

491307

EX. 3

# STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1967

d. H. 47

C L U J

In cel de-al XII-lea an de apariție (1967) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);  
chimie (2 fascicule);  
geologie—geografie (2 fascicule);  
biologie (2 fascicule);  
filozofie;  
științe economice;  
psihologie—pedagogie;  
științe juridice;  
istorie (2 fascicule);  
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XII году издания (1967) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);  
химия (2 выпуска);  
геология—география (2 выпуска);  
биология (2 выпуска);  
философия;  
экономические науки  
психология—педагогика;  
юридические науки;  
история (2 выпуска);  
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XII-ème année de publication (1967) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physiques (2 fascicules);  
chimie (2 fascicule);  
géologie—géographie (2 fascicules);  
biologie (2 fascicules);  
philosophie;  
sciences économiques;  
psychologie—pédagogie;  
sciences juridiques;  
histoire (2 fascicules);  
linguistique—littérature (2 fascicules).

491307

STUDIA  
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1967

d. 145 67

C L U J

REDACTOR ȘEF:

**Acad. prof. C. DAICOVICIU**

REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI:

**Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. AL. ROȘCA, membru corespondent al Academiei;  
prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei**

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:

**Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ,  
prof. Z. GĂBOS, prof. D. V. IONESCU, conf. I. POP, prof. GH. PIC,  
prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei**

Redacția:

CLUJ, str. M. Kogălniceanu 1  
Telefon 1—34—50

## S U M A R

P. SANDOVICI, P. ENGHİȘ, M. ȚARINĂ, Asupra grupului de mișcări al unor spații $V_{2N}$ care admit cîmpuri de vectori nuli paraleli . . . . .	7
B. ORBÁN, V. GROZE, GH. COMAN, Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu scări rectilinii . . . . .	15
B. ORBÁN, A. VASIU, Despre transformarea proiectivă a unei nomograme cu două scări pe o parabolă și una rectilinie . . . . .	25
M. DUTTA, L. DEBNATH, On Solution of Certain Partial Differential Equations by Integral Transform (Rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale prin transformări integrale) . . . . .	33
M. FRENKEL-FERTIG, Studiul geometric al oscilațiilor autonome la sisteme de trei ecuații diferențiale . . . . .	39
D.D. STANCU, A Method for Computing the Moments of the Multinomial and Multiple Poisson Distributions (O metodă pentru calculul momentelor distribuțiilor multinomială și Poisson-multiplă) . . . . .	49
F. OLARIU, Asupra evaluării ordinului de aproximație a funcțiilor continue de două variabile prin polinoame de interpolare de tip Hermite-Fejér . . . . .	55
I. TODORAN, <i>TX Comae Eevenices</i> . . . . .	65
IOAN POP, Asupra stratalui limită termic nestaționar . . . . .	73
V. MARIAN, Introducerea mecanicii lui Newton în România . . . . .	79
M. POPESCU, <i>Elementele de fizică</i> ale lui Emanoil Bacaloglu . . . . .	85
Z. GÁBOS, Asupra dezintegrării leptonice a barionilor . . . . .	91
IULIU POP, L. JESZKEL, Das Studium des magnetischen Verhaltens einiger Ferrite auf Grund von seltenen Erden (Studiul comportării magnetice a unor ferite pe bază de pământuri rare) . . . . .	97
R. BAICAN, C. BÁLINTFFI, A. BÓDI, Mesure de quelques paramètres de ferrites du type $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$ dans la bande X (Măsurarea unor parametri de ferite de tipul $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$ în banda X) . . . . .	103
E. CONȘTANTIN, A. CIUPE, D. AU SLÄNDER, Variația permitivității dielectrice a alcoolului <i>n</i> -propilic în cîmpul ultrasonic . . . . .	113
E. TĂȚĂRĂR, Analiza circuitului de formare a impulsurilor de durată scurtă, cu grup <i>hC</i> în emiterul tranzistorului . . . . .	117
V. CRISTEA, Obținerea monocristalelor de rutil ( $\text{TiO}_2$ ) aliat cu niobiu pe o instalație Verneuil . . . . .	123
GH. ILONCA, Măsurarea rezistivității electrice la plăcuțe subțiri de material prin metoda sondelor . . . . .	127

### Note

F. KOCH, Raportul semnal/zgomot la analiza cantitativă cu metoda RMN . . . . .	135
--	-----

### Recenzii

Gh. Pic, <i>Algebră superioară</i> (F. RADÓ) . . . . .	139
Béla Kerékjártó, <i>Les fondements de la Géométrie. T. II. Géométrie projective</i> (M. ȚARINĂ) . . . . .	140
G. Herdan, <i>The Advanced Theory of Language as Choice and Chance</i> (I. STAN) . . . . .	141
Jacek W. Hennel, <i>Wstęp do teorii magnetycznego rezonansu jądrowego</i> (V. NICULESCU) . . . . .	142

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

П. САНДОВИЧ, П. ЭНГИШ, М. ЦАРИНЭ, О группе движений некоторых пространств $U_{2k}$ , допускающих поля параллельных нулевых векторов . . . . .	7
Б. ОРБАН, В. ГРОЗЕ, Г. КОМАН, О проективном преобразовании номограммы с прямолинейными шкалами . . . . .	15
Б. ОРБАН, А. ВАСИУ, О проективном преобразовании номограммы с двумя шкалами на одной параболе и с одной прямолинейной шкалой . . . . .	25
М. ДУТТА, Л. ДЕБНАТ, Относительно решения некоторых уравнений с частными производными при помощи интегральных преобразований . . . . .	33
МАРГАРЕТА ФРЕНКЕЛ-ФЕРТИГ, Геометрическое исследование автономных колебаний систем трех дифференциальных уравнений . . . . .	39
Д. Д. СТАНКУ, Метод вычисления моментов мультиномиального распределения и многократного распределения Пуассона . . . . .	49
ФЛОРИКА ОЛАРИУ, О вычислении порядка приближения непрерывных функций двух переменных посредством многочленов интерполирования типа Эрмита-Фейера . . . . .	55
ИОАН ТОДОРАН, <i>TX Comae Berenices</i> . . . . .	65
ИОАН ПОП, О нестационарном термическом пограничном слое . . . . .	73
ВИКТОР МАРИАН, Введение механики Ньютона в Румынии . . . . .	79
МАРИЯ ПОПЕСКУ, „Элементы физики” Емануила Бакалоглу . . . . .	85
З. ГАБОШ, О лептонском распаде барнонов . . . . .	91
ЮЛИУ ПОП, И. ЙЕСКЕЛ, Исследование магнитного поведения некоторых ферритов на основе редких земель . . . . .	97
Р. БАЙКАН, К. БАЛИНТФИ, А. БОДИ, Измерение некоторых параметров ферритов типа $a(Fe_2O_3) + X_1(NiO) + X_2(ZnO)$ в полосе $X$ . . . . .	103
Е. КОНСТАНТИН, А. ЧУПЕ, Д. АУСЛЭНДЕР, Изменение диэлектрической проницаемости $n$ -пропилового спирта в ультразвуковом поле . . . . .	113
ЭМИЛ ТЭТАРУ, Анализ цепи образования кратковременных импульсов с $RC$ группой в эмиттере транзистора . . . . .	117
ВАЛЕР КРИСТЯ, Получение монокристаллов рутила ( $TiO_2$ ), легированного с ниобием на установке типа Верней . . . . .	123
ГЕОРГЕ ИЛОНКА, Измерение удельного электрического сопротивления тонких пластинок материала методом зондов . . . . .	127
З а м е т к и	
Ф. КОХ. Отношение сигнал/шум при количественном анализе методом ЯМР . . . . .	135
Р е ц е н з и и . . . . .	139

SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

P. SANDOVICI, P. ENGHIS, M. ȚARINĂ, Sur le groupe de mouvements d'espaces $V_{2N}$ admettant des champs de vecteurs nuls parallèles. . . . .	7
B. ORBÁN, V. GROZE, GH. COMAN, Sur la transformation projective du nomogramme à échelle rectiligne. . . . .	15
B. ORBÁN, A. VASIU, On the Projective Mapping of a Nomogram with Two Scales on a Parabola and one Rectilinear. . . . .	25
M. DUTTA, L. DEBNATH, On Solution of Certain Partial Differential Equations by Integral Transform. . . . .	33
MARGARETA FRENKEL-FERTIG, A Geometrical Study of Autonomous Oscillations for Systems of Three Differential Equations. . . . .	39
D. D. STANCU, A Method for Computing the Moments of the Multinomial and Multiple Poisson Distributions. . . . .	49
FLORICA OLARIU, Sur l'évaluation de l'ordre d'approximation des fonctions continues de deux variables par des polynômes d'interpolation de type Hermite-Féjér. . . . .	55
IOAN TODORAN, <i>TX Comae Berenices</i> . . . . .	65
IOAN POP, On the Unsteady Thermal Boundary Layer. . . . .	73
VICTOR MARIAN, L'introduction de la mécanique de Newton en Roumanie. . . . .	79
MARIA POPESCU, Emanoil Bacaloglu's Work „Elements of Physics” . . . . .	85
Z. GÁBOS, On the Leptonic Desintegration of the Baryons. . . . .	91
IULIU POP, L. JESZKEL, Das Studium des magnetischen Verhaltens einiger Ferrite auf Grund von seltenen Erden. . . . .	97
R. BAICAN, C. BÁLINTFFI, A. BÓDI, Mesure de quelques paramètres de ferrites du type $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + b(\text{Cr}_2\text{O}_3) + X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$ dans la bande X. . . . .	103
E. CONSTANTIN, A. CIUPE, D. AUSLÄNDER, Variation de la permittivité diélectrique de l'alcool n-propylique dans le champ des ultra-sons. . . . .	113
EMIL ȚĂRĂNU, Analyse du circuit de formation des impulsions de courte durée, avec le groupe RC dans l'émetteur du transistor. . . . .	117
VALER CRISTEA, The Obtaining of the Rutile Monocrystals ( $\text{TiO}_2$ ) Alloyed with Niobium in a Verneuil Installation. . . . .	123
GHEORGHE ILONCA, Mesure de la résistivité électrique des plaquettes minces de matériel par la méthode des sondes. . . . .	127

Notes — Notizen

F. KOCH, Signal to Noise Ratio in the Quantitative Analysis using NMR Method. . . . .	135
---	-----

Livres parus — Books — Bücherbesprechung. . . . .	139
---	-----





# ASUPRA GRUPULUI DE MIȘCĂRI AL UNOR SPAȚII $V_{2N}$ CARE ADMIT CÂMPURI DE VECTORI NULI PARALELI

de

**P. SANDOVICI, P. ENGIHȘ și M. ȚARINĂ**

**1.** Din rezultatele lui A. G. Walker [1] se știe că spațiile  $V_{2N}$  admit cel mult  $N$  câmpuri de vectori paraleli nuli și, dacă acest maxim este atins, într-un sistem convenabil de coordonate metrica lor se poate scrie sub forma :

$$ds^2 = 2 dx^1 dx^{N+1} + \dots + 2 dx^N dx^{2N} + g_{\alpha\beta}(x^1, \dots, x^N) dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

Această clasă de spații cuprinde și spațiile simetrice care au fost studiate de către P. A. Sirokov [2], A. S. Fedenkova [3], [4] și V. T. Vodnev [5], [6]

În lucrare prezentăm câteva rezultate relative la grupul de mișcări al acestor spații, considerînd cazul general al metricii (1), precum și câteva cazuri particulare. Pentru cazul spațiilor  $V_4$  găsim pe lângă spațiul cu grup maxim  $G_8$  indicat de G. I. Krucikovici [7] și alte spații cu același ordin al grupului de mișcări.

**2.** Operatorii  $Xf = \xi^k \partial_k f$  ai grupului de mișcări al unui spațiu riemannian cu tensor metric  $g_{ij}$  se obțin integrînd ecuațiile lui Killing

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{kj} \partial_i \xi^k = 0 \quad (i, j.)$$

În cazul metricii (1) aceste ecuații devin

$$(N + p, N + q) \quad \partial_{N+p} \xi^p + \partial_{N+p} \xi^q = 0 \quad (2.1)$$

$$(N + p, q) \quad \partial_q \xi^p + \partial_{N+p} \xi^{N+q} + g_{\alpha q} \partial_{N+p} \xi^\alpha = 0 \quad (2.2)$$

$$p, q) \quad \xi^\alpha \partial_\alpha g_{pq} + g_{p\alpha} \partial_q \xi^{N+q} + g_{\alpha q} \partial_p \xi^\alpha + \partial_q \xi^{N+p} + \partial_p \xi^{N+q} = 0 \quad (2.3)$$

Din ecuațiile (2.1) rezultă :

$$\xi^p = \varphi_q^p(x^r) x^{N+q} + \varphi^p(x^r) \quad (3)$$

unde  $\varphi_q^p = -\varphi_p^q$  (4). Substituind (3) în ecuația (2.2) avem

$$\partial_q \varphi_x^p x^{N+\alpha} + \partial_q \varphi^p + \partial_{N+p} \xi^{N+q} + g_{\alpha q} \varphi_x^\alpha = 0 \quad (5)$$

Derivînd (5) în raport cu  $x^{N+r}$  găsim :

$$\partial_q \varphi_r^p + \partial_{N+pN+r} \xi^{N+q} = 0$$

și alternînd în raport cu indicii  $N + p$  și  $N + r$  obținem:  $\partial_q(\varphi_r^p - \varphi_p^r) = 0$  adică:  $\varphi_r^p - \varphi_p^r = \text{constant}$ . Ținînd seama de (4) rezultă  $\varphi_r^p = C_r^p$  (constante) deci:  $\partial_{N+p, N+r} \xi^{N+q} = 0$  și astfel

$$\xi^{N+q} = A_r^q x^{N+r} + B^q \quad (6)$$

unde  $A_r^q$  și  $B^q$  sînt funcții de  $x^1, \dots, x^N$ .

În baza formulelor (3) și (6) ecuațiile (2.2) și (2.3) devin

$$\partial_q \varphi^p + A_p^q + C_p^\alpha g_{\alpha q} = 0 \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} (C_r^\alpha x^{N+r} + \varphi^r) \partial_\alpha g_{pq} + g_{p\alpha} \partial_q \varphi^\alpha + g_{\alpha q} \partial_p \varphi^\alpha + \\ \partial_q A_r^p x^{N+r} + \partial_q B^p + \partial_p A_r^q x^{N+r} + \partial_p B^q = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Ecuațiile (7.2) fiind liniare în variabilele  $x^{N+r}$  și identic verificate, în raport cu acestea avem:

$$C_r^\alpha \partial_\alpha g_{pq} + \partial_q A_r^p + \partial_p A_r^q = 0 \quad (8.1)$$

$$\varphi^r \partial_\alpha g_{pq} + g_{p\alpha} \partial_q \varphi^r + g_{\alpha q} \partial_p \varphi^r + \partial_q B^p + \partial_p B^q = 0 \quad (8.2)$$

Substituind în (8.1) valorile lui  $A_p^q$  din (7.1) avem:

$$C_r^\alpha \partial_\alpha g_{pq} - C_r^\alpha \partial_q g_{\alpha p} - C_r^\alpha \partial_p g_{\alpha q} - 2 \partial_p \varphi^r = 0.$$

Am obținut astfel relațiile:

$$C_r^\alpha |pq, \alpha| = - \partial_{pq} \varphi^r \quad (9)$$

unde

$$|pq, \alpha| = \frac{1}{2} (\partial_p g_{\alpha q} + \partial_q g_{\alpha p} - \partial_\alpha g_{pq})$$

sînt simbolurile lui Christoffel de speța întii.

Condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (9) se scriu sub forma

$$R_{\alpha pq} C_r^\alpha = 0 \quad (10)$$

unde  $R_{\alpha pq}$  sînt simbolurile lui Riemann pentru metrica (1).

Pentru orice valoare dată indicelui  $r$  sistemul (10) admite numai soluția nulă dacă rangul matricii:  $\|R_{1pq} \dots R_{r-1pq} R_{r+1pq} \dots R_{Npq}\|$  este  $n-1$ .

În continuare căutăm soluții ale ecuațiilor lui Killing în cazul  $C = 0$ . Din (9) rezultă  $\partial_{pq} \varphi^r = 0$  deci:

$$\varphi^r = a_p^r x^p + a^r$$

Din ecuația (2.2) avem:

$$A_p^q = - \partial_q \varphi^p = - a_p^q$$

Ecuațiile (7.2) devin:

$$(a_i^\alpha x^i + a^\alpha) \partial_\alpha g_{pq} + g_{p\alpha} a_q^\alpha + g_{\alpha q} a_p^\alpha + \partial_q B^p + \partial_p B^q = 0 \quad (11)$$

iar ecuațiile (3) și (6) se scriu :

$$\xi^P = a_t^P x^t + a^P \quad (12)$$

$$\xi^{N+q} = A_p^q x^{N+P} + B^q \quad (12)$$

Astfel soluția corespunzătoare cazului considerat este de forma (12) unde funcțiile  $B^q$  satisfac ecuațiile (11).

O soluție particulară se obține dacă luăm  $a_i^b = a^b = 0$ . Atunci funcțiile  $B^q$  satisfac ecuația :

$$\partial_q B^p + \partial_p B^q = 0$$

și prin urmare avem :

$$B^P = \beta_q^P x^q + \beta^P = 0$$

unde  $\beta_q^p = -\beta_p^q$  (constante).

Spațiul (1) admite deci grupul abelian cu  $\frac{N(N+1)}{2}$  parametri avînd operatorii :

$$X_q = \partial_{N+q} \quad X_{pl} = x^p \partial_{N+q} - x^q \partial_{N+p} \quad (13)$$

**3.** Dintre spațiile (1) să considerăm pe acelea pentru care componentele tensorului metric  $g_{pq}$  sînt polinoame omogene de gradul al doilea

$$g_{pq} = a_{pqrs} x^r x^s \quad (14)$$

Coefficienții  $a_{pqrs}$  satisfac relațiile :

$$a_{pqrs} = a_{qprs} ; \quad a_{pqr s} = a_{pqsr}$$

Ne propunem determinarea grupului de mișcări menținîndu-ne în cazul  $c_r^x = 0$ . Ținînd seama de (14) ecuațiile (11) devin :

$$2(a_i^x x^i + a^x) a_{pqrs} x^s + a_{pqrs} a_q^x x^r x^s + a_{qprs} a_p^x x^r x^s + a_{qprs} a_r^x x^p x^s + \partial_q B^p - \partial_p B^q = 0 \quad (15)$$

O consecință a acestor ecuații este anularea derivatelor de ordinul 4,  $\partial_{qrst} B^p = 0$ , deci soluția generală are forma :

$$B^P = b_{rst}^P x^r x^s x^t + b_{rs}^P x^r x^s + b_r^P x^r + b^P \quad (16)$$

coeficienții  $b_{rst}^P$ ,  $b_{rs}^P$  fiind simetrici în indicii inferiori.

Punînd condiția ca ecuațiile (15) să fie identic verificate de funcțiile (16), obținem relațiile

$$b_q^p + b_p^q = 0 \quad (17.1)$$

$$a^x a_{pqrs} + b_{sq}^p + b_{sp}^q = 0. \quad (17.2)$$

$$3(b_{rsq}^p + b_{rqs}^p) + a_r^x a_{pqrs} + a_s^x a_{pqrs} + a_q^x a_{pqr s} + a_p^x a_{qrs} = 0 \quad (17.3)$$

Din relațiile (17.2) deducem :

$$b_{ps}^q = -A_{|ps,q|} a^x \quad (18)$$

unde am notat :

$$A_{ps,q}x = \frac{1}{2}(a_{pqs} + a_{qsp} - a_{psq}) \quad (19)$$

Simetria coeficienților  $b_{r,s}^t$  în raport cu indicii inferiori, implică pentru compatibilitatea sistemului (17.3) relațiile :

$$a_r^x R_{t(p,x} + a_s^x R_{t(p,or} + a_t^x R_{xpsr} + a_p^x R_{txsr} = 0 \quad (20)$$

componentele nenule ale tensorului de curbură fiind :

$$R_{qrs}^{N+s} = R_{rps}^{N+s} - A_{|st|t}r - A_{|rt|s} \quad (21)$$

Numărul relațiilor (20) independente este cel mult  $\frac{N(N-1)(N^2-N+3)}{8}$ . Astfel pentru  $N > 3$  sistemul (20) în cazul general considerat admite numai soluția nulă  $a_r^x = 0$ . Atunci soluția (12) se scrie

$$\xi_r^p = a^p, \quad \xi_s^{N+s} = A_{ps,q}x a^q x^p x^s + b_s^i x^s + b^i$$

Întrucît constantele  $a^p, b^q, b_s^i$  ( $r < s$ ) sînt independente, rezultă că spațiul (1) cu tensorul metric dat de formulele (14) posedă grupul de mișcări cu operatori :

$$\begin{aligned} X_p &= \partial_p - \sum_x A_{rs,x} p x^r x^s \partial_{N+x} \\ Y_q &= \partial_{N+q} \\ X_{r,s} &= X^r \partial_{N+r} - X^{s+1} \partial_{N+r} \end{aligned} \quad (22)$$

avînd structura :

$$\begin{aligned} (X_p X_q) &= (X_p Y_q) = (Y_p Y_q) = (Y_p X_r) = (X_{pq} X_r) = 0 \\ (X_p X_{r,s}) &= \delta_p^r Y_s - \delta_p^s Y_r \end{aligned} \quad (23)$$

*Spațiul (1) cu tensorul metric (14) admite un grup de mișcări cu cel puțin  $\varphi = 2N + \frac{N(N-1)}{2}$  parametri.*

4. Pentru cazul  $N = 2$  relațiile (20) se reduc la  $a_1^1 + a_2^2 = 0$ , și considerînd constantele  $a_1^1, a_2^1, a_1^2$  independente, spațiile  $V_4$  respective posedă un grup de mișcări  $G_8$  definit de cei cinci operatori (22) și de operatorii :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= X_{11} - X_{22} = x^1 \partial_1 - x^2 \partial_2 - x^3 \partial_3 + x^4 \partial_4 - \\ &\quad - \frac{1}{3} \left\{ \sum_q (A_{|ps,q|t} x^1 - A_{|ps,q|2} x^2 + 2A_{|p1,q|s} x^1 - \right. \\ &\quad \left. - 2A_{|p2,q|s} x^2 + \delta_1^q A_{|ps,1|t} x^t - \delta_2^q A_{|ps,2|t} x^t) x^p x^r \right\} \partial_{N+q} \\ Y_{\sigma\tau} &= x^\tau \partial_\sigma - x^{N+\sigma} \partial_{N+\tau} - \frac{1}{3} \sum (A_{|ps,q|\sigma} x^\tau x^p x^s + \\ &\quad + 2A_{|p\sigma,q|s} x^\tau x^p x^s + \delta_\tau^q A_{|ps,\sigma,r} x^p x^r x^s) \partial_{N+q} \\ &\quad \sigma \neq \tau, \quad \sigma, \tau = 1, 2, \end{aligned} \quad (24)$$

Ecuțiile de structură ale grupului se obțin adăugînd la (23) relațiile :

$$\begin{aligned}
 (X_k Y_{pq}) &= \delta_k^q X_p & (Y_k Y_{pq}) &= -\delta_k^p Y_q \\
 (Y_{pq} X_{rs}) &= \delta_r^s X_{pq} & (Y_{pq} Y_{kl}) &= \delta_p^l Y_{kq} - \delta_q^k Y_{pl} \\
 (Y_k Y_{11}) &= -\delta_k^1 Y_1 + \delta_k^2 Y_2 \\
 (X_k Y_{11}) &= \delta_k^1 X_1 - \delta_k^2 X_2 \\
 (X_s Y_{11}) &= -\delta_s^1 X_{1s} - \delta_s^1 X_{r1} + \delta_s^2 X_{2s} + \delta_s^2 X_{r2} \\
 (Y_{pq} Y_{11}) &= \delta_p^1 Y_{1q} - \delta_p^1 Y_{r1} - \delta_p^2 Y_{2q} + \delta_p^2 Y_{r2} \\
 p \neq q, k \neq l, & & (p, q, k, l &= 1, 2)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Spațiile  $V_4$  cu metrica

$$ds^2 = 2dx^1 dx^3 + 2dx^2 dx^4 + [a_{11,rs}(dx^1)^2 + 2a_{12,rs} dx^1 dx^2 + a_{22,rs}(dx^2)^2] x^r x^s \tag{26}$$

posedă grupul  $G_8$  generat de operatorii (22), (24) cu structura (23), (25)

Printre spațiile (26) se află și spațiul menționat de G. I. Krucikovici [7] cu metrica :

$$ds^2 = 2dx^1 dx^3 + 2dx^2 dx^4 + (x^1)^2 (dx^2)^2 \tag{27}$$

Spațiul (27) se obține efectuînd asupra metricii (26) transformarea dată de formulele !

$$x'^1 = x^1 \quad x'^2 = x^2 \quad x'^3 = x^3 - \varphi(x^1, x^2) \quad x'^4 = x^4 - \Psi(x^1, x^2)$$

unde  $\varphi$  și  $\Psi$  sînt polinoame de gradul 3, numai dacã este verificatã relația :

$$2a_{12,12} = a_{11,22} + a_{22,11} - 1.$$

5. Ecuțiile (20) pot fi verificate pentru anumite spații particulare (1)–(14) fãrã a impune condiții asupra constantelor  $a_r^\alpha$ . Vom scrie ecuațiile (20) sub forma :

$$(\delta_r^\beta R_{tps\alpha} + \delta_s^\beta R_{tp\alpha r} + \delta_t^\beta R_{\alpha p s r} + \delta_p^\beta R_{t\alpha s r}) a_\beta^\alpha = 0 \tag{28}$$

Aceste relații vor fi verificate pentru orice valori ale lui  $\alpha$  dacã avem

$$\delta_r^\beta R_{tps\alpha} + \delta_s^\beta R_{tp\alpha r} + \delta_t^\beta R_{\alpha p s r} + \delta_p^\beta R_{t\alpha s r} = 0$$

ceea ce implicã faptul cã spațiul este euclidian. Dacã însã impunem alte condiții lui  $a_r^\alpha$ , se pot gãsi spații care admit un grup de mișcãri de ordin mai mare decît 9. Astfel, dacã presupunem antisimetria constantelor  $a_\beta^\alpha$ , deci  $a_\beta^\alpha + a_\alpha^\beta = 0$  relațiile (28) vor fi identic verificate în raport cu  $a_\beta^\alpha$  dacã avem

$$\begin{aligned}
 &\delta_r^\beta R_{tps\alpha} + \delta_s^\beta R_{tp\alpha r} + \delta_t^\beta R_{\alpha p s r} + \delta_p^\beta R_{t\alpha s r} - \\
 &- \delta_r^\alpha R_{tps\beta} - \delta_s^\alpha R_{tp\beta r} - \delta_t^\alpha R_{\beta p s r} - \delta_p^\alpha R_{t\beta s r}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Spațiile (1) — (14), al căror tensor de curbură verifică identic relațiile (29), posedă un grup de mișcări cu cel puțin  $\rho_1 = 2N + N(N - 1) = N^2 + N$  parametri.

Un exemplu de spațiu de acest fel este spațiul  $V_{2N}$  cu metrica

$$ds^2 = 2 \sum_{p=1}^N dx^p dx^{N+p} + \sum_{p \neq q} \beta x^p x^q dx^p dx^q + \sum_{p,q} [\gamma + \delta_q^p (\alpha - \gamma)] (x^p)^2 (dx^q)^2 \quad (30)$$

unde  $\alpha$ ,  $\beta$ , și  $\gamma$  sînt constante.

Intrat în redacție la 16 februarie 1966

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Walker, Canonical Form for a Riemannian Space with a Parallel Field of Null Planes. „Quarterly Journal of Mathematics” 1950 (1).
2. P. A. Sirokov, *Simetriceskie prostranstva pervogo klassa*. „Ucionie zapiski kazanskogo Universiteta.” 114, kn. 8, 1954.
3. A. S. Fedenko, *Metod predelnogo perehoda v teorii rimannovih prostranstv*. „Izvestia A.N. B.S.S.R, seria fizikotehniceskikh nauk” (1958).
4. A. S. Fedenko, V. T. Vodnev, *Grupi dvizhenii konformnoevklidovih simetriceskikh prostranstv*. „DAN BSSR” III, n. 6 (1959).
5. V. T. Vodnev, *Asupra unei clase de spații riemanniene cu geodezice plane*. „Studii și cercetări matematice” XV, nr. 7 (1964).
6. V. T. Vodnev, *Asupra unei clase de spații riemanniene parțial proiective*. „Studii și cercetări matematice” XV, nr. 5 (1964).
7. G. I. Krucikovici, *O dvizheniiah v rimannovih prostranstvakh  $V_4$* . „Matematicheskii sbornik” 41 (83), nr. 2, 1957.

#### О ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ $V_{2N}$ , ДОПУСКАЮЩИХ ПОЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ НУЛЕВЫХ ВЕКТОРОВ

(Резюме)

В работе изучается группа движений пространств  $V_{2N}$  с метрикой (1). Показывается, что эти пространства обладают абелевой группой  $\frac{N(N+1)}{2}$  параметрами, определенной операторами (13). В случае, если составляющие метрического тензора даны формулами (14), показывается, что пространство допускает группу движений, обладающую по крайней мере  $\rho = 2N + \frac{N(N-1)}{2}$  параметрами, имея операторы (22) и уравнения структуры (23).

Для пространств  $V_4$  находим кроме пространства (27) с максимальной группой  $G_8$ , указанной Кручковичем, и пространства (26) с тем же порядком группы движений. Пространства (1) — (14), тензор кривизны которых идентично удовлетворяет отношениям (29), показывают, что они обладают группой движений, имеющей по крайней мере  $\rho_1 = N^2 + N$  параметров. Примером является пространство с метрикой (30).

SUR LE GROUPE DE MOUVEMENTS D'ESPACES  $V_{2N}$  ADMETTANT DES CHAMPS DE VECTEURS NULS PARALLÈLES

( R é s u m é )

Les auteurs étudient le groupe de mouvements des espaces  $V_{2N}$  de métrique (1). Ils montrent que ces espaces possèdent un groupe abélien à  $\frac{N(N+1)}{2}$  paramètres, engendré par les opérateurs (13). Pour le cas où les composantes du tenseur métrique sont données par les formules (14), ils montrent que l'espace admet un groupe de mouvements d'au moins  $\rho = 2N + \frac{N(N-1)}{2}$  paramètres, ayant les opératoires (22) et les équations de structure (23).

Pour les espaces  $V_4$  nous trouvons aussi, outre l'espace (27) à groupe maximum  $G_8$  indiqué par Kroutchkovitch, les espaces (26) avec le même ordre du groupe de mouvements. Les espaces (1) – (14) dont le tenseur de courbure vérifie identiquement les relations (29) possèdent, ainsi qu'on le démontre, un groupe de mouvements d'au moins  $\rho_1 = N^2 + N$  paramètres. Un exemple en est l'espace de métrique (30).





# DESPRE TRANSFORMAREA PROIECTIVĂ A NOMOGRAMEI CU SCĂRI RECTILINII

de

B. ORBĂN, V. GROZE, GH. COMAN

1. Se consideră o nomogramă  $N_0$  cu puncte aliniate, formată din trei scări rectilinii situate pe segmentele  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Putem presupune că punctele  $A_i$  aparțin unei drepte  $d_1$ , iar punctele  $B_i$  unei drepte  $d_2$  și că  $d_1 \parallel d_2$  (fig. 1).

Alegînd un reper cartezian ortogonal  $XOY$  avînd ca axa absciselor dreapta  $d_1$ , vom nota cu  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) abscisele punctelor  $A_i$ , cu  $b$  distanța dintre dreptele  $d_1, d_2$  și fie  $n_i = \cotg \alpha_i$  unde  $\alpha_i = \sphericalangle xA_i B_i \cdot M_i(x, y)$  fiind un punct curent al segmentului  $A_i B_i$ , avem relația :

$$x_i = n_i y_i + a_i \quad 0 \leq y_i \leq b \quad (1)$$

Scările nomogramei vor fi definite prin ecuațiile

$$s_i = A_i M_i = \sqrt{(x_i - a_i)^2 + y_i^2} = y_i \sqrt{1 + n_i^2} = \sqrt{1 + n_i^2} f_i(z_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

unde  $z'_i < z < z''_i$ ,  $f_i(z'_i) = 0$ ,  $f_i(z''_i) = b$ . Putem presupune că  $f'_i(z_i) > 0$  dacă  $z'_i \leq z \leq z''_i$ .

Se știe că eroarea generalizată a nomogramei  $N_0$  într-un punct  $M$  al ei de cotă  $z_i^0$  este evaluată de expresia :  $\Delta z \sim E(M) = \frac{h}{\frac{ds_i}{dz_i}(z_i^0) \psi(z_i^0)}$  unde  $h$  este o con-

stantă numită eroarea geometrică iar  $\psi(z)$  o funcție dată (dacă  $\psi(z) = 1$  găsim eroarea absolută, iar dacă  $\psi(z) = z$  eroarea relativă). Eroarea generalizată a nomogramei  $N_0$  este dată de formula :

$$E = \max_{i=1, 2, 3} \max_{z'_i < z_i < z''_i} \frac{h}{\frac{ds_i}{dz_i} \psi(z_i)} \quad (3)$$

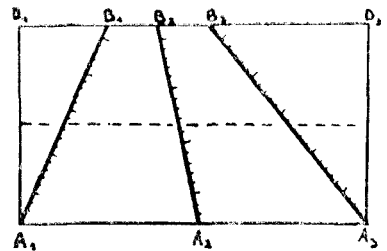


Fig. 1.

Este cunoscut că orice nomogramă cu puncte aliniate poate fi supusă la transformări proiective. Problema transformării proiective a unei scări rectilinii în scopul micșorării erorii ei a fost studiată de M. V. P e n t k o v s k i [1] și rezolvată de F. R a d ó [2], [3]. În această lucrare se studiază problema, micșorării erorii  $E$  a unei întregi nomograme cu trei scări rectilinii prin transformări proiective.

Presupunem că scările nomogramei  $N_0$  sînt astfel situate încît întreaga nomogramă este conținută în interiorul dreptunghiului  $A_1A_3D_3D_1$ , unde vîrfurile  $D_3, D_1$  aparțin dreptei  $d_2$ . Pentru ca transformările proiective folosite să nu scoată nomograma din dreptunghiul  $A_1A_3D_3D_1$ , dar în același timp lungimile scărilor să fie cît mai mari posibile, trebuie să presupunem că punctele extreme  $A_1$  și  $A_3$  rămîn fixe și că dreapta  $d_2$  care conține extermitățile  $B_i$  să fie invariantă față de transformările proiective folosite.

Dar o coliniație între punctele unui plan care admite pe  $A_1$  și  $A_3$  ca puncte unite iar pe  $d_2$  ca dreaptă unită, poate să fie numai o omologie  $\Omega$  cu axa  $d_1$ , avînd centrul  $O^*$  pe dreapta  $d_2$ . Această afirmație rezultă imediat din faptul că, dacă coliniația n-ar fi o omologie, dreapta unită  $d_2$ , care nu trece prin punctul unit  $A_1$ , adică este asociată lui, ar trebui să treacă prin celelalte puncte unite, deci și prin  $A_2$ , ceea ce contrazice ipoteza noastră că  $d_1 \parallel d_2$ .

Fie  $a$  și  $b$  coordonatele centrului  $O^*$  al omologiei,  $M$  și  $M'$  două puncte corespondente,  $M^*$  punctul în care dreapta  $MM'$  taie axa  $d_1$  și  $k = (O^*M^*MM')$  caracteristica omologiei. Fiindcă regiunea planului dintre dreptele paralele  $d_1$  și  $d_2$  trebuie să se transforme în ea însăși, rezultă  $k > 0$ . Familia  $\sum$  de omologii cu centrul variabil pe  $d_2$ , avînd ca axă  $d_1$  și de caracteristică variabilă  $k > 0$  depinde de doi parametri  $a$  și  $k$  și formează un grup.

Notînd cu  $x, y$  respectiv cu  $x', y'$  coordonatele punctelor  $M$  și  $M'$  corespondente într-o omologie din familia  $\sum$ , au loc următoarele relații

$$x' = \frac{bx + a(k-1)y}{(k-1)y + b} \quad (4)$$

$$y' = \frac{bky}{(k-1)y + b}$$

Transformînd nomograma  $N_0$  dată de ecuațiile (1) și (2) prin omologiile familiei  $\sum$ , găsim o familie de nomograme  $N(a, k)$  determinate de ecuațiile:

$$s'_i = A_i M'_i = \sqrt{(x'_i - a_i)^2 + y_i'^2} = \frac{y_i}{b + (k-1)y_i} \sqrt{[bn_i + (a - a_i)(k-1)]^2 + b^2k^2}$$

$$y_i = f_i(z_i) \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Eroarea unei nomograme din familia  $N(a, k)$  conform formulei (3) este

$$E' = \max_{i=1, 2, 3} \max_{z'_i < z_i < z''_i} \frac{h}{\frac{ds'_i}{dz_i}(z_i) \psi(z_i)}$$

O nomogramă  $N_1(a_1, k_1)$  din familia  $N(a, k)$  o vom numi relativ optimă, dacă eroarea ei este mai mică decât eroarea nomogramelor vecine  $N(a_1 + \Delta a, k_1 + \Delta k)$ , unde  $\Delta a$  și  $\Delta k$  sînt numere arbitrare suficient de mici. În lucrarea de față stabilim o condiție necesară și suficientă pentru ca o nomogramă din familia  $N(a, k)$  să fie relativ optimă.

Fiindcă familia  $\sum$  de omologi formează un grup, orice nomogramă din  $N(a, k)$  o putem considera ca nomogramă inițială. Ne putem limita deci, la aflarea condiției pentru ca nomograma dată  $N_0$  să fie relativ optimă. Nomogramele din  $N(a, k)$  tind către această nomogramă cînd  $k \rightarrow 1$ . Deci nomograma inițială este relativ optimă, dacă toate omologiile  $\Omega(a, k = 1 + \varepsilon)$  sau cele  $\Omega(a, k = 1 - \varepsilon)$  din  $\sum$  unde  $\varepsilon > 0$  și  $\varepsilon < \varepsilon_0$  transformă nomograma  $N_0$  într-o nomogramă avînd eroarea mai mare, dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic. În cazul cînd nomograma  $N_0$  nu îndeplinește condiția de optim, lucrarea indică o metodă de micșorare a erorii printr-o omologie din  $\sum$ .

Pentru a putea rezolva problema propusă, trebuie să punem în evidență cîteva proprietăți ale omologiilor din  $\sum$ .

2. Fie  $P_i(x_i, y_i)$  un punct al segmentului  $A_i B_i$  și  $s_i = A_i P_i = y_i \sqrt{1 + n_i^2}$ . Printr-o omologie  $\Omega$  din  $\sum$  dată prin relațiile (4), segmentul  $A_i B_i$  se transformă în segmentul  $A_i' B_i'$ , punctul  $P_i$  într-un punct  $P_i'(x_i', y_i')$  al acestui segment și avem, după cum am văzut la (5), relația  $s_i' = A_i' M_i' = \frac{y_i}{b + (k - 1)y_i} \sqrt{[bn_i + (a - a_i)(k - 1)]^2 + b^2 k^2}$ .

Omologia  $\Omega(a, k)$  din  $\sum$  o vom numi dilatantă în punctul  $M(x_i, y_i)$  dacă în acest punct  $\frac{ds_i'}{ds_i} > 1$ , și contractantă dacă avem  $\frac{ds_i'}{ds_i} < 1$ . Punctul în care  $\frac{ds_i'}{ds_i} = 1$  îl numim punct neutru al omologiei  $\Omega(a, k)$ . Din această definiție rezultă, că dacă omologia  $\Omega$  este dilatantă, respectiv contractantă în  $M$ , atunci vecinătățile suficient de mici ale lui  $M$  se vor dilata respectiv se vor contracta prin  $\Omega$ . Punctul neutru are proprietatea că există vecinătăți oricît de mici ale lui care își păstrează lungimile. Făcînd calculele găsim:

$$\frac{ds_i'}{ds_i} = \frac{ds_i'}{dy_i} \frac{dy_i}{ds_i} = \frac{b}{[b + (k - 1)y_i]} \sqrt{\frac{[bn_i + (a - a_i)(k - 1)]^2 + b^2 k^2}{1 + n_i^2}} \tag{6}$$

de unde se vede că  $\frac{ds_i'}{ds_i}$  variază monoton, cînd  $y_i$  descrie segmentul  $[0, b]$ . Cal-

culînd valoarea  $y_i^*$  pentru care  $\frac{ds_i'}{ds_i} = 1$ , obținem

$$y_i^*(k) = \frac{\sqrt[4]{b^2 [bn_i + (a - a_i)(k - 1)]^2 + b^2 k^2} - b}{k - 1} \tag{7}$$

Din formulale (6) și (7) rezultă direct.

*Proprietatea 1.* Punctul  $N_i$  al segmentului  $A_iB_i$  de ordonată  $y_i^*$  este punctul neutru al omologiei  $\Omega(a, k)$ . Punctul  $N_i$  împarte acest segment în două părți: partea inferioară  $A_iN_i$  și cea superioară  $N_iB_i$ . Dacă  $k > 1$  atunci omologia este dilatantă pe segmentul inferior și contractantă pe segmentul superior, iar dacă  $k < 1$  avem situația contrară.

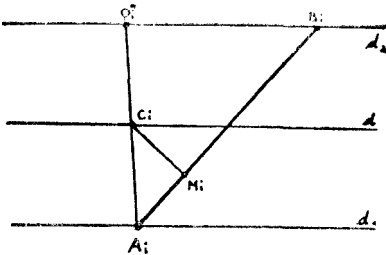


Fig. 2.

Poziția limită a punctului neutru, dacă omologia  $\Omega(a, k)$  tinde către transformarea identică, o găsim calculînd  $\lim_{k \rightarrow 1} y_i^*$

Printr-un calcul direct se găsește că:

$$Y_i = \lim_{k \rightarrow 1} y_i^* = \frac{(a - a_i)n_i + b_i}{2(1 + n_i^2)}. \quad (8)$$

Punctul  $M_i$  de ordonată  $Y_i$  al segmentului  $A_iB_i$  depinde numai de poziția centrului  $O^*$  al omologiei  $\Omega$  de pe dreapta  $d_2$ .

Printr-un calcul direct se poate arăta că punctul  $M_i$  este proiecția ortogonală a mijlocului  $C_i$  al segmentului  $O_i^*A_i$  pe dreapta  $A_iB_i$  (fig. 2). Invers, fiecărui punct  $M_i$  al segmentului  $A_iB_i$  îl putem atașa un punct  $O_i^*(a, b)$  al dreptei  $d_2$ , astfel ca  $M_i$  să fie poziția limită a punctului neutru al omologiei  $\Omega(O_i^*, k)$  pentru  $k \rightarrow 1$ , cu ajutorul următoarei construcții: Fie  $(d)$  dreapta egal depărtată de dreptele  $d_1$  și  $d_2$ . Perpendiculara dusă în  $M_i$  pe  $A_iB_i$  intersectează dreapta  $(d)$  în punctul  $C_i$ , iar dreapta  $A_iC_i$  taie dreapta  $d_2$  în punctul căutat  $O_i^*$ . Punctele  $M_i$  și  $O_i^*$  corespondente reciproc în construcția de mai sus le vom numi *puncte asociate*.

*Proprietatea 2.* Dacă punctul  $O_i^*$  se deplasează pe dreapta  $d_2$  în direcția pozitivă a axei  $Ox$ , atunci punctul  $M_i$  asociat lui  $O_i^*$ , se deplasează de la  $A_i$  la  $B_i$  dacă panta segmentului  $A_iB_i$  este pozitivă, și în direcție opusă, dacă această pantă este negativă.

Demonstrația acestei proprietăți se bazează pe formula (8) din care se vede că ordonata  $Y_i$  a punctului  $M_i$  crește o dată cu  $a$  cînd  $n_i = \cotg \widehat{x A_i B} > 0$  și descrește cînd  $n_i < 0$ .

*Proprietatea 3.* Dacă segmentul  $A_iB_i$  este perpendicular pe dreapta  $d_1$ , atunci orice punct propriu  $O^*$  al dreptei  $d_2$  are ca asociat pe  $A_iB_i$  chiar mijlocul acestei segment. Un punct  $M_i$  al segmentului perpendicular  $A_iB_i$  nu are punct asociat pe dreapta  $d_2$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A_iB_i \perp d_1$  atunci  $n = 0$  și proprietatea rezultă imediat din formula (8).

Se consideră acum mai multe segmente  $A_iB_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (distincte sau confundate) cu extremitățile pe  $d_1$  și  $d_2$  și pe fiecare din ele cite un punct  $P_i$ . Fie  $O_i^*$  punctele asociate acestor puncte de pe dreapta  $d_2$  (punctele situate pe segmentele perpendiculare pe  $d_1$  nu vor avea puncte asociate). Două puncte aso-

ciate  $O_j^*, O_k^*$  ale punctelor  $P_j, P_k$  aparținînd segmentelor  $A_jB_j, A_kB_k$  le vom numi de aceeași speță dacă pantele segmentelor  $A_jB_j, A_kB_k$  au același semn, și de speță defirită, dacă aceste pante sînt de semne contrare. Vom demonstra.

TEOREMA 1. O condiție suficientă pentru ca să nu existe omologii în familia  $\sum$  de caracteristică oricît de apropiată de 1, și dilatante în toate punctele  $P_i$  de pe segmentul  $A_iB_i, i = 1, 2, \dots, n$ , este ca printre punctele asociate punctelor  $P_i$  de pe  $AB$  să existe unul cuprins între alte două de spețe diferite cu el.

Condiția este și necesară dacă: a) printre punctele asociate nu există două de speță diferită și confundate; b) Printre segmentele  $A_iB_i$  nu există un segment perpendicular pe  $d_1$  pentru care punctul  $P_i$  să fie mijlocul lui.

Demonstrație. Mai întîi arătăm suficiența condiției, demonstrînd că în acest caz omologiile din  $\sum$  avînd caracteristica  $k = 1 \pm \epsilon$  unde  $\epsilon > 0$  fiind suficient de mic, sînt contractante cel puțin într-unul din punctele  $P$  ale segmentelor  $A_iB_i$ .

Condiția poate să fie satisfăcută numai dacă există cel puțin 3 puncte  $P_1, P_2, P_3$  pe segmentele  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  perpendiculare pe  $d_1$  și care să nu aibă pante de același semn. Presupunem că panta segmentului  $A_1B_1$  este pozitivă, iar cele ale segmentelor  $A_2B_2, A_3B_3$  sînt negative. Fie  $O_1^*, O_2^*, O_3^*$  punctele asociate punctelor  $P_1, P_2, P_3$  pe dreapta  $d_2$ . Conform definiției, trebuie să avem una dintre ordonările  $O_2^*, O_1^*, O_3^*$  sau  $O_3^*, O_1^*, O_2^*$ . Pentru fixarea ideilor presupunem ordonarea  $O_2^*, O_1^*, O_3^*$  (fig. 3).

Vom arăta că, în acest caz, oriunde alegem pe dreapta  $d_2$  curentul  $O^*$  al omologiilor din  $\sum$ , avînd caracteristica  $k = 1 \pm \epsilon, \epsilon < \epsilon_0$   $\Omega$  va fi contractantă în cel puțin unul din punctele  $P_i$  de pe segmentele  $A_iB_i, i = 1, 2, 3$ , dacă  $\epsilon_0$  este suficient de mic.

Fie de exemplu  $O^*$  pe dreapta  $d_2$  la stînga punctului  $O_2^*$  și construim punctele  $M_i$  asociate lui  $O^*$  de pe segmentele  $A_iB_i, i = 1, 2, 3$ . Conform proprietății 2, pe segmentele  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  vom avea ordonările  $A_1, M_1, P_1, A_2, P_2, M_2, A_3, P_3, M_3$ .

Punctele neutre ale omologiilor  $\Omega(a, k = 1 + \epsilon)$  unde  $\epsilon < \epsilon_0$ ; conform definiției sînt în vecinătățile oricît de mici ale punctelor  $M_i, i = 1, 2, 3$ . Deci dacă luăm  $\epsilon_0$  suficient de mic, vom avea ordonările  $A_1, N_1, P_1, A_2, P_2, N_2, A_3, P_3, N_3$ . Dar atunci, conform proprietății 1 omologiile  $\Omega(a, k = 1 + \epsilon)$  vor fi dilatante în punctele  $P_2$  și  $P_3$ , și contractante în punctul  $P_1$ . Omologiile  $\Omega(a, k = 1 - \epsilon)$  vor fi dilatante în punctul  $P_1$  și contractante în punctele  $P_2, P_3$ .

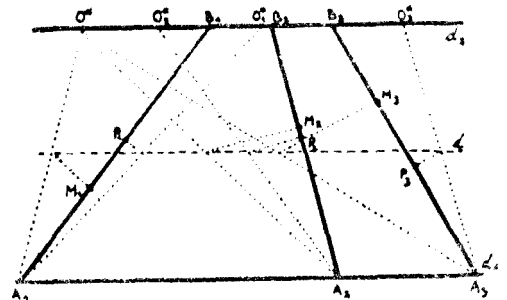


Fig. 3.

La fel raționăm cînd  $O^*$  este între punctele  $O_2^*, O_1^*$  sau între  $O_1^*, O_3^*$ , sau la dreapta punctului  $O_3^*$ . În fiecare caz găsim că omologiile  $\Omega(a, k = 1 \pm \epsilon), \epsilon < \epsilon_0$  sînt dilatante cel puțin într-unul din punctele  $P_1, P_2, P_3$  dacă  $\epsilon_0$  este suficient de mic.

În cazul când  $O^* \equiv O_2^*$ , conform proprietății 2, avem ordonările  $A_1, M_1, P_1$ , respectiv  $A_3, P_3, M_3$ , deci și ordonările  $A_1, N_1, P_1$ ;  $A_3, P_3, N_3$ . Atunci, conform proprietății 1, omologiile  $\Omega(a, k = 1 \pm \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi contractante sau în  $P_1$  sau în  $P_3$ . La fel se arată că dacă  $O^* \equiv O_3^*$ , omologiile de mai sus sînt contractante sau în  $P_1$  sau în  $P_2$ .

În sfîrșit, dacă  $O^* \equiv O_1^*$ , din proprietatea 2, și din ipoteza că  $O_1^*$  este între  $O_2^*$ ,  $O_3^*$  și că pantele segmentelor  $A_2B_3, A_3B_2$  sînt de același semn, rezultă ordonările:  $A_2, M_2, P_2, A_3, P_3, M_3$ . Dar atunci vom avea și ordonările:  $A_2, N_2, P_2$ ;  $A_3, P_3, N_3$ , și astfel, conform proprietății 1, omologiile  $\Omega(a, k = 1 \pm \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi contractante într-unul din punctele  $P_2, P_3$ .

Deci am demonstrat suficiența condiției enunțate la teorema 1.

Vom arăta acum necesitatea condiției, adică dacă condiția nu este îndeplinită și au loc restricțiile impuse în enunțul teoremei 1, atunci există omologiile  $\Omega(a, k = 1 \pm \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  dilatante în toate punctele  $P_i$  de pe segmentele  $A_iB_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Deosebim următoarele cazuri:

I. Presupunem că avem numai un singur punct  $P_1$  pe segmentul  $A_1B_1$  și în cazul în care  $A_1B_1 \perp d_1$ ,  $P_1$  nu este mijlocul segmentului  $A_1B_1$ .

Fie  $O_1^*$  punctul asociat punctului  $P_1$  pe dreapta  $d_2$ . Alegem centrul  $O^*$  al omologiei arbitrar pe  $d_2$ , astfel ca  $O^* \neq O_1^*$  și notăm cu  $M_1$  asociatul lui  $O^*$  pe segmentul  $A_1B_1$ . Atunci sau avem ordonarea  $A_1, P_1, M_1$ , sau  $A_1, M_1, P_1$ . Conform proprietăților 1 și 2 în primul caz omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în punctul  $P_1$ , iar în cazul al doilea omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

II. Dacă  $i = 2$ , adică dacă avem două puncte  $P_1$  și  $P_2$  pe segmentele  $A_1B_1, A_2B_2$ , distincte sau confundate, deosebim două cazuri:

a) cînd pantele segmentelor  $A_1B_1$  sînt de același semn, sau cînd unul sau amîndouă sînt perpendiculare pe  $d_1$  (în ultimul caz  $P_1$  respectiv  $P_2$  nu este mijlocul segmentului  $A_1B_1$  respectiv a lui  $A_2B_2$ ).

b) Cînd  $A_1B_1, A_2B_2$  au pante de semne diferite. Fie  $O_1^*, O_2^*$ , punctele asociate punctelor  $P_1$  și  $P_2$  de pe dreapta  $d_2$ .

În cazul a) vom alege centrul  $O^*$  al omologiei de pe dreapta  $d_2$  arbitrar, dar exterior segmentului  $O_1^*O_2^*$  și fie  $M_1, M_2$  asociatele lui  $O^*$  pe  $A_1B_1$  și pe  $A_2B_2$ . Atunci conform proprietății 2, vom avea sau ordonările  $A_1, P_1, M_1$ ;  $A_2, P_2, M_2$  sau ordonările  $A_1, M_1, P_1, A_2, M_2, P_2$ . În primul caz, conform proprietății 1 omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în punctele  $P_1$  și  $P_2$  iar în al doilea caz omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

În cazul b) conform ipotezei teoremei 1,  $O_1^*$  și  $O_2^*$  nu pot fi confundate. Vom alege centrul  $O^*$  al omologiei între punctele  $O_1^*, O_2^*$  și să notăm cu  $M_1, M_2$  punctele asociate lui  $O^*$  pe  $A_1B_2$  și pe  $A_2B_2$ . Atunci conform proprietății 2 vom avea sau ordonările  $A_1, P_1, M_1$ ;  $A_2, P_2, M_2$  sau ordonările  $A_1, M_1, P_1$ ;  $A_2, M_2, P_2$ . În primul caz, conform proprietății 1, omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante și în  $P_1$  și în  $P_2$ , iar al doilea caz omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

III. Dacă  $i = 3$ , adică avem trei puncte  $P_1, P_2, P_3$  pe segmentele  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ , distincte sau confundate vom deosebi următoarele cazuri: a) Cînd pantele segmentelor  $A_iB_i = i = 1, 2, 3$  sînt de același semn, sau cînd unele dintr-ele sau chiar toate sînt perpendiculare pe  $d_1$  (în acest caz însă  $A_iP_i \neq P_iB_i$ )

b) Când numai două segmente au pantele de același semn. Fie  $O_1^*$ ,  $O_2^*$ ,  $O_3^*$  punctele asociate punctelor  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  pe dreapta  $d_2$ .

În cazul a) vom alege centrul  $O^*$  al omologiei pe dreapta  $d_2$ , astfel ca punctele  $O_1^*$ ,  $O_2^*$ ,  $O_3^*$  să fie de aceeași parte a punctului  $O^*$ .

Notînd cu  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  punctele asociate ale lui  $O^*$  pe segmentele  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ , conform proprietății 2, vom avea sau ordonările  $A_1, P_1, M_1$ ;  $A_2, P_2, M_2$ ;  $A_3, P_3, M_3$  sau ordonările  $A_1, M_1, P_1$ ;  $A_2, M_2, P_2$ ;  $A_3, M_3, P_3$ . În primul caz, conform proprietății 1, omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în toate trei punctele  $P_1, P_2, P_3$ , iar în cazul al doilea omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor avea această proprietate dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

În cazul b) presupunem pentru fixarea ideilor că pantele segmentelor  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  sînt de același semn, iar panta lui  $A_1B_1$  este de semn contrar. Atunci conform ipotezei teremei 1,  $O_1^* \neq O_2^*$ ,  $O_1^* \neq O_3^*$  și fiindcă am presupus că condiția teoremei 1 nu este îndeplinită,  $O_1^*$  trebuie să fie exterior segmentului  $O_2^*O_3^*$  (fig. 4). Alegem centrul  $O^*$  al omologiei pe dreapta  $d_2$  exterior segmentului  $O_2^*O_3^*$ , dar interior segmentelor  $O_1^*O_2^*$ ,  $O_1^*O_3^*$ . Fie  $M_1, M_2, M_3$  punctele asociate lui  $O^*$  pe  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ . Conform proprietății 2, vom avea sau ordonările  $A_1, P_1, M_1$ ;  $A_2, P_2, M_2$ ;  $A_3, P_3, M_3$  sau ordonările  $A_1, M_1, P_1$ ;  $A_2, M_2, P_2$ ;  $A_3, M_3, P_3$ . În primul caz, conform proprietății 1, omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în toate trei puncte  $P_1, P_2, P_3$ , iar în cazul al doilea omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor avea această proprietate, dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

IV. Dacă  $i > 3$ , vom deosebi cazul a) cînd pantele tuturor segmentelor  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sînt de același semn, sau unele dintre ele sînt perpendiculare pe  $d_1$  și cazul b) cînd există segmente cu pante de semne opuse. Fie  $O_1^*, O_2^*, \dots, O_n^*$  punctele asociate punctelor  $P_1, P_2, \dots, P_n$  pe dreapta  $d_2$ .

În cazul a) alegem centrul  $O^*$  al omologiei pe dreapta  $d_2$  astfel ca toate punctele  $O_1^*, O_2^*, \dots, O_n^*$  să fie de aceeași parte a punctului  $O^*$  și raționînd ca în cazul III, găsim că sau omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  sau cele  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în toate punctele  $P_i$  de pe segmentele  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

În cazul b) punctele  $O_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  vor fi de spețe diferite. Dar întrucît presupunem că condiția teoremei 1 nu este îndeplinită, rezultă că nici un punct de prima speță nu poate să fie situat între două puncte de speță 2 sau invers, precum și că două puncte de spețe diferite nu pot fi confundate. Conform celor spuse, dacă punctele  $O_i^*$  le numerotăm în ordinea creșterii absciselor lor, punctele  $O_1^*, O_2^*, \dots, O_j^*$  vor fi de o speță iar punctele  $O_{j-2}^*, \dots, O_n^*$  vor fi de cealaltă speță.

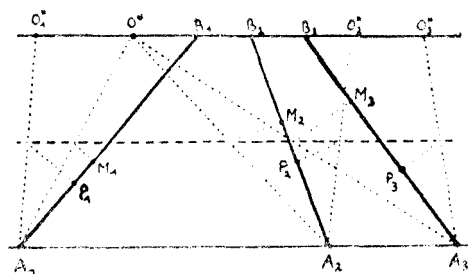


Fig. 4.

Alegem centrul  $O^*$  al omologiei pe dreapta  $d_2$  între punctele  $O_j^*, O_{j+1}^*$ , și raționăm ca și în cazul III. b). Vom găsi că sau omologiile familiei  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  sau cele ale familiei  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vor fi dilatante în toate punctele  $P_i$  de pe segmentele  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic.

Astfel teorema 1 este complet demonstrată.

*Observație.* În cazul în care două puncte asociate de spețe diferite sînt confundate, sau dacă există un segment  $A_i B_i$  perpendicular pe dreapta  $d_1$  și punctul  $P_i$  este chiar mijlocul lui, atunci stabilirea existenței unei familii de omologii  $\Omega(O^*, k = 1 \pm \varepsilon)$   $\varepsilon < \varepsilon_0$  dilatante în punctele  $P_i$  pe  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , necesită studiul ordonării punctelor  $A_i, M_i, N_i$ , pe segmentul  $A_i B_i$ . Fiindcă acest caz particular nu are mare importanță în aplicarea practică a teoremei 1, la transformarea nomogramelor, nu vom face acest studiu în această lucrare.

**3.** Cu ajutorul teoremei 1, vom rezolva problema propusă în prima parte a lucrării.

Considerînd nomogramă  $N_0$  dată de ecuațiile (1) și (2), vom numi puncte de eroare maximă a nomogramei acele puncte  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , situate pe una din scările  $A_j B_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , în care eroarea punctuală este egală cu eroarea nomogramei definită prin formula 3. Să notăm cu  $O_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , punctele de pe dreapta  $d_2$  asociate punctelor  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de pe segmentele  $A_i B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  care pot fi de aceeași speță sau de spețe diferite conform definiției date.

**TEOREMA 2.** *O condiție suficientă pentru ca nomograma  $N_0$  să fie relativ optimă este ca între punctele asociate  $O$  ale punctelor de eroare maximă să existe unul cuprins între două puncte de spețe diferite cu primul.*

*Condiția este și necesară: a) dacă printre punctele asociate nu există două de spețe diferite confundate, b) dacă una dintre scările  $A B$  este perpendiculară pe  $d_1$ , atunci punctul de eroare maximă să nu fie mijlocul scării.*

**Demonstratie.** Dacă condiția teoremei 2 este îndeplinită, atunci conform teoremei 1 toate omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 \pm \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  sînt contractante cel puțin într-unul din punctele de eroare maximă  $P_i$ , dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic. Dar atunci, conform definiției erori, și a omologiei contractante rezultă că orice nomogramă transformată a nomogramei  $N_0$  prin omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_0$  au erori mai mari decît eroarea lui  $N_0$  dacă  $\varepsilon_0$  este suficient de mic. Deci  $N_0$  este relativ optimă, și condiția este suficientă.

Dacă condiția teoremei 2 nu este îndeplinită, din teorema 1 rezultă că se poate găsi pe  $d_2$  un punct  $O^*$ , astfel încît omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$  sau  $\Omega(O^*, k = 1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  să fie dilatante.

Presupunem că omologiile primei familii sînt dilatante în punctele de eroare maximă. Deci în transformatele acestor puncte erorile nomogramelor transformate vor fi mai mici decît eroarea  $E$  a nomogramei inițiale. Presupunem că eroarea  $E'$  a unei nomograme transformate  $N' = \Omega(N_0)$  este atînsă de punctul  $Q'$ . Fie  $Q = \Omega^{-1}(Q')$ , unde  $Q$  nu poate să fie un punct de eroare maximă, deci  $E(Q) < E$ . Alegem un șir de numere  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  tinzînd către 0,  $\varepsilon_i < \varepsilon_0$ . Atunci nomogramele transformate  $N_1, N_2, N_3, \dots$  prin omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon_1)$ ,  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon_2)$ ,  $\dots$  vor tinde către nomograma  $N_0$ . Folosînd faptul că omologia este o transformare continuă, se poate arăta ușor, că eroarea nomogramei  $N'$  în punctul  $Q'$  tinde uniform către  $E(Q)$ . Deci  $E'(Q') - E(Q) < \delta$ . Dacă  $\varepsilon$  este suficient de mic. Alegînd  $\delta = E - E(Q) > 0$  găsim că  $E'(Q') < E$ . Astfel eroarea oricărei nomograme transformate prin omologiile  $\Omega(O^*, k = 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  este mai mică decît cea a nomogramei  $N_0$ , deci  $N_0$  nu este relativ optimă.

Astfel teorema 2 este demonstrată.

**4.** În sfîrșit vom face cîteva observații despre utilizarea practică a teoremei 2 pentru micșorarea erorii unei nomograme cu trei scări rectilinii.



Fiind dată o nomogramă  $N_0$ , stabilim punctele de eroare maximă ale ei și construim punctele asociate ale acestor puncte pe dreapta  $d_2$ . După pozițiile acestor puncte putem vedea dacă  $N_0$  este sau nu relativ optimă. Dacă nu este, sîntem într-unul dintre cazurile I, II a), b), III a) b), IV a) b) de la punctul 2. Alegînd centrul  $O^*$  al omologiei conform indicațiilor date în cazurile de mai sus și transformînd nomograma printr-o omologie cu centrul în  $O^*$ , avînd ca axă dreapta  $d_0$  și caracteristica  $k$  egală cu  $1 + \varepsilon$  sau  $1 - \varepsilon$  unde  $\varepsilon > 0$  este mic, nomograma transformată va avea eroarea mai mică decît  $N_0$ .

Un avantaj practic al acestei metode îl reprezintă faptul că transformata nomogramei  $N_0$  prin omologiile indicate se poate construi foarte ușor (proiectînd gradațiile scărilor din centrul omologiei pe scările transformate).

*Intrat în redacție la 1 noiembrie 1966*

#### B I B L I O G R A F I E

1. M. V. Pentkovski *Nomograficeski metod ol'skania nailucișeva preobrazovania priamolineinîh ŝkal.* DAN. LXVI (1949), 339—342.
2. F. Radó, *Cea mai bună transformare proiectivă a scărilor la nomograme cu puncte aliniate.* „Studii și cercetări de matematică Cluj”. 1—2 VIII (1957), 161—168.
3. F. Radó, *Über die beste projektive Transformation von geradlinigen Leitern.* ZAMM, 45 (1965).

#### O ПРОЕКТИВНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ НОМОГРАММЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ШКАЛАМИ (Резюме)

В работе изучается проективное преобразование одной номограммы с выравненными точками, имеющей три прямолинейные шкалы, посредством всех коллинеаций плоскости, сохраняющей внутреннюю часть прямоугольника, в которой содержится номограмма, с целью уменьшения её ошибки.

По позициям точек максимальной ошибки номограммы (тех точек, в которых ошибка номограммы достигает максимума) устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы ошибка рассматриваемой номограммы была минимальной по отношению к преобразованным номограммам.

В работе указывается и практический метод для уменьшения ошибки номограммы.

#### SUR LA TRANSFORMATION PROJECTIVE DU NOMOGRAMME A ÉCHELLE RECTILIGNE (Résumé)

On étudie la transformation projective d'un nomogramme à points alignés ayant trois échelles rectilignes, par toutes les co-linéations du plan conservant l'intérieur d'un rectangle ou le nomogramme est compris — afin de réduire son erreur.

Selon la position des points d'erreur maxima du nomogramme, notamment des points où l'erreur du nomogramme atteint son maximum, l'on établit une condition nécessaire et suffisante pour que l'erreur du nomogramme considéré soit minime par rapport à des nomogrammes transformés.

On indique aussi un procédé pratique pour la réduction de l'erreur du nomogramme.



# DESPRE TRANSFORMAREA PROIECTIVĂ A UNEI NOMOGRAME CU DOUĂ SCĂRI PE O PARABOLĂ ȘI UNA RECTILINIE

de

**B. ORBÁN și A. VASIU**

**1.** Pentru ca o nomogramă cu puncte aliniate să fie practic utilizabilă, în general, trebuie să fie supusă anumitor transformări în scopul micșorării erorii ei. Nomograma cu puncte aliniate admite transformările care păstrează dreptele planului, coliniațiile planului.

Problema transformării proiective a unei scări rectilinii este complet rezolvată de M. V. P e n t k o v s k i și F. R a d ó [1], [2], [3], iar în ceea ce privește transformarea proiectivă a unei scări curbilinii sau a unei nomograme întregi, se cunosc numai rezultate speciale publicate în lucrările [4], [5].

În această lucrare studiem problema transformării proiective a unei nomograme  $N$ , cu puncte aliniate avînd două scări pe o parabolă și una rectilie  $CD$ , în interiorul parabolei (fig. 1) stabilind o condiție necesară și suficientă ca o astfel de nomogramă să aibă eroarea minimă față de nomogramele transformate vecine prin coliniațiile planului care păstrează arcul de parabolă considerat.

**2.** Considerînd un reper cartezian ortogonal, ecuațiile scărilor nomograme sînt :

$$\begin{cases} x = f_i(z_i) & -1 \leq x \leq 1 \\ y = L \cdot f_i^2(z_i) & z_i' \leq z_i \leq z_i'' \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = f_3(z_3) & \frac{m - \sqrt{m^2 + 4nL}}{2L} \leq x \leq \frac{m + \sqrt{m^2 + 4nL}}{2L} \\ y = mf_3(z_3) + n & z_3' \leq z_3 \leq z_3'' \end{cases}$$

Suportul primelor două scări este parabola de ecuație :

$$y = Lx^2 \quad (2)$$

iar suportul celei de a treia, este dreapta de ecuație :

$$y = mx + n$$

La transformarea proiectivă a nomogramei, pentru a nu ieși din cadrul hîrtiei ne vom mărgini numai la coliniațiile care păstrează domeniul mărginit de arcul de

parabolă  $AOB$  și segmentul  $AB$ , care cuprinde întreaga nomogramă. Ecuațiile unei proiectivități între punctele parabolei (2), sînt:

$$\begin{cases} x' = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} \\ y' = Lx'^2 \end{cases} \quad (3)$$

Dacă vrem ca punctele arcului  $AOB$  să se transforme în punctele aceluiași arc, trebuie să presupunem că în această proiectivitate sau:

- a)  $A \rightarrow B$  și  $B \rightarrow A$  sau  
b)  $A \rightarrow A$  și  $B \rightarrow B$

Alegem ca unitate de măsură pe axa  $Ox$  jumătatea segmentului  $AB$ , atunci  $L$  va fi distanța vîrfului parabolei la coarda  $AB$ .

În cazul a) ecuațiile (3) se scriu sub formă:

$$\begin{cases} x' = \frac{\lambda x - 1}{x - \lambda} \\ y' = Lx'^2 \end{cases} \quad (4)$$

iar în cazul b) ele devin:

$$\begin{cases} x' = \frac{\lambda x + 1}{x + \lambda} \\ y' = Lx'^2 \end{cases} \quad (5)$$

Ecuațiile (4) reprezintă o involuție între punctele parabolei iar ecuațiile (5) reprezintă aceeași involuție înmulțită cu o simetrie față de  $Oy$ .

Deoarece simetria nu influențează eroarea nomogramei, ne vom mărgini la involuțiile (4). Acestea, conform teoremei lui Fréger generează în plan o familie de omologii armonice, avînd centrul în punctul  $O^*(\lambda, L)$  pe dreapta  $AB$ , iar axa polară acestui punct în raport cu parabola. Transformatul punctului  $M$  al parabolei în această omologie îl găsim proiectînd punctul  $M$  din  $O$  pe parabolă (fig. 1). Omologiile din  $\Omega$  păstrează domeniul cuprins între arc și dreapta  $AB$  numai dacă  $|\lambda| > 1$ .

Punctele  $M(x, y)$  și  $M'(x', y')$  fiind corespondente printr-o omologie din  $\Omega$ , avem următoarele relații:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-L(\lambda^2 + 1)x + \lambda y + \lambda L}{-2\lambda Lx + y + \lambda^2 L} \\ y' &= L \frac{-2\lambda Lx + \lambda^2 y + L}{-2\lambda Lx + y + \lambda^2 L} \end{aligned} \quad (6)$$

Notăm cu  $N'(\lambda)$  familia de nomograme, obținute prin aplicarea omologiilor din  $\Omega$ , nomogramei  $N$ . În familia  $N'(\lambda)$  regăsim nomograma inițială abstractă făcînd de o simetrie față de axa  $Oy$ , cînd  $\lambda \rightarrow \pm \infty$ .

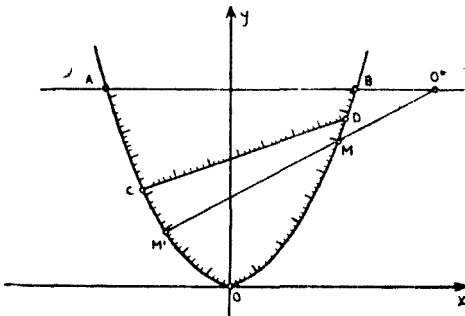


Fig. 1.

Ecuatiile scărilor nomogramei transformate  $M'(\lambda)$  le regăsim din ecuațiile (1) aplicînd formulele de transformare (4) respectiv (6).

$$\begin{cases} x' = \frac{\lambda x - 1}{x - \lambda} & x = f_i(z_i) & -1 \leq x \leq 1 & i = 1, 2 \\ y' = Lx'^2 & & z'_i \leq z_i \leq z''_i & \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x' = \frac{(-L\lambda^2 - L + \lambda m)x + \lambda(m+1)}{(-2\lambda L + m)x + n + \lambda^2 L} & x = f_3(z_3) & z'_3 \leq z_3 \leq z''_3 \\ y' = L \frac{(-2\lambda L + \lambda^2 m)x + \lambda^2 n + L}{(-2\lambda L + m)x + n + \lambda^2 L} & & \frac{m - \sqrt{m^2 + 4nL}}{2L} \leq x \leq \frac{m + \sqrt{m^2 + 4nL}}{2L} \end{cases} \quad (7')$$

Se știe că eroarea absolută a nomogramei  $N'(\lambda)$  este dată prin formula:

$$E(\lambda) = \max_i \max_{z'_i \leq z_i \leq z''_i} \frac{h}{ds_i(z_i, \lambda)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

unde  $h$  este o constantă, numită eroarea geometrică, iar  $s$  reprezintă lungimea de arc pe scara respectivă.

Scopul lucrării este stabilirea criteriului pentru ca funcția  $E(\lambda)$  să aibă un minim relativ în raport cu  $\lambda$ . În acest caz nomograma respectivă o vom numi relativ optimă.

Pentru aceasta vom folosi teoremele 1 și 3 ale lucrării [4] conform cărora: dacă  $y = f(x; p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $\alpha_h \leq p_h \leq \beta_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ), iar  $F(p_1, p_2, \dots, p_n) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x; p_1, p_2, \dots, p_n)$ , atunci o condiție necesară ca funcția  $F(p_1, p_2, \dots, p_n)$  să admită un minim relativ în  $(p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0)$  este ca sistemul de ecuații:

$$\sum_{j=1}^{m_0} f'_p(x_j^0; p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0) u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

unde  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m_0}^0$  sînt punctele în care  $f(x; p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0)$  își atinge maximul, să aibă cel puțin o soluție pozitivă ( $u_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m_0, u_j > 0$  pentru cel puțin un  $j$ ).

Condiții suficiente se obțin cerînd ca sistemul de ecuații (9) să admită cel puțin o soluție strict pozitivă ( $u_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$ ) și ca acest sistem să aibă rangul egal cu  $n$ .

În cazul nostru rolul funcției  $y = f(x; p_1, p_2, \dots, p_n)$  îl joacă funcția  $f(z, \lambda)$  unde  $\lambda$  este parametru, pe care îl definim mai jos. Considerăm pe axa  $Oz$  următoarele intervale:

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, z'_1 - z''_1] \\ I_2 &= [z'_1 - z''_1, z'_1 - z''_1 + z'_2 - z''_2] \\ I_3 &= [z'_1 - z''_1 + z'_2 - z''_2, z'_1 - z''_1 + z'_2 - z''_2 + z'_3 - z''_3] \end{aligned}$$

și funcția  $f(z, \lambda)$

$$f(z, \lambda) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{h}{ds'_1(z, \lambda)} & \text{dacă } z \in I_1 \\ \frac{h}{ds'_2(z, \lambda)} & \text{dacă } z \in I_2 \\ \frac{h}{ds'_3(z, \lambda)} & \text{dacă } z \in I_3 \end{array} \right. \quad |\lambda| > 1$$

Conform teoremelor de mai sus, o condiție necesară și suficientă ca funcția (10) admită un minim relativ, adică ca nomograma  $N'(\lambda)$  să fie relativ optimă, este ca ecuația :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial \left[ \frac{h}{ds'_i(z_{ij}^0, \lambda)} \right]}{\partial \lambda} u_{ij} = 0 \quad (11)$$

să admită o soluție pozitivă și rangul ei să fie 1. Punctele  $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ , unde  $x_{ij} = f_i(z_{ij}^0)$ , situate pe nomograma  $N'(\lambda)$  în care funcția  $\frac{h}{ds'_i(z_i, \lambda)}$  își atinge maximum în raport cu  $z_i$ , se numesc puncte de eroare maximă ale nomogramei.

Ținând seama de ecuațiile (7) și (7'), obținem :

$$\Psi_1 = \frac{ds'_i}{dz_i} = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2} f'_i(z_i) = \frac{1 - \lambda^2}{|x - \lambda|^3} \sqrt{(x - \lambda)^2 + 4L^2(\lambda x - 1)^2} f'_i[f_i^{-1}(x)] \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{ds'_3}{dz_3} = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2} f'_3(z_3) = \\ &= \frac{L}{[x(-2\lambda L + m) + n + \lambda^2 L]^2} \sqrt{L^2(1 + m^2)\lambda^8 + 2m(2n - 3L)\lambda^7 + R(\lambda)} f'_3[f_3^{-1}(x)] \end{aligned}$$

unde  $R(\lambda)$  este un polinom de gradul 6 în  $\lambda$ . Efectuînd calculele necesare se poate arăta că :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda} = - \frac{24L^2(\lambda x - 1)[(\lambda - c)x - (1 - c\lambda)][(\lambda + c)x - (1 + c\lambda)] f'_i[f_i^{-1}(x)]}{(x - \lambda)^3 |x - \lambda| \sqrt{(x - \lambda)^2 + 4L^2(\lambda x - 1)^2}} \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

unde

$$c = \sqrt{\frac{2L^2 - 1}{6L^2}} < 1$$

și că :

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda} = L \frac{[-4L^3(1+m^2)\lambda^8 + R_1(\lambda)]x - [Lm(2n-3L)\lambda^8 + R_2(\lambda)]}{[x(-2\lambda L + m) + u + \lambda^2 L]^3 \sqrt{L^2(1+m^2)\lambda^8 + 2m(2n-3\lambda)\lambda^7 + R_2(\lambda)}} f'_3[f_3^{-1}(x)] \quad (13)$$

unde  $R_1(\lambda)$  și  $R_2(\lambda)$  sînt polinoame de gradul 7 în  $\lambda$  :

Fiindcă

$$\frac{\partial \left[ \frac{h}{\frac{ds'_i}{dz_i}} \right]}{\partial \lambda} = \frac{\partial \left( \frac{h}{\Psi_i} \right)}{\partial \lambda} = - \frac{h}{\left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda} \right)^2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda} \quad i = 1, 2$$

și factorul  $-\frac{h}{\left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda} \right)^2}$  nu-și schimbă semnul, ecuația (11) se poate scrie sub forma :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial \Psi_i(x_{ij}^0, \lambda)}{\partial \lambda} v_{ij} = 0 \quad (14)$$

unde

$$x_{ij}^0 = f_i(z_{ij}^0), \quad v_{ij} = \frac{-h}{\left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda} \right)^2} u_{ij}.$$

Vom studia criteriul pentru ca nomograma  $N'(\lambda)$  să fie optimă după numărul punctelor de eroare maximă ale nomogramei :

I. Dacă nomograma  $N'(\lambda)$  are un singur punct de eroare maximă, avem două posibilități :

a) punctul de eroare maximă  $M_1(x_{11}, y_{11})$  se găsește pe parabolă :

b) punctul de eroare maximă  $M_1(x_{21}, y_{21})$  se găsește pe dreapta.

În cazul a) ecuația (14) are soluția pozitivă numai dacă  $\frac{\partial \Psi_1(\lambda_1, x_{11})}{\partial \lambda} = 0$  iar în cazul b) cînd :  $\frac{\partial \Psi_2(\lambda, x_{22})}{\partial \lambda} = 0$ . Deci conform expresiei (12) și (13), pentru ca  $N'(\lambda)$  să fie relativ optimă, în cazul Ia) este necesar că  $x_{11}$  să fie egal cu una din valorile :

$$a'_1 = \frac{1 - c\lambda}{\lambda - c}, \quad a'_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad a'_3 = \frac{1 + c\lambda}{\lambda + c}$$

iar în cazul Ib)

$$x_{21} = b' = \frac{Lm(2n - 3L)\lambda^8 + R_2(\lambda)}{-4L^3(1 + m^2)\lambda^8 + R_1(\lambda)}. \quad (15)$$

Nomograma inițială  $N$  o regăsim din familia  $N'(\lambda)$  (abstracție făcînd de o simetrie) pentru  $\lambda \rightarrow \pm \infty$ . Deci, în cazurile Ia și Ib, condiția necesară ca nomograma  $N$  să fie relativ optimă este aceeași cu condiția găsită pentru  $N'(\lambda)$ , numai că în locul lui  $a'_1, a'_2, a'_3, b'$  trebuiesă considerăm respectiv:  $a_1 = -c, a_2 = 0, a_3 = c,$

$$b = \frac{m(3L - 2n)}{4L^2(1 + m^2)}. \quad (16)$$

*Observație.* În cazurile Ia și Ib, condiția găsită este numai necesară, fiindcă rangul ecuației (14) este zero.

II. Dacă nomograma  $N'(\lambda)$  are două puncte de eroare maximă, vom deosebi următoarele trei cazuri:

- a) punctele de eroare maximă se găsesc pe parabolă;
- b) punctele de eroare maximă se găsesc pe scara rectilinie;
- c) un punct de eroare maximă se găsește pe parabolă, iar celălalt pe scara rectilinie.

În cazul Ia) ecuația (14) devine:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}(\lambda, x_{11})v_{11} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{12})v_{12} = 0 \quad x_{11} < x_{12}$$

Această ecuație admite soluție strict pozitivă  $v_{11} > 0, v_{12} > 0$  atunci, și numai atunci, cînd:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}(\lambda, x_{11}) \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{12}) < 0$$

În acest caz rangul ecuației (14) este 1. Luînd în considerare semnul lui  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}$  (12), introducînd notațiile:

$$A' = \left[ -1, \frac{1 - c\lambda}{\lambda - c} \right) \cup \left( \frac{1}{\lambda}, \frac{1 + c\lambda}{\lambda + c} \right) \quad |\lambda| > 1$$

$$B' = \left( \frac{1 - c\lambda}{\lambda - c}, \frac{1}{\lambda} \right) \cup \left( \frac{1 + c\lambda}{\lambda + c}, 1 \right]$$

putem formula rezultatul în felul următor: o condiție necesară și suficientă pentru ca nomograma  $N'(\lambda)$  să fie relativ optimă în cazul IIa este ca pentru cele două puncte de eroare maximă  $M_{11}(x_{11}, y_{11})$  și  $M_{12}(x_{12}, y_{12})$  de pe parabolă să avem:  $x_{11} \in A'$  și  $x_{12} \in B'$  sau invers.

Pentru nomograma inițială condiția rămîne aceeași, numai că în locul mulțimilor  $A', B'$  trebuie să considerăm mulțimile:

$$A = [-1, -c) \cap (0, c)$$

$$B = (-c, 0) \cap (c, 1)$$



În cazul *I Ib*), în care cele două puncte de eroare maximă  $M_{21}(x_{21}, y_{21})$   $M_{22}(x_{22}, y_{22})$  se află pe scara rectilinie ( $x_{21} < x_{22}$ ), ecuația (14) devine:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{21})v_{21} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{22})v_{22} = 0;$$

ea are soluția strict pozitivă dacă și numai dacă:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{21}) \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{22}) < 0$$

Fiindcă, prin ipoteză, toate punctele scării rectilinii,  $CD$  a nomogramei se află în interiorul parabolei, expresia  $x(-2\lambda L + m) + n + \lambda^2 L$  din formula (13) rămâne totdeauna pozitivă în aceste puncte. Deci, semnul lui  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}$  depinde numai de numărul expresiei (13), de unde rezultă că în cazul *I Ib*) o condiție necesară și suficientă pentru ca nomograma să fie optimă este ca:  $x_{21} < b' < x_{22}$  unde  $b'$  este dat prin formula (15).

Pentru nomograma inițială  $N$  condiția devine:  $x_{21} < b' < x_{22}$  unde  $b'$  este dat prin formula (16)

În cazul *I Ic*) avem un punct de eroare maximă  $M_{11}(x_{11}, y_{11})$  pe parabolă, și un alt punct  $M_{21}(x_{21}, y_{21})$  pe scara rectilinie. Ecuația (14) devine:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}(\lambda, x_{11})v_{11} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{21})v_{21} = 0;$$

ea are soluția pozitivă dacă și numai dacă:  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda}(\lambda, x_{11}) \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda}(\lambda, x_{21}) < 0$ .

Comparând semnele expresiilor (12) și (13), ajungem la următorul rezultat: în cazul *I Ic*) o condiție necesară și suficientă ca nomograma  $N'(\lambda)$  să fie relativ optimă este ca:

$$\begin{array}{ll} x_{11} \in A' & \text{și} \quad x_{21} < b' \\ x_{11} \in B^1 & \text{și} \quad x_{21} > b' \end{array}$$

*III.* Dacă nomograma  $N'(\lambda)$  respectiv  $N$  are mai mult de două puncte de eroare maximă, rezultă din cele demonstrate că pentru ca ea să fie relativ optimă, o condiție necesară este ca printre acestea să existe un punct care satisface condiția de la *I a*) sau *I b*), iar o condiție necesară și suficientă este ca printre aceste puncte să existe două, satisfăcând una dintre condițiunile stabilite la *I Ia*), *I Ib*), *I Ic*).

*Intrat în redacție la 14 aprilie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. M. V. Pentkovski, *Nomograficeshi metod otiskania nailucișeva preobrazovania priamolineinîh skal.* DAN LXXVI (1949), pag. 339–342.
2. F. Radó, *Cea mai bună transformare proiectivă a scârilor la nomograme cu puncte aliniate.* „Studii și cercet. de mat. (Cluj)” 8, 161–168 (1957).
3. F. Radó, *Über die beste projektive Transformation von geradlinigen Leitern.* „Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik”, 45, Heft 5, 1965.

4. F. Radó V. Groze, B. Orbán, *Propriétés extrémales dans une classe de fonctions et application à la transformation des nomogrammes.* „Mathematica”, 6 (29), 1964, pp. 307–326.
5. S. Groze, B. Orbán, *Descompunerea unei proiectivități pe o conică și aplicarea ei la cea mai bună transformare proiectivă a unei scări așezate pe un cerc* (în curs de apariție).

О ПРОЕКТИВНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ НОМОГРАММЫ С ДВУМЯ ШКАЛАМИ НА  
ОДНОЙ ПАРАБОЛЕ И С ОДНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ

(Резюме)

В работе изучается проблема проективного преобразования одной номограммы с выравненными точками, имеющей две шкалы на дуге параболы и одну прямолинейную шкалу внутри параболы. Устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы такого рода номограмма имела минимальную ошибку по отношению к номограммам, преобразованным всеми коллинеациями плоскости, сохраняющей рассматриваемую дугу параболы.

ON THE PROJECTIVE MAPPING OF A NOMOGRAM WITH TWO SCALES ON A PARABOLA  
AND ONE RECTILINEAR

(Summary)

The authors discuss the problem of the projective mapping of a nomogram with aligned point having two scales on an arch of parabola, establishing a necessary and sufficient condition that such a nomogram had a minimum error with regard to the nomograms transformed by all the collineations of the plane which preserve the considered arch of parabola.

# ON SOLUTION OF CERTAIN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY INTEGRAL TRANSFORM

by

M. DUTTA\* (Calcutta) and L. DEBNATH (London)

**1.1. Introduction.** Usually an integral transform [7, 10, 12, 14] is introduced by means of an integral over a range for a class of kernels and the theory of such transform is developed and applied to solve a certain class of linear ordinary or partial differential, difference and integral equation, under certain prescribed initial or boundary conditions occurring in various problems of Mathematical Sciences.

In this connection, mention may be made of Laplace [11, 12], Hankel [10], Legendre [1], Fourier, [10], Mellin [10], Laguerre [4], Jacobi [5], Hermite [13] and other integral transforms [2, 3] which were investigated and applied convincently in finding solution of differential equations, having structure related to that of the differential equations satisfied by the kernel of the corresponding integral transforms.

In an earlier paper [6] we have proposed a general scheme of finding the solution of a given class of partial differential equation by introducing and developing a suitable integral transform  $f_\lambda(n)$  of a function  $F(x)$  which was defined by means of the integral

$$f_\lambda(n) = T\{F(x)\} = \int_a^b \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) F(x) dx \quad (1.1.1)$$

where  $K_n^\lambda(x)$  an orthogonal function associated with the weight function  $\omega_\lambda(x)$ ; is defined in  $a \leq x \leq b$  and the function  $F(x)$  is such that  $\omega_\lambda(x) F(x)$  is  $L$ -integrable in  $a \leq x \leq b$ . Further the function  $K_n^\lambda(x)$  is the solution of the ordinary differential equation of the form

$$a_2(x)y'' + a_1(x, \lambda)y' + a_0(\lambda, n)y = 0 \quad (1.1.2)$$

having discrete eigen values only, where  $a_0(\lambda, n)$  is such that  $a_0(\lambda, n) \neq a_0(\lambda, n')$  and otherwise arbitrary.

---

\* This research is supported by National Professor S.N. Bose's Scheme (92 Acharya Prafulla Chandra Road, Calcutta, 9, India).

The function  $K_n^\lambda(x)$  satisfies the orthogonal relations [9]

$$\left. \int_a^b \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) K_m^\lambda(x) dx = \begin{array}{ll} 0 & n \neq m \\ \delta_{n\lambda} & n = m \end{array} \right\} \quad (1.1.3)$$

Utilising the integral transform (1.1.1) and its basic operational properties, we obtained the solution of the partial differential equation

$$L_x[Y(x, t)] = B_t[Y(x, t)] \quad (1.1.4)$$

where  $L_x$  is a linear differential operator of the second order of the form

$$L_x \equiv a_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \quad (\lambda \text{ being a constant}) \quad (1.1.5)$$

and  $B_t$  is also a differential operator of the form

$$B_t \equiv \sum_{r=0}^p b_r(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (1.1.6)$$

where  $b_r(t)$  are functions of  $t$  alone such that the solution of the ordinary differential equation

$$B_t[U(t)] = cU(t) \quad (c \text{ being a constant}) \quad (1.1.7)$$

is known in advance under the prescribed initial conditions

$$\left[ \frac{\partial^i}{\partial t^i} Y(x, t) \right]_{t=0} = G_i(x) \quad (1.1.8)$$

The object of the present discussion is to find out the solution of the more general partial differential equations of the form

$$L_x^m [Y(x, t)] = \sum_{r=0}^p b_r(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} Y(x, t) \quad (1.1.9)$$

where  $L_x$  is a differential operator of the form (1.1.5) and

$$L_x^m = L_x(L_x^{m-1})$$

Or the more general equation of the form

$$P(R)[Y(x, t)] = \sum_{r=0}^p b_r(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} Y(x, t) \quad (1.1.10)$$

where  $P(U)$  is a polynomial or an integral function of  $U$ . Even, when  $P(U)$  is a function having isolated singularities, the applicability of the present method can be extended, provided a suitable power series representation of the function can be obtained, of course with great caution.

Lastly, the solution of the general equation of the form

$$Q(L_x, B_t)y = 0 \quad (1.1.11)$$

where  $Q(u, v)$  is a polynomial in  $u$  and  $v$  can be derived by the method advanced in the earlier paper and this paper.

**1.2. Expression of the Solution of the equations**

$$L_x[Y(x,t)] = B_i[Y(x,t)] + F_1(t)F(x) \tag{1.2.1}$$

using first the appropriate integral transform defined by (1.1.1) and then the Laplace transform.

With the aid of the appropriate integral transform (1.1.1) and its operational properties, we reduce the differential equation (1.2.1) into the form

$$b_p(t) \frac{d^p}{dt^p} y_\lambda(n,t) + b_{p-1}(t) \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} y_\lambda(n,t) + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} y_\lambda(n,t) + \{b_0(t) + \lambda\} y_\lambda(n,t) = F_1(t) f_\lambda(n). \tag{1.2.2}$$

Assuming for simplicity  $b_i(t)$  being all constants so that the Laplace transform can be applied with much advantage. Let us define the Laplace transform  $\bar{y}_\lambda(n,s)$  of the function  $y_\lambda(n,t)$  by the integral

$$\bar{y}_\lambda(n,s) = T\{y_\lambda(n,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y_\lambda(n,t) dt.$$

Using the Laplace transform [8], we can reduce the equation (1.2.2) as

$$b_p[s^p \bar{y}_\lambda(n,s) - s^{p-1} y_\lambda(n, 0^+) - s^{p-2} y'_\lambda(n, 0^+) \dots - s y_\lambda^{(p-2)}(n, 0^+) - y_\lambda^{(p-1)}(n, 0^+)] + b_{p-1}[s^{p-1} \bar{y}_\lambda(n,s) \dots - s^{p-2} y_\lambda(n, 0^+) - \dots - y_\lambda^{(p-2)}(n, 0^+)] + \dots + b_1[s \bar{y}_\lambda(n,s) - y_\lambda(n, 0^+)] + (b_0 + \lambda) \bar{y}_\lambda(n,s) = f_\lambda(n) \bar{f}_1(s). \tag{1.2.3}$$

In case the equation (1.2.3) be inhomogeneous, the solution of the equation can be written under arbitrary initial values, as

$$y_\lambda(n,t) = y_\lambda(n, 0^+) [b_p Q^{(p-1)}(t) + b_{p-1} Q^{(p-2)}(t) + \dots + b_2 Q'(t) + b_1 Q(t)] + y'_\lambda(n, 0^+) [b_p Q^{(p-2)}(t) + b_{p-1} Q^{(p-3)}(t) + \dots + b_2 Q(t)] + \dots + y_\lambda^{(p-2)}(n, 0^+) [b_p Q'(t) + b_{p-1} Q(t)] + b_p y_\lambda^{(p-1)}(n, 0^+) Q(t) + f_\lambda(n) Q(t) * F_1(t) = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}}_{\lambda,n} y_\lambda(n, 0^+) + f_\lambda(n) Q(t) * F_1(t)$$

where  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{Q}}_{\lambda,n}$  and  $\underline{\underline{y}}_\lambda(n, 0^+)$  denote matrices as

$$\underline{\underline{B}} = (b_1, b_2, \dots, b_p), \underline{\underline{y}}_\lambda(n, 0^+) = \begin{pmatrix} y_\lambda(n, 0^+) \\ y'_\lambda(n, 0^+) \\ \dots \\ y_\lambda^{(p-1)}(n, 0^+) \end{pmatrix}$$

and

$$\underline{Q}_{\lambda_n}(t) = \begin{pmatrix} Q(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q'(t) & Q(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q''(t) & Q'(t) & Q(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q^{(p-1)}(t) & Q^{(p-2)}(t) & \dots & \dots & \dots & Q(t) \end{pmatrix}$$

$$Q_{\lambda_n}(t) = T^{-1}\{q(s)\}, \quad q(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_1 s + (b_0 + \lambda)}$$

$$Q'(t) = \frac{d'}{dt'} Q(t); \quad Q(t) * F(t) = \int_0^t Q(\tau) F(t - \tau) d\tau$$

Hence the solution can be put into the form

$$Y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n^\lambda(x) (\delta_{n\lambda})^{-1} [B \underline{Q}_{\lambda_n}(t) \underline{y}_\lambda(n, 0^+) + f_\lambda(n) Q(t) * F_1(t)]$$

**1.3. Some Important Results.** In our earlier paper [6], we have proved the following theorem:

*THEOREM 1.* If  $F'(x)$  be continuous and  $F''(x)$  be bounded and integrable ( $L$ ) in each of the subintervals of  $a < x < b$  and  $T\{F(x)\}$  exists then  $T\{L[F(x)]\}$  exists and is given by

$$T\{L[F(x)]\} = -\lambda_n f_\lambda(n)$$

where  $L[F(x)]$  is the differential form

$$L[F(x)] = \{\omega_\lambda(x)\}^{-1} \frac{d}{dx} \left[ \Phi(x) \frac{d}{dx} K_n^\lambda(x) \right]$$

We can easily deduce the following Corollaries of the theorem:

*COR. 1.* If  $L^r[F(x)]$ ,  $r = 1, 2, \dots, m - 1$  and  $F(x)$  satisfy the conditions of the Theorem 1, then

$$T\{L^m[F(x)]\} = (-1)^m \lambda_n^m f_\lambda(n)$$

where  $m$  is a positive integer.

*COR. 2.* If  $P(z)$  be a polynomial in  $z$ , then

$$T\{P(h)[F(z)]\} = P(-\lambda_n) f_\lambda(n).$$

*COR. 3.* If  $G(z)$  be an analytic function of  $z$ , then

$$T\{G(h)[F(x)]\} = G(-\lambda_n) f_\lambda(n).$$

**1.4. Solution of Partial Differential Equations.** We shall now solve the partial differential equations

$$L_x^m [Y(x, t)] = B_t [Y(x, t)]$$

Utilising the Cor. 1, we deduce

$$(-1)^m \lambda_n^m y_\lambda(n, t) = \sum_{r=0}^p b_r(t) \frac{d^r}{dt^r} y_\lambda(n, t)$$

i. e.

$$b_p(t) \frac{d^p}{dt^p} y_\lambda(n, t) + b_{p-1}(t) \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} y_\lambda(n, t) + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} y_\lambda(n, t) + b_0(t) y_\lambda(n, t) = 0$$

where  $b'_0(t) = b_0(t) - (-1)^m \lambda_n^m$

The general solution of this equation is

$$y_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^p C_m u_m(t, \lambda, n)$$

Taking the initial conditions as

$$\left[ \frac{\partial^i}{\partial t^i} Y(x, t) \right]_{t=0} = G_i(x),$$

the above solution can be put into the form

$$y_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{q=1}^p \frac{\Delta_m}{\Delta} g_\lambda^q(n) u_m(t, \lambda, n)$$

where

$$g_\lambda^i(n) = T\{G_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

and

$$\Delta = [u_1(n, 0), u_2(n, 0), \dots, u_p^{(p-1)}(n, 0)]$$

denotes the Wronskian of the fundamental set of solutions and  $\Delta_m$  is the determinant obtained from  $\Delta$  by replacing  $m$ -th column by  $g_\lambda^q(n)$ 's.

Using the inverse transformation formula for  $y_\lambda(n, t)$  the solution is given by

$$Y(x, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{q=1}^p \frac{\Delta_m}{\Delta} g_\lambda^{(q)}(n) (\delta_{m\lambda})^{-1} K_n^\lambda(x) u_m(t, \lambda, n).$$

## R E F E R E N C E S

1. Churchill, R. V., *Operational Calculus of Legendre Transform*. Jour. Math. and Phys., **33**, p. 165 (1954).
2. Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (1958).
3. Conte, S. D., *Gegenbauer Transforms*. Quart. Jour. of Math., **6**, p. 48 (1955).
4. Debnath, L., *On Laguerre Transform*. Bull. Cal. Math. Soc., **52**, no. 2, p. 69–77 (1960).
5. Debnath, L., *On Jacobi Transform*. Bull. Cal. Math. Soc., **55**, no. 3, p. 113–120 (1963).
6. Dutta, M. and Debnath, L., *Solution of Some Partial Differential Equations by the Method of Integral Transform*. Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. — Phys., fac. 2 (1965), p. 37–43.
7. Davis, H., *Linear Operators* (1938).
8. Doetsch, G., *Guide to the Application of Laplace Transform* (1961).
9. Erdélyi, A., *Higher Transcendental Functions*, 2 (1953).
10. Sennson, I. N., *Fourier Transforms* (1955).
11. Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (1937).
12. Widder, D. V., *Fourier Transforms* (1951).
13. Debnath, L., *Hermite Transform* (1964). Institut Mathématique. Matematički Vestnik, **I** (16), no. 4 (1964).
14. Mikusinski, J., *Operational Calculus* (1959).

ASUPRA REZOLVĂRII UNOR ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE PRIN TRANSFORMĂRI  
INTEGRALE

(R e z u m a t)

În lucrare se introduc transformări integrale de forma  $(1, 1, 1)$ , cu ajutorul cărora unele ecuații cu derivate parțiale se transformă în ecuații diferențiale ordinare. Rezolvind ecuația diferențială obținută și aplicând transformarea inversă se obțin soluțiile ecuațiilor cu derivate parțiale considerate. În cadrul lucrării această metodă se folosește pentru ecuații cu derivate parțiale de forma  $(1, 1, 9)$ .

ОТНОСИТЕЛЬНО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

( Р е з ю м е )

В работе вводятся интегральные преобразования, имеющие форму  $(1,1,1)$ , при помощи которых некоторые уравнения с частными производными превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Решив полученное дифференциальное уравнение и применив обратное преобразование, получаются решения рассмотренных уравнений с частными производными. В работе этот метод используется для уравнений с частными производными, имеющих вид  $(1,1,9)$ .



# STUDIUL GEOMETRIC AL OSCILAȚIILOR AUTONOME LA SISTEME DE TREI ECUAȚII DIFERENȚIALE

de

MARGARETA FRENKEL-FERTIG

**Introducere.** Fiind dat un sistem autonom de două ecuații diferențiale :

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

problema comportării soluțiilor în vecinătatea unei soluții periodice

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad (\Gamma)$$

este complet rezolvată : [1], [2], [3], [4], [5]. Se știe că dacă  $(\Gamma)$  este o soluție periodică izolată (ciclu limită), atunci orice altă caracteristică converge asimptotic în spirală către aceasta, iar în cazul când funcțiile  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  au un număr suficient de mare de derivate parțiale sau sînt analitice, atunci se poate constata dacă  $\Gamma$  este sau nu o soluție periodică izolată și se poate deduce natura acestei soluții periodice izolate (ciclu limită stabil, nestabil, semistabil).

În metodele folosite pentru studiul acestei probleme, joacă un rol important faptul că fiind vorba de un sistem autonom de două ecuații diferențiale, caracteristica  $\Gamma$  împarte planul în două regiuni.

Pentru determinarea naturii ciclului  $\Gamma$  se studiază termenii pînă la un anumit grad din formula sau seria Taylor scrisă pentru funcțiile  $X(x, y)$  și  $Y(x, y)$ .

În cazul unui sistem autonom de  $n$  ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad X = (X_1, \dots, X_n)$$

dacă  $n \geq 3$ , o caracteristică închisă nu mai împarte spațiul de fază în două regiuni.

Din această cauză o parte din raționamentele folosite în cazul  $n = 2$  nu pot fi utilizate în cazul cînd  $n > 2$  și rezultatele obținute în primul caz nu pot fi extinse pentru  $n > 2$ .

Totodată studiul termenilor din dezvoltările Taylor corespunzătoare devine mai complicat.

În nota de față ne propunem de a studia comportarea soluțiilor unui sistem autonom de trei ecuații diferențiale în vecinătatea unei soluții periodice, folosind metoda geometrică dată de M. U r a b e [3] pentru studiul oscilațiilor autonome.

1. Se consideră sistemul autonom de trei ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (1.1)$$

unde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  este un vector în spațiul euclidian cu trei dimensiuni  $E_3$ ,  $X = (X_1, X_2, X_3)$  o funcție vectorială în  $E_3$ .

Funcțiile  $X_i(x_1, x_2, x_3)$   $i = 1, 2, 3$  sînt continue și au derivate parțiale de ordinul întâi, al doilea și al treilea în raport cu toate variabilele, continue într-un domeniu  $D \subset E_3$ .

Se presupune că sistemul (1.1) admite o soluție periodică

$$x = \varphi(t) \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$$

de perioadă  $\omega$ , și fie  $\Gamma$  caracteristica corespunzătoare din spațiul de fază  $E_3$ .

Pentru a aplica metoda geometrică de studiu a caracteristicilor din vecinătatea lui  $\Gamma$  [3], considerăm triedrul lui Frenet  $(\tau, \nu, \beta)$  de-a lungul lui  $\Gamma$ , iar în sistemul (1.1) facem transformarea

$$x = \varphi(\theta) + \rho_1 \nu + \rho_2 \beta, \quad (1.2)$$

prin care funcțiile  $x_1, x_2, x_3$  se înlocuiesc cu  $\theta, \rho_1, \rho_2$ .

Avem din (1.2)

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} + \frac{d\rho_1}{d\theta} \nu + \frac{d\rho_2}{d\theta} \beta + \rho_1 \frac{d\nu}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} + \rho_2 \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta}$$

sau

$$X(\varphi(\theta) + \rho_1 \nu + \rho_2 \beta) \frac{dt}{d\theta} = \tau \sigma + \frac{d\rho_1}{d\theta} \nu + \frac{d\rho_2}{d\theta} \beta + \rho_1 \sigma \left( -\frac{\tau}{R} - \frac{\beta}{T} \right) + \frac{\rho_2 \sigma}{T}$$

unde  $\frac{ds}{d\theta} = \sigma$ .

Scriem formula lui Taylor pentru funcția vectorială  $X(x)$ :

$$X(\varphi(\theta) + \rho_1 \nu + \rho_2 \beta) = \tilde{X} + \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho + \frac{d^2 \tilde{X}}{dx^2} \rho^2 + O(|\rho|^3)$$

unde

$$\tilde{X} = X(\varphi(\theta)), \quad \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i(\varphi(\theta))}{\partial x_k}, \quad \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho = \rho_1 \left( \frac{d\tilde{X}_i}{dx_k} \right) \nu + \rho_2 \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \beta$$

$$\left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tilde{X}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{X}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{X}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2\tilde{X}}{dx^2} \rho^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\rho_1\nu + \rho_2\beta)^* \left( \frac{\partial^2\tilde{X}_1}{\partial x_k \partial x_j} \right) (\rho_1\nu + \rho_2\beta) \\ (\rho_1\nu + \rho_2\beta)^* \left( \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_k \partial x_j} \right) (\rho_1\nu + \rho_2\beta) \\ (\rho_1\nu + \rho_2\beta)^* \left( \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_k \partial x_j} \right) (\rho_1\nu + \rho_2\beta) \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_j \cdot \partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2\tilde{X}_i}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \left( \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 X_i(\varphi(\theta))}{\partial x_j \partial x_k}$$

Înlocuim expresia lui  $X(\varphi(\theta) + \rho_1\nu + \rho_2\beta)$  în (1.3) și obținem

$$\left( \tilde{X} + \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho + \frac{d^2\tilde{X}}{dx^2} \rho^2 + O(|\rho|^3) \right) \frac{dt}{d\theta} = \tau\sigma + \frac{d\rho_1}{d\theta} \nu + \frac{d\rho_2}{d\theta} \beta + \rho_1\sigma \left( -\frac{\tau}{R} - \frac{\beta}{T} \right) + \frac{\rho_2\sigma}{T} \nu$$

Înmulțind cu  $\tau^* = (\tau_{x_1} \tau_{x_2} \tau_{x_3})$  și observînd că  $\tilde{X} = \tau\sigma$  găsim

$$\frac{dt}{d\theta} = 1 - \frac{\tau^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho}{\sigma} - \frac{\rho_1}{R} + O(|\rho|^2)$$

Înlocuind pe  $\frac{dt}{d\theta}$  cu expresia găsită și înmulțind pe rînd cu  $\tau^*$  și  $\beta^*$ , găsim :

$$\frac{dt}{d\theta} = 1 + O(|\rho|)$$

$$\frac{d\rho_1}{d\theta} = \nu^* \cdot \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\rho_2\sigma}{T} + \nu^* \frac{d^2\tilde{X}}{dx^2} \rho^2 - \frac{1}{\sigma} \nu^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \cdot \tau^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\rho_1}{R} \nu^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho + O(|\rho|^3)$$

$$\frac{d\rho_2}{d\theta} = \beta^* \cdot \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho + \frac{\rho_1\sigma}{T} + \beta^* \frac{d^2\tilde{X}}{dx^2} \rho^2 - \frac{1}{\sigma} \beta^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \cdot \tau^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\rho_1}{R} \beta^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho + O(|\rho|^3)$$

Acest sistem poate fi scris sub forma

$$\frac{dt}{d\theta} = 1 + O(|\rho|) \tag{1.3}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = f(\theta, \rho), \quad \rho = (\rho_1, \rho_2)$$

unde scriind

$$f(\theta, \rho) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\theta, 0)\rho + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\theta, 0)\rho^2 + O(|\rho|^3)$$

avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\theta, 0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\sigma}{T} \rho_2 \\ \beta^* \frac{dX}{dx} \rho + \frac{\sigma}{T} \rho_1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\theta, 0)\rho^2 &= \begin{pmatrix} \rho^* F_{1\rho} \\ \rho^* F_{2\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \frac{d^2 \tilde{X}}{dx^2} \rho^2 - \frac{1}{\sigma} \mathbf{v}^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \tau^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\rho_1}{R} \mathbf{v}^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \\ \beta^* \frac{d^2 X}{dx^2} \rho^2 - \frac{1}{\sigma} \beta^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \tau^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho - \frac{\rho_1}{R} \beta^* \frac{d\tilde{X}}{dx} \rho \end{pmatrix} \\ F_i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \rho_j \partial \rho_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i(\theta, 0)}{\partial \rho_1^2} & \frac{\partial^2 f_i(\theta, 0)}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \\ \frac{\partial^2 f_i(\theta, 0)}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} & \frac{\partial^2 f_i(\theta, 0)}{\partial \rho_2^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se verifică [3] că dacă  $R_0$  este suficient de mic, atunci pentru

$$|\rho| \leq R_0 \quad -\infty < \theta < +\infty$$

transformarea (1.2) este nesingulară. Înseamnă că oricărei soluții a sistemului (1.1) dintr-o vecinătate suficient de mică a caracteristicii  $\Gamma$ , îi corespunde o soluție a sistemului (1.3) și invers, oricărei soluții cu condițiile inițiale  $|\rho_0| \leq R_0$  îi corespunde o soluție a sistemului (1.1).

*Observație.* Fie

$$x = x(t, x_0) \tag{1.4}$$

soluția sistemului (1.1), care verifică condiția inițială  $x(0, x_0) = x_0$ , punctul  $M_0(x_0)$  fiind într-o vecinătate suficient de mică a caracteristicii  $\Gamma$ .

Din punctul  $M_0(x_0)$  ducem planul normal la  $\Gamma$ . Acest plan va intersecta caracteristica  $\Gamma$  într-un singur punct  $P_0(\varphi(\theta_0))$  pentru care  $|\overline{M_0 P_0}| \leq R_0$ .

Putem admite că  $\theta_0 = 0$ . Într-adevăr, deoarece sistemul (1.1) este autonom, oricare ar fi  $\tau$  ecuația

$$x = \varphi(\theta + \tau)$$

reprezintă aceeași caracteristică  $\Gamma$ .

Presupunem deci că de la început am ales reprezentarea parametrică a lui  $\Gamma$ , astfel încât punctul  $M_0(x_0)$  să-i corespundă  $P_0(\varphi(0))$ .

Dacă notăm cu  $\rho_{01}$ ,  $\rho_{02}$  componentele lui  $\rho_0$  după axele  $\nu$  și  $\beta$  avem

$$|\overline{MP_0}| = \sqrt{\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2} = |\rho| \leq R_0$$

Atunci soluției (1.4) îi va corespunde soluția  $\theta = \theta(t)$ ,  $\rho = \rho(\theta(t))$ ,  $\rho_0$  cu condițiile inițiale  $\theta(0) = 0$ ,  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$

și 
$$x_0 = \varphi(0) + \rho_{10}\nu(0) + \rho_{20}\beta(0).$$

Să considerăm ultimele două ecuații ale sistemului (1.3):

$$\frac{d\rho}{d\theta} = f(\theta, \rho) \quad (1.5)$$

Dacă în acest sistem neglijăm termenii de ordin superior obținem sistemul

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\theta, 0)\rho, \quad (1.6)$$

care se numește sistemul normal în variații [3], [6].

2. Să notăm

$$\rho = \rho(\theta, \rho_0) \quad (2.1)$$

soluția sistemului (1.5), care verifică condiția inițială:  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$

iar

$$x = x(t, x_0) \quad (2.2)$$

soluția sistemului (1.1) care verifică condiția inițială  $x(0, x_0) = x_0$ , unde

$$x_0 = \varphi(0) + \rho_{10}\nu(0) + \rho_{20}\beta(0).$$

Condiția necesară și suficientă ca soluția (2.2) să fie periodică [3] este ca să avem

$$\rho(n\omega, \rho_0) = \rho_0, \quad (2.3)$$

pentru un număr  $n$  întreg și pozitiv.

Dacă un asemenea număr  $n$  nu există pentru nici un vector  $\rho_0$  pentru care avem  $|\rho_0| \leq R'_0 \leq R_0$ , atunci în vecinătatea soluției  $\Gamma$  nu există nici o soluție periodică, deci  $\Gamma$  este un ciclu limită.

Ne propunem să găsim condiții în care nu există un asemenea număr  $n$ , adică criterii ca o soluție periodică dată să fie un ciclu limită.

Pentru aceasta scriem întâi formula lui Taylor

$$\rho(\theta, 0)\rho_0 = \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(\theta, 0)\rho_0^2 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2}(\theta, 0)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^3) \quad (2.4)$$

unde

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(\theta, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial \rho_{01}}(\theta, 0) & \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_{02}}(\theta, 0) \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \rho_{02}}(\theta, 0) & \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_{01}}(\theta, 0) \end{pmatrix}; \quad \rho_0 = \begin{pmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{02} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2}(\theta, 0) \rho_0^2 = \begin{pmatrix} \rho_0^* S_1 \rho_0 \\ \rho_0^* S_2 \rho_0 \end{pmatrix} S_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \rho_{01}^2}(\theta, 0) & \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \rho_{01} \partial \rho_{02}}(\theta, 0) \\ \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \rho_{01} \partial \rho_{02}}(\theta, 0) & \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \rho_{02}^2}(\theta, 0) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Condiția (2.3) se scrie

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(n\omega, \rho_0) - E \right) \rho_0 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2}(n\omega, 0) \rho_0^2 + 0(|\rho_0|^3) = 0 \quad (2.7)$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice  $\rho_0$ ,  $|\rho_0| \leq R_0$  este necesar să avem

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(n\omega, \rho_0) = E.$$

Ne propunem deci să-l calculăm pe  $\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(n\omega, 0)$ .

Se știe [3], [5] că coloanele matricii  $\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(\theta, 0)$  formează un sistem de soluții al sistemului normal în variații (1.6). Pentru  $\theta = 0$ , din (2.4) avem

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(0, 0) - E \right) \rho_0 + 0(|\rho_0|^2) = 0, \quad \text{deci} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(0, 0) = E.$$

Fie  $\alpha + i\beta$  și  $\alpha - i\beta$  exponenții caracteristici ai sistemului normal în variații 1.6), atunci coloanele matricii

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} (p_1(\theta) \cos \beta\theta - q_1(\theta) \sin \beta\theta)e^{z_0} & (\bar{p}_1(\theta) \sin \beta\theta + \bar{q}_1(\theta) \cos \beta\theta)e^{z_0} \\ (p_2(\theta) \cos \beta\theta - q_2(\theta) \sin \beta\theta)e^{z_0} & (\bar{p}_2(\theta) \sin \beta\theta + \bar{q}_2(\theta) \cos \beta\theta)e^{z_0} \end{pmatrix}$$

unde  $p_i(\theta)$ ,  $q_i(\theta)$ ,  $\bar{p}_i(\theta)$  și  $\bar{q}_i(\theta)$  sînt funcții periodice de  $\theta$  de perioadă  $\omega$  și

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0; \quad \bar{q}_1(0) = 0, \quad \bar{q}_2(0) = 1,$$

sînt soluții ale sistemului (1.6). Deoarece  $M(0) = E$  rezultă că

$$M(\theta) = \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(\theta, 0)$$

Avem deci

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(n\omega, 0) = \begin{pmatrix} \cos \beta n\omega e^{2n\omega} & \sin \beta n\omega e^{2n\omega} \\ -\sin \beta n\omega e^{2n\omega} & \cos \beta n\omega e^{2n\omega} \end{pmatrix}$$

Se vede că dacă  $\alpha \neq 0$ , atunci oricare ar fi  $n$  întreg și pozitiv avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_0}(n\omega, 0) \neq E$$

deci relația (2.3) nu este realizabilă pentru nici un număr  $n$  întreg și pozitiv. Am regăsit rezultatul cunoscut [3], [6]:

*Dacă toți exponenții caracteristici ai sistemului normal în variații au partea reală  $\alpha \neq 0$ , atunci soluția periodică  $\Gamma$  este un ciclu limită.*

3. Să presupunem că  $\alpha = 0$ . Atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_0}(n\omega, 0) = \begin{pmatrix} \cos \beta n\omega & \sin \beta n\omega \\ -\sin \beta n\omega & \cos \beta n\omega \end{pmatrix}$$

Această matrice este egală cu matricea unitate  $E$ , dacă

$$\cos \beta n\omega = 1, \quad \sin \beta n\omega = 0$$

ceea ce se poate realiza dacă și numai dacă  $\beta = \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{\omega}$ ,  $\frac{p}{q}$  fiind număr rațional.

Deci dacă  $\beta \neq \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{\omega}$  atunci egalitatea (2.3) nu este realizabilă și deci  $\Gamma$  este un ciclu limită. Rezultă:

*TEOREMA 1. Dacă exponenții caracteristici ai sistemului normal în variații au partea reală nulă, iar partea imaginară  $\beta \neq \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{\omega}$ ,  $\frac{p}{q}$  fiind număr rațional, atunci soluția periodică  $x = \varphi(t)$  a sistemului (1.1) este un ciclu limită.*

Să presupunem că  $\alpha = 0$  și  $\beta = \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{\omega}$ ,  $\frac{p}{q}$  număr rațional.

Atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_0}(n\omega, 0) = E$$

pentru  $n$  convenabil ales condiția (2.3) se scrie, ținând seamă de (2.7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_0^2}(n\omega, 0)\rho^2 + 0(|\rho_0|^3) = 0. \quad (3.1)$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc este necesar ca să avem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_0^2}(m\omega, 0)\rho^2 = 0$$

pentru un număr  $m$  întreg și pozitiv.

**O b s e r v a Ț i e.** În general  $m \neq n$ , dar dacă avem  $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_0}(n\omega, 0) = E$  atunci  $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_0}(\theta, 0)$  are perioada  $n\omega$  și dacă  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_0^2}(m\omega, 0)\rho_0^2 = 0$ , atunci  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_0^2}(\theta, 0)\rho_0^2$  este funcție periodică de perioadă  $m\omega$ , și  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_0^2}(0, 0)\rho_0^2 = 0$ , deci ambele egalități au loc pentru  $\theta = nm\omega$ .

Ne propunem să-l calculăm pe  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} (m\omega, 0) \rho_0^2$ .

Pentru aceasta scriem că funcția (2.1) este soluția sistemului (1.5), pe care îl scriem sub forma

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial \rho} (\theta, 0) \rho + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} (\theta, 0) \rho^2 + O(|\rho|^3).$$

Avem

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} \rho_0^2 + O(|\rho_0|^3) \right) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} \rho_0^2 \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 \right)^2 + O(|\rho_0|^3)$$

de unde deducem sistemul care îl conține pe  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} (\theta, 0) \rho_0^2$ :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} \rho_0^2 \right) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} \rho_0^2 \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 \right)^2 \quad (3.2)$$

Din (2.4) rezultă că  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} (0, 0) \rho_0^2 = 0$ , deci vectorul  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} (\theta, 0) \rho_0^2$

este soluția sistemului linear și neomogen (3.2), care verifică condiția inițială

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho_0^2} (0, 0) \rho_0^2 = 0.$$

Ținând cont de formulele (2.6) și de expresia lui  $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \rho^2$  calculată în § 1, sistemul (3.2) se mai poate scrie:

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \rho_0^* S_1 \rho_0 \\ \rho_0^* S_2 \rho_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \rho} (\theta, 0) \begin{pmatrix} \rho_0^* S_1 \rho_0 \\ \rho_0^* S_2 \rho_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_0^* \frac{\partial \rho^*}{\partial \rho_0} F_1 \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 \\ \rho_0^* \frac{\partial \rho^*}{\partial \rho_0} F_2 \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \rho_0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\frac{dS_i}{d\theta} = \frac{\partial f_i}{\partial \rho_1} S_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \rho_2} S_2 + \frac{\partial \rho^*}{\partial \rho_0} F_i \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \quad (3.3)$$

Sistemul (3.3) în care funcțiile necunoscute  $S_1, S_2$  sînt matricele calculate în formulele (2.6),

$$S_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \rho_{01}^2} & \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \rho_{01} \partial \rho_{02}} \\ \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \rho_{01} \partial \rho_{02}} & \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \rho_{02}^2} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$



este echivalent cu următoarele trei sisteme de ecuații diferențiale :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi_{01}^2} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{01}^2} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_2} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{01}^2} + H_1^i(\theta) \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi_{01} \partial \varphi_{02}} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{01} \partial \varphi_{02}} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_2} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{01} \partial \varphi_{02}} + H_{12}^i(\theta) \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi_{02}^2} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{02}^2} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_2} (\theta, 0) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{02}^2} + H_2^i(\theta) \quad (3.6)$$

$$H_k^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{0k}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{0k}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{0k}} \end{pmatrix} F_i \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{0k}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{0k}} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2; \quad i = 1, 2.$$

$$H_{12}^i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{01}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{02}} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{01}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{02}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{02}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{01}} \right) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \varphi_2^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{01}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_{02}}.$$

Vedem deci că elementele matricelor  $S_i$  adică :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{01}^2} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{01} \partial \varphi_{02}} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_{02}^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{01}^2} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{01} \partial \varphi_{02}} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_{02}^2} \end{array}$$

sînt soluțiile sistemelor (3.4), (3.5), (3.6) cu condițiile inițiale nule.

Pentru ca relația (3.1) să fie realizabilă este necesar ca aceste soluții să fie periodice de perioadă  $m\omega$ . Condiția necesară și suficientă ca fiecare din aceste sisteme de ecuații liniare neomogene [6] să aibă soluții periodice de perioadă  $m\omega$ , este ca următoarele egalități să fie verificate :

$$\int_0^{m\omega} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \varphi_0} (\theta, 0) \begin{pmatrix} H_k^1(\theta) \\ H_k^2(\theta) \end{pmatrix} d\theta = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\int_0^{m\omega} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \varphi_0} (\theta, 0) \begin{pmatrix} H_{12}^1(\theta) \\ H_{12}^2(\theta) \end{pmatrix} d\theta = 0$$

Rezultă deci :

**TEOREMA 2.** *Dacă exponenții caracteristici ai sistemului normal în variații au partea reală nulă, partea imaginară  $\beta = \frac{p}{q} \frac{\pi}{\omega}$ ,  $\frac{p}{q}$  număr rațional, dar cel puțin una din egalitățile (3.7) nu are loc, atunci soluția periodică  $x = \varphi(t)$  este un ciclu limită.*

## BIBLIOGRAFIE

1. I. Bendixon, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Acta Math., **24**, Stockholm, 1901, pp 1—80.
2. H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Journal des Math., **2**. 1889, pp. 151—217.
3. M. Urabe, *Geometric Study of Nonlinear Autonomous Oscillations*. Funkcialaj Ekvacioj, V, I, Nr. 1, 1958, pp. 1—83.
4. A. Halanay, *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*., București, 1956, pp. 99—135.
5. L. S. Pontriaghin, *Obknovenne differentsialne uravnenia* Moscova 1961. pp. 183.
6. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. București, 1963, Ed. Acad. R. P. R. pp. 364—372, 217—219.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОНОМНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ТРЕХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Автор изучает поведение решений автономной системы дифференциальных уравнений, в соседстве с периодическим решением, используя геометрический метод, данный М. Урабе.

Находятся два достаточных условия, чтобы данное периодическое условие было циклом предельным, причем эти условия выражены двумя теоремами, данными в работе.

A GEOMETRICAL STUDY OF AUTONOMOUS OSCILLATIONS FOR SYSTEMS OF  
THREE DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Summary)

In the present note is investigated the behaviour of the solutions in the case of an autonomous system of differential equations, in the vicinity of one periodical solution, using the geometrical method given by M. Urabe.

Two sufficient conditions that a periodical solution be a limit cycle, are found. These conditions are expressed by the two theorems given in our paper.

# A METHOD FOR COMPUTING THE MOMENTS OF THE MULTINOMIAL AND MULTIPLE POISSON DISTRIBUTIONS

by  
**D. D. STANCU**

1. Consider an experiment consisting of  $n$  repeated independent trials and denote by  $E_1, E_2, \dots, E_{s+1}$  the possible outcomes of each of these trials. Assuming that the probability of  $E_k$  in each trial is  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s+1$ ), we have  $p_1 + p_2 + \dots + p_{s+1} = 1$ . It is known that the probability that in  $n$  trials the outcome  $E_1$  will occur  $v_1$  times, the outcome  $E_2$  will occur  $v_2$  times,  $\dots$ , the outcome  $E_{s+1}$  will occur  $v_{s+1}$  times, for any non-negative integers  $v_k$  subject to the condition  $v_1 + v_2 + \dots + v_{s+1} = n$ , is given by

$$\frac{n!}{v_1! v_2! \dots v_{s+1}!} p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_{s+1}^{v_{s+1}}.$$

Since

$$p_{s+1} = 1 - p_1 - \dots - p_s, \quad v_{s+1} = n - v_1 - \dots - v_s,$$

this probability can be expressed in the form

$$\begin{aligned} P_n^{v_1, \dots, v_s} (p_1, \dots, p_s) &= \\ &= \frac{n!}{v_1! \dots v_s! (n - v_1 - \dots - v_s)!} p_1^{v_1} \dots p_s^{v_s} (1 - p_1 - \dots - p_s)^{n - v_1 - \dots - v_s}. \end{aligned} \tag{1}$$

This formula gives the well-known multinomial distribution.

It is easy to see that formula (1) can also be written as follows

$$\begin{aligned} P_n^{v_1, \dots, v_s} (p_1, \dots, p_s) &= \\ &= \binom{n}{v_1} \binom{n - v_1}{v_2} \dots \binom{n - v_1 - \dots - v_{s-1}}{v_s} p_1^{v_1} \dots p_s^{v_s} (1 - p_1 - \dots - p_s)^{n - v_1 - \dots - v_s}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Now let  $r_1, r_2, \dots, r_s$  be non-negative integers. The *moment of order*  $(r_1, r_2, \dots, r_s)$  of the multinomial distribution is defined by

$$m_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) = \sum_{v_1=0}^n \sum_{v_2=0}^{n-v_1} \dots \sum_{v_s=0}^{n-v_1-\dots-v_{s-1}} v_1^{r_1} \dots v_s^{r_s} P_n^{v_1, \dots, v_s}(p_1, \dots, p_s). \quad (3)$$

Next we shall deduce a formula for this moment, which is more suitable for numerical calculations. It will make use of the so called *differences of zero*.

It is known that the difference of order  $k$  of a function  $f(x)$ , with the step  $h$  and the starting point  $a$ , is given by

$$\Delta_h^k f(a) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(a + \overline{k-i}h) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(a + ih).$$

In the particular case  $f(x) = x^r$ ,  $h = 1$ ,  $a = 0$  it reduces to

$$\Delta_1^k 0^r = \Delta^k 0^r = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^r = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^r, \quad (4)$$

which is the difference of order  $k$  of zero to the power  $r$ .

3. Let us consider first the case of the trinomial distribution, i. e. the case  $s = 2$ , when (3) becomes

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{v_1=0}^n \sum_{v_2=0}^{n-v_1} \binom{n}{v_1} \binom{n-v_1}{v_2} p_1^{v_1} p_2^{v_2} (1-p_1-p_2)^{n-v_1-v_2} v_1^{r_1} v_2^{r_2}. \quad (5)$$

Since

$$(1-p_1-p_2)^{n-v_1-v_2} = \sum_{i_2=0}^{n-v_1-v_2} (-1)^{i_2} \binom{n-v_1-v_2}{i_2} (1-p_1)^{n-v_1-v_2-i_2} p_2^{i_2},$$

$$(1-p_1)^{n-v_1-v_2-i_2} = \sum_{i_1=0}^{n-v_1-v_2-i_2} (-1)^{i_1} \binom{n-v_1-v_2-i_2}{i_1} p_1^{i_1},$$

it follows that

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{v_1=0}^n \sum_{v_2=0}^{n-v_1} \binom{n}{v_1} \binom{n-v_1}{v_2} \sum_{i_2=0}^{n-v_1-v_2} \sum_{i_1=0}^{n-v_1-v_2-i_2} (-1)^{i_1+i_2} \binom{n-v_1-v_2}{i_2} \cdot \binom{n-v_1-v_2-i_2}{i_1} p_1^{v_1+i_1} p_2^{v_2+i_2} v_1^{r_1} v_2^{r_2}.$$

Now it is easy to see that this moment represents a polynomial of degree  $n$  in  $p_1$  and  $p_2$ , that is of the form

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} A_{j_1, j_2} p_1^{j_1} p_2^{j_2}.$$

Next our aim will be to determine the coefficients  $A_{j_1, j_2}$ . In order to do this, we make first the remark that the terms in which the product  $p_1^{j_1} p_2^{j_2}$  occurs may be obtained giving to the paires  $(v_1, i_1), (v_2, i_2)$  respectively the following sequences of values

$$(j_1, 0), (j_1 - 1, 1), \dots, (j_1 - k_1, k_1), \dots, (1, j_1 - 1), (0, j_1) \\ (j_2, 0), (j_2 - 1, 1), \dots, (j_2 - k_2, k_2), \dots, (1, j_2 - 1), (0, j_2).$$

Then if we make  $j_1 = 0, 1, \dots, n$  and  $j_2 = 0, 1, \dots, n - j_1$ , we obtain

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} (-1)^{k_1+k_2} \binom{n}{j_1-k_1} \binom{n+k_1-j_1}{j_2-k_2} \\ \cdot \binom{n+k_1+k_2-j_1-j_2}{k_1} \binom{n+k_2-j_1-j_2}{k_2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} (j_1-k_1)^{r_1} (j_2-k_2)^{r_2}.$$

But it is easy to verify that

$$\binom{n}{j_1-k_1} \binom{n+k_1-j_1}{j_2-k_2} \binom{n+k_1+k_2-j_1-j_2}{k_1} \binom{n+k_2-j_1-j_2}{k_2} = \\ = \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \binom{j_1}{k_1} \binom{j_2}{k_2}.$$

Therefore

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \left[ \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} (-1)^{k_1+k_2} \binom{j_1}{k_1} \binom{j_2}{k_2} (j_1-k_1)^{r_1} (j_2-k_2)^{r_2} \right] p_1^{j_1} p_2^{j_2}.$$

According to (4) we have

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} (\Delta^{j_1} 0^{r_1}) (\Delta^{j_2} 0^{r_2}) p_1^{j_1} p_2^{j_2}. \quad (6)$$

Since  $\Delta^m 0^r = 0$  for  $m > r$  and  $\binom{m}{v} = 0$  for  $v > m$ , it follows that (6) can also be written in the form

$$m_{r_1, r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \sum_{j_2=0}^{r_2} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} (\Delta^{j_1} 0^{r_1}) (\Delta^{j_2} 0^{r_2}) p_1^{j_1} p_2^{j_2}. \quad (6')$$

4. In the general case of the multinomial distribution (1) one finds, in a completely similar way, the following expression for the moment of order  $(r_1, r_2, \dots, r_s)$ :

$$m_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n-j_1-\dots-j_{s-1}} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \dots \binom{n-j_1-\dots-j_{s-1}}{j_s} (\Delta^{j_1} 0^{r_1}) \dots (\Delta^{j_s} 0^{r_s}) p_1^{j_1} \dots p_s^{j_s}, \quad (7)$$

or

$$m_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_s=0}^{r_s} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \dots \binom{n-j_1-\dots-j_{s-1}}{j_s} (\Delta^{j_1} 0^{r_1}) \dots (\Delta^{j_s} 0^{r_s}) p_1^{j_1} \dots p_s^{j_s}. \quad (7')$$

For  $s = 1$  this formula reduces to

$$m_{r_1}(n; p_1) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \binom{n}{j_1} (\Delta^{j_1} 0^{r_1}) p_1^{j_1}, \quad (8)$$

which gives the moment of order  $r_1$  of the binomial distribution

$$P_n^{v_1}(p_1) = \binom{n}{v_1} p_1^{v_1} (1-p_1)^{n-v_1}.$$

Formula (8) has been established first by G. B o h l m a n n [1]. It can be seen also in [3]. In the paper [5] we gave two new methods for finding this formula.

5. For the calculus of the differences of zero one may use the formula (4). But more suitable is to make use of a recurrence relation given by E. T. W h i t t a k e r and G. R o b i n s o n [6]:

$$\Delta^k 0^r = k(\Delta^k 0^{r-1} + \Delta^{k-1} 0^{r-1}), \quad (9)$$

which permits to build up, in a very easy way, a table which in the first line contains the values of the successive differences of zero to the power  $r = 1$ , in the second line contains the values of the differences of zero to the power  $r = 2$ , etc. Indeed, from the relation (9) we see that the value of a difference  $\Delta^k 0^r$  can be obtained by taking  $k$  times the sum of the two numbers of the preceding line which are situated in the same column and in the preceding column, respectively. We gave such a table in [5] for  $k = 1(1)20$  and  $r = 1(1)k$ .

Since

$$\binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \dots \binom{n-j_1-\dots-j_{s-1}}{j_s} = \frac{n(n-1)\dots(n-j_1-\dots-j_s+1)}{j_1! j_2! \dots j_s!},$$

formula (7') can be written in the following form

$$m_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_s=0}^{r_s} n(n-1)\dots(n-j_1-\dots-j_s+1) S_{j_1}^{r_1} \dots S_{j_s}^{r_s} p_1^{j_1} \dots p_s^{j_s}, \quad (10)$$

where

$$S_j^r = \frac{\Delta^j 0^r}{j!}$$

represents the Stirling number of the second kind.

If we take into account that  $\Delta^{00} = 1$ ,  $\Delta^{0r} = 0$  ( $r \geq 1$ ),  $\Delta^{0r} = 1$  ( $r \geq 1$ ),  $\Delta^k 0^r = 0$  ( $k > r$ ), we see that  $S_0^0 = 1$ ,  $S_0^r = 0$  ( $r \geq 1$ ),  $S_1^r = 1$  ( $r \geq 1$ ),  $S_k^r = 0$  ( $k > r$ ).

Dividing the relation (9) by  $k!$  we obtain the following recurrence relation for these Stirling numbers

$$S_k^r = kS_k^{r-1} + S_{k-1}^r,$$

which is very useful for constructing a table of their values. A table of  $S_k^r$  for  $r = 2(1)25$  and  $k = 2(1)r$  is to be found in [2].

6. Now let us consider the case of multiple Poisson distribution. It is defined by

$$P^{v_1, \dots, v_s}(a_1, \dots, a_s) = \frac{a_1^{v_1} \dots a_s^{v_s}}{v_1! \dots v_s!} e^{-(a_1 + \dots + a_s)}$$

and can be obtained from the multinomial distribution if we assume that  $p_k$  depends on  $n$  in such a way that for  $n \rightarrow \infty$  we have  $np_k \rightarrow a_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ).

Considering this limit case we obtain from (10) the following expression for the moment of order  $(r_1, \dots, r_s)$  of the multiple Poisson distribution

$$m'_{r_1, \dots, r_s}(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_s=0}^{r_s} a_1^{j_1} \dots a_s^{j_s} S_{j_1}^{r_1} \dots S_{j_s}^{r_s},$$

since we have

$$n(n-1) \dots (n-j_1 - \dots - j_s + 1) p_1^{j_1} \dots p_s^{j_s} \rightarrow a_1^{j_1} \dots a_s^{j_s}$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

The corresponding formula for  $s = 1$  has been given, in 1960, by T. Gerstenkorn [4].

Received October 17, 1966

REFERENCES

1. G. Bohlmann, *Formulierung und Begründung zweier Hilfssätze der mathematische Statistik*, Math. Ann., **74** (1913), 341–409.
2. R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th ed., London: Oliver and Boyd, 1963.
3. M. Fréchet, *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, Actualités Sci. Ind. No. 859, Herman, Paris, 1940.
4. T. Gerstenkorn, *On the Formula for the Moments of the Poisson Distribution*, Bull. Soc. Sci. Lettres Lódz, **11** (1960), 1–5.
5. D. D. Stancu, *Asupra momentelor unor variabile aleatoare discrete*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math. — Phys., **9** (1964), 35–48.
6. E. T. Whittaker and G. Robinson, *The Calculus of Observations*, London—Glasgow: Blackie, 1929.

O METODĂ PENTRU CALCULUL MOMENTELOR DISTRIBUȚIILOR MULTINOMIALĂ  
ȘI POISSON MULTIPLĂ

(R e z u m a t)

În această lucrare se stabilesc formulele explicite (7), (7') pentru calculul momentelor distribuției multinomiale (1). La (10) acestea au fost exprimate cu ajutorul numerelor lui Stirling de speța a doua. Prin trecere la limită se deduce și o formulă analogă pentru momentele distribuției lui Poisson multiplă de ordinul  $s$ .

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ МУЛЬТИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И  
МНОГОКРАТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

( Р е з ю м е )

В работе установлены явные формулы (7), (7') для вычисления моментов мультиномиального распределения (1). В (10) они были выражены при помощи чисел Стирлинга второго рода. посредством перехода к пределу выводится и аналогичная формула для моментов распределения Пуассона, имеющая многократность порядка  $s$ .



# ASUPRA EVALUĂRII ORDINULUI DE APROXIMAȚIE A FUNCȚIILOR CONTINUE DE DOUĂ VARIABILE PRIN POLINOAME DE INTERPOLARE DE TIP HERMITE-FEJÉR

de

**FLORICA OLARIU**

Se știe că în anul 1930 L. Fejér [2] a arătat că în cazul unei funcții de o singură variabilă  $f(x)$ , definită și continuă pe intervalul  $[-1, 1]$ , în ipoteza că nodurile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt rădăcinile polinomului lui Cebîșev  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ , polinomul care este de grad cel mai mic și se bucură de proprietatea că pe noduri coincide cu funcția  $f(x)$ , iar derivata sa pe noduri se anulează, este de grad  $2n-1$  și se exprimă sub forma

$$P_{2n-1}(f; x) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (1 - xx_i) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_i)^2} f(x_i).$$

În 1954 E. Moldovan [3] a arătat că

$$|f(x) - P_{2n-1}(f; x)| \leq 2\pi \omega\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

În această lucrare ne vom ocupa de extinderea la două variabile a acestor rezultate.

**I.** Fie  $f(x, y)$  o funcție definită pe dreptunghiul  $D[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ . Să considerăm punctele  $x_i \in [a, b]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) și punctele  $y_j \in [c, d]$  ( $j = \overline{1, m}$ ).

Polinomul care este de grad minim în raport cu  $x$  și în raport cu  $y$ , și care se bucură de proprietatea că pe nodurile  $M_{i,j}(x_i, y_j)$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ ) coincide cu funcția  $f(x, y)$ , iar derivatele sale de ordinul întâi se anulează, se află cu ușurință că are forma

$$(*) P_{2n-1, 2m-1}(f; x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} \frac{v_j(y)}{v_j(y_j)} \left[ 1 - (x - x_i) \frac{u'_i(x_i)}{u_i(x_i)} \right] \times \\ \times \left[ 1 - (y - y_j) \frac{v'_j(y_j)}{v_j(y_j)} \right] f(x_i, y_j),$$

unde

$$u_i(x) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\nu)^2 / (x - x_i)^2, \quad v_j(y) = \prod_{\mu=2}^m (y - y_\mu)^2 / (y - y_j)^2.$$

Conform unei definiții date de Fejér, vom numi puncte conjugate  $X_i$  ale punctelor  $x_i$  acele puncte care anulează expresia

$$1 - (x - x_i) \frac{u'_i(x_i)}{u_i(x_i)}.$$

În mod analog se definesc punctele  $Y_j$ .

Se observă că avem

$$X_i = x_i + \frac{u'_i(x_i)}{u_i(x_i)}, \quad Y_j = y_j + \frac{v'_j(y_j)}{v_j(y_j)}.$$

Punctelor  $M_{i,j}(x_i, y_j)$  le punem în corespondență punctele  $\bar{M}_{i,j}(X_i, Y_j)$  pe care le vom numi puncte conjugate. Alegem punctele  $x_i$  în așa fel încît  $X_i$  să coincidă cu punctele conjugate armonice ale punctelor  $x_i$  față de  $-1$ , și  $1$ :

$$\frac{1}{x_i} = x_i + \frac{u'_i(x_i)}{u_i(x_i)},$$

deci

$$1 - (x - x_i) \frac{u'_i(x_i)}{u_i(x_i)} = \frac{1 - xx_i}{1 - x_i^2}.$$

Procedînd în mod analog în cazul punctelor  $y_j$ , se obține

$$1 - (y - y_j) \frac{v'_j(y_j)}{v_j(y_j)} = \frac{1 - yy_j}{1 - y_j^2}.$$

Să considerăm polinoamele

$$g(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i); \quad h(y) = \prod_{j=1}^m (y - y_j).$$

Se observă că

$$\frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} = \left[ \frac{g(x)}{(x - x_i)g'(x_i)} \right]^2; \quad \frac{v_j(y)}{v_j(y_j)} = \left[ \frac{h(y)}{(y - y_j)h'(y_j)} \right]^2,$$

Fejér a arătat că în condițiile de mai sus are loc egalitatea următoare,

$$\frac{g(x)}{(x - x_i)g'(x_i)} = \frac{\sqrt{1 - x_i^2}}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_i},$$

unde  $T_n(x)$  este polinomul lui Cebîșev amintit mai sus.

Folosind egalitățile obținute, polinomul de interpolare căutat, corespunzător patratului  $D$  [ $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ], se scrie sub forma

$$\begin{aligned}
 F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{f(x_i, y_j)}{n^2 m^2} (1 - x x_i) (1 - y y_j) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_i)^2} \frac{T_m^2(y)}{(y - y_j)^2} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) f(x_i, y_j),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

unde

$$F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) = \frac{1}{n^2 m^2} (1 - x x_i) (1 - y y_j) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_i)^2} \frac{T_m^2(y)}{(y - y_j)^2}.$$

Se constată că polinoamele  $F_{n, m}^{i, j}(f; x, y)$  verifică următoarele două proprietăți:

1.  $F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) \geq 0$ ; pentru  $x, x_i \in [-1, 1]$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) și  $y, y_j \in [-1, 1]$  ( $j = \overline{1, m}$ ).

2.  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) \equiv 1$ .

Prima proprietate este evidentă; a doua proprietate rezultă ușor considerînd în (\*)  $f(x_i, y_j) = 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ ).

Pentru evaluarea ordinului de aproximație al funcției  $f(x)$  prin polinomul găsit se consideră

$$\begin{aligned}
 |f(x, y) - F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y)| &= |f(x, y) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) f(x_i, y_j)| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) |f(x, y) - f(x_i, y_j)|
 \end{aligned}$$

În cele ce urmează vom da două evaluări ale ordinului de aproximație utilizînd două definiții ale modulului de continuitate.

Definind modulul de continuitate prin formula

$$\begin{aligned}
 \omega(A_n, A_m) &= \max |f(x, y) - f(x_i, y_j)|, \\
 |x - x_i| &\leq A_n \\
 |y - y_j| &\leq A_m
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

unde

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sup_{x \in [-1, 1]} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i| F_{n, m}^{i, j}(f; x, y) \\
 A_m &= \sup_{y \in [-1, 1]} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |y - y_j| F_{n, m}^{i, j}(f; x, y)
 \end{aligned}$$

și folosind următoarea proprietate a acestuia

$$|f(x, y) - f(x_i, y_j)| \leq \left( \frac{|x - x_i|}{A_n} + \frac{|y - y_j|}{A_m} + 1 \right) \omega(A_n, A_m),$$

se obține

$$|f(x, y) - F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y)| \leq 3 \omega(A_n, A_m).$$

Să evaluăm acum mărimile  $A_n$  și  $A_m$  folosind inegalitatea

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |x - x_i| (1 - xx_i) \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \leq \frac{\pi \log n}{n},$$

obținută de E. Moldovan în [3] (vezi și [4]).

Avem

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i| F_{n,m}^{i,j}(f; x, y) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{m^2} (1 - yy_j) \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} |x - x_i| (1 - xx_i) \\ &\quad \cdot \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \leq \frac{\pi \log n}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{m^2} (1 - yy_j) \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Luând  $y = \cos \theta$ ,  $y_j = \cos \theta_j$  unde  $\theta_j \in [0, \pi]$ , iar pentru  $\theta$  luând delimitarea principală, se observă că  $\cos m\theta_j = 0$  și  $\sin \theta \sin \theta_j \geq 0$ .

Atunci

$$\begin{aligned} E &\leq \frac{\pi \log n}{n} \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \left| 1 - \cos \theta \cos \theta_j + \sin \theta \sin \theta_j \right| \left[ \frac{\cos m\theta - \cos m\theta_j}{\cos \theta - \cos \theta_j} \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{2\pi \log n}{n} \sum_{j=1}^m \frac{\sin^2 m \frac{\theta_j - \theta}{2}}{m^2 \sin^2 \frac{\theta_j - \theta}{2}} = \frac{2\pi \log n}{n}, \end{aligned}$$

deoarece se știe că

$$\sum_{j=1}^m \frac{\sin^2 m \frac{\theta_j - \theta}{2}}{m^2 \sin^2 \frac{\theta_j - \theta}{2}} = 1.$$

Deci

$$A_n \leq \frac{2\pi \log n}{n}$$

și în mod analog se găsește că

$$A_m \leq \frac{2\pi \log m}{m}.$$

Prin urmare

$$|f(x, y) - F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y)| \leq 3 \omega \left( \frac{2\pi \log n}{n}, \frac{2\pi \log m}{m} \right). \quad (3)$$

Să definim acum modul de continuitate prin formula

$$\omega(A_{n, m}) = \max |f(x, y) - f(x_i, y_j)|, \quad (4)$$

$$|x - x_i| + |y - y_j| \leq A_{n, m}$$

unde

$$A_{n, m} = \sup_{\substack{x \in [-1, 1] \\ y \in [-1, 1]}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{n^2 m^2} (|x - x_i| + |y - y_j|)(1 - xx_i)(1 - yy_j) \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2.$$

Folosind proprietatea

$$|f(x, y) - f(x_i, y_j)| \leq \left( \frac{|x - x_i| + |y - y_j|}{A_{n, m}} + 1 \right) \omega(A_{n, m})$$

obținem

$$|f(x, y) - f(x_i, y_j)| \leq 2\omega(A_{n, m}).$$

Să trecem la evaluarea lui  $A_{n, m}$ ; putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2 m^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (|x - x_i| + |y - y_j|)(1 - xx_i)(1 - yy_j) \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{n^2 m^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i|(1 - xx_i)(1 - yy_j) \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{n^2 m^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |y - y_j|(1 - xx_i)(1 - yy_j) \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^2 \left( \frac{T_m(y)}{y - y_j} \right)^2. \end{aligned}$$

În consecință avem

$$|f(x, y) - F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y)| \leq 4 \pi \omega \left( \frac{\log n}{n} + \frac{\log m}{m} \right) \quad (5)$$

**II.** Fie  $f(x, y)$  o funcție definită și continuă pe patratul  $D[-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1]$ . Să alegem  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  cele  $n$  rădăcini ale polinomului Cebîșev  $T_n(x)$   $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$  cele  $m$  rădăcini ale polinomului lui Cebîșev  $T_m(y)$ ; se știe că toate aceste rădăcini sînt cuprinse în intervalul  $[-1, 1]$ .

Se pune problema determinării unui polinom  $P(x, y)$  de grad cel mai mic ce satisface condițiilor

$$P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

$$\frac{\partial^k P(x_i, y_j)}{\partial x^g \partial y^h} = 0 \quad (g + h = k; k = 1, 2, 3; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

precum și a evaluării ordinului de aproximație al funcției date prin acest polinom.

O problemă analogă, dar pentru funcția  $f(x)$  de o singură variabilă, definită și continuă pe intervalul  $[-1, 1]$ , a fost studiată de D. D. S t a n c u [1], care a arătat că polinomul căutat poate fi pus sub forma

$$P_{4n-1}(f; x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) f(x_i), \quad (6)$$

unde

$$v_i(x) = \frac{1}{n^4} \left\{ (1 - x_i^2)(1 - x^2) + \frac{1}{6} (x - x_i)^2 [(4n^2 - 1)(1 - xx_i) + 3] \right\} \left( \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right)^4.$$

În aceeași lucrare s-a stabilit inegalitatea

$$|f(x) - P_{4n-1}(f; x)| < 2 \omega \left( \sqrt{\frac{2n^2 + 6n + 1}{3n^3}} \right).$$

Recent în lucrarea [5] noi am arătat că

$$|f(x) - P_{4n-1}(f; x)| \leq 4 \omega \left( C \frac{\log 2n}{2n} + \frac{2}{2n} \right),$$

unde  $C = (8\pi + 6)/3$

Funcția  $f(x, y)$  considerată se poate aproxima prin formula

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n v(x_i) f(x_i, y)$$

și la rîndul ei funcția  $f(x_i, y)$  se aproximează prin

$$f(x_i, y) \approx \sum_{j=1}^m v_j(y) f(x_i, y_j).$$

Deci

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i(x) v_j(y) f(x_i, y_j),$$

unde  $v_i(x)$  sînt polinoamele ale căror expresii au fost date mai sus. Funcția  $f(x, y)$  se aproximează prin polinomul

$$P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i(x) v_j(y) f(x_i, y_j).$$

Se observă că acest polinom satisface condițiilor enunțate mai sus.

De asemenea se verifică faptul că polinomul

$$P_{n, m}^{i, j}(f; x, y) = v_i(x) v_j(y) \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

are următoarele proprietăți

$$a) \quad P_{n,m}^{i,j}(f; x, y) \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{n,m}^{i,j}(f; x, y) \equiv 1$$

Evaluând ordinul de aproximație al funcției date prin polinomul considerat și folosind prima definiție a modului de continuitate, se obține

$$|f(x, y) - P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y)| \leq 3 \omega(A_n, A_m)$$

unde

$$A_n = \sup_{x \in [-1, 1]} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i| v_i(x) v_j(y),$$

$$A_m = \sup_{y \in [-1, 1]} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |y - y_j| v_i(x) v_j(y).$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i| v_i(x) v_j(y) &\leq \sum_{j=1}^m v_j(y) \sum_{i=1}^n |x - x_i| v_i(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i| v_i(x) \leq \\ &\leq \frac{16\pi + 12}{3} \frac{\log 2n}{2n} + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Deci

$$A_n \leq \frac{16\pi + 12}{3} \frac{\log 2n}{2n} + \frac{2}{n}.$$

și în mod analog

$$A_m \leq \frac{16\pi + 12}{3} \frac{\log 2m}{2m} + \frac{2}{m}.$$

În cosecintă obținem

$$|f(x, y) - P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y)| \leq 3 \omega \left( C \frac{\log 2n}{2n} + \frac{2}{n}, C \frac{\log 2m}{2m} + \frac{2}{m} \right) \quad (7)$$

$$\text{unde } C = \frac{16\pi + 12}{3}.$$

Folosind definiția a doua a modului de continuitate, se obține

$$|f(x, y) - P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y)| \leq 2\omega(A_n, m)$$

unde

$$A_{n,m} = \sup_{\substack{x \in [-1, 1] \\ y \in [-1, 1]}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (|x - x_i| + |y - y_j|) (v_i(x) v_j(y)).$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x - x_i| v_i(x) v_j(y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |y - y_j| v_i(x) v_j(y) &\leq \frac{16\pi + 12}{3} \frac{\log 2n}{2n} + \frac{2}{n} + \\ &+ \frac{16\pi + 12}{3} \frac{\log 2m}{2m} + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

În felul acesta se obține evaluarea

$$|f(x, y) - P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y)| \leq 4 \omega \left( C_1 \left( \frac{\log 2n}{2n} + \frac{\log 2m}{2m} \right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \quad (8)$$

unde  $C_1 = \frac{8\pi + 6}{3}$

*Intvat în redacție la 9 decembrie 1965*

#### BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Asupra unei demonstrații a teoremei lui Weierstrass*. Bul. Institut. Pol. Iași, **V**, 1959.
2. L. Fejér, *Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermitische Interpolation*. Math. Anal., **102** (1930), pp. 707–725.
3. E. Moldovan, *Observații asupra unor procedee de interpolare generalizată*, Bul. Șt. Acad., 1954, **VI**, nr. 3.
4. N. Kryloff, *Sur quelques formules de l'interpolation généralisée*. Bull. des sc. math., **XLI** (1917), p. 309–320.
5. F. Olariu, *Asupra ordinului de aproximație prin polinoame de interpolate de tip Hermite-Fejér cu noduri cvadrupe*. (În curs de apariție în Analele Univ. Timișoara, nr. 3.)

#### О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОЧЛЕНОВ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ТИПА ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

(Резюме)

Пусть  $f(x, y)$  непрерывная функция на прямоугольнике  $D[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$  и  $F_{2n-1, 2m-1}(f; x, y)$  многочлен интерполирования Эрмита-Фейера с двойными узлами (1). Доказывается неравенство (3), где  $\omega(b_1, b_2)$  — модуль непрерывности функции  $f(x, y)$ , определяемый формулой (2).

В случае, если определяем этот модуль формулой (4), получается неравенство (5).

Во второй части работы рассмотрен многочлен типа Эрмита-Фейера, с четырёхкратными узлами  $P_{4n-1, 4m-1}(f; x, y)$  из (6) и даны два вычисления порядка приближения функции  $f(x, y)$  посредством этого многочлена, используя два определения модуля непрерывности. Получены, соответственно, неравенства (7) и (8).



## SUR L'ÉVALUATION DE L'ORDRE D'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES DE DEUX VARIABLES PAR DES POLYNÔMES D'INTERPOLATION DE TYPE HERMITE-FEJÉR

(R é s u m é)

Soit  $f(x, y)$  une fonction continue sur le rectangle  $D [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$  et  $F_{2m-1, 2m-1}(f; x, y)$  le polynôme d'interpolation d'Hermite-Fejér à noeuds doubles (1). On démontre l'inégalité (3), où  $\omega(\delta_1, \delta_2)$  est le module de continuité de la fonction  $f(x, y)$  défini par la formule (2).

Dans le cas où nous définissons ce module par la formule (4) on obtient l'inégalité (5).

Dans la seconde partie du travail on a considéré le polynôme d'Hermite-Fejér à noeuds quadruples  $P_{4m-1, 4m-1}(f; x, y)$  de (6) et l'on a donné deux évaluations de l'ordre d'approximation de la fonction  $f(x, y)$  par ce polynôme, en utilisant les deux définitions du module de continuité. On a obtenu respectivement les inégalités (7) et (8).



## TX COMAE BERENICES

de

IOAN TODORAN

Variația strălucirii stelei *TX Comae Berenices* a fost descoperită de B e l i a w s k i [1], în anul 1933, când a arătat că această stea este de tipul *RR Lyrae*, iar strălucirea variază între limitele 12,8 și 14,0 magnitudini fotografice.

În anul 1957, N. B. P e r o v a [2] publică 153 observații fotografice (evaluări pe plăci) din care determină momentele a 14 maxime și deduce următoarele elemente :

$$\text{Max.hel.} = \text{D. J. } 2435550,435 + 0;536470 . \text{ E}$$

La Observatorul astronomic din Cluj această stea a fost inclusă în planul de observații în urma sugestiilor primite din partea profesorului V. P. Tsesevich (Odesa). Astfel între 29. IV. 1959 și 24. VI. 1965 au fost obținute 164 expuneri pe plăci Isopan ISS fără filtru și 108 expuneri pe plăci Guilleminot. Aceste expuneri au fost efectuate, cu ajutorul reflectorului Newton (D = 50 cm. ; F = 250 cm.), de către colectivul de la Observatorul din Cluj (E. Botez 50%, I. Popa 16%, T. Oproiu 11%, I. Todoran 11% V. Ureche 8% și I. Mihoc 4%). Fazele au fost calculate de către E. Botez în proporție de 50%.

Pentru determinarea strălucirii stelei variabile, am efectuat citiri la microfotometrul fotoelectric MF 2, iar stelele de comparație au fost acelea utilizate de P e r o v a [2].

Magnitudinile stelelor de comparație sînt date în tabelul 1, unde în prima coloană se găsesc magnitudinile date de Perova iar în coloanele a 3-a și a 5-a se află magnitudinile corespunzătoare celor două domenii în care au fost efectuate observațiile la Cluj:  $m_{pr}$  pentru plăcile Isopan ISS fără filtru și  $m_{pg}$  pentru plăcile Guilleminot.

Observațiile individuale sînt date în tabelele 6 și 7, iar curbele medii obținute din acestea sînt date numeric în tabelele 2 și 3 și grafic în figurile 1 și 2.

Din examinarea curbelor de lumină rezultă limitele între care are loc variația strălucirii :

$$\begin{array}{lll} \text{Max.} = 13^m,19, & \text{min.} = 14^m,20 & \text{pentru plăcile Isopan ISS, și} \\ \text{Max.} = 13^m,37, & \text{min.} = 14^m,80 & \text{,, ,, Guilleminot.} \end{array}$$

Utilizând expresia asimetriei curbei de lumină în magnitudine

$$\xi = m_{\frac{1}{2}P} - \frac{1}{2} (m_{\max.} + m_{\min.}).$$

rezultă  $\xi = 0,41$  pentru plăcile Isopan ISS și  $\xi = 0,64$  pentru plăcile Guillemintot

Pentru asimetria curbei de lumină în timp

$$\zeta = \frac{\varphi_{\max.} - \varphi_{\min.}}{P}$$

rezultă:  $\zeta = 0,14$  pentru Isopan ISS și  $\zeta = 0,18$  pentru Guillemintot.

Din observațiile individuale date în tabelele 6 și 7, am determinat momentele a 16 maxime, iar din observațiile publicate de P e r o v a [2] am determinat momentele a 10 maxime, rezultatele fiind date în tabelul 4, unde  $\varepsilon$  reprezintă eroarea medie patrată a maximului respectiv.

Pentru determinarea momentelor maximelor am utilizat o metodă iterativă [3] care constă în aproximarea curbei de lumină prin funcția

$$y - \bar{y}_0 = \frac{\bar{a}(x - \bar{x}_0)^{\frac{2}{n}}}{\bar{b}(x - \bar{x}_0) + 1}$$

unde valorile aproximative ale mărimilor  $\bar{x}_0$  și  $\bar{y}_0$  se determină din graficul curbei de lumină iar celelalte constante se determină prin calcule. Ameliorarea acestor constante se face prin metoda celor mai mici patrate, scriind pentru fiecare punct din vecinătatea maximului câte o ecuație de forma

$$\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\bar{b}(x - \bar{x}_0)(n - 2) - 2}{\bar{n}(x - \bar{x}_0)[\bar{b}(x - \bar{x}_0) + 1]} \Delta x_0 - \frac{x - \bar{x}_0}{\bar{b}(x - \bar{x}_0) + 1} \Delta \bar{b} + \frac{\Delta y_0}{y_{\text{calc}} - \bar{y}_0} = \frac{0 - C}{y_{\text{calc}} - \bar{y}_0}$$

iar momentul maximului va fi

$$x_0 = \bar{x}_0 + \Delta x_0.$$

Maximele individuale au fost grupate în 9 maxime normale care sînt date în tabelul 5, unde mărimile  $0 - C_1$  sînt raportate la elementele date de P e r o v a [2].

Tabel 1

*	$m_{Pg.}$ (Perova)	$m_{Pg.}$ (Todoran)	$\varepsilon$	$m_{Pv.}$ (Todoran)	$\varepsilon$
a	13,48	13,24	$\pm 0,02$	12,64	$\pm 0,03$
b	14,10	13,93	,04	13,18	,03
c	14,51	14,50	,05	13,70	,03
d	14,76	14,79	$\pm 0,04$	14,22	$\pm 0,02$

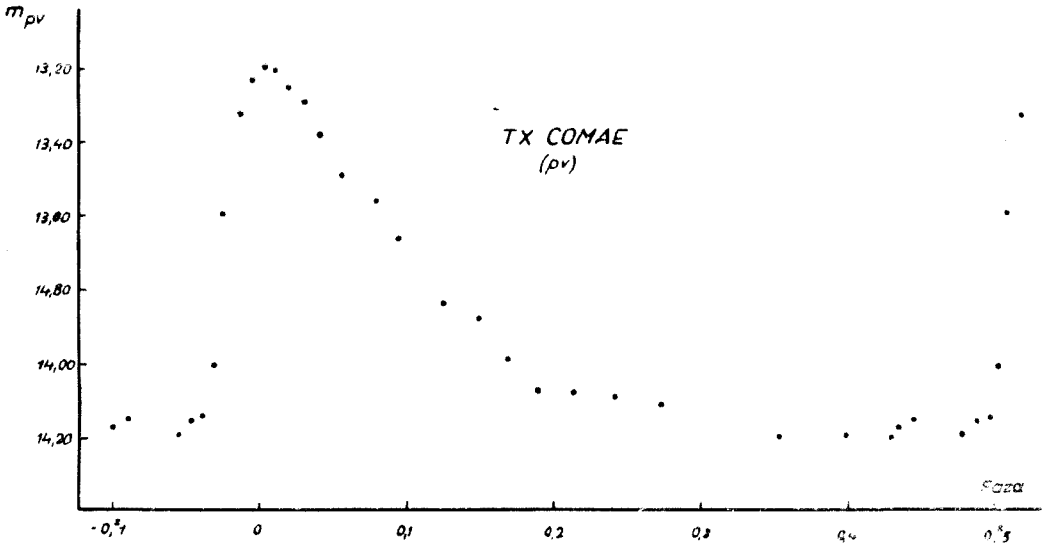


Fig. 1.

Tabel 2

Faza	$m_{pv}$	$n$
0,0050	13,19	6
,0134	13,20	6
,0206	13,25	6
,0313	13,29	6
,0418	13,38	6
,0574	13,49	6
,0784	13,56	6
,0964	13,66	6
,1255	13,84	6
,1488	13,88	6
,1701	13,99	6
,1880	14,07	6
,2134	14,08	5
,2434	14,09	6
,2740	14,11	6
,3542	14,20	6
,3991	14,19	6
,4284	14,20	6
,4358	14,17	6
,4457	14,15	6
,4804	14,19	6
,4894	14,15	6
,4966	14,14	6
,5034	14,00	6
,5118	13,59	6
,5229	13,32	5
,5308	13,23	5
0,5356	13,20	5

Tabel 3

Faza	$m_{pg}$	$n$
0,0047	13,38	4
,0080	13,42	4
,0154	13,43	4
,0259	13,51	4
,0340	13,58	4
,0423	13,70	4
,0508	13,73	4
,0628	13,79	4
,0827	13,91	4
,1003	14,09	4
,1359	14,41	4
,1715	14,55	4
,1954	14,67	4
,2350	14,70	4
,3720	14,74	4
,3990	14,67	4
,4112	14,70	4
,4266	14,68	4
,4402	14,76	4
,4576	14,79	4
,4665	14,70	4
,4739	14,68	4
,4862	14,72	4
,4986	14,28	4
,5075	14,02	4
,5165	13,67	5
0,5283	13,45	4

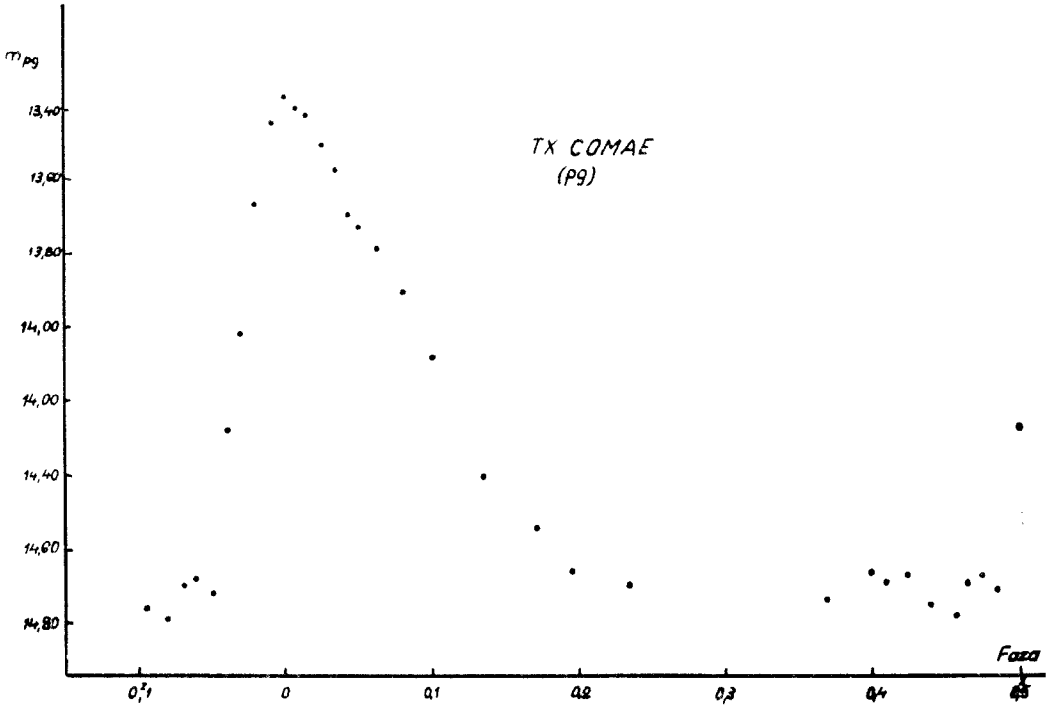


Fig. 2.

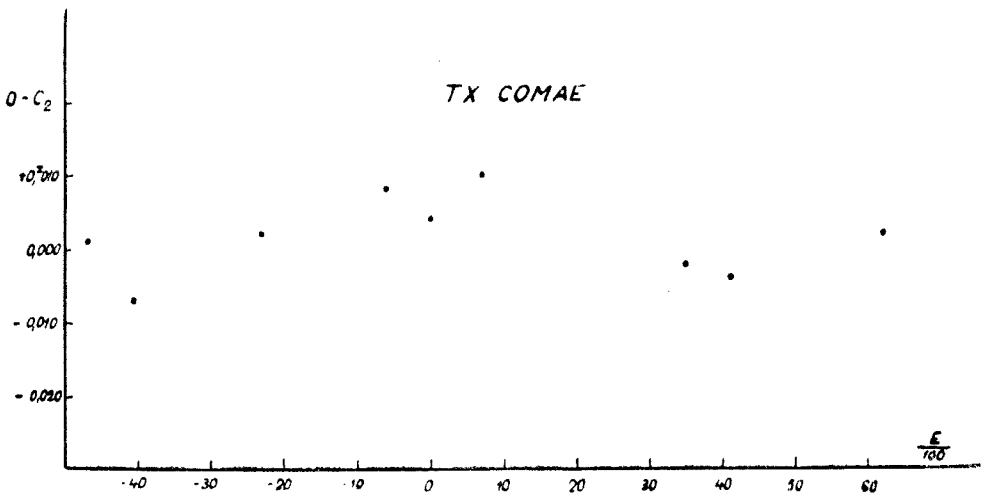


Fig. 3.

Tabel 4

Max. hel. 243...	$\varepsilon$	n	P	$0 - C_1$	E	Observa- tor	Felul observațiilor
3005,426	$\pm 0,010$	2	$\frac{1}{2}$	+0,005	-4744	Perova	Fotografic
3357,346	,007	4	$\frac{1}{2}$	+0,000	-4088	"	"
3358,407	,008	6	1	-0,012	-4086	"	"
3408,319	,002	2	$\frac{1}{2}$	+ ,009	-3993	"	"
4151,335	,003	2	$\frac{1}{2}$	+ ,014	-2608	"	"
4454,421	,003	3	$\frac{1}{2}$	- ,006	-2043	"	"
5219,440	,005	3	$\frac{1}{2}$	+ ,007	- 617	"	"
5550,437	,009	3	$\frac{1}{2}$	+ ,002	000	"	"
5924,369	,009	3	$\frac{1}{2}$	+ ,014	+ 697	"	"
5932,400	,017	2	$\frac{1}{2}$	- ,002	+ 712	"	"
7394,262	,010	2	$\frac{1}{2}$	- ,020	+3437	Todoran	Fotovizual
7404,475	,002	2	$\frac{1}{2}$	,000	+3456	"	"
7425,396	,004	4	1	- ,002	-3495	"	"
7432,3614	,0012	13	3	- ,011	+3508	"	"
7733,3167	,0016	11	3	- ,014	+4069	"	"
7779,4600	,0012	10	3	- ,008	+4155	"	"
7786,426	,005	5	1	- ,016	+4168	"	"
7793,408	,005	6	1	- ,008	+4181	"	"
7807,3564	,0014	7	2	- ,008	+4207	"	"
7808,422	,006	5	1	- ,015	+4209	"	"
8852,3962	,0008	10	3	- ,012	+6155	"	Fotografic
8876,541	,003	5	2	- ,008	+6200	"	"
8883,511	,002	7	2	- ,012	+6213	"	"
8889,4150	,0008	11	3	- ,009	+6224	"	"
8903,378	,003	5	1	+ ,005	+6250	"	"
8932,336	$\pm 0,003$	7	1	-0,006	+6304	"	"

Pentru amelioarea elementelor date de Perova [2], am scris pentru fiecare punct normal câte o ecuație de condiție de forma

$$\Delta T + \Delta P \cdot E = 0 - C_1$$

și am obținut astfel noile elemente

$$\text{Max.hel.} = D \cdot J \cdot 2435550,433 + 0,5364687 \cdot E$$

față de care sînt calculate diferențele  $0 - C_2$ .

Reprezentarea grafică a diferențelor  $0 - C_2$  este dată în fig. 3, de unde se vede că perioada stelei *TX Comae Berenices* are fluctuații periodice, însă numărul mic al maximelor observate pînă în prezent, nu permite o analiză amănunțită a acesteia.

Tabel 5

Max. hel. 243...	$\varepsilon$	n	P	$0 - C_1$	$0 - C_2$	E
3005,426	-	1	$\frac{1}{2}$	+0,005	+0,001	-4744
3374,509	$\pm 0,005$	3	1	- ,004	- ,007	-4056
4303,683	,010	2	1	+ ,004	+ ,003	-2324
5219,440	-	1	$\frac{1}{2}$	+ ,007	+ ,008	- 617
5550,437	-	1	$\frac{1}{2}$	+ ,002	+ ,004	000
5928,653	,008	2	1	+ ,007	+ ,010	+ 705
7414,660	,005	4	2	- ,008	- ,002	+3475
7784,285	,002	6	3	- ,011	- ,004	+4164
8889,416	$\pm 0,003$	6	3	-0,008	+0,002	+6224

## Plăci Isopan ISS

D. J. hel. 2437 . . . ,	$m_{pv}$	D. J. hel. 2437 . . . ,	$m_{pv}$	D. J. hel. 2437 . . . ,	$m_{pv}$
074,3628	14,24	425,4231	13,15	733,5256	14,12
,3732	14,23	432,3215	14,14	,5374	14,10
,3879	14,23	,3340	13,54	733,5450	14,13
,3948	14,22	,3423	13,32	779,3593	14,15
,4084	14,21	,3513	13,32	,3853	14,16
,4129	14,22	,3596	13,19	,3929	14,19
,4225	14,21	,3652	13,15	,4005	14,24
,4302	14,20	,3756	13,09	,4082	14,22
,4378	14,24	,3840	13,22	,4165	14,24
,4454	14,19	,3923	13,37	,4249	14,20
,4600	14,21	,4015	13,38	,4325	14,00
,4701	14,23	,4094	13,42	,4401	13,50
074,4843	14,14	,4173	13,45	,4533	13,33
085,5078	13,90	,4340	13,50	,4601	13,20
,5182	13,92	,4423	13,56	,4686	13,22
085,5390	13,95	,4506	13,75	,4763	13,32
369,3854	14,16	,4590	13,62	,4874	13,48
376,3991	14,12	,4673	13,70	,4950	13,41
,4092	14,20	,4756	13,72	,5026	13,32
,4293	14,12	,4909	13,90	,5145	13,50
,4415	14,14	,5027	14,12	779,5221	13,52
,4495	14,16	,5152	13,92	786,4290	13,15
,4648	14,26	,5286	13,91	,4518	13,10
,4724	14,12	,5367	13,95	,4594	13,32
,4800	14,07	432,5452	14,02	,4773	13,44
,4877	14,12	674,4976	14,11	786,4891	13,44
,5046	14,20	702,4362	14,20	793,3166	14,24
,5127	14,22	723,3774	14,26	,3389	14,14
,5203	14,14	,3892	14,22	,3521	14,22
,5283	14,22	723,3996	14,21	,3639	14,12
376,5363	14,24	733,2651	14,20	,3715	14,01
380,5322	13,90	,2739	14,23	,3791	13,66
394,2880	13,15	,2825	14,12	,3868	13,44
,2977	13,38	,2902	13,75	,3986	13,20
,4157	13,78	,3110	13,26	,4062	13,26
,4248	13,90	,3186	13,20	,4145	13,18
,4359	13,94	,3262	13,18	793,4222	13,30
,4449	14,12	,3339	13,10	807,3174	14,20
,4533	14,11	,3415	13,15	,3249	13,66
,4838	13,91	,3530	13,20	,3371	13,38
,4936	14,19	,3869	13,44	,3458	13,26
,5102	14,17	,3964	13,56	,3535	13,21
,5290	14,07	,4048	13,50	,3611	13,20
,5456	14,09	,4124	13,66	,3721	13,24
394,5707	14,12	,4207	13,76	,3874	13,26
404,5449	13,46	,4311	13,79	,3972	13,40
404,5588	13,54	,4395	13,70	807,4096	13,56
425,3022	14,13	,4478	13,80	808,3888	14,18
,3272	14,14	,4561	13,80	,3985	14,22
,3370	14,10	,4645	13,82	,4076	13,56
,3453	13,97	,4728	13,89	,4242	13,34
,3578	13,85	,4806	13,97	,4328	13,26
,3689	13,44	,4931	13,95	,4416	13,30
,3807	13,15	,5054	13,90	808,4673	13,39
,3932	13,11	,5155	14,11		



Tabel 7

## Plăci Guilleminot

D. J. hel 2438....,	$m_{pg}$	D. J. hel 2438....,	$m_{pg}$	D. J. hel. 2438....,	$m_{pg}$
845,3493	14,79	871,5934	14,66	889,4033	13,45
845,3577	14,82	871,6010	14,77	,4172	13,41
852,2914	14,70	876,3698	14,79	,4241	13,34
,3025	14,78	,3809	14,78	,4325	13,41
,3109	14,82	,3899	14,74	,4464	13,51
,3192	14,76	,3989	14,66	,4554	13,70
,3289	14,64	,4073	14,77	,4630	13,75
,3400	14,60	,4163	14,74	,4762	13,77
,3567	14,40	,4246	14,70	,4866	13,83
,3664	13,93	,5341	13,47	889,5138	13,83
,3747	13,60	,5441	13,34	903,3715	13,34
,3859	13,40	,5531	13,50	,3805	13,41
,3942	13,41	,5628	13,52	,4430	13,75
,4032	13,42	876,5726	13,54	,4513	13,92
4,129	13,50	883,3909	14,72	903,4596	13,94
,4338	13,65	,4083	14,66	930,3249	14,54
,4414	13,75	,4169	14,75	,3652	14,60
,4511	13,67	,4256	14,78	930,3749	14,83
,4616	13,70	,4340	14,79	932,3375	13,47
,4720	13,93	,4423	14,76	,3486	13,41
,4817	14,02	,4626	14,80	,3569	13,44
,4914	14,21	,4708	14,78	,5527	13,67
,5136	14,27	,4798	14,53	,3743	13,60
,5234	14,28	,4888	14,01	,3826	13,77
,5359	14,42	,4971	13,75	932,3917	13,80
,5456	14,43	,5062	13,47	934,3363	14,61
,5553	14,47	,5152	13,34	,3474	14,65
,5650	14,51	,5423	13,60	,3578	14,67
852,5900	14,59	,5527	13,67	,4113	14,78
858,4895	14,71	,5617	13,75	,4196	14,80
,4979	14,61	883,5701	13,73	,4280	14,77
,5055	14,76	889,3471	14,64	,4384	14,27
,5146	14,74	,3554	14,58	,4467	14,01
858,5222	14,69	,3700	14,52	934,4550	13,80
871,5357	14,68	,3832	14,48	936,3357	14,79
,5857	14,67	,3915	13,75	936,3461	14,55

Intrat în redacție la 15 martie 1966

## BIBLIOGRAFIE

1. Schneller H., *Geschichte und Literatur des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne*, II. Ausgabe, 5. Band, p. 260, Berlin 1960.
2. Perova N. B. *Peremennîe zvezdi*, **12**, p. 44, 1957.
3. Todoran I., *O metodă iterativă pentru determinarea momentelor maximelor și minimelor la stele variabile* (manuscris).

## TX COMAE BERENICES

( Р е з ю м е )

Даются результаты, полученные при обработке 164 фотографических экспозиций на пластинках *Isopan ISS* без фильтра и 108 фотографических экспозиций на пластинках *Guilleminet*. Были определены средние величины звезд сравнения, а также кривые блеска для соответствующих областей.

Из кривых блеска получены следующие пределы для вариации блеска:

Max. = 13<sup>m</sup>,19,    min. = 14<sup>m</sup>,20, для пластинок *Isopan ISS*

Max. = 13<sup>m</sup>,37,    min. = 14<sup>m</sup>,80, для пластинок *Guilleminet*

Из индивидуальных наблюдений определены моменты 16 максимумов и выявлена вариация периода. Для эфемериды даны элементы

Max. hel. = D.J.2435550,433 + 0<sup>s</sup>.5364687.E

Асимметричность кривых блеска подтверждает тип RR Lyrae этой звезды.

## TX COMAE BERENICES

( R é s u m é )

On présente ici les résultats obtenus en interprétant les 164 expositions photographiques sur plaques *Isopan ISS* sans filtre et les 108 sur plaques *Guilleminet*. On a déterminé les magnitudes des étoiles de comparaison et les courbes de lumière pour les domaines respectifs.

Des courbes de lumière résultent les limites suivantes pour la variation de l'éclat :

Max. = 13<sup>m</sup>,19    min. = 14<sup>m</sup>,20    pour les plaques *Isopan ISS*, et

Max. = 13<sup>m</sup>,37    min. = 14<sup>m</sup>,80    pour les plaques *Guilleminet*.

Les observations individuelles ont permis de déterminer les moments de 16 maxime et de mettre en évidence la variation de la période. Pour l'éphéméride on donne les éléments

Max. hel. = D.J. 2435550,433 + 0<sup>s</sup>.5364687. E

L'asymétrie des courbes de lumière confirme le type RR Lyrae de cette étoile.

# ASUPRA STRATULUI LIMITĂ TERMIC NESTAȚIONAR

de  
IOAN POP

1. Ecuațiile mișcării unui fluid vâcos incompresibil în stratul limită plan ce se formează în scurgerea plan-paralelă din jurul conturului unui corp, au forma [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{gc_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

cu condițiile la limită :

$$\left. \begin{array}{ll} u = v = 0 & \text{pentru } y = 0, \\ u \rightarrow U(x, t) & \text{pentru } y \rightarrow \infty; \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \text{pentru } y = 0, \\ T = T_\infty & \text{pentru } y \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (5)$$

În aceste ecuații  $U = U(x, t)$  este viteza mișcării potențiale,  $a = \frac{\lambda}{\rho g c_p}$  — coeficientul conductibilității termice,  $g$  — accelerația gravitațională iar  $\lambda, \rho, c_p$  și  $\nu$  — notații obișnuite pentru caracteristicile fizice cunoscute ale lichidului, pe care le vom considera constante.

Ecuațiile (1) — (2) cu condițiile la limită (4) au fost integrate de E. J. Watson [2] în cazul când viteza mișcării potențiale este de forma,

$$U(x, t) = At^m V(x) \quad \text{și} \quad U(x, t) = Ae^{nt} V(x), \quad (6)$$

$m$  și  $n$  fiind numere pozitive iar  $A$  o constantă.

Din ecuațiile (1) — (2) se observă că distribuția vitezei în stratul limită nestaționar nu depinde de câmpul temperaturii, în timp ce distribuția temperaturii depinde de câmpul vitezelor. Dar, cum pentru integrarea ecuațiilor (1) — (2) cu condițiile la limită (4), adică, pentru determinarea stratului limită dinamic nestaționar se folosește metoda aproximațiilor succesive [1, 3], aici ne propunem să rezolvăm

prin aceeași metodă ecuația (3) cu condițiile la limită (5) (problema termometrului), în ipoteza că  $U(x, t)$  are formele (6). Astfel, presupunem că

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t) + \dots, \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) + \dots, \\ T(x, y, t) &= T_1(x, y, t) + T_2(x, y, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La puțin timp după începerea mișcării din starea de repaus, în jurul corpului se formează un strat limită dinamic și un strat limită termic care sînt foarte subțiri. Datorită acestui fapt, în ecuația (3) împreună cu termenul  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , care caracterizează nestaționaritatea cîmpului temperaturii, termenii cei mai mari vor fi  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  (de ordinul  $\frac{1}{\delta_T^2}$ ) și  $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$  (de ordinul  $\frac{1}{\delta_d^2}$ ), unde  $\delta_T$  și  $\delta_d$  este grosimea stratului limită termic respectiv a stratului limită dinamic. Termenii convectivi  $u \frac{\partial T}{\partial x}$  și  $v \frac{\partial T}{\partial y}$  care sînt de ordinul unu se pot neglija în aproximația de ordinul unu. Prin urmare, pentru determinarea aproximațiilor de ordinul unu și doi ale cîmpului temperaturii  $T$ , din (3) ținînd seamă de (7), se obține pentru funcțiile  $T_1$  și  $T_2$  sistemul de ecuații:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} &= \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} &= \frac{2\nu}{g c_p} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} - v_1 \frac{\partial T_2}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

iar condiții la limită (5) devin,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0 && \text{pentru } y = 0, \\ T_1 = T_\infty, T_2 &= 0 && \text{pentru } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

**2. Cazul**  $U(x, t) = At^m V(x)$ . În acest caz, aproximația de ordinul unu a vitezei este [2],

$$u_1 = At^m V [1 - 2^{2m} \Gamma(m+1) g_m], \quad (10)$$

unde  $\Gamma$  — funcția gama,

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{at}}$  — variabilă adimensională,

$$g_m(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(2m+1)} \int_{\eta}^{\infty} (x - \eta)^{2m} e^{-x^2} dx.$$

Pentru simplificarea problemei, vom presupune că numărul lui Prandtl  $\sigma = \frac{\nu}{a} = 1$ , caz întîlnit des în problemele practice. Dacă notăm prin  $T_{11}(x, y, t)$  soluția aproximației de ordinul unu a temperaturii, atunci, din (8) și (9), ținînd seamă de (10), obținem ecuația

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial y^2} = 2^{2m} A^2 \Gamma^2(m+1) \frac{t^{2m-1} V^2}{4g c_p} g_{m-1/2}^2 \quad (11)$$

care va trebui rezolvată cu condițiile la limită

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } y = 0; \quad T_{11} = T_{\infty} \quad \text{pentru } y \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Introducînd în locul lui  $T_{11}$  funcția  $f_{11}(\eta)$  definită astfel

$$T_{11} = T_{\infty} + A^2 \frac{v^{2m} V^2}{g c_p} f_{11}(\eta), \quad (13)$$

atunci, din (11) și (12) rezultă, pentru determinarea funcției  $f_{11}$ , ecuația

$$f_{11}'' + 2\tau_1 f_{11}' - 8mf_{11} = -2^{4m} \Gamma^2(m+1) g_m^2 v_{1/2}^2, \quad (14)$$

$$f_{11}(0) = f_{11}(\infty) = 0, \quad (15)$$

a cărei soluție este

$$f_{11} = -2^{4m-1} \Gamma^2(m+1) g_m^2 v_{1/2}^2 + C g_{2m}, \quad (16)$$

unde

$$C = 2^{4m} \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(m+1/2)}.$$

Temperatura corpului va fi

$$T_{1c} = T_{\infty} + A^2 \frac{v^{2m} V^2}{g c_p} f_{11}(0), \quad (17)$$

unde

$$f_{11}(0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma(m) \Gamma(2m+1/2)}{\Gamma(2m) \Gamma(m+1/2)} - 1 \right].$$

În cazul mișcării impulsive ( $m = 0$ ), din (16) se găsește rezultatul dedus în [4],

$$f_{11}(\eta) = \frac{1}{2} [1 - \text{erf}^2 \eta]. \quad (18)$$

**3. Cazul**  $U(x, t) = A e^{nt} V(x)$ . În acest caz aproximațiile de ordinul unu și doi ale vitezei sînt [2]:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A e^{nt} V(1 - e^{-\eta}), \\ v_1 &= -A \sqrt{\frac{v}{n}} V' e^{nt} [\eta - 1 + e^{-\eta}], \\ u_2 &= A^2 \frac{V V'}{n} e^{2nt} [e^{-\sqrt{2}\eta} + (\eta - 1)e^{-\eta}]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Notînd prin  $T_{12}$  soluția aproximației de ordinul unu a temperaturii, atunci, din (8), rezultă ecuația:

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial y^2} = A^2 \frac{n V^2}{g c_p} e^{-2\tau_1} \cdot e^{2nt}, \quad (20)$$

care trebuie integrată cu condițiile la limită

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0 \text{ pentru } y = 0; \quad T_{12} = T_{\infty} \text{ pentru } y \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Dacă punem

$$T_{12} = T_{\infty} + A^2 \frac{nV^2}{gc_p} e^{2nt} f_{12}(\eta), \quad (22)$$

atunci, pentru funcția  $f_{12}$ , se obține ecuația :

$$f_{12}'' - 2f_{12} = -\frac{1}{n} e^{-2\eta}, \quad (23)$$

$$f_{12}'(0) = f_{12}(\infty) = 0, \quad (24)$$

a cărei soluție este

$$f_{12}(\eta) = \frac{1}{2n} [\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}\eta} - e^{-2\eta}]. \quad (25)$$

Temperatura corpului este dată de formula

$$T_{1c} = T_{\infty} + A^2 \frac{V^2}{2gc_p} [\sqrt{2} - 1] e^{2nt}. \quad (26)$$

Acum se poate scrie ecuația pentru aproximația de ordinul doi. Astfel, din (8) ținând seamă de (19), (22) și (25), se obține

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial y^2} = A^3 \frac{V_2 V'}{gc_p} e^{3nt} [(4 - \eta)e^{-2\eta} - (\sqrt{2} + 1)e^{-(\sqrt{2}+1)\eta} - (\sqrt{2} - 1 + \eta)e^{-\sqrt{2}\eta}], \quad (27)$$

a cărei soluție o căutăm în forma :

$$T_{22} = nA^3 \frac{V_2 V'}{gc_p} e^{3nt} f_{22}(\eta). \quad (28)$$

Atunci, din (27) și (8) rezultă :

$$\left. \begin{aligned} f_{22}'' - 3f_{22} &= (\eta - 4)e^{-2\eta} + (\sqrt{2} + 1)e^{-(\sqrt{2}+1)\eta} + (\sqrt{2} - 1 + \eta)e^{-\sqrt{2}\eta}, \\ f_{22}'(0) &= f_{22}(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Rezolvînd ecuația (29) se găsește :

$$f_{22}(\eta) = -\frac{12 + 7\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\eta} + \eta e^{-2\eta} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} e^{-(\sqrt{2}+1)\eta} + (\sqrt{2} + 1 - \eta)e^{-\sqrt{2}\eta}. \quad (30)$$

Temperatura corpului este

$$T_{2c} = nA^3 \frac{V_2 V'}{gc_p} e^{3nt} f_{22}(0), \quad (31)$$

unde

$$f_{22}(0) = \frac{15\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 7\sqrt{6} + 18}{12} \approx 0.1651.$$

În acest fel, temperatura în stratul limită nestaționar din jurul corpului și temperatura corpului, sînt date de formulele:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_{12} + T_{22} = T_{\infty} + A^2 \frac{nV^2}{gc_p} [f_{12}(\tau) + AV'e^{nt}f_{22}(\tau)]e^{2nt}, \\ T_c &= T_{1c} + T_{2c} = T_{\infty} + A^2 \frac{nV^2}{gc_p} [f_{12}(0) + AV'e^{nt}f_{22}(0)]e^{2nt}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

*Intrat în redacție la 2 septembrie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. New York, 1962.
2. E. J. Watson, *Boundary Layer Growth*. Proc. Roy. Soc., A, 231, No. 1184, 104—116 (1955).
3. L. G. Loițianșkii, *Laminarnii pograničnii sloi*. Moskva, 1962.
4. V. D. Georgevici, *Opređenie nestaționarnogo temperaturnogo polia pri ploșkom obtekanii kontura proizvolnoi formi*. Publications de l'Institut Mathématique, Belgrade, 5 (15), 99—114(1965).

#### О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕРМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

(Резюме)

В статье определены первые два приближения температурного поля в нестационарном термическом пограничном слое, которое образуется в плоско-параллельном течении вокруг контура тела, когда скорость потенциального движения имеет форму:

$$U(x, t) = At^m V(x) \quad \text{и} \quad U(x, t) = Ae^{nt} V(x).$$

Уравнение (3), с граничными условиями (5) (проблема термометра) решено методом последовательных приближений [1,3].

Для поля температуры в пограничном слое и для температуры тела установлены формулы (13), (17) и (32).

#### ON THE UNSTEADY THERMAL BOUNDARY LAYER

(Summary)

The author determines the first two approximations of the temperature field in the unsteady thermal boundary layer which is formed in the plan-parallel flow round a body, when the velocity of the potential motion is of the following form

$$U(x, t) = At^m V(x) \quad \text{and} \quad U(x, t) = Ae^{nt} V(x).$$

The equation (3) with the boundary conditions (5) (the thermometer problem) is solved out using the successive approximation method [1,3].

For the temperature field, as well as for the temperature of the body the formulae (13), (17) and (32) are established.





## INTRODUCEREA MECANICII LUI NEWTON ÎN ROMÂNIA

de

VICTOR MARIAN

Se cunoaște cotitura mare pe care a luat-o mecanica în urma apariției *Principiilor* lui Newton în 1687. De asemenea, se știe cu câtă greutate s-a răspândit mecanica newtoniană în Europa. Piedica cea mai mare a fost rezistența pe care a opus-o pe de o parte fizica lui Descartes, atrăgătoare și intuitivă, și pe de alta forma matematică concisă și greoaie în care era îmbrăcată mecanica lui Newton. O piedică importantă în această privință a fost lipsa de precizie a unor noțiuni fundamentale, cum este noțiunea de forță, imprecizie augmentată prin introducerea de către Leibniz a forței moarte și forței vii. Opoziția mecanicii carteziene față de mecanica lui Newton s-a manifestat și în țara noastră.

Pînă în secolul al XVII-lea, se preda la noi, ca și în celelalte țări din Europa, fizica lui Aristotel, în cadrul filozofiei aristotelice. La București și Iași se învăța această fizică după cursurile de filozofie ale lui Teofil Coridaleu (1565—1646), care a dus din Italia în Orient filozofia neoaristotelică sau alexandrină. În Transilvania, la Alba Iulia, se preda de către J. H. Bisterfeld fizica peripateticiană a scolasticii.

Fizica lui Descartes a pătruns, nu fără oarecare opoziție, mai întîi în Transilvania. Promotorul ei a fost Apáczai Cserei János (1625—1659), atît prin lecțiile sale ținute la Alba Iulia și Cluj, cît și prin cartea sa *Magyar Encyclopaedia* din 1655. Exemplul lui Apáczai a fost urmat de Enyedi Sámuel la Aiud și Raposi Sámuel la Tîrgul Mureș, care predau această fizică după cartea lui Regius *Fundamenta physices*, din 1646.

Primele manuale didactice de fizică din Transilvania, tipărite în secolul al XVII-lea sînt scrise tot în spirit cartezian, deși încep să-l amintească și pe Newton. Un astfel de manual este *Physica contracta juxta principia newtonicorum*, a lui Szathmári Mihály, profesor la Tîrgul Mureș, tipărită la Cluj în 1719. Menționînd ideile lui Newton, autorul scrie: „Ilustrul I. Newton se trudește să demonstreze că ipoteza vîrtejurilor, care antrenează planetele în mișcările lor, este infirmată de fenomenele astronomice, și nu duce la explicarea mișcărilor cerești, ci la încurcarea lor“. El conchide că „în acest fel dl. Newton le răstoarnă pe toate“.

Un alt manual de fizică în sens cartezian este *Institutiones philosophiae naturalis dogmatico-experimentalis*, a lui M. Vásárhelyi Tóke István, profesor la Colegiul reformat din Aiud, tipărită la Sibiu în 1736. În Prefața cărții, Tóke se declară cartezian, scriind: „În tratarea acestei nobile... științe, nu am urmat

alte principii decât cele mecanice, în special acelea pe care le-a stabilit în filozofia naturală ingeniosul și incomparabilul filozof al epocii sale, Descartes, prin silința sa, după ce a înlăturat-o pe a celor vechi“. El cunoaște însă și pe Newton și Leibniz, pe care îi amintește spunînd: „Nu-mi sînt necunoscute principiile celor mai noi fie ale lui Newton, fie ale lui Leibniz și ale altora“. Trece apoi la combaterea vidului: „Căci unde este vid în lume? Unde este propriu-zis atracția? Unde este forța de acțiune și tendința nu știu cărei materii înfiptă în natură?“ De asemenea, amintește de „noua cauză a mișcărilor planetelor pe orbite eliptice a ilustrului Newton“.

Caracteristice pentru starea fizicii din Țrnsilvania în secolul XVIII-lea sînt lecțiile lui Verestői György: *Institutiones physicae*, din 1755, ținute la Colegiul reformat din Cluj, și rămase în manuscris. Verestői este cartezian și lecțiile sale sînt inspirate de manualele lui Wolff. El a consultat însă și alți autori, și le citează părerile. Astfel, după ce enunță legea inerției după Descartes, Verestői enunță această lege în formularea lui Newton: „Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrîns să-și schimbe starea de forțe le imprimare“.

Verestői propune următoarele legi ale mișcării:

„1. Un corp întîlnind un alt corp mai tare nu pierde nimic din mișcarea sa, c numai se reflectă în altă parte, iar dacă se întîlnește cu unul mai slab pierde atîta cît transmite celuiui“. Aceasta este legea a treia a lui Descartes.

„2. Variația mișcării este proporțională cu forța motoare“. Aceasta este legea a doua a lui Newton. Apoi, Verestői se întrebă: „Oare tocmai așa de important este ceea ce adaugă Newton, și anume: Variația mișcării are loc după linia dreaptă în care se imprimă acea forță?“ El menționează că Wolff enunță această lege puțin diferit, dîndu-i formularea: „Corpurile fiind împinse de altele, reacționează și anume în raport cu masa și viteza celui împingător“. În acest fel s-a introdus, sub influența lui Wolff, în manuale, măsura forței ca produs al masei cu viteza. Ea avea să dănuiască pînă la sfîrșitul secolului XIX.

„3. Acțiunii îi este totdeauna egală și contrară reacțiunea sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale și îndreptate în sensuri contrare“. Aceasta este legea a treia a lui Newton.

Verestői consideră aceste trei legi ca legi de categoria întii, spre deosebire de cele de categoria a doua, care nu sînt sigure, cum este legea a doua a lui Descartes, potrivit căreia un corp tinde să-și păstreze direcția mișcării dacă este singur.

În 1774, profesorul Kovács József de la Colegiul reformat din Cluj a publicat un manual latinesc intitulat *Elementa philosophiae naturalis*, tradus după *Naturlehre* a lui Krüger, profesor la Halle. Cartea lui Krüger apăruse între 1740 și 1749 în mai multe ediții. Ea este de asemenea un amestec de fizică carteziană și newtoniană. Astfel, definiția corpului este după Descartes, iar legea I și III a mișcării după Newton. Legea II sună astfel: „Mișcarea este totdeauna proporțională cu forțele de care este produsă“. La legea III întîlnim observația: „Reacțiunea nu este egală cu acțiunea întregului corp, ci numai cu partea de acțiune ce acționează asupra celuiialt corp. Acestei legi i se supune nu numai presiunea și impulsul, ci și reacțiunea“. Se face, după Leibniz, distincție între forța vie și cea moartă. Cea moartă se măsoară prin produsul masei cu viteza cea vie prin produsul masei cu pătratul vitezei. Gravitația nu se poate datorî apăsării unui fluid, cea mai apropiată de adevăr e ipoteza că Pămîntul atrage corpurile din jurul său după cum magnetul atrage fierul. Dar nu numai Pămîntul atrage corpurile, ci și „un corp atrage pe altul, dacă produce în acela tendința de a se

apropia de el". Există însă și respingere. Atracția și respingerea pot trece una în alta. Urmează remarca: „Dar vei spune, noi nu concepem în ce fel poate trece forța atractivă numai datorită distanței în una repulsivă? Nici eu. Totuși o văd.“

Un caracter mai newtonian prezintă manualul lui Nichifor Theotokis, profesor la Academia Domnească din Iași, tipărit în grecește cu titlul *Stoicheia physices*, la Leipzig, în două volume, în 1775—1776.

În prefața primului volum Theotokis anunță: „Pentru a explica fenomenele respectăm cele trei reguli ale lui Newton, pe care le iau în considerare și le respectăm întocmai toți filozofii adevărați în mod benevol“. Privitor la gravitația universală scrie: „Forța care atrage corpurile unul spre celălalt se numește atracție... Forța de atracție aparține tuturor corpurilor. În adevăr se demonstrează că se atrag între ele cele solide și lichide. De asemenea solidele și lichidele se atrag reciproc“. Aceste exemple ilustrează în deajuns newtonianismul lui Theotokis.

Teodor Stamatii, profesor la Iași, care studiasse la Viena, a prelucrat pentru elevii săi, după F. Kries, o *Fizică elementară*, tipărită la Iași în 1849. După ce enunță principiul inerției, trece la problema forței sau a puterii. Deși introduce noțiunea de accelerație, totuși măsoară forța cu ajutorul cantității de mișcare exprimând legea a doua sub forma: „Puterea ce mișcă pe un trup poate să-i dea o reperiune cu atîta mai mare, cu cît mai mică masă are trupul. . . Așadar din raportul puterilor ce făptuiesc asupra unor trupuri, și din raportul maselor acelor trupuri se poate afla raportul reperiunilor lor“. După ce dă un exemplu numeric, ca să exemplifice cele de mai sus, Stamatii introduce noțiunea de „făptuire“ și scrie:

„O putere ce mîină un trup îi împărtășește prin aceasta destoinicia să producă o făptuire ce-i proporțională cu mărimea puterii ce l-au mișcat. Puterea însă se arată în trup prin o reperiune împărtășită mesei lui. Așadar și făptuirea unui trup trebuie să atîrne de *la reperiunea și de la masa lui*; drept care din raportul reperiunilor a două trupuri și din raportul maselor lor se poate afla raportul făptuirilor lor“.

„Făptuirea produsă de un trup în puterea reperiunii și a masei sale se numește mărimea mișcării sale“.

Principiul acțiunii și reacțiunii la Stamatii este înlocuit cu principiul cantității de mișcare:

„Făptuind un trup asupra altuia, perde acela pe atîta din puterea sa, pre cît el împărtășește acestuia, încît s-ar pute zice că aice puterea trece dintr-un trup în altul. Micșurarea în putere ce suferă trupul făptuitoriu se numește *contrafăptuirea* altui trup asupra celui făptuitoriu; drept care se zice că *contra-făptuirea ar fi pururea egală făptuirii*, adică un trup perde pe atîta din puterea sa, precît împărtășește altuia“.

B. Naniănu, în cartea sa *Elemente de physica experimentale, pentru învățămîntul secundariu de ambele sexe — cursu inferior*, București 1863, definește forța corect, și principiul inerției mai puțin corect, dar nu se ocupă nici cu legea a doua, nici cu a treia a lui Newton. În schimb se ocupă cu compunerea forțelor, arătînd cum se construiește *paralelogramul forțelor*.

E. Bacalogo, în *Elemente de fizică* din 1870, dă o definiție a inerției, care ne aduce aminte de prima lege a lui Descartes: „Inerția este o proprietate ce are materia și corpurile de a nu-și putea schimba pozițiunea și starea în care se află, fără influența vreunei puteri streine. În virtutea inerției un corp perzistă în forma și starea de agregățiune a lui și numai prin efectul căldurii sau al unei alte puteri poate fi modificat“.

El admite următoarele axiome :

„1. că două puteri sînt proporționale cu masele corpurilor, cărora le comunică iuțeli egale.

2. două puteri sînt proporționale cu iuțelile date la două corpuri de aceeași masă.

3. două puteri sînt proporționale cu produsele maselor cu iuțelile corpurilor puse în mișcare“.

Legea a treia a mișcării nu e menționată. În locul ei întîlnim și aici legea compunerii forțelor, pe care Bacaloglo o consideră drept axiomă.

P e t r e P o n i, în *Elemente de fizică*, ed. III, Iași, 1887, dă aceeași definiție neprecisă a inerției ca și autorii precedenți : „Inerție se numește proprietatea ce au corpurile de a nu-și schimba nici starea de repaus, nici starea de mișcare, fără ajutorul unei puteri“.

A. A b t, profesor la Cluj, în *Manualu de fizică* tradus în românește de profesorii Iosif Hossu și Emil Viciu, tipărit la Blaj în 1891, exprimă în fine corect legea inerției cînd scrie : „Legea aceasta se poate exprima după Galilei în modul următor : *un corp care se află în repaus nu se poate mișca fără de influența vreunei puteri externe și dacă asupra unui corp ce se mișcă nu lucră nici o putere, el își continuă mișcarea în aceeași direcție și cu aceeași celeritate*“. Iar mai departe : „Newton a exprimat această lege mai scurt : corpurile ce se află în repaus sau în mișcare își păstrează statul în care se află, pînă ce nu-l schimbă o putere externă“. Aici însă Abt uită să precizeze, cum face Newton, că e vorba de mișcare uniformă în linie dreaptă.

Masa o definește Abt drept cantitatea de materie ce o are un corp, apoi amintește că puterea se măsoară prin produsul dintre masă și accelerație — după Newton. El însă introduce și noțiunea de cantitate de mișcare și stabilește relația  $mv = pt$ , fără a da nume expresiei  $pt$ , numită azi impuls. Precizează apoi că dacă o putere  $p$ , acționînd un timp  $t$  asupra unei mase  $m$  îi comunică o cantitate de mișcare  $mv$ , iar o putere  $p_1$ , acționînd asupra masei  $m_1$ , într-un interval de timp egal cu cel dintîi îi imprimă cantitatea de mișcare  $m_1v_1$ , din relațiile  $pt = mv$  și  $p_1t = m_1v_1$ , prin împărțire obținem :

$$\frac{pt}{p_1t} = \frac{mv}{m_1v_1}, \text{ deci } \frac{p}{p_1} = \frac{mv}{m_1v_1}$$

De aici, A b t trage concluzia că „puterile sînt proporționale su produsele din mase și celerități. Cu productul dintre masă și celeritate însă se poate măsura o putere, și productul acesta se numește cantitate de mișcare“. Remarcăm că în această carte nu întîlnim noțiunea de dimensiune.

Abt mai consideră legea a II a lui Newton și ca „*principiulu că acțiunea puterii e constantă*, după care o putere acționează chiaru în acela-și modu asupra unuiu corpu ce se află în mișcare, ca și asupra unuia ce e în repausu. Al treilea principiu spune: fie care acțiune produce o reacțiune egală și îndreptată în direcțiune contrariă“.

D. N e g r e a n u, în cartea sa *Curs de fizică* profesat la Facultatea de științe din București, tipărit în 1908, afirmă că : „dinamica se bazează pe două principii : 1. principiul inerției ; 2. principiul mișcărilor relative“. Apoi continuă, după Descartes :

„Principiul inerției. Acest principiu cuprinde două părți : a) *un punct material în repaus va rămînea totdeauna în repaus dacă nici o putere exterioară nu va lucra asupra lui ; b) dacă punctul material se mișcă și dacă nici o putere exterioară nu lucrează asupra lui, mișcarea punctului material este uniformă și rectilinie*“. Urmează :

„Principiul mișcărilor relative. *Mișcarea relativă a corpului este independentă de mișcarea de translație a sistemului de corpuri*; această mișcare este aceeași ca și cum sistemul de corpuri ar fi în repaus.

Principiul mișcărilor relative este cunoscut și sub numele de *principiul independenței efectelor puterilor*“.

Cunoscând aceste principii, Negreanu demonstrează următoarele teoreme: „O putere constantă în mărime și direcțiune, lucrînd asupra unui punct material, îi imprimă o mișcare rectilinie uniform variată“. A doua este paralelogramul forțelor: „Dacă două puteri constante  $P$  și  $P'$  lucrează de o dată și în aceeași direcțiune asupra unui punct material, accelerațiunea mișcării este suma accelerațiunilor produse de fiecare din acele puteri“. Legea III a lui Newton nu e amintită.

Din cele de mai sus se poate vedea cît de greu a pătruns în România mecanica newtoniană și mai ales cît de dificilă a fost formularea corectă a legilor fundamentale ale dinamicii. A contribuit la aceasta lipsa de precizare a unor noțiuni ca: impuls, energie etc., abia după introducerea cărora a putut fi înlăturată folosirea termenilor echivoci de: putere, forță moartă și forță vie, ca măsură a forței. Învălmășeala aceasta de noțiuni și de termeni a durat timp de două secole, nu numai la noi, ci în general în manualele didactice din Europa, în detrimentul învățămîntului și al dezvoltării mecanicii.

*Intrat în redacție la 15 octombrie 1966*

## ВВЕДЕНИЕ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА В РУМЫНИИ

(Резюме)

В работе показано как медленно проникла механика Ньютона в Румынию. В Трансильвании она должна была бороться с механикой Декарта, а в Румынских княжествах — с механикой Аристотеля, представленной Коридалеу.

В Трансильвании учебник физики М. Сатмари (1719), учебник И. Тёке (1736) и лекции Дь. Верештон (1755) написаны в картезианском духе, в то время как учебник Й. Ковача (1774) является смесью картезианской и ньютоннианской физики. Более усиленным ньютоннианским характером отличается двухтомный учебник Н. Теотокиса, изданный на греческом языке в Лейпциге в 1766—1767 гг., а также учебник Т. Стамати, напечатанный на румынском языке в 1849 г.

Наконец, посредством учебника Б. Наняну (1863), Е. Бакалогу (1870), П. Пони (1887), А. Абта, переведенного на румынский язык А. Хоссу и Е. Вичу в 1891 г., и курса Д. Неграну (1908), ньютоннианская механика укоренилась во всей Румынии.

## L'INTRODUCTION DE LA MÉCANIQUE DE NEWTON EN ROUMANIE

(Résumé)

L'auteur montre dans son travail combien la mécanique de Newton a pénétré lentement en Roumanie. En Transylvanie elle a dû lutter avec la mécanique de Descartes, et dans les Principautés Danubiennes avec la mécanique aristotélique représentée par Coridaleu.

En Transylvanie, le manuel de physique de Szathmáry M. de 1719, celui de Töke I. de 1736 et le cours de Verestói Gy. d'environ 1755 sont écrits dans l'esprit cartésien, tandis que celui de Kovács I. de 1774 est un mélange de physique cartésienne et newtonienne. On trouve un caractère newtonien plus prononcé dans le manuel de N. Theotokis, publié en grec à Leipzig en 2 vol., en 1766—67, ainsi que dans celui de T. Stamati, imprimé en roumain en 1849.

Enfin, avec le manuel de B. Naniánu en 1863, de E. Bacaloglu en 1870, de P. Poni en 1887, de Abt A. traduit en roumain par A. Hossu et E. Viciu en 1891, et le cours de P. Negreanu en 1908, la mécanique newtonienne est adoptée partout en Roumanie.




## ELEMENTE DE FIZICĂ ALE LUI EMANOIL BACALOGLU

de  
MARIA POPESCU

Avînd în vedere interesul deosebit pe care îl prezintă cunoaşterea trecutului cultural din ţara noastră, vom prezenta în cele ce urmează *Elemente de fizică* ale lui E. Bacaloglu, unul din primele manuale româneşti de fizică şi primul care se detaşează ca avînd un net caracter de manual universitar.

*Elementele de fizică* ale lui E. Bacaloglu reprezintă, aşa după cum însuşi o spune în prefaţă, cursul predat de el timp de mai mulţi ani la Universitatea din Bucureşti. Manualul este destinat : „atatu pentru unu studiu privatu catu şi pentru scole secundare, precum şi pentru studiulu academicu“. Manualul a apărut în două ediţii, prima în 1870 iar a doua în 1888, de format 8°, ediţia I-a în 471 pagini iar ediţia II-a în 564 pagini. În ansamblu ediţia a II-a reproduce prima ediţie. Avînd însă în vedere că cunoştinţele de fizică s-au îmbogăţit după apariţia primei ediţii, Bacaloglu o completează în special în capitolele destinate luminatului electric şi spectroscopiei. Lucrarea este împărţită în şapte secţiuni şi anume : „I. Gravitate, II. Cele trei stări de agregatiune ale corpurilor, III. Magnetismu, IV. Electricitate, V. Căldura, VI. Acustica, VII. Optica seu teori'a luminei“.

La întocmirea lucrării Bacaloglu a folosit un vast material bibliografic care cuprinde cursuri, manuale, lucrări ştiinţifice şi reviste de specialitate în limbile franceză, germană şi engleză. O caracteristică importantă a manualului este faptul că prezintă realizările cele mai recente ale fizicii, ceea ce dovedeşte intensa pre-



ELEMENTE  
DE  
F I S I C A

DE  
E. BACALOGLO  
PROFESORE LA UNIVERSITATEA BUCURESCA

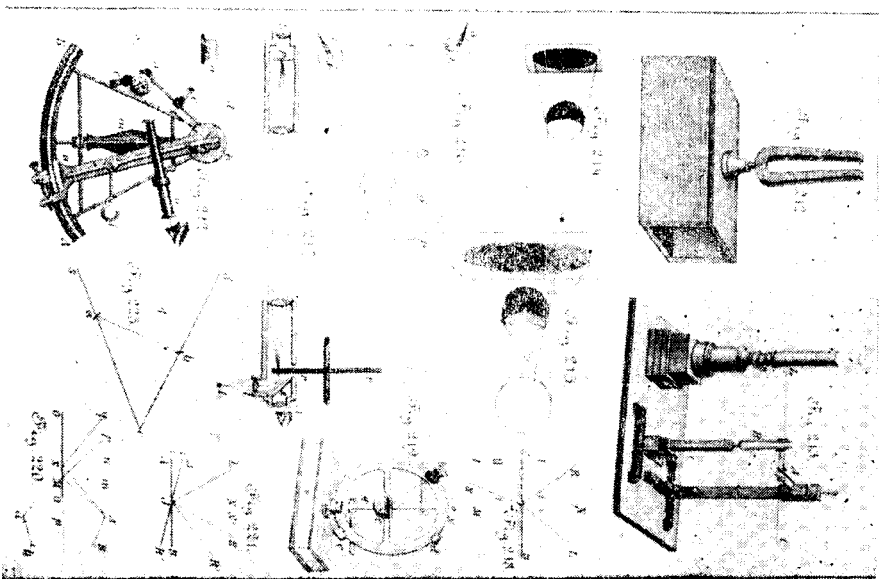
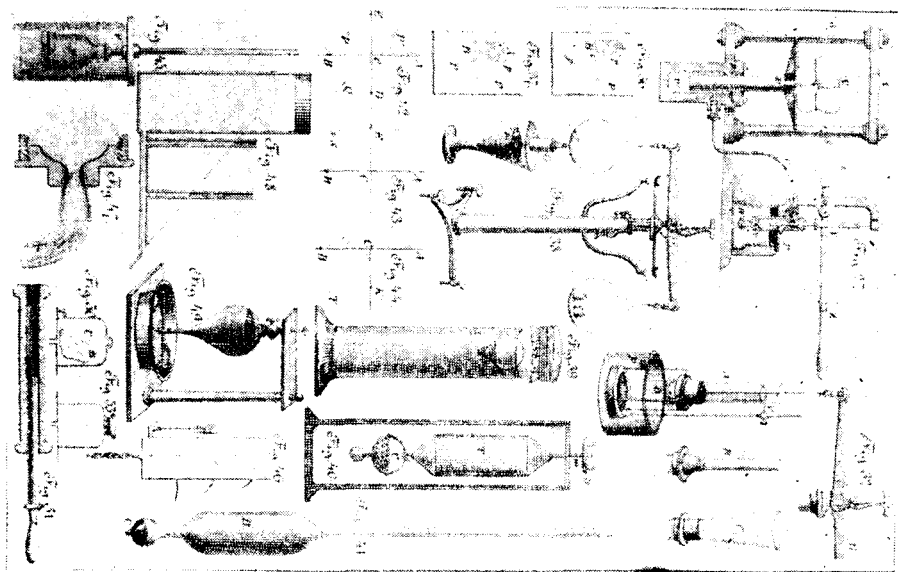


PENTRU USULU SCOLELORU SECUNDARE SI SUPERIORE

SI PENTRU STUDIUL PARTICULARU



BUCURESCI  
TYPOGRAPHIA CURTHI (LUCRATORII ASSOCIATI)  
12, PASAJULU ROMANCI, 12  
1870





ocupare a autorului pentru dezvoltarea acestei științe și susținuta sa documentare.

În „Introducere” Bacaloglu arată că fizica are ca obiect studiul naturii, făcînd următoarea clasificare a științelor: „Natur'a în genere o putem studia seu sub punctulu de vedere alu simplei descrițiuni a objectelor ce se afla într'ensa, si sciinti'a ce se ocupa cu acesta s'a numitu *Istoria naturala*, în care pote fi cuprinsa si Geografia fisica, Geologi'a etc; seu ne putemu propune sa cunoșcemu fenomenele ce se petrecu în natura si legătur'a causală a lor, ceace constituie *Sciintiele naturale* seu *fisice* propriu dișe, cari cuprindu mai multe ramuri, din cari cele mai principale suntu: Mecanic'a, Astronomi'a, Fisie'a, Chimi'a, Fisiologi'a etc”. Arată apoi că fizica a fost numită de către învățații englezi și: „Filosofia naturala si se ocupa cu proprietățile generale ale corpurilor seu ale materii si cu fenomenele generale, întru catu acestea nu alteredia într'unu modu permanentu natur'a corpurilor...”. El face remarcă că la cunoașterea fenomenelor fizice se ajunge pe calea observației și a experimentului. În baza observației se stabilesc anumite ipoteze și teorii care sînt supuse verificării experimentale. Fenomenele fizice le împarte în șapte *clase*, cărora le corespund cele șapte secțiuni ale cărții. Ca proprietăți generale ale materiei menționează: întinderea, impenetrabilitatea, gravitatea, inerția, compresibilitatea, dilatabilitatea, porozitatea, elasticitatea, coeziunea, adeziunea, divizibilitatea, definindu-le pe rînd pe fiecare. Tot aici se ocupă de mișcare și forțe, fără a enunța legile dinamicii.

Avînd în vedere că organizarea învățămîntului în țara noastră s-a făcut după sistemul francez, Bacaloglu folosind ca model manuale franceze începe studiul mecanicii cu gravitatea, în cadrul căreia tratează despre greutatea și echilibrul corpurilor, balanțele, pendulul, accelerația gravitațională, fără a vorbi despre legile mișcărilor. Se observă că mecanica este tratată sumar, aceasta explicîndu-se prin faptul că în acea epocă ea era tratată în cadrul cursurilor de matematici.

În Secțiunea a II-a enumeră proprietățile principale ale solidelor apoi trece la lichide, studiul cărora îl împarte în hidrostatică și hidrodinamică. În paragraful „Acțiuni moleculare” la lichide, studiază fenomenele capilare, difuzia și osmoza. Dintre proprietățile gazelor menționează compresibilitatea și elasticitatea. Vorbește despre mașina pneumatică și diferite tipuri de pompe, descrie apoi barometrele și manometrele. Materialul tratat în această secțiune cuprinde multe probleme importante, evidențiindu-se aspectul experimental. Observăm însă că enunțul principiului lui Arhimede nu este riguros (ed. II, pag. 63) iar din legile gazelor enunță numai legea Boyle-Mariotte, fără a se referi la temperatură ca parametru de stare, la fel și în secțiunea „Căldură”.

În secțiunea dedicată magnetismului se ocupă de magnetii naturali și artificiali și obținerea acestora. Arată apoi că Coulomb cu ajutorul balanței de torsiune a stabilit legile de atracție și respingere a doi magneti. Vorbind despre magnetismul terestru descrie busola de înclinație și declinație și dă un tabel cu declinațiile magnetice la Paris și Londra începînd din 1660 pînă în 1885.

Secțiunea a IV-a, în prima ediție cuprinde numai Electricitatea statică, pe cînd în ediția a II-a cuprinde întreaga electricitate. În prima ediție Electrodinamica o dă ca secțiune separată sub titlul: Galvanism seu electricitate dinamică. Această secțiune o începe cu un scurt istoric arătînd că progrese însemnate s-au făcut numai după ce englezul Gilberte: „a creatu putemu dice, sciinti'a electricității”, iar de atunci încoace: „mai alesu în secolu de fecia, electricitatea a ajunsu la ua desvoltare de care pucine sciintie se bucura”. Menționează apoi că fizicienii au încercat să fundamenteze o teorie asupra naturii electricității, și anume Aepinus și Franklin își imaginează că

fiecare corp cuprinde o cantitate determinată de *fluidu electricu* care la frecarea a două corpuri trece de pe un corp pe altul. Amintește apoi teoria dualistă a lui Symmer și teoria ondulatorie. Conchide că: „astadi se admite de toti, co fenomenele electrice sunt nisce fenomene mecanice adico de miscare, remanendu indiferentu modulu în care se executa, seu ne închiptuimu ca se executa, acele miscari“.

Se observă că Bacaloglu, ca toți contemporanii săi de altfel, admite că fenomenele electrice sînt de natură mecanică. Teoria electromagnetică a fost stabilită de Maxwell în cartea sa *Tratat de electricitate și magnetism* în 1873, însă s-a încercat de către unii fizicieni și după aceea să se explice fenomenele electromagnetice prin teoria mecanică, fără însă a le reuși. De aceea Bacaloglu și în 1888 rămîne la vechea teorie mecanică a tuturor fenomenelor fizice, deci și a celor electrice.

În continuare Bacaloglu descrie controversa dintre teoria chimică și de contact asupra electricității, controversă încheiată în favoarea teoriei chimice deoarece: „din nimica nu se face ceva, co, cand producemu ceva, trebuie sa cheltuimu ua munca seu altu ceva ecivalentu“. Vorbește despre trecerea curenților prin conductori, descriind instrumentele de măsură cunoscute, și adoptă ca unități de măsură unitățile sistemului C.G.S. stabilit la Congresul Electricienilor din 1881 de la Paris. Descrie fenomenele de inducție și dă demonstrația formulei lui Ampère relativ la acțiunile mutuale ale curenților. Ca o dovadă în plus că Bacaloglu era la curent cu lucrările cele mai noi ale fizicienilor, vom da următorul citat din paragraful asupra mașinilor dinamoelectrice (ed. II): „În fine trebuie se adeogamu co în anulu curentu, Edison a inventat unu nou feliu de machini pe care le-a numitu pyromagnetice în care ferulu armătorei este încalditu directu și pusu prin aceasta în mișcare de rotatiune, producendu currenții electricei...“. În paragraful „Luminatul electricu” face un interesant istoric al acestei probleme, declarîndu-se un fervent adept al luminatului electric. Se ocupă apoi de transportul electricității la distanță, descrie telegraful și microfonul iar în încheiere vorbește despre electricitatea atmosferică și paratrăsnet.

Secțiunea „Căldura“ începe prin paragraful „Natura căldurii“ în care se arată că pînă la apariția cărții: „Natur'a caldurei ne este necunoscuta și nu potemu face decatu numai hipotese asupra ei cea mai probabila din ele si mai în armonia cu starea actuala a cunoscintielor nostre este necontestatu aceea a undulatiunilor... Dupe acesta, căldur'a s'ar produce prin vibratiunile unui eteru, adico ale unei materii forte subtile, ce s'ar afla respandita în tota natur'a si în spatiile intermoleculare ale tuturor corpurilor“. După ce expune noțiunile de bază ale căldurii, în paragraful „Lichefierea gazelor“ arată că în ultimii ani au fost lichefiate gaze care se credeau a fi permanente ca oxigenul, hidrogenul etc. Se știe că lichefierea acestor gaze s-a făcut pentru prima dată în anul 1883, adică cu cinci ani înainte de apariția ediției a II-a. În paragraful despre propagarea căldurii arată că: „mai tota caldura pe care o avemu noi pe pamantu o detorim sorelui“, subliniind cantitatea mare de căldură degajată de acest astru, iar în continuare: „Care sa fia caus'a care produce pe sore acesta cantitate enorma de caldura este pucinu cunoscutu. Astadi se presupune, ca aru fi cause mecanice, de ex. caderea de mii de bolides pe suprafeci'a sorelui, care ar fi producendu acesta caldura“.

În ceea ce privește căldura, la fel admite teoria mecanică, considerînd însă că ea este produsă de vibrațiile unui eter mecanic iar nu de vibrațiile atomilor și moleculelor, cum presupune teoria cinetică a căldurii.

Secțiunea „Acustică“ este foarte scurtă, se ocupă numai de producerea și propagarea vibrațiilor, tratează proprietățile sunetului și viteza sa de propagare, încheind secțiunea cu studiul sunetelor muzicale.

Ultima secțiune tratează „Optica sau teori'a luminei“. Secțiunea cuprinde un material bogat și variat, începînd de la clasificarea corpurilor în opace și transparente, legile reflexiei și refracției, instrumente optice, fotometrie, spectroscopie, difracție, interferență, pînă la teoriile asupra naturii luminii: corpusculară și ondulatorie, sfîrșind cu polarizarea luminii.

Fenomenele optice de asemenea le interpretează cu ajutorul mecanicii, menționînd teoria corpusculară a lui Newton și cea ondulatorie a lui Huygens. Dintre cele două teorii el adoptă teoria lui Huygens.

În ediția a II-a e atașat manualului un memoriu al lui E. Bacaloglu citit în ședința Academiei Române din 27 martie 1887 cu titlul: „Despre aperatorul de trasnetu (paratonnerre)“, în care, după ce face un scurt istoric al paratrăsnetului, dă o serie de date în ceea ce privește condițiile ce trebuiesc îndeplinite de un paratrăsnet pentru ca el să fie util. Cu această ocazie el subliniază importanța și necesitatea acestuia.

Materialul prezentat în manual este însoțit de figuri ilustrative și scheme de aparate, realizate cu multă atenție. Dacă în ediția I figurile erau pe planșe la sfîrșitul cărții, în ediția a II-a ele sînt în text pentru a putea fi mai ușor urmărite.

Întrucît Bacaloglu și-a redactat manualul pentru a acoperi o lipsă stringentă a învățămîntului fizicii și deoarece predarea fizicii în școlile medii era destul de lacunară, Bacaloglu a fost nevoit să adapteze materialul ce urma să fie cuprins în manual necesităților și situației existente în învățămîntul nostru. Luînd ca model manualele franceze de fizică a considerat să adopte calea de prezentare a părții fenomenologice, astfel că în manual găsim puține demonstrații și calcule matematice. Totodată a considerat potrivit ca unele părți să fie tratate mai sumar iar altele nu le-a tratat de loc. Astfel lipsește complet higrometria, teoria cinetică a gazelor și termodinamica, capitole care în manualele franceze contemporane sînt tratate amănunțit. Totodată unele probleme care au constituit o preocupare de cercetare pentru el sînt mai amănunțit tratate. Astfel, dacă partea de mecanică e mai sumar tratată, în electricitate generatorii de curent electric sau în optică spectroscopia sînt tratate amănunțit, la nivelul manualelor contemporane.

Manualul lui E. Bacaloglu prezintă un deosebit interes în studiul istoriei învățămîntului fizicii în țara noastră. Dacă pînă la apariția sa au mai apărut și alte manuale de fizică în limba română, el este primul care se ridică la nivelul cerut de un manual de învățămînt superior. El se remarcă atît prin conținutul bogat, cît și prin nivelul său care corespunde manualelor din acea epocă din străinătate. Manualul dovedește totodată strădania pionierilor învățămîntului fizicii din țara noastră de a propaga cele mai noi cunoștințe în rîndurile tineretului patriei, pentru a trezi în ei setea și dragostea de știință, pentru ridicarea culturală a țării.

*Intrat în redacție la 10 martie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. E. Bacaloglu, *Elemente de fizica*, ediția I, București, 1870.
2. E. Bacaloglu, *Elemente de fizica*, ediția II, București, 1888.

## „ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ” ЕМАНОИЛА БАКАЛОГЛУ

( Р е з ю м е )

В работе „Элементы физики” Е. Бакалоглу представлен первый университетский учебник физики на румынском языке, опубликованный в Бухаресте, первое издание в 1870 г., а второе в 1888 г. Книга написана в стиле французских книг того времени и на их уровне. В статье производится сравнительный анализ этих двух изданий, использованных в качестве дидактического университетского учебника как в Бухаресте, так и в Яссах. В то же время подчёркивается хорошая осведомлённость автора. Работа способствует познанию истории высшего обучения в нашей стране.

## EMANOIL BACALOGLU'S WORK "ELEMENTS OF PHYSICS"

( S u m m a r y )

The work "Elements of Physics" belonging to E. Bacaloglu is the first university manual of Physics written in Romanian. It appeared in Bucharest, the first edition in 1870, and the second one in 1888. The book is written much like the French books of that epoch, and at their level. The author analyses comparatively the content of both editions which were used as university manuals in Bucharest and Jassy. The author's information and documentation is also mentioned. The work contributes to the knowledge of the history of the university education in our country.

## ASUPRA DEZINTEGRĂRII LEPTONICE A BARIONILOR

de  
Z. GÁBOS

În lucrare se studiază dezintegrarea leptonică a barionului  $B_1$

$$B_1 \rightarrow B_2 + e^- + \bar{\nu}$$

completînd rezultatele cunoscute cu calcularea matricii care reflectă corelația ce există între polarizarea barionului  $B_2$  și polarizarea electronului.

Presupunem că

a)  $B_1$  este în repaus; b) are vectorul de polarizare  $\vec{Z}_1$ ; c)  $|\vec{v}_2|/c \ll 1$  ( $\vec{v}_2$  este viteza barionului  $B_2$ ); d) interacțiunile electromagnetice pot fi neglijate.

Dacă sînt îndeplinite aceste condiții, atunci expresia amplitudinii de tranziție poate fi scrisă sub forma cunoscută [5], [9]

$$M = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ (u_2^+ u_1) (u_e^+ v_\nu) - \lambda (u_2^+ \sum \vec{u}_1) (u_e^+ \sum \vec{v}_\nu) \right], \quad (1)$$

unde  $\lambda$  este un număr complex ( $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ ), iar  $u$  și  $v$  sînt bispinori.

1°. Cu scopul de a ajunge la expresia lui  $|M|^2$  vom utiliza matricea de polarizare

$$P_{\alpha\beta} = u(\alpha) \bar{u}(\beta).$$

Dacă sînt îndeplinite condițiile a) și b), pentru barioni avem

$$P_i = \frac{1}{4} \left( 1 + \sum \vec{Z}_i \right) (1 + \gamma_4) \quad (2)$$

unde  $\vec{Z}_i$  este vectorul Stokes al barionului  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Pentru electron și antineutrîn

$$P_e = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{i \hat{p}}{m_0 c} \right) (1 - i \hat{S} \gamma_5) \quad (3)$$

$$P_{\bar{\nu}} = -\frac{i}{2} \nu_\mu \gamma_\mu (1 - \gamma_5), \text{ cu } \vec{\nu} = \frac{\vec{p}_\nu}{|\vec{p}_\nu|}, \nu_4 = i, \quad (4)$$

unde  $\vec{p} \left( \vec{p}, i \frac{\varepsilon}{c} \right)$  este cvadriimpulsul electronului,  $\vec{p}_v$  este impulsul antineutriniului,  $s$  este cvadrivectorul de polarizare iar  $m_0$  este masa de repaus al electronului.

Dacă se alege ca bispinori de bază bispinorii lui Darwin și sistemul de coordonate se ia în așa fel ca  $p_2$  să anuleze, componentele cvadrivectorului  $s$  sînt date de [12]:

$$\begin{aligned} s_1 &= e_3 \zeta_1 + \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} e_1 \zeta_3, \\ s_2 &= \zeta_2, \\ s_3 &= -e_1 \zeta_1 + \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} e_3 \zeta_3, \\ s_4 &= \frac{i}{m_0 c} |\vec{p}| \zeta_3, \quad \vec{c} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \end{aligned} \quad (5)$$

( $\zeta_i$  parametrii Stokes ai electronului).

Avînd în vedere (1) – (5) ajungem la expresia

$$\frac{8}{g^2} \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} |M|^2 = I + A_i \zeta_i + B_i Z_{2i} + C_{ik} \zeta_i Z_{2k}, \quad (6)$$

unde  $I$  și coeficienții  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_{ik}$  sînt funcții liniare de  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$ .

Vom considera două cazuri particulare:

A) În starea inițială avem barioni  $B_1$  cu spinul neorientat. În acest caz este avantajos de a alege sistemul de coordonate astfel ca să avem  $p_2 = v_2 = 0$ . În expresia lui  $I$  precum și în expresiile coeficienților se pune  $Z_{1i} = 0$ .

B) În starea inițială avem barioni  $B_1$  cu spinul orientat. În acest caz se alege un sistem de coordonate pentru care  $e_2 = 0$ ,  $Z_{11} = Z_{12} = 0$ ,  $Z_{13} \neq 0$ .

În continuare vom da expresia coeficienților respectiv a lui  $I$  în cazul B). Cele valabile în cazul A) se obțin făcînd înlocuirile  $Z_{13} = 0$ ,  $v_2 = 0$ . Avem

$$\begin{aligned} I &= \lambda_1 + \lambda_2 (\vec{v}, \vec{c}) \frac{V}{C} + Z_{13} \left[ \lambda_3 v_3 + (\lambda_4 e_3 - 2\lambda'' e_1 v_1) \frac{V}{C} \right], \\ A_1 &= -\frac{m_0 c^2}{\varepsilon} [\lambda_2 (v_1 e_3 - v_3 e_1) - Z_{13} (\lambda_4 e_1 + 2\lambda'' e_3 v_2)], \\ A_2 &= -\frac{m_0 c^2}{\varepsilon} [\lambda_2 v_2 + 2\lambda'' v_1 Z_{13}], \\ A_3 &= -\lambda_2 (\vec{e}, \vec{v}) - \lambda_1 \frac{V}{C} + Z_{13} \left( -\lambda_4 e_3 + 2\lambda'' e_1 v_2 - \lambda_3 v_3 \frac{V}{C} \right), \\ B_1 &= \lambda_4 v_1 + (\lambda_3 e_1 + 2\lambda'' e_3 v_2) \frac{V}{C} + Z_{13} \left[ -2\lambda'' v_2 + (\lambda_3 e_1 v_3 - \lambda_4 e_3 v_1) \frac{V}{C} \right], \\ B_2 &= \lambda_4 v_2 - 2\lambda'' (e_3 v_1 - e_1 v_3) \frac{V}{C} + Z_{13} \left[ 2\lambda'' v_1 + (2\lambda'' e_1 - \lambda_4 e_3 v_2) \frac{V}{C} \right], \\ B_3 &= \lambda_4 v_3 + (\lambda_3 e_3 - 2\lambda'' e_1 v_2) \frac{V}{C} + Z_{13} \left[ \lambda_2 + (\lambda_2 e_1 v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) e_3 v_3) \frac{V}{C} \right], \end{aligned}$$

$$C_{11} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} [-\lambda_3 e_3 + 2\lambda'' e_1 v_2 - Z_{13}(\lambda_4 e_1 v_1 + \lambda_3 e_3 v_3)],$$

$$C_{12} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} [-2\lambda'' (\vec{e}, \vec{v}) + Z_{13}(-2\lambda'' e_3 - \lambda_4 e_1 v_2)],$$

$$C_{13} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} [\lambda_3 e_1 + 2\lambda'' e_3 v_2 + Z_{13}(-\lambda_2 e_3 v_1 + \lambda_1 e_1 v_3)],$$

$$C_{21} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} (2\lambda'' v_3 + 2\lambda'' Z_{13}),$$

$$C_{22} = -\frac{m_0 c^2}{\varepsilon} (\lambda_3 + \lambda_3 v_3 Z_{13}),$$

$$C_{23} = -\frac{m_0 c^2}{\varepsilon} (2\lambda'' v_1 + \lambda_2 v_2 Z_{13}),$$

$$C_{31} = -\lambda_3 e_1 - 2\lambda'' e_3 v_2 - \lambda_4 v_1 \frac{V}{C} + Z_{13} \left( -\lambda_3 e_1 v_3 + \lambda_4 e_3 v_1 + 2\lambda'' v_2 \frac{V}{C} \right),$$

$$C_{32} = 2\lambda'' (e_3 v_1 - e_1 v_3) - \lambda_4 v_2 \frac{V}{C} + Z_{13} \left( \lambda_4 e_3 v_2 - 2\lambda'' e_1 - 2\lambda'' v_1 \frac{V}{C} \right).$$

$$C_{33} = -\lambda_3 e_3 + 2\lambda'' e_1 v_2 - \lambda_4 v_3 \frac{V}{C} - Z_{13} \left( \lambda_2 e_1 v_1 + \lambda_1 e_3 v_3 + \lambda_2 \frac{V}{C} \right)$$

în care

$$\lambda_1 = 1 + 3|\lambda|^2,$$

$$\lambda_2 = 1 - |\lambda|^2,$$

$$\lambda_3 = 2(\lambda' + |\lambda|^2),$$

$$\lambda_4 = 2(\lambda' - |\lambda|^2).$$

În formula (6) parametrul Stokes  $\xi_3$  ne indică gradul de polarizare longitudinală a electronului, iar  $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$  gradul polarizării transversale. Parametrii  $Z_{2i}$  au semnificație similară în cazul barionului  $B_2$ .

2°. Mai sus am dat expresiile cele mai generale pentru  $I, A_i, B_i, C_{ik}$  pornind de la expresia (1). Urmează să stabilim formule referitoare la polarizarea electronului și a barionului  $B_2$ . Utilizînd expresia (6) obținem:

$$\xi_i = \frac{A_i + C_{ik} Z_{2k}}{I + B_i Z_{2i}} = \frac{A'_i}{I'}, \quad (7)$$

$$Z_{2i} = \frac{B_i + C_{ki} \xi_k}{I + A_i \xi_i} = \frac{B'_i}{I''} \quad (8)$$

Formulele reflectă corelația care există între polarizarea electronului și polarizarea barionului  $B_2$ . Dacă cunoaștem polarizarea barionului  $B_2$ , atunci pe baza formulei (7) putem calcula parametrii Stokes ai electronului. Dacă se cunoaște starea de polarizare a electronului, atunci pe baza formulei (8) se pot calcula mărimile  $Z_{ki}$ , care caracterizează complet starea de polarizare a barionului  $B_2$ .

Ca o aplicație a formulei (7) să considerăm tranzițiile Fermi și Gamow-Teller în cazul dezintegrării barionului  $B_1$  cu spinul orientat. Presupunem că avem o simetrie față de operația  $CP$  (deci vom pune  $\lambda'' = 0$ ).

Pentru tranziția Fermi  $Z_{13} = Z_{23} = 1$ ,  $Z_{1i} = Z_{2i} = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Parametrii Stokes ai electronului se calculează pe baza formulei (7) și pe baza expresiilor stabilite pentru  $I$ ,  $A_i$ ,  $C_{ik}$ . Avem

$$I' \propto 1 + \lambda^2 + 2\lambda v_3 - \frac{V}{C} [(\lambda^2 - 1)\cos \vartheta - 2\lambda e_3 - 2\lambda^2 e_3 v_3],$$

$$A'_1 \propto [2\lambda + (1 + \lambda^2)v_3]e_1 + (\lambda^2 - 1)e_3 v_1,$$

$$A'_2 \propto \frac{m_0 c^2}{\epsilon} (\lambda_2 - 1)v_2$$

$$A'_3 \propto (\lambda^2 - 1)\cos \vartheta - 2\lambda e_3 - 2\lambda^2 e_3 v_3 - (1 + \lambda^2 + 2\lambda v_3) \frac{V}{C}$$

unde

$$\cos \vartheta = (\vec{e}, \vec{v})$$

( $\alpha$  este semnul de proporționalitate).

Pentru tranziția Gamow-Teller  $Z_{13} = 1$ ,  $Z_{23} = -1$ ,  $Z_{1i} = Z_{2i} = 0$ ,  $i = 1, 2$ , prin urmare

$$I' \propto 2\lambda^2 (1 + v_3) \left(1 - \frac{V}{C} e_3\right),$$

$$A'_1 \propto 2\lambda^2 (1 + v_3) \left(e_3 - \frac{V}{C}\right),$$

$$A'_2 \propto 0,$$

$$A'_3 \propto -2\lambda^2 \frac{m_0 c^2}{\epsilon} (1 + v_3) e_1.$$

Intrat în redacție la 20 noiembrie 1966

#### BIBLIOGRAFIE

1. S. M. Bilenkii, R. M. Rîndin, Ia. A. Smorodinski, He Tzo-siu, J.E.T.F., **37**, p. 1758, 1959.
2. E. J. Konopinski, Ann. Rev. of Nuclear Sci., **9**, p. 99, 1959.
3. W. Alles, Il Nuovo Cimento, **26**, p. 1429, 1962.
4. L. Egardt, Il Nuovo Cimento, **27**, p. 357, 1963.
5. L. B. Okuni, *Slabie vzaimodeistvii elementarnih ciastit*, p. 117–120, Moscova, 1963.
6. V. M. Shekter, J.E.T.F., **47**, p. 262, 1964.
7. N. Cabibbo, Phys. Letters, **12**, p. 137, 1964.
8. C. Baglin et al., Il Nuovo Cimento, **35**, p. 977, 1965.
9. M. Lecombe, R. Pasquier, R. Vinli Mau, Il Nuovo Cimento, **35**, p. 1061, 1965.
10. Akihiko Fujii, Yoshio Yamaguchi, Progress of Theor. Phys., **33**, p. 552, 1965.
11. R. R. Solbar, H. ũberall, Zs. für Naturforschung, **20** a, p. 638, 1965.
12. Z. Gábos, É. Simon, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.-Phys., fasc. 1, p. 115, 1965.
13. Z. Gábos, Fl. Uliu, Studii și cerc. de fizică, **18**, p. 635, 1966.
14. O. G. Bokov, Nguen van Hieu, K. B. Rerih, A. H. Tavhelidze, A. A. Helaşvili, Iadernaia fizika, **3**, p. 910, 1966.



## О ЛЕПТОНСКОМ РАСПАДЕ БАРИОНОВ

( Р е з ю м е )

В работе изучается корреляция, имеющаяся между поляризацией электрона и бариона  $B_2$ . Эти частицы образуются в результате лептонского распада бариона  $B_1$ .

## ON THE LEPTONIC DESINTEGRATION OF THE BARYONS

(S u m m a r y)

The author investigates the correlation which exists between the polarization of the electron and the polarization of the baryon  $B_2$ . These particles are formed as a result of the leptonic desintegration of the baryon  $B_1$ .



# DAS STUDIUM DES MAGNETISCHEN VERHALTENS EINIGER FERRITE AUF GRUND VON SELTENEN ERDEN

von

IULIU POP und L. JESZKEL

**Einleitung.** In den letzten Jahren wurde eine immer grössere Bedeutung dem Studium der physikalischen Eigenschaften, vor allem der magnetischen Eigenschaften der Ferrite auf Grund von seltenen Erden, beigemessen. Ausschlaggebend dafür war, dass die Synthese dieser interessanten magnetischen Substanzen zuerst im Jahre 1952 von Forestier und Guiot-Guillaïn [1, 2] gemacht wurde, wobei die sogenannten Orthoferrite erhalten wurden. Die zweite Gruppe von Ferriten auf Grund von seltenen Erden, Granate genannt, wurden in 1956 von Bertaüt und Forrat [3] synthetisiert.

Die Orthoferrite mit der Formel  $M_2O_3 \cdot Fe_2O_3$ , wobei M das Ion der seltenen Erden darstellt, haben die kristallinische Struktur aus der Gattung des deformierten Perovskites, hingegen vom magnetischen Standpunkte aus weisen sie einen schwachen Ferromagnetismus auf [4, 5, 6]. Die Ferrite aus der Gattung der Granate, mit der allgemein gültigen Formel  $3M_2O_3 \cdot Fe_2O_3$  haben mit dem Granatmineral eine isomorphe Struktur mit kubischer Symmetrie.

Die ersten magnetischen Studien der Granate stammen von R. Pauthenet und Mitarbeiter [7, 8, 9, 10, 11]; es gelang ihnen hervorzuheben, dass der grösste Teil dieser Ferrite einen Kompensationspunkt auf der Kurve der spontanen Magnetisierung in Abhängigkeit von der Temperatur besitzt. Es folgte hierauf eine Flut von Arbeiten, die verschiedenen Autoren angehören und die sich mit dem Studium verschiedener physikalischer Eigenschaften; befassen.

Wir erhielten und studierten 2 Ferritproben aus beiden Kategorien, die aus Substanzen von hochgradiger Purity hergestellt wurden.

**Herstellung der Proben.** Zur Herstellung der Proben wurden Oxyde von spektraler Purity verwendet. Vorerst wurden die Oxyde 3 Stunden in einer Etuve bei 220°C erhitzt um das absorbierte Wasser auszuschleiden und nachher wurden die an der Reaktion teilzunehmenden Mengen mit Hilfe einer analytischen Waage ( $10^{-4}$  g) mit der nachfolgenden Gleichung bestimmt: a)  $5Fe_2O_3 + 3Gd_2O_3 = 2Gd_3FeO_{12}$ ; b)  $Fe_2O_3 + Yb_2O_3 = 2YbFeO_3$ .

Die Oxyde wurden durch Mörsern bis zur vollständigen Homogenisierung sehr gut vermischt, hernach zwei Tropfen Toluol mit Paraffin als Bindemittel hinzugefügt und die so erhaltene Paste wurde unter einem Druck von 2480 kgf/cm<sup>2</sup> zu Pastillen gepresst.

Diese Pastillen wurden für Gadoliniumgranate 4 Stunden lang einer Temperatur von 1350°C durch Synterisierung der obengenannten Reaktion in solider Phase, auf einer Platinunterlage, unterzogen, hingegen war die Temperatur bei den Ytterbiumorthoferriten 1250°C. Infolge dieser Reaktion wurde eine homogene kompakte keramische Masse, mit einer sehr hohen mechanischen Resistenz erhalten.

Eine Gadoliniumprobe wurde während der Zeit der Synterisierung auf eine Pyroplanunterlage aufgesetzt, wobei eine chemische Reaktion entstand, deren Resultat ein gemischter Ferrit aus Gadolinium, Aluminium und Magnesium war.

**Messmethode.** Die Magnetisierungsintensität und die magnetische Suszeptibilität wurden mit einer magnetischen Waage mit mechanischer Kompensation [12], die eine Sensibilität von  $10^{-7}$ – $10^{-8}$  elektromagnetische Einheiten-Suszeptibilität bei einer Masse von 10 mg besitzt, gemessen. Die Proben wurden in einem breiten Temperaturintervall studiert und zwar, beginnend mit der Temperatur des flüssigen Stickstoffes bis zu 1270°K, in einem magnetischen Feld von 1480 Oe im ferromagnetischen Bereich und von 3950 Oe im paramagnetischen Bereich. Die Bestimmung der Intensität des magnetischen Feldes wurde mit Hilfe eines Gaussmeters Metra der 2,5 Klasse vorgenommen.

**Ergebnisse und ihre Interpretierung.** Im ferromagnetischen Bereich weist die spezifische Magnetisierungsintensität für das Gadoliniumgranat, in Abhängigkeit von der Temperatur ein ununterbrochenes Sinken bis zum Kompensationspunkt

$\theta_K = +14^\circ\text{C}$  auf, wo sie fast ganz verschwindet, hernach folgt ein Anwachsen mit schwachem Maximum bei ungefähr 150°C und mit dem ferromagnetischen Curiepunkt bei  $263^\circ\text{C} \pm 2^\circ$ , wie aus Abb. 1 ersichtlich ist.

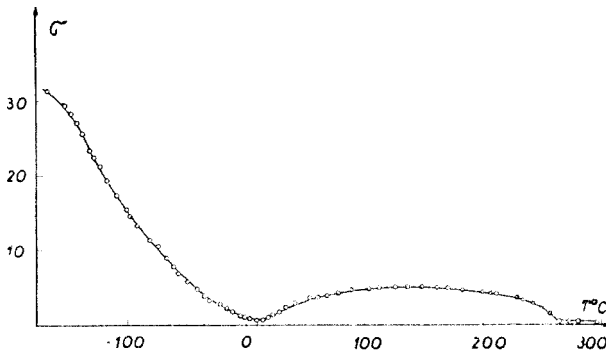


Abb. 1.

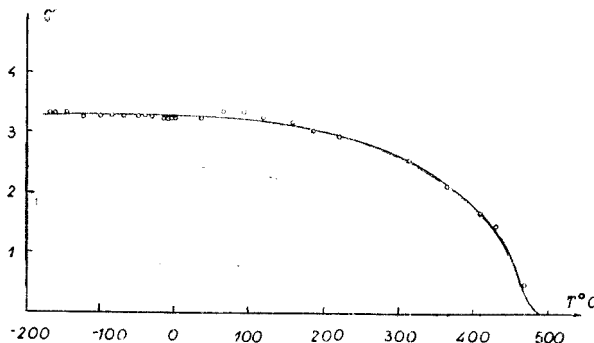


Abb. 2.

Für den gemischten Granat aus Gadolinium, Aluminium und Magnesium weist die spezifische Magnetisierung im ferromagnetischen Bereich eine ununterbrochene Sättigung, ohne Kompensationspunkt, bis zu 480°C wo der Curiepunkt ist, auf, was aus Abb. 2 hervorgeht, in welcher die Abhängigkeit der Temperatur von der Magnetisierungsintensität veranschaulicht wird.

Das teilweise Ersetzen der magnetismuserzeugenden Ionen mit diamagnetischen Ionen des Aluminiums und Magnesiums, hat die Ausdehnung des ferromagnetischen Bereiches mit 160° und eine Verstärkung der ferromagnetischen Interaktionen zur Folge.

Im paramagnetischen Bereich ist die Lage umgekehrt. Das Granatgadolinium hat eine viel grössere Suszeptibilität als das gemischte Ferrit.

In Abb. 3 ist die Abhängigkeit der Temperatur von dem Umgekehrten der magnetischen Suszeptibilität  $1/\chi$  für beide Gadoliniumferrite gegeben; Kurve 1 zeigt die Abhängigkeit des Granatgadoliniums und Kurve 2 die des gemischten Granates.

Aus der Abbildung ist feststellbar, dass die Abhängigkeit anfangs hyperbolisch verläuft, hingegen bei hohen Temperaturen eine lineare Form annimmt.

Die magnetischen Eigenschaften dieser Ferrite können mit Hilfe des Néel'schen ferrimagnetischen Modells des molekularen Feldes, mit 3 magnetischen Untergittern [13] erklärt werden.

Nach diesem Modell sind die Granatferrite ferrimagnetisch mit 3 Untergittern:  $a$ ,  $d$ , und  $c$ . Das Untergitter  $a$  enthält 4  $Fe^{3+}$  Ionen in oktaedrischer Stellung 16  $a$ ; das Untergitter  $d$  enthält 6  $Fe^{3+}$  Ionen in tetraedrischer Stellung 24  $d$ ; das Untergitter  $c$  enthält 6  $Gd^{3+}$  Ionen in dodekaedrischer Stellung 24  $c$ .

Die magnetischen Momente der Eisenionen aus den beiden Untergittern haben eine antiparallele Orientierung und da ihre Anzahl verschieden ist, ergeben sie eine resultierende Magnetisierung die verschieden von Null ist. Das resultierende magnetische Moment der Eisenionen bestimmt eine antiparallele Orientierung der Momente der Gadoliniumionen mit ihm selbst. Bei der Kompensationstemperatur ist die resultierende spontane Magnetisierung aus den Untergittern der Eisenionen als Grösse gleich mit der in dem Untergitter der Gadoliniumionen induzierten spontanen Magnetisierung, und das Ergebnis davon ist, dass die Magnetisierung der Probe gleich null ist.

Im paramagnetischen Bereich, so wie es aus Abb. 3 hervorgeht, folgt die magnetische Suszeptibilität dem Néel'schen Gesetz:

$$\frac{1}{\chi_M} = \frac{1}{\chi_0} + \frac{T}{C} - \frac{\sigma T - a}{T^2 - \theta T + b}$$

wo  $\chi_0$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $a$  und  $b$  Konstanten sind, die von den Koeffizienten des molekularen Feldes abhängen, hingegen ist  $C$  die Curie'sche Konstante.

Es wurde die Abhängigkeit der Temperatur von der spezifischen Magnetisierungsintensität des Ytterbiumorthoferrites sowohl bei der Erwärmung, wie auch bei der Abkühlung der Probe gemessen. Aus Abb. 4 ist feststellbar, dass die Magnetisierungsintensität ein Ther-

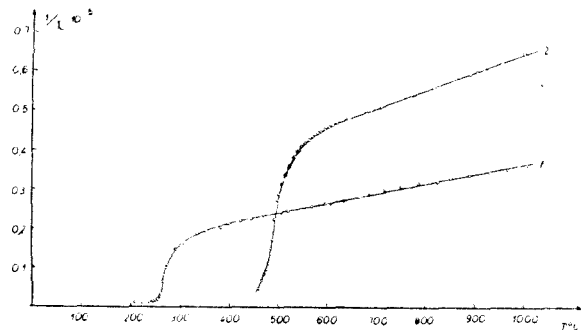


Abb. 3.

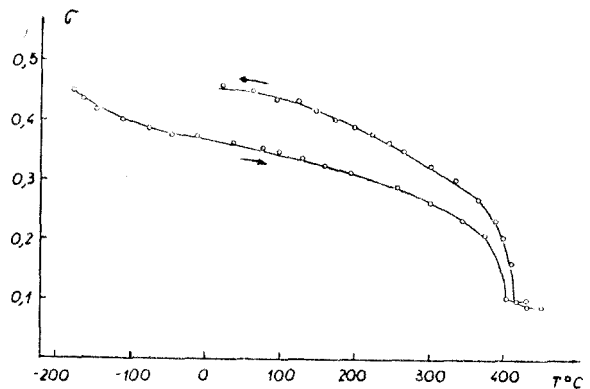


Abb. 4.

mohisteresisphänomen aufweist; die Werte sind beim Abkühlen grösser, was mit anderen experimentellen Daten aus der Literatur übereinstimmt.

Es ist merkwürdig, dass auf den Kurven  $\sigma(T)$  nur ein einziger Transformationspunkt  $\theta_2$  erscheint, obzwar den Daten aus der Literatur entsprechend die Orthoferrite zwei magnetische Transformationspunkte  $\theta_1$  und  $\theta_2$  aufweisen müssten. Das

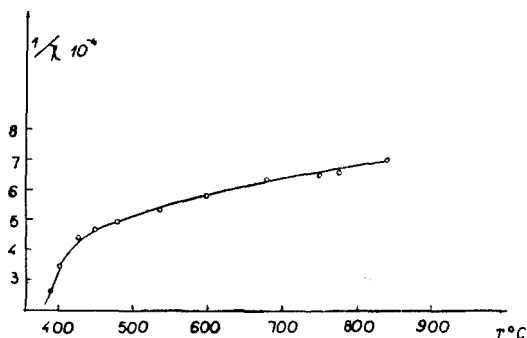


Abb. 5.

dargestellt ist, ist die Form der Kurve charakteristisch für einen ferrimagnetischen Stoff, der durch das Néel'sche Gesetz erklärt werden kann, eine Tatsache die beweist, dass die Reaktion in der soliden Phase stattfand und dass ein Orthoferrit erzielt wurde, der einen einzigen magnetischen Transformationspunkt aufweist.

Die Interpretierung der erhaltenen Resultate kann man im Falle der Orthoferrite auch mit Hilfe des Néel'schen Modells mit 3 magnetischen Untergittern machen. Die Verteilung der Eisenionen in den Untergittern nähert sich den anti-ferromagnetischen, die Orthoferrite der seltenen Erden weisen eine verminderte spontane Magnetisierung auf.

Eingegangen am 1. Dezember 1966

#### LITERATUR

1. H. Forestier, G. Guiot-Guillain, C.R. **235**, 48 (1952).
2. H. Forestier, G. Guiot-Guillain, C.R. **237**, 1654 (1953).
3. F. Bertaut, F. Forrat, C.R. **242**, 382 (1956).
4. G. Guiot-Guillain, C.R. **242**, 793 (1957).
5. S. Geller, Phys. Rev. **99**, 1641, (1955).
6. S. Geller, E. A. Wood, Acta Cryst. **9**, 563 (1956).
7. R. Pauthenet, C.R. **242**, 1859 (1956).
8. R. Aleonard, J. C. Barbier, R. Pauthenet, C.R. **242**, 2531 (1956).
9. R. Pauthenet, C.R. **243**, 1499, 1737 (1956).
10. R. Pauthenet, Ann. de Phys., **3**, 428 (1958).
11. L. Néel, F. Bertaut, F. Forrat, R. Pauthenet. Isv. AN SSSR, ser. fiz. nr. (904 (1957).
12. Iuliu Pop und V. I. Čečernikov, Pribory i tehnika experimenta, **5**, 180, (1964).
13. L. Néel, C.R. **239**, 8 (1954).

## STUDIUL COMPORTĂRII MAGNETICE A UNOR FERITE PE BAZĂ DE PĂMÎNTURI RARE

(R e z u m a t)

S-au studiat din punct de vedere magnetic două ferite pe bază de pământuri rare, de puritate spectrală, avînd formula  $3\text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{Fe}_2\text{O}_3$  și  $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ . Curbele dependenței de temperatură a intensității de magnetizare specifică au arătat în cazul ortoferitei de iterbiu o comportare analogă ortoferitelor de lantan și prazodiu cu un singur punct de transformare magnetică.

Comportarea granatului de gadoliniu este în concordanță calitativă cu datele din literatură, prezentînd unele diferențe din punct de vedere cantitativ în domeniul paramagnetic.

Interpretarea rezultatelor s-a făcut pe baza modelului cîmpului molecular cu trei subrețele magnetice al lui Néel.

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФЕРРИТОВ НА ОСНОВЕ РЕДКИХ ЗЕМЕЛЬ

( Р е з ю м е )

Изучены с магнитной точки зрения два феррита на основе редких земель спектральной чистоты, имеющие формулу  $3\text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ . Кривые температурной зависимости удельного намагничивания показали в случае ортоферрита иттербия поведение, аналогичное с поведением ортоферритов лантана и празодима с одной точкой магнитного превращения.

Поведение граната гадолиния качественно соответствует данным литературы, имея некоторые различия с количественной точки зрения в парамагнитной области.

Интерпретация результатов произведена на основе модели молекулярного поля Нееля с тремя магнитными подрешетками.





MESURE DE QUELQUES PARAMÈTRES DE FERRITES DU TYPE  
 $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + b(\text{Cr}_2\text{O}_3) + X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$  DANS LA BANDE X

par

R. BAICAN, C. BÁLINTFFI, A. BÓDI

**I. Introduction:** En utilisant la technique habituelle de mesure des ferrites en microondes [1, 2, 3] la constante diélectrique complexe a été mesurée  $\epsilon^*$ , la susceptibilité magnétique complexe  $\chi^*$  et l'effet directionnel.

**II. Principe et méthode de mesure.** La même cavité de résonance parallélépipédique excitée dans le mode  $TE_{102}$  a été utilisée, pour la mesure non seulement de  $\epsilon^*$  mais aussi de  $\chi^*$ .

Comme la cavité n'est pas dégénérée, et que, d'autre part le champ  $H$  de  $rf$  est linéairement polarisé, le seul membre du tenseur de la susceptibilité [2] qui a été mesuré est le membre diagonal donné par la relation :

$$\chi^* = \chi' - j\chi'' \quad (1)$$

**III. Procédé expérimental.** Les éprouves de forme parallélépipédique ont été placées dans des maxima du champ électrique  $E$  (Fig. 1) pour la mesure de la constante diélectrique complexe  $\epsilon^*$  ou dans des maxima du champ magnétique  $H$  pour la mesure de la susceptibilité magnétique complexe  $\chi^*$  (Fig. 2).

L'appareillage standard de microondes dans la bande X et la technique de mesure étaient identiques à ceux qui ont été décrits dans l'ouvrage [4].

Lors de la mesure de l'effet directionnel, les éprouves de ferrites avaient la forme de plaquettes de dimensions approximatives  $43 \times 10 \times 2$  mm et étaient placées dans un guide d'onde rectangulaire parallèle au côté  $b$  du guide d'onde.

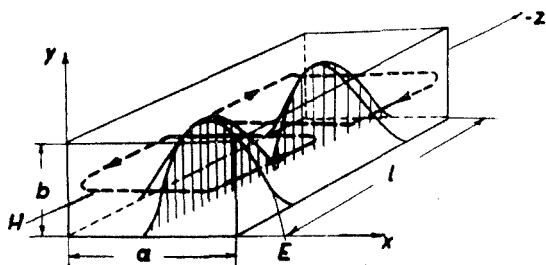


Fig. 1.

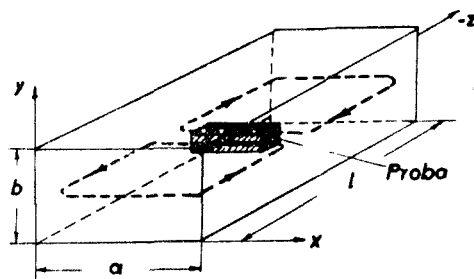


Fig. 2.

A l'aide de l'installation que montre la figure 3 a été étudiée l'absorption de l'énergie de microondes, aussi bien dans le sens direct que dans le sens inverse, par la plaquette de ferrite, en fonction du champ magnétique statique de polarisation  $H_0$ , de la distance de la plaquette de ferrite à la paroi de guide, de l'épaisseur de la plaquette de même que de la température de syntésisation.

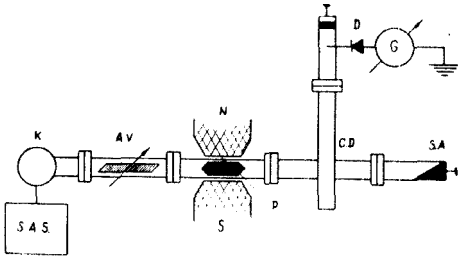
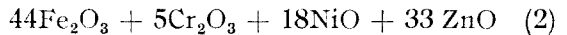


Fig. 3.

**IV. Préparation des épreuves.** Les ferrites ont été préparées à partir d'oxydes  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ,  $\text{ZnO}$  de pureté „p.a.“ tandis que l'oxyde de Ni a été obtenu par la calcination de l'azotate de Ni pur.

Les poudres oxydiques ont été mélangées de manière que la proportion moléculaire soit satisfaite sous la forme :



Après l'homogénéisation du mélange les épreuves ont été pressées par martelage sous forme de plaques à une pression d'environ  $800 \text{ kgf/cm}^2$ .

Les épreuves ainsi obtenues ont été syntésisées à des températures différentes comprises entre  $1000^\circ\text{C}$  et  $1300^\circ\text{C}$ , dans une atmosphère gazeuse. Le refroidissement des épreuves a été effectué de même dans l'atmosphère gazeuse pendant environ 12 heures, on a obtenu ainsi un matériel polycristallin de couleur brun foncé, cassable avec des surfaces lisses.

**V. Résultats.** En utilisant des épreuves des ferrites de forme parallélépipédique et de dimensions  $1 \times 1,5 \times 10,2 \text{ mm}$ , la constante diélectrique complexe a été mesurée en fonction de la température de syntésisation.

Les résultats typiques pour les températures  $1050^\circ\text{C}$ ,  $1100^\circ\text{C}$ ,  $1150^\circ\text{C}$ , et  $1250^\circ\text{C}$  sont rendus dans le tableau 1.

Tableau No. 1

	Temp. de syntésisation	Position 1		Position 2		Avec 2 épreuves	
		$\epsilon'$	$\text{tg } \delta$	$\epsilon'$	$\text{tg } \delta$	$\epsilon'$	$\text{tg } \delta$
$F_1$	$1050^\circ$	5,22	0,005	5,62	0,006	5,54	0,004
$F_2$	$1100^\circ$	4,89	0,014	5,04	0,016	4,91	0,014
$F_3$	$1150^\circ$	6,92	0,017	6,63	0,016	6,65	0,014
$F_4$	$1250^\circ$	6,35	0,011				

Il résulte des données ci-dessus que  $\epsilon^*$  aussi bien que les  $\text{tg } \delta$  varient peu avec la température de syntésisation.

Pour ce qui est de la mesure de la portion réelle et de la portion imaginaire de la susceptibilité magnétique complexe, elles ont été représentés, en fonction du champ magnétique de polarisation, par les résultats obtenus pour les épreuves traitées aux températures mentionnées plus haut (Fig. 4 — Fig. 7).

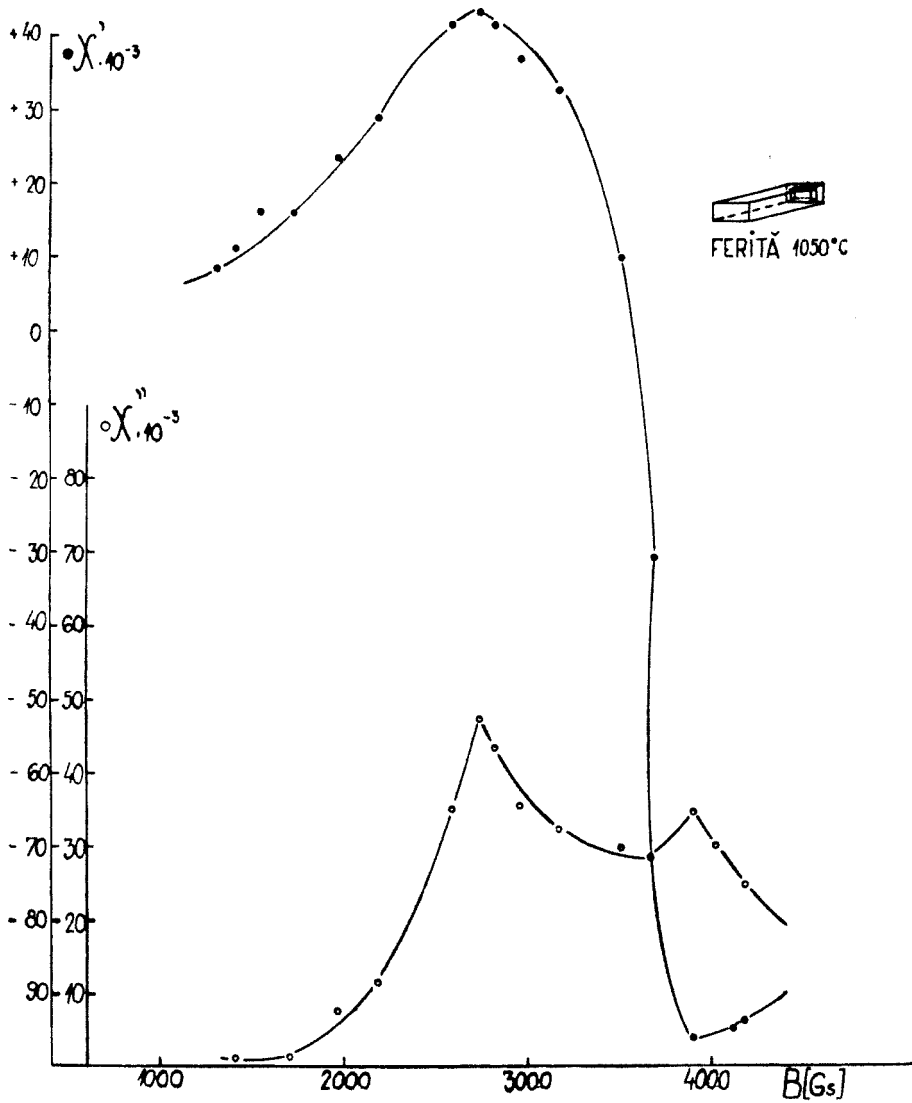


Fig. 4.

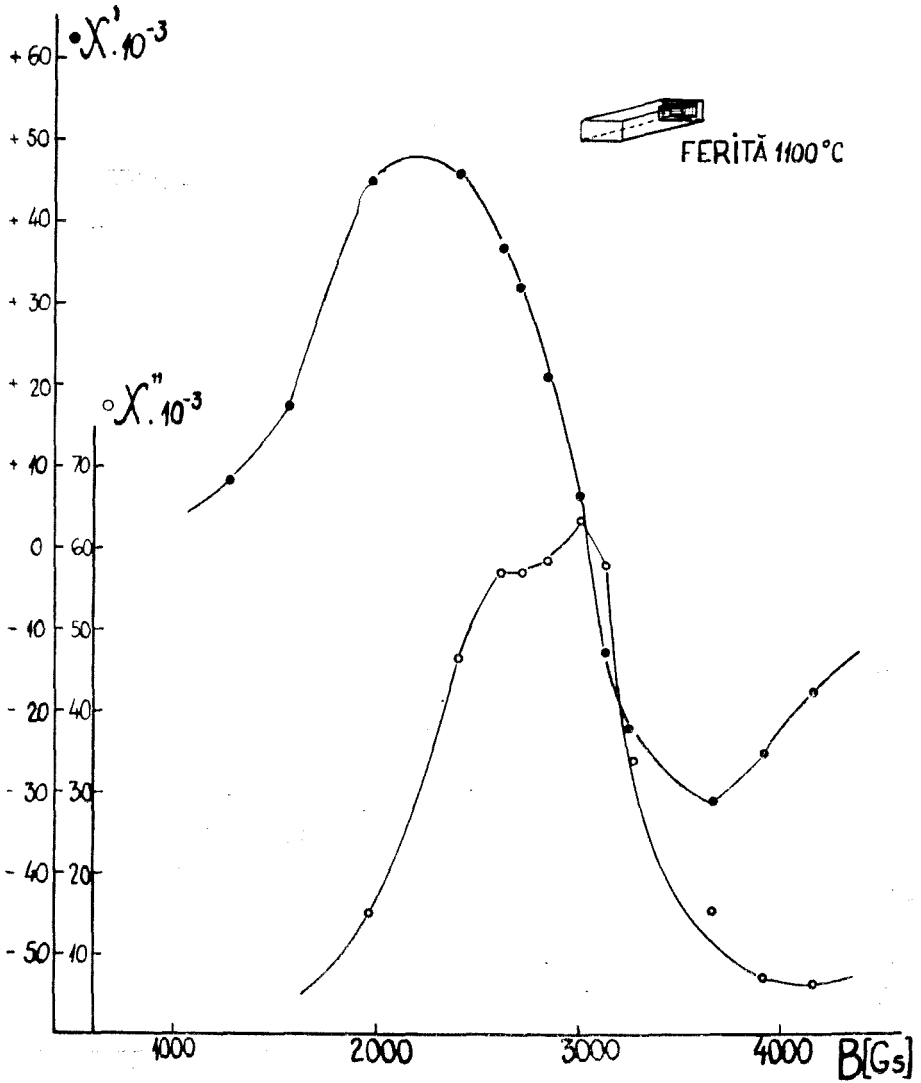


Fig. 5.

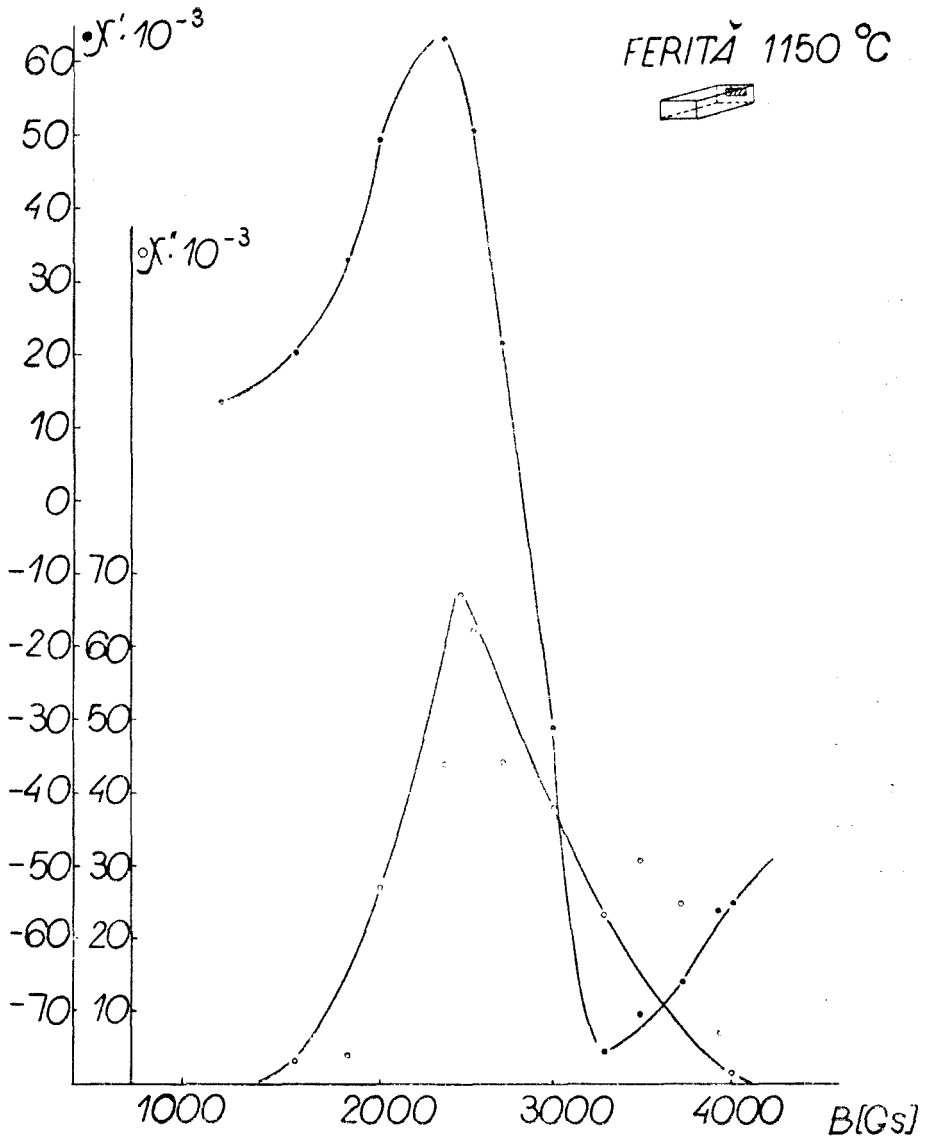


Fig. 6.

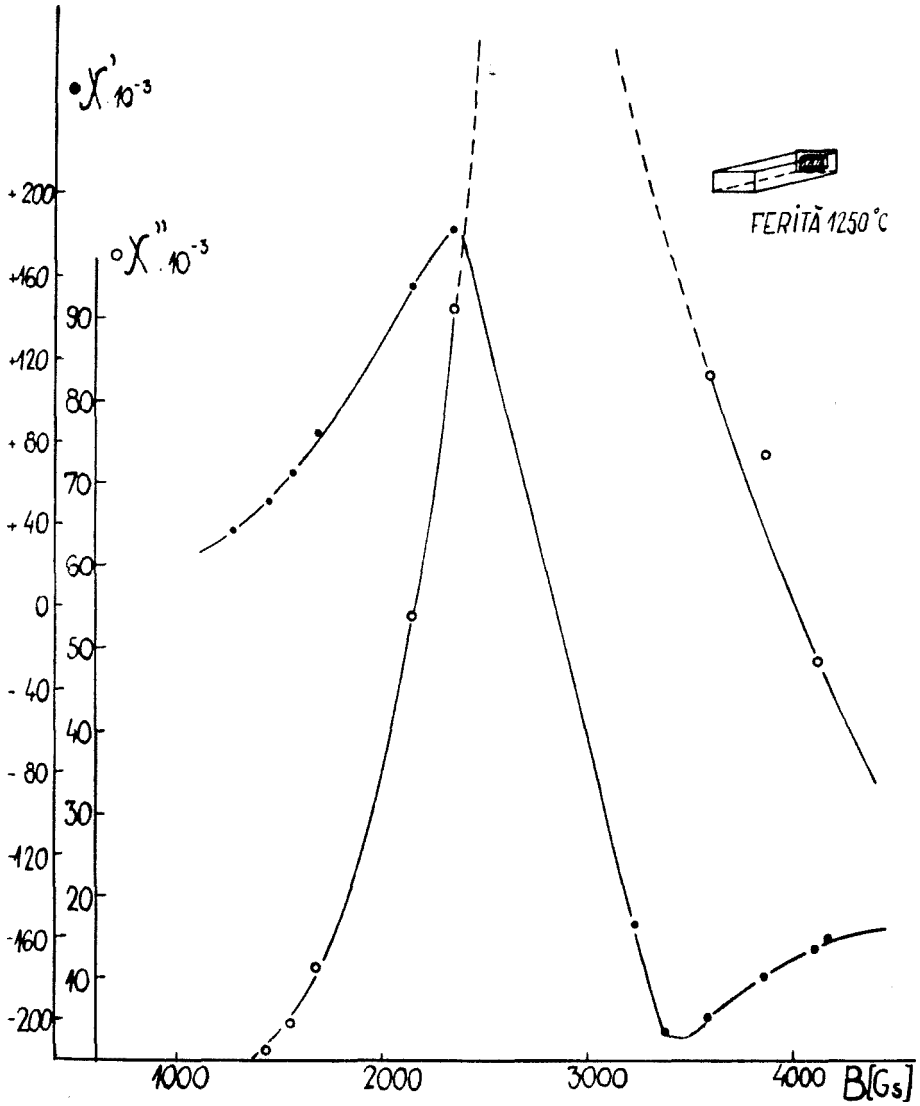


Fig. 7.

De ces représentations il résulte que le phénomène de dispersion et d'absorption des ondes électromagnétiques présenté par les ferrites en microondes dépend essentiellement de la température de syntérisation.

Concernant l'effet directionnel présenté par ces ferrites en fonction de la température de syntérisation (Fig. 8 — Fig. 11), à la suite de mesures il a été

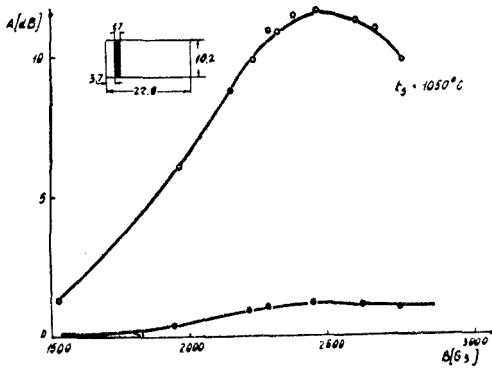


Fig. 8.

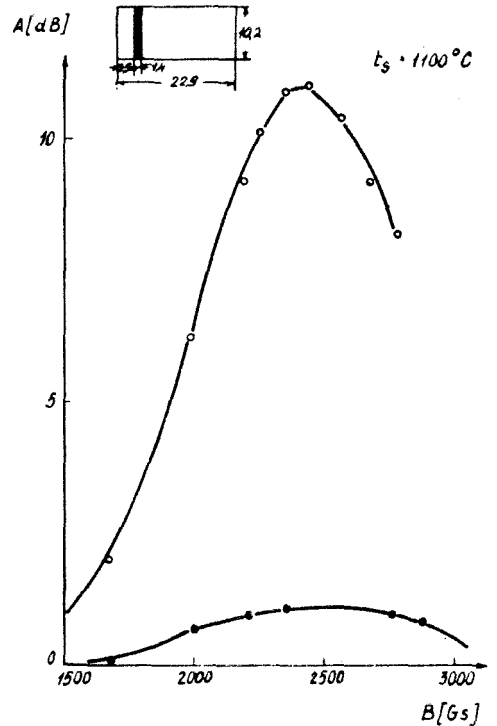


Fig. 9.

trouvé que la ferrite syntérisée à la température de 1150°C et d'épaisseur 1,5 mm, placée à la distance de 2,5 mm de la paroi du guide, présente le plus grand affaiblissement de l'onde inverse et la plus réduite atténuation de l'onde directe (Fig. 10).

L'absorption apparue pour un champ de polarisation nul est d'approximativement 0,5 dB.

Aucune modification notable des résultats obtenus n'a été observée pour un type de ferrite en fonction de son épaisseur.

La distorsion du mode de propagation a été faible.

**VI. Conclusions.** 1. Des résultats obtenus pour la  $\text{tg } \delta$  il s'ensuit que ces ferrites ont de faibles pertes diélectriques en microondes ( $\text{tg } \delta = 0,005 - 0,02$ ) et représentent un effet prononcé d'absorption pour un champ de polarisation ( $B_0 = 2700 \text{ Gs}$ ) satisfaisant à la condition de résonance ferromagnétique.

2. Le fait est à souligner que l'effet optimum d'isolation n'a pas été obtenu à l'épreuve avec un maximum (ferrite  $T = 1250^\circ\text{C}$ ) mais à l'épreuve (la ferrite  $T = 1150^\circ\text{C}$ ) qui possède une absorption au moins 4 fois plus faible.

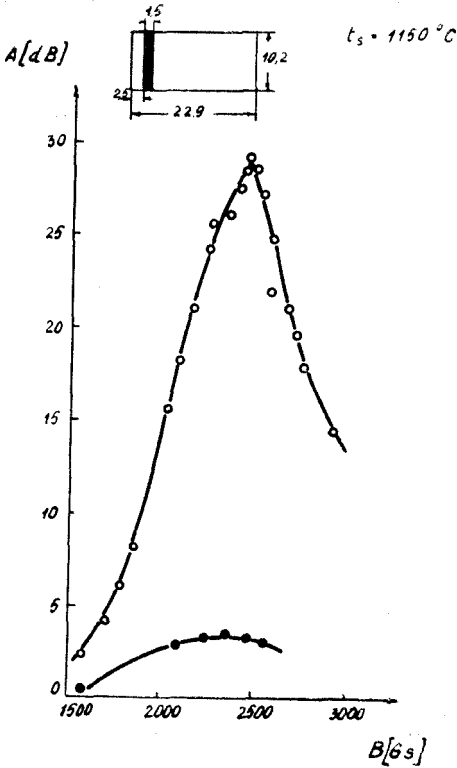


Fig. 10.

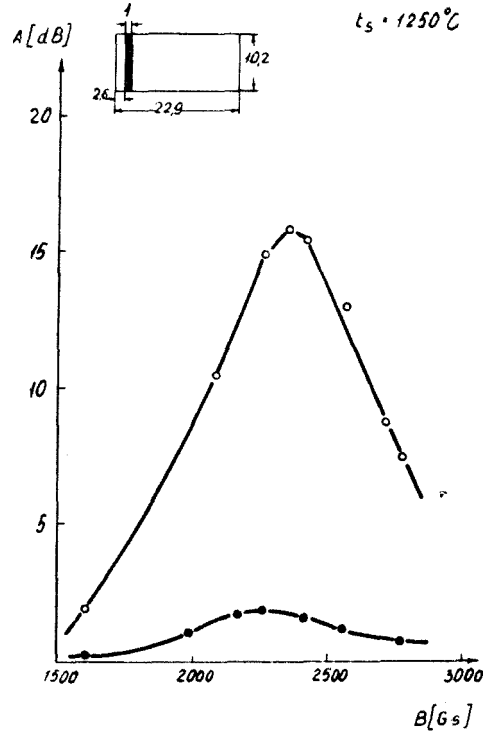


Fig. 11.

3. Les ferrites du type mentionné peuvent être utilisées pour confectionner l'isolateur directionnel, la plus conforme à ce but étant l'épreuve syntérisée à la température de  $1150^\circ\text{C}$  et polarisée avec un champ d'approximativement 2700 Gs. Le rétrécissement du champ de polarisation ne peut être obtenu que par la modification de la composition de la ferrite.

*Manuscrit reçu le 18 août 1966*

#### BIBLIOGRAPHIE

1. V. Cagan, Ann. de Phys. (Paris), 5, 2, p. 1301, 1960.
2. I. O. Artman, P. E. Tannenwald, J. Appl. Phys. 9, 26, p. 1124, 1955.
3. B. Lax, K. J. Button, ibidem, p. 1186.
4. A. Bódi, R. Baican, Rev. Roum. Phys. 12, 3, p. 311, 1966.



5. *Ferromagnitnyi rezonans*. Pod red. S. V. Vonsovskii. Sowremennye problemy fiziki. Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moskva, 1961, p. 13.
6. A. I. Mikaelian, *Teoria i primeneniie ferritow na swerkhwysoyikh tchastotakh*. Moscou, 1963, p. 372.
7. A. F. Harvey, *Microwave Engineering*. Academic Press, London-New York, 1963, p. 358.

MĂSURAREA UNOR PARAMETRI DE FERITE DE TIPUL  
 $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + b(\text{Cr}_2\text{O}_3) + X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$  ÎN BANDA X  
 (R e z u m a t)

Lucrarea cuprinde măsurarea constantei dielectrice complexe, a susceptibilității magnetice complexe a efectului direcțional și studiul acestor mărimi în funcție de temperatura de sinterizare a unor ferite, cu aplicații posibile în tehnica microundelor.

S-a ajuns la concluzia că feritele sinterizate la temperatura de 1150°C pot fi utilizate la confecționarea izolatoarelor direcționale în microunde.

ИЗМЕРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ФЕРРИТОВ ТИПА  $a(\text{Fe}_2\text{O}_3) + b(\text{Cr}_2\text{O}_3) +$   
 $X_1(\text{NiO}) + X_2(\text{ZnO})$  В ПОЛОСЕ X  
 ( Р е з ю м е )

Работа заключает в себе измерение комплексной диэлектрической постоянной, комплексной магнитной восприимчивости направляющего эффекта, а также изучение этих величин в зависимости от температуры спекания некоторых ферритов, с возможными применениями в технике микроволн.

Авторы пришли к выводу, что ферриты, спеченные при температуре 1150°C можно использовать для изготовления резонансных вентиляв в микроволнах.



# VARIAȚIA PERMITIVITĂȚII DIELECTRICE A ALCOOLULUI n-PROPILIC ÎN CÎMPUL ULTRASONIC

de

E. CONSTANTIN, A. CIUPE, D. AUSLÄNDER

Lucrarea de față, continuînd seria cercetărilor efectuate asupra comportării privind constanta dielectrică a unor lichide supuse acțiunii ultrasunetelor (1, 2, 3, 4), urmărește studiul modificărilor de permitivitate în cazul alcoolului n-propilic supus acțiunii cîmpului ultrasonic.

**Modul de lucru.** Fascicolul de ultrasunete s-a obținut cu ajutorul unui generator tip „Tesla” avînd frecvența de 1 MHz. Măsurarea permitivității s-a realizat cu un DK-metru tip „Oehme” de frecvență de 7 MHz. În celula de lucru termos-tată, fascicolul ultrasonic a fost dirijat paralel cu plăcile condensatorului. Timpul de ultrasonare a fost de 10 minute, iar intervalul de temperatură explorat, a fost cuprins între 10°C și 50°C.

**Rezultate experimentale.** Măsurările efectuate pun în evidență variația permitivității alcoolului n-propilic, efectul fiind în funcție de : a) timpul de ultrasonare, b) temperatura de lucru.

Astfel, considerînd funcția  $\Delta\varepsilon = f$  (timp), notînd :  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ , unde  $\varepsilon_1$  reprezintă valoarea inițială și  $\varepsilon_0$  valoarea în cîmp a permitivității, se constată că  $\Delta\varepsilon$  după o creștere bruscă în primele secunde, tinde spre o valoare maximă ce rămîne constantă ( $\Delta\varepsilon_{\max}$ ) cu prelungirea duratei de acțiune a ultrasunetelor, după cum rezultă din fig. 1.

Valorile lui  $\Delta\varepsilon$  cuprinse în tab. 1 sînt date la diferite momente ale ultrasonării, considerînd originea timpului, la apariția cîmpului.

După cum se observă, creșterea temperaturii duce la micșorarea pan-

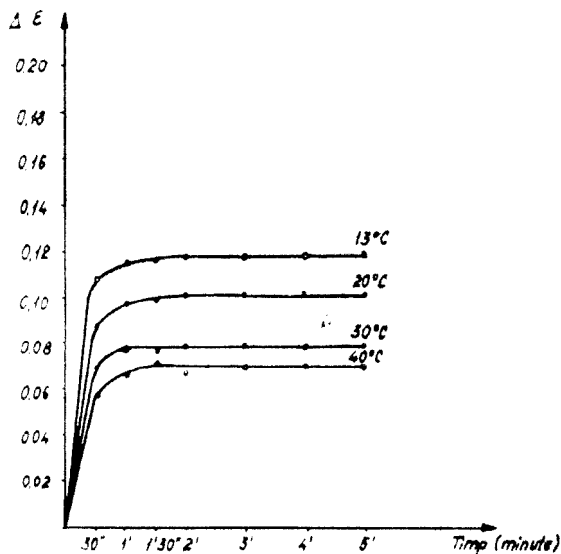


Fig. 1. Variația lui  $\Delta\varepsilon$  în funcție de timpul de ultrasonare pentru diferite temperaturi.

tei din partea lineară a efectului, aspectul general al curbelor rămâne însă neschimbat.

La deconectarea generatorului,  $\Delta\varepsilon$  tinde spre zero, printr-un salt brusc în primele fracțiuni de secunde, urmat apoi de o variație mai lentă în acelaș sens, care durează 3 minute.

Tabel 1

Variația lui  $\Delta\varepsilon$  în funcție de timpul de ultrasunare, pentru diferite temperaturi.

Temp. °C	Timpul de ultrasunare						
	30''	1'	1'30''	2'	3'	4'	5'
13	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
20	0,08	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
30	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
40	0,05	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07

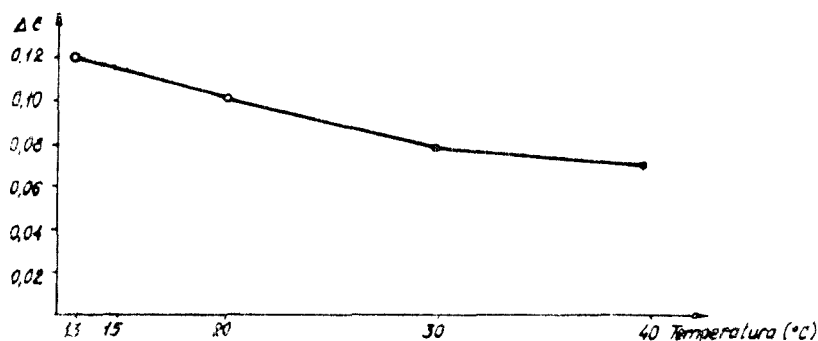
Tabel 2

Variația lui  $\Delta\varepsilon_{\max}$  în funcție de temperatură

Temp. °C	$\Delta\varepsilon_{\max}$	$\Delta\varepsilon_1$	$\Delta\varepsilon'/\Delta\varepsilon_{\max}$ (%)
13	0,12	0,11	8
20	0,10	0,09	6
30	0,08	0,07	11
40	0,07	0,06	7

Valorile lui  $\Delta\varepsilon_{\max}$  la diferite temperaturi cuprinse în tabelul 2, pun în evidența micșorarea efectului maxim cu creșterea temperaturii lichidului.

Deși lichidul a fost termostatat, totuși a fost necesară efectuarea corecțiilor pentru eliminarea efectului termic al ultrasunetelor ( $\Delta\varepsilon'$ ), astfel încît efectul propriu-zis este dat de  $\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_{\max} - \Delta\varepsilon'$ . Se mai poate constata de asemenea din fig. 2 caracterul nelinear al dependenței dintre efectul maxim și temperatura lichidului.

Fig. 2. Variația lui  $\Delta\varepsilon_{\max}$  în funcție de temperatură.

**Interpretarea rezultatelor experimentale.** În explicarea rezultatelor obținute admitem, ca ipoteză, că efectul ultrasunetelor se manifestă asupra legăturilor intermoleculare. Considerînd expresia energiei de interacțiune a moleculelor (5)

$$U_M = -N \frac{\gamma}{r^6} \left[ \frac{2}{3} \frac{\mu^4}{KT} + \frac{3}{4} Jex^2 + 2\alpha\mu^2 \right]$$

acțiunea ultrasunetelor se reflectă prin modificarea termenului „ $\gamma$ ” care depinde de numărul de molecule ce interacționează la un moment dat cu molecula considerată. Aceste modificări se reflectă de asemenea și în variația lucrului mecanic de evaporare  $L$ , din expresia :

$$U_M = L - RT$$

Variația efectului cu temperatura, permite interpretarea acțiunii ultrasunetelor cu ajutorul teoriei structurii cvasicristaline a fazei lichide (6), prin schimbarea numărului golurilor ; astfel prin ultrasunerea lichidelor, se vor modifica valorile lui „ $a$ ” și  $\Delta U$  din relația :

$$n = a \cdot e^{\frac{1}{RT}} \cdot N \cdot e^{-\frac{\Delta U + p\Delta V}{RT}}$$

**Concluzii.** 1. Cîmpul ultrasonic de frecvența 1 MHz modifică permitivitatea alcoolului n-propilic. 2. Efectul depinde de timpul de ultrasunare și de temperatura alcoolului. 3. Fenomenul se explică prin variația numărului de goluri în structura lichidului.

*Întrată în redacție la 10 decembrie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. D. Ausländer, E. Constantin, S. Vădeanu, Lucrările Consfătuirii „Metode ultrasonice de măsurare și control”. Buc., 29–31 octombrie 1964.
2. D. Ausländer, E. Constantin, Studia, ser. Math. Physica, fasc. 2 1965.
3. D. Ausländer, E. Constantin, A. Ciupe, Comunicare prezentată la Sesiunea științifică a Institutului pedagogic din Cluj, 19–20 dec. 1964.
4. D. Ausländer, E. Constantin, A. Ciupe, „Acustica” 1966, 17, nr. 4, pag. 204–208.
5. E. A. Rapštinskaja, K. Skava, *Fizika dielektrikov*. Trudi vses. konf. po fizike diel. Dnepropetrovsk, 1956.
6. I. Mihailov, B. Soloviev, P. Sirnikov, *Osnovi molekuliŭinej akustiki*. Moscova, 1964 pag. 93.

#### ИЗМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ПРОПИЛОВОГО СПИРТА В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ

(Резюме)

Диэлектрическая проницаемость n-пропилового спирта изменяется в ультразвуковом поле с частотой 1 МГц в зависимости от времени обработки ультразвуками и от температуры. Явление приписано действию ультразвукового поля на уровне межмолекулярных связей.

#### VARIATION DE LA PERMITTIVITÉ DIÉLECTRIQUE DE L'ALCOOL n-PROPYLIQUE DANS LE CHAMP DES ULTRA-SONS

(Résumé)

La permittivité diélectrique de l'alcool n-propylique varie dans le champ des ultra-sons à fréquence de 1 MHz en fonction du temps et de la température. Ce phénomène est attribué à l'action du champ des ultra-sons sur les liaisons intermoléculaires.



# ANALIZA CIRCUITULUI DE FORMARE A IMPULSURILOR DE DURATĂ SCURTĂ, CU GRUP RC ÎN EMITERUL TRANZISTORULUI

de  
EMIL TĂTARU

Circuitele de formare a impulsurilor de durată scurtă ocupă un loc important în tehnica impulsurilor, motiv pentru care analiza lor merită o atenție deosebită. În articolul de față se prezintă analiza circuitului de formare a impulsurilor de durată scurtă cu grup RC în circuitul de emiter, lucru care nu a fost făcut pînă în prezent. Acest circuit a cărui schemă este arătată în fig. 1 a fost dat în [1], fiind folosit la realizarea circuitelor de numărare pentru investigarea spațiului cosmic.

În analiza de față se utilizează schema echivalentă a tranzistorului dată în [2]. După cum a fost arătat în [3], în cazul tranzistoarelor cu cîmp intern, o influență mare asupra proceselor de comutare a exercită capacitatea de sarcină a joncțiunii emiter—bază, motiv pentru care ea este atașată schemei echivalente din [2] și anume în paralel cu capacitatea de difuzie a joncțiunii emiter—bază. De asemenea se va ține seama de factorul  $m$  ce caracterizează defazajul coeficientului de amplificare al tranzistorului în conexiunea cu baza la masă [4]. Se folosesc următoarele notații:  $\alpha_0, \beta_0$  — coeficienții de amplificare în curent la frecvențe joase în conexiunile cu baza respectiv emiterul la masă;  $r_e$  — rezistența diferențială a joncțiunii emiter—bază;  $r_{bb'}$  — rezistența proprie a bazei;  $C_d$  — capacitatea de difuzie a joncțiunii emiter—bază;  $C_c$  respectiv  $C_e$  — capacitățile de sarcină a joncțiunilor colector—bază respectiv emiter—bază; iar

$$R_b = r_{bb'} + R_i; \quad \tau_x = r_e C_d;$$

$$\tau_e = r_e C_e; \quad \tau_c = R_c C_c;$$

$$\tau = \tau_x(1 + \alpha_0 m) + \tau_e + \tau_c; \quad \tau_h = R_b C_E$$

$$A_1 = \tau \frac{R_b}{R_E} + \tau_x + \tau_e + \tau_c + C_c R_b + \tau_h \left( \frac{1}{\beta_0} + \frac{r_e}{R_b} \right)$$

$$A_2 = \tau \tau_b$$

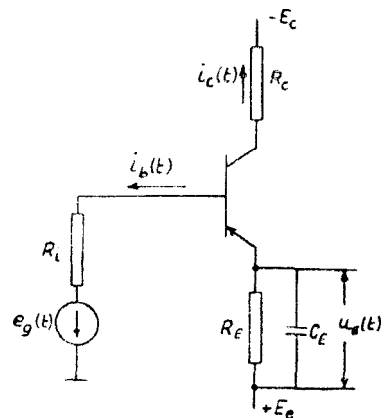


Fig. 1. Schema circuitului de formare a impulsurilor de durată scurtă cu grup RC în emiterul tranzistorului

Întrucît se lucrează la valori relativ ridicate ale semnalelor, în calcule se utilizează valorile medii ale parametrilor.

Fiind îndeplinite condițiile :

$$R_E > R_b \gg r_o; \quad (1) \quad \beta_o \gg 1 \quad (2)$$

$$A_1^2 \ll 4A_2; \quad (3) \quad \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} \gg \frac{C_c}{C_E} \quad (4)$$

și efectuînd calculele conform schemei echivalente, se găsește [5] :

$$i_c(t) = \frac{E_{go}}{R_E} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R_E}{R_b}\right)^2 \frac{\tau_b}{\tau}} \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\tau\tau_b}} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (5)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{R_E}{R_b} \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}}\right)$$

$$u_E(t) = E_{go} \left| 1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\tau\tau_b}}\right) \right| \quad (6)$$

$$i_b(t) = \frac{E_{go}}{\beta_o R_E} + \frac{E_{go}}{R_b} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\beta_o} \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} + \frac{R_b}{R_E} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_b}}\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\tau\tau_b}} - \Psi\right) \quad (7)$$

$$\Psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\beta_o} \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} + \frac{R_b}{R_E} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_b}}\right)$$

( $E_{go}$  fiind saltul de tensiune aplicat de sursa  $e_g(t)$ ).

Pentru a obține un raport între amplitudinea impulsului și componenta continuă precum și o termostabilitate foarte bună este necesar ca

$$R_E \gg R_b \quad (8)$$

În acest caz din relația (5) se deduce

$$i_c(t) = \frac{E_{go}}{R_b} \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\tau\tau_b}}\right) \quad (9)$$

iar din relația (7), dacă este îndeplinită condiția

$$\sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} \ll \beta_o$$

rezultă :

$$i_b(t) = \frac{E_{go}}{R_b} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\tau\tau_b}}\right) \quad (10)$$

Pe baza relației (9) se găsește că durata  $t_i$  și amplitudinea  $I_{CM}$  ale impulsului de colector au expresiile :

$$t_i = \pi \sqrt{\tau\tau_b}; \quad I_{CM} = \frac{E_{go}}{R_b} \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}} \quad (11)$$



Pentru a aprecia performanțele circuitelor de formare ale impulsurilor de durată scurtă este potrivit a introduce factorul  $K$ , analog produsului amplificare-bandă, definit prin relația :

$$K = \frac{a}{t_i} \quad (12)$$

unde  $a$  reprezintă raportul dintre valorile maxime ale curentului de colector și bază [5]. Ținând seama de relațiile (10), (11) și (12) se găsește

$$a = \sqrt{\frac{\tau_b}{\tau}}; \quad K = \frac{1}{\pi\tau}$$

În cazul valorilor mari ale capacității  $C_E$ , cînd condiția (3) nu mai este îndeplinită iar componentele reactive ale tranzistorului pot fi neglijate, dacă nu se ține seama de componentele continue ale semnalelor, se poate scrie :

$$i_b(t) = \frac{E_{g0}}{R_b + \beta_e r_e} e^{-t/\tau_0}$$

$$i_c(i) = \frac{\beta_0 E_{g0}}{R + \beta_0 r_e} e^{-t/\tau_0}$$

$$u_E(t) = E_{E0}(1 - e^{-t/\tau_0})$$

$$\tau_0 = C_E \left( r_e + \frac{R_b}{\beta_0} \right)$$

$$a = \beta_0; \quad t_i = 2,3\tau_0; \quad K = \frac{\beta_0}{2,3\tau_0}$$

Din rezultatele obținute mai sus se poate conchide că, dacă sînt îndeplinite condițiile (1)–(4), atunci curentul de colector respectiv bază au o variație sinusoidală respectiv cosinusoidală în timp. Amplitudinea impulsului de colector este cu atît mai mare cu cît raportul  $(\tau_b/\tau)$  este mai mare, adică cu cît  $C_E$  este mai mare și  $R_b$ ,  $R_e$  mai mici, iar durata sa  $t_i$  este cu atît mai mică cu cît  $\tau$ ,  $R_b$ ,  $C_E$  sînt mai mici. Se poate observa că impulsul de colector are formă simetrică iar amplitudinea și durata lui nu depind de coeficientul de amplificare  $\beta_0$ . În ceea ce privește variația în timp a tensiunii  $u_E(t)$  la bornele capacității  $C_E$ , din relația (6) rezultă că la  $t = t_{i2}$ ,  $u_E = E_{g0}$ , iar la  $t = t_i$ ,  $u_E = 2E_{g0}$ , ceea ce se explică prin faptul că  $i_b(t_{i2}) = 0$ ,  $i_b(t_i) = -E_{g0}/R_b$  și deci căderea de tensiune pe rezistența  $R_b$  este nulă pentru  $t = t_{i2}$  și  $(-E_{g0})$  pentru  $t = t_i$ .

Pentru a obține numai semnalul corespunzător primei semiperioade iar celelalte să fie tăiate, punctul de funcționare se alege în cotul caracteristicii statice a joncțiunii emiter–bază, astfel încît la  $t > t_i$  condiția (3) să nu mai fie îndeplinită; în consecință procesele tranzitorii vor fi descrise de funcții exponențiale iar amplitudinea impulsului negativ de colector va fi mult mai mică decît a celui pozitiv dat de relația (11) [5]. La sfîrșitul proceselor tranzitorii tensiunea  $u_E$  este egală cu  $E_{g0}$ . După ce practic procesul tranzitoriu s-a terminat, dacă tensiunea  $e_c(t)$  revine prin salt la valoarea zero, descărcarea capacității  $C_E$  este descrisă de funcții exponențiale. Întrucît rezistența echivalentă  $r_e$  are o valoare considerabil mai mare în cazul descărcării decît în cazul încărcării capacității  $C_E$ , se poate afirma că

durata proceselor de descărcare este mai mare decât durata  $t_i$  a impulsului de colector.

Rezultatele obținute mai sus au fost confirmate experimental cu rezerva următoarelor observații:

— tensiunile  $u_E(t_{i/2})$  și  $u_E(t_i)$  sînt mai mici decât  $E_g$ , respectiv  $2E_g$ , datorită căderii de tensiune pe joncțiunea emiter-bază;

— cu creșterea amplitudinii impulsurilor de semnal are loc o creștere nelineară a amplitudinii impulsului de colector, ceea ce se explică prin nelinearitatea caracteristicii statice a joncțiunii emiter—bază;

— amplitudinea  $I_{CM}$  a impulsului de colector crește mai repede iar durata lui  $t_i$  mai încet decât  $C_E^{1/2}$ , aceasta fiind o consecință a micșorării constantei de timp  $\tau$  la creșterea lui  $I_{CM}$  (situația este similară în cazul dependenței lui  $I_{CM}$  și  $t_i$  în raport cu rezistența  $R_b$ );

— amplitudinea  $I_{CM}$  crește iar durata  $t_i$  scade la creșterea tensiunii de alimentare  $E_c$  a circuitului de colector, ceea ce se explică prin micșorarea constantei de timp  $\tau_c$  și dependența caracteristicii statice a joncțiunii emiter—bază în raport cu  $E_c$ ;

— descărcarea capacității  $C_E$  este cu atît mai rapidă cu cît sînt mai mici mărimile  $R_b$ ,  $R_E$ ,  $C_E$  iar curentul de emiter în regim static este mai mare.

În comparație cu circuitul de formare a impulsurilor de durată scurtă cu grup  $RC$  de derivare în baza tranzistorului [6], la consum de putere egal și la aceeași amplitudine a impulsului de colector, în cazul circuitului de formare cu grup  $RC$  în emiterul tranzistorului, se obține o durată a impulsului de circa trei ori mai mică și o frecvență maximă de lucru de aproximativ două ori mai mare.

Prin urmare, se poate conchide că circuitul de formare a impulsurilor de durată scurtă cu grup  $RC$  în circuitul de emiter al tranzistorului are următoarele calități: realizează impulsuri simetrice a căror amplitudine și durată nu depind de factorul de amplificare  $\beta_0$  (dacă sînt îndeplinite condițiile (I)–(4)), prezintă o termostabilitate foarte bună, consum de putere redus și viteză de comutare ridicată.

#### BIBLIOGRAFIE

1. E. Gotlieb, J. Giorgis, *Tunnel Diodes. Part IV, Logic and Switching Circuits*, Electronics, July 5, 1963, 16--23.
2. R. F. Shea, *Tranzistor Circuit Engineering* (ediția în l. rusă, pag. 29, 179), Gosenergoizdat, Moscova, 1964.
3. V. I. Sveikin *Impulsii metod opredelenia parametrov dreifovnih tranzistorov*, Radiotekhnika i elektronika, 1961, nr. 6, 999–1009.
4. M. Drăgănescu, *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit*, Ed. Acad. R.P.R. 1962.
5. E. Tătaru, *Isledovanie nekotoryh shem economicinih dvoicinih sciotcikov, ispolzuiușcih tunnelnye diodi soumesto s tranzistorami*. Disertație, Leningrand 1965.
6. B. N. Kononov, A. S. Sidorov, *Primenenie tunnelnih diodov v uzlah elektrofiziceskoi aparatury*, Trudî piatoî naucinotekhniceskoi konferenții po iadernoi radioelektronike, Tom, I, 169–183. Atomizat.

АНАЛИЗ ЦЕПИ ОБРАЗОВАНИЯ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ С  $RC$  ГРУППОЙ  
В ЭМИТТЕРЕ ТРАНЗИСТОРА

(Резюме)

В статье анализируется переходный режим в случае цепи формирования кратковременных импульсов с  $RC$  группой в эмиттере транзистора. Показывается, что, если условия (1) — (4) выполнены, и рабочая точка целесообразно выбрана в изгибе статической характеристики контакта эмиттер-база, то коллекторный импульс имеет форму одной половины синусоиды. Изложены также и замечания, касающиеся экспериментирования схемы и проверки полученных теоретических результатов.

ANALYSE DU CIRCUIT DE FORMATION DES IMPULSIONS DE COURTE DURÉE, AVEC LE  
GROUPE  $RC$  DANS L'ÉMETTEUR DU TRANSISTOR

(Résumé)

L'article contient l'analyse du régime transitoire dans le cas du circuit ci-dessus. L'auteur montre que, si les conditions (1) — (4) sont remplies et que le point de fonctionnement est judicieusement choisi au coude de la caractéristique statique de la jonction émetteur-base, l'impulsion de collecteur a la forme d'une moitié de sinusoïde. De même l'auteur présente les observations relatives à l'expérimentation du schéma et à la vérification des résultats théoriques obtenus.



## OBȚINEREA MONOCRISTALELOR DE RUTIL ( $\text{TiO}_2$ ) ALIAT CU NIOBIU PE O INSTALAȚIE VERNEUIL,

de  
VALER CRISTEA

Deși cunoscută de mult, metoda de creștere a monocristalelor elaborată de către Verneuil [1], era folosită pînă nu demult exclusiv pentru obținerea pe cale artificială a cristalelor de corindon cerute în industria ceasornicelor. În ultimii ani însă, metoda a început să fie folosită și pentru creșterea cristalelor unor oxizi semiconductori ca și pentru obținerea cristalelor de ferite [2,3]. În cazul rutilului ( $\text{TiO}_2$ ) metoda Verneuil este singura care a permis pînă în prezent obținerea unor monocristale avînd dimensiuni suficient de mari pentru a se putea confecționa din ele probele necesare întreprinderii unui studiu mai detaliat al proprietăților fizice ale acestui material [4].

Scopul propus de noi era de a obține monocristale de rutil impurificat cu niobiu în proporție de 0,005–1,00% Nb și de a elabora un regim al tratamentului termic care să le confere o mare stabilitate a proprietăților lor electrice în raport cu mediul oxidant exterior.

**Descrierea instalației.** Instalația Verneuil folosită, și a cărei secțiune este reprezentată schematic în fig. 1, este o instalație model P o p o v [5] care a fost perfecționată. Părțile ei principale sînt capul instalației (1) cu rezervorul de pulbere (4) și sistemul de presărare (nereprezentat), arzătorul cu flacără oxihidrică (8), cup-torul de cristalizare (13) și suportul împreună cu sistemul care-l pune în mișcare (15). Pulbera de  $\text{TiO}_2$  se găsește în camera de vibrație (4) care se fixează în capul instalației prin intermediul unei membrane (2). Datorită loviturilor ritmice ale unui ciocănel (nereprezentat) în capacul camerei (3), pulbera este presărată prin sita (6) în tubul interior al arzătorului (7), unde pătrunde împreună cu oxigenul. Debitul pulberii se reglează în două moduri: prin variația intervalului bătăilor și prin variația intensității lor. Mișcarea ritmică a ciocănelului se asigură cu ajutorul unui mic motor electric alimentat de la un variac. De la axul motorului mișcarea de rotație este transmisă unei roți cu patru palete, care acționează o pîrghie (brațul ciocănelului) întinsă de un sistem de două resorturi.

Alimentarea uniformă a arzătorului cu gaze este asigurată de la balonul cu hidrogen (respectiv oxigen), din care gazul este trimis într-un balon tampon la o presiune de 4–5 atmosfere. De aici gazul se trimite la reductoarele fixate pe instalație, apoi sub o presiune de 2 atm. spre robinetele micrometrice. După aceea gazul trece prin rotametrul și intră în arzător. Înainte de a ajunge în camera de

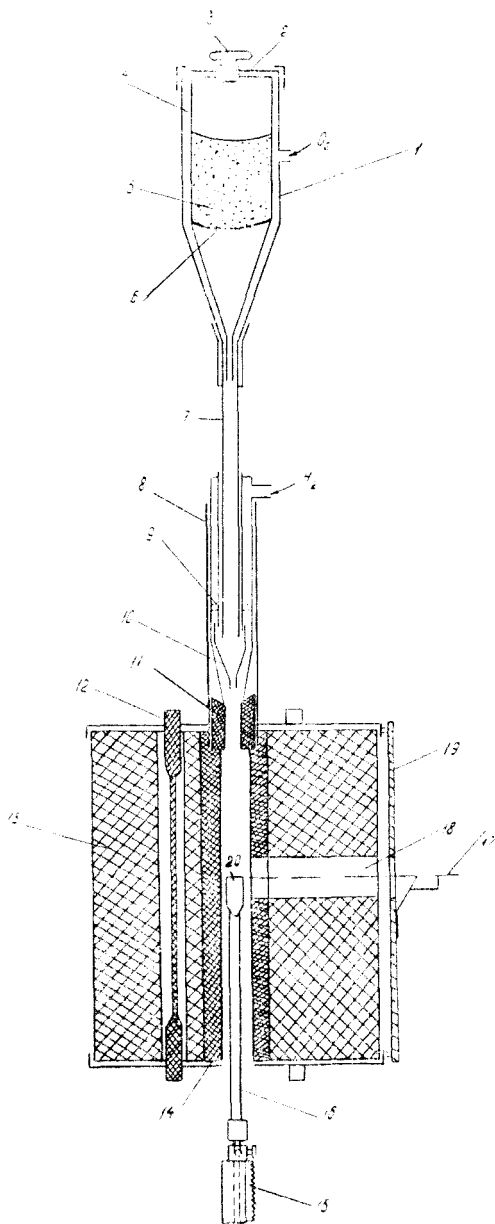
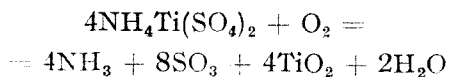


Fig. 1.

combustiune (11), el este trecut printr-o sită (9) menită să uniformizeze presiunea în toată secțiunea. Camera de combustione în aceste experiențe este de 8 mm. Cuptorul este construit din cărămizi de șamotă prin care s-au sfredelit 8 găuri paralele cu tubul central (camera de cristalizare) și în care au fost fixate bare de silită (12), menite să reducă gradientul radial de temperatură în camera de cristalizare. Barele conectate alternativ formează două circuite electrice, alimentate în mod independent de la un autotransformator de tip PHO. Tubul central la cuptorului (14) din ceramică refractară și care constituie camera de cristalizare, este deschis în partea de jos, pe unde pătrunde suportul cristalului (o bară de silită) (16) iar lateral este prevăzut cu o fereastră îngustă (18) pentru observarea directă a procesului. În partea anterioară a cuptorului este fixat un ecran de radiație (19) și vizorul (17) prevăzut cu filtru optic.

Suportul cristalului (15) constituie un sistem complex permițând mișcarea de rotație cu viteză variabilă a suportului (16), cât și coborârea lui automată cu viteza dorită, în funcție de viteza de creștere a cristalului (20).

**Prepararea pulberii.** Pentru funcționarea instalației Verneuil este necesară pulbere cu o granulație determinată (0,1–1 $\mu$ ) cu o pulverulență bună și cu un conținut minim de impurități. Pulberea de bioxid de titan având aceste proprietăți a fost obținută prin descompunerea termică a complexului: dublu sulfat de amoniu-titan, conform reacției:



Pentru obținerea pudrei de bioxid de titan cu conținutul dorit de pentoxid de niobiu s-au folosit două căi: coprecipitarea compușilor de titan și niobiu din soluție sau amestecarea mecanică a  $\text{TiO}_2$  și  $\text{Nb}_2\text{O}_5$ . În ambele cazuri s-a obținut o bună omogenizare a amestecului,

verificată prin analiza spectrală a unor probe de pulbere. Pulberea obținută, pentru a fi ferită de umezeală, a fost păstrată în borcane de sticlă închise ermetic, iar înaintea întrebuințării a fost calcinată prin încălzire pe un reșou electric.

Viteza de creștere a monocristalelor a fost de 5–8 mm/h obținându-se monocristale tronconice, avînd o înălțime pînă la 60 mm și un diametru la bază, de 10–15 mm. Monocristalele creșteau regulat de obicei atunci cînd se reușea să se mențină tot timpul forma convexă a suprafeței de creștere.

Pentru a evita apariția fisurilor la monocristale după oprirea creșterii, acestea erau răcite cu grijă împreună cu cuptorul. După răcire se supuneau unui regim de recoacere în aer la 800°C timp de 3 ore, care avea dubla menire: de a diminua tensiunile mecanice din cristal și de a reduce la minimum numărul vacanțelor anionice formate în procesul creșterii în atmosfera reducătoare de hidrogen. Eficacitatea regimului de recoacere ales a fost verificată prin aceea că o probă de rutil pur care în prealabil fusese supus unei reduceri parțiale de natură să-l opacizeze, acum după ce a suferit regimul de recoacere dat, s-a deschis, la culoare devenind transparentă. Monocristalele de rutil aliat cu niobiu, prin acest tratament nu își modifică culoarea, ele rămînînd de culoarea gri închis ca și mai înainte.

Monocristalele obținute au fost orietate la röntgengoniometru, și din ele, cu ajutorul unui disc de diamant, s-au tăiat probele de formă paralelipipedică, avînd lungimea paralelă cu una din axele cristalografice  $a$  sau  $c$ .

Analiza röntgeno-structurală a arătat că în pulberea întrebuințată modificarea cristalină a bioxidului de titan este anatazu, în timp ce monocristalele obținute au structura tetragonală caracteristică rutilului. Nici o altă fază înafara acesteia nu a putut fi pusă în evidență în limita concentrațiilor de niobiu folosite, ceea ce permite să presupunem că în tot domeniul de concentrații rutilul și pentoxidul de niobiu au format soluție solidă.

Studiul proprietăților electrice ale probelor tăiate din aceste monocristale a scos în evidență dependența acestora de concentrația atomilor de Nb din soluție [6].

În concluzie, se remarcă faptul că prin metodica arătată s-au obținut monocristale de bună calitate de rutil aliat cu niobiu. Metodica este însă dificilă, deoarece cristalizarea în condițiile flăcării oxihidrice deschise este însoțită de procese fizico-chimice complicate, a căror cinetică practic nu poate fi urmărită.

*Entrat în redacție la 4 iulie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. Verneuil, *Compt. rend.*, **35**, 791 (1902).
2. W. Bauer și colab., *Report of International Conf. of Solid State Physics*, Brussels, 1958.
3. A. A. Popova, *Kristalografia*, **9**, 1, 128 (1964).
4. R. G. Breckenridge, W. R. Hosler, *Phys. Rev.* **91**, 793 (1953).
5. S. K. Popov, *Rost kristallov*, **II**, 140 (1959).
6. N. P. Bogoroditki, V. Cristea și I. I. Panova, *Izvestia leningradskogo elektrotehniceskogo instituta im. V. I. Ulianova (Lenina)*, **57**, I, p. 123 (1966).

ПОЛУЧЕНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ РУТИЛА ( $\text{TiO}_2$ ), ЛЕГИРОВАННОГО С НИОБИЕМ  
НА УСТАНОВКЕ ТИПА ВЕРНЕЙ

(Резюме)

В усовершенствованной установке типа Верней получают монокристаллы рутила ( $\text{TiO}_2$ ), легированного с ниобием в пропорции 0,005—1,00 % Nb.

THE OBTAINING OF THE RUTILE MONOCRYSTALS ( $\text{TiO}_2$ ) ALLOYED WITH NIOBIUM IN  
A VERNEUIL INSTALLATION

(Summary)

In a perfecting Verneuil installation were obtained rutile monocrystals ( $\text{TiO}_2$ ) alloyed with niobium in proportion of 0.005 — 1.00% Nb.



# MĂSURAREA REZISTIVITĂȚII ELECTRICE LA PLĂCUȚE SUBȚIRI DE MATERIAL PRIN METODA SONDELOR

de  
GHEORGHE IONCA

În acest articol este redat modul de determinare a rezistivității electrice la plăcuțe subțiri cu metoda celor patru sonde. S-a dedus o formulă simplă de calculare a rezistivității electrice  $\rho = \pi z_0 \frac{W}{I}$  care este verificată experimental, rezultatul fiind în concordanță bună cu cele din literatură.

Bazat pe această metodă s-a determinat variația rezistivității electrice la aliajele de Ni—Sn în funcție de temperatură.

**Introducere.** Metoda celor 4 sonde constă în a injecta un curent într-o substanță conductoare sau într-un semiconductor și în a măsura tensiunea dintre sondele din mijloc (vezi fig. 1).

Această metodă diferă de metodele clasice prin aceea că repartizarea liniilor de curent nu este uniformă.

Repartiția liniilor de curent este în funcție de dispunerea sondelor și de forma probei.

Calcularea lui  $\rho$  s-a făcut cu următoarele ipoteze: 1. Contactul dintre sonde și conductor este considerat punctual. 2. Conductorul este presupus omogen în în toată regiunea din vecinătatea sondelor.

Este cunoscut faptul că repartizarea câmpului electric și a vectorului curent în interiorul unui conductor omogen se supun legii lui Ohm și Laplace. Determinarea repartiției liniilor de curent se reduce aici la distribuția câmpului electrostatic creat prin două puncte-sursă (locul sondelor de injectare).

Potențialul electrostatic creat printr-un punct-sursă este de forma:

$$V = \frac{Q}{r} \quad (1)$$

unde  $r$  este distanța în raport cu punctul-sursă,  $Q$  este o constantă dată de intensitatea

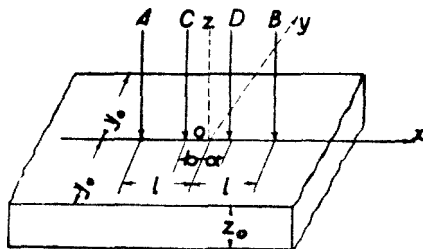


Fig. 1.

curentului injectat sau recules. În vecinătatea unui punct potențialul creat de restul punctelor este neglijat.

Cîmpul electric este radial și intensitatea

$$E = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{r^2} \quad (2)$$

Dacă  $\rho$  este rezistivitatea mijlocie, vectorul curent ia valoarea

$$\vec{i} = \frac{dV}{\rho \cdot dl} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dV}{dl}$$

$$|\vec{i}| = \frac{|\vec{E}|}{\rho} = \frac{Q}{\rho r^2} \quad (3)$$

Curentul total  $I$  injectat prin punctul sursă va fi:

$$I = |\vec{i}| \times 2\pi r^2 = \frac{2\pi Q}{\rho} \quad (4)$$

$$Q = \frac{\rho I}{2\pi} \quad (5)$$

Din (1) și (5) avem:

$$V = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (6)$$

**Calculul rezistivității electrice.** Pentru a calcula diferența de potențial între  $C$  și  $D$  (fig. 1) aplicăm metoda imaginilor [1], [2].

Punctele coliniare  $ABCD$  sînt situate în planul de simetrie al probei  $y = 0$ . Curentul se injectează prin  $A$  și se reprimește prin  $B$  de coordonate  $A(-1, 0, 0)$  și  $B(+1, 0, 0)$ . Coordonatele imaginilor  $A$  și  $B$  în raport cu planele limită  $z = 0$ ,  $z = +z_0$ ,  $z = -z_0$ ,  $z = +y_0$ ,  $z = -y_0$ , sînt date de formulele generale

$$x = \pm l; \quad y = 2my_0; \quad z = 2nz_0$$

unde  $m$  și  $n$  iau valori de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , valoarea zero corespunzînd punctelor superficiale. Expresia potențialului într-un punct din interiorul probei este:

$$W(x, z, y) = \frac{\rho I}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(l-x)^2 + (2my_0 - y)^2 + (2nz_0 - z)^2}} + \dots \right]$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{(l+x)^2 + (2my_0 - y)^2 + (2nz_0 - z)^2}} \right] \quad (7)$$

Tensiunea măsurată între  $C$  și  $D$  se scrie :

$$v = V(a, 0, 0) - V(-a, 0, 0) = 2V(a, 0, 0) \tag{8}$$

$$v = \frac{\rho I}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(l-a)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] \tag{9}$$

Descompunând (9) în doi termeni condiția ca sondele să fie echidistante obținem :

$$v = \frac{\rho I}{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4a)^2 + (2nz_0)^2}} \right] + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4a)^2 + (2my_0)^2 + (2nz_0)^2}} \right] \right\} \tag{10}$$

Primul termen din (10) se mai poate scrie :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2nz_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4a)^2 + (2nz_0)^2}} \right] = \frac{1}{4a} + \frac{2}{2z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2a}{z_0}\right)^2 + n^2}} \right] = \frac{1}{4a} L(p) \tag{11}$$

unde  $p = a/z_0$

Al doilea termen din (10) se poate scrie sub forma :

$$\frac{1}{2z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{(2a)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{(4a)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} + n^2}} \right] \approx \frac{1}{2z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \text{Log} \frac{N^2}{M^2} \tag{12}$$

unde

$$M^2 = \frac{(2a)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} \geq 1; \quad N^2 = \frac{(4a)^2 + (2my_0)^2}{(2z_0)^2} \geq 1$$

Însumarea din (12) se face trecându-se la integrală de forma :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z(n) dn$$

Se demonstrează că :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \text{Log} \left( 1 + \frac{l^2}{m^2} \right) = \text{Log} \frac{\text{sh} \pi l}{\pi l} \quad (13) \rightarrow 0 \quad [1]$$

Înlocuind în (12) obținem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \text{Log} \frac{(4a)^2 + (2my_0)^2}{(2a)^2 + (2my_0)^2} &= \frac{1}{2z_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \text{Log} \left| 1 + \left( \frac{4a}{2my_0} \right)^2 \right| - \text{Log} \left| 1 + \left( \frac{2a}{2my_0} \right)^2 \right| \right\} = \\ &= \frac{1}{2z_0} \text{Log} \frac{2a}{4a} \frac{\text{sh} \frac{4\pi a}{2y_0}}{\text{sh} \frac{\pi a}{y_0}} = \frac{1}{2z_0} \text{Log} \frac{1}{2} \frac{2 \text{sh} \frac{\pi a}{y_0} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0}}{\text{sh} \frac{\pi a}{y_0}} = \frac{1}{2z_0} \text{Log} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0} \end{aligned} \quad (14)$$

Din (10) se obține relația finală :

$$w = \frac{\rho l}{\pi} \left[ \frac{1}{4a} L(\rho) + \frac{1}{z_0} \text{Log} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0} \right] \quad (15)$$

**Cazuri particulare.** a)  $z_0 \geq 4a$  și  $y_0 \geq a$  funcția  $L(\rho) \rightarrow 1$  când  $\rho \rightarrow 0$ , deci când  $z_0$  e suficient de mare, iar  $\text{Log} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0} \rightarrow 0$  când  $\frac{a}{y_0} \rightarrow 0$

În acest caz :

$$W = \frac{\rho l}{\pi} \cdot \frac{1}{4a} \quad \text{de unde} \quad \rho = 2\pi \frac{W}{l} \quad (16)$$

(unde  $d$  = distanța între sonde) formală cunoscută în literatură [3]

b)  $z_0 < a$ . Primul termen din expresia (10) mai poate fi scris și sub forma :

$$\frac{1}{2z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{z_0}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2a}{z_0}\right)^2 + n^2}} \right] = \frac{1}{2z_0} \text{Log} \left( \frac{4a}{2a} \right)^2 = \frac{1}{z_0} \text{Log} 2 \quad (17)$$

Înlocuind în (10), (14) și (17) obținem :

$$W = \frac{\rho l}{\pi} \frac{1}{z_0} \left( \text{Log} 2 + \text{Log} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0} \right)$$

de unde :

$$\rho = \pi z_0 \frac{W}{l} \frac{1}{\text{Log} 2 + \text{Log} \text{ch} \frac{\pi a}{y_0}} \quad (18)$$

Verificarea experimentală a acestei formule ridică greutatea datorită faptului că pătrunderea sondelor în probă e comparabilă cu grosimea probei, iar uneori chiar egală.

În acest caz trebuie introdus un coeficient de corecție  $k$  și formula devine :

$$\rho = \pi k \frac{W}{I} \frac{1}{\text{Log } 2ch \frac{\pi a}{y_0}} \tag{19}$$

Dacă se ia  $\frac{a}{y_0} \approx 0,2$ , formula (19) devine :

$$\rho = 2\pi k z_0 \frac{W}{I}$$

Din determinările experimentale făcute pentru plăcuțe cu  $z_0 \leq 0,15$  mm și  $\frac{a}{y_0} \approx 0,2$  cu pătrunderea sondelor la adâncimi diferite, la materiale diferite, a rezultat pentru  $k$  valoarea 1/2 și formula devine :

$$\rho = \pi z_0 \frac{W}{I} \tag{20}$$

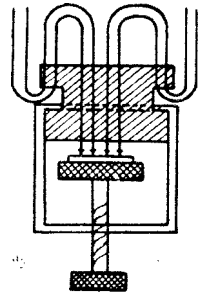


Fig. 2.

Apariția coeficientului  $k$  se datorește restricției impuse la calcul, unde contactul se considera punctiform și impenetrabil.

**Procedeeul experimental.** Sistemul de prindere a probelor se vede în fig. 2. Presiunea sondelor e omogenă datorită posibilităților de arcuire a sondelor. Distanța între sonde este de  $d = 2a = 1,5$  mm iar dimensiunile probelor sînt  $24 \text{ mm} \times 8 \text{ mm} \times 0,1$  mm. Tensiunea între C și D s-a măsurat cu un potențiomtru Diserhorst (sensibilitatea  $10^{-8}$ V) iar curentul cu ajutorul unui ampermetru de clasă 0,2).

**Rezultatele experimentale.** Pentru a verifica formula (20) s-au făcut măsurători la plăcuțe subțiri de Ni, Cu, Al și Pb cu  $Z_0$  cuprins între 0,075 mm și 0,15 mm.

Rezultatele experimentale sînt în bună concordanță cu cele din literatură așa cum se văd în tabelul de mai jos.

Metalul	(din literatură)	T °K	(experiență)	T °K
Ni	7,6	293	7,62	295
Cu	1,7	293	1,712	295
Al	2,62	293	2,61	295
Pb	19,8	296	19,4	295

Cea mai bună concordanță rezultă din fig. 4, unde s-a reprezentat dependența  $\rho = f(T)$  pentru Ni. Pe aceeași diagramă sînt reprezentate datele obținute de J. Lavine [4].

Cu sistemul din fig. 2 și cu ajutorul formulei (20) s-a măsurat rezistivitatea electrică în funcție de temperatură la aliajele Ni—Sn de 1%, 2%, 3%, 4% și 5% Sn, concentrație masică, de la temperatura azotului lichid până în jur de 400°C. Rezultatele sînt redată în fig. 4.

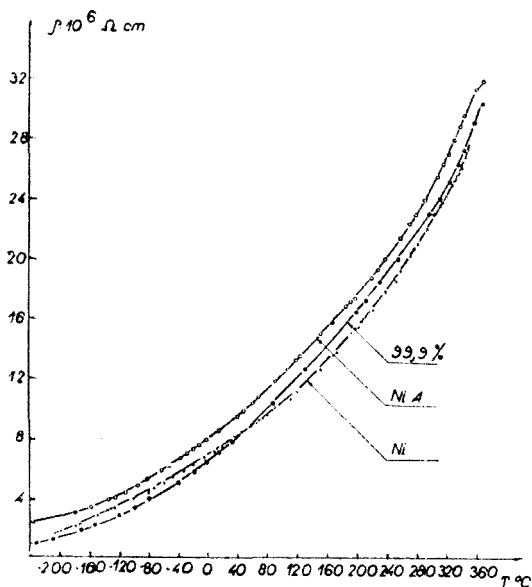


Fig. 3.

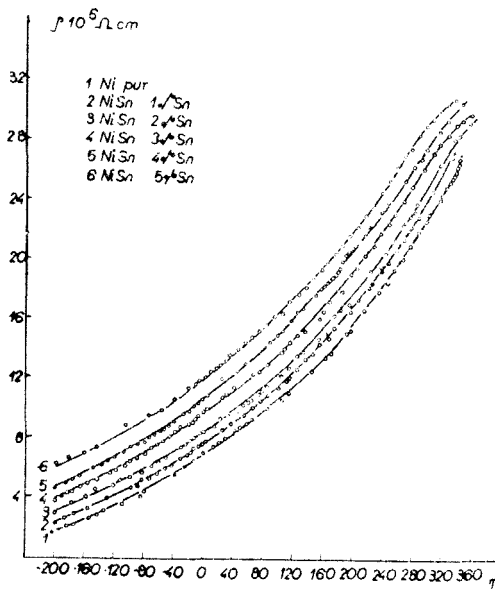


Fig. 4.

**Concluzii.** Ca urmare a calculelor efectuate, avînd modelul din fig. 1, s-a ajuns la relația (18), relație care nu e verificată experimental pentru plăcuțe subțiri, deci o neconcordanță între teorie și experiență. Neajunsul teoriei intervine din faptul că nu se pot face contacte punctiforme impenetrabile, cu rezistență de contact mică, iar adîncimea sondelor din material nu poate fi neglijată ca și la deducerea formulei (16). Acest fapt a determinat introducerea factorului  $k$ , rezultînd formula (20), simplă și cu precizie suficient de mare pentru calcularea rezistivității. Metoda de determinare a rezistivității la plăcuțe subțiri descrisă mai sus are avantajul că poate fi folosită atunci cînd nu dispunem de material suficient. Se mai poate folosi cu succes la studiul variației rezistivității electrice într-un cîmp magnetic.

Întriat în redacție la 21 iulie 1966

#### BIBLIOGRAFIE

1. J. Laplume, *L'onde électrique*, XXXV, nr. 335, 113—125 (1955).
2. V. Novacu, *Introducere în electrodinamică*, Ed. 1955, pp. 32.
3. L. Valdes, *Bell. Lab. Rec.* 33, nr. 8, 308—312 (1955) sau Kremnii, Moskva, 1960, pag. 253.
4. J. Lavine, *Phys. Rev.* 123, 4, 1273—1277 (1961).

## ИЗМЕРЕНИЕ УДЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ЗОНДОВ

(Резюме)

Разработан метод определения удельного электрического сопротивления тонких пластинок методом четырёх зондов.

Теоретически установлено и проверено экспериментально отношение  $\rho = \pi z_0 \frac{W}{I}$ , где  $\rho$  = удельное электрическое сопротивление,  $z_0$  = толщина пластинки,  $W$  = напряжение между двумя зондами,  $I$  = сила тока, проходящего через образец.

Формула проверена экспериментально, и результаты находятся в хорошем соответствии с теми, имеющимися в литературе.

На основе данного метода было определено изменение удельного электрического сопротивления сплавов Ni-Sn в зависимости от температуры.

## MESURE DE LA RÉSISTIVITÉ ÉLECTRIQUE DES PLAQUETTES MINCES DE MATÉRIEL PAR LA MÉTHODE DES SONDÉS

(Résumé)

L'auteur expose dans son article l'élaboration de la méthode pour déterminer la résistivité électrique des plaquettes minces par la méthode des quatre sondes.

On a établi théoriquement et vérifié expérimentalement la relation  $\rho = \pi z_0 \frac{W}{I}$  et  $\rho$  = la résistivité électrique,  $z_0$  = l'épaisseur de la plaquette,  $W$  = la tension entre les deux sondes,  $I$  = l'intensité du courant qui passe par l'échantillon.

La formule est vérifiée expérimentalement, les résultats étant en concordance satisfaisante avec ceux de la littérature de spécialité.

Sur la base de cette méthode on a déterminé la variation de la résistivité électrique aux alliages Ni-Sn en fonction de la température.





RAPORTUL SEMNAL/ZGOMOT LA ANALIZA CANTITATIVĂ CU  
METODA RMN

de  
F. KOCH

1. Semnalele obținute la rezonanța magnetică nucleară (RMN) ne dau posibilitatea unei analize cantitative. Manualele apărute, ca al lui J. A. P o p l e sau culegerea de articole *NMR and EPR Spectroscopy*, cuprind o serie de indicații în acest sens, și se remarcă faptul că, analiza cantitativă cu metoda RMN se folosește mai rar, din cauza cerințelor maxime față de aparatura de înregistrare: stabilitate, linearitate, rezoluție bună. Analiza cantitativă cu metoda RMN are și avantaje: posibilitatea unei analize continue, fără contact, rapide. Aceste avantaje fac ca analiza cantitativă cu RMN să fie avantajoasă pentru măsurarea concentrațiilor de izotopi [1], analiza reacțiilor chimice, analiza umidității, etc.

Analiza cantitativă cu metoda RMN se poate realiza prin trei procedee: observarea semnalelor de absorbție ( $v$ ) și de dispersie ( $u$ ), măsurarea deplasării chimice și a timpului de relaxare. Teoria RMN ne arată că semnalele de absorbție și dispersie sînt proporționale cu susceptibilitatea probei, deci cu numărul de nuclee cu proprietăți magnetice. Măsurînd intensitatea semnalului într-un spectru RMN, vom cunoaște cantitățile de substanță din același spectru pentru diferite grupări chimice, sau comparînd spectre diferite, vom afla concentrațiile substanței respective (concentrația apei grele, de exemplu).

Ca și în alte domenii de cercetare, și în RMN informațiile obținute depind de zgomote: zgomote externe (paraziți) și cele interne. Semnalul obținut prin rezonanță, în cele mai favorabile cazuri, este de mărimea  $10^{-4} V$ ; zgomotele interne sînt de mărimea microvolților, raportul semnal/zgomot primind valori de la  $10^3$  pînă la unitate, iar obținerea unui raport  $\rho = \frac{\text{semnal}}{\text{zgomot}}$  cît mai ridicat lărgește considerabil posibilitățile de aplicare ale metodei RMN.

Eliminarea zgomotelor externe, cum ar fi paraziții industriali, atmosferici, se realizează relativ ușor cu blindaje, ecrane electrostatice și magnetice. Zgomotele interne, mai ales cele termice de la etajele de intrare, se elimină mult mai greu. Aplicînd teoria lui N y q u i s t pentru calcularea zgomotelor termice, o serie de lucrări

[27], [3], [4], [5] apreciază raportul semnal/zgomot pentru diferite montaje de detecție. P. Drăghicescu [4] calculează raportul zgomot/semnal pentru două montaje utilizate în RMN. Prin compararea celor două valori pentru zgomot/semnal ajunge la concluzia că, montajele care folosesc dublu baleiaj (înregistrator), sînt mult mai avantajoase, dînd pentru  $\rho$  valori de 150 ori mai mari ca și cele cu un singur baleiaj. H. Pfeifer [6] găsește o corespondență între valoarea experimentală și cea teoretică a zgomotelor într-un circuit rezonant cu factorul de calitate  $Q$ ; F. Bloch și D. H. Garber [7] dau o metodă interesantă pentru detectarea semnalelor sub nivelul de zgomote, deci cînd  $\rho < 1$ : se fotografiază semnalul de pe oscilograf, zgomotele vor înnegri neclar placa în toate părțile, semnalul însă va înnegri placa în același loc de mai multe ori, ceea ce duce, după o dezvoltare adecvată, la observarea semnalului. Astfel a reușit să obțină semnale de la hidrogen gaz la 1 at și de la propan [14].

Valoarea teoretică pentru  $\rho$  se poate compara cu cea experimentală, și în cazul unei deosebiri pregnante avem un indice cum că aparatura electronică de înregistrare nu este perfectă [8].

2. Lucrările menționate analizează raportul semnal/zgomot din punctul de vedere al aparaturii electronice. Se știe, însă, că raportul semnal/zgomot depinde și de numărul nucleelor din proba ( $N$ ) și de timpurile de relaxare. Trebuie precizat că semnalul depinde de  $N$  și de timpurile de relaxare [2], mai general însă considerăm că raportul semnal/zgomot este o funcție de  $N$ .

Spre deosebire de lucrările citate se ivește posibilitatea analizei raportului semnal/zgomot la diferite cantități de substanțe, la diferite substanțe. Dacă pentru anumite cantități raportul semnal/zgomot este aproape de unitate, analiza cantitativă devine grea sau imposibilă.

Faptul că și proba, substanța analizată intervine în  $\rho$ , ni-l arată cazul probelor în mișcare. W. Herms [9] a calculat mărimea semnalelor în cazul probelor în mișcare și a găsit o dependență de viteza probei. Mișcarea, rotația probei va mări semnalul, însă în acest caz este vorba de eliminarea unui factor extern: neomogenitatea cîmpului magnetic extern.

De obicei zgomotele sînt localizate în partea electronică (rezistențe, tuburi); această aproximație, în unele cazuri, pare să fie insuficientă. Fluctuațiile statistice de reparație a populației de spini nucleari pot să apară ca o nouă sursă de zgomote care se suprapun celor electronice. G. Bonnet [10] analizînd sistemul de spini cu ajutorul modelelor, ajunge la concluzia că în cazul cîmpurilor puternice, polarizării dinamice, prepolarizării, această sursă de zgomote poate să fie importantă.

În concluzie vedem că raportul semnal/zgomot are importanță în analizele cantitative, și că, calcularea, măsurarea acestui raport ne poate informa despre posibilitățile de analiză [13].

*Întrul în redacție la 19 decembrie 1966*

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. M. J. Mitchell, G. Phillips, Brit. Journ. Appl. Phys. 1956, **7**, 67.
2. N. Bloembergen, E. M. Purcell, R. V. Pound, Phys. Rev. 1948, **73**, 679.
3. R. Chidambaram, Proc. Phys. Soc. 1960, **75**, 163.
4. P. Drăghicescu, Studii și cercetări de fizică, 1958, **3**, 355.

5. H. L. Anderson, Phys. Rev. 1949, **76**, 1460.
6. H. Pfeifer, O. Rothe, Exp. Techn. Phys. 1960, **3**, 112.
7. F. Bloch, D. H. Garber, Phys. Rev., 1949, **76**, 585.
8. C. Manus, Arch. des Sciences. 1956, **9**, 403.
9. W. Herms, Annalen d. Phys. 1961, **5-6**, 280.
10. G. Bonnet, *Spectroscopy and Relaxation at Radio Frequencies*. Amsterdam, 1962, 297
11. D. Ter Haar, *Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems*. London. 1962.
12. A. Abragam, *The Principles of Nuclear Magnetism*. Ed. rusă, 1963, p. 88.
13. E. N. Sventițki, V. I. Cijik, *Iadernii magnetnii rezonans*, 1965, **1**, 164.
14. Klein Melvin, W. Barton George, Rev. Sc. Instr. 1963, **34**, 754.

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ МЕТОДОМ ЯМР  
( Р е з ю м е )

В работе показывается значение определения отношения сигнал/шум в исследованиях ЯМР. Помимо характеристики электронной аппаратуры, отношение сигнал/шум указывает и на пределы количественных анализов, и в отдельных случаях проба является новым источником шума.

SIGNAL TO NOISE RATIO IN THE QUANTITATIVE ANALYSIS USING NMR METHOD  
( S u m m a r y )

The author shows the importance of the determination of the signal to noise ratio in the NMR investigations. Besides that the signal to noise ratio characterizes the electronic apparatus, indicates also the limits of the quantitative analyses. In some cases the test appears as a new source of noise.



G. h. Pic, *Algebră superioară*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1966. 478 pagini.

Lucrarea este un manual destinat studenților anilor I și II ai facultăților de matematică și mecanică, dar, ținând seamă de materialul tratat și de felul de expunere, ea poate fi folosită cu succes de studenții institutelor tehnice, de ingineri și alți specialiști. Cititorul este introdus treptat în chestiunile de algebră clasică și modernă, aceste două părți fiind concepute de autor ca organic legate. Manualul este împărțit în 13 capitole.

Capitolul I, intitulat „Structurile fundamentale ale algebrei” conține paragrafele: domeniul de integritate și inel, domeniul de integritate ordonat, corpul, inelul polinoamelor, grupul, corespondențe între structuri algebrice, substructuri algebrice, reticulul. Pornind de la proprietățile cunoscute ale numerelor întregi se definește domeniul de integritate și se demonstrează proprietățile lui fundamentale. Proprietățile celorlalte structuri mai abstracte sînt mereu comparate cu cele ale domeniului de integritate. În acest capitol găsim o serie de chestiuni clasice cu privire la inelul polinoamelor, exemplificări variate ale noțiunii de grup, iar în ultimele trei paragrafe citeva rezultate fundamentale ale algebrei moderne tratată în mod unitar pentru diferite structuri.

În capitolul II „Determinanții și aplicațiile lor”, cu paragrafele: proprietățile determinantilor, determinanți speciali și sisteme de ecuații liniare; se dă o expunere clasică a acestui material.

Capitolul III se intitulează „Elemente de teoria matricelor” și conține paragrafele: operații cu matrice, rangul unei matrice, funcții matriciale, aplicațiile calculului matricial la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Se definesc operațiile cu matrice avînd elementele dintr-un corp. Dintre proprietățile studiate amintim: teorema lui Kronecker relativă la rangul unei matrice, rangul produsului a două matrice, matricea caracteristică, polinomul minimal al unei matrice, teorema lui Cayley-Hamilton. Se scriu sistemele

de ecuații liniare sub formă matricială, se arată sub această formă metoda lui Gauss, o interpretare a ei în statică, metoda aproximațiilor succesive.

În capitolul IV, „Spații vectoriale”, găsim paragrafele: noțiunea de spațiu vectorial, subspații vectoriale, funcționale liniare, spații unitare. Se studiază în paralel formele liniare și vectorii. Se dau interpretări geometrice și exemple de spații cu dimensiune infinită. Dintre aplicații relevăm inegalitatea lui Frobenius cu privire la rangul produsului a trei matrice și consecințele ei.

În capitolul V, „Transformări liniare” se află paragrafele: definiția transformărilor liniare, reprezentarea analitică a transformărilor liniare, valorile proprii ale unei transformări liniare, forma canonică Jordan, noțiunile de invariant și covariant. Se stabilește izomorfismul dintre inelul transformărilor liniare și al matricelor pătrate și se studiază cum variază matricea asociată unei transformări liniare la schimbarea bazei. Se dau proprietățile valorilor și vectorilor proprii și metoda lui Laverrier de calculul lor.

În capitolul VI, „Forme biliniare, hermitiene și pătraticе” găsim reducerea formelor biliniare la formă canonică și o tratare amplă a formelor hermitiene, iar rezultatele relative la formele pătraticе sînt găsite ca niște consecințe. Operatorii hermitieni sînt expuși într-o formă generală, modernă.

Capitolul VII, „Existența rădăcinilor unui polinom și consecințe” conține paragrafele: teorema lui Kronecker-Steinitz, teorema lui d'Alembert și funcțiile simetrice ale rădăcinilor unui polinom. Se arată clar rolul teoremelor Kronecker-Steinitz și d'Alembert în algebra modernă. Demonstrarea teoremei lui d'Alembert se face cu o utilizare restrînsă a metodelor analizei matematice.

În capitolul VIII, consacrat rezultantei, se studiază rezultanta cu ajutorul funcțiilor simetrice de rădăcinile celor două polinoame, sub forma determinantului lui Sylvester și cel al lui Bézout.

Se dă condiția pentru existența a  $k$  rădăcini comune. Se tratează metoda de eliminare a lui Kronecker în cazul sistemelor cu mai multe ecuații. Se stabilește o condiție necesară și suficientă pentru ca un sistem algebric să fie compatibil și teorema lui Hilbert despre apartenența puterii unui polinom la idealul generat de un sistem de polinoame.

În capitolul IX, „Transformarea ecuațiilor” se studiază în detaliu transformarea Tschirnhausen și rezolvata lui Lagrange.

Capitolul X, „Ecuații abeliene” conține următoarele paragrafe: ecuații binome, despre rezolubilitatea prin radicali a ecuațiilor algebrice de grad  $n > 4$ , polinoame abeliene, polinoame ciclice, încă o dată despre ecuațiile binome, rezolvarea ecuației de gradul trei și rezolvarea ecuației de gradul patru. Chiar din titlurile paragrafelor reiese că se studiază chestiuni profunde, dându-se elemente din teoria lui Galois.

Capitolul XI, consacrat separării rădăcinilor, conține paragrafele: teorema lui Rolle, teorema lui Sturm, teorema lui Budan, metoda lui Hermite și numărul rădăcinilor într-un domeniu dat. Este foarte instructivă metoda lui Hermite, care asociază unui polinom dat o formă pătratică, iar din numărul coeficienților pozitivi și negativi ai acesteia se trage o concluzie asupra numărului rădăcinilor.

Capitolul XII, „Geometria polinoamelor” cu paragrafele: limitarea rădăcinilor, geometria polinoamelor în planul complex și polinoame cu toate rădăcinile reale conține un material foarte bogat, cu rezultate moderne. Acest capitol introduce pe cititor într-un domeniu de cercetare, în care mai mulți matematicieni români au adus contribuții importante. Se dau teoremele lui Kakeya și Angheluță despre intervalul care cuprinde modulele rădăcinilor unei ecuații, o serie de teoreme din cercul de idei Landau-Montel cu privire la poziția rădăcinilor în ipoteze restrictive asupra coeficienților (teoremele lui Angheluță, Fejér, Montel, Van Vleck). Se dau teoreme referitoare la poziția rădăcinilor derivatei. Se studiază poziția rădăcinilor polinoamelor cu toate rădăcinile reale și având doi coeficienți fixați după metoda lui T. Popoviciu. Se demonstrează teorema lui T. Popoviciu cu privire la lungimea intervalului care cuprinde toate rădăcinile unui polinom având numai rădăcini reale.

Ultimul capitol intitulat „Calculul efectiv al rădăcinilor unui polinom” cuprinde paragrafele: calculul rădăcinilor raționale, separarea rădăcinilor, generalități despre metodele de iterație pentru rezolvarea ecuațiilor, metoda lui Newton pentru calculul rădăcinilor, metoda lui Lobacevski, alte metode de calcul al rădăcinilor iraționale. În ultimul paragraf se dă metoda coardei și metoda lui Horner. Metodele sînt exemplificate pe cazuri numerice.

Autorul prezintă chestiunile de bază din cele mai importante domenii ale algebrei, dînd

astfel o privire de ansamblu asupra acestei discipline. Trebuie subliniat modul în care s-a îmbinat materialul clasic cu cel modern. Punctul de vedere al algebrei moderne aduce generalitate și simplitate în demonstrații, în timp ce materialul clasic este folosit la justificarea formării noțiunilor moderne abstracte. Astfel, se expune întii teoria clasică a sistemelor de ecuații liniare, pentru a folosi ulterior calculul matricial la o nouă formulare a rezultatelor și la obținerea de rezultate noi.

Manualul este ușor accesibil. Exercițiile, aplicațiile și complementele variate ajută înțelegerea materiei și în același timp completează cunoștințele cititorului.

Cartea umple un gol în literatura de specialitate, căci se simțea de mai multă vreme nevoia unui manual în care studenții anilor I și II găsesc la un loc întregul material de algebră de care au nevoie și chestiuni conexe ce pot servi ca punct de plecare spre studii mai aprofundate.

F. RADÓ

Béla Kerékjártó, *Les fondements de la géométrie, tome II, Géométrie projective.*

Attendue depuis longtemps, l'apparition en français du second tome des „Fondements de la Géométrie” écrit par l'éminent mathématicien hongrois B. Kerékjártó répond à la nécessité bien ressentie que ce remarquable ouvrage soit publié dans une langue internationale.

Le traité contient un exposé détaillé de la géométrie projective, dont les théorèmes sont analysés de différents points de vue, d'une manière surtout synthétique et tout à fait originale. Après une ample introduction, la matière est divisée dans les chapitres suivants, dont nous ferons un très bref aperçu :

I. *Les fondements de la géométrie projective.* On fait la construction de la géométrie projective à partir des axiomes de la géométrie euclidienne, par l'adjonction des éléments à l'infini.

II. *Géométrie projective de la droite.* Dans ce chapitre sont introduits les systèmes de points harmoniques construits à partir des trois points donnés et l'on démontre que leur ensemble est partout dense sur la droite (théorème de Lüroth-Zeuthen). Sont étudiées encore diverses correspondances projectives sur la droite.

III. *Géométrie projective du plan.* A l'aide des axiomes d'incidence, d'ordre et de continuité on étudie la structure du plan projectif et ses caractères topologiques (compacité, non-orientabilité) ainsi que les correspondances projectives dans le plan.

IV. *Géométrie projective de l'espace.* On développe des questions analogues pour l'espace

projectif, en faisant l'étude des collinéations et des réciprociétés de l'espace.

V. *Coniques*. Une courbe de second ordre est définie comme l'ensemble des points auto-conjugués par rapport à une certaine polarité. Suivent les propriétés bien connues énoncées dans les théorèmes de Steiner, Staudt, Pascal, Brianchon, Désargues et leurs cas particuliers, avec des applications concernant la détermination d'une conique par des points ou des tangentes. Sont présentées de même les correspondances projectives des coniques sur elles-mêmes en leur faisant la liaison avec le groupe des déplacements du plan euclidien.

VI. *Quadriques*. On introduit d'abord les cônes de second ordre et leurs sections. Les quadriques sont définies de la même manière par rapport à une polarité. On fait l'étude des deux types des quadriques réelles (régliées et elliptiques) et des correspondances projectives sur elles-mêmes. Certaines considérations analytiques sont faites sur les homographies des espaces projectifs complexes, ainsi que sur l'utilisation des quaternions pour représenter les rotations de la sphère.

A la fin de chaque chapitre on fait l'étude analytique des questions envisagées, au moyen des coordonnées homogènes.

VII. *Mesure projective*. En suivant les idées de Cayley et Klein on peut définir une métrique, dans le plan ou dans l'espace projectif, à l'aide de certains sous-groupes de collinéations. On aboutit ainsi à un système unitaire qui contient à la fois la géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique. On fait une étude comparative entre la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique en remarquant la possibilité de les unifier par l'emploi des imaginaires dans le cadre de la géométrie projective complexe.

VIII. *Sur les axiomes de la géométrie projective*. L'auteur y analyse les axiomes de la géométrie projective (les axiomes de Bieberbach, puis celles de Veblen-Yung, Fano etc.). Le rôle du théorème de Désargues est souligné par la possibilité qu'il donne d'étendre à l'espace la géométrie projective du plan. Une place centrale est prise par l'étude du corps de la géométrie projective. A cette occasion l'auteur fait certaines digressions de nature algébrique et topologique. On établit que la condition pour que la multiplication des points soit commutative est que le théorème de Pappus soit valable. Le rapport entre le théorème de Pappus et ceux de Désargues est de même élucidé, ces théorèmes étant équivalents dans le cadre des axiomes d'incidence du plan. En ce qui concerne le théorème fondamental des correspondances projectives de la droite, celui-ci est équivalent au théorème de Pappus en vertu des axiomes d'incidence, d'ordre et de continuité. Des considérations très intéressantes sont faites au sujet des géométries projectives sur un corps

continu arbitraire  $K$ , en aboutissant au théorème de Pontrjagin d'après lequel, si  $K$  est connexe et localement compact et s'il vérifie le premier axiome de dénombrabilité, il en résulte que  $K$  est isomorphe soit au corps des réels, soit au corps des nombres complexes, soit enfin à celui des quaternions réels.

Tous ces problèmes sont rangés dans un ordre naturel, et sont traités d'une façon minutieuse et méthodique. La rédaction est soigneusement accomplie par le concours de M. G. Hajós qui a ajouté parfois des annotations compétentes. Nous signalons aussi les conditions graphiques exceptionnelles dans lesquelles est paru cet ouvrage, comme coédition des maisons Akadémiai Kiadó et Gauthier-Villars. Vraiment c'est un des livres les plus érudits et profonds sur le sujet.

M. TARINĂ

G. Herdan, *The Advanced Theory of Language as Choice and Chance*. Springer-Verlag Berlin, 1966, 459 pp., 30 fig.

An outstanding contribution to the development of statistical linguistics — the oldest and most contradictory domain of mathematical linguistics — brings Dr. G. Herdan, the author of some statistical linguistic books. The declared purpose of the latest book *The Advanced Theory of Language as Choice and Chance*, is to give an account of statistical properties of language, trying to find the common thread which would show the many and multivarious forms of language statistic.

The book is divided in V parts treating: Statistical Linguistics, Stylostatistics, Optimal Systems of Language Structure, Linguistic Duality and Statistics for language Seminary. There is also an introductory chapter which gives a background on language as choice and chance.

Part I includes chapters on stability of linguistic distributions, the explanation of stability and some application of theory of stability of alphabetic distributions to a problem of language mixture.

Part II begins with style as a statistical concept. The author shows, for example the quantitative feature of the style, the richness of vocabulary, the general relation between vocabulary and text length, the vocabulary ratios. An important chapter of this part is that which recommends as an aid, a guide to stylostatistical investigations. Certainly it contains numerous points for the reader to ponder and relate to his own practical experience.

Part III presents problems connected with the combinatorial structure of words, optimality of the word-length distributions and random

partitioning of vocabulary. Possibly the most important contribution is that which deals with the information theory. The depth to which the topics of the chapter are pursued can be judged by the content of the chapter selected at random: The linguistic interpretation of entropy and redundancy, Derivation of entropy from the multinomial law, The law of optimal redundancy, Language as an efficient code, Entropy and ectropy. It gives a coherent survey of the basic concepts of the information theory, the tools and methods for practical linguistic applications.

Part IV discusses the four-fold root of linguistic duality, duality as correcting factor and duality and language translation.

The last part is a systematic presentation of the statistical devices used in the main body of book, with worked examples from literary statistics. The foundations of the theory are clearly stated, considers the applications of statistics that can be achieved, and clarifies the discussions by numerical examples.

This book is undoubtedly stimulating and should be of interest to all concerned with the quantitative linguistics. The general method of presentation is excellent. The basic equations are derived rigorously yet concisely, and the underlining basis of the problem is kept to the fore by illustrations from different domains.

Every topic that appears has a functional explanation so that step by step analysis of the whole is obtained, making the grasping of the most complex an easy task. Dr. G. Herdan explores all the aspects of the problems in an interesting and informative way.

In conclusion this volume is well written, well illustrated and presented in purposeful sequence. It demands the attention of those who would like an easy-going account of a complex subject.

IOAN STAN

Jacek W. Hennel, *Wstep do teorii magnetycznego rezonansu jądrowego* (Introducere la teoria rezonanței magnetice nucleare). Ed. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1966.

În lucrarea *Introducere la teoria rezonanței magnetice nucleare* autorul face o prezentare teoretică a principalelor efecte legate de fenomenul de rezonanță nucleară.

Lucrarea cuprinde șase capitole în care se face o analiză progresivă a fenomenului. În primul capitol autorul trece în revistă o serie de elemente de analiză operatorială care vor forma aparatul matematic utilizat în lucrare.

În capitolul al doilea sînt expuse intuitiv proprietățile magnetice ale nucleului și sînt definiți principalii parametri nucleari: momentul magnetic nuclear, spinul, magnetizarea nucleară, cît și ordinul de mărime al fenomenelor la scară nucleară.

În capitolul al treilea este descris pe scurt paramagnetismul nuclear și definită condiția de rezonanță magnetică nucleară.

În capitolul IV sînt expuse elementele principale ale relaxării nucleare. Se introduce noțiunea de temperatură de spin care este utilizată în caracterizarea schimburilor de energie în cadrul sistemelor de spin, cît și timpilor de relaxare spin-spin și spin-rețea. În continuare se descriu ecuațiile fenomenologice ale lui Bloch. În acest capitol se indică de asemenea un montaj simplu pentru observarea rezonanței nucleare și se descrie forma liniei de rezonanță.

În capitolul V se face expunerea propriu-zisă a teoriei relaxării nucleare, dezvoltînd pe larg relaxarea spin-spin și spin-rețea în cazul diferitelor sisteme de spini.

În ultimul capitol autorul face o expunere pe scurt a fenomenului de ecou de spin.

Lucrarea în ansamblu într-un volum restrîns (182 pag.) prezintă o imagine relativ completă a fenomenului de rezonanță magnetică nucleară, dînd o bază pentru studiu în acest domeniu.

V. NICULESCU



## E R A T Ă

<i>Pag.</i>	<i>Rîndul:</i>	<i>In loc de:</i>	<i>Se va citi:</i>
21	6 de jos	$O_{j-2}^*$	$O_{j+1}^*$
22	20 de sus	$AB$	$A_i B_i$
51	5 de jos	$m_{r_2, r_2}$	$m_{r_1, r_2}$









43875

Abonament anual: 20 lei seria, 160 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

**Prețul 10 lei**