui Hugoniot

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad (3)$$

unde  $u$  este viteza mediului în raport cu frontul de șoc,  $\rho$  — densitatea,  $p$  — presiunea,  $\varepsilon$  — energia specifică, iar indicii 1 și 2 se referă la valorile mărimilor respective, înainte și după unda de șoc.

Relațiile precedente pot fi generalizate pentru cazul cînd mediul este o plasmă situată în câmp magnetic, iar unda de șoc este însoțită de o radiație electromagnetică. Considerăm cazul în care câmpul magnetic este paralel cu suprafața discontinuității,

și admitem că mediul are o conductibilitate electrică infinită. Dacă ultima condiție este îndeplinită, are loc fenomenul de înghețare a câmpului magnetic, ceea ce matematic se exprimă prin relația

$$\frac{H_1}{\rho_1} = \frac{H_2}{\rho_2} \quad (4)$$

$H$  fiind intensitatea câmpului magnetic. Admitem, de asemenea, că la distanțe mari, de ambele părți ale discontinuității, fluxurile radiative sînt nule, iar radiația este în echilibru. Prin urmare, problema se studiază din punct de vedere pur termodinamic, așa cum se obișnuiește pentru deducerea adiabatei de șoc.

În cazul considerat, relațiile (1)–(3) își păstrează valabilitatea, însă, în locul presiunii și energiei interne a mediului, apar: presiunea totală  $p^*$  și energia totală  $\varepsilon^*$

$$p^* = p + p_R + p_H \quad (5)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon_R + \varepsilon_H \quad (6)$$

unde  $p_R$ ,  $\varepsilon_H$  reprezintă presiunea și energia radiației, iar  $p_H$  și  $\varepsilon_H$  — presiunea și energia magnetică.

Pentru simplitate, considerăm mediul ca fiind un gaz perfect, cu căldură specifică constantă. În acest caz

$$p = \frac{R}{M} \rho T, \quad p_R = \frac{1}{3} a T^4, \quad p_H = \frac{H^2}{8\pi} \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad \varepsilon_R = \frac{a T^4}{\rho}, \quad \varepsilon_H = \frac{H^2}{8\pi \rho} \quad (8)$$

unde s-a notat:

$R$  — constanta universală a gazelor,

$M$  — masa moleculară a gazului,

$T$  — temperatura absolută,

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — raportul căldurilor specifice, la presiunea constantă și la volum constant,

$a$ , — constanta Stefan—Boltzmann.

Este convenabil, ca în locul densității să folosim volumul specific

$$V = \frac{1}{\rho} \quad (9)$$

Ținînd seamă de notațiile introduse, se pot scrie relațiile echivalente cu (1)–(4)

$$\frac{u_1}{V_1} = \frac{u_2}{V_2} \quad (10)$$

$$p_1^* + \frac{u_1^2}{V_1} = p_2^* + \frac{u_2^2}{V_2} \quad (11)$$

$$\varepsilon_1^* + p_1^* V_1 + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_2^* + p_2^* V_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (12)$$

$$H_1 V_1 = H_2 V_2 \quad (13)$$

De aici se poate deduce în mod simplu expresia adiabatei de șoc. În acest scop, exprimăm vitezele mediului în funcție de presiuni și volume specifice

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_2^* - p_1^*}{v_1 - v_2^*} \quad (14)$$

$$u_2^2 = V_2^2 \frac{p_2^* - p_1^*}{V_1 - V_2} \quad (15)$$

Introducând aceste valori în (12), găsim

$$\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^* = \frac{1}{2} (p_1^* + p_2^*) (V_1 - V_2) \quad (16)$$

Această ecuație este adiabata de șoc, exprimată prin presiunea și energia totală. Scriind expresiile explicite ale acestor mărimi, ecuația (16) ia forma

$$\begin{aligned} p_2 \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_2 - V_1 \right) - p_1 \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_1 - V_2 \right) = \frac{1}{3} a T_2^4 (V_1 - 7V_2) + \\ + \frac{1}{3} a T_1^4 (7V_1 - V_2) + \frac{H_2^2}{8\pi} (V_1 - 3V_2) + \frac{H_1^2}{8\pi} (3V_1 - V_2) \end{aligned} \quad (17)$$

Introducem notațiile:

$$\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad x = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad y = \frac{p_2}{p_1} \quad (18)$$

$$\mu = \frac{p_{H1}}{p_1} = \frac{a T_1^4}{3 p_1}, \quad \lambda = \frac{p_{R1}}{p_1} = \frac{H_1^2}{8\pi p_1} \quad (19)$$

Aici,  $x$  reprezintă saltul densității mediului,  $\mu$  — raportul dintre presiunea radiației și presiunea mediului, în fața undei de șoc, iar  $\lambda$  — raportul dintre presiunea magnetică și presiunea mediului în fața undei de șoc.

Din ecuația de stare rezultă că

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{y}{x} \quad (20)$$

Folosind această relație și (13), obținem adiabata de șoc

$$(\alpha - x)y - (\alpha x - 1) - \mu \left( \frac{x-7}{x^4} y^4 + 7x - 1 \right) - \lambda (x-1)^3 = 0 \quad (21)$$

Pentru  $\lambda = \mu = 0$ , aceasta se reduce la adiabata obișnuită a lui Hugoniot. Această relație, care leagă valorile parametrilor de pe cele două părți ale discontinuității, este destul de complicată, însă păstrând fixe valorile  $\mu$  și  $\lambda$ , putem stabili dependența dintre  $y$  și  $x$ . Figurile 1—3 reprezintă adiabatele de șoc pentru diferite valori (constante), ale parametrilor  $\mu$  și  $\lambda$ . Sistemul de coordonate are axele  $\frac{1}{x} = \frac{v_1}{v_2}$  și  $y = \frac{p_2}{p_1}$ . S-a considerat  $\alpha = 4$  ceea ce corespunde valorii  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

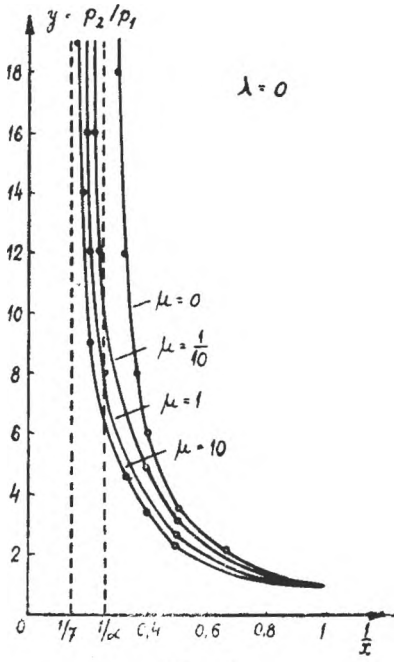


Fig. 1.

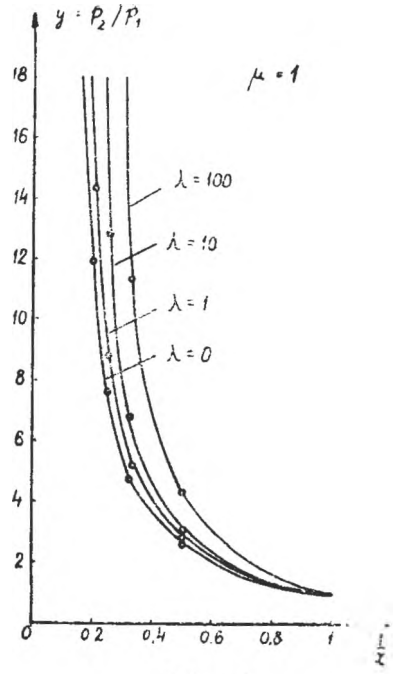


Fig. 2.

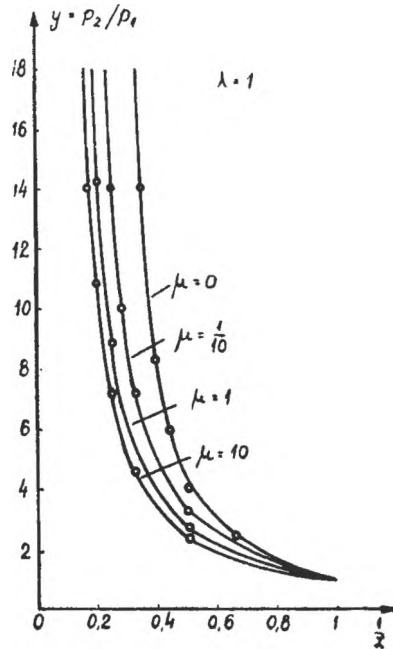


Fig. 3.

Pe fig. 1 sînt trasate adiabatele de șoc cu radiație, în absența cîmpului magnetic ( $\lambda = 0$ ), pentru patru valori ale lui  $\mu$ . Curba corespunzătoare valorii  $\mu = 0$  este adiabata obișnuită a lui Hugoniot. Se observă că această curbă are asimptota

$$\frac{1}{x} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (22)$$

Aceasta reflectă existența unei valori limită a saltului densității

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (23)$$

rezultat bine cunoscut în hidrodinamică. Celelalte curbe corespund respectiv valorilor  $\mu = 1/10, 1, 10$ . Se constată că o dată cu creșterea raportului dintre presiunea radiativă și presiunea mediului, comprimarea mediului crește, saltul densităților tinzînd spre valoarea limită

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 7, \quad (24)$$

independentă de  $\gamma$ .

Fig. 2 se referă la cazul în care presiunea magnetică este egală cu presiunea mediului ( $\lambda = 1$ ). În absența radiației ( $\mu = 0$ ), adiabata de șoc are asimptota (22). Pentru celelalte trei cazuri ( $\mu \neq 0$ ) valoarea limită a lui  $\frac{1}{x}$  este  $1/7$ , situație analogă cu cea ilustrată de fig. 1.

În fig. 3 sînt trasate adiabatele de șoc pentru  $\mu = 1$  și pentru valori diferite ale raportului dintre presiunea magnetică și presiunea mediului. Comparînd așezarea diferitelor curbe din fig. 1 sau 2 cu cele din fig. 3, constatăm că în timp ce creșterea presiunii radiative are ca efect creșterea compresibilității mediului (curbele cu  $\mu > 0$  se așază sub cea cu  $\mu = 0$ ), creșterea presiunii magnetice are un efect invers, conducînd la micșorarea compresibilității mediului (adiabatele trec cu atît mai sus de adiabate  $\lambda = 0$ , cu cît este mai mare valoarea lui  $\lambda$ , deci a cîmpului magnetic inițial  $H_1$ ).

(Intrat în redacție la 7 septembrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifșitș, *Mehanika sptosnih sred*, Moskova, 1954.
- [2] F. Hoffman, E. Teller, „Phys. Rev.” **80**, 692, 1950.
- [3] Ia. B. Zeldovici, Iu. Raizer, *Fizika udarnih voln*, Moskva, 1963.
- [4] R. V. Deutsch, *Teoria magnetohidrodinamică în fizica plasmei*, București, 1966.
- [5] G. S. Golitșin, „JETP,” **35**, 776, 1958.
- [6] R. G. Sachs, „Phys. Rev.” **69**, 514, 1946.
- [7] R. E. Marshak, „Phys. Fluids” **1**, 24, 1958.
- [8] P. A. Koch, „Phys. Fluids” **8**, 2140, 1965.
- [9] M. Cristea, „Analele Univ. «Al. I. Cuza» Iași” **11**, 39, 1965.

## УДАРНАЯ АДИАБАТА В ПРИСУТСТВИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

(Резюме)

Выводится ударная адиабата для случая ударной волны, сопровождаемой излучением, в проводящей среде, находящейся в магнитном поле. Численно решается уравнение и строятся несколько адиабат, соответствующих разным значениям магнитного и радиативного давления.

## SHOCK ADIABAT IN PRESENCE OF RADIATION

(Summary)

The author deduces the shock adiabat in the case of propagation of a radiation shock wave in a conductor medium situated in a magnetic field. The equation is numerically solved and some adiabats corresponding to different values of the magnetic and radiation pressure are plotted.

NOTE

## UN DETECTOR SIMPLU RMN ȘI RES CU TRANZISTOR

de

F. KOCH

În ultimul timp au apărut în reviste o serie de indicații privind folosirea tranzistorilor în detectarea semnalelor de rezonanță [1], ... [8]. Majoritatea schemelor publicate se referă la detectorii RMN, deoarece aparatele se folosesc pentru măsurarea câmpurilor magnetice.

Dintre schemele publicate am ales, ca mai potrivită, pe cea publicată de Y u n g [5] și am adaptat-o la tranzistori produși la noi în țară. Având în vedere și scopurile didactice, am încercat acest montaj și la RMN și la RES.

Schema folosită este redată în fig. 1, și după cum se vede, este vorba de un detector autodyn. Proba se introduce în bobina circuitului oscilant. Schimbând

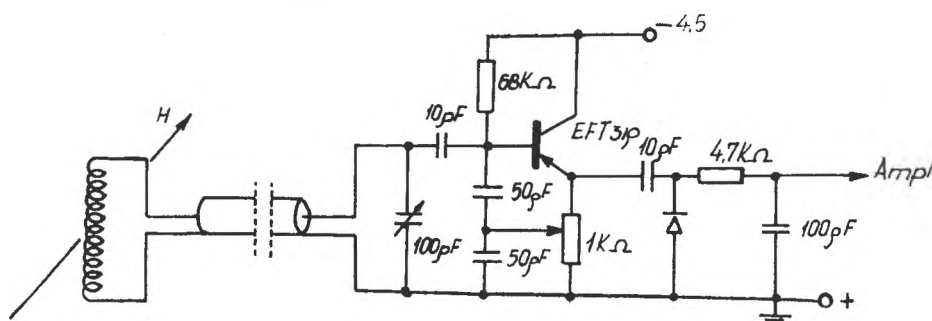


Fig. 1.

bobinele am reușit să acoperim, cu tranzistorul EFT 319, domeniul de frecvențe între 9 și 50 MHz. Consumul de curent al detectorului este de 3 mA, amplitudinea oscilațiilor de I.F. atingând 3 V.

Detectorul a fost încercat la RMN cu rezonanța protonică (apă); la 10,5 MHz s-a obținut raportul semnal/zgomot = 90. Detectorul poate fi conectat, prin inter-

mediul unui preamplificator, direct la oscilograf, sau se poate conecta la o instalație existentă (am folosit instalația RMN construită la IFA București).

Rezonanța electronică se poate încerca cu o probă de  $MnSO_4$  praf și cu un câmp magnetic adecvat, dat de un solenoid sau un magnet simplu. Fig. 2 arată diferența între semnalele obținute la RMN (a) și la RES (b). Trebuie să arătăm, după cum apare și în literatură [6], că raportul semnal/zgomot este mult mai favorabil în cazul folosirii înregistratoarelor (deteția sincronă) iar detectorii cu tranzistori sînt inferiori celor cu tuburi electronice.

În legătură cu folosirea acestui detector, indicăm două probleme.

În primul rînd vrem să arătăm că pentru încercarea unui detector RMN se folosesc detectori de sensibilitate [9]. Pentru acest scop, însă, se poate aplica mult mai simplu rezonanța electronică, deoarece câmpul magnetic se poate realiza mult mai ușor. Este

cunoscut faptul că la frecvențe egale câmpul magnetic pentru rezonanța electronică este de 659 de ori mai mic, și câmpuri magnetice mai mici dau semnale mai mici. Electronul avînd însă un moment magnetic mult mai mare decît al protonului, va da un semnal puternic. Dacă obținem, deci un semnal la rezonanța electronică atunci îl vom obține și la rezonanța protonică; dacă semnalul la RES este bun, atunci și la RMN vom obține semnale favorabile.

Observația a doua se referă la frecvența folosită. Dacă detectorul lucrează fără ecranare electrică, atunci în domeniul frecvențelor utilizate, posturile radio produc perturbări. Evitarea perturbărilor de acest gen se realizează ori printr-o ecranare adecvată, ori prin alegerea frecvenței în așa fel ca să nu lucrăm într-o bandă radio. Această alegere se poate controla cel mai simplu conectînd o cască de telefon după detector și preamplificator. Casca de telefon se poate folosi și la perceperea semnalelor de rezonanță.

(Intrat în redacție la 2 octombrie 1967)

#### BIBLIOGRAFIE

1. P. Denis, A. Csáki, „Archives des Sciences” (1957) 223.
2. W. L. Pierce, J. C. Hicks, „Rev. Sc. Instr.” (1965) 36, 202.
3. F. Bruin, P. C. Van Soest, „Rev. Sc. Instr.” (1960) 31, 909.
4. J. R. Singer, S. D. Johnson, „Rev. Sc. Instr.” (1959) 30, 92.
5. Yu-tung, Yun-chao Chen, „Rev. Sc. Instr.” (1966), 37, 1274
6. V. A. Ksenofontov, „Prib. Tehn. Exp.” (1966) 1, 197.
7. Bailey Donnally, „Rev. Sc. Instr.” (1960) 31, 977.
8. B. E. Sobotkovski, „Prib. Tehn. Exp.” (1967) 1, 193.
9. A. Lüsche, *Kerninduktion*, 1957, 175.



## ПРОСТОЙ ДЕТЕКТОР ЯМР И ЭПР С ТРАНЗИСТОРАМИ

(Резюме)

Показано, что данный детектор, применённый сначала к ЭПР, можно приспособить к ЯМР и в этом случае используется в качестве детектора чувствительности для ЯМР.

## A SIMPLE NMR AND ESR DETECTOR WITH TRANSISTORS

(Summary)

The detector proposed for NMR by Yu-tung (5) can also be used in ESR. It is shown that this detector applied first to ESR can be fitted for NMR and in this case it can be used as sensibility detector for NMR.



## RECENZII

I. Marușciac, **Teoria algoritmilor**. Ed. did. și ped., București, 1967. — Teoria algoritmilor este astăzi, când s-au dezvoltat metodele de investigație în fundamentele matematicii și în același timp s-au dezvoltat mașinile de calcul, unul din domeniile de cea mai mare actualitate în matematică. Este meritul autorului de a fi dat literaturii de specialitate primul manual în limba română care prezintă teoria algoritmilor. Cu toate că noțiunea de algoritm este veche, totuși o teorie a algoritmilor este recentă. Autorul care îndubitabil a dat un impuls puternic dezvoltării acestei teorii este A. A. Markov și orice manual privind această teorie trebuie să se bazeze pe lucrările lui Markov.

În primul capitol autorul face o prezentare a noțiunilor introductive, a teoriei operatorilor alfabecici și algoritmici. Aceasta este prezentată de o manieră foarte clară, clasică am putea zice, de fiind teoria grupurilor libere a devenit un auxiliar prețios în diferitele teorii matematice.

Capitolul 2 este destinat studierii algoritmilor normali. Importanța lui rezultă din faptul că toți algoritmi utilizați sînt algoritmi normali. Aceștia sînt definiți prin scheme de substituție. După aceea se tratează compunerea algoritmilor, extinderea și închiderea lor. Capitolul este ilustrat cu exemple, ceea ce face această teorie aridă mai accesibilă.

Capitolul 3 este consacrat studiului funcțiilor recursive. Se expune în acest capitol tot ce este necesar înțelegerii capitolelor următoare. Se enunță teza lui Church.

Capitolul 4 tratează teoria mașinilor Turing, așa cum trebuie s-o cunoască orice matematician care lucrează cu mașini electronice de calcul. De aceea ponderea în tratarea acestui capitol cade pe latura practică.

Cartea se termină cu capitolul 5 în care sînt prezentate cîteva probleme nerezolvabile algoritmice.

Autorul a reușit în cadrul puținelor pagini puse la dispoziție de editură să prezinte cele mai importante părți ale teoriei algoritmilor. Cartea este

scrisă cu un real talent pedagogic, ușor accesibilă tuturor aceluia care au o oarecare cultură matematică. Ea este foarte utilă pentru toți care fie în cercetare, fie în practică se lovesc de algoritmi. O recomand cu căldură tuturor care se interesează de progresele realizate de matematică, cercetătorilor și, firește, studenților.

GH. PIC

**Proceedings of the Second Australasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics**. Printed by University of Auckland, 1966, 899 pp. — The Second Australasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics was held from the 6 th to the 11 th December, 1965 at the University of Auckland, New Zealand. It was carried out under the auspices of the University of Auckland and the New Zealand Institution of Engineers, being mainly devoted to the problems in connection with Hydraulics and Fluid Mechanics.

The publication is divided in three groups of problems. The first two, designated by *A* and *B*, contain 46 papers, which have a pronounced theoretical and experimental character. So we mention here some of them: "Extension of the Hele-Shaw Analogy" (J. H. Preston), "Energy Dissipation Through Hydraulic Jump" (R. M. Advani), "Turbulence and Vorticity in Loose Boundary Hydraulics" (A. J. Raudkivi), "Some Problems Associated with the Measurement of Turbulence" (G. S. Harris), "Development of an Experimental Technique for Measuring Local Heat Transfer from a Sphere" (K. R. Lawther), "Experiments on the Suspension of Spheres in Inclined Tubes" (G. F. Round and Jan Kruyer) etc.

The third group, noted *C*, contains 14 papers dealing with the problems of mathematical orientation, especially: "Stokes Flow in Pipes and Channels of Varying Cross-Sections" (J. C. Burns), "A Quasi-Stable Density-Stratified Flow in a Saturated Porous Medium" (E. John List) "Thermal Boundary Layers in Laminar and

Turbulent Flow" (T. C. Chawla and G. de Vahl Davis), "On Convection in a Porous Medium" (A. McNabb) etc.

The theoretical and experimental results are either given in tables or in graphs, and in most of the cases the technical devices are carefully shown.

The published papers point out the applicative features and the practical interest which lies at their base. The results obtained are of a great theoretical and practical importance for Hydraulics and Fluid Mechanics.

The variety and diversity of the tackled problems and their treatment give the volume a high scientific level.

The publication is recommended to be used in the problems of scientific research by the engineers and research workers in the branch of Hydraulics and Fluid Mechanics.

IOAN POP

Lieven Van Gerven, *Lijnvormen in paramagnetische rezonantie*. Interuniversitair Instituut voor kernwetenschappen. Monografie nr. 11, 1967. Brussel, Egmontstraat 11.

The book has 168 pages and is divided in 7 chapters. Chapter 1. (General introduction) is devoted to the phenomenon of paramagnetic resonance and especially to the PR line shape which are investigated from a general point of view.

Chapter 2 (Experimental problems) gives a minute description of the experimental arrangement used during the measurements. The author pays a special attention to the fidelity of the apparatus and the measuring techniques — an essential requirement in the study of the line shapes. The author used a radiospectrometer with a marginal oscillator as well as a visualization system of the resonance signal by means of an oscilloscope.

The next chapter (General measuring methods) deals with the calibration of the magnetic fields, using the phenomenon of magnetic resonance.

In chapter 4 (Theoretical study of the experimental lines) the characteristics of some experimental curves of magnetic resonance are investigated in a general and theoretical way. A new method to determine the line width is given.

In chapter 5 (Measurements on the paramagnetic resonance in DPPH) the author gives many details concerning the EPR measurements on DPPH, at a frequency of 30 MHz in a temperature ranging from 300°K to 1,5°K. The line shape was graphically studied. The parameters: Landé factor, the line width, as well as the two relaxation times have been measured.

Chapter 6 — the main part of the book — having the title "General classical theory of the paramagnetic resonance" discusses on the general

theory the expression of the line shape in an arbitrary magnetic field.

The author suggested and analyzed several methods for the solving of the Bloch equations.

In the last chapter (Some preliminary measurements to check the classical general theory) we find some experimental data which prove the general theory for the case  $H > 0$ .

The book has also a list of symbols, a bibliographical note with 23 titles, 21 photos and a summary in English.

The work presents a special interest for the physicists working in magnetic resonance and especially in electron spin resonance.

The author is a well-known specialist in the field of electron spin resonance. His mentioned book, as well as his investigations are known and appreciated within the framework of Solid State Physics Laboratory of Babeş-Bolyai University, headed by Prof. I. Ursu. Lieven Van Gerven treats the problems in an interesting and attractive way, succeeding by this book, to fill a void in the literature on electron spin resonance.

ALEXANDRU BÓDI

H. Pfeifer, *Elektronik für den Physiker* Akademie-Verlag, Berlin, 1966—1967.

Die Arbeit in 6 Bänden *Elektronik für den Physiker* ist im Grunde genommen das Lehrbuch, nach dem Prof. H. Pfeifer zehn Jahre lang den Studenten seine Vorträge hielt. Professor H. Pfeifer ist ein hervorragender Spezialist für Probleme der Elektronik in der magnetischen Resonanz, als solcher anerkannt auch im Ausland, und natürlich ist er auch dem Corp Solid-Laboratorium der Clujer Universität wohl bekannt.

Band I (187 Seiten, 55 Abbildungen und 11 Tabellen) erläutert die mit der Theorie der linearen Bauelemente der Schaltungen verbundenen Probleme. Band II (100 Seiten, 28 Abbildungen und 9 Tabellen) behandelt die Elektronenröhren. Schaltungen mit Elektronenröhren bilden den Inhalt des dritten Bandes (170 Seiten, 67 Abbildungen und 3 Tabellen). In Band IV (200 Seiten, 59 Abbildungen und 5 Tabellen) werden Leitungen und Antennen behandelt. Band V (131 Seiten, 42 Abbildungen und 3 Tabellen) bringt einen Überblick über Probleme der Mikrowellenelektronik. Band VI — zugleich letzter Band — (217 Seiten, 81 Abbildungen und 19 Tabellen) gibt einen Überblick über elektronische Halbleiterdispositive.

Die Arbeit Prof. H. Pfeifers zeichnet sich auch eine genaue mathematische Erläuterung, eine einheitliche Behandlung der theoretischen, experimentellen und angewandten Probleme aus und enthält ausserdem die Grundprobleme der klassischen und modernen Elektronik. Ein anderer Vorzug der Arbeit ist der reiche und gut begründete Inhalt, verhältnismässig kurz gefasst. Die Erläuterung der

Probleme ist methodisch und zeichnet sich durch reelle pädagogische Eigenschaften aus. In diesem Sinne ist die wohlverwogene Behandlung des physikalischen Phänomens bemerkenswert: die reiche Literatur eines jeden Bandes, die Beispiele am Ende der einzelnen Kapitel, sowie das Stichwortverzeichnis in welchem auf grundlegende Werke und Einführungen, wo das Stichwort auffindbar ist, hingewiesen wird, sowie die Seitenzahl im vorliegenden Buch für das entsprechende Stichwort.

Die obengenannten Eigenschaften empfehlen die Arbeit Professor H. Pfeifers *Elektronik für den Physiker* allen Studenten der Physikalischen Fakultät als ein sehr nützliches Buch. Dieses Werk wird bei uns viel von den jungen Forschern des Corp Solid-Laboratoriums im Rahmen des von Prof. I. Ursu geleiteten Seminars verwendet.

E. TĂTARU

G. Lancaster, *Electron Spin Resonance in Semiconductors*. Hilger & Watts Ltd., London (1966), 152 pp.

Dr. Lancaster's book is the most recent and comprehensive review on electron spin resonance in semiconductors. The book is written with a distinct competence and scientific strictness, the discussed subjects being harmoniously connected in a unitary treating. The book contains six chapters, an appendix, a glossary and an index. The first chapter "Energy bands and impurity states in semiconductors" contains a general presentation of the possibilities to use the electron spin resonance in the study of semiconductors, followed by a concise presentation of the energy bands and shallow and deep impurity states

theory in silicon, germanium and group III-V compounds. In the second chapter "Group V impurities in silicon", the hyperfine interaction and g value theory for the shallow donors in unstrained and strained crystals is given. The results regarding non-localized electrons, relaxation times, as well as the results obtained in the study of the shallow acceptors in silicon are also presented. In the third chapter "Deep-lying states in silicon" the main data regarding ESR of the transition ions introduced in silicon are presented and explained. The fourth chapter "Radiation damaged semiconductors" points out the excellent resources of the ESR method in this field of research. The fifth chapter "Electron spin resonance in germanium and group III-V compounds" presents the results regarding the shallow donors in germanium and bound and non-localized electrons in group III-V compounds. In the sixth chapter "Application of electron spin resonance in semiconductors" some of the main applications of ESR in semiconductors are presented: study of the electron transfer processes in silicon, surface states, nuclear polarization schemes, investigation of the hyperfine structure anomaly, the measurement of nuclear magnetic moments, a two-level maser. In appendix, the Wannier functions and shallow donor-impurity states are treated.

The author is a well-known and appreciated specialist.

The high-level treating and the richness of the presented data, give Dr. Lancaster's book a particular interest for all those who work in the electron spin resonance or in the field of semiconductors.

VOICU LUPEI



## E R A T Ă

<i>Pag.</i>	<i>Rîndul</i>	<i>În loc de:</i>	<i>Se va citi:</i>
78 Fig. 1.	în orizontală	0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0	0,1, 0,2, 0,3, 0,4, (
126	7 de jos	$A_0 \pm \dots B_0 \pm$	$A_0 \mp \dots B_0 \mp$
128	8 de sus	$A_2^2$	$2 A_2^2$
	11 de sus	$\frac{24}{3}$	$\frac{24}{9}$





În cel de al XIII-lea an de apariție (1968) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);  
chimie (2 fascicule);  
geologie—geografie (2 fascicule);  
biologie (2 fascicule);  
filozofie;  
științe economice;  
psihologie—pedagogie;  
juridice;  
istorie (2 fascicule);  
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIII году издания (1968) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);  
химия (2 выпуска);  
геология—география (2 выпуска);  
биология (2 выпуска);  
философия;  
экономические науки;  
геология—педагогика;  
юридические науки;  
история (2 выпуска);  
знание—литературоведение (2 выпуска).

À leur XIII-me année de publication (1968) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent séries suivantes:

thématiques—physique (2 fascicules);  
chimie (2 fascicules);  
géologie—géographie (2 fascicules);  
biologie (2 fascicules);  
philosophie;  
sciences économiques;  
psychologie—pédagogie;  
sciences juridiques;  
histoire (2 fascicules);  
linguistique—littérature (2 fascicules).

43875

Abonament anual: 20 lei seria, 160 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Prețul 10 l