STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1966

C L U J

În cel de al XI-lea an de apariție (1966) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
științe economice;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XI году издания (1966) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
экономические науки;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XI-ème année de publication (1966) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sciences économiques;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1966

CLUJ

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
Anul XI 1966

Redacţia:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu 1
Telefon 1—34—50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

Cronică

СОДЕРЖАНИЕ

SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

КОНЕЧНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ (I)

Ядро непрерывной дроби

Э. ДАНИ

Вычислительный аппарат разложения в конечную непрерывную дробь обыкновенных дробей употребляется обычно для решения уравнений в целых числах. В этом направлении значительны, например, представления чисел линейными формами $ax + by$ и квадратичной формой $x^2 + y^2$ [3,4]. В обоих случаях решение $\{x, y\}$ выражается в явной форме числителями и знаменателями подходящих дробей к непрерывным дробям, соответствующим этим формам. Но конечные непрерывные дроби могут быть применены также и при получении некоторых формул решений уравнения представления чисел квадратичной формой $x^2 - xy + y^2$, как и неопределёнными арифметическими квадратичными формами $ax^2 + bxy + cy^2$. Напоминаем и решение непрерывными дробями уравнения Пелля [1,2], чтобы показать, что в отличие от предыдущих, в данном случае применяются бесконечные непрерывные дроби. Мы могли бы дать ещё примеры, но из сказанного следует, что, по отношению к решению уравнений в целых числах, конечные непрерывные дроби играют важную роль. Остальные методы не могут дать ту характеристику решений, представляемых методом непрерывных дробей, являющимся элементарным, или точнее, собственно арифметическим. Расширение области применения конечных непрерывных дробей при решении одних проблем по теории чисел, особенно решении уравнений в целых числах, требует одновременного развития со стороны современной теории конечных непрерывных дробей. В этом направлении включается, между прочим, и введение понятия ядра непрерывной дроби и изучение основных свойств введённых понятий.

I. Ядро непрерывной дроби. Основное понятие — это неприводимая непрерывная дробь в матричной записи (смотри например [2, стр. 322])

$$(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где q частное, полученное из одного из основных равенств деления $a = bq + r$, к которому приходим применением алгоритма Эвклида, когда разлагаем обыкновенную дробь $b^{-1}a$, в непрерывную. (Мы не должны иметь какого-либо данного соотношения между b и r в каждом этапе применения алгоритма). Следовательно, мы должны основываться на существовании одного эвклидова полукольца E.

Множество неприводимых непрерывных дробей (1) составляет полугруппу G, относительно операции умножения матриц. Эта полугруппа является группой, когда полукольцо является коммутативным кольцом.

По строению полугруппы любая непрерывная дробь

$$Z = \begin{pmatrix} z_4 & z_2 \\ z_3 & z_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

допускает хотя бы одно разложение

$$Z = \Pi_1^h (q_i)^{\nu_i} \tag{3}$$

на неприводимые непрерывные дроби.

В случае натуральной непрерывной дроби (когда элементы матрицы (2) — натуральные числа) имеем соотношения $z_1 \geqslant z_2 \geqslant z_4 \geqslant 0$ и $z_1 \geqslant z_3 \geqslant z_4$ и наоборот, всякая матрица с элементами натуральных чисел, элементы которой удовлетворяют этим соотношениям, являются натуральной непрерывной дробью с единственным разложением на произведение неприводимых непрерывных дробей. Однако, в случае целой непрерывной дроби (когда элементы матрицы (2) — целые числа) уже не имеем предыдущих соотношений и всякая неприводимая целая непрерывная дробь(1) является формально неприводимой, а эффективно она приводима.

$S(Z) = z_1 + z_4$ — след, $N(Z) = \det Z (= \pm 1)$ — норма и $L(Z) = \sum_1^h \nu_i (= n)$ длина непрерывной дроби (последняя касается выбранного разложения на неприводимые множители).

Число неприводимых множителей, которые транспонированием (T) не переходят в сами себя, — это степень асимметрии $A(Z)$. Степень симметрии — это $L(Z) - A(Z) = \bar{A}(Z)$. В случае $A(Z) = 0$ непрерывная дробь является симметрической, в случае $1 \leqslant A(Z) \leqslant L(Z) - 1$ — частично симметрической, а если $A(Z) = L(Z)$, то она асимметрическая.

Частичная непрерывная дробь $\Pi_1^m(q_i)$ обозначается

$$Z_m = \begin{pmatrix} Q_{m-1} & Q_m \\ P_{m-1} & P_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где P_m числитель и Q_m знаменатель подходящей дроби ранга m.

После исследования этих хорошо известных понятий и свойств, переходим к введению специфических понятий данной работы:

Определение 1. Непрерывная дробь K_m из разложения $Z = Z_m K_m Z_m^T$ является ядром непрерывной дроби Z.

Определение 2. Непрерывная дробь $Z(=K_m)$ является минимальным ядром, если у неё нет ядра.

Определение 3. Четвёртый элемент $z_4(=k_{m4})$ (2) минимального ядра $Z(=K_m)$ является его нуклеоном.

Определение 4. Разностью непрерывной дроби Z (2) является число $D(Z)=z_2-z_3$.

Обозначаем абсолютную величину разности $D(Z)$ через k, $|D(Z)|=k$.

Непосредственным вычислением можно проверить следующие леммы:

Лемма 1. *Соотношение*

$$D(Z)=(-1)^m D(K_m) \tag{5}$$

имеет место в случае любой непрерывной дроби с ядром.

Лемма 2. *Любую непрерывную дробь с ядром, в случае $k_{m4}\neq 0$, можно записать в форме*

$$Z=\begin{pmatrix} k_{m4}^{-1}f(Q_m,\ Q_{n-m-1}) & Q_n \\ Q_n-D(Z) & k_{m4}^{-1}f(P_m,\ P_{n-m-1}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $f(x,y)=(-1)^n x^2+(-1)^m D(Z)xy+y^2$.

Определение 5. Непрерывная дробь

$$Z'=\begin{pmatrix} z_1+z_4-z_2-z_3 & z_1-z_2 \\ z_1-z_3 & z_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

является непрерывной дробью с измененной длиной, ассоциированной к непрерывной дроби Z.

Следующая лемма проверяется тоже непосредственным вычислением:

Лемма 3. *Какова бы ни была непрерывная дробь с ядром Z, $Z=Z_mK_mZ_m^T$, в случае $k_{m_4}\neq 0$ и $(q_1)=(q_n)\neq(1)$ для $m=1$, Z' является непрерывной дробью с ядром, $Z'=Z'_{m'}K'_{m'}Z'^T_{m'}$, со свойствами $D(Z')=-D(Z)$, $(-1)^{n'}=(-1)^n$, $(-1)^{m'}=-(-1)^m$, $P'_{m'}(Z')=P_m(Z)$, $P'_{n'-m'-1}(Z')=P_{n-m-1}(Z)$ и $K'_{m'}=K_m$.*

Лемма 4. *В случае $D(Z)=k$, $Z=(q_1)Y(q_n)$, $(q_1)\neq(q_n)$ имеем $(q_n)=(q_1+t)$, где $1\leqslant t\leqslant k$ и*

$$Y=\begin{pmatrix} ty-v & y+t\nu_0-k \\ y & \nu_0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &1.\ \nu_0 v=-y^2+ky+(-1)^{n+1},\\ &2.\ \nu_0\geqslant y,\\ &3.\ t=[(k-y):\nu_0]+1,\\ &4.\ \begin{cases} t=[v:y]+1,\\ t=[v:y]\ \text{(возможно только, если } y=1), \end{cases}\\ &5.\ (t-1)y+k\leqslant t\nu_0+v. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Из равенства $Z = (q_1)Y(q_n)$ получаем $z_1 = y_1q_1q_n + y_2q_n + y_3q_1 + y_4$, $z_2 = y_1q_n + y_3$, $z_3 = y_1q_1 + y_2$ и $z_4 = y_1$. Отсюда, обозначая $y_1 = \nu_0$, $y_3 = y$ и $q_r = q_1 + t$, следует $k = t\nu_0 - (y_2 - y)$, т.е. $y_2 = y + t\nu_0 - k$. Из $0 < y + t\nu_0 - k \leqslant \nu_0$ и $0 < y \leqslant \nu_0$ следует $|t\nu_0 - k| < \nu_0$. Таким образом, по предположению $t \neq 0$, выводим $1 \leqslant t \leqslant k$.

Так как $L(Z) = L(Y) + 2$ имеем $\det Y = \nu_0y_4 - y^2 - yt\nu_0 + yk = (-1)^n$. Обозначая $y_4 = ty - v$, мы получаем условие 1. и выражение для Y.

Упорядочение элементов натуральной непрерывной дроби даёт нам $\nu_0 \geqslant y + t\nu_0 - k \geqslant ty - v \geqslant 0$, $\nu_0 \geqslant y \geqslant ty - v$, откуда выводим $(t-1)\nu_0 \leqslant k - y$, $(t-1)y + k \leqslant t\nu_0 + v$ 5., $v \leqslant ty$, $y \leqslant \nu_0$ 2., $(t-1)y \leqslant v$, Имея в виду, что $y + t\nu_0 - k > 0$, следует $k - y < t\nu_0$. Так как $\nu_0 > 0$, из $(t-1)\nu_0 \leqslant k - y < t\nu_0$ следует $t = [(k-y):\nu_0] + 1$ 3. Из $(t-1)y \leqslant v \leqslant ty$, если $ty - v = 0$, т.е. $y = 1$ и $t = v$, согласно условию $\det Y = (-1)^n$, следует $t = [v:y]$ или $t = [v:y] + 1$, а в противном случае выводим $t = [v:y] + 1$ 4.

Теорема 1. (*Теорема нуклеона*). *Значения, которые может принимать нуклеон ν_0 натуральной непрерывной дроби Z, в случае, когда $D(Z)$ фиксированное число, $k \neq 2$ для $(-1)^n = 1$ и $k \neq 0$ для $(-1)^n = -1$, составляет конечное множество натуральных чисел, отличных от нуля.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что само Z — минимальное ядро. Так как по предположению $k \neq 0$ для $(-1)^n = -1$, то $Z \neq (q_1)$. Если $Z = (q_1)(q_2)$, несмотря на то, что $(q_1) = (q_2)$ или $(q_1) \neq (q_2)$, мы имеем $\nu_0 = 1$. Остальные минимальные ядра имеют формы $Z = (q_1)Y(q_n)$, $(q_1) \neq (q_n)$. Рассматриваем отдельно случаи $D(Z) = k$ и $D(Z) = -k$.

$D(Z) = k$. Согласно лемме 4 из $\nu_0 \geqslant y + t\nu_0 - k$ (8) следует $0 \geqslant (t-1)(\nu_0 - 1) + y - k + t - 1$ и, так как $y > 0$, выводим $1 \leqslant y \leqslant k - t + 1$. Таким образом, имея в виду, что $1 \leqslant t \leqslant k$, когда k фиксировано, y может принимать только ограниченные значения. Мы должны изучить трёхчлен $-y^2 + ky + (-1)^{n+1}$ (п. 1. леммы 4) для установления условия, чтобы и остальные элементы непрерывной дроби Y приняли ограниченные значения. Чтобы трёхчлен аннулировался, необходимо, чтобы дискриминант Δ был бы полным квадратом, $k^2 + 4(-1)^{n+1} = \Delta$, т.е. мы должны иметь $((k + \sqrt{\Delta}):2)((k - \sqrt{\Delta}):2) = (-1)^n$. Устанавливается, что только решение $k = 2$, $\Delta = 0$, полученное для $(-1)^n = 1$, удовлетворяет условию $k \geqslant 1$. В этом случае $-y^2 + ky + (-1)^{n+1} = -(y-1)^2$. Отсюда следует $y = 1$ и $v = 0$, так как $0 \leqslant (t-1)y \leqslant v$ и $\nu_0 > 0$. Из $y = 1 \geqslant t - v = t \geqslant 1$ выводим $t = 1$. Таким образом, согласно условию п. 3. леммы 4, $\nu_0 \geqslant 2$. Этот элемент ν_0, который может принимать неограниченные значения сверху, вместе с другими элементами удовлетворяет всем условиям п. 1—5. леммы 4: $Z = (q_1)(1)(\nu_0 - 1)(q_1 + 1)$. Но, если исключаем случай $k = 2$, $(-1)^n = 1$, как это следует из равенства п. 1. леммы 4, ν_0 допускает лишь значения, ограниченные значением $\nu_{0\max} = [k:2]^2 + [k:2]((1 + (-1)^{k+1}):2) + (-1)^{n+1}$, которое получается для $y = [k:2]$. Так множество значений, которые ν_0 может принимать, в этом случае составляет конечное множество натуральных чисел, отличных от нуля.

$D(Z) = -k$. В этом случае, как это следует из соотношения $D(Z^T) = -D(Z)$, непрерывная дробь Z ведёт к положению, подобному предыдущему, которое соответствует транспонированию непрерывных дробей.

Доказательство теоремы 1 окончено.

Определение 6. Непрерывная дробь Z — непрерывная дробь — многочлен, если её элементы многочлены.

ТЕОРЕМА 2. (*Теорема минимального ядра многочлен от разности* (k)). *Натуральные минимальные ядра многочлены от k, $Z = Z(k)$, включаются в один из следующих 14 типов*:

$$\left.\begin{aligned} Z^{(1)} &= (q_1)(q_1 + k) \\ Z^{(2)} &= (q_1)(2)(k-3)(q_1+1), \\ Z^{(3)} &= (q_1)(1)(k-3)(q_1+2), \\ Z^{(4)} &= (q_1)(1)(q_3)(1)(k-3-q_3)(q_1+1), \\ Z^{(5)} &= (q_1)(1)(q_1+k), \\ Z^{(6)} &= (q_1)(k)(q_1+1), \\ Z^{(7)} &= (q_1)(1)(q_3)(k-1-q_3)(q_1+1), \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

и их транспонированные.

Доказательство. Исследуем отдельно случай $D(Z) = k$ и $D(Z) = -k$.

$D(Z) = k$. Случай $Z^{(1)}$ соответствует минимальным натуральным ядрам формы $Z = (q_1)(q_2)$, несмотря на то, что $(q_1) = (q_2)$ или $(q_1) \neq (q_2)$. Остальные случаи соответствуют минимальным натуральным ядрам вида $Z = (q_1) Y(q_n)$, $(q_1) \neq (q_n)$. В последнем случае равенство п. 1. леммы 4 должно тождественно иметь место, какими бы ни были многочлены $\nu_0 = \nu_0(k)$, $v = v(k)$ и $y = y(k)$. Из-за знака минус перед степенью y^2, y постоянная и поэтому, или $\nu_0 = ak + b$ и $v = c$, где a, b и c постоянные, или $\nu_0 = c$ и $v = ak + b$. Исследуем отдельно эти случаи.

$\nu_0 = ak + b$ и $v = c$. Мы имеем $(ak + b)c = yk - y^2 + (-1)^{n+1}$, откуда $ac = y$, $bc = -y^2 + (-1)^{n+1}$. Отсюда выводим $c = 1$, т.е. $v = 1$ и потому согласно п. 4. леммы 4 обязательно $t = 1$ и можем иметь также $t = 2$ для $y = 1$. Разлагая непрерывную дробь Y (8) на произведение неприводимых множителей, и имея в виду, что $(q_n) = (q_1 + t)$, для выведенных значений составляющих элементов, получаем для минимального ядра многочлен от k одну из непрерывных дробей $Z^{(i)}$, $i \in \{2, 3, 4, 6, 7\}$

$\nu_0 = c$ и $v = ak + b$. В этом случае, как и прежде, получаем $\nu_0 = 1$, итак $y_2 = y_3 = 1$ и $y_4 = 0$, т. е. $Y = (1)$ и $t - v = 0$. Согласно п. 3. леммы 4, получаем $t = k$ и потому $v = k$. Таким образом $Z = Z^{(5)}$.

$D(Z) = -k$. Аналогичным рассуждением от случая $D(Z) = -k$ теоремы 1 получаем транспонированные непрерывных дробей (10).

Этим теорема вполне доказана.

Нужно ещё показать, как применяются понятия этой работы, между прочим, к решению уравнений в целых числах, чем мы будем заниматься в последующей работе.

Поступило 15 января 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич З. И. Шафаревич И. Р., *Теория чисел*, Москва, 1964.
2. Хассе Г., *Лекции по теории чисел*, Москва, 1953 (перевод с немецкого).
3. Perron O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig-Berlin, 1913.
4. Serret J. A., *Cours d'Algèbre supérieure*, Paris, 1910.

FRACȚII CONTINUE FINITE (I)

Nucleul fracției continue

(Rezumat)

Folosind notația matricială (2) a fracțiilor continue finite cu descompunerea într-un produs (3) de factori ireductibili (1) se introduc următoarele noțiuni:

Fracția continuă K_m din descompunerea $Z = Z_m K_m Z_m^T$ (T este simbolul transpunerii) este *nucleul fracției continue* Z. Fracția continuă $Z(= K_m)$ este *nucleu minim*, dacă ea nu are nucleu. Elementul al patrulea $z_4(= k_{m4})$ (2) al nucleului minim $Z(= K_m)$ este *nucleonul* ν_0. *Diferența fracției continue* Z (2) este $D(Z) = z_2 - z_3$, $|D(Z)| = k$. Fracția continuă (7) este *fracția continuă cu lungimea modificată*, asociată fracției continue Z. Fracția continuă este *fracție continuă polinom*, dacă elementele ei sînt polinoame.

Proprietățile principale ale fracțiilor continue finite în privința noțiunilor introduse sînt date de următoarele două teoreme:

TEOREMA 1. (*Teorema nucleonului*). *Valorile pe care le poate lua nucleonul* ν_0 *al fracției continue naturale* Z, *în cazul, cînd* D(Z) *este număr fixat,* $k \neq 2$ *pentru* $(-1)^n = 1$, *și* $k \neq 0$ *pentru* $(-1)^n = -1$, *formează o mulțime finită de numere naturale, diferite de zero.*

TEOREMA 2. (*Teorema nucleului minim polinom de diferență* (k)). *Nucleele minime naturale polinoame de* k, $Z = Z(k)$, *sînt conținute în una dintre următoarele* 14 *tipuri* (10) *și transpusele acestora.*

(Prin fracție continuă naturală înțelegem o fracție continuă (2) cu toate elementele numere naturale.)

Rezultatele obținute se vor aplica într-o altă lucrare la reprezentarea numerelor prin forme pătratice.

FRACTIONS CONTINUES FINIES (I)

Le noyau de la fraction continue

(R é s u m é)

Employant la notation matricielle (2) des fractions continues finies qui se décomposent en un produit (3) de facteurs irréductibles, l'auteur introduit les notions suivantes:

La fraction continue K_m de la décomposition $Z = Z_m K_m Z_m^T$ (où T est le symbole de la transposition) est *le noyau de la fraction continue* Z. La fraction continue $Z(= K_m)$ est *noyau minimum* si elle n'a pas de noyau. Le quatrième élément $z_4(= k_{m4})$ (2) du noyau minimum $Z(= K_m)$ est *le nucléon* ν_0. *La différence de la fraction continue* Z (2) est $D(Z) = z_2 - z_3$, $|D(Z)| = k$. La fraction continue (7) est *la fraction continue* avec la longueur modifiée, associée à la fraction continue Z. La fraction continue est une *fraction continue polynôme* si ses éléments sont des polynômes.

Les propriétés principales des fractions continues finies en ce qui concerne les notions introduites sont données par les deux théorèmes suivants:

THEOREME 1. (*Thèorème du nucléon*). *Les valeurs que peut prendre le nucléon* ν_0 *de la fraction continue naturelle* Z *dans le cas où* D(Z) *est un nombre fixé*, $k \neq 2$ *pour* $(-1)^n = 1$ *et* $k \neq 0$ *pour* $(-1)^n = -1$, *forme un ensemble fini de nombres naturels différents de zéro.*

THEOREME 2. (*Théorème du noyau minimum polynôme de différence* (k)). *Les noyaux minimum naturels polynômes de* k, $Z = Z(k)$, *sont contenus dans un des* 14 *types suivants* (10) *et dans leurs transposées.*

(Par fraction continue naturelle nous entendons une fraction continue (2) ayant tous ses éléments comme nombres naturels.)

Les résultats obtenus seront appliqués dans un autre travail à la représentation des nombres par des formes quadratiques.

ÜBER EINIGE METRISCHE EIGENSCHAFTEN DER STELLENRINGE

von

I. GY. MAURER und M. SZILÁGYI

Es sei R ein Stellenring, also ein kommutativer Noetherscher Ring mit Einheitselement, der ein einziges maximales Primideal m besitzt. Dann gilt die Relation

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} m^i = \{0\} \tag{1}$$

wobei mit $\{0\}$ das Nullideal des Ringes R bezeichnet wird [3]. R ist ein topologischer Raum [1] bezüglich des folgendermassen definierten Grenzbegriffes [3]:

Eine Folge $\{a_n\}$ $(a_n \in R;\ n = 1, 2, \ldots)$ hat genau dann das Element $a \in R$ als Grenzwert $(a_n \to a)$, wenn es für eine beliebige ganze Zahl $s \geqslant 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(s)$ gibt, so dass die Relation

$$a - a_n \in m^s, \text{ also } a \equiv a_n(m^s), \text{ für alle } n > n_0 \text{ gilt.} \tag{2}$$

Aus (1) folgt: wenn $a_n \to a$, dann ist das Element $a \in R$ eindeutig bestimmt.

Die Folge $\{a_n\}$ heisst eine Cauchy-Folge (oder Grundfolge), wenn es für eine beliebige ganze Zahl $s \geqslant 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(s)$ gibt, so dass die Relation

$$a_{n_1} - a_{n_2} \in m^s, \text{ also } a_{n_1} \equiv a_{n_2}(m^s), \text{ für alle } n_1, n_2 \geqslant n_0 \text{ gilt.} \tag{3}$$

Der Stellenring R heisst komplett [3], wenn eine jede Grundfolge von R konvergent in R ist. Es ist leicht zu ersehen, dass eine Folge in einem kompletten Ring genau dann konvergent ist, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. R heisst komplettierbar, wenn er eine komplette Erweiterung R' besitzt.

Auf Grund eines Ergebnisses bezüglich der Operatorengruppen folgt (s. etwa [2], S. 51), dass durch den folgendermassen definierten Begriff der Entfernung (a, b) zweier beliebiger Elementen $a, b \in R$, R ein *metrischer Raum* wird:

$$\begin{cases} (a, b) = \frac{1}{2^s} \Leftrightarrow a \equiv b(m^s) \text{ und } a \not\equiv b(m^{s+1}), \text{ wenn } a \neq b \\ (a, b) = 0, \text{ wenn } a = b. \end{cases} \tag{4}$$

Wir zeigen in dieser Mitteilung, dass die Metrik (4) zu derselben Topologie in R, wie der Grenzbegriff (2), führt. Wir beschäftigen uns ferner mit gewissen Abbildungen des Ringes R in sich selbst und unsere Ergebnisse werden wir auch auf ein Gleichungsproblem anwenden.

Den Begriff der Cauchy-Folge und der konvergenten Folge definiert man in dem metrischen Raum R in üblicher Weise. Es ist leicht zu ersehen, dass die Relation (3) bzw. (2) mit der Relation (5) bzw. (6) gleichwertig ist:

Es gibt für eine beliebige ganze Zahl $s \geqslant 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(s)$, so dass

$$(a_{n_1}, a_{n_2}) \leqslant \frac{1}{2^s} \text{ für } n_1, n_2 \geqslant n_0 \tag{5}$$

$$(a, a_n) \leqslant \frac{1}{2^s} \text{ für } n \geqslant n_0 \tag{6}$$

gilt.

Es gilt also der folgende

SATZ 1. *Die durch den Entfernungsbegriff* (4) *eingeführte Metrik führt zu derselben Topologie in* R, *wie der Grenzbegriff* (2).

Da jeder metrische Raum komplettierbar ist, gilt folgendes

KOROLLAR. *Ein jeder Stellenring* R *ist in der oben eingeführten Topologie komplettierbar.*

Wir bemerken, dass der in diesem Korollar formulierte Satz ein Hauptergebnis der „analytischen" Theorie der Stellenringe ist [3]. Dieses wurde auch in [1] auf einem anderem Wege bewiesen.

Zugleich beweisen wir hier folgende *Eigenschaften* der Entfernungsfunktion:

$$(a - c, b - c) = (a, b) \quad \textit{für beliebige } a, b, c \in R; \tag{7}$$

$$(ac, bc) \leqslant (a, b) \cdot (c, 0) \quad \textit{für beliebige } a, b, c \in R; \tag{8}$$

$$(a^m, b^n) \leqslant (a, 0)^m + (b, 0)^n \quad \textit{für beliebige } a, b \in R \textit{ und für beliebige ganze Zahlen } m, n \geqslant 0. \tag{9}$$

Es sei $(a, b) = \frac{1}{2^s}$. Dann gilt $a - b \in m^s$, $a - b \notin m^{s+1}$, also dass $(a - c) - (b - c) \in m^s$, $(a - c) - (b - c) \notin m^{s+1}$ ist. Daraus folgt (7). Es sei $(c, 0) = \frac{1}{2^t}$. Es folgt aus $a - b \in m^s$ und $c \in m^t$, dass $ac - bc = (a - b)c \in m^{s+t}$, also $(ac, bc) \leqslant \frac{1}{2^{s+t}} = \frac{1}{2^s} \cdot \frac{1}{2^t} = (a, b) \cdot (0, c)$ ist. Das heisst, dass (8) gilt. Es folgt aus (8) für $b = 0$ und $c = a$, dass $(a^2, 0) \leqslant (a, 0) \cdot \cdot (a, 0) = (a, 0)^2$ ist und durch Induktion, dass auch $(a^k, 0) \leqslant (a, 0)^k$ gilt. Es gilt also auch die Relation (9) : $(a^m, b^n) \leqslant (a^m, 0) + (0, b^n) \leqslant (a, 0)^m + + (b, 0)^n$.

Es sei nun α eine beliebige *eindeutige Abbildung* des Ringes R in sich selbst. $a\alpha \in R$ bezeichnet das Bild des Elementes $a \in R$ durch α und $R\alpha$ bezeichnet das Bild des Ringes R durch α. Die Abbildung α soll eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

1°. *Wenn* $a \equiv b(m^s)$, *so ist* $a\alpha \equiv b\alpha(m^{s+1})$ *für beliebige* $a, b \in R$ *und für beliebiges* $s = 0, 1, 2, \ldots$.[1]

2°. *Wenn* $a \in m^s$, *so ist* $a\alpha \in m^s$ *für beliebiges* $a \in R$ *und beliebiges* $s = 0, 1, 2, \ldots$.

Bemerkung 1. Die Bedingungen 1° und 2° sind im allgemeinen unabhängig.

Bemerkung 2. Wenn α ein Endomorphismus der additiven Gruppe von R ist, so sind die Bedingungen 1° und 2° gleichwertig.

Weil in diesem Falle $0\alpha = 0$ ist, erhält man 2° aus 1° für $b = 0$. Es sei andererseits $a \equiv b(m^s)$, also $a - b \in m^s$. Dann folgt aus 2°, dass $(a - b)\alpha \in m^{s+1}$. Weil aber $(a - b)\alpha = a\alpha - b\alpha$, folgt $a\alpha \equiv b\alpha(m^{s+1})$.

Bemerkung 3. Es folgt aus 1° die Gültigkeit der folgenden Bedingung

$$(a\alpha, b\alpha) \leqslant \frac{1}{2}(a, b) \text{ für beliebige } a, b \in R. \tag{10}$$

Für $(a, b) = \frac{1}{2^s}$, erhalten wir $a \equiv b(m^s)$. Dann folgt aus 1°, dass $a\alpha \equiv \equiv b\alpha(m^{s+1})$ und dies bedeutet, dass $(a\alpha, b\alpha) \leqslant \frac{1}{2^{s+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2}(a, b)$.

Bemerkung 4. Aus 2° folgt die Existenz einer reellen Zahl $\lambda (0 < \lambda < 1)$, die der Relation

$$(a\alpha, b\alpha) \leqslant \lambda \cdot (a, b) \text{ für beliebige } a, b \in R \tag{11}$$

genügt, im allgemeinen nicht.

SATZ 2. *Es sei R ein kompletter Stellenring und es sei α eine eindeutige Abbildung des Ringes R in sich selbst, die die Bedingung 1° erfüllt. Dann ist die Beziehung*

$$x(\alpha - \varepsilon) = c \tag{12}$$

für jedes $c \in R$ von einem und nur einem Element $x = x_0 \in R$ erfüllt[2]. *Dieses Element ist der Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$, wobei $x_n = x_{n-1}\beta$ $(n = 2, 3, \ldots)$,*

[1] $m^0 = R$.

[2] ε bezeichnet die identische Abbildung von R in R.

x_1 ein beliebiges Element von R ist und die Abbildung $\beta:\beta\to R$ durch die Relation $x\beta = x\alpha - c(x\in R)$ definiert ist.

Beweis. Es folgt unmittelbar aus der Definition der Abbildung β, dass ein Element $x_0\in R$ die Bedingung (12) genau dann erfüllt, wenn es der Relation $x\beta = x$ genügt. Wir wollen zeigen, dass mit α auch β die Bedingung 1° erfüllt. Es seien a und b zwei Elemente von R, für die die Relation $a\equiv b(m^s)$ gilt. Weil $a\alpha\equiv b\alpha(m^{s+1})$ ist, so ist $a\alpha - c\equiv b\alpha - c(m^{s+1})$ und es gilt also $a\beta\equiv b\beta(m^{s+1})$ für beliebiges $s=0,1,2,\ldots$. Auf Grund der Bemerkung 3, folgt die Gültigkeit des Satzes aus dem Fixpunktsatze von Banach.

Bemerkung 5. Man kann auf Grund der Bemerkung 2° ersehen, dass im Falle wenn α ein Endomorphismus der additiven Gruppe von R ist, der Satz 2 auch im Falle 2° gilt.

Es sei nun für α die Bedingung 2° vorausgesetzt.

LEMMA. *Es sei R ein Stellenring und α eine eindeutige Abbildung des Ringes R in sich selbst, die die Bedingung 2° erfüllt. Dann wird die Relation*

$$x\alpha = x \tag{13}$$

von genau einem Element von R erfüllt, nämlich $x=0$.

Beweis. Weil $0\in m^s$ $(s=0,1,2,\ldots)$ ist, so folgt aus 2°, dass $0\alpha\in m^{s+1}$ $(s=0,1,2,\ldots)$ und also, dass $0\alpha\in\bigcap_{i=1}^{\infty} m^s=\{0\}$ ist. Es gilt also: $0\alpha=0$.

Wir zeigen weiterhin, dass die Relation (13) nur von $x=0$ erfüllt wird. Es sei $x_0=x_0\alpha$ wobei ein Element $x_0\in R$ $(x_0\not\equiv 0)$. Weil $x_0=x_0\alpha\in m$ ist, so erhält man, durch wiederholte Anwendung der Bedingung 2°, dass $x_0\in m^s$ $(s=1,2,\ldots)$ gilt. Daraus folgt $x_0\in\bigcap_{i=1}^{\infty} m^i$. Es ist also $x_0=0$.

SATZ 3. *Es sei R ein Stellenring und es sei α eine eindeutige Abbildung des Ringes R in sich selbst, die die Bedingung 2° erfüllt. Wenn $1-r\in m$ $(r\in R)$, so wird die Beziehung*

$$x\alpha = x \tag{14}$$

nur vom Element $x=0$ erfüllt.

Beweis. Es sei $1-r=r^*$ die mit (14) gleichwertige Relation[3]

$$x(\alpha+\varepsilon r^*) = x \tag{15}$$

Wir wollen beweisen, dass die Abbildung $\gamma=\alpha+\varepsilon r^*$ der Bedingung 2° genügt. Wenn $a\in m^s$, so ist $a\gamma=a(\alpha+\varepsilon r^*)$, weil α die Eigenschaft 2° besitzt und es gilt $r^*=1-r\in m$. Also, auf Grund des Lemmas ist die Relation (15), also auch die mit ihr gleichwertige Relation (14) von $x=0$ und nur von $x=0$ erfüllt.

---

[3] Wir bemerken bezüglich der angewandten Bezeichnung, dass $x(\alpha+\varepsilon r^*) = x\alpha + xr^*$ ist.

KOROLLAR 1. *$1 - r \notin m$ ist eine notwendige Bedingung dafür dass die Relation* (14) *von einem Element $x \neq 0$ erfüllt wird.*

KOROLLAR. 2. *Das Polynom*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + (a_1 - 1)x$$
$$(a_i \in m \subset R\,;\quad i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

hat in R eine einzige Wurzel, nämlich $x = 0$.

Beweis. Mit dem Polynom $p(x)$ kann man eine eindeutige Abbildung $x : R \to R$ in folgender Weise definieren : $x\alpha = p(x) + x$ $(x \in R)$. Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung die Bedingung 2° erfüllt. Es sei x ein beliebiges Element von R. Weil $a_i \in m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und weil m ein Ideal von R ist, so gilt $x\alpha \in m$ und demnach $R\alpha \subseteq m$. Man betrachtet ein beliebiges Element $a \in m^s (s = 1, 2, \ldots)$ Dann gilt

$$a\alpha = p(a) + a = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_2 a^2 + a_1 a =$$
$$= (a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \ldots + a_1) a \in m^{s+1}.$$

Aus dem Satz 3 folgt, dass die Relation $x\alpha = x$ genau von einem Element des Ringes R, nämlich von $x = 0$ erfüllt wird .Dies bedeutet, dass das Polynom (16) nur eine einzige Wurzel $x = 0$ in R besitzt.

Eingegangen am 15. Januar 1966

LITERATURANGABEN

1. Maurer, I. Gy., *Observații în legătură cu o noțiune de limită în inele locale,* Com. Acad. R.P.R., **XI** (1961), nr. 11, 1299–1303.
2. Nagata, M., *Local Rings,* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, number 13, New-York–London, 1962.
3. Northcott, D. G., *Ideal Theory,* Cambridge Tracts in Mathematical Physics, **42**, Cambridge, 1953.

DESPRE UNELE PROPRIETĂȚI METRICE ALE INELELOR LOCALE

(Rezumat)

Fie R un inel local și m idealul prim maximal al lui R.

R este un inel topologic [1] în raport cu noțiunea de limită (2).

În nota de față se studiază anumite proprietăți metrice ale spațiului R.

TEOREMA 1. Metrica definită prin noțiunea de distanță (4) ne conduce în R la aceeași topologie ca și noțiunea de limită (2).

COROLAR. Orice inel local R este completabil în topologia introdusă.

Se studiază anumite aplicații univoce α ale lui R în el însuși, care satisfac una dintre condițiile 1° și 2°.

TEOREMA 2. Fie R un inel local complet și α o aplicație univocă a lui R în R, care satisface condiția 1°. Atunci pentru orice $c \in R$ relația (9) este satisfăcută de un element $x =$

$= x_0$ al lui R şi numai de unul, iar acest element este limita unui şir $\{x_n\}$, unde $x_n = x_{n-1}\beta \in R(n = 2, 3, \ldots,)$, x_1 este un element arbitrar din R şi aplicaţia β a lui R în R este definită prin relaţia $x\beta = x\alpha - c(x \in R)$.

TEOREMA 3. Fie R un inel local, şi α o aplicaţie univocă a lui R în R, care satisface condiţia 2°. Dacă $1 - r \in m$ $(r \in R)$ atunci relaţia (14) este satisfăcută numai de $x = 0$.

COROLAR 1. Pentru ca relaţia (14) să fie satisfăcută de un element $x \neq 0$ este necesar ca să avem $1 - r \in m$.

COROLAR 2. Polinomul (16) se anulează pentru un singur element al lui R şi anume pentru $x = 0$.

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МЕСТНЫХ КОЛЕЦ

(Резюме)

Пусть R местное кольцо и m—максимальный простой идеал кольца R.

R— топологическое кольцо [1] по отношению к понятию предела (2).

В настоящей работе изучаются определенные метрические свойства пространства R.

ТЕОРЕМА 1. Метрика, определяемая понятием расстояния (4) ведет в R к той же топологии, что и понятие предела (2).

КОРОЛЛАРИЙ. Любое местное кольцо R может пополняться в введенной топологии.

Изучаются определенные однозначные отображения α кольца R в нем самом, удовлетворяющие одному из условий 1° и 2°.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R полное местное кольцо и α — однозначное отображение кольца R в R, удовлетворяющее условию 1°. Тогда для любого $c \in R$, отношение (9) удовлетворено одним и лишь одним элементом $x = x_0$ кольца R, а этот элемент является пределом последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = x_{n-1}\beta \in R(n = 2, 3 \ldots), x_1$ — произвольный элемент кольца R и отображение β кольца R в R определяется отношением $x\beta = x\alpha - c(x \in R)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R местное кольцо и α однозначное отображение кольца R в R, удовлетворяющее условию 2°. Если $1 - r \in m(r \in R)$, то отношение (14) удовлетворено лишь $x = 0$.

КОРОЛЛАРИЙ 1. Чтобы отношение (14) было удовлетворено элементом $x \neq 0$, необходимо иметь $1 - r \in$ D.

КОРОЛЛАРИЙ 2. Многочлен (16) аннулируется для одного элемента кольца R, а именно для $x = 0$.

SUR UN THÉOREME DE LA THÉORIE DES NOMBRES ET SES APPLICATIONS A LA THÉORIE DES TREILLIS ET DES GROUPES

de

GHEORGHE PIC

1. Si p et q sont des nombres naturels, $[p, q]$ leur plus petit commun multiple, (p, q) leur plus grand comun diviseur, alors

$$p \cdot q = [p, q] \cdot (p, q) \tag{1}$$

Les nombres naturels étant organisés à l'aide des opérations binaires, ,,le plus petit commun multiple" et ,,le plus grand commun diviseur" forment un treillis distributif. Cela signifie que nous avons les égalités suivantes :

$$[(a, b), c] = ([a, c], [b, c]) \qquad ([a, b], c) = [(a, c), (b, c)]$$

$$((a, b), c) = (a, (b, c)) \qquad [[a, b], c] = [a, [b, c]]$$

$$[a, (a, b)] = a \qquad (a, [a, b]) = a$$

où a, b, c sont des nombres naturels. Si $a \geqslant b$, alors

$$(a, b) = b \quad \text{et} \quad [a, b] = a$$

Ces propriétés nous permettent d'établir les théorèmes 1 et 2 et naturelement leurs duals qui généralisent la relation (1).

La confrontation du théorème 2 avec son dual nous suggère certaines égalités (théorème 3), qui ont lieu non seulement pour les nombres naturels mais dans chaque treillis distributif. Elles constituent de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un treillis soit distributif, équivalentes à la condition bien connue

$$([a, b], [a, c], [b, c]) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$$

Enfin une des conditions établies nous suggère une propriété des groupes, qui généralise un résultat de O. Ore.

2. Pour commencer nous établirons :

THÉOREME 1.:

$$\left.\begin{aligned}&([(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})],\\&[(p_1, \ldots, p_i), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) \times [(p_1, \ldots, p_{i+1}), \ldots,\\&(p_{n-i}, \ldots, p_n)] = [(p_1, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_{n+1})] \times\\&([p_1, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n, p_{i+1})],\\&[(p_1, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i}, \ldots, p_n)])\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En utilisant les propriétés d'associativité et de distributivité nous avons

$$(p_{n+1}, [p_1, \ldots, p_n]) = [(p_1, p_{n+1}), \ldots, (p_n, p_{n+1})]$$

L'égalité (1) nous donne

$$\begin{aligned}&(p_{n+1}, [p_1, \ldots, p_n]) \times [(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n)] =\\&= [(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_n, p_{n+1})] \times ([(p_1, p_{n+1}), \ldots, (p_n, p_{n+1})],\\&[(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n)])\end{aligned}$$

et, tenant compte des propriétés de distributivité et d'associativité, nous avons

$$\begin{aligned}&([(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})],\\&[(p_1, \ldots, p_i), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) =\\&= ([(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}), \ldots, (p_{n-i+2}, p_{n-i+3}, \ldots, p_n)], p_{n+1},\\&[(p_1, \ldots, p_i), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) = ([(p_1, \ldots, p_{i-1}), \ldots,\\&(p_{n-i+2}, \ldots, p_n)], [(p_1, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n, p_{n+1})])\end{aligned}$$

Mais on peut établir aisément que

$$\begin{aligned}&[(p_1, \ldots, p_{i-1}), \ldots, (p_{n-i+2}, \ldots, p_n)] \geqslant\\&\geqslant [(p_1, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, \ldots, p_n, p_{n+1})]\end{aligned}$$

et les lois d'absorption nous donnent

$$\begin{aligned}&([(p_1, \ldots, p_{i-1}), \ldots, (p_{n-i+2}, \ldots, p_n)], [(p_1, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots,\\&(p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})]) = [(p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots,\\&(p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})]\end{aligned}$$

le premier membre de l'égalité (2) sera donc égal à

$$\begin{aligned}&[(p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})] \cdot\\&\cdot [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]\end{aligned}$$

En utilisant pour ce produit l'égalité (1) nous obtenons le second membre de l'égalité (2).

Le résultat dual sera :

THÉORÈME 1'. :

$$\left.\begin{aligned}
&[([p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_{n+1}], \ldots, [p_{n-i+2}, p_{n-i+3}, \ldots, p_n, p_{n+1}]),\\
&\quad([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n])] \times\\
&\quad\times ([p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}], \ldots, [p_{n-1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]) =\\
&= ([p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_{n+1}]) \times\\
&\times [([p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1}]),\\
&\quad([p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}], \ldots, [p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n])]
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

En utilisant ces résultats nous aurons :

THÉORÈME 2. :

$$\left.\begin{aligned}
&p_1 p_2 \cdots p_n = [p_1, p_2, \ldots, p_n] \cdot [(p_1, p_2), (p_1, p_4), \ldots, (p_{n-1}, p_n)] \cdot\\
&\cdot [(p_1, p_2, p_4), (p_1, p_2, p_4), \ldots, (p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)] \cdots (p_1, p_2, \ldots, p_n)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Pour le démontrer nous utiliserons l'induction par rapport à n. Nous montrerons auparavant que

$$\left.\begin{aligned}
&p_1 p_2 \cdots p_{n+1} = [p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}] \cdot [(p_1, p_2), \ldots, (p_n, p_{n+1})] \cdot\\
&\quad\cdot [(p_1, p_2, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n, p_{n+1})] \cdots\\
&\quad\cdots [(p_1, p_2, \ldots, p_i), \ldots, (p_{n-i+2}, p_{n-i+3}, \ldots, p_{n+1})] \cdot\\
&\quad\cdot [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_{n+1})] \cdot\\
&\quad\cdot ([(p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots,\\
&\quad(p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})], [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots,\\
&\quad(p_{n-i-1}, p_{n-i}, \ldots, p_n)]) \cdot\\
&\cdot [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+2}), \ldots, (p_{n-i-1}, p_{n-i}, \ldots, p_n)] \cdots (p_1, p_2, \ldots, p_n)
\end{aligned}\right\} \quad (5_i)$$

La formule (5_i) subsiste si $i = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour i. Observons que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&([(p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})],\\
&\quad[(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) =\\
&= ([p_1, p_2, \ldots, p_i), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n)], p_{n+1},\\
&\quad[(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) =\\
&= (p_{n+1}, [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}), \ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) =\\
&= [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n, p_{n+1})]
\end{aligned}$$

et par suite, le théorème 1 nous donne

$$([(p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n, p_{n+1})], [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}),$$
$$\ldots, (p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n)]) \cdot [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+2}), \ldots, (p_{n-i+1}, p_{n-i}, \ldots, p_n)] =$$
$$= [(p_1, p_2, \ldots, p_{i+2}), \ldots, (p_{n-i-1}, p_{n-i}, \ldots, p_{n+1})] \cdot ([(p_1, p_2, \ldots,$$
$$\ldots, p_{i+1}, p_{n+1}), \ldots, (p_{n-i-1}, p_{n-i}, \ldots, p_n, p_{n+1})],$$
$$[(p_1, p_2, \ldots, p_{i+2}), \ldots, (p_{n-i-1}, p_{n-i}, \ldots, p_n)])$$

et en substituant dans (5_i) nous obtenons (5_{i+1}).

En posant dans (5_i) $i = n$ nous obtenons (4).

Des raisonnements duals nous donnent :

THÉORÈME 2'.:

$$p_1 p_2 \ldots p_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \cdot ([p_1, p_2], [p_1, p_3], \ldots, [p_{n-1}, p_n]) \cdot$$
$$([p_1, p_2, p_3], \ldots, [p_{n-2}, p_{n-1}, p_n]) \ldots [p_1, p_2, \ldots, p_n] \tag{6}$$

3. Les formules (4) et (6) nous conduisent à une égalité. Elle a lieu parce que

$$([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]) =$$
$$= [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i}), \ldots, (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)] \quad i \leqslant n \tag{$8_{i,n}$}$$

Cette égalité à lieu non seulement pour les nombres naturels. Nous avons le résultat général suivant :

THÉORÈME 3. *Un treillis T est distributif si et seulement si pour* $\forall p_1, p_2, \ldots, p_n \in T$ *nous avons* $(8_{i,n})$.

Observons que si $n = 3$, $i = 2$ nous obtenons une condition connue pour qu'un treillis soit distributif.

Nous procéderons par induction par rapport à n et i. Supposons que $(8_{i,n})$ soit vraie pour n et $i < n$.

Nous avons[1]

$$([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+2}, p_{n-i+3}, \ldots, p_{n+1}]) =$$
$$= ([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]),$$
$$([p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{n+1}], \ldots, [p_{n-i+2}, p_{n-i+3}, \ldots, p_{n+1}])) =$$
$$= (([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]),$$
$$[([p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}], \ldots, [p_{n-i+2}, \ldots, p_n]), p_{n+1}])$$

[1] Nous utiliserons pour conserver la continuité des notations dans ce qui suit les symboles [ ] et ( ) respectivement pour la réunion et l'intersection des éléments d'un treillis.

et en tenant compte de l'hypothèse d'induction nous aurons

$$\begin{gathered}([(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), \ldots, (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)],\\ [[(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+2}), \ldots, (p_{i-1}, \ldots, p_n)], p_{n+1}]) =\\ [((p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), [[(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+2}), \ldots, (p_{i-1}, \ldots, p_n)], p_{n+1}]),\\ \ldots, ((p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n), [[(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+2}), \ldots, (p_{i-1}, \ldots, p_n)], p_{n+1}])] =\\ = [[((p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+2}), \ldots, (p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, p_n)]),\\ (p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}, p_{n+1})], \ldots, [((p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n),\\ [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+2}), \ldots, (p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, p_n)]), (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)]]\end{gathered}$$

et en tenant compte de l'associativité de l'opération de réunion nous obtenons le résultat énoncé. Nous avons ainsi montré que $(8_{i,n})$ entraîne $(8_{i,n+1})$. Réciproquement si $(8_{i,n+1})$ a lieu pour $\forall p_1, p_2, \ldots, p_{n+1} \in T$, alors nous en déduisons que $(8_{i,n})$ subsiste aussi pour $\forall p_1, p_2, \ldots, p_n$ parce que, en substituant dans $(8_{i,n+1})$ $p_{n+1} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ nous obtenons $(8_{i,n})$.

Il reste à montrer que $(8_{i,n})$ entraîne $(8_{i+1,n})$. Observons que le premier membre de $(8_{i+1,n})$ peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{gathered}([p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}], \ldots, [p_{n-i}, \ldots, p_n]) = (([p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}], \ldots,\\ [p_{n-i-1}, \ldots, p_{n-1}]), ([p_1, \ldots, p_i, p_n], \ldots, [p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_n]))\end{gathered}$$

et en tenant compte des propriétés de distribuitivité

$$\begin{gathered}(([p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}], \ldots, [p_{n-i-1}, \ldots, p_{n-1}]),\\ [([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i}, p_{n-i+1}, \ldots, p_{n-1}]), p_n])\end{gathered}$$

Maintenant $(8_{i,n-1})$ et $(8_{i+1,n-1})$ nous donnent

$$\begin{gathered}([(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i-1}), \ldots, (p_{i+1}, \ldots, p_{n-1})],\\ [[(p_1, \ldots, p_{n-i}), \ldots, (p_i, \ldots, p_{n-1})], p_n])\end{gathered}$$

et comme

$$[(p_1, \ldots, p_{n-i-1}), \ldots, (p_{i+1}, \ldots, p_{n-1})] \geqslant [(p_1, \ldots, p_{n-i}), \ldots, (p_i, \ldots, p_{n-1})]$$

la relation de modularité nous montre que l'expression étudiée est égale à

$$\begin{gathered}[([(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i-1}), \ldots, (p_{i+1}, \ldots, p_{n-1})], p_n),\\ [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i}), \ldots, (p_i, \ldots, p_{n-1})]] =\\ = [[(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i-1}, p_n), \ldots, (p_{i+1}, \ldots, p_{n-1}, p_n)],\\ [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i}), \ldots, (p_i, \ldots, p_{n-1})]]\end{gathered}$$

ce qui n'est autre chose que le second membre de $(8_{i+1,n})$.

4. Observons que dans chaque treillis nous avons la relation

$$\begin{aligned}([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]) \geqslant \\ \geqslant [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), \ldots, (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)]\end{aligned} \tag{9}$$

En effet chaque élément de l'intersection qui figure au premier membre de l'inégalité (9) est contenu dans chaque élément de la réunion du second membre de la même inégalité; en effet $[p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots, p_{k_i}]$ contient au moins un p_{k_s} qui coïncide avec un p_{l_t} de l'intersection $(p_{l_1}, p_{l_2}, \ldots, p_{l_{n-i+1}})$ parce que nous avons n éléments p, et avec eux on ne peut former deux sous-ensembles disjoints dont l'un a i éléments et l'autre $n - i + 1$ éléments.

Nous utiliserons cette inégalité pour démontrer un résultat qui est la généralisation d'un théorème de O. Ore.

Soit G un groupe. Ses sous-groupes normaux constituent un treillis modulaire. Nous montrerons d'abord :

LEMME : *Soit $H_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ des sous-groupes normaux d'un groupe tel que*

$$M = H_1 H_2 \ldots H_{n-1} = H_1 H_2 \ldots H_{n-2} H_n = \ldots = H_2 H_3 \ldots H_n$$

$$H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = \ldots = H_{n-1} \cap H_n = 1$$

alors M est abélien.

En effet; soit $u_1, u_2 \in M$. Alors nous aurons

$$u_1 = v_1 v_2 \ldots v_{n-1}; \; u_2 = w_1 w_2 \ldots w_{n-1}$$

où $v_i, w_i \in H_i (i = 1, 2, \ldots n - 1)$. Donc

$$u_1 u_2 = v_1 v_2 \ldots v_{n-1} w_1 w_2 \ldots w_{n-1} = v_1 v_2 \ldots v_{n-2} w_1 v_{n-1} w_2 \ldots w_{n-1}$$

parce que $H_{n-1} \cap H_1 = 1$ nous permet d'écrire $v_{n-1} w_1 = w_1 v_{n-1}$. Des considérations similaires nous montrent que

$$u_1 u_2 = v_1 v_2 \ldots v_{n-3} w_1 w_{n-2} v_{n-1} w_2 \ldots w_{n-1}$$

et en répétant ce raisonnement plusieurs fois nous obtiendrons

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= w_1 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} w_2 \ldots w_{n-1} = \\ &= w_1 w_2 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} w_3 \ldots w_{n-1} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= w_1 w_2 \ldots w_{n-1} v_1 v_2 \ldots v_{n-1} = u_2 u_1 \end{aligned}$$

Considérons les sous-groupes

$$K_i = \frac{(H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n)}{(H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)}$$

et calculons $K_1 K_2 \ldots K_{n-1}$. Observons que

$$(H_1 \cap H_2H_4 \ldots H_n)(H_2 \cap H_3 \cap \ldots \cap H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n)$$
$$(H_1 \cap H_3 \cap \ldots \cap H_n) \ldots (H_{n-1} \cap H_1 \ldots H_{n-2}H_n)(H_1 \cap \ldots \cap$$
$$\cap H_{n-2} \cap H_n) = (H_1 \cap H_1H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n) \ldots$$
$$\ldots (H_{n-1} \cap H_1 \ldots H_{n-2}H_n) \cdot (H_2 \cap H_3 \cap \ldots \cap H_n)(H_1 \cap H_3 \cap \ldots \cap H_n) \ldots$$
$$\ldots (H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{n-2} \cap H_n)$$

Les sous-groupes H_i étant des sous-groupes normaux, nous pourrons utiliser la relation de Dedekind. Observons que

$$H_2H_3 \ldots H_n \supseteq H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n$$

donc

$$(H_1 \cap H_2H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n) =$$
$$= H_2H_3 \ldots H_n \cap [H_1(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n)] =$$
$$= H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_2$$

et

$$(H_1 \cap H_2H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n)(H_3 \cap H_1H_2H_4 \ldots H_n) =$$
$$= (H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_2)(H_3 \cap H_1H_2H_4 \ldots H_n).$$

Mais

$$H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_2 \subseteq H_1H_2H_4 \ldots H_n$$

donc

$$(H_1 \cap H_2H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n)(H_3 \cap H_1H_2H_4 \ldots H_n) =$$
$$= (H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_2)(H_3 \cap H_1H_2H_4 \ldots H_n) =$$
$$= H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap H_1H_2H_4 \ldots H_n \cap H_1H_2H_3$$

parce que

$$H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \supseteq H_3$$

Par induction nous déduirons que

$$(H_1 \cap H_2H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n) \ldots (H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n) =$$
$$H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap \ldots \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n \cap H_1H_2 \ldots H_i$$

et posant $i = n - 1$

$$(H_1 \cap H_2H_3 \ldots H_n)(H_2 \cap H_1H_3 \ldots H_n) \ldots (H_{n-1} \cap H_1 \ldots H_{n-2}H_n) =$$
$$= H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap \ldots \cap H_1H_2 \ldots H_{n-1}$$

donc

$$K_1K_2 \ldots K_{n-1} = \frac{H_2H_3 \ldots H_n \cap H_1H_3 \ldots H_n \cap \ldots \cap H_1H_2 \ldots H_{n-1}}{(H_1 \cup H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)}.$$

Montrons maintenant que $K_i \cap K_j = 1 (i \neq j)$ ou, ce qui revient au même, que

$$(H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n) \cap$$
$$\cap (H_j \cap H_1 \ldots H_{j-1}H_{j+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n) \subseteq$$
$$\subseteq (H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)$$

D'abord si $i \neq j$

$$H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n \subseteq H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n$$

En effet

$$H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n \subseteq H_i$$
$$H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n \subseteq H_i \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n$$

et cela justifie notre affirmation. Cette inégalité nous montre que

$$(H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n) \cap$$
$$\cap (H_j \cap H_1 \ldots H_{j-1}H_{j+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots H_n) =$$
$$= [(H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n) \cap$$
$$\cap (H_j \cap H_1 \ldots H_{j-1}H_{j+1} \ldots H_n)] (H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n) =$$
$$(H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \ldots \cap H_n)(H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \ldots \cap H_n).$$
$$[(H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n) \cap (H_j \cap H_1 \ldots H_{j-1}H_{j+1} \ldots H_n)] =$$
$$= (H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n) \cdot (H_1 \cap \ldots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap H_n)(H_i \cap H_j)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Notre lemme donne maintenant :

THÉORÈME 4. : *Si $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont des sous-groupes normaux d'un groupe G, alors le groupe*

$$\frac{H_1H_2 \ldots H_{n-1} \cap H_1H_2 \ldots H_{n-2}H_n \cap \ldots \cap H_2H_3 \ldots H_n}{(H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)}$$

est abélien.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1966

BIBLIOGRAPHIE

1. Ore, O., *Structures and Group Theory*. I. Duke Math. Journal. **3**, pp. 149–174 (1937).

DESPRE O TEOREMĂ DE TEORIA NUMERELOR ŞI CONSECINŢE ÎN TEORIA RETICULELOR ŞI A GRUPURILOR

(R e z u m a t)

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere naturale, $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ cel mai mic multiplu comun al acestora, $(p_1, p_2, \ldots, p\ )$ cel mai mare divizor comun. În lucrare se demonstrează între altele că:

TEOREMA 2.

$$p_1, p_2 \ldots p_n = [p_1, p_2, \ldots, p_n] \cdot [(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n)] \cdot$$

$$\cdot [(p_1, p_2, p_3), (p_1, p_2, p_4), \ldots, (p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)] \ldots (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Subzistă şi o teoremă duală. Din confruntarea formulei cu duala ei rezultă nişte egalităţi care subzistă nu numai în cazul particular al numerelor naturale ci în orice reticul distributiv.

Păstrind pentru reunirea elementelor $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ale reticulului T simbolul $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ şi $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pentru intersecţie se stabileşte că:

TEOREMA 3. Un reticul T este distributiv dacă şi numai dacă pentru $\forall p_1, p_2, \ldots, p_n \in T$

$$([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]) =$$

$$= [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), \ldots, (p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)].$$

În sfîrşit în legătură cu acest rezultat se arată că:

TEOREMA 4. Dacă $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sînt subgrupuri normale ale grupului G, atunci grupul

$$\frac{H_1H_2 \ldots H_{n-1} \cap H_1H_2 \ldots H_{n-2}H_n \cap \ldots \cap H_2H_3 \ldots H_n}{(H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)}$$

este abelian.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ПОСЛЕДСТВИЯ В ТЕОРИИ РЕШЕТОК И ГРУПП

(Р е з ю м е)

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ натуральные числа, $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ — их общее наименьшее кратное, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — общий наибольший делитель. В работе доказывается, между прочим, следующая теорема:

Теорема 2.

$$p_1p_2 \ldots p_n = [p_1, p_2, \ldots, p_n] \cdot [(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n)] \cdot$$

$$\cdot [(p_1, p_2, p_3), (p_1, p_2, p_4), \ldots, (p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)] \ldots (p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Существует и двойственная теорема. Из сравнения формулы с ее двойственной получаются уравнения, существующие не только в частном случае натуральных чисел, но и в любой дистрибутивной решетке.

Сохраняя для воссоединения элементов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ решетки T символ $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ и $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ для пересечения, устанавливается.

Теорема 3. Решетка T является дистрибутивной если и только если для $\forall p_1, p_2, \ldots, p \in T$

$$([p_1, p_2, \ldots, p_i], \ldots, [p_{n-i+1}, p_{n-i+2}, \ldots, p_n]) =$$

$$= [(p_1, p_2, \ldots, p_{n-i+1}), \ldots, (p_{i+1_1}, \ldots, p_n)]$$

Наконец, в связи с этим результатом показывается

Теорема 4. Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ нормальные делители группы G, тогда группа

$$\frac{H_1H_2 \ldots H_{n-1} \cap H_1H_2 \ldots H_{n-2}H_n \cap \ldots \cap H_2H_3 \ldots H_n}{(H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3) \ldots (H_{n-1} \cap H_n)}$$

является абелевой.

PROPRIETĂȚI ALE POLINOAMELOR CARE SATISFAC UNOR RELAȚII DE RECURENȚĂ

de

ILIE TORSAN

1. Fie

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x), \ldots \tag{1}$$

un șir de polinoame reale, $f_k(x)$ fiind de gradul k între care există relațiile de recurență

$$f_n(x) + (\alpha_n - \beta_n x) f_{n-1}(x) + \gamma_n f_{n-2}(x) = 0 \quad n \geqslant 2 \tag{2}$$

unde $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = -\alpha_1 + \beta_1 x$ iar α_n, β_n, γ_n sînt numere reale.

N. Obreșkov demonstrează în [1] următoarea

TEOREMĂ: *Dacă $\alpha_n \neq 0$, $\gamma_n \neq 0$ și rădăcinile lui $f_n(x)$ sînt reale și separate de rădăcinile lui $f_{n-1}(\bar{x})$, atunci orice polinom de forma*

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_{2n-1} f_{2n-1}(x)$$

unde numerele λ_i sînt reale, are cel puțin o rădăcină de multiplicitate impară în intervalul format de rădăcinile extreme ale polinomului $f_n(x)$.

Să considerăm șirul (1) format din polinoame ortogonale definite prin

$$\int_a^b p(x) x^h f_n(x) dx = 0 \quad h = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

unde $p(x)$ este o funcție care nu schimbă de semn în intervalul (a, b). În cazul $h = 0$ Th. Angheluță demonstrează în [2]

TEOREMĂ: *Ecuația algebrică*

$$a_0 f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \ldots + a_{n-1} f_1(x) = 0 \tag{4}$$

are cel puțin o rădăcină în intervalul format de rădăcinile extreme ale polinomului $f_k(x)$, k fiind $\frac{n+1}{2}$ sau $\frac{n+2}{2}$ în funcție de paritatea lui n.

M. Parodi în [3] și [4] considerînd că șirul (1) este format din polinoame ortogonale demonstrează o serie de rezultate referitoare la rădăcinile acestora. De asemenea considerînd polinomul

$$\Phi(x) = f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \ldots + a_n \tag{5}$$

unde a_i sînt numere reale demonstrează unele rezultate referitoare la rădăcinile lui.

2. În cele ce urmează noi vom presupune că polinoamele șirului (1) satisfac unor relații mai generale decît (2) și anume

$$f_n(x) + (\alpha_n - \beta_n x) f_{n-1}(x) + (\gamma_n - \delta_n x) f_{n-2} = 0 \quad n \geqslant 2 \tag{6}$$

unde $f_0(x) = 1$ și $f_1(x) = -\alpha_1 + \beta_1 x$ și vom deduce cîteva proprietăți ale rădăcinilor polinoamelor de forma

$$F(x) = f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \ldots + a_n \tag{7}$$

unde a_i sînt numere reale sau complexe.

Dacă în (6) presupunem că

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{2k} = 0 \\ \beta_i > 0, \ \gamma_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k) \end{cases} \tag{8}$$

atunci avem

TEOREMA 1. *Pentru orice $\bar{x}$ real astfel încît* $x < \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{2k}}\right\}$

$$f_{2k}(x) > 0 \ \textit{și} \ f_{2k-1}(x) < 0$$

și pentru orice x real astfel încît $x > \mathit{max}\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{2k}}\right\}$

$$f_{2k}(x) > 0 \ \text{și} \ f_{2k-1}(x) > 0$$

Demonstrație: Vom demonstra prima parte a teoremei prin inducție asupra gradului polinomului $f_j(x)$.

Pentru $j = 1$ avem $f_1 = -(\alpha_1 - \beta_1 x)$ deci $f_1(x) < 0$ pentru $x < \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Pentru $j = 2$ avem $f_2 = -(\alpha_2 - \beta_2 x) f_1 - \gamma_2$. Dar cum $\gamma_2 \leqslant 0$ și $f_1(x) < 0$ atunci $f_2(x) > 0$ pentru $x < \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$.

Presupunem proprietatea adevărată pentru $j - 1$, deci avem

$$\begin{cases} f_{j-1}(x) > 0, \ f_{j-2}(x) < 0 \ \text{și} \ f_{j-3}(x) > 0 \ \text{dacă} \ j \ \text{este impar} \\ f_{j-1}(x) < 0, \ f_{j-2}(x) > 0 \ \text{și} \ f_{j-3}(x) < 0 \ \text{dacă} \ j \ \text{este par} \end{cases} \tag{9}$$

Dar

$$f_j(x) = -(\alpha_j - \beta_j x) f_{j-1}(x) - \gamma_j f_{j-2}(x)$$

şi dacă j este impar din (8) şi (9) pentru

$$x < \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_j}{\beta_j}\right\}$$

rezultă $f_j(x) < 0$. La fel se demonstrează propoziţia şi pentru j par. Analog se arată partea a doua a teoremei şi cu aceasta demonstraţia este terminată.

Să considerăm polinomul

$$F(x) = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_{2n} f_{2n} \tag{10}$$

unde a_i sînt numere reale ($a_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$).
Scriind acest polinom sub forma

$$F(x) = a_0 f_0\left(1 + \frac{a_1 f_1}{2a_0 f_0}\right)^2 + \frac{a_0 a_2 f_0 f_2 - a_1^2 f_1^2}{4a_0 f_0} + \frac{3a_2 f_2}{4}\left(1 + \frac{2a_3 f_3}{3a_2 f_2}\right)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{(n+1)a_{2n-2} f_{2n-2}}{2n}\left(1 + \frac{n a_{2n-1} f_{2n-1}}{(n+1)a_{2n-2} f_{2n-2}}\right)^2 + \frac{n a_{2n-2} a_{2n} f_{2n-2} f_{2n} - a_{2n-1}^2 f_{2n-1}^2}{2(n+1)a_{2n-2} f_{2n-2}} +$$
$$+ \frac{(n+2)a_{2n} f_{2n}}{2(n+1)}$$

se observă, în baza teoremei 1 că acest polinom este pozitiv pentru

$$x < \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right\} \quad \text{sau} \quad x > \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right\}$$

dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$\begin{cases} a_{2i} > 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ a_{2i-2} a_{2i} f_{2i-2} f_{2i} - a_{2i-1}^2 f_{2i-2}^2 > 0 & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{11}$$

Punînd $\delta_j = \gamma_j = 0$ pentru $j = 2, 3, \ldots, 2n$ şi $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$ pentru $j = 1, 2, \ldots, 2n$, polinoamele şirului (1) sînt

$$f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2, \ldots, f_{2n} = x^{2n}$$

şi polinomul (10) devine

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n} \tag{12}$$

şi deci din teorema 1 şi din (11) rezultă că (12) este pozitiv pentru orice x real dacă avem satisfăcute condiţiile

$$\begin{cases} a_{2i} > 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ a_{2i-2} a_{2i} - a_{2i-1}^2 > 0 & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{13}$$

Am regăsit astfel un rezultat obținut de V. Vleck în [5] și T. Popoviciu în [6].

3. Vom considera acum cazul cînd în (6) avem $\delta_j \neq 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Pentru a pune în evidență unele proprietăți ale rădăcinilor polinomului (7) vom urma o cale asemănătoare cu aceea folosită de M. Parodi în [4], adică vom construi o matrice pătratică A ale cărei valori caracteristice sînt chiar rădăcinile polinomului (7).

Fie sistemul

$$\begin{cases} f_n + (\alpha_n - \beta_n x) f_{n-1} + (\gamma_n - \delta_n x) f_{n-2} = 0 \\ f_{n-1} + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} x) f_{n-2} + (\gamma_{n-1} - \delta_{n-1} x) f_{n-3} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_2 + (\alpha_2 - \beta_2 x) f_1 = -\gamma_2 + \delta_2 x \\ f_1 = -\alpha_1 + \beta_1 x \\ f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \ldots + a_{n-1} f_1 - F(x) = -a_n \end{cases} \tag{14}$$

Deoarece determinantul format cu coeficienții lui $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_1$ și $F(x)$ are valoarea -1, rezultă că

$$F(x) = -\begin{vmatrix} 1 & \alpha_n - \beta_n x & \gamma_n - \delta_n x & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} x & \gamma_{n-1} - \delta_{n-1} x \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & -\alpha_1 + \beta_1 x \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \tag{15}$$

și prin calcule elementare se stabilește că

$$F(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} \left(\alpha_n - a_1 - \frac{\delta_n}{\beta_{n-1}}\right) - \beta_n x & A_{12} - a_2 \ldots A_{n1} - a_n \\ 1 & \left(\alpha_{n-1} - \frac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right) - \beta_{n-1} x \ldots A_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 \quad \alpha_1 - \beta_1 x \end{vmatrix} \tag{16}$$

unde

$$A_{kj} = (-1)^{k+j+1} \left[\gamma_{n-j+2} - \left(\alpha_{n-j+1} - \frac{\delta_{n-j+1}}{\beta_{n-j}} \right) \frac{\delta_{n-j+2}}{\beta_{n-j+1}} \right] \prod_{l=j-3}^{k-1} \frac{\delta_{n-l}}{\beta_{n-l-1}} \; ; \; j > k \tag{17}$$

iar pentru simetria scrierii am pus $\delta_1 = 0$ şi $\beta_0 \neq 0$. Deci matricea A ale cărei valori caracteristice sînt chiar rădăcinile polinomului (7) este

$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{\left(\alpha_n - a_1 - \dfrac{\delta_n}{\beta_{n-1}}\right)}{\beta_n} & \dfrac{A_{12} - a_2}{\beta_n} & \dots & \dfrac{A_{1n} - a_n}{\beta_n} \\ \dfrac{1}{\beta_{n-1}} & \dfrac{\left(\alpha_{n-1} - \dfrac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right)}{\beta_{n-1}} & \dots & \dfrac{A_{2n}}{\beta_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \dfrac{1}{\beta_1} & \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

Aplicînd acestei matrici proprietăţile cunoscute referitoare la valorile ei caracteristice obţinem altele pentru rădăcinile polinomului (7). Astfel avem

TEOREMA 2. *Polinomul* (7) *are întotdeuna cel puţin o rădăcină* x_k *astfel încît*

$$|x_k| \geqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i\beta_{i-1} - \delta_i}{\beta_i\beta_{i-1}}\right) - \frac{a_1}{\beta_n}\right|$$

pentru orice valori ale parametrilor $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ *şi* $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_n$.

D e m o n s t r a ţ i e : Dacă λ_i sînt valorile caracteristice ale matricei (18) avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i\beta_{i-1} - \delta_i}{\beta_i\beta_{i-1}} - \frac{a_1}{\beta_n} \tag{19}$$

dar cum λ_i coincide cu rădăcina x_i a polinomului (7), din (19) rezultă teorema enunţată.

Să presupunem că numerele α_i, β_i, γ_i, δ_i şi a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ sînt reale şi că $f_n(x)$ are toate rădăcinile reale, ele fiind separate de către rădăcinile lui $f_{n-1}(x)$. Atunci avem

TEOREMA 3. *Dacă* $A_{1i} = a_i$; $i = 2, 3, \dots, n$ *atunci orice polinom de forma*

$$F(x) = f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \dots + a_n$$

are toate rădăcinile reale, avînd între rădăcinile extreme ale lui $f_n(x)$ ***cel puţin*** $(n - 1)$ ***rădăcini.***

D e m o n s t r a ţ i e: Dacă $A_{1i} = a_i$ pentru $i = 2, 3, \ldots, n$ atunci matricea (18) devine

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\left(\alpha_n - a_1 - \dfrac{\delta_n}{\beta_{n-1}}\right)}{\beta_n} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \dfrac{1}{\beta_{n-1}} & \dfrac{\left(\alpha_{n-1} - \dfrac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right)}{\beta_{n-1}} & \dfrac{A_{23}}{\beta_{n-1}} \ldots \dfrac{A_{2n}}{\beta_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \end{Vmatrix} \tag{20}$$

şi deci o rădăcină a polinomului (7) este

$$x_1 = \frac{\left(\alpha_n - a_1 - \dfrac{\delta_n}{\beta_{n-1}}\right)}{\beta_n}$$

iar celelalte $(n-1)$ rădăcini coincid cu valorile caracteristice ale matricei

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\left(\alpha_{n-1} - \dfrac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right)}{\beta_{n-1}} & \dfrac{A_{23}}{\beta_{n-1}} & \ldots \dfrac{A_{2n}}{\beta_{n-1}} \\ \dfrac{1}{\beta_{n-2}} & \dfrac{\left(\alpha_{n-2} - \dfrac{\delta_{n-2}}{\beta_{n-3}}\right)}{\beta_{n-2}} & \ldots \dfrac{A_{3n}}{\beta_{n-2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & 0 \ldots \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \end{Vmatrix}$$

care sînt chiar rădăcinile polinomului $f_{n-1}(x)$ şi din ipoteza făcută rezultă teorema enunţată.

TEOREMA 4. Fie

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|) = \alpha; \quad \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|) = a > 1$$
$$\max(|\gamma_2|, |\gamma_4|, \ldots, |\gamma_n|) = \gamma; \quad \min(|\beta_1|, |\beta_2|, \ldots, |\beta_n|) = \beta$$
$$\delta_2 = \delta_3 = \ldots = \delta_n = 0 \qquad ; \gamma > \alpha$$

Atunci rădăcinile polinomului (7) se găsesc în reuniunea următoarelor n regiuni circulare

$$\left|\frac{\alpha_n - a_1}{\beta_n} - x\right| \leqslant R, \quad \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i} - x\right| \leqslant R; \; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

unde

$$R = \frac{\left(\frac{a+\gamma}{\beta}\right)(a+\alpha)^{1/n} - \left(\frac{a+\alpha}{\beta}\right)(a+\gamma)^{1/n}}{(a+\gamma)^{1/n} - (a+\alpha)^{1/n}}$$

D e m o n s t r a ț i e: Dacă $\delta_i = 0$ pentru $i = 2, 3, \ldots, n$ atunci matricea (18) devine

$$\begin{Vmatrix} \frac{\alpha_n - a_1}{\beta_n} & \frac{\gamma_n - a_2}{\beta_n} & -\frac{a_3}{\beta_n} \ldots & -\frac{a_n}{\beta_n} \\ \frac{1}{\beta_{n-1}} & \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} & \frac{\gamma_{n-1}}{\beta_{n-1}} \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \frac{\gamma_2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{Vmatrix} \tag{21}$$

și avem

$$\left|\frac{\alpha_n - a_1}{\beta_n}\right| \leqslant \frac{\alpha + a}{\beta}\,;\ \frac{1}{|\beta_i|} < \frac{\alpha + a}{\beta}\,;\ \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right| < \frac{\alpha + a}{\beta}\,;\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\left|\frac{\gamma_n - a_2}{\beta_n}\right| \leqslant \frac{\gamma + a}{\beta}\,;\ \left|\frac{a_i}{\beta_n}\right| < \frac{\gamma + a}{\beta}\,;\ i = 3, 4, \ldots, n\,;\ \left|\frac{\gamma_i}{\beta_i}\right| < \frac{\gamma + a}{\beta}\,;$$
$$i = 2, 2, \ldots, n-1$$

dar cum $\frac{\gamma + a}{\beta} > \frac{\alpha + a}{\beta} > 0$, teorema enunțată rezultă acum din următorul rezultat stabilit de A. O s t r o w s k i (vezi de exemplu [3]): Dacă elementele a_{ij} ale unei matrici patrate de ordin n îndeplinesc condițiile

$$|a_{ij}| \leqslant m \quad (j \leqslant i) \text{ și } |a_{ij}| \leqslant M \quad (j > i) \quad (0 < m < M)$$

atunci rădăcinile ei caracteristice se găsesc în reuniunea următoarelor regiuni circulare

$$|a_{ii} - x| \leqslant \frac{Mm^{1/n} - mM^{1/n}}{M^{1/n} - m^{1/n}}$$

Dacă $F'(x)$ este derivata polinomului (7) atunci avem

TEOREMA 5. *Rădăcinile complexe ale polinomului $F'(x)$ se găsesc în regiunea R, formată prin reuniunea regiunilor interioare a n elipse avînd ecuațiile*

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\alpha_n\beta_{n-1} - a_1\beta_{n-1} - \delta_n}{\beta_n\beta_{n-1}} - x\right)^2}{2m^2} + \dfrac{y^2}{m^2} - 1 \leqslant 0 \\ \dfrac{\left(\dfrac{\alpha_{n-j}\beta_{n-j-1} - \delta_{n-j}}{\beta_{n-j}\beta_{n-j-1}} - x\right)^2}{2m_j^2} + \dfrac{y^2}{m_j^2} - 1 \leqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \dfrac{\left(\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} - x\right)^2}{2 \cdot \left(\dfrac{1}{|\beta_1|}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{|\beta_1|}\right)^2} - 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

unde

$$m = \frac{1}{|\beta_n|} \sum_{k=2}^{n} |A_{1k} - a_k|; \quad m_j = \frac{1}{|\beta_{n-j}|}\left[1 + \sum_{k=j+2}^{n} |A_{j+1,k}|\right]; \quad j = 1, 2, \ldots, n-2$$

Această teoremă rezultă aplicînd matricei (18) un rezultat stabilit de M. Parodi în [3].

Intrat în redacție la 25 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. N. Obrejkov, *Sur les zéros réels des polynômes*. Mathematica, **X**, 1935, p. 132–136.
2. Th. Angheluță, *Sur une équation algébrique application à la formule de Taylor*. Mathematica, **VI**, 1932, p. 140–145.
3. M. Parodi, *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications*. Paris, Gauthier-Villars, 1959.
4. M. Parodi, *Sur quelques propriétés des zéros des polynômes combinaisons linéaires à coefficients constants de polynômes recurrents*. Bull. des Sciences Mathém, **87**, 1963, p. 43–57.
5. V. Vleck, *A Sufficient Condition for the Maximum Number of Imaginary Roots of an Equation of the n-th Degree*. Annals of Math. (2), 4 (1902–1903), p. 191.
6. T. Popoviciu, *Sur une condition suffisante pour qu'un polynôme soit positif*. Mathematica, **XI**, 1935, p. 247–256.

СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОТНОШЕНИЯМ РЕКУРРЕНТНОСТИ

(Р е з ю м е)

В работе доказываются несколько свойств многочленов типа

$$F(x) = f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \dots + a_n$$

предполагая, что многочлены

$$f_0(x)_1 f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$$

удовлетворяют следующим отношениям рекуррентности

$$f_n(x) + (\alpha_n - \beta_n x) f_{n-1}(x) + (\gamma_n - \delta_n x) f_{n-2}(x) = 0 \quad n \geq 2$$

где

$$f_0(x) = 1, \; f_1(x) = -\alpha_1 + \beta_1 x \; a \; \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, a_i$$

действительные числа.

Важнейшие результаты заключены в следующих теоремах:

Теорема 1. Для любого действительного x, так, чтобы иметь

$$x < min \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{2k}} \right\}$$

получается

$$f_{2k}(x) > 0 \quad \text{и} \quad f_{2k-1}(x) < 0$$

и для любого действительного x, так чтобы иметь

$$x > max \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{2k}} \right\}$$

следует

$$f_{2k} > 0 \quad \text{и} \quad f_{2k-1}(x) > 0$$

если β_i, γ_i, δ_i удовлетворяют условиям (8).

Теорема 2. Многочлен (7) всегда имеет по крайней мере один корень x_k, так чтобы

$$\left| X_K \right| \geqq \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_1 \beta_{i-1} - \delta_i}{\beta_i \beta_{i-1}} \right) - \frac{a_1}{\beta_u} \right|$$

для любых значений параметров $a_2, a_3, \dots$, an и $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$

Теорема 4. Пусть

$max \mid \alpha_1 \mid = \alpha$, $max \mid a_i \mid = a > 1$, $max \mid \gamma_1 \mid = \gamma$, $min \mid \beta_i \mid = \beta \; \delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_u = O \; u \; \gamma > \alpha$

Тогда корни многочлена (7) находятся в воссоединении следующих n круговых областей

$$\left|\frac{\alpha_n - a_1}{\beta_n} - x\right| \leqslant R, \quad \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i} - x\right| \leqslant R \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

где

$$R = \frac{\left(\frac{a+\gamma}{\beta}\right)(a+\alpha)^{1/u} - \left(\frac{a+\alpha}{\beta}\right)(a+\gamma)^{1/n}}{(a+\gamma)^{1/n} - (a+\alpha)^{1/n}}$$

PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES SATISFAISANT A CERTAINES RELATIONS DE RÉCURRENCE

(R é s u m é)

On démontre quelques propriétés des polynômes de la forme

$$F(x) = f_n(x) + a_1 f_{n-1}(x) + \ldots + a_n$$

en présumant que les polynômes

$$f_0(x), f_1(x)_1, \ldots, f_k(x), \ldots$$

satisfont aux relations de récurrence suivantes:

$$f_n(x) + (\alpha_n - \beta_n x) f_{n-1}(x) + (\gamma_n - \delta_n x) f_{n-2}(x) = 0 \qquad n \geq 2$$

où $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = -\alpha_1 + \beta_1 x$ et α_i, β_i, γ_i, δ_i, a_i sont des nombres réels.

Les principaux résultats se trouvent consignés dans les théorèmes suivants:

1-er théorème. Pour tout x réel tel qu'on ait

$$x < \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{2k}}\right\}$$

il résulte:

$$f_{2k}(x) > 0 \text{ et } f_{2k-1}(x) < 0$$

et pour tout x réel tel qu'on ait

$$x > \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_{2k}}{\beta_{kk}}\right\}$$

il résulte:

$$f_{2k}(x) > 0 \quad \text{et} \quad f_{2k-1}(x) > 0$$

si β_i, γ_i, δ_i satisfont aux conditions (8).

2-e théorème. Le polynôme (7) a toujours au moins une racine x_k de sorte que

$$|x_k| \geq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i\beta_{i-1} - \delta_i}{\beta_i\beta_{i-1}}\right) - \frac{a_1}{\beta_n}\right|$$

pour toutes les valeurs des paramètres $a_2, a_3, \ldots, a_n$ et $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$

4-e théorème. Soit

$$\max |\alpha_i| = \alpha, \ \max |a_i| = a > 1, \ \max |\gamma_i| = \gamma, \ \min |\beta_i| = \beta$$

$$\delta_2 = \delta_3 = \ldots = \delta_n = 0 \text{ et } \gamma > \alpha.$$

Alors les racines du polynôme (7) se trouvent dans la réunion des n régions circulaires suivantes :

$$\left| \frac{\alpha_n - a_1}{\beta_n} - x \right| \leqslant R, \ \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} - x \right| \leqslant R \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

où

$$R = \frac{\left(\frac{a+\gamma}{\beta}\right)(a+\alpha)^{1/n} - \left(\frac{a+\alpha}{\beta}\right)(a+\gamma)^{1/n}}{(a+\gamma)^{1/n} - (a+\alpha)^{1/n}}$$

GENERALIZED RADII OF STARLIKENESS AND CONVEXITY OF ANALYTIC FUNCTIONS

by

PETRU T. MOCANU

1. Let $f(z)$ be an analytic function which is regular in a domain D containing the origin. Suppose also that $f'(z) \not\equiv 0$ for $z \in D$ and $f(0) = 0$.

It is known that the necessary and sufficient condition for the starlikeness with respect to the origin, respectively for the convexity of the image of the circle $\{z;\ |z| = r\} \subset D$ by the mapping $w = f(z)$ is

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq 0, \text{ for } |z| = r, \tag{1}$$

respectively

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \geqq 0, \text{ for } |z| = r. \tag{2}$$

In some previous papers, [2], [3], [4], we have shown that the *radius of starlikeness*, respectively the *radius of convexity* of the function f (i.e. the upper bound of the positive numbers r such that (1), respectively (2) holds) is given by the minimum value of $|z|$, where z verifies the system

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = 0, \ \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = 0 \tag{3}$$

respectively

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = 0, \ \operatorname{Im} [z^2\{f, z\}] = 0 \tag{4}$$

where

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2 \tag{5}$$

is the Schwarz's derivative of the function f.

The aim of the present paper is to generalize the above results when the concentric circles are replaced by a family of homothetic with respect to the origin curves.

2. Analogous conditions with (1) and (2), when the circle $\{z; |z| = r\}$ is replaced by another curve, were given by W. C. Royster [5]. Such conditions in some special cases were also given by S. D. Bernardi [1].

We consider the particular case of a Jordan curve C which lies in the domain D. Suppose that C is starlike with respect to the origin and let $\rho = \rho(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, be the polar equation of this curve, where the function $\rho(\theta)$ can be continued on the all real axis as twice continuously differentiable function of period 2π.

In the following we denote by $\dot{\rho}(\theta)$ and $\ddot{\rho}(\theta)$ the first and the second derivative with respect to θ of the function $\rho(\theta)$. We shall also use the notations $\dot{\rho}(\theta) = \dot{\rho}$, $\ddot{\rho}(\theta) = \ddot{\rho}, \ldots$, and $f(z) = f, f'(z) = f', \ldots$

Let Γ be the image of the curve C by the mapping $w = f(z)$, i.e. $\Gamma = f(C)$.

In order that the curve Γ be starlike with respect to the origin, respectively convex, it is necessary and sufficient that

$$\operatorname{Re}\left[(\rho - i\dot{\rho})\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geqq 0, \text{ for } z = \rho(\theta)e^{i\theta} \tag{6}$$

respectively

$$\operatorname{Re}\left[(\rho - i\dot{\rho})\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] + \rho\,\frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \geqq 0, \text{ for } z = \rho(\theta)e^{i\theta} \tag{7}$$

3. First, we give another form to the conditions (6) and (7). Let us denote by $\omega = \omega(\theta)$ the angle made with the vector radius by the exterior normal to the curve C at the point which correspond to the value θ. We denote also by $\gamma = \gamma(\theta)$ the curvature of C at the same point.

Since

$$\omega = \arg(\rho - i\dot{\rho}), \tag{8}$$

we have

$$e^{i\omega} = \frac{\rho - i\dot{\rho}}{|\rho - i\dot{\rho}|}, \tag{9}$$

or

$$\rho - i\dot{\rho} = (\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{1/2}\, e^{i\omega} \tag{10}$$

In virtue of (10) we write the condition (6) in the following form:

$$\operatorname{Re}\frac{e^{i\omega}zf'(z)}{f(z)} \geqq 0, \text{ for } z = \rho(\theta)e^{i\theta}. \tag{11}$$

Since

$$\gamma = \gamma(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}} \tag{12}$$

the condition (7) becomes

$$\mathrm{Re}\, \frac{e^{i\omega} z f''(z)}{f'(z)} + \rho\gamma \geq 0, \text{ for } z = \rho(\theta)e^{i\theta}. \tag{13}$$

If in (12) respectively in (13) we exclude the equality, then we say that the curve $\Gamma = f(C)$ is *strictly starlike*, respectively *strictly convex*.

Considering the function $f(z) = z$, we easily see that the curve C is strictly starlike, respectively strictly convex, if and only if $|\omega(\theta)| < \frac{\pi}{2}$, respectively $\gamma(\theta) > 0$, for every $\theta \in [0, 2\pi)$.

4. We shall now generalize the notions of radius of starlikeness and radius of convexity of a given function f in the following manner:

Let $C : \rho = \rho(\theta)$ be a strictly starlike, respectively a strictly convex curve. Suppose also that the function $\rho(\theta)$ satisfies the above mentioned conditions. Let us consider the family of homothetic curves C_α: $\rho = \alpha\rho(\theta)$, where α is a real positive parameter.

DEFINITION 1. *We shall call generalized radius of starlikeness of the function f, for the given strictly starlike curve C, the upper bound of the positive numbers α such that $\Gamma^*_\alpha = f(C^*_\alpha)$ be strictly starlike.*

DEFINITION 2. *We shall call generalized radius of convexity of the function f, for the given strictly convex curve C, the upper bound of the positive numbers α such that $\Gamma_\alpha = f(C_\alpha)$ be strictly convex.*

If we denote by $\alpha_s = \alpha_s[f]$, respectively $\alpha_c = \alpha_c[f]$, the above defined radii, then obviously $\alpha_c < \alpha_s$. In the sequel it is important to suppose that for every α, $\alpha \leqq \alpha_s$, the curve C_α does not pass through any singular point of the analytic function $f(z)$.

5. The problem to find the above defined radii can be formulated as follows: Let $p(\theta)$ be a complex function and $q(\theta)$ a real function of the real variable θ, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Suppose that these functions can be continued on the all real axis as smooth function of period 2π, and $q(\theta) > 0$. Let $F(z)$ be an analytic function which is regular in the domain D and $F(0) = 0$. Our problem is to find the upper bound of the positive numbers α such that

$$\Phi(\alpha, \theta) = \mathrm{Re}\,[p(\theta)F(z)] + q(\theta) > 0, \text{ for } z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta}. \tag{14}$$

Consider the equation

$$\Phi(\alpha\ \theta) = 0,$$

which defines α as implicit function of θ, $\alpha = \alpha(\theta)$. Then the desired value of α is given by $\alpha_0 = \min \alpha(\theta) = \alpha(\theta_0)$. Obviously, $\alpha_0 > 0$,

$\Phi(\alpha_0, \theta_0) = 0$, and $\Phi(\alpha, \theta) > 0$ for every $\alpha < \alpha_0$ and every $\theta \in [0, 2\pi]$. The values α_0 and θ_0 can be found by solving the following system in α and θ:

$$\Phi(\alpha, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(\alpha, \theta) = 0.$$

Since

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \operatorname{Re}\left[\dot{p}(\theta)F(z) - p(\theta)\frac{\dot{\rho}(\theta) + i\rho(\theta)}{\rho(\theta)} zF'(z)\right] + \dot{q}(\theta)$$

where $z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta}$, the above system becomes

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[p(\theta)F(z)\right] + q(\theta) = 0 \\ \operatorname{Re}\left[\dot{p}(\theta)F(z) + p(\theta)\dfrac{\dot{\rho}(\theta) + i\rho(\theta)}{\rho(\theta)} zF'(z)\right] + \dot{q}(\theta) = 0 \\ z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta}. \end{cases} \tag{15}$$

Hence *the upper bound of the positive numbers* α *such that the condition* (14) *holds is given by the minimum value*, α_0, *of the positive numbers which verify the system* (15).

6. Let us consider the particular case $q(\theta) = \operatorname{Re} p(\theta) > 0$, and $p(\theta) \neq 0$. Setting $G(z) = F(z) + 1$, we have $G(0) = 1$. Suppose also that $G(z) \neq 0$, for $z \in D$.

The condition (14) may be written

$$\operatorname{Re}\left[p(\theta)\, G(z)\right] > 0, \text{ for } z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta} \tag{16}$$

and the system (15) becomes

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[p(\theta)G(z)\right] = 0 \\ \operatorname{Re}\left[\dot{p}(\theta)G(z) + p(\theta)\dfrac{\dot{\rho}(\theta) + i\rho(\theta)}{\rho(\theta)} zG'(z)\right] = 0 \\ z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta}. \end{cases} \tag{17}$$

Deviding by $p(\theta)G(z)$ the expression in square brackets of the second equation we obtain, in virtue of the first equation,

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\dot{p}(\theta)}{p(\theta)} + \frac{\dot{\rho}(\theta) + i\dot{\rho}(\theta)}{\rho(\theta)}\frac{zG'(z)}{G(z)}\right] = 0$$

or

$$\operatorname{Re}\left[(\rho - i\dot{\rho})\frac{zG'(z)}{G(z)}\right] + \rho\operatorname{Im}\frac{\dot{p}(\theta)}{p(\theta)} = 0.$$

Finally, the system (17) may be written in the following form:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\,[p(\theta)G(z)] = 0 \\ \operatorname{Re}\left[e^{i\omega}\frac{zG'(z)}{G(z)}\right] + \frac{\rho}{|\rho - i\dot{\rho}|}\operatorname{Im}\frac{\dot{p}(\theta)}{p(\theta)} = 0 \\ z = \alpha\rho(\theta)e^{i\theta} \end{cases} \tag{18}$$

where $\omega = \omega(\theta)$ is given by (8).

7. In order that the curve $\Gamma_\alpha = f(C_\alpha)$ be strictly starlike it is necessary and sufficient that the condition (16) holds for

$$G(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \text{ and } p(\theta) = e^{i\omega(\theta)}$$

Since

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)},$$

$$\dot{p} = ie^{i\omega}\dot{\omega},\ \dot{\omega} = \frac{\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} = |\rho - i\dot{\rho}|\gamma - 1,$$

in virtue of (9), (12) and (18) we obtain the following result

THEOREM 1. *The generalized radius of starlikeness of the function f for the strictly starlike curve $C : \rho = \theta(\theta)$ is given by the minimum value of the positive numbers α which verify the system in α and θ*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\frac{e^{i\omega}zf'(z)}{f(z)} = 0 \\ \operatorname{Re}\frac{e^{i\omega}zf''(z)}{f'(z)} + \rho\gamma = 0 \\ z = \alpha\rho e^{i\theta}. \end{cases} \tag{19}$$

where $\omega = \omega(\theta)$, given by (8), is the angle made with the vector radius by the exterior normal to the curve C at the point corresponding to θ, and $\gamma = \gamma(\theta)$, given by (12), is the curvature of C at the same point.

In the particular case when C is the circle $\{z\,;\,|z| = 1\}$, i.e. $\rho(\theta) = 1$, from (19) we obtain the system (3) which gives the radius of starlikeness of the function f.

8. The necessary and sufficient condition that $\Gamma_\alpha = f(C_\alpha)$ be a strictly convex curve is given by (14) where

$$F(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)},\ p(\theta) = e^{i\omega(\theta)},\ q(\theta) = \rho(\theta)\gamma(\theta).$$

The first equation of the system (15) becomes

$$\operatorname{Re}\frac{e^{i\omega}zf''}{f'} + \rho\gamma = 0. \tag{20}$$

On the other hand the second equation of (15) gets

$$\operatorname{Re}\left[ie^{i\omega}(|\rho - i\dot{\rho}|\gamma - 1)\frac{zf''}{f'} + ie^{i\omega}\frac{\rho - i\dot{\rho}}{\rho}\left(\frac{zf''}{f'} + \frac{z^2f'''}{f'} - \frac{z^2f''^2}{f'^2}\right)\right] + \dot{\rho}\gamma + \rho\dot{\gamma} = 0$$

or

$$(|\rho - i\dot{\rho}|\gamma - 1)\operatorname{Im}\frac{e^{i\omega}zf''}{f'} + \frac{|\rho - i\dot{\rho}|}{\rho}\operatorname{Im}\left[e^{2i\omega}\left(\frac{zf''}{f'} + \frac{z^2f'''}{f'} - \frac{z^2f''^2}{f'^2}\right)\right] = \dot{\rho}\gamma + \rho\dot{\gamma}. \tag{21}$$

Since, in virtue of (20), we have

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\omega}zf''}{f'}\right]^2 = \operatorname{Re}\frac{e^{i\omega}zf''}{f'}\operatorname{Im}\frac{e^{i\omega}zf''}{f'} = -\rho\gamma\operatorname{Im}\frac{e^{i\omega}zf''}{f'}$$

and

$$\frac{|\rho - i\dot{\rho}|}{\rho}\operatorname{Im}\frac{e^{2iw}zf''}{f'} = \frac{1}{\rho}\operatorname{Im}\left[(\rho - \dot{\rho})\frac{e^{iw}zf''}{f'}\right] = \operatorname{Im}\frac{e^{iw}zf''}{f'} + \dot{\rho}\gamma,$$

the equation (21) may be written in the form

$$\operatorname{Im}\left[e^{2iw}z^2\{f, z\}\right] = \frac{\rho^2\dot{\gamma}}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}.$$

Since $\operatorname{tg}\omega = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$, we obtained the following result

THEOREM 2. *The generalized radius of convexity of the function f for the strictly convex curve $C : \rho = \rho(\theta)$ is given by the minimum value of the positive numbers α which verify the system in α and* 0

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\dfrac{e^{iw}zf''(z)}{f'(z)} + \rho\gamma = 0 \\ \operatorname{Im}\left[e^{2iw}z^2\{f, z\}\right] = \rho\dot{\gamma} - \cos\omega \\ z = \alpha\rho e^{i\theta}. \end{cases} \tag{22}$$

where $\{f, z\}$, given by (5) *is the Schwarz's derivative of the function f (ω and γ having the same significance as in* THEOREM 1).

If C is the circle $\{z ; |z| = 1\}$, i.e. $\rho(\theta) = 1$, then from (22) we obtain the system (4) which gives the radius of convexity of the function f.

9. Now, we give two simple applications of the above results. Let us calculate the generalized radius of starlikeness, $\alpha_s[f]$, of the function $f(z) = \frac{z}{1 - z}$. The system (19) becomes

$$\operatorname{Re}\frac{e^{iw}}{1 - z} = 0, \quad 2\operatorname{Re}\frac{e^{iw}z}{1 - z} + \rho\gamma = 0$$

which gives, after some simple calculations,

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho \cos \theta - \dot{\rho} \sin \theta}$$

where θ verifies the equation

$$\rho + \ddot{\rho} = 0.$$

For instance, if $\rho = \frac{3}{2} + \cos 2\theta$ we get $\alpha_s = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

As a second example, let us calculate the generalized radius of convexity, $\alpha_c[f]$, of the function $f(z) = e^z - 1$. The system (22) becomes

$$\operatorname{Re}[e^{iw}z] = -\rho\gamma, \qquad -\frac{1}{2}\operatorname{Im}[e^{2iw}z^2] = \rho\dot{\gamma}\cos\omega,$$

Since

$$\operatorname{Im}[e^{2iw}z^2] = 2\operatorname{Im}[e^{iw}z]\ \operatorname{Re}[e^{iw}z] = -2\rho\gamma\operatorname{Im}[e^{iw}z]$$

we get

$$\alpha_c = -\frac{\gamma}{\cos(\omega + \theta)}$$

where θ verifies the equation

$$\operatorname{tg}(\omega + \theta) = -\frac{\dot{\gamma}}{\rho\gamma^2}\cos\omega.$$

Received September 16, 1965

REFERENCES

1. Bernardi S. D., *Convex, Starlike and Level Curves*, „Duke Math. J.", 1961, **28**, pp. 57–72.
2. Mocanu P. T., *Asupra razei de stelaritate a funcțiilor univalente*, „Studii și cercet. de Mat., Cluj", 1960, **11**, pp. 337–341.
3. — *Sur le rayon d'étoilement et le rayon de convexité des fonctions holomorphes*, „Mathematica" **4(27)**, 1, 1962, pp. 57–63.
4. — *Asupra razei de convexitate a funcțiilor olomorfe*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai, series Math. – Physica", fasc. 2, 1964, pp. 31–33.
5. Royster W. C., *Convexity and Starlikeness of Analytic Functions* „Duke Math. J.", 1952, vol. **19**, pp. 447–457.

RAZE GENERALIZATE DE STELARITATE ŞI DE CONVEXITATE ALE FUNCŢIILOR ANALITICE

(Rezumat)

Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă într-un domeniu D care conţine originea cu condiţiile $f'(z) \neq 0$, $z \in D$ şi $f(o) = 0$. În această lucrare se generalizează noţiunile de rază de stelaritate şi rază de convexitate ale funcţiei $f(z)$ în felul următor: Se cosideră o curbă Jordan C de ecuaţie polară $\rho = \rho(\theta)$, care se presupune strict stelată (respectiv strict convexă) adică $|\omega(\theta)| < \frac{\pi}{2}$ (respectiv $\gamma(\theta) > 0$), undqe $\omega = \omega(\theta)$ este unghiul format de normala exterioară la curba C cu raza vectoare, iar $\gamma = \gamma(\theta)$ este curbura lui C. Fie familia de curbe omotetice $C_\alpha : \rho = \alpha\rho(\theta)$, $\alpha > 0$. Numim rază generalizată de stelaritate (respectiv de convexitate) a funcţiei f, marginea superioară a numerelor pozitive α, astfel ca $\Gamma_\alpha = f(C_\alpha)$ să fie strict stelată (respectiv) strict convexă). Se arată că acest raze se obţin rezolvînd sistemul (19), respectiv (22).

ОБОБЩЕННЫЕ РАДИУСЫ ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ И ВЫПУКЛОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Пусть $f(z)$ голоморфная функция в области D, которая содержит начало с условиями $f'(z) \neq 0$, $z \in D$ и $f(o) = 0$. В работе обобщаются понятия радиуса звездообразности и радиуса выпуклости функции $f(z)$ следующим образом:

Рассматривается кривая Жордана C полярного уравнения $\rho = \rho(\theta)$, которая предполагается строго звездообразной (соответственно строго выпуклой), т.е. $|\omega(\theta)| < \frac{\pi}{2}$ (соответственно $\gamma(\theta) > 0$), где $\omega = \omega(\theta)$ — угол, образованный внешней нормалью кривой C с векторным радиусом, а $\gamma = \gamma(\theta)$ — кривизна кривой C. Пусть семейство гомотетических кривых C_α: $\rho = \alpha\rho(\theta)$, $\alpha > 0$. Называем обобщенным радиусом звездообразности (соответственно выпуклости) функции f высший предел положительных чисел α, так, чтобы $\Gamma_\alpha = f(C_\alpha)$ было строго звездообразным (соответственно строго выпуклым). Показывается, что эти радиусы получаются решив систему (19), соответственно (22).

GRUPUL DE MIȘCĂRI AL SPAȚIILOR V_4 CARE ADMIT DOUĂ CÎMPURI DE VECTORI IZOTROPI PARALELI

de

P. SANDOVICI, P. ENGHIȘ și M. ȚARINĂ

Clasificarea spațiilor riemanniene V_4 după grupurile lor continue de mișcări este cunoscută. În lucrările lui Fubini [1], [2] se rezolvă această problemă pentru spațiile cu metrică pozitiv definită, iar Krucikovici [3] tratează și cazul metricelor nedefinite. Totuși determinarea efectivă a grupului de mișcări al unui spațiu riemannian dat se cere a fi făcută în general direct, întrucît nu se poate recunoaște ușor forma canonică în care se încadrează metrica respectivă.

Un interes deosebit îl prezintă acele spații riemanniene care posedă cîmpuri de vectori paraleli, fapt care, într-un sistem de coordonate convenabile ales, aduce simplificări metricii.

Astfel, spațiile V_4 care posedă două cîmpuri de vectori izotropi paraleli, față de un anumit sistem de coordonate, [4] au metrica de forma:

$$ds^2 = 2dx^1dx^3 + 2dx^2dx^4 + b(x^3, x^4)(dx^4)^2 \tag{1}$$

unde funcția $b(x^3, x^4)$ este arbitrară.

Ne propunem studiul grupurilor de mișcare ale acestor spații.

Operatorii transformărilor infinitezimale

$$X_h = \xi^i_h \partial_i \tag{2}$$

ai grupului de mișcări al unui spațiu riemannian de metrică

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j$$

se obțin prin integrarea ecuațiilor lui Killing

$$(\mathrm{i.j}) \qquad \xi^s \partial_s a_{ij} + a_{is}\partial_j \xi^s + a_{sj}\partial_i \xi^s = 0$$

unde am notat:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

În cazul metricii considerate, aceste ecuaţii sînt

(1.1) $$\partial_1 \xi^3 = 0$$

(1.2) $$\partial_2 \xi^3 + \partial_1 \xi^4 = 0$$

(1.3) $$\partial_1 \xi^1 + \partial_3 \xi^3 = 0$$

(1.4) $$\partial_1 \xi^2 + \partial_4 \xi^3 + b\partial_1 \xi^4 = 0$$

(2.2) $$\partial_2 \xi^4 = 0$$

(2.3) $$\partial_2 \xi^1 + \partial_3 \xi^4 = 0$$

(2.4) $$\partial_2 \xi^2 + \partial_4 \xi^4 + b\partial_2 \xi^4 = 0$$

(3.3) $$\partial_4 \xi^1 = 0$$

(3.4) $$\partial_4 \xi^1 + \partial_3 \xi^2 + b\partial_3 \xi^4 = 0$$

(4.4) $$\xi^3 \partial_3 b + \xi^4 \partial_4 b + 2\partial_4 \xi^2 + 2b\partial_4 \xi^4 = 0$$

O primă consecinţă a ecuaţiilor de mai sus este faptul că funcţiile ξ^i sînt de formă:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= A(x^2, x^4)x^1 + B(x^2, x^4) \\ \xi^2 &= C(x^1, x^3, x^4)x^2 + D(x^1, x^3, x^4) \\ \xi^3 &= E(x^3, x^4)x^2 + F(x^3, x^4) \\ \xi^4 &= G(x^3, x^4)x^1 + H(x^3, x^4) \end{aligned} \tag{3}$$

Se arată că funcţiile care intervin se reduc la:

$$\begin{aligned} A &= -f_1(x^4) \\ B &= -b_1 x^2 + d_2(x^4) \\ C &= -b'_2(x^4) \\ E &= e_2 \\ F &= f_1(x^4)x^3 + f_2(x^4) \\ G &= -e_2 \\ H &= b_1 x^3 + b_2(x^4) \end{aligned} \tag{4}$$

unde b_1 şi e_2 sînt constante iar funcţia D verifică relaţiile:

$$\begin{aligned} \partial_1 D &= b(x^3, x^4)e_2 - f'_1 x^3 - f'_2 \\ \partial_4 D &= f'_1 x^1 - d'_2 - b \cdot b_1 \\ \partial_4 D &= -\frac{1}{2}\left[(f_1 x^3 + f_2)\partial_3 b + (-e_2 x^1 + b_1 x^3 + b_2)\partial_4 b\right] - bb'_2 \end{aligned} \tag{5}$$

dintre care ultima impune condiţia:

$$e_2\partial_4 b - 2b_2'' = 0 \tag{6}$$

În consideraţiile noastre b este o funcţie arbitrară, care nu verifică în general condiţii date. Astfel vom distinge mai multe cazuri:

1. Considerăm funcţia $b(x^3, x^4)$ arbitrară.

Din condiţia (6) rezultă atunci $e_2 = 0$, $b_2'' = 0$ adică

$$b_2 = \beta_1 x^4 + \beta_2 \qquad (\beta_i = \text{constante})$$

Scriind condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (5) găsim

$$f_1 = \text{const.}\ f_2 = \varphi_1 x^4 + \varphi_2 \qquad (\varphi_i = \text{constante})$$

$$\left.\begin{aligned} 2d_2'' = (f_1 + 2\beta_1)\partial_3 b - b_1\partial_4 b + (f_1 x^3 + f_2)\partial_{33} b + \\ + (b_1 x^3 + \beta_1 x^4 + \beta_2)\partial_{34} b \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Funcţia b fiind însă arbitrară deducem: $b_1 = f_1 = f_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ deci $d_2 = \delta_1 x^4 + \delta_2$ şi:

$$D = -\delta_1 x^3 + \delta_3 \tag{8}$$

Formulele (3) devin:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \delta_1 x^4 + \delta_2 & \xi^3 &= 0 \\ \xi^2 &= -\delta_1 x^3 + \delta_3 & \xi^4 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

şi operatorii grupului de mişcări sînt:

$$X_1 = x^4\partial_1 - x^3\partial_2;\ X_2 = \partial_1;\ X_3 = \partial_2$$

avînd ecuaţiile de structură:

$$(X_1X_2) = 0\ (X_1X_3) = 0\ (X_2X_3) = 0$$

Spaţiile (1) în care b este o funcţie arbitrară posedă un grup C_3 abelian.

2. Ecuaţia (6) este satisfăcută dacă funcţia b are forma:

$$b(x^3, x^4) = \bar{b}(x^4)x^3 + \bar{b}_1(x^4)$$

Se observă că prin schimbarea de variabilă: $x'^2 = x^2 + \int \bar{b}_1 dx^4$ putem presupune $\bar{b}_1 = 0$. În acest caz tensorul de curbă este nul, deci spaţiul V_4 corespunzător este euclidian.

3. Dacă b depinde numai de variabila x^4 spaţiul este de asemenea euclidian.

4. Considerăm că funcţia b depinde numai de variabila x^3. Dacă în ecuaţia (6) $e_2 \neq 0$, calculele conduc la concluzia $b = \text{constant}$, deci spaţiul ar fi euclidian. Presupunem deci $e_2 = 0$. Din ecuaţia (6) rezultă atunci $b_2'' = 0$, deci $b_2 = \beta_1 x^4 + \beta_2$ (β_i = constante). În acest caz, din condiţiile de integrabilitate a ecuaţiilor (5) deducem:

$$f_1 = \text{const.}\ f_2 = \varphi_1 x^4 + \varphi_2 \qquad (\varphi_i = \text{constante}) \quad \text{şi}$$

$$2d_2'' = (f_1 + 2\beta_1)b' + (f_1 x^3 + \varphi_1 x^4 + \varphi_2)b'' \tag{10}$$

Derivînd ecuaţia (10) în raport cu x^3 obţinem:

$$2(f_1 + \beta_1)b'' + (f_1 x^3 + \varphi_1 x^4 + \varphi_2)b''' = 0$$

din care rezultă:

$$\varphi_1 b''' = 0 \quad 2(f_1 + \beta_1)b'' + (f_1 x^3 + \varphi_2)b''' = 0 \tag{11}$$

Distingem deci două subcazuri:

a) $\varphi_1 = 0$. În această ipoteză din ecuaţia (10) rezultă $d_2'' = \delta$ (constant) şi ea devine

$$(f_1 x^3 + \varphi_2)b'' + (f_1 + 2\beta_1)b' = 2\delta \tag{12}$$

Deoarece $b(x^3)$ este o funcţie arbitrară din (12) rezultă:

$$f_1 = \beta_1 = \varphi_2 = \delta = 0 \ f_2 = 0 \ b_2 = \beta_2$$

$$d_2 = \delta_1 x^4 + \delta_2$$

Ecuaţiile (5) ne dau atunci:

$$D = -\delta_1 x^3 - b_1 \int b\,dx^3 + h$$

Astfel formulele (3) se scriu:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -b_1 x^2 + \delta_1 x^4 + \delta_2 \\ \xi^2 &= -\delta_1 x^3 - b_1 \int b\,dx^3 + h \\ \xi^3 &= 0 \\ \xi^4 &= b_1 x^3 + \beta_2 \end{aligned} \tag{13}$$

iar operatorii grupului de mişcare sînt:

$$X_1 = -x^2\partial_1 - \int b\,dx^3 \partial_2 + x^3\partial_4\,; \qquad X_2 = x^4\partial_1 - x^3\partial_2$$

$$X_3 = \partial_1\,; \quad X_4 = \partial_2\,; \quad X_5 = \partial_4$$

avînd ecuaţiile de structură:

$$\begin{gathered}(X_1X_4) = X_3 \qquad (X_2X_5) = -X_3 \\ (X_1X_2) = (X_1X_3) = (X_1X_5) = (X_2X_3) = (X_2X_4) = 0 \\ (X_3X_4) = (X_3X_5) = (X_4X_5) = 0\end{gathered} \tag{14}$$

Spaţiul (1) în care b este o funcţie arbitrară de variabila x^3 posedă un grup G_5 cu structura (14).

b) $b''' = 0$. În acest caz

$$b = \lambda_1(x^3)^2 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 \tag{15}$$

Dacă $\lambda_1 \neq 0$, atunci printr-o schimbare de coordonate se poate lua $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ fără să facem dinstincţie între spaţiile asemenea. Din cea de a doua ecuaţie (11) avem $f_1 = -\beta_1$ iar din (10) rezultă atunci $d''_2 = \varphi_1 x^4 + \varphi_2$, deci

$$d_2 = \frac{\varphi_1}{6}(x^4)^3 + \varphi_2 \frac{(x_4)^2}{2} + \partial_1 x^4 + \partial_2$$

Din ecuaţiile (5) obţinem

$$D = -\varphi_1 x^1 - \varphi_1 \frac{x^3(x^4)^2}{2} - \varphi_2 x^3 x^4 - \frac{b_1}{2}(x^3)^3 - \delta_1 x^3 + d$$

şi formulele (3) ne dau

$$\begin{gathered}\xi^1 = \beta_1 x^1 - b_1 x^2 + \frac{\varphi_1}{6}(x^4)^3 + \frac{\varphi_2}{2}(x^4)^2 + \delta_1 x^4 + \delta_2 \\ \xi^2 - = \beta_1 x^2 + D \\ \xi^3 = -\beta_1 x^3 + \varphi_1 x^4 + \varphi_2 \\ \xi^4 = b_1 x^3 + \beta_1 x^4 + \beta_2\end{gathered} \tag{16}$$

Astfel spaţiul admite în acest caz un grup de mişcări G_8 cu operatorii

$$X_1 = x^4\partial_1 - x^3\partial_2; \quad X_2 = \partial_1; \quad X_3 = \partial_2; \quad X_4 = \partial_4$$

$$X_5 = x^1\partial_1 - x^2\partial_2 - x^3\partial_3 + x^4\partial_4$$

$$X_6 = -x^2\partial_1 - \frac{(x_3)^2}{3}\partial_2 + x^3\partial_4$$

$$X_7 = \frac{(x^4)^3}{6}\partial_1 - \left(x^1 + \frac{x^3(x^4)^2}{2}\right)\partial_2 + x^4\partial_3$$

$$X_8 = \frac{(x^4)^2}{2}\partial_1 - x^3x^4\partial_2 + \partial_3$$

Ecuaţiile de structură sînt:

$$
\begin{gathered}
(X_1X_4) = -X_2 \quad (X_1X_8) = X_3 \\
(X_2X_5) = X_2 \quad (X_2X_7) = -X_3 \\
(X_3X_5) = -X_3 \quad (X_4X_6) = -X_2 \\
(X_4X_5) = X_4 \quad (X_4X_7) = X_8 \quad (X_4X_8) = X_1 \\
(X_5X_6) = -2X_6 \quad (X_5X_7) = 2X_7 \quad (X_5X_8) = X_8 \\
(X_6X_7) = -X_5 \quad (X_6X_8) = -X_4
\end{gathered}
\tag{17}
$$

celelalte paranteze fiind nule.

În acest caz spaţiul considerat mai posedă proprietăţi geometrice remarcabile, fiind un spaţiu Einstein de curbură scalară nulă, simetric şi de 2 ori proiectiv general [5].

Dacă $\lambda_1 = 0$, calculînd componentele tensorului de curbură se verifică uşor că spaţiul este euclidian.

Intrat în redacţie la 29 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fubini, *Sugli spazii che ammetono un gruppo continuo di movimenti.* Annali d matematica (3), **8** (1903) p. 39–81.
2. G. Fubini, *Sugli spazii a quatro dimensioni che ammetono un gruppo continuo di movimenti.* Annali di matematica (3), **9** (1904) p. 33–90.
3. G. I. Krucikovici, *O dvijeniiah v rimanovîh prostranstvah 4.* Matematiceski sbornik **41 (83)** nr. 2 1957.
4. A. G. Walker, *Canonical Form for a Riemannian Space with a Parallel Field of Null Planes.* Quarterly Journal of Mathematics, 1950 (1).
5. D. V. Vedeniapin, *Ob $n-2$ proiektivnîh prostranstvah.* Nauciniie dokladî vîsşei şkolî, 1958, nr. 6, p. 119–126.

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ V_4, ДОПУСКАЮЩИХ ДВА ПОЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ВЕКТОРОВ

(Резюме)

Изучается группа движений пространств V_4 с метрикой (1) посредством эффективного интегрирования уравнений Киллинга. Показывается, что в случае, если функция $b(x^3, x^4)$ является произвольной, то пространство имеет абелевую группу G_3. Если функция b является произвольной лишь переменной x^3, то пространство обладает группой G_5, имея уравнения структуры (14). Если $b(x^3)$ является многочленом второго порядка, то соответствующее пространство допускает максимальную группу G_8, имея уравнения структуры (17). Если функция b зависит лишь от x^4 или является линейной в переменной x^3, то пространство является эвклидовым.

LE GROUPE DE MOUVEMENTS DES ESPACES V_4 ADMETTANT DEUX CHAMPS DE VECTEURS ISOTROPES PARALLÈLES

(R é s u m é)

Les auteurs étudient le groupe de mouvements des espaces V_4 à métrique (1) par l'intégration effective de l'équation de K i l l i n g. On montre que, dans le cas où la fonction $b(x^3, x^4)$ est arbitraire, l'espace possède un groupe abélien G_2. Si la fonction b n'est fonction arbitraire que de la variable x^3, l'espace possède un groupe G_3 ayant les équations de structure (14). Si $b(x^3)$ est un polynôme du second degré, l'espace correspondant admet le groupe maximum G_8 ayant les équations de structure (17). Si la fonction b ne dépend que de x^4 ou bien est linéaire dans la variable x^3, l'espace est euclidien.

O CLASĂ DE PROBLEME DE TIP DIRICHLET

de

C. KALIK și P. SZILÁGYI

În nota de față vom pune în evidență o clasă de probleme la limită pentru sisteme eliptice, care sînt echivalente cu problema lui Dirichlet.

Considerăm sistemul

$$L_i u = \sum_{j=1}^{N} L_{ij}(D) u_j = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

unde $L_{ij}(D)$ sînt operatori diferențiali cu coeficienți constanți de ordinul $2m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, iar $f_i\,(x)$ este o funcție dată pe semispațiul $x_n > 0$.

Condițiile la limită studiate sînt de forma

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij}(D)\, u_j \,|_{x_n=0} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, Nm) \tag{2}$$

unde $B_{ij}(D)$ sînt operatori diferențiali cu coeficienți constanți de ordinul $m - 1$ ale căror polinoame caracteristice sînt omogene.

Vom spune că condițiile (2) sînt de tip Dirichlet dacă ele sînt echivalente cu

$$\left.\frac{\partial^i u_j}{\partial x_n^i}\right|_{x_n=0} = 0 \qquad (i = 0, \ldots, m-1\,; \quad j = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

Pentru precizarea condițiilor noastre introducem în prealabil unele notații. Fie $L'_{ij}(\xi)$ partea omogenă de gradul $2m$ a polinomului $L_{ij}(\xi)$ unde $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi_n)$. Să notăm cu $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ și $\xi_n = \tau$.

Vom presupune că sistemul (1) este eliptic și ecuația în τ

$$\det \,||\, L'_{ij}(\xi', \tau) \,||\, = 0$$

are mN rădăcini $\tau_i^+(\xi')$ $(i = 1, \ldots, Nm)$ astfel ca Im $\tau_i^+ > 0$. Fie

$$M^+(\xi', \tau) = \prod_{i=1}^{Nm} (\tau - \tau_i^+(\xi'))$$

şi $||L^{jk}||$ matricea conjugată a lui $||L'_{ij}||$.

DEFINIŢIE. Problema (1) — (2) satisface *condiţia de completare* dacă liniile matricei

$$|| B_{ij}(\xi', \tau) || \cdot || L^{jk}(\xi', \tau) ||$$

considerate ca polinoame de τ sînt liniar independente mod $(M^+(\xi', \tau))$ pentru orice $\xi' \neq 0$.

TEOREMĂ. *Dacă problema* (1) — (2) *satisface condiţia de completare şi dacă vectorul* $u = (u_1, \ldots, u_N)$ *din* $W_2^m(E_n^+)$ *satisface condiţiile* (2), *atunci* u *satisface condiţiile* (3).

Aici am notat cu E_n^+ semispaţiul $x_n > 0$, iar cu $W_2^m(E_n^+)$ spaţiul Sobolev [2].

Demonstrarea teoremei. Scriem

$$B_{ij}(\xi', D_n) = \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} \xi'^{\alpha} D_n^{\lambda}$$

unde $D_n = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$. Notăm cu

$$Fu_j = \hat{u}(\xi', x_n)$$

transformata lui Fourier a lui $u_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Deoarece $u \in W_2^m(E_n^+)$ şi condiţia (2) este satisfăcută, putem scrie

$$F\left\{\sum_{j=1}^{N} B_{ij}(D)u_j\right\}\Bigg|_{x_n=0} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} \xi'^{\lambda} D_n^{\lambda} \hat{u}_j(\xi', 0) = 0 \qquad (4)$$

Pentru demonstrarea teoremei trebuie să arătăm că sistemul (4) are numai soluţii banale în $D_n^{\lambda}\hat{u}_j(\xi', 0)$, dacă condiţia de completare are loc. Reprezentăm pe $L^{jk}(\xi', \tau)$ în felul următor

$$L^{jk}(\xi', \tau) = q_{jk}(\xi', \tau)M^+(\xi', \tau) + R_{jk}(\xi', \tau)$$

şi notăm

$$\tau^{\lambda} R_{jk}(\xi', \tau) = q_{jk}^{\lambda}(\xi', \tau)M^+(\xi', \tau) + R_{jk}^{\lambda}(\xi', \tau)$$

unde R_{jk}^{λ} este un polinom în τ, care se poate scrie sub forma

$$R_{jk}^{\lambda} = \sum_{\mu=0}^{Nm-1} r_{jk}^{\lambda,\mu} \tau^{\mu}$$

Folosind aceste reprezentări putem scrie

$$\sum_{j=1}^{N} B_{jk} L^{jk} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} \sum_{\mu=0}^{Nm-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} r_{jk}^{\lambda,\mu} \xi'^{\alpha} \tau^{\mu} \quad (\mathrm{mod}\ M^{+})$$

sau notînd

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} r_{jk}^{\lambda,\mu} \xi'^{\alpha} = A_{ik}^{\mu}$$

avem

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij} L^{jk} = \sum_{\mu=0}^{Nm-1} A_{ik}^{\mu} \tau^{\mu} (\mathrm{mod}\ M^{+})$$

Condiția de completare înseamnă că rîndurile matricei

$$\left\| \sum_{\mu=0}^{Nm-1} A_{ik}^{\mu} \tau^{\mu} \right\|_{i=1,\dots,Nm}^{k=1,\dots,N}$$

sînt liniar independente, adică sistemul de identități

$$\sum_{i=1}^{mN} C_i (A_{ik}^{0} + A_{ik}^{1} \tau + \dots + A_{ik}^{Nm-1} \tau^{Nm-1}) \equiv 0$$

are loc numai atunci dacă $C_1 = \dots = C_{Nm} = 0$. Însă acest sistem de identități este echivalent cu următorul sistem de mN^2 ecuații liniare și omogene

$$\sum_{i=1}^{Nm} C_i A_{ik}^{l} = 0 \qquad (k = 1, \dots, N;\ l = 0, \dots, Nm - 1)$$

care conform condiției de completare are numai soluție banală. Aceasta înseamnă că din sistemul scris se pot alege mN ecuații al căror determinant să fie diferit de zero. Să notăm determinantul acestui sistem cu

$$\left| A_{ik}^{l} \right|_{k=k_1,\dots,k_{\mu};\ l=l_{\mu+1},\dots,l_{Nm}}^{i=1,\dots,Nm}$$

unde k_j poate primi valorile $1, 2, \dots, N$, iar l_j valorile $0, 1, \dots, mN - 1$.

Acest determinant se poate reprezenta ca produsul a doi determinanţi

$$\left| A_{ik}^{l} \right|_{k=k_1,\ldots,k_\mu;\ l=l_{\mu+1},\ldots,l_{Nm}}^{i=1,\ldots,Nm} = \left| r_{jk}^{\lambda,l} \right|_{k=k_1,\ldots,k_\mu;\ l=l_{\mu+1},\ldots,l_{Nm}}^{j=1,\ldots,N;\ \lambda=0,\ldots,m-1} \cdot$$

$$\cdot \left| \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} \xi'^{\alpha} \right|_{j=1,\ldots,N;\ \lambda=0,\ldots,m-1}^{i=1,\ldots,Nm}$$

Dar deoarece acest produs este diferit de zero, rezultă că

$$\left| \sum_{|\alpha|+\lambda=m-1} b_{ij}^{\alpha,\lambda} \xi'^{\alpha} \right|_{j=1,\ldots,N;\ \lambda=0,\ldots,m-1}^{i=1,\ldots,Nm} \neq 0$$

de unde rezultă că sistemul (4) admite numai soluţii banale

$$D_n^{\lambda} \hat{u}_j(\xi', 0) = 0$$

În sfîrşit, deoarece avem

$$D_n^{\lambda} u(x', x_n) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{E_{n-1}} e^{i<x',\xi'>} D_n^{\lambda} \hat{u}(\xi', x_n) d\xi'$$

rezultă că şi

$$D_n^{\lambda} u(x', 0) = 0$$

aproape pentru fiecare $x' \in E_{n-1}$ ceea ce demonstrează teorema enunţată.

C o n s e c i n ţ ă. Dacă sistemul (1) este tare eliptic, iar problema (1) — (2) satisface condiţia de completare, atunci această problemă satisface teorema de alternativă a lui Fredholm.

Intrat în redacţie la 15 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. S. A g m o n, A. D o u g l i s, L. N i r e n b e r g, *Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. II.* „Communications on Pure and Applied Mathematics" **XVII,** nr. 1. pag. 35—92.
2. S. L. S o b o l e v, *Nekotorîe primenenia funkţionalnogo analiza v matematiceskoi fizike*. Leningrad 1950.

КЛАСС ЗАДАЧ ТИПА ДИРИХЛЕ

(Р е з ю м е)

Рассматриваются системы (1) эллиптического типа,с постоянными коэффициентами, для которых половина корней характеристического уравнения расположена в комплексной полуплоскости $Im\ \tau > 0$ и предельные условия типа (2), где $Bij(\xi)$ являются однородными многочленами порядка $m-1$ с постоянными коэффициентами.

Доказывается, что если задача (1)—(2) удовлетворяет условию пополнения [1], то условия (2) эквивалентны с условиями (3).

UNE CLASSE DE PROBLÈMES DU TYPE DIRICHLET

(R é s u m é)

On considère les systèmes (1) de type elliptique à coefficients constants, pour lesquels la moitié des racines de l'équation caractéristique est située au semi-plan complexe $Im\,\tau > 0$ et les conditions à la limite de la forme (2), où B_{ji} (ξ) sont des polynômes homogènes du degré $m - 1$ à coefficients constants.

On démontre que si le problème (1) — (2) satisfait à la condition de complément [1], alors les conditions (2) sont équivalentes aux conditions (3).

O FORMULĂ DE CUADRATURĂ CU NODURI INTERIOARE ȘI EXTERIOARE ȘI APLICAREA EI LA INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

de

P. PAVEL și C. SCRIPCARIU

1. Se caută o formulă de cuadratură relativă la intervalul (a, b) cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (în care $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$), în progresie aritmetică, adică o formulă de forma

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A f(x_n) + R \tag{1}$$

Pentru determinarea formulei folosim metoda dată de prof. D. V. Ionescu [1] atașînd fiecărui interval $(a, x_1), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ cîte o funcție $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ care satisface ecuațiilor

$$\varphi_1^{(n)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(n)}(x) = 1, \ldots \quad \varphi_k^{(n)}(x) = 0 \quad k = 3, 4, \ldots, n \tag{2}$$

Vom scrie deci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} \varphi_1^{(n)}(x) f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n^{(n)}(x) f(x)dx$$

Aplicăm fiecăreia din integralele din membrul doi formula generalizată de integrare prin părți și introducînd apoi condițiile la limită:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(x_0) = 0 & \varphi_1'(x_0) = 0, & \ldots, & \varphi_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), & \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1), & \ldots, & \varphi_1^{(n-2)}(x_1) = \varphi_2^{(n-2)}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}), & \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) = \varphi_n'(x_{n-1}), & \ldots, & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_{n-1}) = \varphi_n^{(n-2)}(x_{n-1}) \\
\varphi_n(x_n) = 0, & \varphi_n'(x_n) = 0, & \ldots, & \varphi_n^{(n-2)}(x_n) = 0
\end{array} \tag{3}$$

Deci determinarea formulei de cuadratură (1) s-a redus la integrarea ecuaţiilor diferenţiale (2) cu condiţiile la limită (3)

Am obţinut o formulă de cuadratură de forma (1), în care

$$A_i = \varphi_i^{(n-1)}(x_i) - \varphi_{i+1}^{(n-1)}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4}$$
$$A_n = \varphi_n^{(n-1)}(x_n)$$

2. Integrînd ecuaţiile diferenţiale (2) cu condiţiile la limită (3) obţinem:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x-a)^n}{n!} \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-a)^n}{n!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
\varphi_3(x) &= \frac{(x-a)^n}{n!} - \frac{(x-x_2)^n}{n!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(x-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_k(x) &= \frac{(x-a)^n}{n!} - \frac{(x-x_2)^n}{n!} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{(x-x_i)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (k = 3, 4, \ldots, n-1),
\end{aligned} \tag{5}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sînt constante, care se determină folosind şi ultima dintre condiţiile (3) din punctul x_n. Se obţine sistemul de ecuaţii lineare, ce trebuie rezolvat

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{(x_n - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{(x_n - x_2)^n}{n!} - \frac{(x_n - x_0)^n}{n!} \\
\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{(x_n - x_i)^{n-2}}{(n-2)!} &= \frac{(x_n - x_2)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(x_n - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{x_n - x_i}{1!} &= \frac{(x_n - x_2)^2}{2!} - \frac{(x_n - x_0)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Prin rezolvarea acestui sistem, funcţiile $\varphi_i(x)$ sînt determinate.

3. Coeficienţii formulei de cuadratură (1) pot fi obţinuţi şi astfel: Înlocuim în (1) funcţia $f(x)$ prin

$$f_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(n-1)!} \qquad i = 1, \ldots, n$$

şi astfel obţinem

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}h}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 (u-1)\ldots(u-i+2)(u-i-1)\ldots$$
$$\ldots(u-n+1)[2u^2 + u(-n-2i+1) + (i-1)n]du \tag{6}$$

iar

$$A_1 = \frac{(-1)^{n-1}h}{(n-1)} \int_0^2 (u-2)(u-3)\dots(u-n)du > 0 \tag{7}$$

care este pozitiv pentru orice n.

$$A_n = \frac{h}{(n-1)!} \int_0^1 (u-1)(u-2)\dots(u-n+2)(2u-n+1)du \tag{8}$$

care are semnul lui $(-1)^{n-1}$ pentru $n > 3$.

4. *Graficul funcției* $y = \varphi_1(x)$. Deoarece $\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$ și $\varphi_1'(x) = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \geqslant 0$ pentru $x \in (a, x_1)$, $\varphi_1(x)$ are graficul din figura (1).

5. *Graficul funcției* $y = \varphi_n(x)$. Deoarece $\varphi_n(x) = A_n \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}$ și $\varphi_n'(x) = A_n \frac{(x-x_n)^{n-2}}{(n-2)!}$, iar $\varphi_n'(x_n) = 0$, $\varphi_n'(x_{n-1}) < 0$ graficul funcției $\varphi_n(x)$ este cel din figura (2).

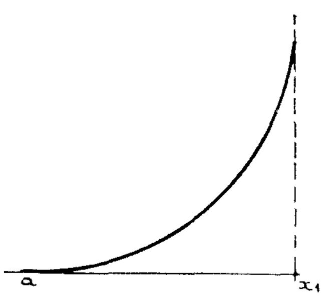


Fig. 1.

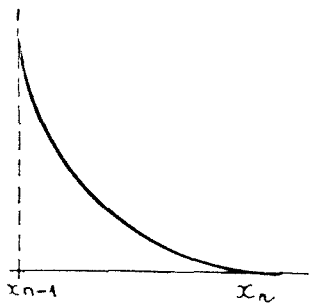


Fig. 2.

6. *Polinoamele* $\varphi_k(x)$, $k = 3, 4, \ n-1, n$ sînt *polinoame de grad efectiv* $n-1$, *adică* $\varphi_k^{(n-1)}(x) \neq 0$.
Din formulele (4) și (5) avem

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{(n-1)}(x) &= 2h + \lambda_1 + \lambda_2 &&= A_n + A_{n-1} + \dots + A_4 + A_3 \\
\varphi_4^{(n-1)}(x) &= 2h + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &&= A_n + A_{n-1} + \dots + A_5 + A_4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi_n^{(n-1)}(x) &= 2h + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = A_n
\end{aligned} \tag{9}$$

Vom demonstra că între coeficienţii formulei de cuadratură (1) există relaţiile

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}A_n > 0\\
&(-1)^i(A_i + A_{i-1}) > 0 \quad \text{pentru } n \leqslant 2i-1,\ i \geqslant 4\\
&(-1)^{i-1}(A_i + A_{i-1}) > 0 \quad \text{pentru } n < 2i-1 \text{ şi orice i}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Cu ajutorul formulelor (6) avem

$$
\begin{aligned}
A_i + A_{i-1} = \frac{(-1)^{n-1}h}{(i-1)!\,(n-i+1)!}\int_0^1 (u-1)(u-2)\dots\\
\dots(u-i+3)(u-i-1)\dots(u-n+1)\Delta_i(u)du
\end{aligned}
\tag{11}
$$

unde

$$\Delta_i(u) = 2A_i\,u^3 + B_iu^2 + C_iu + D_i \tag{12}$$

iar

$$
\begin{aligned}
A_i &= n - 2i + 2\\
B_i &= -n^2 + (-2i+3)n + 8i^2 - 16i + 8\\
C_i &= (2i-3)n^2 + (-2i^2 + 4i - 3)n - 4i^3 + 12i^2 - 10i + 2\\
D_i &= (-i^2 + 3i - 2)n^2 + (2i^3 - 7i^2 + 7i - 2)n
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Se observă că produsul din faţa lui $\Delta_i(u)$ de sub semnul de integrală are semnul lui $(-1)^n$. Rămîne să cercetăm semnul lui $\Delta_i(u)$ pentru $u \in (0, 1)$.

Pentru aceasta vom considera derivatele lui $\Delta_i(u)$.

Semnul lui $\Delta_i'''(u)$. Dacă $n \leqslant 2i-2$, $\Delta_i'''(u) < 0$, iar dacă $n > 2i-2$, $\Delta_i'''(u) < 0$.

Semnul lui $\Delta_i''(u)$. Dacă $n \leqslant 2i-2$, $\Delta_i''(u)$ descreşte de la $2B_i$ la $12\,A_i + 2B_i$. Trinomul $B_i(n) = -n^2 + (3-2i)n + 8(i-1)^2$ are două rădăcini reale, una negativă şi alta pozitivă. Deoarece $B_i(2i-2) = 2(i-1) > 0$, $i > 1$, iar $B_i(2i-1) = -4(i-1) < 0$, $i > 1$, rezultă că rădăcina pozitivă se găseşte între $2i-2$ şi $2i-1$. De asemenea trinomul $6A_i(n) + B_i(n) = -n^2 + (9-2i)n + 8i^2 - 28i + 20$ are două rădăcini reale, una pozitivă şi alta negativă şi deoarece $6A_i(2i-2) + B_i(2i-2) = 4(i-4) > 0$ pentru $i > 4$, iar $6A_i(2i-1) + B_i(2i-1) = -4(2i-5) < 0$ înseamnă că rădăcina pozitivă se găseşte între $2i-2$ şi $2i-1$, pentru $i > 4$. Prin urmare $\triangle_i''(u) > 0$ pentru $n \leqslant 2i-2$ şi $i > 4$ iar pentru $n > 2i-2$, $i > 4$, $\triangle_i''(u) < 0$.

Semnul lui $\triangle_i'(u)$. Pentru $u = 0$ avem $\triangle_i'(0) = C_i$, iar pentru $u = 1$, avem $\triangle_i'(1) = 6A_i + 2B_i + C_i$ Polinomul $C_i(n) = (2i-3)n^2 + (-2i^2 + 4i - 3)n - 4i^3 + 12i^2 - 10i + 2$ are rădăcini reale şi de semne contrare, şi deoarece $C_i(2i-2) = -2(3i^2-4i+2) < 0$ iar $C_i(2i-1) = 2(i^2-3i+1) > 0$, rădăcina pozitivă se găseşte între $2i-2$ şi $2i-1$. Polinomul $6A_i(n) + 2B_i(n) + C_i(n)$ are rădăcini reale, de semne contrare, cea pozitivă fiind cuprinsă între $2i-2$ şi $2i-1$, deoarece $6A_i(2i-2) + 2B_i(2i-2) + C_i(2i-2) = -4(i-1)(i-2) < 0$, iar $6A_i(2i-1) + 2B_i(2i-1) + C_i(2i-1) = 2(i^2-7i+8) > 0$ pentru $i > 5$. Deci $\triangle_i'(u) < 0$ pentru $n \leqslant 2i-2$ şi $i > 5$, iar $\triangle_i'(u) > 0$ pentru $n > 2i-1$ şi $i > 5$.

Semnul lui $\triangle_i(u)$. Pentru $n \leqslant 2i-2$, $i > 5$ s-a văzut mai sus că $\triangle_i'(u) < 0$, în intervalul $(0, 1)$, deci $\triangle_i(u)$ descreşte de la D_i la $2A_i + B_i + C_i + D_i = Q_i(n)$. Avem $Q_i(n) = -(i-2)(i-3)n^2 + (2i^3-9i^2+9i)n - 4i^3 + 20i^2 - 30i + 14$ iar $D_i(n) = -(i-1)(i-2)n^2 + (i-1)(i-2)(2i-1)n$. Polinomul $D_i(n)$ are rădăcinile $n = 0$ şi $n = 2i-1$. Polinomul $Q_i(n)$ are o rădăcină cuprinsă între $2i-1$ şi $2i$, deoarece $Q_i(2i-1) = 3i^2 - 10i + 8 < 0$ iar $Q_i(2i) = -2i^3 + 14i^2 - 30i + 4 < 0$ pentru orice $i > 3$. Înseamnă că $\triangle_i(u) > 0$ pentru $n \leqslant 2i-2$ şi $\triangle_i(u) < 0$ pentru $n > 2i-1$.

Cazul $n = 2i-1$. Îl vom studia aparte. În acest caz $A_i = 1$, $B_i = -4i+4$, $C_i = 2(i^2-3i+1)$, $D_i = 0$ iar $\triangle_i(u) = 2u^3 + 4(1-i)u^2 + 2(i^2-3i+1)u > 0$ pentru $i \geqslant 4$.

În concluzie se opoate spune că polinomul $\triangle_i(u) > 0$ pentru $n > 2i-1$, $i \geqslant 4$ şi $\triangle_i(u) < 0$ pentru $n > 2i-1$, iar sumele (11) se bucură de proprietăţile (10).

7. Vom demonstra în cele ce urmează formulele 2

$$2h - (A_1 + A_2) \leqslant 0 \tag{14}$$

$$2h - (A_1 + A_2 + A_4) \leqslant 0 \tag{15}$$

adevărate pentru orice n.

Folosind formulele (6), (7) găsim

$$A_1 + A_2 = \frac{h}{(n-1)!} I_n \tag{16}$$

unde

$$I_n = \int_0^1 (3-u)(4-u)\ldots(n-1-u)\,[2(2-n)u^2 + (n^2+n-8)u - n^2 + 3n - 2]du$$

Demonstrarea inegalităţii (14) revine la a arăta că $I_n \geqslant 2(n-1)!$ inegalitatea ce se demonstrează prin metoda inducţiei complete, şi e adevărată pentru $n = 4$.

În mod analog se demonstrează şi inegalitatea (15). Se găseşte

$$A_1 + A_2 + A_4 = \frac{h}{2(n-1)!} J_n \tag{17}$$

iar

$$J_n = \int_0^1 (4-u)\ldots(n-1-u)[-2(n-3)(n-2)u^3 + (n^3+2n^2 -$$
$$- 33n + 54)u^2 - (3n^2 - 12n^2 - 9n + 62)u + 2n^3 - 12n^2 + \tag{18}$$
$$+ 22n + 12]du$$

Ca și mai sus se demonstrează că $J_n \geqslant 4(n-1)!$ adevărată pentru $n = 5$. Folosindu-ne de expresiile (9) care dau derivatele de ordinul n ale funcțiilor $\varphi_k(x)$, $k = 3, \ldots, n$ și de relațiile (10), (14), (15) deducem că $\varphi_k^{(n-1)}(x) \not\equiv 0$ pentru $k = 3, 4, \ldots, n$, adică $\varphi_k(x)$ sînt polinoame de gradul $n-1$.

8. *Funcția $\varphi_k(x)$ este pozitivă în intervalul (x_0, x_n).* Vom arăta că funcția $y = \varphi(x)$ definită pe intervalul (x_0, x_n) are un singur extremum în intervalul (x_0, x_n), adică un maxim.

Într-adevăr, să presupunem că funcția $y = \varphi(x)$ ar avea două extreme în intervalul (x_0, x_n), adică derivata s-ar anula în două puncte distincte ξ_0 și ξ_1 din (x_0, x_n).

Ținînd seama de condițiile la limită (3) se deduce, aplicînd succesiv teorema lui Rolle, că derivata $\varphi^{(n-2)}(x)$ se anulează în $n-1$ puncte distincte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

Punctul η_{n-1} nu poate aparține intervalului $[x_{n-1}, x_n)$ deoarece s-a arătat că $\varphi_n(x)$ este un polinom de gradul $n-1$ efectiv. Punctul η_{n-1} poate aparține lui $[x_{n-2}, c_{n-1})$, dar nu are loc η_{n-2}, deoarece dacă in intervalul $[x_{n-2}, x_{n-1})$ s-ar găsi η_{n-1} și η_{n-2} atunci aplicînd teorema lui Rolle urmează că derivata $\varphi^{n-1}(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul $[\eta_{n-2}, \eta_{n-1})$, ceea ce este imposibil deoarece s-a arătat că $\varphi_{n-1}(x)$ e polinom de gradul $n-1$ efectiv.

În mod analog se arată că în fiecare din intervalele $[x_{n-3}, x_{n-2}), \ldots, (x_2, x_4)$ se găsește cîte un punct η_i. Astfel rămîn punctele η_1 și η_2 care se vor găsi în (x_0, x_2).

Punctul η_1 nu se poate găsi în intervalul (x_0, x_1) deoarece $\varphi_1^{(n-2)}(x) = \dfrac{(x-a)^2}{2!}$ are ca zero numai pe $x = a$. Înseamnă că în intervalul $[x_1, x_2)$ se găsesc punctele η_1 și η_2 în care se anulează derivata. Aplicînd teorema lui Rolle, înseamnă că derivata $\varphi_2^{(n-2)}(x)$ se anulează în punctul $\xi_1 \in (x_1, \eta_1)$ și punctul $\xi_2 \in (\eta_1, \eta_2)$ iar $\varphi_2(x)$ se anulează într-un punct din intervalul (x_0, η_2), ceea ce este imposibil deoarece $\varphi_2^{(n)}(x) = 1$, pentru $x \in (x_0, x_2)$.

Rezultă că unul din punctele η_i nu are loc, adică cu aceasta am demonstrat că funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul (x_0, x_n) și ținînd seama de rezultatele de la punctul 4 și 5 înseamnă că acesta este un maxim.

Graficul funcției $y = \varphi(x)$ va fi cel din figura 3.

9. Restul în formula de cuadratură (1) este

$$R_n = (-1)^n \int_a^{x_n} \varphi(x) f^{(n)}(x) dx \tag{19}$$

unde se ştie că $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (x_0, x_n) iar $f(x) \in C^n$.

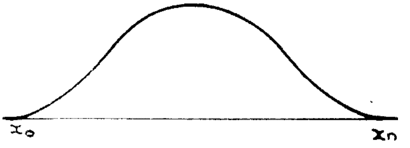


Fig. 3.

Avem

$$R_n = (-1)^n f^{(n)}(\xi) \int_a^{x_n} \varphi(x) dx \quad \text{unde} \quad \xi \in (x_0, x_n) \tag{20}$$

Integrala din formula (20) se calculează din formula de cuadratură (1) înlocuind $f(x)$ prin

$$f(x) = \frac{((x - x_1) \cdots (x - x_n))}{n!}$$

adică

$$R_n = f^{(n)}(\xi) K_n \tag{21}$$

unde

$$K_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{x_n} (x - x_1) \ldots (x - x_n)\, dx$$

care depind numai de nodurile $x_1, \ldots, x_n$.

Notînd prin M_n marginea superioară a lui $|f^n(x)|$ în intervalul (x_0, x_n) vom avea pentru rest evaluarea

$$|R_n| \leqslant |K_n| M_n.$$

10. *Cîteva cazuri particulare.*

Pentru $n = 3$ formula de cuadratură este

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [7f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)] - \int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) f'''(x) dx$$

cu restul

$$| R_3 | \leqslant \frac{2}{3!} k^4 M_3.$$

Pentru $n = 4$, formula de cuadratură este

$$\int_a^a f(x)dx = \frac{h}{3} [8f(x_1) - 5f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4) + \int_{X_0}^{Xn} \varphi(x) f^{\mathrm{IV}}(x)dx$$

cu restul

$$| R_4 | \leqslant h^5 M_4 \frac{29}{15 \cdot 3!}.$$

Pentru $n = 5$ formula de cuadratură este

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{180} [538f(x_1) - 532f(x_2) + 588f(x_3) - 292f(x_4) + 2610f(x_5) + R.$$

cu restul

$$| R_5 | \leqslant \frac{14}{45} h^6 M_5.$$

Pentru $n = 6$, formula de cuadratură este

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{90} h [84f(x_1) - 169f(x_2) + 284f(x_3) - 574f(x_4) +$$

$$+ 406f(x_5) - 297f(x_6)] + R.$$

cu restul

$$| R | \leqslant \frac{25.136}{6 !2 !} h^7 M_6.$$

11. Considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{22}$$

unde $f(x, y)$ este continuă împreună cu derivatele ei parţiale în raport cu x, şi y, pînă la ordinul n; şi notăm cu $y(x)$ integrala ei care satisface condiţia $y(x_2) = y_2$.

Presupunem că s-a demonstrat că integrala $y(x)$ a acestei ecuaţii există.

Să luăm nodurile $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, şi nodurile $x_4, \ldots, x_n$ exterioare intervalului (a, b) în progresie aritmetică. Notăm cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ valoarea integralei pe aceste noduri. Cu ajutorul formulei de cuadratură (1) vom calcula valoarea integralei în punctul $x = a$.

Pentru aceasta integrăm ambii membri ai ecuaţiei (16) între a şi b:

$$\int_a^b y'dx = \int_a^b f[x, y(x)]dx.$$

Aplicăm integralei din membrul al doilea formula de cuadratură (1) şi obţinem

$$y(a) = y(b) - \sum_{i=1}^{n} A_i f[x_i, y(x_j)] - R \tag{23}$$

unde $R = \int_a^b \varphi(x) f^{(n)}[x, y(x)]\, dx.$

Intrat în redacţie la 7 decembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare.* „Studii şi cercetări de matematică Cluj". 1958 (1—4).
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice,* Editura tehnică, 1957.
3. P. Pavel, *Asupra unei formule de cuadratură.* „Studia Universitatis Babeş—Bolyai", Math. Phys. fasciculus, 1 1965.

ОДНА ФОРМУЛА КВАДРАТУРЫ С ВНУТРЕННИМИ И ВНЕШНИМИ УЗЛАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Дается формула квадратуры относительно интервала (a, b) с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\left(\text{где } x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b\right)$ в арифметической прогрессии типа

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R \tag{1}$$

Формула устанавливается при помощи метода, данного в [2].
Дается остаток формулы, который ставится в виде (21).
Даются примеры формулы квадратуры типа (I) для $n = 3, 4, 5, 6$.
В последней части работы производится применение формулы квадратуры (I) к интегрированию дифференциального уравнения (22).

A QUADRATURE FORMULA WITH INNER AND OUTER NODES AND ITS APPLICATION TO THE NUMERICAL INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Summary)

The authors give a quadrature formula with respect to the interval (a, b) having the form:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R \tag{1}$$

with the nodes $x_1, x_2, \ldots x_n$, $\left(\text{where } x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b\right)$ in arithmetic progression.

The formula is established using the method given in [2].

Remainder of the formula is put under the form (21).

Examples of quadrature formulae of the form (1) for $n = 3, 4, 5, 6$ are also given.

In the last part of this paper, the authors give an application of the quadrature formula (1) to the integration of differential equation (22).

INTRODUCEREA FIZICII LUI DESCARTES ÎN TRANSILVANIA

de

VICTOR MARIAN

Fizica lui Descartes — parte integrantă a filozofiei sale — a pătruns foarte curînd după apariția *Principiilor de filozofie* în 1644 și s-a răspîndit repede în Transilvania. Faptul se datorește unor împrejurări prielnice. Datorită legăturilor religioase strînse între protestanții din Transilvania și cei din Apus, pe la mijlocul secolului al XVII-lea o mulțime de tineri ardeleni au putut să-și completeze studiile, începute acasă, în țările occidentale: Elveția, Germania, Anglia și mai cu seamă Olanda, de unde aduceau cu ei cele mai noi curente religioase și concepții filozofice. Protagonistul cel mai de seamă al noilor idei, care a introdus cel dintîi în Transilvania fizica lui Descartes, atît prin scris, cît și în învățămînt, a fost Apáczai.

Apáczai Csere János (1625—1659) este originar din comuna Apața (reg. Brașov), unde și-a făcut primele studii, pe care le-a continuat la Cluj și apoi la Collegium Bethlenianum din Alba-Iulia. Aici a avut ca profesor pe germanul Johann Heinrich Bisterfeld, care preda matematicile și fizica. Bisterfeld, care la început preda fizica peripateticiană, mai tîrziu a modificat-o în sens teologic protestant, ceea ce nu putea mulțumi pe tînărul său elev, cu vederi independente și înaintate. Spre norocul său, în 1648 Apáczai fu trimis de episcopul calvinist Gelei Katona István din Alba-Iulia, ca bursier în Olanda. Aici studiază pe rînd la universitățile din Franeker, Utrecht, Leida și Harderwijk.

Timp de cinci ani frecventează Apáczai cursurile acestor universități, făcînd cunoștință cu problemele politice, științifice și religioase ale epocii și asistînd la marile prefaceri sociale însoțite de ascensiunea burgheziei atît în Olanda, cît și în Anglia, unde au culminat în 1649 cu decapitarea regelui Carol I, urmată de guvernarea dictatorială a lui Cromwell.

În timpul studiilor Apáczai face cunoștință cu filozofi și teologi olandezi ca Regius, Gisbert, Voetius, Heydanus, etc. O influență deosebită a avut asupra sa profesorul Regius din Utrecht, care i-a atras atenția asupra filozofiei lui Descartes, pe care o prelucrase în cartea sa *Funda-*

menta Physices, tipărită în 1646. Însușindu-și repede filozofia carteziană, Apáczai, fiind încă în Olanda, scrie în 1653 *Magyar Encyclopaedia*, care a apărut la Utrecht doi ani mai tîrziu.

Întors în patrie Apáczai este numit în 1653 profesor la Alba-Iulia, unde însă nu rămîne mult, ajungînd în conflict, din cauza ideilor sale progresiste, cu profesorii mai bătrîni, reacționari, în deosebi cu Isaac Basire, fostul confesor al regelui Angliei. În urma decapitării acestuia, Basire se refugiase la Constantinopol, de unde a fost chemat la Alba-Iulia. Din cauza conflictului Apáczai este transferat în 1656 ca director la școala medie din Cluj, care avea să devină Colegiul reformat. Aici a murit în etate de abia 35 de ani.

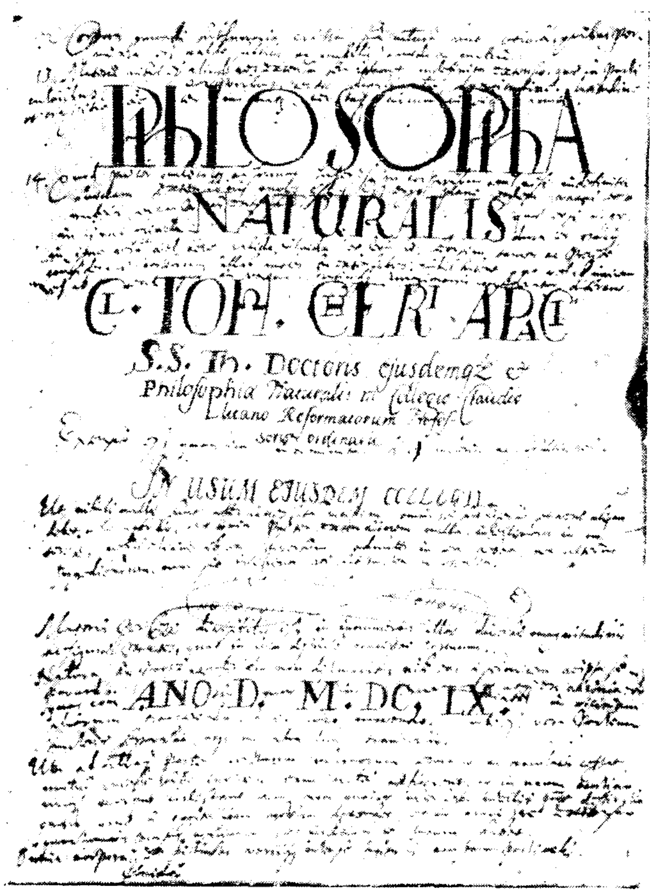
Apáczai a început să predea filozofia lui Descartes îndată după numirea sa ca profesor la Alba-Iulia. Cursul său s-a păstrat într-un coligat al lui Porcsalmi András, director al Colegiului reformat din Cluj, care l-a copiat îndată după moartea lui Apáczai, în anul școlar 1660/61. În același coligat, păstrat în Biblioteca Academiei, filiala Cluj, de format 20×14 cm, se află copiate și cîteva manuscrise de-ale lui Bisterfeld, cuprinzînd lecțiile sale de fizică, precum și un exemplar tipărit din cartea lui Regius.

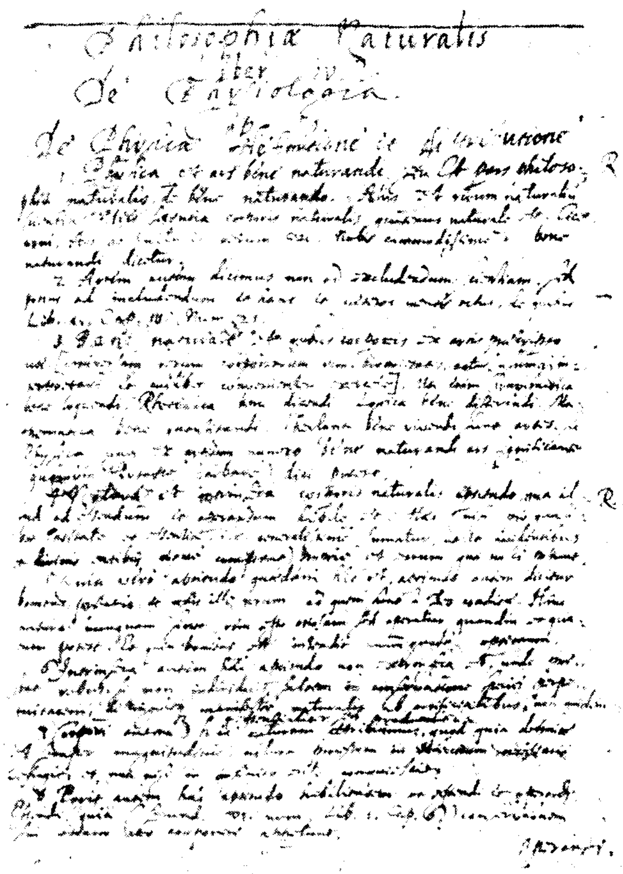
Manuscrisul lecțiilor lui Apáczai poartă titlul *Philosophia Naturalis Cl. Joh. Cheri Apaci* și cuprinde 204 pagini. El este împărțit în patru Cărți care poartă titlurile:

Cartea I Despre filozofie în general. Cartea II Despre aritmetică. Cartea III Despre geometrie. Cartea IV Despre fiziologie.

În Cartea I filozofia este definită ca „studiul înțelepciunii", iar înțelepciunea este „cunoștința perfectă a tuturor lucrurilor, pe care omul le poate cunoaște". Apoi „știința (aici) este cunoașterea adevărului prin cauzele prime". Cei vechi împărțeau în mod potrivit filozofia în naturală, morală și rațională. Prin cea naturală înțelegeau matematica, medicina și mecanica. „Mai potrivit însă filozofia se împarte în reală și rațională, iar cea reală în naturală și morală". Filozofia naturală ne-a lăsat-o marele doctor al artelor P. Ramus. „Vom preda filozofia naturală parte din scrierile celor noi, parte din a celor vechi, cu cea mai mare solicitudine pentru tinerimea maghiară".

În cap. V al aceleiași Cărți, Apáczai definește filozofia naturală ca doctrina bunei folosiri a „lucrurilor corporale" din natură. În general îi supunem lucrurile corporale, deoarece tot ce este lucru cantitativ, adică „numerabil, măsurabil, ceresc, terestru și mecanic, este necesar să-l cuprindem în filozofia naturală". Apoi continuă: „Dar fiindcă scopul oricărei cunoașteri a noastre este o utilitate oarecare, iar utilitatea lucrurilor corporale o explică filozofia, rezultă că și ea este practică, la fel ca celelalte. Cît de adevărat este aceasta o arată ... și aplicația ei în teologie, drept, medicină, mecanică și în toate celelalte discipline, fiindcă atît e de mare folosul ei încît dacă nu o cunoaștem este imposibil să excelăm în ele; o dovedește în sfîrșit însăși introducerea ei în toate domeniile, anume în doctrina despre Soare, Lună, stele, planete, lumină, animale, plante,


PHILOSOPHIA
NATURALIS
ANNO D. M. DC. LX


Philosophia Naturalis
Liber IV
De Physiologia

metale, care dacă se tratează complet şi cu prudenţă, aduc un folos imens vieţii omeneşti. Nici nu s-a opus omului pînă acuma altceva, decît ignoranţa oamenilor de seamă şi metoda inoportună şi imperfectă".

Caracterul practic al filozofiei naturale îl subliniază din nou, scriind în continuare: ,,De aceea, cei care nu explică în filozofia naturală decît natura principiilor şi proprietăţilor (affectionum) corpului, şi afirmă că aplicaţia rămîne în seama medicinii şi a celorlalte arte practice, ni se pare că separă întregul de părţi, spoliază fizica de demnitatea sa, reduc în mod violent corpurile sale, înmulţesc fără necesitate disciplinele, forţează şi metoda logicii, apoi perturbă ordinea şi abat sufletul elevilor de la contemplarea lucrurilor celor mai frumoase şi speciale".

Aceste consideraţii le termină argumentînd că: ,,Toată lumea admite că medicina este practica fizicii ... De aceea mulţi din cei care scriu cărţi de medicină pun înainte şi cuprind întreaga fizică (physiologiam), ca Avicenna, Galenus, Vernilius, etc. Abia este cineva care să nu admită că astronomia, geografia, optica, muzica şi matematicile sînt în mare măsură părţi ale fizicii. În tot cazul nimeni nu poate aduce împotrivă vreun argument potrivnic solid".

Capitolul VI din aceeaşi Carte, intitulat ,,Despre principiile lucrurilor corporale", este redactat în sens strict cartezian. Astfel, privitor la proprietăţile generale ale corpurilor se exprimă în felul următor: ,,După ce am demonstrat în mod clar existenţa corpului natural, cunoaştem în chip evident în ce constă esenţa lui, dacă înlăturăm toate acelea care pot fi separate de el (cum sînt duritatea, moliciunea, culorile, mirosurile, gusturile şi altele asemănătoare), şi presupunem că aceea ce rămîne după înlăturarea acestora aparţine esenţei lor cum este *extinderea* lucrului în lungime, lăţime şi profunzime, mobil, divizibil, şi figurabil (figurabilis) în diverse feluri, care extensiune în acelaşi sens se numeşte spaţiu, cantitate şi locul care este numit intern".

Trecînd la *mişcare*, la fel ca Descartes, cunoaşte numai mişcarea locală relativă, pe care o defineşte ca transferul corpului din vecinătatea corpurilor apropiate în vecinătatea altora. Ea este reciprocă şi ,,la fel poate compete corpului transportat ca şi aceluia de la care este transportat". Adesea mişcării îi urmează repausul, contrarul mişcării. Deci ,,mişcarea nu este contrară mişcării, ci repausului şi direcţiei mişcării". Consideraţiile asupra mişcării le încheie cu argumentul metafizic al lui Descartes despre conservarea cantităţii de mişcare în univers: ,,Dumnezeu la început a creat materia corporală cu mişcare şi repaus suficient, şi o păstrează pînă acum în aceeaşi cantitate".

Urmează legile mişcării, pe care Descartes le numeşte ,,legile naturii", şi pe care Apáczai le formulează astfel: ,,Mai întîi orice corp (vis) lăsat de sine, persevereazã în aceeaşi stare. De aceea tot ceea ce se mişcă într-un mod oarecare, sau este în repaus, totdeauna tinde să se mişte în acelaşi fel sau să rămînă în repaus. În al doilea rînd, orice mişcare tinde, prin natura sa, spre o linie dreaptă, pînă ce va fi deviată de forţa altor corpuri rezistente".

A treia lege este enunțată mai simplu decît la Descartes, avînd formularea: „un corp în repaus nu poate fi mișcat de un alt corp, decît dacă corpul motor pierde din viteza mișcării sale atîta cît primește cel în repaus". Enunțul acesta cuprinde numai cazul particular al unui corp moale care ciocnește un alt corp moale mai mic decît el, în repaus.

Privitor la ciocnirea și aruncarea corpurilor Apáczai adaugă: „În adevăr, mișcarea se comunică de la un corp la altul, și nu numai cînd este unul și simplu, ci și cînd este compus din mai multe, după cum se vede în aruncarea pietrei care tinde să se mențină pe dreaptă, precum și cînd se rotește în jurul axei sale".

După aceasta urmează definiția, în sens cartezian, a divizibilității, „atomilor", figurii, mărimii, suprafeței și a poziției (situs). Astfel, „divizibilitatea este coexistența (coexistentia, adhaentia) părților unui corp rezolubil (resolubilis). Zic a oricăruia, oricît de mic. În adevăr orice corp este divizibil la infinit. Căci are părți în afară de părți. De aceea atomii se numesc imperceptibili numai datorită virtuții (virtutis) finite". Apoi „forma (figura) este limitarea corpului din toate părțile". Iar „mărimea este o anumită măsură a extensiunii corpului. De ea depinde acel loc, care este limita în care se întîlnesc suprafețele corpurilor ce se înconjoară reciproc".

Urmează definiția suprafeței, care „nu poate fi altceva decît acel mod sau termen, pe care-l concepem ca mijloc (medius) între diversele particule ale substanței și înseși corpurile înconjurătoare". În fine: „referirea corpurilor la cele depărtate se numește situație (situs)."

Cap. VII se ocupă cu diviziunea filozofiei naturale, după următorele criterii:

„1. În orice corp deosebim cantitatea și natura ei.

2. Părțile mai importante ale filozofiei naturale sînt matematica și fizica. Căci

3. Ambele tratează despre corp și anume considerat (explicato) prin una și aceeași definiție. Căci

4. Disciplinele real deosebite nu sînt decît obiecte real distincte.

5. Desigur așa este cu matematica, adică cu aritmetica și geometria, considerate ca o bună parte a filozofiei naturale; fără acestea nu se poate nici învăța suficient, nici aplica la uzul vieții".

Capitolul VIII tratează despre matematică în general, pe care o consideră drept prima parte a filozofiei naturale. Ea este arta de a cuanta (quantitare), adică de a număra și măsura bine.

Potrivit acestui program Apáczai tratează în Cartea II aritmetica, iar în Cartea III geometria, — după Ramus.

Cartea IV se ocupă cu fizica, cu care se ocupă în Capitolul I, și cu astronomia, pe care o expune în Capitolul II.

Apáczai definește fizica drept arta de a natura (ars naturandi) bine, adăugînd că pentru alții ea este știința „lucrurilor naturale", iar pentru alții iarăși știința „corpului natural cît este natural". Pentru înțelegerea acestor definiții el dă următoarele lămuriri:

„2. Zicem că este o artă nu pentru a exclude știința, ci mai bucuros pentru a include și acest act al minții.

3. A natura bine înseamnă a ne folosi de lucrurile corporale prescrise de artă (a interpreta toată forța lucrurilor corporale, proprietățile, actele și uzul lor, și a le practica în mod convenabil).

4. Natura este aptitudinea intrinsecă a corpului natural, prin care ea este în stare să existe și să opereze...

5. Iar aptitudine se numește bunătatea, perfecțiunea și întrebuințarea în scopul în care sînt create de Dzeu".

Fizica se împarte în două părți: fiziologia și mecanica. Căci împărțirea corectă este cea cerută de natura obiectului. De aici rezultă împărțirea în comună și proprie. Cea în generală și specială este incomodă, căci cele generale și cele care în acest sens de obicei sînt în cele speciale, nu se deosebesc în realitate, ci numai în modalitate.

Acesta este în rezumat cuprinsul lecțiilor de fizică ale lui Apáczai, ținute la Alba-Iulia și Cluj.

Magyar Encyclopaedia, apărută în 1655, a fost scrisă în scopul de a fi întrebuințată drept manual didactic. Ea nu este o enciclopedie în înțelesul de azi, și nici nu e o operă originală. Este mai mult un compendiu al cunoștințelor din acea epocă, fiind prelucrată după diverși autori. După cum scrie el însuși în prefața cărții, partea de metafizică a scris-o după Descartes, logica după Ramus (Pierre de la Ramée) și Amesius (William Ames), aritmetica după Ramus, Snellius (Snell), Schonerus (Schoner), geometria după Ramus, fizica după Descartes și Regius (Le Roy), astronomia după Copernic, Descartes, Regius, Phocylides, Alsted etc.

Enciclopedia lui Apáczai cuprinde unsprezece părți, dintre care a cincea se ocupă cu matematica. Fizica se tratează în adausul la partea a cincea și ocupă abia cîteva pagini, în cinci paragrafe, sau alineate.

Apáczai mai întîi definește în sens cartezian mișcarea, scoțînd în evidență relativitatea mișcării, precum și caracterul ei circular. El se exprimă astfel: „Deoarece ori încotro se îndreaptă mintea omului, observă un lucru lung, larg și profund, urmează în mod necesar, că orice mișcare este în vîrtejuri (circulară), astfel că un corp alungă pe altul din locul în care intră, și acela iarăși altul, și acesta altul pînă la cel din urmă, care în acea clipită se mută în locul părăsit de primul".

În alineatul al doilea enunță principiul conservării cantității de mișcare, stabilit de Descartes, în termenii următori: „Cauza primă a mișcării este Dumnezeu, care a creat la început lucrurile materiale împreună cu mișcarea și repausul, și cu cît le-a înzestrat atunci, tot atîta menține și acuma în ele". De aici rezultă cele trei legi ale mișcării, pe care le expune la fel ca în manuscris.

Legile ciocnirii corpurilor sînt cuprinse în opt puncte, — după Descartes.

Alineatul al patrulea definește poziția, locul, spațiul care se confundă cu corpul. Apoi adaugă: „Din care cauză vidul (vacuum) în care să nu fie nici o ființă, nu există nicăiri ... fiindcă nimeni nu poate concepe un vid fără extensiune". La fel cu Descartes, Apáczai confundă vidul cu neantul, folosind argumentele acestuia.

În alineatul ultim se afirmă impenetrabilitatea corpurilor, inexistența atomilor, infinitatea lumii și unitatea ei, precum și imposibilitatea existenței mai multor lumi. Cu aceasta se termină partea privitoare la fizică, după care urmează astronomia.

După Apáczai acțiunea de răspîndire a fizicii lui Descartes a fost continuată de Enyedi S. la Colegiul reformat din Aiud și de Kaposi S. la cel din Tîrgu-Mureș.

Intrat în redacție la 14 decembrie 1965

ВВЕДЕНИЕ ФИЗИКИ ДЕКАРТА В ТРАНСИЛЬВАНИЮ

(Резюме)

Физика Декарта была введена в Трансильванию вскоре после появления *Философских принципов* в 1644 г. и быстро распространилась в реформатских коллегиях. Первым её инициатором был Апацаи Чере Янош, профессор в г. Алба-Юлия и затем в г. Клуже. Он опубликовал в Утрехте в 1655 г. книгу *Magyar Encyclopaedia*, учебник для своих учеников. Начиная с 1653 г. Апацаи преподавал в г. Алба-Юлия физику Декарта по *Принципам* последнего и по книге Региуса *Fundamenta Physices* 1647 г.

Настоящая статья показывает содержание лекций прочитанных Апацаи в г. Алба-Юлия и в г. Клуже, которые хранятся в рукописи в Библиотеке Клужского филиала Академии Социалистической Республики Румынии, и которые до настоящего времени ещё неизучены. Изложено также содержание частей из *Венгерской энциклопедии*, касающихся физики.

INTRODUCTION DE LA PHYSIQUE DE DESCARTES EN TRANSYLVANIE

(Résumé)

La physique cartésienne a été implantée en Transylvanie très tôt après la parution des *Principes de la Philosophie* (1644) et s'est vite répandue dans les collèges réformés. Son premier promoteur fut János Apáczai Csere, professeur à Alba Iulia d'abord, à Cluj ensuite. Il fit imprimer à Utrecht son *Magyar Encyclopaedia*, qui était un manuel scolaire à l'intention des élèves. A partir de 1653 Apáczai enseigna la physique de Descartes d'après les *Principes* de ce dernier, ainsi que d'après les *Fundamenta Physices* (1647) de Regius.

Le présent article expose, d'une part, le contenu des cours faits par Apáczai à Alba Iulia et à Cluj, conservés en manuscrit dans la Bibliothèque de la Filiale de Cluj de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie qui n'ont point été étudiés jusqu'ici, et d'autre part les parties de la *Magyar Encyclopaedia* ayant trait à la physique.

STUDIUL PERMEABILITĂȚII MAGNETICE A FERITELOR MAGNEZIU-ZINC ȘI CUPRU-ZINC

de

I. MAXIM și C. BĂLINTFI

Cercetările efectuate pînă în prezent asupra proprietăților magnetice ale biferitelor cu zinc în funcție de concentrația feritei de zinc [1, 2, 3], au scos în evidență existența unui maxim, atît al momentului magnetic de saturație cît și al permeabilității magnetice inițiale și a permeabilității maxime, pentru o concentrație a feritei de zinc în jur de 50%. În alte lucrări experimentale [3, 4] care se ocupă de ferita nichel-zinc, se arată că permeabilitatea magnetică a acestei ferite nu depinde numai de raportul dintre cele două componente, ci și de temperatura de sinterizare, precum și de atmosfera de gaz în care se face sinterizarea. Acești doi factori, în ultimă instanță, determină concentrația ionilor de fier bivalenți din ferită. S-a constatat că în cazul feritei nichel-zinc, permeabilitatea magnetică inițială atinge un maxim pentru cca 0,4% ioni de fier bivalenți.

În această lucrare, noi ne-am propus să studiem permeabilitatea magnetică inițială a feritelor magneziu-zinc și cupru-zinc în funcție de concentrația ionilor de fier bivalenți.

Prepararea probelor și modul de lucru. Din fiecare tip de ferită s-au confecționat prin sinterizare cîte 14 probe de formă cilindrică cu diametrul de 8 mm și lungimea de 8—10 mm, variind concentrația oxizilor componenți încît să fie satisfăcute relațiile:

$$1.\quad \frac{(MgO)_{0.5}(ZnO)_{0.5}}{Fe_2O_3} = \frac{1}{\delta}(\delta = 0{,}5\,;\ 0{,}6\,;\ \ldots\,;\ 1{,}8) \qquad (1)$$

$$2.\quad \frac{(CuO)_{0.4}(ZnO)_{0,6}}{Fe_2O_3} = \frac{1}{\delta}(\delta = 0{,}5\,;\ 0{,}6\,;\ \ldots\,;\ 1{,}8) \qquad (2)$$

Temperatura de sinterizare pentru ferita magneziu-zinc a fost de 1100°C, iar pentru cea de cupru-zinc a fost de 1000°C. Descrierea amănunțită a modului de preparare este făcută într-o lucrare anterioară [5].

Pentru determinarea permeabilității magnetice s-a folosit metoda balistică. În fig. 1 este reprezentat principiul instalației experimentale.

În interiorul unui solenoid B_1, care creează un cîmp magnetic constant H_0, sînt montate două bobine legate în serie. Aceste bobine sînt egale între ele şi înfăşurate în sensuri opuse ; astfel se elimină efectul cîmpului

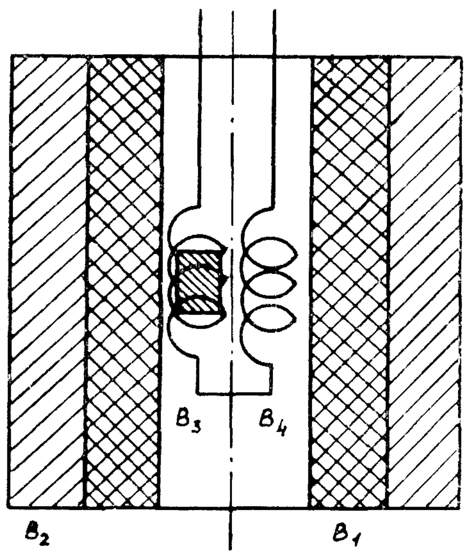


Fig. 1. Instalaţia pentru determinarea permeabilităţii magnetice a unei probe de formă cilindrică, prin metoda balistică.

magnetizant în ele. Cele două borne libere ale acestor bobine sînt conectate la un galvanometru balistic. După introducerea probei într-una din bobine, la conectarea sau deconectarea curentului din solenoidul de magnetizare galvanometrul balistic indică o anumită deviaţie. Indicaţia galvanometrului balistic fiind proporţională cu variaţia fluxului magnetic inductor din cele două bobine, se poate scrie :

$$\varphi c = (H_0 + 4\pi J)Sn + (-H_0Sn) = 4\pi SnJ \tag{3}$$

în care : φ este unghiul de deviaţie al galvanometrului
c — constanta galvanometrului balistic
S — secţiunea medie a unei spire din bobina de măsură
n — numărul de spire al bobinei de măsură

Rezultă că indicaţia galvanometrului balistic este proporţională cu intensitatea de magnetizare a probei.

B_2 o este bobină exterioară prin care se trece curent alternativ pentru demagnetizare.

Pentru a determina permeabilitatea magnetică a probei, a trebuit mai întîi să determinăm intensitatea cîmpului magnetic din interiorul probei. Se ştie că într-un corp feromagnetic de formă cilindrică aşezat într-un cîmp magnetic exterior ia naştere un cîmp demagnetizant [6, 7, 8]. Acest cîmp demagnetizant are aceeaşi direcţie şi este de sens contrar cu cîmpul magnetic exterior, fiind proporţional cu intensitatea de magnetizare a probei :

$$H_D = -NJ \tag{4}$$

Intensitatea cîmpului magnetic rezultant H_i din interiorul probei va fi dată de suma algebrică dintre H_0 şi H_D :

$$H_i = H_0 + H_D = H_0 - JN \tag{5}$$

Cunoscînd factorul de demagnetizare N, se poate calcula cîmpul magnetic din interiorul probei. Acest factor de demagnetizare depinde de forma şi dimensiunile probei, iar în cazul probelor preparate prin sinterizare mai depinde şi de porozitatea probelor şi de incluziunile neferomagnetice din interiorul lor. Cu cît o probă este mai poroasă, cu atît va avea factorul de demagnetizare mai mare. Deci din mărimea factorului de demagnetizare se pot trage concluzii şi cu privire la porozitate.

Pentru determinarea experimentală a factorului de demagnetizare ne-am servit de faptul bine cunoscut că, în absenţa unui cîmp demagnetizant intern, porţiunea iniţială a curbei ideale de magnetizare coincide cu axa intensităţii de magnetizare (fig. 2), iar în prezenţa unui cîmp demagnetizant intern, curba ideală de magnetizare are o altă alură. Pe ea se poate distinge o porţiune iniţială rectilinie (fig. 3), iar în vecinătatea originii coordonatelor se poate scrie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dH}{dJ} = N, \tag{6}$$

unde N este factorul de demagnetizare efectiv (format din factorul de demagnetizare geometric şi cel structural). Curba ideală de magnetizare se determină astfel : se introduce proba într-un cîmp magnetic constant, iar peste acesta se suprapune un cîmp magnetic alternativ de intensitate cu mult mai mare. Intensitatea acestui cîmp magnetic alternativ se descreşte în mod treptat pînă la valoarea zero. Apoi se determină intensitatea de magnetizare a probei corespunzătoare cîmpului magnetic constant, de exemplu prin metoda balistică. Această operaţie se repetă pentru diferite cîmpuri magnetice constante, iar punctele obţinute ne determină curba ideală de magnetizare. Iar după cum am văzut mai înainte, din panta porţiunii iniţiale a acestei curbe putem determina factorul de demagnetizare, cu ajutorul căruia se poate reprezenta curba de magnetizare a probei în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic din interiorul său. La acelaşi rezultat se poate ajunge printr-un procedeu grafic, aşa numit al „forfecării", care este cu mult mai practic. Pentru aceasta se reprezintă grafic intensitatea de magnetizare în funcţie de cîmpul magnetic exterior, curba OA (fig. 4) şi pe acelaşi grafic se reprezintă curba $J = f(H_D)$, exterior, care este o dreaptă ce face cu ordonata unghiul α dat de relaţia (6). Printr-un punct oarecare J_1 de pe ordonată ducem o paralelă la abscisă. Segmentul J_1M reprezintă cîmpul demagnetizant $H_D = -NJ$ corespunzător intensităţii de magnetizare J_1, iar segmentul J_1C reprezintă cîmpul magnetic exterior corespunzător aceleiaşi intensităţi de magnetizare. Transpunem segmentul J_1M pe aceeaşi dreaptă din punctul C spre stînga obţinînd punctul P. Segmentul J_1P reprezintă intensitatea cîmpului magnetic

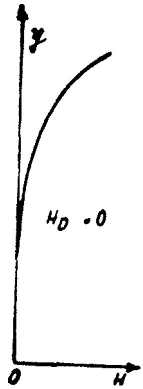


Fig. 2.

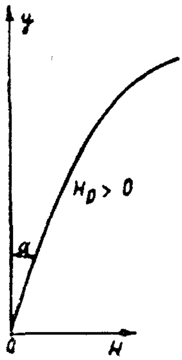


Fig. 3.

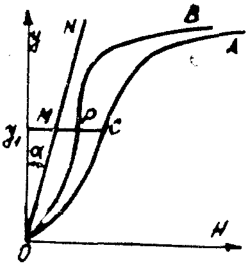


Fig. 4.

din interiorul probei, care produce intensitatea de magnetizare J_1. Deci punctul P se află pe curba de magnetizare în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic din interiorul probei. Această translaţie (forfecare) se poate face pentru toate punctele curbei OA, obţinînd astfel curba reală de magnetizare a probei OPB.

Pentru măsurătorile noastre am folosit o instalaţie a cărei schemă este dată în fig. 5.

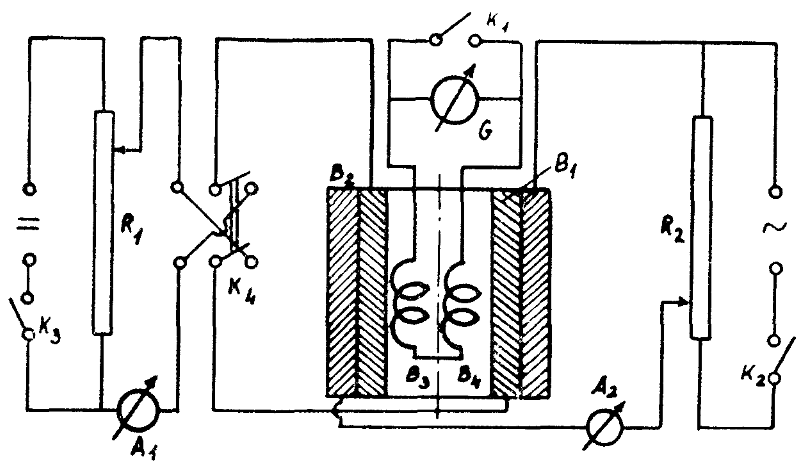


Fig. 5. Schema instalaţiei experimentale pentru determinarea punctelor curbei reale de magnetizare a unei probe de formă cilindrică B_1 — bobină de magnetizare, B_2 — bobină de demagnetizare, B_3, B_4 — bobină de măsură, G — galvanometru balistic, R_2 — autotransformator.

Rezultate experimentale. Cu ajutorul instalației descrise mai sus, am determinat permeabilitatea magnetică la un cîmp magnetic a cărui intensitate este în jur de 0,1 *Oe*, pentru ferita magneziu-zinc și cupru-zinc,

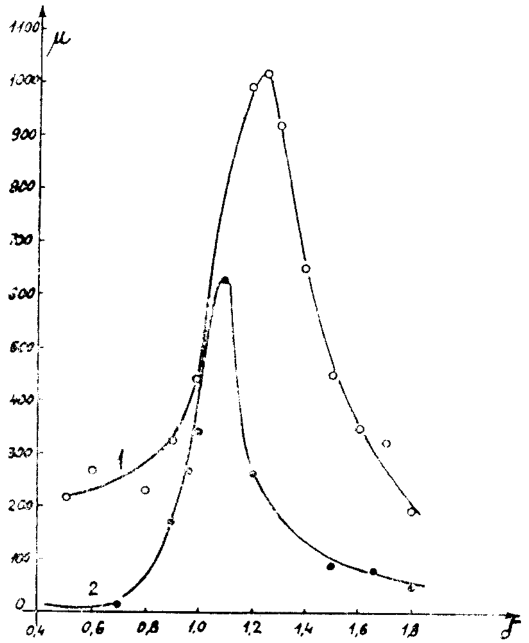


Fig. 6. Permeabilitatea magnetică a feritelor magneziu-zinc (1) și cupru-zinc (2) în funcție de concentrația trioxidului de fier.

în funcție de concentrația trioxidului de fier, conform relațiilor (1) și (2). Rezultatele acestora determinări sînt reprezentate pe graficul din fig. 6.

Se constată că alura celor două curbe este asemănătoare, ambele avînd cîte un maxim, ce corespund concentrațiilor de trioxid de fier de peste $50_0/^0$: pentru ferite magneziu-zinc cca $54_0/^0$, iar pentru ferite cupru-zinc cca $52_0/^0$ trioxid de fier. Rezultate asemănătoare s-au aflat și pentru ferita nichel-zinc [3].

Intrat în redacție la 10 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. J. L. Snoek, „Colloque de ferromagnétisme et d'antiferromagnétisme", Grenoble, 1950.
2. C. Guillaud, „Colloque de ferromagnétisme et d'antiferromagnétisme", Grenoble, 1950.
3. L. I. Radkin, *Vîsokoceastotnîe ferromagnetik*, Moskva, 1960.
4. L. I. Radkin, S. I. Novikova, *Ferritî*, Minsk, 1960.

5. I. Maxim, C. Bálintfi, *Studiul temperaturii Curie la feritele magneziu-zinc și cupru-zinc* (manuscris).
6. T. Kahan, *Thèse de doctorat*, Paris, 1937.
7. P. Weiss, E. R. Forrer, „*Ann.* de *Phys.*" 279, 1929.
8. I. Kiffer, V. Pantiușin, *Ispîtanie ferromagnihnîlh materialov*, Gosenergoizdat, 1955.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАГНИЙ-ЦИНКОВЫХ И МЕДЬ-ЦИНКОВЫХ ФЕРРИТОВ

(Резюме)

Авторы изучили изменение магнитной проницаемости магний-цинковых и медь-цинковых ферритов, в зависимости от концентрации триокиси железа из шихты для спекания.

Установилось, что в случае обоих ферритов с повышением концентрации триокиси железа магнитная проницаемость сначала повышается и затем начинает спадать. Максимумы были получены между 52% и 55% триокиси железа.

Измерения проводились на цилиндрических пробах и применилась коррекция при помощи фактора размагничивания.

THE STUDY OF MAGNETIC PERMEABILITY OF THE FERRITES: MAGNESIUM-ZINC AND COPPER-ZINC

(Summary)

The authors investigated the variation of magnetic permeability in the case of the ferrites: magnesium-zinc and copper-zinc, depending on the concentration of iron trioxide from a sample necessary for sinterization.

It has been ascertained that in the case of both ferrites, at the same time as the concentration of iron trioxide increases, the magnetic permeability, firstly, increases and then begins to decrease. The maxima were obtained between 52% and 55% iron trioxide.

Measurements were carried out on cylindrical samples applying the correction of demagnetization factor.

ANTIFEROMAGNETISMUL ALIAJELOR TERNARE DE NICHEL-CUPRU-ZINC

de

IULIU POP și I. COSMA

Aliajele binare pe bază de nichel au fost studiate destul de amănunțit atît în domeniul paramagnetic, cît și în domeniul feromagnetic [1—5]. În domeniul paramagnetic comportarea aliajelor, în general, respectă legea lui Curie-Weiss de forma:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta_p} + \chi_k \tag{1}$$

unde C — este constanta lui Curie, χ_k un termen paramagnetic constant, determinat de efectele electronilor de conductibilitate, iar T și θ_p, temperatura, respectiv punctul Curie paramagnetic. Un număr restrîns de aliaje binare de nichel suferă un proces de ordonare magnetică de tipul antiferomagnetism-feromagnetism, datorită prezenței în aliaj a unui component antiferomagnetic, cum este manganul sau cromul [6]; în alte aliaje de nichel însă, n-a fost semnalat un asemenea fenomen. În ce privește studiul aliajelor ternare de nichel, atît din punct de vedere al proprietăților fizice, cît și din punct de vedere structural și metalografic, datele sînt extrem de puține, reducîndu-se la 2 sau 3 diagrame de echilibru și la studiul dependenței punctului Curie feromagnetic de concentrația electronică a componentelor nemagnetice [7 — 11].

La aliajele ternare de nichel-aluminiu-aur în domeniul paramagnetic s-a pus în evidență, prin variația susceptibilității cu temperatura, fenomenul ordonării ferimagnetice [12], fapt care a determinat și obiectul prezentei lucrări.

Metoda experimentală. Din sistemul ternar de aliaje nichel-cupru-zinc au fost preparate nouă probe în domeniul de solubilitate solidă [13], într-un cuptor electric cu atmosferă controlată de hidrogen. Au fost utilizate metale de puritate electrolitică, concentrația probelor fiind determinată prin analiză chimică după elaborarea lor, așa cum rezultă din tabelul 1.

Tabel 1

Proba / Compoziţia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ni % at.	100	96,25	93,2	90,6	83,2	79,3	69,6	63,8	60,0	57,6
Cu % at.	—	2,83	4,8	8	9,6	12,9	21,3	23,2	25,5	26,4
Zn % at.	—	0,92	2	1,4	7,2	8,8	9,1	13	14,6	16

Studiul comportării magnetice s-a făcut cu o balanţă de susceptibilităţi cu compensare mecanică de sensibilitate 10^{-7} descrisă anterior [14].

Rezultate experimentale. S-a studiat dependenţa de temperatură a susceptibilităţii magnetice în intervalul 93° — 1200°*K*, aşa cum s-a arătat în fig. 1, unde este reprezentată variaţia susceptibilităţii reciproce cu temperatura.

După cum rezultă din figură, în intervalul de temperatură studiat $dx/dT < 0$, aliajele prezintă în general un paramagnetism de tip Langevin.

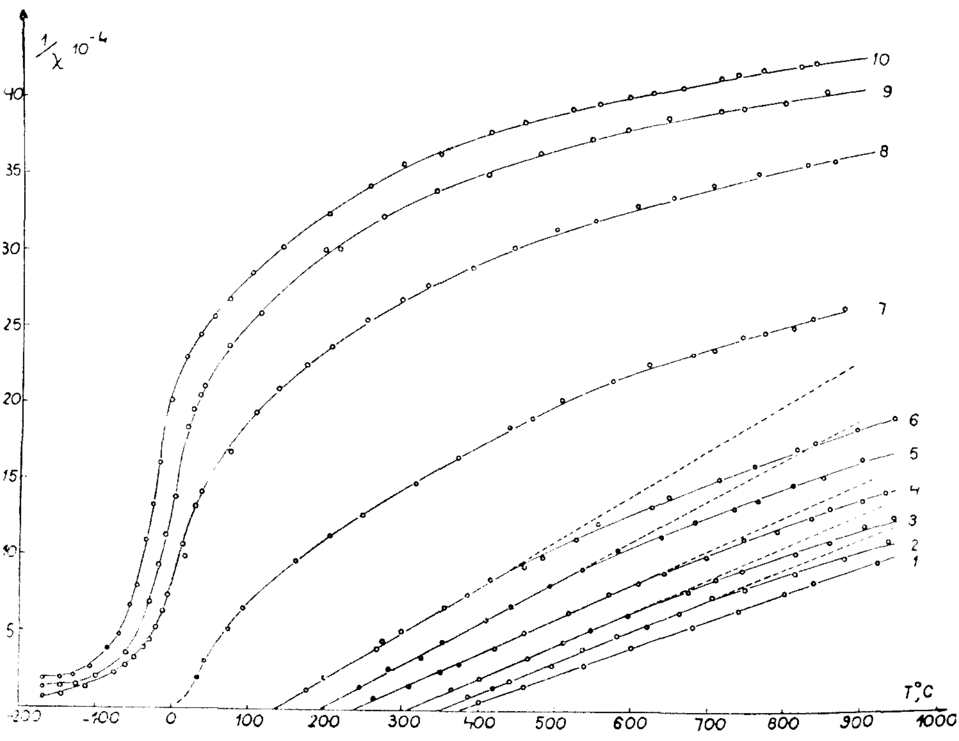


Fig. 1.

Tabloul dependenţei de temperatură al susceptibilităţii reciproce pune în evidenţă faptul că la concentraţii mari de nichel, de peste 70% at, comportarea magnetică a aliajelor respectă legea lui Curie-Weiss afectată de un termen paramagnetic constant χ_k (1). La concentraţii sub limita de mai sus dependenţa $1/x(T)$ este pronunţat neliniară, fapt care indică o transformare de fază antiferomagnetică. Această dependenţă poate fi aproximativ descrisă de legea lui Néel, pentru cazul ferimagnetismului

$$1/x = \frac{1}{x_0} + \frac{T}{C} - \frac{\sigma}{T - \theta} \tag{2}$$

unde χ_0, σ, θ, sînt nişte constante ce depind de coeficienţii cîmpului molecular, iar C este constanta lui Curie, ale căror valori sînt date în tabelul 2.

Tabel 2

Proba	$C \cdot 10^4$	θ, °C	σ	$\frac{1}{x_0} \cdot 10^{-4}$	P_p, μ_B
7	50	+ 10	360	3,6	1,56
8	48,9	− 60	960	17,7	1,55
9	52,6	− 55	980	24,6	1,605
10	51,3	− 70	870	26,5	1,59

O astfel de dependenţă a susceptibilităţii a mai fost stabilită şi în cazul aliajelor de nichel-crom [6] şi nichel-aluminiu-aur [12].

Pentru aliajele care urmează legea lui Curie-Weiss (curbele 1 — 6), am reprezentat în fig. 2 dependenţa de temperatură a mărimii $\frac{1}{x - x_k}$, obţinîndu-se astfel o variaţie pur liniară, care este determinată numai de paramagnetismul Langevin, al stărilor electronice localizate.

Paramagnetismul electronilor de conductibilitate x_k de tip Pauli, la aceste aliaje creşte proporţional cu concentraţia componentelor nemagnetice din aliaj, aşa cum este arătat în fig. 3. Tot pe această figură este dată dependenţa de concentraţie a punctelor Curie paramagnetice θ_p, care prezintă o scădere liniară în raport cu concentraţia de nichel, confirmînd faza de solubilitate solidă a sistemului de aliaje.

Din constantele Curie s-au calculat valorile momentelor magnetice efective P_p, pe atomi de aliaj, constatîndu-se o dependenţă de concentraţie analogă cu cea a punctelor Curie, fig. 4, curba *a*.

În scopul relevării mecanismului de interacţiune în aceste aliaje, am calculat valoarea momentului magnetic aferentă unui atom de nichel

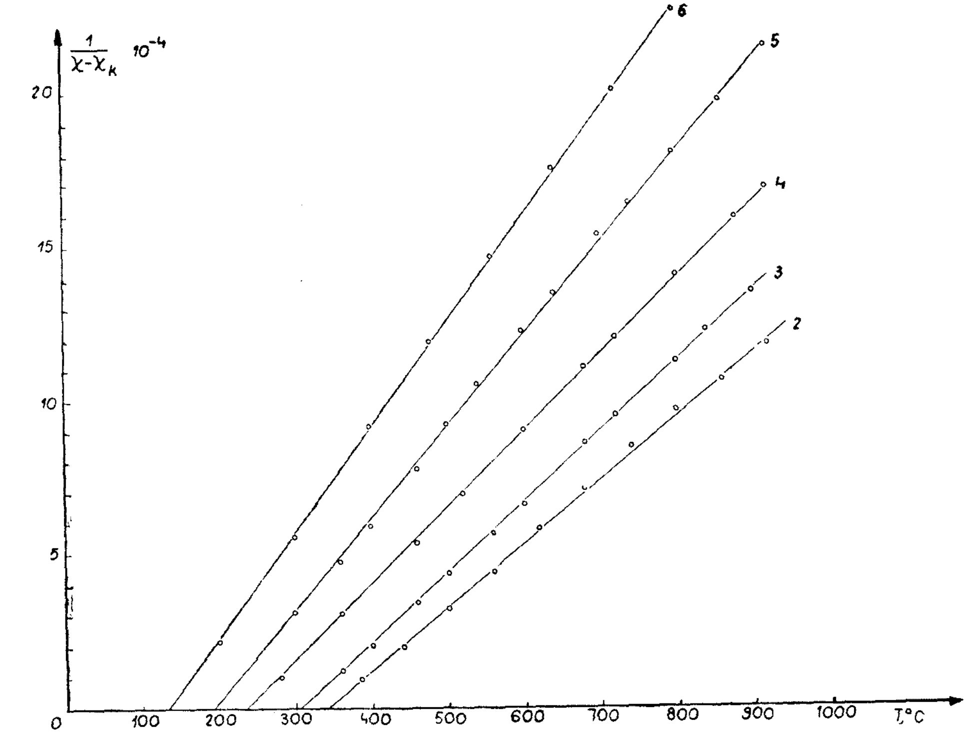


Fig. 2.

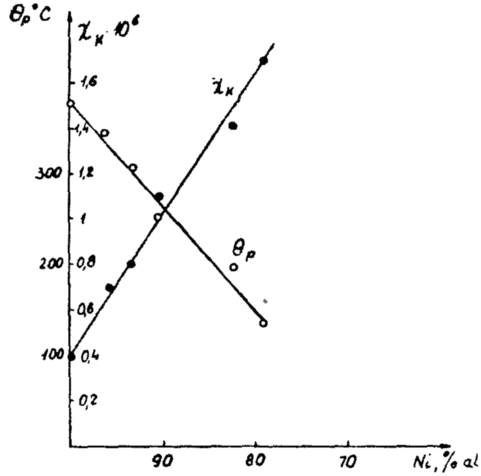


Fig. 3.

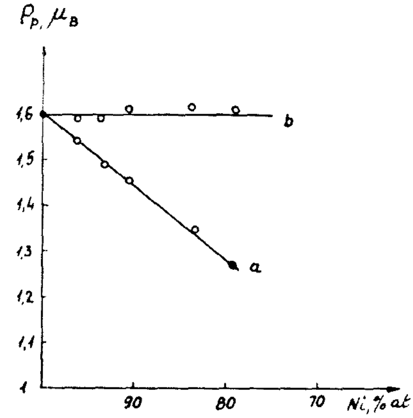


Fig. 4.

aliat, care este reprezentat de curba *b*, fig. 4. După cum se vede, momentul magnetic pe atom de nichel păstrează o valoare constantă de aproximativ $1{,}6\mu_B$, nefiind alterată de prezența atomilor străini, de cupru și zinc, fapt care indică un simplu fenomen de diluție a atomilor de nichel în masa aliajului.

Dependența pronunțat neliniară $1/\chi(T)$ în cazul aliajelor cu concentrația de nichel sub 70% at, care a fost aproximată cu relația (2), se poate explica cu ajutorul teoriei lui Néel [15] pentru cazul feritelor, prin formarea unor subrețele magnetice de tipul Ni—Ni, Ni—Cu, Ni—Zn, avînd momentele magnetice rezultante orientate antiparalel. Deoarece valorile momentului amgnetic calculate din constanta *C*, rezultată din relația (2), pentru probele 7—10, corespund destul de bine cu valoarea momentului magnetic a nichelului de $1{,}6\mu_B$, așa cum se vede din tabelul 2, se poate considera că subrețelele de Ni—Cu și Ni—Zn sînt echivalente și-și compensează reciproc momentele magnetice, eficientă fiind numai subrețeaua de Ni—Ni. Dependența hiperbolică a susceptibilității magnetice de temperatură este descrisă exact cu legea (2) numai pînă la aproximativ 400 °C, după care apare o abatere sistematică, datorată probabil efectelor electronilor de conductibilitate care se manifestă mai pronunțat la temperaturi înalte.

În concluzie, se poate spune că sistemul de aliaje ternare nichel-cupru-zinc are o comportare magnetică normală pînă la concentrația de aproximativ 70% at de nichel. Sub această limită aliajele prezintă fenomenul ordonării ferimagnetice, în domeniul de solubilitate solidă

Intrat în redacție la 10 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. C. Manders, Ann. Phys. **5**, 167 (1936).
2. L. Néel, Ann. Phys. **5**, 232 (1936).
3. V. Marian, Ann. Phys. (teză) (1936).
4. D. I. Volkov, V. I. Cecernikove, Izv. A. N. SSSR, ser. fiz, **21**, 8, 1111 (1957).
5. V. I. Cecernikov, Vestnik Moskovskogo Un-ta, ser. meh. astr. fiziki, himii, **4**, 143 (1958).
6. V. I. Cecernikov, Iuliu Pop, F.M.M. **17**, 4, 636 (1954).
7. V. Marian, I. Maxim, H. Țintea, Com. Acad. R.P.R. II, 9 (1952) 527—531.
8. I. Maxim, D. Ausländer, V. Stan, Stud. cerc. de mat. Cluj, Acad, R.P.R., **VIII**, 3—4 (1957).
9. V. Marian, I. Maxim, I. Ursu, V. Cristea, Rev. de Phys. **II**, 1 (1957), 105—108.
10. I. Maxim, V. Stan, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Phys. I, 1 (1959) 257—359.
11. I. Maxim, Studii și cercetări de fizică, **VIII**, 2, 147—151 (1957).
12. Iuliu Pop, I. Maxim, Studia Univ. Babeș-Bolyai (sub tipar), (1966).
13. S. Gidea, M. Protopopescu, *Aliaje neferoase*, Ed. tehnică, 211 (1965).
14. Iuliu Pop, V. I. Cecernikov, *Priborî i tehnika eksperimenta*, **5**, 180 (1964).
15. L. Néel, Ann. Phys. **10**, 3, 137 (1948).

АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ СПЛАВОВ Ni–Cu–Zn

(Резюме)

Авторы изучили температурную зависимость обратной величины магнитной восприимчивости $1/\chi$ в области твердой растворимости тернарных сплавов **Ni–Cu–Zn**. Установилось, что до концентрации 80 ат. % Ni, сплавы имеют нормальное парамагнитное поведение, с фазовым переходом ферромагнетизм-парамагнетизм, следуя закону Кюри-Вейса, затронутому постоянным парамагнитным термином, который линейно возрастает с концентрацией немагнитных составляющих сплава. Эффективный магнитный момент на атом никеля сохраняет в этой области концентрации постоянное значение приблиз. $1{,}6\mu_B$. факт, указывающий на механизм растворения атомов никеля в сплаве.

От концентрации 70 ат.% Ni и до 50 ат. %Ni обратная величина магнитной восприимчивости имеет явный нелинейный характер и может быть приблизительно описана при помощи закона Нееля для случая ферромагнетизма. Этот факт показывает антиферромагнитное фазовое превращение в сплавах, путем образования магнитных подрешеток с магнитным моментом, ориентированным антипараллельно. Определенный магнитный момент очень хорошо соответствует магнитному моменту никеля приблизит. $1{,}6\mu_B$. Полученные результаты интерпретировались посредством образования трех магнитных подрешеток: Ni – Ni, Ni – Cu и Ni – Zn, имеющих антипараллельно направленные моменты.

L'ANTIFFEROMAGNÉTISME DES ALLIAGES Ni–Cu–Zn

(Résumé)

Les auteurs ont étudié la dépendance de la susceptibilité magnétique réciproque $1/\chi$ à l'égard de la température dans le domaine de la solubilité solide pour les alliages ternaires de Ni–Cu–Zn. Ils ont établi que, jusqu'à la concentration de 80% at. de Ni, les alliages ont un comportement paramagnétique normal, avec la transition de phase ferromagnétisme-paramagnétisme, conformément à la loi de Curie-Weiss affectée d'un terme paramagnétique constant, croissant linéairement avec la concentration des composants nonmagnétiques de l'alliage. Le moment magnétique effectif par atome de nickel, dans ce domaine de concentration, conserve une valeur constante d'environ $1{,}6\mu_B$, fait qui indique un mécanisme de dilution des atomes de nickel dans l'alliage.

Dans l'intervalle de concentration de 70% at. Ni à 50% at Ni, la susceptibilité magnétique réciproque dépend de la température d'une façon nettement non-linéaire et peut être décrite approximativement par la loi de Néel pour le cas de ferrimagnétisme. Ce fait révèle une transformation de phase antiferromagnétique dans les alliages, par la formation de sous-réseaux magnétiques à moment magnétique antiparallèlement orienté. Le moment magnétique déterminé correspond parfaitement à celui du nickel, de $1{,}6\mu_B$ approximativement. Les auteurs ont interprété les résultats obtenus par la formation de trois sous-réseaux magnétiques tels que Ni–Ni, Ni–Cu et Ni–Zn, ayant leurs moments antiparallèlement orientés.

EXPLICAREA UNOR PROPRIETĂȚI ALE COMBINAȚIEI TRANZISTOR-DIODĂ TUNEL

de

EMIL TĂTARU

Interesul pentru diodele tunel este justificat de calitățile: viteză de comutare (frecvență maximă de lucru) extraordinar de mare și număr mic de elemente necesare în scheme. Totuși utilizarea lor este îngreunată de următoarele dezavantaje: prezența reacției între etaje, sensibilitatea mare față de toleranțele elementelor de circuit și a caracteristicilor voltamperice a diodelor tunel, coeficientul de amplificare relativ redus, iar în unele cazuri amplitudinea relativ mică a semnalului de ieșire.

Pentru eliminarea acestor neajunsuri, o aplicare tot mai largă își găsește în prezent combinația tranzistor-diodă tunel. În această combinație tranzistorul, conectat cu baza sau emiterul la masă, este folosit ca element de separare evitînd reacția între etaje. Prima conexiune are avantajul vitezei de comutare mari, a doua conexiune avantajul amplificării în curent. Combinația tranzistor-diodă tunel prezintă cîteva proprietăți remarcabile dovedite experimental, explicarea lor constituind obiectul prezentului articol.

1. Pentru realizarea aceleiași funcțiuni schemele care folosesc combinația tranzistor-diodă tunel necesită în general mai puține elemente de circuit decît cele echipate cu tranzistoare. De exemplu în cazul numărătoarelor binare, numărul elementelor componente este aproximativ de două ori mai mic [1, 7].

Aceasta se explică prin faptul că dioda tunel prezintă caracteristică voltamperică cu rezistență diferențială negativă; or, în cazul tranzistoarelor rezistența diferențială negativă trebuie realizată cu ajutorul unui montaj adecvat care necesită în componența sa elemente de circuit.

După cum se știe, siguranța în funcționare a unei scheme electronice este cu atît mai mare cu cît numărul elementelor de circuit este mai mic. În consecință, proprietatea combinației tranzistor-diodă tunel de a micșora numărul de elemente necesare realizării unei funcțiuni, în raport cu schemele echipate cu tranzistoare, merită toată atenția.

2. Experimental [2, 3] a fost arătat că pentru schemele care folosesc ca element activ combinația tranzistor-diodă tunel cerințele impuse toleranțelor sînt mai puțin severe decît în cazul schemelor echipate cu elemente active — diode tunel.

Explicația acestei proprietăți constă în următoarele:

Schemele echipate cu diode tunel se caracterizează printr-o reacție puternică între etaje, cauzată de natura dipolară a diodei tunel și de necesitatea unei impedanțe de cuplaj între etaje de valoare relativ mică, datorită amplificării relativ mici a diodei tunel. De aceea zona valorilor posibile a elementelor de circuit în care schema funcționează corect este redusă. Prezența în schemă a tranzistorului în combinație cu dioda tunel conduce la înlăturarea reacției între etaje și la o amplificare mult mai mare decît a diodei tunel, motiv pentru care în acest caz cerințele impuse toleranțelor sînt mai puțin severe.

Întrucît siguranța în funcționare a schemelor este afectată de toleranțele elementelor de circuit, proprietatea combinației tranzistor-diodă tunel de a mări toleranțele admisibile constituie un avantaj ce nu poate fi neglijat.

3. Rezultatele experimentale din lucrările [4, 5] arată că viteza de comutare a schemelor care folosesc combinația tranzistor-diodă tunel este considerabil mai mare decît a schemelor echipate cu tranzistoare.

Pentru explicarea acestei proprietăți se consideră schema din fig. 1, în care sursa de semnal treaptă $e_g(t)$ prin intermediul rezistenței Rg comută

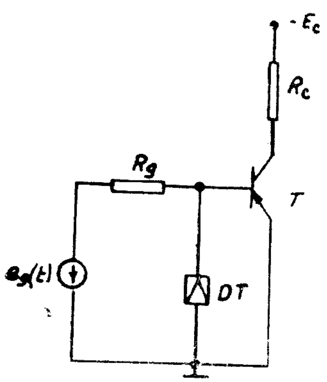


Fig. 1.

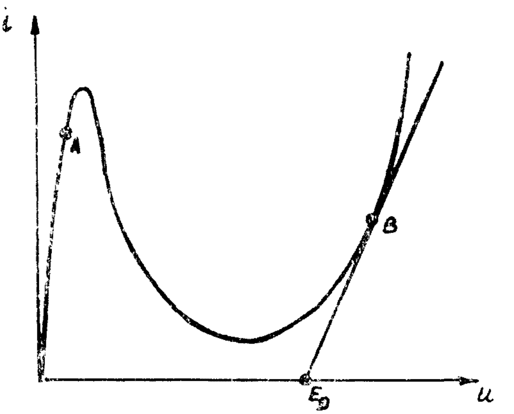


Fig. 2.

diodă tunel DT în starea de înaltă sau joasă tensiune și aceasta la rîndul său provoacă comutarea tranzistorului T. (Curentul de vîrf al diodei tunel se presupune suficient de mare astfel că practic tranzistorul nu șuntează dioda tunel.) În starea de joasă tensiune dioda tunel este echivalentă cu rezistența diferențială r_A a caracteristicii volt-amperice în punctul A, iar în starea de înaltă tensiune cu rezistenţa diferenţială r_B în punctul B în serie cu sursa de tensiune electromotoare E_D, a cărei valoare este dată de intersecţia abscisei cu tangenta în punctul B, la caracteristica voltamperică a diodei tunel (fig. 2). Întrucît viteza de comutare a diodei tunel este mult mai mare decît a tranzistorului, influenţa elementelor reactive ale diodei tunel poate fi neglijată. Tensiunea electromotoare $e(t)$ şi rezistenţa R, echivalente acţiunii generatorului de semnal $e_g(t)$, rezistenţei R_g şi diodei tunel, conform teoremei lui Thévenin, au expresiile :

$$e(t) = \frac{E_D + \frac{r_D}{R_g} e_g(t)}{1 + \frac{r_D}{R_g}} \tag{1}$$

$$R = \frac{r_D}{1 + \frac{r_D}{R_g}}$$

în care r_D are valoarea r_A pentru starea de joasă tensiune, respectiv r_B pentru starea de înaltă tensiune, iar E_D se consideră nulă în cazul stării de joasă tensiune. Pentru impedanţa de intrare a tranzistoarelor obişnuite poate fi folosită schema echivalentă propusă în [6]. În cazul tranzistoarelor cu cîmp intern, capacitatea de sarcină a joncţiunii emiter-bază are o influenţă considerabilă asupra duratei proceselor de comutare, de aceea ea trebuie adăugată schemei şi anume între emiter şi bază. Spre deosebire de cazul studiat în [6], aici gama de variaţie a parametrilor tranzistorilor este mare ; de aceea în continuare se consideră valorile medii. Pe baza celor spuse mai sus, în fig. 3 este dată schema echivalentă a schemei din fig. 1.

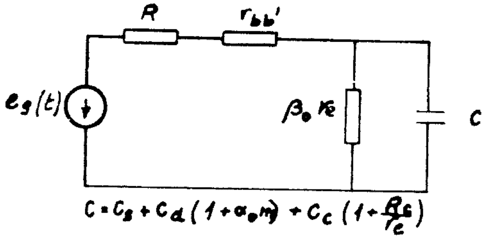


Fig. 3.

S-a notat :

$r_{bb'}$ — rezistenţa proprie a bazei
r_e — valoarea medie a rezistenţei diferenţiale a joncţiunii emiter — bază

R_c — rezistența de sarcină în circuitul colectorului

C_s — valoarea medie a capacității de sarcină a joncțiunii emiter — bază

C_c — valoarea medie a capacității de sarcină a joncțiunii colector — bază

C_d — valoarea medie a capacității de difuzie a joncțiunii emiter — bază

α_0 — valoarea medie a coeficientului de amplificare în curent pentru conexiunea tranzistorului cu baza la masă

β_0 — valoarea medie a coeficientului de amplificare în curent pentru conexiunea tranzistorului cu emiterul la masă

m — coeficient care caracterizează defazajul coeficientului de amplificare al tranzistorului.

Din această schemă se vede că, pentru un tranzistor dat, durata proceselor de comutare este cu atît mai mică cu cît raportul $\beta_0 r_e/(R + r_{bb'})$ este mai mare. În schemele cu tranzistoare rezistența $R = R_g$ are în general o valoare ridicată, în timp ce în schemele care folosesc combinația tranzistor-diodă tunel rezistența R este mult mai mică deoarece $r_D << R_g$ (vezi relațiile (1)). În consecință, viteza de comutare a schemelor care folosesc combinația tranzistor-diodă tunel este considerabil mai mare decît a chemelor echipate cu tranzistoare. Totodată trebuie subliniat că viteza de comutare a combinației tranzistor-diodă tunel este determinată de proprietățile de frecvență ale tranzistorului. Pentru a realiza o viteză de comutare mare este indicat a folosi tranzistori de înaltă frecvență avînd rezistență $r_{bb'}$ mică și diode tunel cu curent de vîrf suficient de mare pentru ca suma rezistențelor $r_{bb'}$ și r_D să fie mică. În fig. 4 curba (*a*) reprezintă oscilograma frontului de cădere a curentului de colector

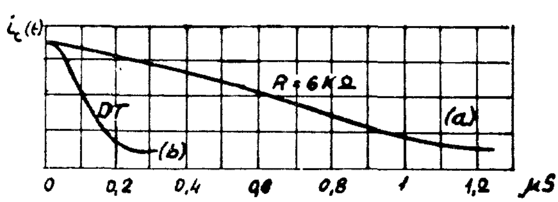


Fig. 4.

pentru tranzistor, iar curba (*b*) reprezintă oscilograma corespunzătoare combinației tranzistor-diodă tunel. S-a utilizat: tranzistor tip π 402, diodă tunel de germaniu cu curent de vîrf de 4 *mA*, generator de impulsuri dreptunghiulare cu durata frontului mai mică de 50 *ns*, oscilograf cu banda de trecere de 25 *MHz* și $E_c = 1{,}5\ V$; $R_c = 300\Omega$, $Rg = 6K\Omega$. Se poate observa că frontul de cădere al impulsului de colector este de nouă ori mai mare în cazul tranzistorului față de cazul combinației tranzistor — diodă tunel. Aceasta atestă comportarea diodei tunel în calitate de transformator de rezistenţă (fără inerţie) în circuitul bazei tranzistorului, mărind viteza de comutare a schemei.

Neajunsul schemelor care folosesc combinaţia tranzistor-diodă tunel constă în aceea că, deşi produc o mărire considerabilă a vitezei de comutare în raport cu schemele cu tranzistoare, nu realizează viteza de comutare atinsă de schemele cu diode tunel.

În concluzie, combinaţia tranzistor-diodă tunel este un compromis reuşit între viteza de comutare mare şi toleranţe acceptabile, număr de elemente mic, siguranţă în funcţionare.

Actualmente se lucrează intens la realizarea triodei tunel care să prezinte calităţile tranzistorului şi diodei tunel.

Intrat în redacţie la 5 septembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hemel, *A Study of Tunnel Diodes for Digital Electronic Circuits*, Solid State Design, march 1962, p. 31—38.
2. E. Gottlieb, J. Giorgis, *Tunnel Diodes. Part IV. Logic and Switching Circuits*, Electronics, july 5, 1963, p. 16—23.
3. B. N. Kononov, A. S. Sidorov, *Primenenie tunelnîh diodov v uzlah elektrofiziceskoi aparaturî*, Trudî piatoi naucino-tehniceskoi konferenţii po iadernoi radioelectronike, Tom I, p. 169—183.
4. P. J. Langlois, *Tunnel Diodes Boost TRL Speed*, Electronics, may, 1963, p. 28—31.
5. R. Berland, R. Borchi, *Note sur l'association diode tunnel—transistor*, L'onde électrique, nr. 446, 1964, p. 530—532.
6. V. Uzunoglu, *A Transistor Circuit*, Proc. IRE, 1961, nr. 12 p. 1957.
7. E. Tătaru, *Isledovanie nekotorîh shem ekonomicinîh dvoicinîh sciotcikov, ispolzuiuşcih tunelnîe diodî sovmestno s tranzistorami*. Disertaţie, Leningrad, 1965.

ОБЪЯСНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ СОЕДИНЕНИЯ ТРАНЗИСТОР — ТУННЕЛЬНЫЙ ДИОД

(Резюме)

Автор объясняет теоретически следующие свойства соединения транзистор-туннельный диод:

1. уменьшение числа элементов цепи по отношению к схемам, снаряженным транзисторами;

2. увеличение допусков, разрешенных по отношению к схемам, использующим туннельные диоды;

3. увеличение коммутационной скорости по отношению к схемам, снаряженным транзисторами.

EXPLANATION OF SOME PROPRIETIES OF THE COMBINATION TRANSISTOR-TUNNEL DIODE

(Summary)

The author gives a theoretical explanation of the following proprieties of the combination transistor-tunnel diode:

1. Decrease in number of circuit elements in comparison with the schemes containing transistors.
2. Increase of admissible tolerance confronted by the schemes which use tunnel diode.
3. Increase of switching-over speed in comparison with the schemes containing transistors.

SOME REMARKS ON THE RELATION BETWEEN MASS AND ENERGY

by

OLIVIU GHERMAN

The study of the relation between mass and energy has started short time after the descovery by Einstein of the special theory of the relativity. It is well-known that this theory shows that a particle is fully characterized mechanically in its own inertial frame by an invariant, its mass m_0. At the same time it has in the same frame a "rest" energy

$$E = mc^2 \tag{1}$$

In a system of interacting particles, for instance in a nucleus, the total mass in the proper inertial frame differs from the mass resulting by addition of the masses of components. As a result, it is currently said that the system has an interaction energy ΔE which is related to the mass difference Δm by the formula:

$$\Delta E = c^2 \Delta m \tag{2}$$

The formula (2) which is essential for the nuclear physics and for the physics of elementary particles was very often a basis for nonscientific interpretations, being considered, by some philosophers as an argument for different types of idealism.

Many discussions occurred in the scientific journals with respect to the interpretation of the relation (2). Many solutions have been given, but in our opinion none satisfactory. We have the feeling that the discussion stopped not as a result of being discovered a convincing answer but because the relation (2) is extremely useful in physics and it can not express any argument for an idealistic interpretation.

We want to discuss once more in this paper, the relation between mass and energy and we hope that our answer is correct and convincing.

It is well known that in the newtonian physics the mass fully characterizes the quantity of matter. At the same time in the newtonian physics the concept of field is an artificial one, as long as the speed of the interaction is infinite. This means that in any newtonian process the mass is conserved. Obviously, no radiative process should be considered for it is well-known that such processes could be understood only in the relativistic physics.

The basic formulae in the newtonian mechanics express the dynamical variables: energy, momentum and force as function of the kinematical ones: velocity and acceleration by the well-known formulae:

$$E = \frac{m}{2} v^2, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{f} = m\vec{a} \tag{3}$$

We emphasize that all the formulas contain the mass as a coefficient which enable us to express the dynamical variables as function of the kinematical ones.

In the relativistic mechanics, the starting point is different from the above one, and undoubted much deeper. In the relativistic mechanics any particle is fully characterized by the energie-momentum four-vector

$$p_\mu = mcu_\mu = mc\frac{dx_\mu}{ds}, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

$$ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \, x_4 = z, \quad x_4 = ict.$$

In (4) m is an invariant, the proper mass of the particle. In order to avoid unnecessary complications, we suppose, for the moment, that the particle is freely moving. The first three components of the energy-momentum four-vector are given by

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

and the fourth component represents the energy of the particle

$$-icp_4 = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

The relativistic expression of the force is given by

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

For two special cases: a) the acceleration perpendicular on the velocity and b) the acceleration parallel to the velocity we get

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{7.a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{7.b}$$

As it is obvious from (7a, 7b), the ratio between the force and the acceleration takes a continuous range of values.

Starting from the relations (5, 7a, 7b) and using a mystified analogy with the Newtonian concepts some expressions are introduced being spread even today in the majority of the scientific papers and books [2], [3].

First, it was introduced the concept of "moving mass"

$$m^* = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = m^*\vec{v}, \tag{8}$$

and the known experiments of W. Kaufmann were interpreted in the sense that the mass of electron is increasing with the velocity, as is given by (8). Today it is a wide spread expression that the mass of the particles in an accelerator is increasing as in (8).

In order to get similar interpretations for the force, the concept of the "transversal" and "longitudinal" masses were introduced

$$m_T = m^*, \qquad m_L = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

We wonder how such artificial concepts could be introduced and accepted by the majority of the physicists. If the concept of "moving mass" could be accepted, at the first sight, the concepts of longitudinal and transversal mass are obviously artificial and were introduced only to conserve in the relativistic mechanics, some laws that characterize the Newtonian mechanics. It is also obvious that if we took the formula (7), the proportionality between force and acceleration would be given by an intermediate mass of a bizarre value.

Let us come back to the moving mass (8). Its value could be convincing if the relativistic value of the energy would be $E = \frac{m^*}{2} v^2$ or at least $E = \frac{m^*}{2} v^2 + mc^2$. But it is well-known that the correct relation is $E = m^*c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ which differs from both. It is obvious, in our opinion, that the different kinds of masses given above are ad-hoc concepts, with a very doubtful scientific value.

In order to keep the Newtonian concepts in the relativistic mechanics, we have to introduce different types of masses for the different relations which is, in our opinion, wrong.

Our opinion is that only the rest mass has a scientific meaning. But as it is well-known the rest mass does not conserve in interaction in sense that the mass of a system of interacting particle differs from the summ of the rest masses of the constituents. All these show that in the relativistic mechanics the mass does not characterize the quantity of matter.

We propose to characterize the quantity of matter by another dynamical variable which conserves in any physical process. But it is well known that the energy-momentum four-vector is such a variable thus we propose to characterize the quantity of (moving) matter by it: In particular its fourth component, the energy, conserves in any process and with some caution we can take the energy as a variable measuring the quantity of (moving) matter. For instance in the process of annihilation of the pair electron-positron the matter quantitatively characterized by the energy is conserved. The energy of the electron-positron pair is transformed in the energy of the photons ($E_{pe} = E_{ph}$). In other words the Einstein's relation $\Delta E = c^2 \Delta m$ does not express the transformation of the mass in energy, but an equality between energies.

There is here a danger of a misunderstanding. In our knowledge until now it was considered that the energy is a measure of the movement; and our above given assertion seem to justify the conservation of the movement. This is not the case. We assert that the energy-momentum four-vector measures the (moving) matter. The possibility of splitting the matter and the movement is characteristic for the Newtonian mechanics, that contains implicitly some elements of metaphysics.

We think that it is useless to look for a measure of the matter and for a different one for the movement as they can not be sited. The relativistic physics shows us that we can speak only of the unique measure of the dialectic unity of the matter and the movement. It is also obvious that our thesis is opposite to the Ostwald's energetism. The energetists consider that the energy is the measure of the movement and they interpret the conservation of the energy as equivalent to the conservation of the movement. As we have shown the energy could be considered as one of the variables which is a measure of the moving matter. We consider therefore that our answer is satisfactory and does not suffer of any logical disease. At the same time our answer is in full agreement with the dialectic materialism. We require only to „sacrifice" the metaphysic conception, characteristic to the Newtonian mechanics in which the movement and the matter could be splited.

With respect to the relation (8) we think that the proportionality between the speed and the momentum does not imply that the mass is changing its value as a function of the velocity. We say only that for a particle which is moving the speed is no more a characteristic of its movement. The energy-momentum four-vector and in particular its first three components are only the correct measure of the movement.

Received October 12, 1965

REFERENCES

1. L. D. Landau, E. M. Lifşiţ, *Teoria cîmpului*, Ed. tehnică, 1963.
2. M. Born, *Einstein's Theory of Relativity*, Dover, 1962.
3. C. D. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, 1964.

UNELE OBSERVAŢII REFERITOARE LA PROBLEMA RELAŢIEI DINTRE MASĂ ŞI ENERGIE

(Rezumat)

Autorul arată că relaţia dintre masă şi energie nu poate fi interpretată corect decît în cadrul teoriei speciale a relativităţii, considerînd cuadrivectorul energie ca o măsură a materiei în mişcare.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОПРОСА СООТНОШЕНИЯ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

(Резюме)

Автор показывает, что соотношение массы и энергии можно правильно интерпретировать лишь в рамках специальной теории относительности, рассматривая квадривектор энергии как меру движения материи.

PROBLEMA INVERSĂ A MIȘCĂRII RELATIVISTE A PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

de

IOAN STAN și ALEXANDRU TÓTH

În ultimii ani se discută din ce în ce mai mult problema posibilităților reale ale călătoriilor interstelare. Considerente de ordin practic conduc la concluzia că această problemă se va putea rezolva numai cu ajutorul unor rachete cosmice ce se vor deplasa cu viteze relativiste. Aceasta face ca ecuațiile de bază ale mișcării rachetelor să fie modificate și anume trebuie să fie deduse pe baza teoriei relativității.

În această lucrare ne ocupăm de problema inversă a mișcării relativiste a unui punct de masă variabilă în lipsa unor forțe exterioare.

Vom nota cu $OXYZ$ un sistem de axe de coordonate rectangulare fixe față de care se deplasează punctul material de masă m cu viteza

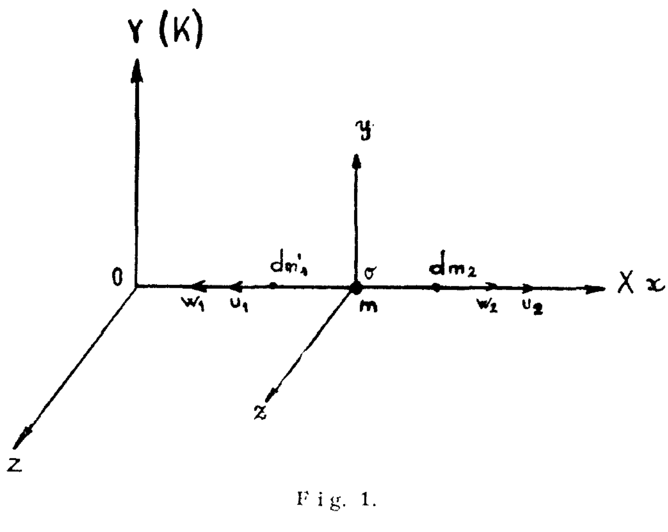


Fig. 1.

v în lungul axei OX. Cu originea în acest punct considerăm un al doilea sistem de coordonate $oxyz$ mobil, cu axele paralele cu sistemul fix, direcţia axei ox coincizînd cu cea a axei OX.

Considerăm cazul general şi anume al mişcării punctului material sub acţiunea simultană a două procese, de captare şi detaşare a unor mase elementare. Notăm prin $-dm_1 (dm_1 > 0)$ masa particulei detaşate în intervalul de timp dt ce se deplasează cu viteza absolută u_1 şi cea relativă w_1. Analog notăm prin dm_2 masa captată în acelaşi interval de timp ce se deplasează cu viteza u_2 respectiv w_2.

Aplicînd teorema conservării impulsului relativist faţă de sistemul fix, obţinem [1, 2]

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{u_2 dm_2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c_2}}}=\frac{(m+dm_1+dm_2)(v+dv)}{\sqrt{1-\frac{(v+dv)^2}{c_2}}}-\frac{u_1 dm_1'}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} \tag{1}$$

unde avem relaţia

$$dm_1' = dm_1 \sqrt{1-\frac{w_1^2}{c^2}} \tag{2}$$

Notînd prin

$$dm = dm_1 + dm_2 \tag{3}$$

variaţia totală a masei punctului considerat, obţinem [1, 2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{u_2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}\frac{dm_2}{dt}+\frac{u_1\sqrt{1-\frac{w_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_1}{c^2}}}\cdot\frac{dm_1}{dt} \tag{4}$$

care este ecuaţia lui Mescerski în cazul relativist, în lipsa forţelor exterioare. Din această ecuaţie, în anumite ipoteze simplificatoare, se obţin ecuaţiile de mişcare clasice şi relativiste în diferite cazuri. Presupunînd că variaţia instantanee a masei captate se găseşte într-un anumit raport cu variaţia instantanee a masei emise

$$\left|\frac{dm_1}{dt}\right| = \lambda \left|\frac{dm_2}{dt}\right|$$

de unde

$$-dm_1 = \lambda dm_2 \tag{5}$$

sau ţinînd cont de (3) avem

$$dm_1 = \frac{\lambda}{\lambda-1} dm$$

$$dm_2 = -\frac{1}{\lambda-1} dm \tag{6}$$

Se observă că pentru $\lambda \to \infty$ avem numai emisie, iar pentru $\lambda = 0$ numai captare, iar dacă $\lambda = 1$ masa captată este egală cu cea emisă. Introducînd valorile lui dm_1 și dm_2 din (6) în (4) obținem ecuația

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot\frac{u_1\sqrt{1-\frac{w_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} - \frac{1}{\lambda-1}\,\frac{u^2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}\right)\frac{dm}{dt} \tag{7}$$

Utilizînd formulele compunerii vitezelor relativiste [3]

$$u_1 = \frac{v-w_1}{1-\frac{vw_1}{c^2}},\quad u_2 = \frac{v+w_2}{1+\frac{uw_2}{c^2}} \tag{8}$$

putem exprima (7) sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\,\frac{v-w_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{\lambda-1}\,\frac{v+w_2}{\sqrt{1-\frac{w_2^2}{c^2}}}\right)\frac{dm}{dt} \tag{9}$$

care este ecuația de mișcare exprimată în funcție de parametrul λ, viteza absolută v a punctului și vitezele relative w_1 și w_2.

Ecuația de mai sus descrie mișcarea relativistă a unui punct de masă variabilă cînd se cunoaște modul în care variază masa lui. Problema inversă constă în determinarea legii de variație a masei cînd se cunosc forțele ce acționează asupra punctului și ecuația de mișcare [4].

Fie

$$m = m_0 \cdot F(t) \tag{10}$$

unde m_0 este masa punctului în momentul inițial t_0 iar $F(t)$ este o funcție care determină legea după care variază masa și care din condiția că la momentul inițial $t = t_0$, $m = m_0$ satisface relația $F(t_0) = 1$. Înlocuind această valoare a masei în ecuația (9) obținem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Fv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\,\frac{v-w_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{\lambda-1}\,\frac{v+w_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w_2^2}{c^2}}}\right)\frac{dF}{dt} \tag{11}$$

sau efectuînd derivarea

$$\begin{aligned} F\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dF}{dt} = \Bigg(&\frac{\lambda}{\lambda-1}\,\frac{v-w_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \\ &- \frac{1}{\lambda-1}\,\frac{v+w_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w_2^2}{c^2}}}\Bigg)\frac{dF}{dt}\end{aligned} \tag{12}$$

Observînd că [5]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{a}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{13}$$

unde a este accelerația punctului în sistemul fix, legată de accelerația din sistemul mobil a' prin relația

$$a'=\frac{a}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{14}$$

obținem final

$$-\frac{dF}{F}=\frac{a}{pv+q}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,dt. \tag{15}$$

unde am introdus notația

$$p=\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w_2^2}{c^2}}}-1\right) \tag{16}$$

$$q=\frac{1}{\lambda-1}\left(\lambda w_1+\frac{w_2}{\sqrt{1-\frac{w_2^2}{c^2}}}\right)$$

Integrînd obținem

$$F(t)=e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a}{pv+q}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{17}$$

sau din (10)

$$m(t)=m_0\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a}{pv+q}\,\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \tag{18}$$

formulă ce dă expresia generală a variației masei în cazul emisiei și captației simultane.

Din relația de mai sus se pot obține diferite cazuri particulare atît clasice cît și relativiste. În cele ce urmează vom studia unele din ele.

Vom presupune că accelerația în sistemul mobil este constantă $a' = a_0$. Relația dintre viteză și accelerație este în acest caz, considerînd $t_0 = 0$ [3]

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = a_0 t \tag{19}$$

de unde obținem

$$v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}} \tag{20}$$

Ținînd cont de (20) și (14) relația (18) devine

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{pt + \frac{q}{a_0}\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}\right) \tag{21}$$

relație ce exprimă variația masei în cazul mișcării cu accelerație constantă în sistemul mobil. Să presupunem că există numai procesul de detașare $\lambda \to \infty$, viteza relativă a maselor detașate $w_1 = w$ fiind constantă, $u_2 = 0$ iar din (16) $q = w$. Presupunînd cazul nerelativist $\frac{a_0 t}{c} \ll 1$ obținem

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{a_0}{w} t} \tag{22}$$

relație bine cunoscută din mecanica punctului de masă variabilă [4].

În cazul mișcării relativiste $v \approx c$, în aceleași ipoteze ca și mai sus, obținem prin integrarea ecuației (21)

$$m(t) = m_0 \left(\frac{a_0 t}{c} + \sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}\right)^{-\frac{c}{w}} \tag{23}$$

relație ce dă legea de variație temporală a masei punctului în cazul mișcării relativiste.

Pentru rachete fotonice $w = c$ avem

$$m(t) = m_0 \left(\frac{a_0 t}{c} + \sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}\right)^{-1} \tag{24}$$

care pentru $\frac{a_0 t}{c} < 1$ ne dă

$$m(t) = m_0 \left(1 - \frac{a_0 t}{c}\right) \tag{25}$$

Observăm că am obținut o lege de variație liniară a masei.

Relaţiile deduse mai sus se referă la legea de variaţie a masei raportată faţă de sistemul fix. Vom deduce legea de variaţie a masei faţă de sistemul mobil introducînd relaţia

$$m(t') = m_0 f(t) \tag{26}$$

unde t' este timpul măsurat în sistemul mobil legat de timpul măsurat în sistemul fix t prin relaţia

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{27}$$

Înlocuind valoarea lui m din (26) în (9) şi ţinînd cont de (14) şi (27) avem

$$-\frac{df}{f} = \frac{a'}{pv + q}\, dt' \tag{28}$$

care prin integrare ne dă

$$m(t') = m_0 \exp\left(-\int_{t'_0}^{t'} \frac{a'}{pv + q}\, dt'\right) \tag{29}$$

relaţie ce exprimă variaţia masei în raport cu sistemul mobil.

Pentru cazul nerelativist al unei mişcări cu acceleraţie constantă $a' = a_0$ în care presupunem că avem numai un proces de detaşare cu viteză relativă constantă $w_1 = w = \text{const.}$, obţinem

$$m(t') = m_0 e^{-\frac{a_0}{w} t'} \tag{30}$$

expresie analogă cu cea dedusă mai sus.

Intrat în redacţie la 12 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. I. Stan, A. Tóth, Fizikai Szemle, **2**, 1965, p. 42–46.
2. I. Stan, A. Toth, Rev. de fiz. şi chimie (seria A), **3**, 1965, p. 99–109.
3. L. D. Landau, E. Lifşiţ, *Teoria cîmpului*, Bucureşti, 1963.
4. Z. Gábos, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele mecanicii*, Bucureşti, 1962.
5. J. McConnel, *Quantum Particle Dynamics*, Amsterdam, 1960.

ОБРАТНАЯ ПРОБЛЕМА РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

(Резюме)

Авторы изучают обратную проблему движения релятивистской точки переменной массы. Исходя из случая одновременной кооптации и отделения элементарных масс, они выводят общий закон изменения массы как по отношению к неизменяющейся, так и подвижной системе. В дальнейшем вычисляются частные случаи, классические и релятивистские.

THE REVERSE PROBLEM OF THE RELATIVIST MOVEMENT IN THE CASE OF VARIABLE MASS POINT

(Summary)

The authors investigate the reverse problem of the movement of relativist variable mass point. Starting from the simultaneous co-optation and detaching of some elementary masses, they deduce the general law of the mass variation both as against the fixed system and the mobile one, after which there were calculated some particular, classic and relativist cases.

INFLUENȚA CÎMPULUI MAGNETIC ASUPRA PROPAGĂRII UNDELOR ALFVÉN ÎNTR-UN FLUID CONDUCTOR

de

M. CRISTEA, I. STAN și I. POP

I. Introducere. Într-un fluid conductor care se mișcă într-un cîmp electromagnetic, apar fenomene specifice, principial diferite de cele care se observă în cazul scurgerii hidrodinamice obișnuite. Printre acestea se numără și undele Alfvén. Deosebirea esențială dintre aceste unde și undele sonore, de exemplu, constă în faptul că ele se pot propaga într-un fluid incompresibil și sînt unde transversale, în timp ce undele acustice se propagă sub forma unor variații ale densității, deci numai în fluide compresibile și pot fi numai unde longitudinale.

În această lucrare ne propunem să stabilim influența asupra propagării undelor Alfvén, a unei variații lente în timp a cîmpului magnetic exterior.

II. Ecuațiile de mișcare. Ecuația undei Alfvén și viteza ei de propagare se pot deduce din ecuațiile fundamentale ale magnetohidrodinamicii [1, 2]. Vom scrie aceste ecuații, presupunînd că sînt îndeplinite următoarele condiții :

— fluidul în mișcare nu are o temperatură prea ridicată sau o densitate prea mică (în cazul unui gaz), astfel încît este valabilă aproximația magnetohidrodinamică ;

— fluidul este incompresibil și nevîscos ;

— conductivitatea electrică σ este foarte mare, practic infinită ;

— cîmpul exterior este un cîmp magnetic de intensitate $\vec{H}$.

În aceste condiții, ecuațiile magnetohidrodinamicii au forma : ecuația mișcării :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{c} (\vec{j} \times \vec{H}) \tag{1}$$

ecuația inducției :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\vec{v} \times \vec{H}) \tag{2}$$

ecuaţia de continuitate:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{3}$$

unde ρ, p şi $\vec{v}$ reprezintă densitatea, presiunea şi viteza fluidului, μ permeabilitatea magnetică, $\vec{j}$ densitatea curentului electric.

Presupunem că în fluidul care se găseşte în cîmpul magnetic $\vec{H}_0$ omogen şi constant în timp, apare o perturbaţie infinit mică, sub forma unui cîmp al vitezelor $\vec{v}$, perpendicular pe $\vec{H}_0$.

Conductivitatea electrică a fluidului fiind infinită, liniile de forţă ale cîmpului magnetic sînt antrenate de fluidul în mişcare, astfel încît apare o componentă a cîmpului magnetic paralelă cu direcţia mişcării. Intensitatea cîmpului magnetic se poate scrie sub forma:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \tag{4}$$

unde $\vec{h} = \vec{h}(\vec{v}, t)$ este o perturbaţie infinit mică.

Introducînd această expresie a lui $\vec{H}$ în ecuaţiile (1) — (3) şi ţinînd seamă că $\vec{v}$ şi $\vec{h}$ sînt cantităţi infinit mici, deci produsele lor pot fi neglijate, obţinem ecuaţiile:

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = H_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(p + \frac{\mu \vec{H}_0 \vec{h}}{4\pi}\right) + \frac{\mu}{4\pi} H_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}. \tag{6}$$

Axa Ox s-a luat paralelă cu $\vec{H}_0$, astfel încît $(\vec{H}_0 \nabla) = H_0 \frac{\partial}{\partial x}$.

Soluţiile sistemului de ecuaţii (5) — (6) reprezintă un sistem de unde plane care se propagă de-a lungul axei Ox. Din (3) şi din condiţia

$$div\, \vec{H} = 0$$

rezultă că aceste unde sînt transversale. Luînd vectorul $\vec{h}$ de-a lungul axei Oy şi proiectînd ecuaţiile (5) şi (6) pe axele de coordonate, obţinem

$$h_x = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} \tag{8}$$

$$h_z = 0 \tag{9}$$

$$V_x = 0 \tag{10}$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} H_0 \frac{\partial h_y}{\partial x} \tag{11}$$

$$v_z = 0. \tag{12}$$

S-a presupus de asemenea că presiunea depinde numai de coordonata x, iar vectorul ∇p nu are componente după y şi z.

Derivînd (8) în raport cu timpul şi (11) în raport cu x, găsim

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} - \frac{1}{V_A^2}\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = 0. \tag{13}$$

În mod analog, eliminînd h_y din ecuaţiile (8) şi (11) obţinem

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{1}{V_A^2}\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

unde

$$V_A^2 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho} \tag{15}$$

Ecuaţiile (13) şi (14) arată că perturbaţiile care apar în fluidul conductor se propagă cu viteza constantă V_A, sub forma unor unde plane, de-a lungul cîmpului magnetic exterior $\vec{H}_0$. Acestea sînt undele Alfvén.

Ecuaţiile (13), (14) sînt de forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{V_A^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Aplicînd metoda lui Fourier căutăm o soluţie de forma

$$\varphi(x, t) = X(x)\tau(t) \tag{17}$$

care prin înlocuire în ecuaţia (16) dă

$$X'' + K^2 X = 0 \tag{18}$$

$$\tau'' + K^2 \tau = 0 \tag{19}$$

unde K este o constantă.

Ecuaţia (19) are soluţia

$$\tau = A \cos \omega(t - t_0) \tag{20}$$

unde $\omega = KV_A$ este frecvenţa undei Alfvén, iar A amplitudinea ei.

III. Variaţia adiabatică a cîmpului magnetic $\vec{H}_0$. Vom studia în continuare cazul variaţiei lente (adiabatice) a cîmpului magnetic $\vec{H}_0$, aplicînd în acest scop teoria invarianţilor adiabatici, metodă des utilizată în astfel de probleme [3, 4, 5].

Prin considerarea intensităţii cîmpului magnetic ca funcţie de timp $H_0 = H_0(t)$, din relaţia (15) rezultă că şi viteza undelor Alfvén este o funcţie de timp $V_A = V_A(t)$ şi implicit frecvenţa $\omega = \omega(t)$. Subliniem că nu este necesar să fie cunoscută legea de variaţie a acestor mărimi în timp. Singurele condiţii impuse sînt:

a) variaţia în timp să fie lentă;

şi

b) să aibă loc în mod continuu, fiind satisfăcută condiţia

$$T\frac{dH_0}{dt} << H_0 \tag{21}$$

unde T este perioada undei Alfvén.

Ecuaţia (19) devine în acest caz

$$\tau'' + \omega^2(t)\tau = 0 \tag{22}$$

ecuaţie asemănătoare cu cea a oscilatorului armonic, dar în care frecvenţa este variabilă adiabatică, fapt care atrage după sine rezolvarea ei cu ajutorul metodei invarianţilor adiabatici.

Utilizînd metoda lui H. Geppert [6], vom reduce ecuaţia (22) la un sistem de două ecuaţii de ordinul unu. Introducînd notaţia $x_1 = \tau$ avem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\omega^2 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1. \end{aligned} \tag{23}$$

Considerînd în prima etapă ω constant, soluţiile sistemului (23) sînt

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos\omega(t - t_0) \\ x_2 &= \frac{A}{\omega}\sin\omega(t - t_0) \end{aligned} \tag{23}$$

de unde obţinem imediat

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_1^2 + \omega^2 x_2^2} \\ t - t_0 &= \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_2}{x_1}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

În a doua etapă se consideră A şi ω variabile, invariantul adiabatic fiind dat de ecuaţia

$$\overline{\Psi}\frac{\partial I}{\partial A} + \frac{\partial I}{\partial \omega} = 0 \tag{26}$$

unde

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{T}\int_T \Psi dt \tag{27}$$

iar

$$\Psi = \frac{\partial A}{\partial \omega}.$$

După cîteva calcule se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial I}{\partial \omega} + \frac{A}{2\omega}\frac{\partial I}{\partial A} = 0 \tag{28}$$

care ne dă invariantul adiabatic al problemei considerate de noi,

$$I = A^2 \omega. \tag{29}$$

Dacă se ţine seamă de semnificaţia lui ω şi de faptul că μ, K şi ρ sînt constante, din relaţia (29) se obţine

$$A^2(t) H_0(t) = \text{constant}. \tag{30}$$

Din (30) rezultă că la o variaţie lentă în timp a cîmpului magnetic exterior $\vec{H}_0$, apare şi o variaţie lentă a amplitudinii şi vitezei de propagare a undei Alfvén. Mai precis, la o creştere a intensităţii cîmpului magnetic apare o creştere a vitezei şi o descreştere a amplitudinii undei Alfvén ; între amplitudinea undei şi intensitatea cîmpului magnetic existînd o relaţie bine determinată, dată de (30).

Intrat în redacţie la 4 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. T. G. Cowling, *Magnetohydrodynamics*. New York, 1957.
2. A. G. Kulikovskii, P. A. Liudimov, *Magnitnaia ghidrodinamika*. Moskva, 1962.
3. L. Spitţer, *Fizika polnostiu ionizovannogo gaz*. Moskva, 1965.
4. G. T. Northrop, E. Teller, Phys. Rev. **117**, 1960, 215–225.
5. I. Stan, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 1, 1961, 279–283.
6. H. Geppert, Rend. Accad. Lincei, **8**, 1928, 530–534.

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ АЛЬФЕНОВЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

(Резюме)

Авторы изучают влияние медленного изменения магнитного поля на распространение альфеновых волн в вязкой и несжимаемой жидкости бесконечной проводимости. Показывается, что при медленном изменении во времени магнитного поля появляется медленное изменение амплитуды и скорости распространения альфеновых волн.

INFLUENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA PROPAGATION DES ONDES ALFVÉN DANS UN FLUIDE CONDUCTEUR

(R é s u m é)

Les auteurs étudient dans ce travail l'influence de la variation lente du champ magnétique sur la propagation des ondes Alfvén dans un fluide visqueux et incompressible, de conductivité infinie. Ils montrent que, pour une variation lente du champ magnétique dans le temps, apparaît une variation lente de l'amplitude et de la vitesse de propagation de l'onde Alfvén.

PRODUCȚIA DE ENTROPIE ÎN CAZUL POLARIZĂRII DINAMICE A NUCLEELOR PRIN EFECTUL SOLID

de

FLORIN CONSTANTINESCU și VALENTIN MILITARU

I. Introducere. Folosind diverse probe materiale introduse într-un cîmp magnetic static combinat cu un cîmp de microunde și alegînd în mod adecvat condițiile experienței, putem provoca în acestea o serie de procese de tranziție ale electronilor și nucleelor, care duc în ultima instanță la apariția fenomenelor de polarizare dinamică a nucleelor. Cele mai importante metode de polarizare dinamică a nucleelor sînt metoda efectului Overhauser și metoda efectului solid [1—3].

Ambele efecte de polarizare se caracterizează prin faptul că procesele care au loc, neputînd atinge starea de echilibru termodinamic din cauza constrîngerilor externe exprimate prin cîmpul de microunde, ating totuși o stare staționară sub influența acelorași constrîngeri. Apare în mod firesc problema aplicabilității la aceste procese, considerate din punct de vedere termodinamic, a principiului minimei producții de entropie [4], [5]. Acest principiu se enunță [4] în modul următor: dacă asupra sistemului care evoluează într-un proces ireversibil nu acționează cîmpuri magnetice și relațiile lui Onsager sînt verificate, starea staționară este caracterizată de o producție minimă de entropie în comparație cu celelalte stări ale sistemului compatibile cu forțele termodinamice.

În prezența cîmpurilor magnetice valabilitatea principiului nu este însă întotdeauna asigurată [6], [7], necesitînd o discuție de la caz la caz. Principiul a fost însă verificat în cazul efectului Overhauser [8], precum și în cazul rezonanței electronilor de conductibilitate în metale [9]. De asemenea valabilitatea acestui principiu este discutată cu ajutorul noțiunii de temperatură a spinilor [10], [11].

În această lucrare se studiază cazul efectului solid folosind metoda indicată în [8] și fără a ne referi la noțiunea de temperatură de spin a cărei existență este asigurată numai în cazuri ideale.

II. Ecuațiile pentru efectul solid. 1. *Efectul solid.* În continuare vom face o scurtă expunere a condițiilor de realizare a efectului solid. Efectul solid poate fi indus numai în probe materiale în care agenţii paramagnetici sînt ficşi, spre deosebire de efectul Overhauser care apare în probe cu o mişcare rapidă a purtătorilor paramagnetismului (exemplu electronii de conductibilitate etc.).

Vom asimila proba materială cu două sisteme de spini în interacţiune: — sistemul spinilor electronici $\vec{S}$ şi sistemul spinilor nucleari $\vec{I}$. Pentru simplitate, vom considera spini nucleari cu valoarea $\frac{h}{2}$. (În decursul lucrării cu h este notată constanta lui Plank împărţită la 2π. Cîmpul magnetic static $\vec{H}$ în care se află proba, provoacă despicarea Zeeman atît a nivelelor energetice electronice, cît şi a celor nucleare. De exemplu, din starea fundamentală se obţin cîte două nivele energetice $\pm\mu_e H$ şi $\pm\mu_n H$ unde $\vec{\mu}_e$ şi $\vec{\mu}_n$ sînt momentele magnetice proprii pentru electroni, respectiv nuclee.

Vom nota aceste nivele cu $(+)$ şi $(-)$, cu convenţia că atunci cînd apar notaţii duble primul semn se referă la electroni, iar cel de al doilea la nuclee. Considerăm că în probă se găsesc N spini electronici, respectiv nucleari. Vom nota cu $N_\pm$ populaţiile stărilor energetice electronice, şi cu $n_\pm$ populaţiile stărilor energetice nucleare. În mod firesc, probabliitatea de ocupare a diverselor nivele energetice va fi

$$p_\pm = \frac{N\pm}{N}\,; \qquad \pi_\pm = \frac{n\pm}{N} \tag{1}$$

Aceste probabilităţi sînt supuse condiţiei de normare, care se deduce direct din (1) şi anume

$$p_+ + p_- = 1\,; \quad \pi_+ + \pi_- = 1 \tag{2}$$

Electronii vor putea face tranziţii între stările lor energetice; la fel şi nucleele. Cînd aceste tranziţii au loc datorită cuplajului spin-reţea, vom nota cu W probabilitatea unui proces electronic în unitatea de timp şi cu ω acelaşi lucru pentru nuclee.

Deoarece reţeaua se poate considera ca un rezervor termic aflat la temperatura T, probabilităţile W şi ω sînt supuse relaţiilor:

$$W_{a\to b}e^{-\frac{E_a}{kT}} = W_{b\to a}e^{-\frac{E_b}{kT}} \tag{3}$$

$$\omega_{\alpha\to\beta}e^{-\frac{\epsilon_\alpha}{kT}} = \omega_{\beta\to\alpha}e^{-\frac{\epsilon_\beta}{kT}} \tag{4}$$

unde E_a, E_b sînt nivelele energetice electronice pentru stările a, b iar ϵ_α, ϵ_β acelaşi lucru pentru nuclee.

Mai pot apărea procese de tranziţie datorită prezenţei unui cîmp de microunde de o anumită frecvenţă Ω. În acest caz probabilitatea tranziţiei directe este egală cu probabilitatea tranziţiei inverse, avînd valoarea comună c.

În cazul probelor cu centri paramagnetici ficşi, cuplajul dintre spinii electronici şi cei nucleari este un cuplaj mai general decît cel pur scalar. De aceea :

a) Sînt posibile următoarele tipuri de tranziţii cuplate (primul semn se referă la electroni, al doilea la nuclee) :

$(+, \pm) \rightleftarrows (-, \pm)$ (tranziţii electronice pure)

$(+, -) \rightleftarrows (-, +)$

$(+, +) \rightleftarrows (-, -)$

$(\pm, +) \rightleftarrows (\pm, -)$ (tranziţii nucleare pure)

b) În prezenţa cîmpului de microunde putem presupune că tranziţiile $(+\ -) \rightleftarrows (-\ +)$ sînt induse numai de cîmpul de frecvenţă $\Omega = \omega_s - \omega_I$, iar cele $(+, +) \rightleftarrows (-, -)$ numai de cîmpul cu $\Omega = \omega_s + \omega_I$, cuplajul cu reţeaua în acest caz fiind neglijabil (ω_s, ω_I sînt frecvenţele Larmoor ale electronilor şi nucleelor).

c) Puterea generatorului de microunde se alege în aşa fel încît probabilităţile de relaxare electronică W să fie mult mai mari decît probabilităţile c ale proceselor de tranziţie provocate de cîmpul de microunde, iar acestea din urmă să fie mult mai mari decît probabilităţile relaxării pur nucleare ω.

În aceste condiţii populaţiile electronice ($N_\pm$) rămîn practic neschimbate în timp, la valoarea $(N_\pm)_0$ a echilibrului termic cu reţeaua.

Din ecuaţiile stochastice, care vor fi considerate şi mai jos [1] rezultă că

$$\frac{n_+}{n_-} = \left(\frac{N_+}{N_-}\right)_0 = \exp\left\{-\frac{h\omega_s}{kT}\right\} \quad \text{pentru} \quad \Omega = \omega_s - \omega_I \tag{5}$$

$$\frac{n_+}{n_-} = \left(\frac{N_-}{N_+}\right)_0 = \exp\left\{+\frac{h\omega_s}{kT}\right\} \quad \text{pentru} \quad \Omega = \omega_s + \omega_I. \tag{6}$$

Exponenţialele în (5) şi (6) fiind diferite de unitate, este evidentă apariţia efectului de polarizare a nucleelor care stă la baza efectului solid. În continuare ne vom fixa asupra cazului $\Omega = \omega_s - \omega_I$. Atunci putem propune ca ecuaţii stochastice ale procesului următoarele relaţii :

$$\frac{dp_+}{dt} = p_- W_{-+} - p_+ W_{+-} + p_- \pi_+ c - p_+ \pi_- c \tag{7}$$

$$\frac{d\pi_+}{dt} = \pi_- \omega_{-+} - \pi_+ \omega_{+-} + p_+ \pi_- c - p_- \pi_+ c \tag{8}$$

Avînd în vedere şi relaţia (2) obţinem

$$\frac{dp_-}{dt} = -\frac{dp_+}{dt}\,; \quad \frac{d\pi_-}{dt} = -\frac{d\pi_+}{dt} \tag{9}$$

2. *Producţia de entropie pentru efectul solid.* Viteza totală a producţiei de entropie $\frac{dS}{dt}$ se compune aditiv din viteza producţiei de entropie de către sistemul spinilor nucleari $\frac{dS_n}{dt}$, de către sistemul spinilor electronici $\frac{dS_e}{dt}$ şi producţia de entropie datorită schimbării energiei interne a rezervorului termic $\frac{dS_R}{dt}$. Deoarece radiaţia de microunde este monocromatică, ea nu contribuie la producţia de entropie [3].

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_n}{dt} + \frac{dS_e}{dt} + \frac{dS_R}{dt} \tag{10}$$

Începem cu rezervorul termic (reţeaua). $S_R = \frac{dU}{T}$; dU este variaţia de energie internă a rezervorului, care este egală cu variaţia cu semn schimbat a energiei interne a sistemului de spini. Deci

$$\frac{dS_R}{dt} = -\frac{1}{T}\left(\frac{dU'_n}{dt} + \frac{dU'_e}{dt}\right) \tag{11}$$

unde

$$U_n = N(\pi_+\epsilon_+ + \pi_-\epsilon_-) \ ; \ U_e = N(p_+E_+ + p_-E_-) \tag{12}$$

Accentul la derivarea din (11) indică faptul că la derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (12) omitem din (7) şi (8) partea care conţine probabilitatea c, care nu aduce contribuţii la entropie.

Din fizica statistică ştim că

$$S_e = -Nk(p_+ lnp_+ + p_- lnp_-) \tag{13}$$

$$S_n = -Nk(\pi_+ ln\pi_+ + \pi_- ln\pi_-) \tag{14}$$

Utilizînd relaţiile (11), (12), (13), (14), (7), (8), (3), (4) şi (9) şi înlocuind în (10) obţinem:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} = -Nk\Bigg\{ & W_{+-}\left(ln\frac{p_+}{p_-} + \frac{h\omega_s}{kT}\right)\left(p_- e^{-\frac{h\omega_s}{kT}} - p_+\right) + \\ & + \omega_{+-}\left(ln\frac{\pi_+}{\pi_-} + \frac{h\omega_I}{kT}\right)\left(\pi_- e^{-\frac{h\omega_I}{kT}} - \pi_+\right) + \\ & + c\, ln\frac{p_+\pi_-}{p_-\pi_+}\,(p_-\pi_+ - p_+\pi_-)\Bigg\}\end{aligned} \tag{15}$$

III. Principiul minimei producţii de entropie. 1. *Starea de minim.* Să studiem condiţiile de minim pentru $\frac{dS}{dt}$ dat de (15). Variabilele noastre sînt $p_{\pm}$ şi $\pi_{\pm}$. Ele sînt supuse condiţiilor de legătură (2). De aceea trebuie să introducem doi multiplicatori Lagrange μ şi μ'. Aplicînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange, obţinem ecuaţiile de minim pentru $\frac{dS}{dt}$.

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= Nk\left\{\frac{W_{+-}\left(p_-e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}-p_+\right)+c(p_-\pi_+-p_+\pi_-)}{p_+}+\right.\\
&\qquad\left.+\,W_{+-}\ln\frac{p_-e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}}{p_+}-c\pi_-\ln\frac{p_+\pi_-}{p_-\pi_+}\right\}\\
\mu &= Nk\left\{-\frac{W_{+-}\left(p_-e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}-p_+\right)+c(p_-\pi_+-p_+\pi_-)}{p_-}\right.\\
&\qquad\left.+\,W_{+-}e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}\ln\frac{p_+}{p_-e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}}+c\pi_+\ln\frac{p_+\pi_-}{p_-\pi_+}\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu' &= Nk\left\{\frac{\omega_{+-}\left(\pi_-e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}-\pi_+\right)-c(p_-\pi_+-p_+\pi_-)}{\pi_+}+\right.\\
&\qquad\left.+\,\omega_{+-}\ln\frac{\pi_-e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}}{\pi_+}+cp_-\ln\frac{p_+\pi_-}{p_-\pi_+}\right\}\\
\mu' &= Nk\left\{-\frac{\omega_{+-}\left(\pi_-e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}-\pi_+\right)-c(p_-\pi_+-p_+\pi_-)}{\pi_-}+\right.\\
&\qquad\left.+\,\omega_{+-}e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}\ln\frac{\pi_+}{\pi_-e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}}-cp_+\ln\frac{p_+\pi_-}{p_-\pi_+}\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

2. *Necesitatea şi suficienţa principiului minimei producţii de entropie.* Presupunem că s-a atins starea staţionară a sistemului. Aceasta înseamnă că

$$\frac{dp_{\pm}}{dt}=0\,;\quad \frac{d\pi_{\pm}}{dt}=0 \tag{18}$$

Să arătăm că în aceste condiții, relațiile de minim (16) și (17) sînt satisfăcute identic. În fiecare din relațiile (16) și (17) în partea dreaptă figurează cîte trei termeni. Cu condițiile (18) primul termen din fiecare expresie se anulează. Ceilalți doi termeni rămași se pot aduce la o formă care ne dă tot pe primul din termeni (în aproximația de ordinul I). Prin urmare, în aproximația de ordinul I relațiile (16) și (17) sînt satisfăcute în mod identic pentru $\mu = 0$ și $\mu' = 0$.

Această reducere se face pe baza următoarelor considerente: efectul solid se realizează cînd

$$\frac{\pi_+}{\pi_-} = \frac{p_+}{p_-} = exp\left\{-\frac{h\omega_s}{kT}\right\}$$

de aceea în apropierea efectului avem

$$\frac{p_- e^{-\frac{h\omega_s}{kT}}}{p_+} = 1 + \delta$$

unde δ e un infinit mic de ordinul I. Dar $ln(1 + \delta) \cong \delta$ (în aproximația de ordinul I).

Aceasta e suficient pentru ca relațiile (16) să se reducă la $\mu = 0$ în ambele cazuri.

Pentru relațiile (17) trebuie să introducem o condiție mai severă. Aceasta este condiția considerării stării staționare nu prea departe de echilibru (mică abatere de la starea de echilibru). Pentru echilibrul termodinamic relațiile lui Boltzman ne dau

$$\frac{\pi_+}{\pi_-} = e^{-\frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{kT}} = e^{-\frac{h\omega_I}{kT}} \tag{19}$$

În apropiere de echilibru vom avea

$$\frac{\pi_+}{\pi_- e^{-\frac{h\omega_I}{kT}}} = 1 + \delta_1$$

unde δ_1 e tot un infinit mic de ordinul I. Cu aceste condiții și ecuațiile (17) se reduc la $\mu' \equiv 0$

Observăm că ipoteza micii abateri de la echilibru (19) poate avea loc simultan cu condiția (5) numai în cazul temperaturilor relativ înalte.

Presupunem că sînt realizate condițiile (16) și (17) de staționaritate. Aproximațiile făcute mai sus fac ca și în acest caz ultimii doi termeni din fiecare relație (16) și (17) să se transforme în primul termen. Comparînd cu ecuațiile stochastice (7) și (8) obținem:

$$\left.\begin{aligned} \mu p_{+} &= 2Nk\,\frac{dp_{+}}{dt} \\ \mu p_{-} &= 2Nk\,\frac{dp_{-}}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (16')$$

$$\left.\begin{aligned} \mu'\pi_{+} &= 2Nk\,\frac{d\pi_{+}}{dt} \\ \mu'\pi_{-} &= 2Nk\,\frac{d\pi_{+}}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (17')$$

Prin simple adunări în (16') și (17') ne convingem că $\mu = 0$ și $\mu' = 0$ Atunci tot (16') și (17') ne dau

$$\frac{dp\pm}{dt} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d\pi\pm}{dt} = 0.$$

ceea ce demonstrează suficiența principiului minimei producții de entropie în starea staționară.

3. *Minimul este veritabil.* Minimul lui $\frac{dS}{dt}$ a fost dedus prin anularea variației de ordinul I. Pentru ca minimul să fie veritabil (excluzînd posibilitatea unui punct de inflexiune) e necesar ca variația de ordinul II să păstreze în jurul punctului de minim un semn constant, și anume pozitiv. Calculăm variația a doua $\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)$ pentru abaterile mici $\delta p_{\pm}$, $\delta\pi_{\pm}$ de la starea de echilibru p^0_{+}, p^0_{-}, π^0_{+}, π^0_{-}.

În urma unor calcule elementare obținem:

$$\frac{1}{Nk}\,\delta\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left\{\left[\sqrt{\frac{1}{p^0_{+}}\left(W_{+-} + c\pi^{0}_{-}\right)}\,\delta p_{+} - \sqrt{\frac{1}{p^0_{-}}\left(W_{+-}e^{-\frac{h\omega_s}{kT}} + c\pi^0_{+}\right)}\,\delta\pi_{-}\right]^2 + \right.$$

$$+\left[\sqrt{\frac{1}{\pi^0_{+}}\left(\omega_{+-} + cp^0_{-}\right)}\,\delta\pi_{+} - \sqrt{\frac{1}{\pi^0_{-}}\left(\omega_{+-}e^{-\frac{h\omega_I}{kT}} + cp^0_{+}\right)}\,\delta\pi_{-}\right]^2 - \qquad (20)$$

$$\left. - 8c\,\delta\pi_{-}\,\delta p_{-}\right\}$$

Avînd în vedere condiția expusă la punctul 3°, II, termenul $8c\delta\pi_{-}\delta p_{-}$ este de ordinul trei față de ceilalți, deci se poate neglija. Am reușit deci să punem pe $\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)$ sub formă de sumă de pătrate, ceea ce demonstrează valabilitatea minimului.

IV. *Discuţie fizică.* În starea staţionară expresia $\frac{dS}{dt}$ ia valoarea minimă

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\min} = -Nk\left\{\frac{h\omega_s}{kT}W_{+-}\left(p_-e^{-\frac{h\omega_s}{kT}} - p_+\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{h\omega_I}{kT}\omega_{+-}\left(\pi_-e^{-\frac{h\omega_I}{kT}} - \pi_+\right)\right\} \tag{21}$$

Expresia (21) se obţine din (15) punînd condiţia de staţionaritate $\frac{dp_\pm}{dt} = 0$, $\frac{d\pi_\pm}{dt} = 0$. Ea exprimă producţia de entropie în starea staţionară. Relaţia (21) se reduce uşor la forma:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\min} = Nc\left(\frac{E_+ - E_-}{T} - \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{T}\right)(p_-\pi_+ - p_+\pi_-) \tag{22}$$

Aici putem face următoarea interpretare: entropia este produsă prin transformarea energiei absorbită din cîmpul de microunde în energie termică a reţelei la temperatura T. Termenul $\left(\frac{E_+ - E_-}{T} - \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{T}\right)$ ne dă entropia produsă într-un proces de tranziţie $(+, -) \rightleftarrows (-, +)$. Termenul $Nc(p_-\pi_+ - p_+\pi_-)$ ne dă numărul de astfel de procese ce se produc în unitatea de timp sub acţiunea cîmpului de microunde.

Intrat în redacţie la 10 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Abraham A., *Iadernîi magnetizm*, Moscva, 1963.
2. Ursu I., *Rezonanţa electronică de spin*, Bucureşti, 1965.
3. Overhauser A. W., Phys. Rev. **92**, 411 (1953).
4. Prigogine I., *Étude thermodynamique des phénomènes irreversibles.* Liège, 1947.
5. De Groot S. R., *Thermodinamics of Irreversible Processes*, Amsterdam, 1962.
6. Callen H. B., Phys. Rev., **105**, 360 (1957).
7. Constantinescu F., Dumitru S., Stud. cercet. fizică, **9**, 17, 985 (1965).
8. Klein M. J., Phys. Rev., **98**, 1736 (1955).
9. Constantinescu F., Stud. cercet. fizică, **5**, 17, 467 (1965).
10. Vojta G., *Tagungsbericht Hochfrequenzspektroskopie*, Leipzig, 1960.
11. — Ann. d. Phys., **17**, 13, 342 (1964).

ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЯДЕР ПОСРЕДСТВОМ ТВЕРДОГО ЭФФЕКТА

(Резюме)

Авторы преследуют установить физические условия, в которых термодинамический принцип наименьшего производства энтропии может применяться к стационарному необратимому процессу динамической поляризации ядер посредством твердого эффекта („Solid state effect").

Использованный метод (8) исходит лишь из стохастических уравнений процесса и не использует понятия спиновой температуры (10), (11), действительность которого обеспечена лишь в частных случаях.

Полученный результат показывает, что в стационарном состоянии, недалеко от равновесия, принцип наименьшего производства энтропии действителен в обыкновенных экспериментальных условиях наблюдения твердого эффекта.

LA PRODUCTION D'ENTROPIE DANS LE CAS DE POLARISATION DYNAMIQUE DES NOYAUX PAR L'EFFET SOLIDE

(Résumé)

Les auteurs ont cherché à établir les conditions physiques dans lesquelles le principe thermodynamique de la production minima d'entropie est applicable au processus stationnaire irréversible de la polarisation dynamique des noyaux par l'effet solide („Solid state effect").

La méthode employée (8) part seulement des équations stochastiques du processus et n'utilise pas la notion de température de spin (10), (11), dont la valabilité n'est assurée que pour des cas particuliers.

Le résultat obtenu montre que dans l'état stationnaire, non loin de l'équilibre, le principe du minimum de production d'entropie est valable dans des conditions expérimentales habituelles d'observation de l'effet solide.

UNELE CONSECINȚE ALE CONSERVĂRII MOMENTULUI CINETIC PENTRU INTERACȚIUNILE ÎNTRE PATRU FERMIONI

de

Z. GÁBOS

În lucrare, utilizînd ca bispinori de bază funcțiile proprii ale operatorilor $\vec{\Sigma}^2$, Σ_4, γ_5, se ajunge la unele rezultate privind cuplajul momentelor cinetice în cazul interacțiunilor între patru fermioni. Rezultatele obținute, care sînt valabile în cazul cînd pentru fiecare particulă avem $S = \frac{1}{2}$ și $l = 0$, se aplică apoi la studiul dezintegrării β^- a neutronilor cu spinul orientat.

1°. Dacă la interacțiune participă particulele (sau antiparticule) a $(\bar{a})$, b $(\bar{b})$, c $(\bar{c})$, d $(\bar{d})$, matricea de tranziție $M_{i\to f}$ conține termeni de forma

$$(w_a^+ \gamma_A w_c)\ (w_b^+ \gamma_A' w_d) \tag{1}$$

în care w_a, w_b, w_c, w_d sînt bispinori corespunzători particulelor (sau antiparticulelor), γ_A sînt matricele lui Dirac, iar γ_A' este egal fie cu γ_A, fie cu $\gamma_5\gamma_A$.

De obicei în expresia (1) se înlocuiesc bispinorii lui Darwin, adică funcțiile proprii ale operatorilor $\hat{H}$, $\frac{1}{2|\vec{p}|}(\vec{\Sigma}, \vec{p})$:

$$\begin{aligned} &\hat{H}\,|\,\vec{p}\,;\mathrm{m}_p > = \mathrm{E}\,|\,\vec{p}\,;\ \mathrm{m}_p >, \\ &\frac{1}{2|\vec{p}|}(\vec{\Sigma}\,\vec{\mathrm{p}})\ \ |\,\vec{\mathrm{p}}\,;\ \mathrm{m}_p > \ = \ \mathrm{m}_p|\,\vec{\mathrm{p}}\,;\ \mathrm{m}_p >. \end{aligned} \tag{2}$$

În cazul cînd vrem să scoatem în evidență proprietăți legate de momentul cinetic, trebuie să înlocuim bispinorii cu bispinorii de bază $|\lambda, m>$, care sînt funcții proprii comune ale operatorilor $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}^2$, $\frac{1}{2}\Sigma_3$, $\frac{1}{2}\gamma_5$ [3], [4]:

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}^2|\lambda\, m> = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,|\lambda, m>,$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3|\lambda, m> = m|\lambda, m>, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_5|\lambda, m> = \lambda|\lambda, m>.$$

Pe de altă parte este avantajos să utilizăm coordonatele sferice p, ϑ, φ și să alegem ca matrice de bază pe γ_4, γ_5, $\vec{\Sigma}$ (dintre care numai patru sînt independente).

În continuare vom păstra notațiile $|p, \vartheta, \varphi\, ; m_p>$, $|\lambda, m>$ pentru particule, iar în cazul cînd avem o antiparticulă vom utiliza mărimile barate $\overline{|p, \vartheta, \varphi\, ; m_p>}$, $\overline{|\lambda, m>}$. Desigur (2) și (3) rămîn valabile și pentru antiparticule.

Bispinorii lui Darwin [2], [6], [7] pot fi exprimați cu ajutorul bispinorilor $|\lambda, m>$ în felul următor [4]:

$$|p, \vartheta, \varphi\, ; m_p> = \frac{1}{\sqrt{2}} N_\varepsilon \sum_{\lambda, m} [1+(-1)^{\lambda+m_p} B]\, D_{mm_p}(\varphi, \vartheta, -\varphi)\,|\lambda, m>, \tag{4}$$

$$\overline{|p, \vartheta, \varphi\, ; m_p>} = \frac{1}{\sqrt{2}} N_\varepsilon \sum_{\lambda, m} [B-(-1)^{\lambda-m_p}]\, D_{m_p m}(\varphi, \vartheta, -\varphi)\,\overline{|\lambda, m>} \tag{5}$$

unde

$$N_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0c^2}{2\varepsilon}}, \quad B = \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0c^2}, \quad D_{lk} = e^{-il\varphi}\, d_{lk}(\vartheta)\, e^{ik\varphi},$$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right> = \overline{\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right>} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right> = \overline{\left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right>} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right> = \overline{\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right>} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right> = \overline{\left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right>} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Relațiile (4), (5) sînt valabile pentru orice fermion. Pentru neutrin avem $m_p = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $B = 1$ și pentru antineutrin $m_p = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $B = 1$.

Bispinorii $|\lambda, m>$, $\overline{|\lambda, m>}$ satisfac relațiile

$$<\lambda, m|\lambda', m'> = \overline{<\lambda, m|}\,\overline{|\lambda', m'>} = \delta_{mm'}\, \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{6}$$

$$<\lambda, m|\overline{\lambda', m'>} = \overline{<\lambda, m|}\,\lambda', m'> = \delta_{m-m'}\, \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{7}$$

2°. În continuare considerăm produsul direct al bispionorilor w_a^+ şi w_c. Componentele lui $w_a^+ \times w_c$ se obţine cu ajutorul expresiilor

$$w_a^+ \gamma_A w_c, \tag{8}$$

în care γ_A sînt matricile lui Dirac. Cu ajutorul celor 16 matrice γ_A se obţin cele 16 componente ale produsului direct.

Dacă în expresia (8) utilizăm bispinorii de bază $|\lambda, m>$, resp. $|\overline{\lambda, m>}$, atunci produsul direct ne informează despre cuplajul momentelor cinetice ale particulelor a şi c.

Înainte de a face un astfel de studiu în cazul expresiilor (8) şi (1), să considerăm expresiile analoge

$$s_a^+ \sigma_\mu s_c \tag{9}$$

şi

$$\left(s_a^+ \sigma_\mu s_c\right)\left(s_b^+ \sigma_\mu s_d\right), \tag{10}$$

în care mărimile s sînt spinori şi σ_μ sînt matricele lui Pauli ($\sigma_4 = -i1$).

Sub (10) avem produsul scalar a doi cuadrivectori

$$\begin{aligned} V_\mu^{(1)} V_\mu^{(2)} &= \frac{1}{4}\left(s_a^+ \sigma_\mu s_c\right)\left(s_b^+ \sigma_\mu s_d\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(s_{a1}^* s_{c1} s_{b2}^* s_{d2} + s_{a2}^* s_{c2} s_{b1}^* s_{d1} - s_{a1}^* s_{c2} s_{b2}^* s_{d1} - s_{a2}^* s_{c1} s_{b1}^* s_{d2}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Se observă că (11) poate fi scrisă sub forma

$$V_\mu^{(1)} V_\mu^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(s_a^+ \sigma_{ik} s_c\right)\left(s_b^+ \sigma^{ik} s_d\right), \tag{12}$$

unde

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{21} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{11} = \sigma_{22}, \qquad \sigma^{22} = \sigma_{11}, \qquad \sigma^{12} = -\sigma_{21}, \qquad \sigma^{21} = -\sigma_{12}.$$

Utilizarea expresiei (12) este avantajoasă, dacă avem ca spinori de bază spinorii $|m>$, care sînt funcţii proprii comune ale operatorilor $\frac{1}{2}\vec{\sigma}^2$, $\frac{1}{2}\sigma_3$:

$$\left|\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\overline{-\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\overline{\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De fapt, în acest caz componetele spinorului s au o semnificaţie fizică evidentă. Dacă avem o particulă

$$s = s_1 \left| \frac{1}{2} \right\rangle + s_2 \left| -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

prin urmare s_1 resp. s_2 este funcţia de undă a unei particule pentru care proiecţia spinului pe axa Oz are valoarea $+\frac{1}{2}$ resp. $-\frac{1}{2}$. Dacă avem o antiparticulă

$$s = s_1 \overline{\left| -\frac{1}{2} \right\rangle} + s_2 \overline{\left| \frac{1}{2} \right\rangle},$$

prin urmare s_1 resp. s_2 este funcţia de undă a unei antiparticule pentru care proiecţia spinului pe axa Oz are valoarea $-\frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{2}$.

După cum se vede din expresia (12), matricile σ_{ik} şi σ^{ik} ne dau posibilitatea de a reflecta cuplajul momentului cinetic pentru perechile de particule (a,c) resp. (b,d). (În continuare, pentru a scoate în evidenţă compoziţia unei perechi, vom introduce simbolurile $P-P$, $\overline{P}-\overline{P}$, $P-\overline{P}$, $\overline{P}-P$, în care P simbolizează o particulă, iar $\overline{P}$ o antiparticulă.) În cazul cînd pentru o pereche (a,c) resp. (b,d) numărul cuantic rezultant m este zero, vom spune că avem cuplaj Fermi (sau F), iar dacă numărul cuantic rezultant m are valoarea 1 sau -1, vom spune că avem un cuplaj Gamow-Teller (sau GT).

Dacă considerăm relaţiile

$$|m'\rangle = \eta\sigma_\mu |m\rangle, \quad \overline{|m'\rangle} = \eta\sigma_\mu \overline{|m\rangle}, \text{ unde } |\eta| = 1$$

ajungem la conculuzia că matricele σ_μ se împart în două grupe:

A. σ_3, σ_4; pentru aceste matrice $m' = m$.

B. σ_1, σ_2; pentru aceste matrice $m' = -m$.

Avînd în vedere apoi relaţiile

$$\langle m | m' \rangle = \overline{\langle m | m' \rangle} = \delta_{mm'}, \quad \langle m | \overline{m'} \rangle = \overline{\langle m} | m' \rangle = \delta_{m-m}$$

ajungem la următorul rezultat:

Dacă avem o pereche $P-P$ sau $\overline{P}-\overline{P}$ matricele din grupul A realizează un cuplaj F, iar cele din grupul B realizează un cuplaj GT.

Dacă avem o pereche $P-\overline{P}$ sau $P-\overline{P}$ matricile din grupul A realizează un cuplaj GT, iar cele din grupul B realizează un cuplaj F.

Revenind acum la interacţiunea între patru fermioni -considerînd deci expresia (10)- obţinem următoarele:

Dacă (a,c) şi (b,d) sînt perechi $P-P$ sau $\overline{P}-\overline{P}$, atunci pentru ambele perechi avem numai cuplaj F, sau numai cuplaj GT. Expresia (10) are deci următoarea structură:

$$F \cdot F + GT \cdot GT.$$

Dacă una din perechile (a,c), (b,d) este de tipul $P-P$ sau $\overline{P}-\overline{P}$, iar perechea celalaltă este de tipul $P-\overline{P}$ sau $\overline{P}-P$, atunci pentru (a,c) și (b,d) se realizează cuplaje diferite. Expresia (10) are deci următoarea structură:

$$F\cdot GT + GT\cdot F.$$

3°. Să considerăm acum expresia (1) în care avem bispinori. Rezultatele stabilite în punctul precedent sînt valabile și în acest caz cu unele precizări și completări. Putem să ne convingem de acest fapt făcînd calculele similare cu cele efectuate în punctul 2°.

Deoarece în cazul cînd avem bispinori, pe lîngă m apare și numărul cuantic λ, pentru matricile γ_4 vom avea grupele A și B (analoge cu cele stabilite în punctul 2°), fiecare conținînd două subgrupe. De fapt, avînd în vedere relațiile

$$|\lambda', m'\rangle = \eta\gamma_4|\lambda, m\rangle, \quad |\overline{\lambda', m'}\rangle = \eta\gamma_4|\overline{\lambda, m}\rangle, \text{ unde } |\eta| = 1,$$

ajungem la următoarea grupare a matricilor lui Dirac.

A_1. $1, \gamma_5, \Sigma_3, \gamma_5\Sigma_3$; pentru acest subgrup $\lambda' = \lambda$, $m' = m$.

A_2. $\gamma_4, \gamma_4\gamma_5, \gamma_4\Sigma_3, \gamma_4\gamma_5\Sigma_3$; pentru acest subgrup $\lambda' = -\lambda$, $m' = m$.

B_1. $\Sigma_1, \Sigma_2, \gamma_5\Sigma_1, \gamma_5\Sigma_2$; pentru acest subgrup $\lambda' = \lambda$, $m' = -m$.

B_2. $\gamma_4\Sigma_1, \gamma_4\Sigma_2, \gamma_4\gamma_5\Sigma_1, \gamma_4\gamma_5\Sigma_2$; pentru acest subgrup $\lambda' = -\lambda$, $m' = -m$.

Toate rezultatele stabilite în punctul precedent în legătură cu grupele A și B rămîn valabile.

Ca o completare la aceste rezultate găsim:

Dacă într-o pereche ($P-P$, $\overline{P}-\overline{P}$, $P-\overline{P}$, $\overline{P}-P$) pentru o particulă λ poate avea numai o singură valoare, atunci matricele din subgrupele A_2 și B_2 nu vor apare în expresia matricei de tranziție.

Aceasta este o consecință a faptului că matricea γ_4 are următoarea proprietate:

$$|-\lambda, m\rangle = \eta\gamma_4|\lambda, m\rangle, \quad |\overline{-\lambda, m}\rangle = \eta\gamma_4|\overline{\lambda, m}\rangle, \quad |\eta| = 1.$$

Rezultatele obținute dau posibilitatea de a formula reguli de selecție atunci cînd pentru una din perechile (a,c) (b,d) se realizează un cuplaj pur (numai cuplaj F, sau numai cuplaj GT).

Ca o aplicație a rezultalelor obținute să stabilim unele rezultate privind dezintegrarea neutronilor cu spinul orientat:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

În acest caz $a = p$, $b = n$, $c = e^-$, $\overline{d} = \tilde{\nu}$. Alegem un sistem de referință legat de neutron, cu axa Oz orientată de-a lungul spinului neutronului.

Deoarece

$$\gamma_5 U_{\tilde{\nu}} = U_{\tilde{\nu}},$$

trebuie să considerăm numai matricele din subgrupele A_1 și B_1: 1, γ_5, Σ_3, $\gamma_5\Sigma_3$ resp. Σ_1, Σ_2, $\gamma_5\Sigma_1$, $\gamma_5\Sigma_2$. Aceste matrice se utilizează la formarea vectorului și a pseudovectorului:

$$V_\mu = -w_a^+\gamma_5\Sigma_\mu w_c, \quad A_\mu = w_a^+\Sigma_\mu w_c \quad \text{unde } \Sigma_\mu(\vec{\Sigma}, -i\gamma_5).$$

Prin urmare ajungem la rezultatul că se realizează (în cazul studiat) un cuplaj $V-A$. Matricea de tranziţie poate fi scrisă sub forma [5]:

$$M_{i\to f} = g(w_p^+(\lambda - \gamma_5)\sum_\mu w_n)(w_e^+(1+\varepsilon\gamma_5)w_{\tilde{\nu}})\propto$$

$$\propto (w_p^+ w_n)(w_e^+ w_{\tilde{\nu}}) - \lambda(w_p^+ \vec{\sum} w_n)(w_e^+ \vec{\sum} w_{\tilde{\nu}}).$$

Nucleonii formează o pereche $P-P$, iar leptonii o pereche $P-\overline{P}$, prin urmare expresia matricei de tranziţie poate fi descompusă într-o sumă de două expresii

$$M_{i\to f} = M^{(1)}_{i\to f} + M^{(2)}_{i\to f}$$

dintre care prima, care se obţine punînd $\mu = 3,4$ şi este simbolizată prin $F.\,GT$, corespunde unei tranziţii Fermi, iar a doua, care se obţine punînd $\mu = 1,2$ şi este simbolizată de $GT.F$, corespunde tranziţiei Gamow-Teller.

Intrat în redacţie la 21 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. M. E. Rose, R. K. Osborn, Phys. Rev., 93 1315, 1953.
2. E. Corinaldesi, Nuclear Phys., 7, 305, 1958.
3. H. Mahmoud, Annals of Phys., 7, 429 ,1959.
4. M. Jacob, G. C. Wick, Annals of Phys., 7, 404, 1959.
5. L. B. Okuni, *Slaboe vzaimodeistvia elementarnîh ciastiţ*, Moscova, 1963, p. 117.
6. S. Sveber, *VVedenie v relativistskuiu kvantoviuiu teoriiu polia* (traducere din l. engleză), Moscova, 1964, p. 92.
7. Z. Gábos, O. Gherman, Studia Univ. Babeş—Bolyai, seria Math.—Phys., fasc. 2, p. 83, 1964.

НЕКОТОРЫЕ ПОСЛЕДСТВИЯ СОХРАНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧЕТЫРЕХ ФЕРМИОНОВ

(Резюме)

Используя в качестве основных биспиноров общие собственные функции операторов $\vec{\sum}^2$, $\sum_3$, γ_5, автор получил некоторые результаты относительно связи кинетических моментов в случае взаимодействий четырех фермионов. Полученные результаты применяются к исследованию β^- распада нейтронов с направленным спином.

SOME CONSEQUENCES OF THE KINETIC MOMENT CONSERVATION FOR THE INTERACTION BETWEEN FOUR FERMIONS

(Summary)

Using as basic bispinors, the proper functions, common to the operators $\vec{\sum}^2$, $\sum_3$, γ_5 the author comes to some results regarding the coupling of kinetic moments in the case of the interactions between four fermions. The obtained results are applied to the study of β^- desintegration of the neutrons with the spin directed.

DESPRE MOMENTUL CINETIC AL CÎMPURILOR

de

E. MAGYARI, J. LAUFER, E. TRIF, D. STĂNILĂ

1. Introducere. Grupurile de transformări ale coordonatelor $x_\mu, (\mu = \overline{1,4})$ care lasă invariantă acţiunea

$$S = \frac{1}{ic} \int L\,(\Psi_k(x),\, \partial_\mu \Psi_k(x))\, d^4x,\ (k = 1,2,\ldots)$$

corespunzătoare sistemului (cîmpului) închis considerat, în cazul dat se numesc grupuri de simetrie. Un rol de seamă dintre aceste grupuri îl au grupurile de simetrie continue caracterizate printr-un număr finit de parametri, întrucît conform teoremei lui Noether [1]–[5] ele induc un număr egal de legi de conservare cu numărul parametrilor lor independenţi. Dacă grupul de simetrie al transformărilor infinitezimale

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$$

depinde de n parametri infinitezimali $\delta\alpha_j, (j = \overline{1,n})$ astfel că

$$\delta x_\mu = X_{\mu j}\,(x)\,\delta\alpha_j, \tag{1}$$

şi implică transformarea

$$\Psi_k(x) \to \Psi'_k(x') = \Psi_k\,(x) + \delta\Psi_k$$

a funcţiilor de cîmp cu legea transformării de forma

$$\delta\Psi_k = \Phi_{kj}\,\delta\alpha_j, \tag{2}$$

atunci cele n constante de mişcare, existenţa cărora este afirmată de teorema lui Noether, vor fi

$$K_j = \frac{1}{ic} \int \Theta_4^{(j)} d^3\vec{x}, \quad (j = \overline{1,\ n})$$

unde

$$\Theta_{\mu}^{(j)} = \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \Psi_{k}} (\Phi_{kj} - X_{\nu i} \partial_{\nu} \Psi_{k}) + L X_{\mu j} \tag{3}$$

$$\partial_{\mu} \Theta_{\mu}^{(j)} = 0. \tag{4}$$

În cele ce urmează vom studia grupul de simetrie a rotațiilor cvadridimensionale și legile de conservare asociate.

2. Momentul cinetic și teorema centrului de energie. Principiul relativității einsteiniene cere ca legile naturii să fie invariante față de grupul rotațiilor cvadridimensionale

$$x_{\mu} \to x'_{\mu} = a_{\nu\mu} x_{\nu},$$

cerință care sub aspect geometric exprimă izotropia universului. Pentru calcularea constantelor de mișcare asociate acestei simetrii fundamentale, considerăm grupul rotațiilor infinitezimale

$$x_{\mu} \to x'_{\mu} = x_{\mu} + \varepsilon_{\nu\mu} x_{\nu}, \quad |\varepsilon_{\nu\mu}| << 1. \tag{5}$$

Parametrii acestor transformări vor fi cele șase componente independente ale cvadritensorului antisimetric $\varepsilon_{\nu\mu}$. Comparînd relația (5) cu (1), după calcule simple găsim că

$$X_{\mu, \nu\lambda}(x) = x_{\nu} \delta_{\lambda\mu} - x_{\lambda} \delta_{\nu\mu}. \tag{6}$$

Pe baza acestor considerente, din relația (2) rezultă

$$\delta \Psi_{k} = \Phi_{k, \nu\lambda} \varepsilon_{\nu\lambda}, \quad \nu < \lambda \tag{7}$$

unde

$$\Phi_{k, \nu\lambda} = -\Phi_{k, \lambda\nu}.$$

Avînd în vedere expresia de definiție a tensorului energie-impuls canonic [6],

$$T_{\nu\mu} = L \delta_{\nu\mu} - \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \Psi_{k}} \partial_{\nu} \Psi_{k}, \tag{8}$$

din relațiile (3), (4), (6) și (7) obținem

$$\Theta_{\mu, \nu\lambda} = x_{\nu} T_{\lambda\mu} - x_{\lambda} T_{\nu\mu} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \Psi_{k}} \Phi_{k, \nu\lambda},$$

$$\partial_{\mu} \Theta_{\mu, \nu\lambda} = 0. \tag{9}$$

Constantele de mișcare asociate

$$M_{\nu\lambda} = \frac{1}{ic} \int \Theta_{4, \nu\lambda} d^3\vec{x}, \tag{10}$$

alcătuiesc componentele unui cvadritensor antisimetric de ordinul doi, numit cvadritensorul moment cinetic total al cîmpului.
El se compune din cvadritensorul moment cinetic orbital total

$$M_{\nu\lambda}^{(0)} = \frac{1}{ic}\int (x_\nu T_{\lambda 4} - x_\lambda T_{\nu 4}) d^3\vec{x}$$

și din cvadritensorul unui moment cinetic intrinsec, numit cvadritensorul de spin al cîmpului

$$M_{\nu\lambda}^{(s)} = \frac{1}{ic}\int \frac{\partial L}{\partial \partial_4 \Psi_k} \Phi_{k,\,\nu\lambda} d^3\vec{x}.$$

Deoarece tensorul energiei-impuls canonic al cîmpului nu este univoc determinat de relația $\partial_\mu T_{\nu\mu} = 0$, i se poate adăuga — fără să modificăm prin aceasta energia și impulsul total al cîmpului - un termen de forma $\partial_\lambda f_{\nu,\,\mu\lambda}$, unde $f_{\nu,\,\mu\lambda} = - f_{\nu,\,\lambda\mu}$.
Alegînd [7],

$$f_{\nu,\,\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \Psi_k}\Phi_{k,\,\nu\lambda} - \frac{\partial L}{\partial \partial_\lambda \Psi_k}\Phi_{k,\,\nu\mu} - \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \Psi_k}\Phi_{k,\,\lambda\mu}\right), \tag{11}$$

tensorul

$$\mathcal{T}_{\nu\mu} = T_{\nu\mu} + \partial_\lambda f_{\nu,\,\mu\lambda}, \tag{12}$$

va poseda remarcabila proprietate de simetrie $\mathcal{T}_{\nu\mu} = \mathcal{T}_{\mu\nu}$, iar cvadritensorul moment cinetic total al cîmpului, se va exprima prin formula

$$M_{\nu\lambda} = \frac{1}{ic}\int (x_\nu \mathcal{T}_{\lambda 4} - x_\lambda \mathcal{T}_{\nu 4}) d^3\vec{x}. \tag{13}$$

Prin urmare, din cele constante de mișcare induse de grupul de simetrie a rotațiilor cvadridimensionale, trei sînt egale cu componentele spațiale independente M_{23}, M_{31}, M_{12} ale cvadritensorului antisimetric $M_{\nu\lambda}$, care la rîndul lor coincid cu componentele M_1, M_2, M_3 ale vectorului moment cinetic total al cîmpului

$$M_j = \frac{1}{ic}\int \varepsilon_{jlm} x_l T_{m4} d^3\vec{x} + \frac{1}{ic}\int \frac{\partial L}{\partial \partial_4 \Psi_k}\Phi_{k,j} d^3\vec{x}, \qquad (j, l, m = \overline{1,3} \quad k = 1, 2, \ldots)$$

unde $\Phi_{k,\,1} \equiv \Phi_{k,\,23}$, $\Phi_{k,\,2} \equiv \Phi_{k,\,31}$, $\Phi_{k,\,3} \equiv \Phi_{k,\,12}$, ε_{jlm}, fiind simbolul lui Levi Cività. Celelalte trei constante de mișcare vor fi egale, evident, cu restul de trei componente independente (temporale) M_{14}, M_{24}, M_{34} ale tensorului $M_{\nu\lambda}$. Din conservarea acestor componente rezultă că centrul de energie a cîmpului, de coordonate

$$x_j^c = \frac{\int x_j \mathcal{T}_{44} d^3\vec{x}}{\int \mathcal{T}_{44} d^3\vec{x}}, \tag{14}$$

se mişcă după legea

$$x_j^c = \frac{c^2 P_j}{W} t - \frac{ic}{W} M_{j4} = V_j^c \cdot t + \text{const.} \tag{15}$$

Impulsul total

$$P_j = \frac{1}{ic} \int \mathcal{T}_{j4} d^3\vec{x}$$

şi energia totală a cîmpului

$$W = - \int \mathcal{T}_{44} d^3\vec{x},$$

fiind constante ale mişcării, rezultă că centrul de energie a cîmpului se mişcă cu viteză uniformă (teorema centrului de energie).

În continuare vom încerca să dăm o interpretare fizică componentelor cvadritensorului $\Theta_{\mu,\nu\lambda}$. Din relaţiile (10) rezultă că mărimile $\frac{1}{ic}\Theta_{4,\nu\lambda}$, care formează componentele unui cvadritensor antisimetric de ordinul doi, au semnificaţia de densităţi ale componentelor corespunzătoare ale cvadritensorului moment cinetic total al cîmpului.

Pe de altă parte din ecuaţia (9) avem

$$\partial_k \Theta_{k,\nu\lambda} + \frac{1}{ic} \frac{\partial \Theta_{4,\nu\lambda}}{\partial t} = 0. \tag{16}$$

Aplicînd teorema lui Gauss, pentru un volum Ω al cîmpului, mărginit de suprafaţa închisă Σ, putem scrie în continuare

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{ic}\int_{(\Omega)} \Theta_{4,\nu\lambda} d^3\vec{x}\right) = - \oint_{(\Sigma)} \Theta_{k,\nu\lambda} df_k.$$

De aici rezultă că componentele celor trei cvadritensori $\Theta_{k,\nu\lambda}$, $(k = \overline{1,3})$ reprezintă componentele corespunzătoare ale celor şase vectori, avînd semnificaţia de densităţi ale fluxurilor componentelor respective ale cvadritensorului moment cinetic total al cîmpului din volumul Ω.

Pentru a vedea mai îndeaproape semnificaţiile acestor şase vectori, descompunem relaţiile (16) în

$$\partial_k \Theta_{k,jl} + \frac{1}{ic} \frac{\partial \Theta_{4,jl}}{\partial t} = 0 \quad \text{şi} \quad \partial_k \Theta_{k,j4} + \frac{1}{ic} \frac{\partial \Theta_{4,j4}}{\partial t} = 0.$$

întrucît

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{ic}\int_{(\Omega)} \Theta_{4,jl} d^3\vec{x}\right) = - \oint_{(\Sigma)} \Theta_{k,jl} \cdot df_k$$

rezultă că componentele tensorilor tridimensionali $\Theta_{k,jl}$, $(k=1,2,3)$ reprezintă componentele corespunzătoare ale celor trei vectori, avînd semnificaţia de densități ale fluxurilor componentelor respective ale vectorului moment cinetic total al cîmpului din volumul Ω, elementele tensorului $\frac{1}{ic}\Theta_{4,jl}$ fiind densitățile acestor componente. În fine, avînd în vedere relațiile (15) și ecuația

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{ic}\int\limits_{(\Omega)}\Theta_{4,j4}d^3\vec{x}\right) = -\oint\limits_{(\Sigma)}\Theta_{k,j4}df_k$$

rezultă că mărimile $\frac{1}{ic}\Theta_{4,j4}$ care reprezintă densitățile componentelor M_{j4}, precum și componentele tensorului tridimensional $\Theta_{k,j4}$, care reprezintă componentele celor trei vectori avînd semnificația de densități de flux ale componentelor M_{j4}, furnizează informații despre mișcarea centrului de energie a cîmpului din volumul Ω. Dacă volumul Ω nu coincide cu întregul spațiu, sau cu o incintă avînd pereți perfect reflectători, atunci centrul de energie va executa o mișcare mai complicată și, în consecință, teorema centrului de energie își pierde valabilitatea.

3. Momentul cinetic al cîmpului electromagnetic. Drept aplicație a rezultatelor obținute, considerăm cazul cîmpului electromagnetic liber existent într-o regiune finită a spațiului (încintă de volum V cu pereți perfect reflectători). Variabilele dinamice ale acestui cîmp se pot deduce din densitatea de lagrangean

$$L = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}^2 \tag{17}$$

unde $F_{\mu\nu}$ este tensorul cîmp electromagnetic, de componente

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece cîmpul electromagnetic este un cîmp vectorial, coordonatele sale generalizate A_μ (componentele cvadripotențialului) se transformă la rotațiile infinitezimale [5] ca și componentele cuadrivectorului de poziție. Din acest motiv

$$\Phi_{\mu,\nu\lambda} = A_\nu\delta_{\lambda\mu} - A_\lambda\delta_{\nu\mu} \tag{18}$$

Avînd în vedere relaţiile (8), (11), (12), (17) şi (18), se obţine pentru componentele tensorului energie-impuls simetric al cîmpului electromagnetic următoarele expresii

$$\mathcal{T}_{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\nu\rho}F_{\mu\rho} - \frac{1}{4}F^2_{\alpha\beta}\delta_{\nu\mu}\right) \tag{19}$$

Astfel pentru energia totală şi impulsul total al cîmpului găsim

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})d^3\vec{x} \quad \text{şi} \quad \vec{P} = \frac{1}{c^2}\int\limits_{(V)}(\vec{E}\times\vec{H})d^3\vec{x}$$

În posesia acestor formule, pe baza relaţiilor (13)—(15), putem calcula vectorul moment cinetic total, vectorul de poziţie a centrului de energie, precum şi viteza de mişcare a acestuia. Rezultatele sînt

$$\vec{M} = \frac{1}{c^2}\int\limits_{(V)}[\vec{x}\times(\vec{E}\times\vec{H})]d^3\vec{x}$$

$$\vec{x}_c = \frac{\int\limits_{(V)}\vec{x}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})d^3\vec{x}}{\int\limits_{(V)}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})d^3\vec{x}}, \quad \vec{V}_c = 2\frac{\int\limits_{(V)}(\vec{E}\times\vec{H})d^3\vec{x}}{\int\limits_{(V)}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})d^3\vec{x}}$$

*

Autorii ţin să mulţumească profesorilor O. Gherman şi Z. Gábos pentru citirea şi comentarea critică a manuscrisului lucrării.

Intrat în redacţie la martie 1966

BIBLIOGRAFIE

[1] E. Noether, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen (1918), p. 235.
[2] P. Roman, *Theory of Elementary Particles*, Cap. IV, § I, 2. Amsterdam, 1960.
[3] E. Corinaldesi, F. Strocchi, *Relativistic Wave Mechanics*. Cap. II, § 2, 3, 4, Amsterdam, 1963.
[4] N. Bogoliubov, D. V. Şirkov, *Vvedenie v teoriu kvantovannîh polei*, Cap. I, § 2, 4, 5 Moscova, 1959,
[5] C. A. Lopez, Nuovo Cimento, **40**, 19 (1965).
[6] L. D. Landau, E. M. Lifşiţ, *Teoria cîmpului*, Cap. IV, § 32 Bucureşti, 1963.
[7] A. I. Ahiezer, V. B. Beresteţki, *Kvantovaia elektrodinamika*, Cap. III, § 20, Moscova, 1959.

О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ ПОЛЕЙ

(Резюме)

На основе теоремы Noether изучается кинетический момент классических полей, вообще, и электромагнитного поля, в частности. Дается физическая интерпретация составляющих квадритензора $\Theta_{\mu,\nu\lambda}$ которые, благодаря уравнениям непрерывности $\partial_\mu\Theta_{\mu,\nu\lambda} = 0$ приводят к сохранению составляющих квадритензора кинетического суммарного момента $M_{\nu\lambda}$ поля.

SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE DES CHAMPS

(Résumé)

Les auteurs de ce travail étudient, sur la base du théorème de Noether, le moment cinétique des champs classiques en général et du champ électromagnétique en particulier. Ils donnent une interprétation physique des composantes du quadritenseur $\Theta_{\mu,\nu\lambda}$ qui, à cause des équations de continuité $\partial_\mu\Theta_{\mu,\nu\lambda} = 0$, déterminent la conservation des composantes du quadritenseur du moment cinétique total $M_{\nu\lambda}$ du champ.

CRONICĂ

CONTRIBUŢII LA UNELE PROBLEME TEORETICE ALE INSTABILITĂŢII MAGNETOHIDRODINAMICE A UNEI PLASME CILINDRICE, CU LUAREA ÎN CONSIDERARE A VISCOZITĂŢII, A CONDUCTIVITĂŢII ELECTRICE ŞI A COMPRESIBILITĂŢII (ECUAŢIILE DE DISPERSIE)

Rezumatul tezei prezentate de MIRCEA VASIU
pentru obţinerea titlului de doctor în fizică

Teza se ocupă cu stabilirea *ecuaţiilor de dispersie* pentru anumite modele de plasmă cilindrică. Această problemă este în strînsă legătură cu cercetările ştiinţifice privitoare la aplicaţiile fizicii plasmei în astrofizică şi la obţinerea reacţiilor termonuclere controlate în plasma de laborator.

În plasma respectivă apar anumite tipuri de instabilităţi de tip magnetohidrodinamic, care îndepărtează plasma de la starea de echilibru, datorită unor perturbaţii din interiorul plasmei şi care se presupun de forma

$$\vec{a} = \vec{a}(r)e^{i(m\theta + kz) + \omega^* t}, \quad f = f(r)e^{i(m\theta + kz) + \omega^* t} \tag{1}$$

unde $\vec{a}$ este: fie vectorul viteză $\vec{v}$ al plasmei, fie vectorul cîmp magnetic $\vec{H}$; f este: fie densitatea ρ a plasmei, fie presiunea p a plasmei, fie potenţialul gravitaţional V; $\vec{a}(r)$, $f(r)$ sînt amplitudinile perturbaţiilor corespunzătoare şi care depind de raza vectoare r (se alege ca sistem de coordonate sistemul de coordonate cilindrice: r, θ, z); m este un număr întreg pozitiv, negativ sau zero, k este numărul de undă, ,şi ω^*, pulsaţia perturbaţiei (această mărime este presupusă complexă). În starea de echilibru, plasma se consideră în repaus şi mărimile fizice ce caracterizează plasma se presupun constante. Perturbaţiile sînt suficient de mici pentru a neglija din calcule pătratele şi produsele lor. Studiul instabilităţilor de tip magnetohidrodinamic, ce apar în coloana de plasmă, se face cu ajutorul ecuaţiilor de dispersie în care figurează mărimea ω^* şi care permit stabilirea diverselor criterii ale acestor instabilităţi. Ecuaţiile de dispersie au fost obţinute cu ajutorul metodei „oscilaţiilor normale", metodă bine cunoscută în literatura de specialitate. După ce se scriu ecuaţiile diferenţiale magnetohidrodinamice pentru modelul de plasmă studiat, se analizează starea de echilibru a plasmei şi starea de perturbaţie a acesteia. Admiţînd că perturbaţiile sînt de forma (1) se obţine sistemul de ecuaţii magnetohidrodinamice pentru micile perturbaţii din interiorul plasmei şi respectiv pentru mediul înconjurător (vid sau gaz). Cu ajutorul acestui sistem de ecuaţii diferenţiale se determină perturbaţiile respective. Apoi se scriu condiţiile la limită pe suprafeţele frontieră: plasmă-vid, respectiv plasmă-gaz şi gaz-perete metalic (dacă plasma se consideră situată într-un tub cilindric cu pereţi metalici).

În partea întîia a tezei se obțin ecuațiile de dispersie pentru trei modele de plasmă cilindrică supusă la acțiunea propriului său cîmp gravitațional (plasma se consideră de dimensiuni suficient de mari pentru a se lua în considerare acest cîmp) și a unui cîmp magnetic axial și uniform. Plasma se presupune înconjurată de un mediu vid nelimitat, unde se admite, pentru starea de echilibru, existența unui cîmp magnetic axial și uniform și a unui cîmp magnetic azimutal. Perturbația cîmpului magnetic din vidul înconjurător se presupune că satisface ecuația lui Laplace, ceea ce este în deplin acord cu alte lucrări științifice care s-au ocupat de probleme similare. În toate cazurile analizate s-au neglijat procesele de conductibilitate termică și de transfer de radiație. Astfel, s-au obținut ecuațiile de dispersie pentru: 1. o coloană cilindrică de plasmă, vîscoasă, incompresibilă, cu conductivitate electrică infinită. Ecuația de dispersie este de forma:

$$\omega^{*2} + 2\nu k^2\omega^* \frac{I_1'(r_0)}{I_0(r_0)}\left[1 - \frac{2k\eta}{k^2+\eta^2}\,\frac{I_1(r_0)}{I_1(r_1)}\,\frac{I_1'(r_1)}{I_1'(r_0)}\right] + \frac{k^2-\eta^2}{k^2+\eta^2}\,\frac{kI_1(r_0)}{I_0(r_0)}\left\{4\pi G\rho_{p0}R_0\left[-\frac{1}{2} + K_0(r_0)I_0(r_0)\right] - \frac{\alpha_v\alpha_p kH_0^2}{4\pi\rho_{p0}}\,\frac{K_0(r_0)}{K_1(r_0)}\right\} + \alpha_p^2\nu_{pA}^2 = 0 \tag{2}$$

unde ν este coeficientul de viscozitate a plasmei; $\eta^2 = k^2 + \frac{1}{\omega^*\nu}\left(\omega^{*2} + \alpha_p^2\nu_{pA}^2\right)$; ν_{pA} — frecvența Alfvén a undelor magnetohidrodinamice din plasmă; α_v, α_p — două constante; H_0 — mărimea intensității cîmpului magnetic axial și uniform, ρ_{p0} — densitatea plasmei pentru starea de echilibru; G — constanta gravitațională; K_0, I_0 — funcțiile Bessel de argument imaginar, de ordinul zero; K_1, I_1 — funcțiile Bessel de argument imaginar de ordinul întîi, I_1' — derivata funcției Bessel I_1 în raport cu argumentul său; $r_0 = kR_0$, $r_1 = \eta R_0$, unde R_0 este raza coloanei cilindrice de plasmă. De asemenea, în teză s-au dat și ecuațiile de dispersie pentru încă două modele de plasmă cilindrică și anume: 2. nevîscoasă, incompresibilă, cu conductivitate electrică finită și 3. nevîscoasă, compresibilă, cu conductivitate electrică infinită.

În cazul particular al modelului de plasmă cilindrică nevîscoasă, incompresibilă, cu conductivitate electrică infinită, ecuațiile de dispersie obținute se reduc la ecuația de dispersie cunoscută în literatura de specialitate (stabilită pentru prima oară de S. Chandrasekhar și E. Fermi în anul 1953).

În partea a doua a tezei se stabilesc ecuațiile de dispersie pentru trei modele de plasmă cilindrică, ce este supusă la acțiunea unui cîmp magnetic de anumite forme particulare. Plasma fiind considerată de dimensiuni mici (plasmă de laborator) se neglijează cîmpul gravitațional propriu al plasmei. Coloana cilindrică de plasmă de rază R_0, situată într-un tub cilindric metalic de rază R_1, este înconjurată de un gaz neconductor, ce se găsește supus la acțiunea unui cîmp magnetic de anumite forme particulare. Prezența gazului în jurul plasmei are ca efect micșorarea pierderilor de energie prin radiație și înlăturarea unei instabilități de tip magnetohidrodinamic din interiorul plasmei.

Astfel, s-au obținut ecuațiile de dispersie pentru: 1. o coloană cilindrică de plasmă nevîscoasă, incompresibilă, cu conductivitate electrică infinită, care în starea de echilibru este supusă la acțiunea unui cîmp magnetic uniform și axial, iar gazul ce înconjoară plasma, la acțiunea unui cîmp magnetic azimutal și uniform-axial; 2. o plasmă similară, cu deosebirea că atît plasma, cît și gazul înconjurător sînt supuse la acțiunea unui cîmp magnetic azimutal și a unui cîmp magnetic axial-uniform; 3. o coloană cilindrică de plasmă compresibilă, nevîscoasă, cu conductivitate electrică infinită, care în starea de echilibru se găsește sub influența unui cîmp magnetic similar cu cel de la pct. 1. Pentru cazul analizat la pct. 3 ecuația de dispersie obținută este de forma

$$\alpha_1 \frac{\Omega_1^2}{x_2} F_1(r_4) - \frac{\alpha_2\omega^{*2}}{\eta_1} F_3(l_2, r_5) - k\alpha_3^2 F_2(l_1, r_0) - \alpha_4^2 = 0 \tag{3}$$

unde s-au introdus notațiile

$$\alpha_1 = 4\pi\rho_{p0}\,;\quad \Omega_1^2 = \omega^{*2} + \alpha_p^2 \nu_{pA}^2\,;\quad \chi_2^2 = \frac{\Omega_1^2}{V_{pa}^2 + \alpha_p^2 V_A^2}\left(1 + \frac{k^2 V_{pa}^2}{\Omega_2^2}\right);\quad F_1(r_4) = \frac{I_m(r_4)}{I'_m(r_4)}$$

$$\alpha_2 = 4\pi\rho_{g0}\,;\quad \tau_1^2 = k^2 + \frac{\omega^{*2}}{V_{ga}^2}\,;\quad \alpha_3^2 = H_0^2\left(\alpha_g + \frac{m}{kR_0}\right)^2;\quad \alpha_4^2 = \frac{H_0^2}{R_0} \tag{4}$$

$$r_4 = \chi_2 R_0\,;\ l_2 = \tau_1 R_1\,;\ r_5 = \tau_1 R_0\,;\ l_1 = kR_1\,;\ r_0 = kR_0$$

$$F_3(l_2, r_5) = \frac{K'_m(l_2)I_m(r_5) - I'_m(l_2)K_m(r_5)}{K'_m(l_2)I'_m(r_5) - I'_m(l_2)K'_m(r_5)}\,;\quad F_2(l_1, r_0) = \frac{K'_m(l_1)I'_m(r_0) - I'_m(l_1)K_m(r_0)}{K'_m(l_1)I'_m(r_0) - I'_m(l_1)K'_m(r_0)}$$

$V_A^2 = H_0^2/4\pi\rho_{p0}$ este viteza Alfvén, $V_{pa}^2 = \gamma p_{p0}/\rho_{p0}$ — viteza sunetului în cazul transformărilor adiabate ce au loc in interiorul plasmei; $V_{ga}^2 = \gamma p_{g0}/\rho_{g0}$ — viteza sunetului în cazul transformărilor adiabate ce au loc în interiorul gazului.

În cazul particular al plasmei cilindrice înconjurate de un mediu vid, ecuațiile de dispersie obținute se reduc la ecuația de dispersie cunoscută în literatura de specialitate (stabilită și analizată de M. Kruskal, M. Schwarzschild (1954), V. Safranov (1956), R. Tayler (1957), M. Kruskal, J. Tuck (1958) și de alți cercetători).

Rezolvarea ecuațiilor de dispersie obținute ridică dificultăți de ordin matematic, deoarece mărimea ω^* figurează în ecuațiile respective atît direct, cît și în argumentul unor funcții Bessel.

Problemele teoretice referitoare la instabilitatea plasmei, ridicate de teză, sînt deosebit de importante. Modelele de plasmă analizate în teză au condus la obținerea unor ecuații de dispersie ce generalizează cele cunoscute în literatura de specialitate, fiind prima disertație din țara noastră care se ocupă de probleme de instabilitate magnetohidrodinamică a plasmei cilindrice, în condițiile fizice analizate.

Conducător științific: Prof. dr.—docent Mircea DRĂGANU, Univ. „Babeș-Bolyai" Cluj

Referenți științifici:
1. Acad. prof. Caius IACOB, Universitatea din București.
2. Prof. dr.—docent Victor MARIAN, Univ. „Babeș-Bolyai", Cluj.
3. Aretin CORCIOVEI, cercetător științific, doctor în fizică, Inst. de Fizică Atomică, București.

Ședințe de comunicări. În anul 1965 Facultățile de Matematică-mecanică și Fizică au ținut următoarele ședințe de comunicări:

3 *ianuarie*

I. Ursu, F. Puskás, Studiul efectului Seebeck la sistemul semiconductor $ZnO-Al_2O_3$.

A. Nicula, I. Ursu, Gh. Cristea, RES a ionului V^{4+} în zeoliți de tip x și y.

4 *ianuarie*

D. Barb, E. Weissmann, I. Ursu, Absorbția apei pe $Ni-Cr_2O_3$.

I. Ursu, F. Puskás, Unele proprietăți dielectrice ale oxidului de aluminiu, ceramic.

8 *ianuarie*

G. Călugăreanu, Cîteva probleme deschise din teoria funcțiilor.

I. Gy. Maurer, E. Virág, O observație asupra teoremei lui Cayley.

19 *februarie*
D. Stancu, Determinarea momentelor unor distribuţii discrete.
I. A. Rus, Unele proprietăţi ale soluţiilor ecuaţiilor eliptice de ordinul al doilea.
10 *martie*
I. Ursu, Stadiul cercetărilor din Laboratorul de corp solid Cluj.
O. Gherman, Gh. Steinbrecher, Teoria relativistă a momentelor multipolare.
11 *martie*
R. Grigorovici, Studiul păturilor subţiri la I.F.B.
M. Rozenberg (Univ. Bucureşti), Cercetări în domeniul feritelor la I.F.B.
F. Constantinescu, S. Dumitru, Principiul producţiei minime de entropie în formularea matricei de densitate.
A. Căluşaru (I.F.A. Bucureşti), I. Barbur, I. Ursu, Recoacerea termică a defectelor paramagnetice induse prin iradiere gama în monocristale de sulfat de amoniu.
12 *martie*
G. Călugăreanu, Asupra unor reprezentări a grupurilor fuchsiene.
I. Vincze, M. Vincze, O caracterizare a grupurilor ciclice.
9 *aprilie*
Gh. Pic, Despre nişte teoreme de tip Wielandt.
I. Stan, Generalizarea relativistă a ecuaţiilor Meşcerski.
14 *aprilie*
M. Soutif (Univ. Grenoble), Étude de certaines structures cristallines par la Résonance Magnétique Nucléaire, telles que zéolithe et argile.
15 *mai*
E. Tătaru, Prezentarea disertaţiei, susţinută la Institutul politehnic din Leningrad.
10 *decembrie*
G. Călugăreanu, Asupra grupurilor fuchsiene.
Gh. Chiş, A. Pál, T. Oproiu, Cercetarea atmosferei înalte cu ajutorul sateliţilor artificiali ai Pămîntului.
29 *decembrie*
I. Ursu, Informare generală asupra muncii de cercetare pe anul 1965.
P. Şteţiu, P. Fitori, Prepararea unor materiale active pentru maseri şi laseri.

Sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice tinere (22 mai 1965)
A. Hontău, Despre transformarea proiectivă a unei nomograme cu puncte aliniate avînd două scări cu o parabolă şi una rectilinie.
E. Kolozsi, Despre unele clase de funcţii care intervin în probleme la limită relative la ecuaţii cu derivate parţiale.
I. Mihoc, Determinarea elementelor fotometrice ale variabilei R.V. Comae.
Gr. Moldovan, I. Rîp, Asupra unei inegalităţi din teoria aproximării unei funcţii de două variabile cu polinomul lui Bernstein.
F. Olaru, Evaluarea ordinului de aproximaţie a unei funcţii continue prin polinomul lui Lagrange-Hermite.
T. Oproiu, Asupra determinării elementelor orbitale ale sateliţilor artificiali ai Pămîntului cu ajutorul maşinii electronice DACICC-1.
I. Pop, Asupra soluţiilor automodelate ale ecuaţiilor mişcării fluidelor vîscoase incompresibile.
I. Torsan, Asupra polinoamelor care satisfac unor relaţii de recurenţă.
H. Wiesler, Asupra unor topologii ale spaţiilor liniare.

Participări la manifestări ştiinţifice internaţionale
1. Prof. Gh. Chiş a participat la Conferinţa pentru sateliţii artificiali ai Pămîntului (S.A.P.) de la Riga (27 ianuarie-5 februarie 1965), unde a prezentat comunicarea *Realizarea programului Interobs în România* (în colaborare cu prof. I. Curea de la Univ. Timişoara).
2. Acad. prof. T. Popoviciu şi conf. E. Popoviciu au participat la Consfătuirea asupra metodelor numerice de la Berlin (R.D.G.), în luna iunie 1965 şi au ţinut următoarele conferinţe:
T. Popoviciu, *Asupra conservării alurii funcţiilor prin interpolare.*
E. Popoviciu, *Asupra studiului comparativ al mulţimilor interpolatoare cu aplicaţii la calcul numeric.*
3. În luna septembrie acad. prof. T. Popoviciu şi conf. E. Popoviciu au ţinut următoarele conferinţe în R.P. Polonă:
T. Popoviciu, *Realizările Institutului de calcul din Cluj în domeniul studiului restului la formulele de aproximare ale analizei.*

T. Popoviciu, *Conservarea alurii funcţiilor prin interpolare.*

E. Popoviciu, *Asupra comparării mulţimilor interpolatoare pe baza relaţiilor de* n *valenţă.*

4. Între 20–23 septembrire acad. prof. G. Călugăreanu a participat la ,,Reuniunea matematicienilor de expresie latină,, de la Namur (Belgia).

5. Prof. I. Ursu, membru corespondent al Academiei, a participat în luna septembrie, la şedinţa plenară a Agenţiei Internaţionale a Energiei Atomice în Japonia (Tokio).

6. Prof. Gh. Chiş şi conf. A. Pál au participat la conferinţa pentru S.A.P. de la Budapesta (13 octombrie-21 octombrie 1965), unde au prezentat următoarele comunicări:

Gh. Chiş, A. Pál, T. Oproiu, *Compararea a două metode de prelucrare a observaţiilor ,,Interobs,,.*

Gh. Chiş, I. Curea, *Concluzii asupra observaţiilor obţinute în cadrul programului ,,Interobs,,.*

7. Lect. E. Virág, între 14 octombrie-3 noiembrie, a fost pentru specializare în R.P.Polonă.

8. Conf. O. Gherman a fost în schimb de experienţă în Anglia, între 6 noiembrie-5 decembrie.

9. Asist. Vasile Ureche a fost trimis la specializare în domeniul fotometriei stelare fotografice şi fotoelectrice la Institutul Astronomic ,,Sternberg" din Moscova pe timp de 6 luni (octombrie 1965–martie 1966).

Participări la manifestări ştiinţifice din ţară

13–14 *februarie*

Sesiunea ştiinţifică a Institutului pedagogic de 3 ani de la Baia-Mare.

D. V. Ionescu, Legătura formulei de derivare numerică a lui V. N. Fadeeva cu diferenţele divizate.

Gh. Pic, Despre o teoremă a lui Kakeya.

A. Bódi, Măsurători de constantă dielectrică în microunde.

I. Gy. Maurer, I. Purdea, Inele pentru care submodulele sînt subinele.

A. Nicula, I. Ursu, G. Cristea, Rezonanţa electronică de spini a ionilor Cu^{++}, Mn^{++} şi V^{++++} în policristale.

F. Kelemen, A. Néda, Măsurători de conductibilitate termică în regim de impulsuri.

I. Stan, Consideraţii asupra mişcării de rotaţie a două corpuri gravitaţionale.

15–16 *mai*

Sesiunea ştiinţifică a Institutului pedagogic de 3 ani de la Tg. Mureş.

Gh. Pic, Despre o teoremă a lui Kakeya.

P. Brădeanu, Asupra propulsiei optime a rachetelor.

I. Gy. Maurer, M. Szilágyi, Despre convergenţa produselor infinite definite în inelele de endomorfisme ale unui grup abelian.

I. Gy. Maurer, M. Szilágyi, Despre produse infinite definite în inele locale.

I. Gy. Maurer, M. Veégh, Două demonstraţii pentru o teoremă a lui B. Gyíres.

I. Gy. Maurer, M. Veégh, Despre introducerea axiomatică a numerelor naturale.

I. Gy. Maurer, El. Kiss, Despre o clasă de şiruri aritmetice de ordin superior.

M. Rădulescu, I. Maruşciac, O metodă pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice.

I. Stan, Problema inversă a mişcării relativiste a punctului de masă variabilă.

I. Pop, Asupra integrării ecuaţiilor stratului limită.

La 20 mai prof. D. V. Ionescu a ţinut o conferinţă la Societatea de Ştiinţe Matematice Bucureşti, cu titlul *Reprezentarea unei diferenţe divizate generalizate printr-o integrală definită.*

La 22 mai lect. I. Stan a participat la Sesiunea Institutului de cercetări forestiere din Suceava şi a ţinut o conferinţă cu titlul *Unele probleme ale îmbunătăţirii construcţiei viorilor.*

1–5 *iulie*

Colocviul de Teoria funcţiilor convexe cu aplicaţii la calcul numeric.

G. Călugăreanu, Asupra unei probleme a lui H. Poincaré.

G. Călugăreanu, Asupra unei proprietăţi metrice ale mulţimilor conexe din plan.

T. Popoviciu, Caracterizarea funcţiilor convexe prin cîteva inegalităţi funcţionale.

T. Popoviciu, Conservarea alurii unei funcţii prin interpolare.

E. Gergely, Efectele operatorilor asupra varietăţilor în spaţiul lui Hilbert

D. V. Ionescu, Rezultate obţinute la Institutul de calcul din Cluj în problema integrării numerice.

D. V. Ionescu, Extinderea unor formule de derivare numerică ale acad. T. Popoviciu.

D. V. Ionescu, Restul în formula de cvadratură a lui Gauss şi a lui P. Turán.

D. V. Ionescu, A. Coţiu, O extensiune a formulei de cvadratură a lui Lacroix.

C. Kalik, P. Szilágyi, Asupra rezolvării unor probleme la limită pentru sisteme tare eliptice.

P. Mocanu, Stelaritatea şi convexitatea transformărilor conforme.

E. Popoviciu, Cîteva direcţii de cercetare în teoria funcţiilor convexe.

E. Popoviciu, Proprietăţile unor clase de mulţimi interpolatoare.

F. Radó, L. Németi, Despre rezolvarea aproximativă a problemei de programare în timp a fabricaţiei.

F. Radó, L. Németi, V. Peteanu, Probleme de planificare în timp.

F. Radó, V. Groze, Determinarea transformărilor optimale ale nomogramelor cu puncte aliniate.

D. D. Stancu, O formulă generală de interpolare.

D. D. Stancu, O metodă pentru calculul momentelor distribuţiilor multidimensionale.

S. Groze, B. Orbán, Criterii pentru ca o nomogramă cu puncte aliniate să aibă eroare minimă.

M. Frenkel, Studiul comportării soluţiilor sistemelor autonome de trei ecuaţii în vecinătatea unei soluţii periodice.

I. Maruşciac, Infrapolinoame generalizate.

I. Maruşciac, M. Rădulescu, Un algoritm pentru rezolvarea problemei de programare pătratică.

I. Munteanu, Aplicaţii complet continue în spaţii vectoriale.

A. Ney, Metode noi pentru studiul integralelor improprii.

M. Rădulescu, Asupra unei generalizări a noţiunii de funcţie.

E. Schecter, Metode rapide de convergenţă pentru soluţiile aproximative ale ecuaţiilor parabolice.

I. Kolumbán, Despre mulţimea elementelor de cea mai bună aproximaţie.

C. Mocanu, Observaţii asupra programării neliniare.

P. Pavel, Restul în formulele de cvadratură a lui Cebişev.

A. I. Rus, Despre unicitatea soluţiilor problemelor la limită.

G. Moldovan, I. Rîp, Asupra unei constante care intervine într-o inegalitate a academicianului T. Popoviciu.

F. Olariu, Evaluarea ordinului de aproximaţie a unei funcţii de două variabile prin polinoame speciale de interpolare.

27–30 *septembrie*

Conferinţa de mecanică de la Bucureşti.

Gh. Chiş, A. Pál, Variaţia elementelor orbitale ale unui satelit artificial al Pămîntului.

D. V. Ionescu, Restul şi unele extinderi ale formulei de cvadratură ale acad. P. Turán.

I. Stan, Asupra mişcării de rotaţie a două corpuri gravitaţionale.

31 *octombrie* — 3 *noiembrie*

Colocviul de aplicaţiile matematicii în agricultură, Cluj.

F. Radó, Programarea cu condiţii logice şi aplicarea ei în agricultură.

I. Maruşciac, M. Rădulescu, Un algoritm pentru rezolvarea problemei de programare liniară.

I. Kolumbán, Despre o generalizare a problemei programării liniare.

C. Mocanu, Observaţie asupra unor probleme de programare pătratică.

8–10 *decembrie*

Sesiunea ştiinţifică anuală a Direcţiei Centrale de Statistică, Bucureşti.

T. Popoviciu, Probleme din economie rezolvate la maşina DACICC.

E. Popoviciu, Observaţii asupra problemei transportului.

27–28 *decembrie*

Simpozionul de astronomie, Timişoara.

Gh. Chiş, A. Pál, Determinarea elementelor orbitale ale S.A.P. din observaţii simultane.

I. Todoran. Variaţia perioadei la sistemele XZAND şi ETORI.

T. Oproiu, Programarea simultană a două metode de determinare a razelor geocentrice ale S.A.P.

Vizite

Facultăţile de Matematică-mecanică şi Fizică au fost vizitate în anul 1965 de următorii oameni de ştiinţă din străinătate:

14 *ianuarie*
Prof. Henry Cabannes (Paris).

14 *aprilie*
Prof. M. Soutif (Grenoble).

24 *aprilie*
Prof. Z. Olesiac (Varşovia).

23—25 *aprilie*
Prof. D. Batsuri (Ulan-Bator).

28—30 *iunie*
Prof. Edmond Brunn (Paris).

24 *septembrie*
Prof. A. Kawaguchi (Japonia).

6 *noiembrie*
Lect. Erdei Mária (Debreţin).

Întreprinderea Poligrafică Cluj 556—1966

AVIS AUX LECTEURS A L'ÉTRANGER

Afin de vous assurer un service prompt et régulier, il est recommandé de renouveler dès maintenant votre abonnement aux STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI.

Nous vous prions de vous adresser à cet effet, soit directement à CARTIMEX, P.O.B. 134—135 à BUCAREST (Roumanie), soit à une des maisons suivantes:

ALBANIE — Ndermarja Shtetnore e Botimeve
TIRANA

ALLEMAGNE (République Démocratique)
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstrasse 16
LEIPZIG 701

(République Fédérale)
Kubon und Sagner
POB 68 — MÜNCHEN 34

W. E. Saarbach
POB 1510 — 6 KÖLN

AUTRICHE — „Globus" Buchvertrieb
Salzgries 16 — WIEN XX

BELGIQUE — Librairie du Monde Entier
5, place St. Jean — BRUXELLES

BULGARIE — Raznoisnos
1, rue Tzar Assan — SOFIA

CHINE — Waiwen Studian
POB 88 — PEKING

CORÉE (République Populaire Démocratique)
Chulphanmul
PYONGYANG

CUBA — Cubartimpex
Calle Ermita 48 San Pedro — HABANA

ESPAGNE — Libreria Herder
Calle de Balmos 26 — BARCELONA

ÉTATS UNIS — Fam Book Service
69 Fifth Avenue Suite 8 F
NEW YORK 10003 N.Y.

Continental Publications
111, South Mermanee Ave.
ST. LOUIS Missouri 63105

FINLANDE — Akateminen Kirjakauppa
POB 128 — HELSÚNKI

FRANCE — Messageries de la Presse Parisienne
111, rue Réaumur — PARIS 2e

GRANDE BRETAGNE — Collet's Holdings Ltd.
Denington Industrial Estate
WELLINGBOROUGH, Northants

HONGRIE — Kultúra
POB 149 — BUDAPEST 62

ISRAËL — Haiflepac Ltd.
11 Arlosoroff Street — HAIFA

Lepac
15 Rambam Street — TEL AVIV

ITALIE — So. Co. Lib. Ri. Export-Import
Piazza Margana 33 — ROMA

JAPON — Nauka Ltd.
2 Kanda Zimbocho
2 Chome Kiyoda-ku — TOKYO

MONGOLIE — Mongolgosknigotorg
ULAN BATOR

NORVEGE — Norsk Bogimport
POB 3267 — OSLO

PAYS-BAS — Moulenhoff
Beulingstraat 2 — AMSTERDAM

POLOGNE — Ruch
ul. Wilcza 46 — WARSZAWA

PORTUGAL — Libreria Bucholz
Av. da Liberdade — LISBOA

SUEDE — D. C. Fritze
Fredgatan 2 — STOCKHOLM 16

SUISSE — Pinkus et Cie
Froschaugasse 7 — ZURICH

TCHÉCOSLOVAQUIE — Artia
Ve Smenkach 30 — PRAHA 1

U.R.S.S. — Mejdounarodnaïa Kniga
MOSKVA G 200

VIETNAM (République Démocratique)
So Xunt Nhap Khap Sach Bao
Hai Ba Trung 32 — HANOI

YOUGOSLAVIE — Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27 — BEOGRAD

Forum
Terazije 16/1 — BEOGRAD

Prosveta
I Vojvode Misica — NOVISAD

43875