

491307

Ex 3

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1966

BIBL. CENTR. UNIV. CLUJ
4148 1966

C L U J

În cel de al XI-lea an de apariție (1966) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie-geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
științe economice;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XI году издания (1966) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит следующими сериями:

математика — физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология — география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
экономические науки;
психология — педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языковедение — литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XI-me année de publication (1966) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
sciences économiques;
philosophie;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique et littérature (2 fascicules).

491307

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1966

d 48 66

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
Anul XI 1966

REDACTOR ŞEF:

Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTORI ŞEFI ADJUNCŢI:

Acad. prof. ŞT. PÉTERFI, prof. AL. ROŞCA, membru corespondent al Academiei,
prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei

COMITETUL DE REDACŢIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:

Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIŞ,
prof. D. V. IONESCU, prof. V. MARIAN, prof. GH. PIC,
prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei

Redacţia:

CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 134—50

S U M A R

E. DANI, Despre rezolvarea diofantiană rațională a ecuației $\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4 \left(\prod_{i=1}^4 a_i = b^2 \right)$	7
I. MARUȘCIAC, Proprietăți de structură a unor infrapolinoame condiționate	13
D. V. IONESCU, Legătura formulei de derivare numerică a lui V. N. Fadeeva, cu diferențele divizate	29
I. A. RUS, Familii de funcții cu proprietatea lui Sturm	37
I. MARUȘCIAC, M. RĂDULESCU, O metodă de rezolvare a problemei de programare convexă	41
E. SCHECHTER, Convergența metodei lui Ciaplighin pentru ecuațiile de tip parabolic	53
GR. MOLDOVAN, Asupra aproximării funcțiilor continue prin polinoame Bernstein	63
V. URECHE, Elementele fotometrice ale cefeidei <i>SY PISCIUM</i>	73
V. MARIAN, Primul manual românesc de fizică	79
I. MAXIM, C. BĂLINTFI, Influența ionilor Fe^{++} asupra permeabilității magnetice și a conductibilității electrice la ferite	99
I. POP și I. MAXIM, Antiferomagnetismul unor aliaje ternare pe bază de nichel	103
A. NICULA, I. URȘU, GH. CRISTEA, Rezonanța electronică de spin a ionului V^{4+} în zeoliți de tip X și Y	109
A. WEISSMANN, D. DEMCO, Potențialul efectiv și starea legată a doi electroni în cristale	117
Z. GĂBOS, M. GOIA, Aplicarea transformării Foldy-Wouthuysen la studiul polarizării electronului	129
E. TĂTARU, Rețele electrice duale cu elemente nelineare și variabile în timp	135
E. TĂTARU, Schemă de numărare binară utilizând combinația tranzistor-dioda tunel	139
AL. BÓDI, Compunerea unor tensiuni nesinusoidale din tensiuni dreptunghiulare	143
Recenzii	
Rezonanța electronică de spin (A. NICULA)	149
Béla Sz. Nagy, Introduction to real functions and orthogonal expansions (GEORGE CĂLUȚĂREANU)	150

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ЭРНЕСТ ДАНИ, О рациональном диофантовом решении уравнения $\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4$, $\prod_{i=1}^4 a_i = b^2$	7
И. МАРУЩАК, Структурные свойства некоторых обусловленных инфраполиномов	13
Д. В. ИОНЕСКУ, Связь формулы численного дифференцирования В. Н. Фадеевой с разностными отношениями	29
ИОАН А. РУС, Семейства функций со свойством Штурма	37
И. МАРУЩАК, М. РЭДУЛЕСКУ, Метод решения задачи выпуклого программирования	41
Э. ШЕХТЕР, Сходимость метода Чаплыгина для уравнений параболического типа	53
Г. МОЛДОВАН, Относительно аппроксимации непрерывных функций при помощи многочленов Бернштейна	63
В. УРЕКЕ, Фотометрические элементы цефеиды $\delta\gamma$ PISCUM	73
В. МАРИАН, Первый румынский учебник физики	79
И. МАКСИМ, К. БАЛИНТФИ, Влияние ионов Fe^{++} на магнитную проницаемость и электропроводность ферритов	99
Ю. ПОП, И. МАКСИМ, Антиферромагнетизм некоторых тройных сплавов на основе никеля	103
А. НИКУЛА, И. УРСУ, Г. КРИСТЯ, Электронный парамагнитный резонанс иона V^{4+} в цеолитах типа X и Y	109
А. ВАЙСМАН, Д. ДЕМКО, Эффективный потенциал и связанное состояние двух электронов в кристаллах	117
З. ГАБОШ, М. ГОЯ, Применение преобразования Foldy-Wouthuysen к исследованию поляризации электрона	129
Э. ТЭТАРУ, Дуальные электрические цепи с нелинейными и изменяющимися во времени элементами	135
Э. ТЭТАРУ, Бинарная счетная схема, использующая комбинацию транзистор-туннельный диод	139
А. БОДИ, Составление несинусоидальных напряжений из прямоугольных напряжений	143
Рецензии	149

SOMMAIRE — CONTENTS

ERNEST DANI, About the rational diophantine resolution of the equation $\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4$,

$\prod_{i=1}^4 a_i = b^2$	7
I. MARUȘCIAC, Propriétés de structure de certains infrapolynômes conditionnés	13
D. V. IONESCU, La relation de la formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva avec les différences divisées	29
IOAN A. RUS, Familles de fonctions ayant la propriété de Sturm	37
I. MARUȘCIAC, M. RĂDULESCU, Méthode de résolution du problème de programmation convexe	41
E. SCHECHTER, The convergence of Chaplygin's method for the equations of parabolic type	53
GRIGOR MOLDOVAN, Sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes Bernstein	63
VASILE URECHE, Les éléments photométriques de la céphéide SY <i>Piscium</i>	73
VICTOR MARIAN, Le premier manuel roumain de physique	79
I. MAXIM, C. BÁLINTFI, Influence des ions Fe^{++} sur la perméabilité magnétique et la conductibilité électrique des ferrites	99
IULIU POP, IOAN MAXIM, The antiferromagnetism of some nickel ternary alloys	103
A. NICULA, I. URSU, GH. CRISTEA, Electron spin resonance of V^{4+} ion in zeolites of X and Y type	109
A. WEISSMANN, D. DEMCO, The effective potential and the bound state of two electrons in crystals	117
ZOLTÁN GÁBOS, MIHAI GOIA, The application of Foldy-Wouthuysen transformation to the study of the electron polarization	129
EMIL TĂTARU, Dual electrical networks with unlinear and variable elements in time	135
EMIL TĂTARU, Schéma de numération binaire utilisant la combinaison transistor-diode tunnel	139
AL. BÓDI, The composition of some unsinusoidal voltages from rectangular voltages	143
 Livres parus - Books	 149

DESPRE REZOLVAREA DIOFANTIANĂ RAȚIONALĂ A ECUAȚIEI

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4 \quad \left(\prod_{i=1}^4 a_i = b^2 \right)$$

de

ERNEST DANI

În legătură cu conținutul și metoda lucrării de față amintim de
 — o lucrare a lui **Norrie** [1, p.655] în care autorul a dat soluția
 (9) a ecuației

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4, \quad (1)$$

— unde $a_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ și a sînt parametri, iar $x_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ și x necunoscute —, pentru cazul special $a \neq 0, a_3 = -a_1, a_4 = -a_2$ și
 — o lucrare a lui **Richmond** [2], ale cărei rezultate au fost cuprinse și într-o lucrare a lui **Segre** [3] —, în care autorul deduce o metodă de recurență de a obține noi soluții raționale ale ecuației (1), $a=0$, pornind de la una dată.

Scopul lucrării de față este de a deduce formulele (7) pentru cazul mai general $\prod_{i=1}^4 a_i = b^2, a$ arbitrar pentru a generaliza rezultatele amintite.

1. Fie prin inducție $\{x_{ni}\}$ o soluție a ecuației (1) pentru $a = 0$:

$$\sum_{i=1}^4 A_{ni} = 0, A_{ni} = a_i x_{ni}^4.$$

Aplicînd endomorfismul τ

$$\{x_i\}\tau = \{x_{ni}(x_i x + y)\}, \quad (2)$$

ecuația (1) trece în

$$\sum_{j=1}^4 C_4^j \sum_{i=1}^4 A_{ni} x_i^j y^{4-j} = ax^4. \quad (3)$$

Precum rezultă din lucrările [2] și [3], — avînd în vedere că $\prod_{i=1}^4 A_{ni} =$
 $= \left(b \prod_{i=1}^4 x_{ni}^2 \right)^2$ —, sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^4 A_{ni} x_i^j = 0, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (4)$$

admite soluție rațională.

Pentru endomorfismul ρ

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_i\}_\rho = \{B_{ni} p_n + q_n\}, \\ B_{n1} = A_{n2} \sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 A_{ni}}^{(n)}, \\ B_{n2} = -A_{n1} \sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 A_{ni}}^{(n)}, \\ B_{n3} = A_{n1} A_{n2} A_{n4}, \\ B_{n4} = -A_{n1} A_{n2} A_{n3}. \end{array} \right. \quad (5)$$

— unde p_n și q_n sînt parametri arbitrari —, care anulează sistemul de ecuații (4), ecuația (3) se simplifică mai departe și obținem :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{n1} \prod_{i \neq 1} (B_{n1} - B_{ni}) (4q_n + \sum_{i=1}^4 B_{ni} p_n) p_n^3 x^4 + \\ 4A_{n1} \prod_{i \neq 1} (B_{n1} - B_{ni}) p_n^3 x^3 y = a x^4. \end{array} \right. \quad (6)$$

Endomorfismul care anulează ecuația (6) este evident și prin urmare, făcînd produsul celor trei endomorfisme aplicate, obținem următoarea soluție diofantiană a ecuației (1) :

$$\begin{aligned} & \{x_{n+1,i}(a), x_{n+1}(a)\}, \\ \{x_{n+1,i}(a)\} &= \left\{ x_{ni}(\bar{x}_{n+1}(a)) \left(4B_{ni} - \sum_{i=1}^4 B_{ni} p_n^4 + a \right) \right\}, \quad (7) \\ x_{n+1}(a) &= 4\bar{x}_{n+1}(a) p_n^3, \\ \bar{x}_{n+1}(a) &= A_{n1} \prod_{i \neq 1} (B_{n1} - B_{ni}) \end{aligned}$$

unde $\{x_{n+1,i}(0)\} = \{x_{n+1,i}\}$, $\{x_{0i}\}$ este o soluție inițială dată a ecuației (1), $a = 0$ și $n \geq 0$.

Pentru $a = 0$, — neluînd în considerație semnul componentelor —, soluția rațională (7) poate fi scrisă și în forma

$$\{x_{n+1,i}\} = \{x_{n1}(A_{n1} + 3A_{n2})\sqrt{A_{n3}A_{n3}}^{(n)} + (A_{n3} - A_{n4})\sqrt{A_{n1}A_{n2}}^{(n)}\sigma_i\}, \quad (8)$$

unde $\{\sigma_i\}$ este grupul lui Klein. Soluția (8) este cea a lui Richmond-Segre prin care se generalizează formula de recurență a lui Cauchy pentru ecuația

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i^3 + a_4 \prod_{i=1}^3 x_i = 0 \text{ (considerînd } a_4=0) \text{ [1,p.588].}$$

Pentru $a \neq 0$, $a_3 = -a_1$, $a_4 = -a_2$, — avînd în vedere că în acest caz pentru $a = 0$ avem soluția parțială $x_{03} = x_{01} \neq 0$, $x_{04} = x_{02} \neq 0$, $A_{02}^2 \neq A_{01}^2$

—, pentru $\sqrt{\prod_{i=1}^4 A_{ni}}^{(n)} = A_{01} A_{02}$ și $p_0 \rightarrow \bar{p}_0 : A_{01} A_{02}$ obținem soluția lui Norrie :

$$\begin{cases} x_{11}(a) = x_{01}(A_{02}\bar{x}_1(a)p_0^4 + a), \\ x_{12}(a) = x_{02}(-A_{01}\bar{x}_1(a)p_0^4 + a), \\ x_{13}(a) = x_{01}(-A_{02}\bar{x}_1(a)p_0^4 + a), \\ x_{14}(a) = x_{02}(A_{01}\bar{x}_1(a)p_0^4 + a), \\ x_1(a) = \bar{x}_1(a)p_0^3, \\ \bar{x}_1(a) = 8A_{01}A_{02}(A_{02}^2 - A_{01}^2). \end{cases} \quad (9)$$

2. Trecem la discutarea cazului $a \neq 0$, nestudiat în lucrările amintite.

Introducem notația $A_{n+1,i}(a) = a_i x_{n+1,i}(a)$, $A_{n+1}(a) = ax_{n+1}(a)$.

Prin definiție soluția (7) este triviale de rang r , $1 \leq r \leq 4$, dacă pentru o permutare oarecare σ_i a grupului de permutări de ordinul patru S_4 avem

$$\left(\sum_{i=1}^r A_{n+1,i}(a)\right)\sigma_i = 0.$$

În corpul numerelor raționale este valabilă următoarea teoremă:

Condiția necesară și suficientă ca pentru o infinitate de valori ale parametrului p_n soluțiile (7) să fie netriviale și două cîte două diferite este ca să avem $A_{n1}\sigma_i \neq 0$, $\sigma_i \in S_4$; $A_{n1} + A_{n2} \neq 0$; $A_{n1} + A_{n3} \neq 0$ sau $A_{n1} + A_{n4} \neq 0$.

În scopul demonstrației să notăm cu b_n una dintre valorile radicalului

$$\sqrt{\prod_{i=1}^4 A_{ni}}^{(n)}.$$

Ca soluțiile (7) să ne dea pentru diferite valori ale parametrului p_n soluții netriviale este necesar ca să nu se anuleze simultan expresia

$$x_{n+1}(a, b_n) = 4 A_{n1}A_{n2}^2 b_n (A_{n1} + A_{n2})(b_n + A_{n1}A_{n3})(b_n - A_{n1}A_{n4}) \quad (10)$$

și conjugatul acesteia $x_{n+1}(a_1, -b_n)$.

Dacă $A_{n_1}\sigma_i = 0$, $\sigma_i \in S_4$ fixat, sau $A_{n_1} + A_{n_2} = 0$, atunci din (10) constatăm direct că $x_{n+1}(a, b) = x_{n+1}(a_1, -b_n) = 0$.

Dacă $A_{n_1} + A_{n_i} = 0$, $i \in \{3, 4\}$, atunci, potrivit condiției $\sum_{i=1}^4 A_{n_i} = 0$, $A_{n_2} + A_{n_i} = 0$, $i \in \{3, 4\}$. Din $A_{n_1} + A_{n_i} = 0$, $i \in \{3, 4\}$, rezultă $A_{n_3} = A_{n_4}$, iar din $A_{n_i} + A_{n_3} = 0$, $i \in \{1, 2\}$, rezultă $A_{n_1} = A_{n_2}$. Astfel $(b_1 + A_{n_1}A_{n_3})(b_n - A_{n_1}A_{n_4}) = (b_n - A_{n_1}A_{n_3})(b_n + A_{n_1}A_{n_4})$ și prin urmare din nou $x_{n+1}(a, b_n) = x_{n+1}(a, -bn) = 0$.

În concluzie, condiția este necesară.

Dacă $x_{n+1}(a, b_n) = x_{n+1}(a, -b_n) = 0$, atunci precum se constată din (10) $A_{n_1}\sigma_i = 0$, $\sigma_i \in S_4$ fixat; sau $A_{n_1} + A_{n_2} = 0$, sau $b + A_{n_1}A_{n_3} = 0$ și $b_n + A_{n_1}A_{n_4} = 0$, sau $b_n - A_{n_1}A_{n_3} = 0$ și $b_n - A_{n_1}A_{n_4} = 0$, adică $A_{n_3} = A_{n_4}$, $A_{n_1} = A_{n_2}$ și prin urmare $A_1 + A_{n_i} = 0$, $i \in \{3, 4\}$.

În consecință condiția este suficientă ca să avem $x_{n+1}(a, b_n) \neq 0$ sau $x_{n+1}(a, -b_n) \neq 0$. În continuare considerăm acea valoare a radicalului pentru care $x_{n+1}(a) \neq 0$.

Din $A_{n+1,1}(a)\sigma_i = 0$, $\sigma_i \in S_4$ fixat, rezultă pentru $p_n = 0$ egalitatea $a = 0$, contradictorie cu condiția $a \neq 0$.

Din $(A_{n+1,1}(a) + A_{n+1,2}(a))\sigma_i = 0$, $\sigma_i \in S_4$ fixat, rezultă $(A_{n_1} + A_{n_2})\sigma_i = 0$, adică $A_{n_1} + A_{n_3} = 0$ sau $A_{n_1} + A_{n_4} = 0$. Nu reprezintă nici o restricție dacă presupunem că $A_{n_1} + A_{n_3} = 0$. În acest caz avem formulele (9) și din $A_{11}(a) + A_{13}(a) = 0$ deducem relația $(A_{02}x_1(a)p_0^4 + a)^4 = (-A_{01}x_1(a)p_0^4 + a)^4$, contradictorie cu condiția $x_1(a) \neq 0$.

Dacă rangul trivialității este trei, atunci $A_{n+1,4}(a)\sigma_i = A_{n+1}(a)$, de unde pentru $p_n = 0$ obținem egalitatea contradictorie $a = 0$.

În concluzie din $x_{n+1}(a) \neq 0$ rezultă că soluția este netrivială și prin urmare condiția este suficientă ca să obținem o infinitate de soluții netriviale. În continuare ne vom limita numai la astfel de soluții.

Fie $\{x_{n+1,1}(a, p_n^{(1)}), x_{n+1}(a, p_n^{(1)})\}$ o soluție dată. Sistemul de ecuații $x_{n+1,i}(a, p_n) = k x_{n+1,i}(a, p_n^{(1)})$, $x_{n+1}(a, p_n) = k x_{n+1}(a, p_n^{(1)})$ are numai un număr finit de soluții în $\{p_n, k\}$. Fixînd valoarea $p_n^{(2)}$ diferită de cele care intră în aceste soluții, obținem o soluție $\{x_{n+1,i}(a, p_n^{(2)}), x_{n+1}(a, p_n^{(2)})\}$ diferită de cea dată. Astfel prin inducție obținem o infinitate de soluții diferite între ele două câte două.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers, II., Diophantine Analysis*, New York, 1952.
- [2]. Richmond, H. W., *On the Diophantine Equation $F = ax^4 + by^4 + cz^4 + du^4 = 0$, the Product $abcd$ being a Square Number*, „The Journal of the London Mathematical Society” 1944, No. 76.
- [3]. Segre, B. *On Arithmetical Properties of Quadric and Quartic Surfaces*, „The Journal of the London Mathematical Society”, 1944, No. 76.

О РАЦИОНАЛЬНОМ ДИОФАНТОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4, \quad \prod_{i=1}^4 a_i = b^2$$

(Резюме)

Дается решение (7) (рекуррентное для $a=0$) уравнения (1) для случая $\prod_{i=1}^4 a_i = b^2$, где $\{x_{n+1,i}(0)\} = \{x_{n+1,i}\}; \{x_{0i}\}$ — начальное решение для $a = 0$; p_n — параметр; значение B_{ni} дано формулой (5), $A_{ni} = a_i x_{ni}^4$; $a \quad n \geq 0$.

Найденное решение обобщает решение (9) уравнения (1) для $a \neq 0, a_3 = -a_1, a_4 = -a_2$, данное Норри [1] и решение (8) для $a = 0$ (σ_i — перестановки группы Клейна), данное Ричмондом-Сегре [2,3].

ABOUT THE RATIONAL DIOPHANTINE RESOLUTION OF

THE EQUATION
$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 = ax^4, \quad \prod_{i=1}^4 a_i = b^2$$

(Summary)

We give the solution (7) (recurrence for $a=0$) of the equation (1) for the case $\prod_{i=1}^4 a_i = b^2$, where $\{x_{n+1,i}(0)\} = \{x_{n+1,i}\}; \{x_{0i}\}$ is an initial solution for $a = 0$; p_n is a parameter; the value of B_{ni} is given by the formula (5), $A_{ni} = a_i x_{ni}^4$; and $n \geq 0$.

The obtained solution generalizes the solution (9) of the equation (1) for $a \neq 0, a_3 = -a_1, a_4 = -a_2$ given by Norrie [1] and the solution (8) for $a = 0$ (σ_i are Klein's group permutations) given by Richmond-Segre [2,3].

PROPRIETĂȚI DE STRUCTURĂ A UNOR INFRAPOLINOAME CONDIȚIONATE

de

I. MARUȘCIAC

1. Într-o lucrare a lui A. A. M a r k o v [4, pag. 278] intitulată *Despre o problemă a lui Mendeleev* se rezolvă o problemă care a apărut în chimie și care constă în următoarele: să se găsească marginea superioară exactă a valorilor unuia din coeficienții polinomului

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1)$$

știind că abaterea acestui polinom de la zero pe un interval $[a, b]$ dat nu depășește un anumit număr dat M .

Plecînd de la aceasta, A. A. M a r k o v [4, pag. 279] formulează următoarea problemă mai generală: să se găsească marginea superioară exactă a combinației liniare

$$\alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 + \dots + \alpha_na_n,$$

unde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sînt numere date, iar a_0, a_1, \dots, a_n — coeficienții unui polinom de forma (1), știind că abaterea de la zero a lui $P(x)$ pe un interval dat $[a, b]$ este mărginită de un număr dat M .

În aceeași lucrare se demonstrează că această problemă se reduce la găsirea unui polinom de forma (1) ai cărui coeficienți verifică relația liniară

$$\alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 + \dots + \alpha_na_n = \alpha(\alpha \neq 0), \quad (2)$$

care se abate cel mai puțin de la zero pe intervalul $[a, b]$. Cu alte cuvinte se ajunge la o problemă de cea mai bună aproximație în sens Cebîșev. În cazul $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, soluția problemei este dată tocmai de polinomul lui Cebîșev de gradul n pe intervalul $[a, b]$.

În cazul cînd în loc de intervalul $[a, b]$ se ia o mulțime compactă oarecare, problema devine mult mai dificilă, nefiind posibilă în general construirea efectivă a polinomului de abatere minimă pe această mulțime. Din această cauză, într-o serie de lucrări, s-au studiat diferite proprietăți calitative ale acestor polinoame, ca evaluarea abaterii minime, localizarea rădăcinilor, etc.

Pentru a îngloba într-o clasă mai mare toate polinoamele de abatere minimă de la zero în diferite metrici, M. F e k e t e [2, 3] a introdus noțiunea de infrapolinoame restrânse și nerestrânse, demonstrând o serie de proprietăți ale acestora.

În lucrarea [6] autorul definește infrapolinoamele condiționate (în sensul că coeficienții polinomului sînt supuși la mai multe condiții liniare date) și se dau unele proprietăți ale acestora.

În prezenta notă se continuă acest studiu pentru cazul polinoamelor condiționate printr-o singură relație liniară dată.

2. Fie K o mulțime compactă din planul complex (z). Să notăm cu \mathcal{P}^α clasa polinoamelor de gradul n

$$P(z) = a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (3)$$

ai căror coeficienți satisfac relația

$$L(P) = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 1, \quad \sum |\alpha_k|^2 \neq 0, \quad (4)$$

unde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sînt numere complexe date.

Spunem despre un polinom $Q(z) \in \mathcal{P}^\alpha$ că este un *polinom adjunct* al lui $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$ pe mulțimea K și vom nota $Q(z) \in \mathcal{A}(P, K)$, dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții

$$\text{I Dacă } P(z) = 0, \quad z \in K, \quad \text{atunci } Q(z) = 0,$$

$$\text{II } |Q(z)| < |P(z)|, \quad P(z) \neq 0, \quad z \in K.$$

Dacă polinomul $P(z)$ nu admite nici un polinom adjunct, adică $\mathcal{A}(P, K) = \Lambda$, atunci el se numește *infrapolinom condiționat* pe K . Mulțimea infrapolinoamelor pe K se va nota cu $\mathcal{I}^\alpha(K)$.

Se vede ușor că infrapolinoamele condiționate $P(z)$ care nu se anulează pe K sînt strîns legate de polinoamele de abatere minimă de la zero pe K într-o metrică ponderată, cu o pondere pozitivă. Astfel, *dacă* $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$ $P(z) \neq 0, z \in K$, *atunci* $P(z)$ *este de abatere minimă de la zero pe* K *în metrica ponderată*:

$$\|Q(z)\| = \max_{z \in K} \frac{1}{|P(z)|} |Q(z)|.$$

Într-adevăr, dacă considerăm un polinom arbitrar $Q(z) \in \mathcal{P}^\alpha$ și $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$, $P(z) \neq 0, z \in K$, atunci avem

$$\|Q(z)\| = \max_{z \in K} \frac{|Q(z)|}{|P(z)|} > \max_{z \in K} \frac{|P(z)|}{|P(z)|} = \|P(z)\|,$$

deci $P(z)$ este un polinom de abatere minimă de la zero pe mulțimea K în metrica considerată.

Se vede imediat că dacă $K = \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ și $1 \leq k < n$, atunci orice polinom de forma

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_k)R(z),$$

unde $R(z)$ este un polinom arbitrar de gradul $n-k$, ai cărui coeficienți c_0, c_1, \dots, c_{n-k} verifică relația

$$\begin{aligned} & c_0 \alpha_0 + [c_1 - (z_0 + z_1 + \dots + z_k)c_0] \alpha_1 + \\ & + [c_2 - (z_0 + z_1 + \dots + z_k)c_1 + (z_0 z_1 + z_0 z_2 + \dots + z_{k-1} z_k)c_0] \alpha_2 + \\ & + (-1)^{k+1} c_{n-k} z_0 z_1 \dots z_n \alpha_n = 1, \end{aligned}$$

este un infrapolinom condiționat pe K , deoarece $\mathcal{A}(P, K) = \Lambda$.

3. În lucrarea [6] am arătat că au loc următoarele proprietăți, pe care le enunțăm mai jos în teoremele 1-3.

TEOREMA 1. *Dacă $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$, atunci orice divizor al său $D(z)$ este tot un infrapolinom condiționat pe K . Aici prin divizor condiționat se înțelege faptul că dacă $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$ și $D(z) = d_0 z^m + \dots + d_m$ ($m < n$) este un divizor al lui $P(z)$, adică $P(z) = D(z)Q(z)$, atunci coeficienții d_0, \dots, d_m verifică relația liniară dată*

$$\beta_0 d_0 + \beta_1 d_1 + \dots + \beta_m d_m = 1, \tag{5}$$

unde

$$\beta_k = \alpha_k c_0 + \alpha_{k+1} c_1 + \dots + \alpha_{k+n-m} c_{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \tag{6}$$

$$Q(z) = c_0 z^{n-m} + \dots + c_{n-m}.$$

Fie \mathcal{P}_*^α mulțimea polinoamelor

$$P^*(z) = a_0^* z^n + a_1^* z^{n-1} + \dots + a_n^*$$

ai căror coeficienți verifică relația

$$\alpha_0 a_0^* + \alpha_1 a_1^* + \dots + \alpha_n a_n^* = 0. \tag{7}$$

Dacă $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$ și $P(z) \neq 0, z \in K$, atunci transformarea

$$w = \frac{P^*(z)}{P(z)} \tag{8}$$

transformă mulțimea compactă K într-o mulțime compactă K_{P^*} din planul (w) . Fie \mathcal{X}_{P^*} învelitoarea convexă închisă a lui K_{P^*} , iar $\mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X}_{P^*}$.

TEOREMA 2. *Un polinom $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha, P(z) \neq 0, z \in K$, este un infrapolinom pe K , adică $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$, atunci și numai atunci când pentru orice polinom $P^*(z) \in \mathcal{P}_*^\alpha$ originea planului (w) aparține lui \mathcal{X}_{P^*} , adică $O_w \in K$.*

Cu ajutorul acestei teoreme se dă un criteriu necesar și suficient pentru ca un polinom din \mathcal{P}^α să fie un infrapolinom condiționat pe K .

TEOREMA 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un polinom $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$, $P(z) \neq 0$, $z \in K$ (K conține cel puțin $n + 1$ puncte) să fie un infra-polinom pe K , adică $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$, este ca să existe m ($n + 1 \leq m \leq 2n + 1$) puncte $z_\nu \in K$ și m numere $\lambda_\nu > 0$ cu $\sum \lambda_\nu = 1$, așa încît*

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-k}}{P(z_\nu)} = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Polinomul $P(z)$ este în același timp și un infra-polinom pe $\{z_\nu\}_{\nu=1}^m$, adică $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha[z_\nu]$.

Deoarece demonstrația acestei teoreme dată în lucrarea [6] este incompletă, avînd în vedere importanța ei, dăm mai jos demonstrația completă a acesteia.

Astfel, deoarece $\sum |\alpha_k|^2 \neq 0$, rezultă că oricare ar fi $P^*(z)$, se poate scoate din (7) un coeficient a_p^* în funcție de restul coeficienților $a_0^*, \dots, a_{p-1}^*, a_{p+1}^*, \dots, a_n^*$

$$a_p^* = -\frac{1}{\alpha_p} [\alpha_0 a_0^* + \dots + \alpha_{p-1} a_{p-1}^* + \alpha_{p+1} a_{p+1}^* + \dots + \alpha_n a_n^*]$$

și polinomul $P(z)$ se scrie sub forma

$$P^*(z) = (z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_p} z^{n-p}) a_0^* + \dots + (z^{n-p+1} - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} z^{n-p}) a_{p-1}^* + \\ + (z^{n-p-1} - \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} z^{n-p}) a_{p+1}^* + \dots + \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_p}\right) a_n^*.$$

Punem

$$X_k = R \left[\overline{P(z)} \left(z^{n-k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} z^{n-p} \right) \right] \quad (10) \\ Y_k = I \left[P(z) \left(z^{n-k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} z^{n-p} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n.$$

Fie $E_{2n}(K)$ imaginea mulțimii K din spațiul euclidian E_{2n} 2n-dimensional al variabilelor X_k, Y_k , prin transformarea (10), iar $\mathcal{S}_{2n}(K)$ învelitoarea sa convexă închisă.

Dacă acum $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(K)$ și $P(z) \neq 0$, $z \in K$, atunci din Teorema 2 rezultă $O_w \in \mathcal{X}$. De aceea din (8) și (10) rezultă că originea spațiului euclidian $E_{2n}(X_k = Y_k = 0)$ aparține lui $\mathcal{S}_{2n}(K)$, căci atunci nu există nici un polinom $P^*(z) \in \mathcal{P}_*^\alpha$ pentru care

$$|P(z) + P^*(z)| > |P(z) - P^*(z)|, \quad z \in K,$$

sau, ceea ce este același lucru, pentru care

$$R[P(z)P^*(z)] > 0.$$

Cu notația (10), punînd $a_k^* = b_k^* + ic_k^*$, aceasta se poate scrie sub forma

$$b_0^* X_0 - c_0^* Y_0 + \dots + b_{p-1}^* X_{p-1} - c_{p-1}^* Y_{p-1} + \\ + b_{p+1}^* X_{p+1} - c_{p+1}^* Y_{p+1} + \dots + b_n^* X_n - c_n^* Y_n > 0. \tag{11}$$

Prin urmare, nu există nici un plan (11) care să lase de o parte a sa originea 0, deci $0 \in \mathcal{E}_{2n}(K)$.

Deoarece $0 \in \mathcal{E}_{2n}(K)$, dintr-o teoremă cunoscută a lui Carathéodory rezultă că există $m(2 \leq m \leq 2n + 1)$ puncte $M_\nu(X_0^\nu, Y_0^\nu, \dots, X_{p-1}^\nu, Y_{p-1}^\nu, X_{p+1}^\nu, Y_{p+1}^\nu, \dots, X_n^\nu, Y_n^\nu) \in E_{2n}(K)$ pentru care, cu o anumită distribuție a maselor, centrul de greutate este 0. De aici rezultă apoi că există m puncte z_1, z_2, \dots, z_m și m numere pozitive m_1, m_2, \dots, m_m , așa încît

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu R \left[\left(z_\nu^{n-k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} z_\nu^{n-p} \right) \overline{P(z_\nu)} \right] = 0, \\ \sum_{\nu=1}^m m_\nu I \left[\left(z_\nu^{n-k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} z_\nu^{n-p} \right) P(z_\nu) \right] = 0, \quad k = 0, \dots, p-1, p+1, \dots, n.$$

de unde

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu |P(z_\nu)|^2 \frac{\left(z_\nu^{n-k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} z_\nu^{n-p} \right)}{P(z_\nu)} = 0,$$

sau, punînd

$$\lambda_\nu = \frac{m_\nu |P(z_\nu)|^2}{\sum m_\nu |P(z_\nu)|^2} \\ \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-k}}{P(z_\nu)} = \frac{\alpha_k}{\alpha_p} \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-p}}{P(z_\nu)}. \tag{12}$$

Înmulțind cei doi membri cu coeficienții a_k ai polinomului $P(z)$ și însumînd după k , obținem

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \left(1 - \frac{a_p z_\nu^{n-p}}{P(z_\nu)} \right) = \frac{1}{\alpha_p} \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-p}}{P(z_\nu)} - a_p \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-p}}{P(z_\nu)},$$

de unde

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-p}}{P(z_\nu)} = \alpha_p. \tag{13}$$

Din această relație și din (12) rezultă relațiile (9), ceea ce trebuia demonstrat.

Înmulțind fiecare relație (9) cu a_k^* care verifică (7) și însumînd după k , obținem

$$\sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{P^*(z_v)}{P(z_v)} = 0,$$

care arată că $O_w \in \mathcal{M} = \cap \mathcal{M}_{p^*} \mathcal{M}_{p^*}$ — fiind învelitoarea convexă închisă a mulțimii $M = \{z_v\}_{v=1}^m$, de unde rezultă că $P(z) \in \mathcal{D}^\alpha(M)$, iar de aici partea a doua a teoremei.

Suficiența condițiilor (9) rezultă din faptul că din (9) urmează $O_w \in \mathcal{M}$, căci atunci cu atît mai mult $O_w \in \mathcal{X}$ iar din Teorema 2 rezultă că $P(z) \in \mathcal{D}^\alpha(K)$.

Faptul că $m \geq n + 1$ rezultă din aceea că $P(z)$ este un infrapolinom și pe $M = \{z_v\}$ care nu se anulează pe M . Într-adevăr, în caz contrar, dacă $m \leq n$, atunci $P(z)$ ar admite un polinom adjunct $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)R(z)$, unde $R(z)$ este un anumit polinom de gradul $n - m$ deci $P(z) \notin \mathcal{D}^\alpha(K)$, contrar ipotezei.

4. Am văzut că dacă mulțimea K este finită și e formată din $m \leq n$ puncte din planul complex, infrapolinomul se poate scrie explicit. Acest lucru este posibil și în cazul cînd $m = n + 1$. Astfel are loc

TEOREMA 4. Dacă $P(z) \in \mathcal{D}^\alpha(K)$, $P(z) \neq 0$, $z \in K = \{z_v\}_{v=0}^n$ atunci

$$P(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k(z - z_k)}, \quad (14)$$

unde

$$\omega(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n),$$

$$L_j = L \left[\frac{\omega(z)}{z - z_j} \right] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k \sigma_k(z_0, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fiind funcția simetrică elementară de ordinul k a numerelor x_1, x_2, \dots, x_n , iar $\lambda_v > 0$, $\sum \lambda_v = 1$.

Într-adevăr, dacă $P(z) \in \mathcal{D}^\alpha(K)$, $P(z) \neq 0$, $z \in K$, atunci conform Teoremei 3 avem

$$\sum_{v=0}^n \lambda_v \frac{z_v^{n-k}}{P(z_v)} = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (15)$$

de unde, întrucît

$$U(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ P(z_0) & P(z_1) & \dots & P(z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \\ P(z_0) & P(z_1) & \dots & P(z_n) \end{vmatrix} = \frac{V(z_0, z_1, \dots, z_n)}{P(z_0) \dots P(z_n)} \neq 0,$$

unde $V(z_0, z_1, \dots, z_n)$ este determinantul lui Van der Monde 'al numerelor z_0, z_1, \dots, z_n , sistemul (15) se poate rezolva în raport cu $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ și avem

$$\lambda_k = \frac{(-1)^k D(\alpha; z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) P(z_k)}{V(z_0, z_1, \dots, z_n)},$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

unde

$$D(\alpha; x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{n-1} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Însă

$$D(\alpha; x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_{n-j} \sigma_{n-j}(x_1, \dots, x_n) \cdot V(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= (-1)^n L[(x - x_1) \dots (x - x_n)] V(x_1, \dots, x_n).$$

Astfel

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{n+k} L^k V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) P(z_k)}{V(z_0, z_1, \dots, z_n)} = \frac{L^k P(z_k)}{\omega'(z_k)}.$$

Aplicînd acum formula de interpolare a lui Lagrange pentru polinomul $P(z)$, avem

$$P(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{P(z_k)}{\omega'(z_k)(z - z_k)} = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k(z - z_k)},$$

adică relația (17).

Are loc și o teoremă inversă.

TEOREMA 5. Fie $M = \{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ $n + 1$ puncte distincte și $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ constante pozitive cu $\sum \lambda_\nu = 1$, atunci polinomul.

$$P(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k(z - z_k)}$$

este un infrapolinom condiționat pe M , adică $P(z) \in \mathcal{J}^\alpha(M)$.

În primul rînd se vede că $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$, căci coeficienții săi sînt

$$a_i = \sum_{k=0}^n (-1)^i \frac{\lambda_k}{L^k} \sigma_i(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

și avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n (-1)^i \frac{\lambda_k}{L^k} \alpha_i \sigma_i(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i \sigma_i(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k} \cdot L^k = \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1 \end{aligned}$$

Dacă $P(z) \notin \mathcal{P}^\alpha(M)$, atunci el ar admite un polinom adjunct $Q(z)$ pe M . Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange pentru $Q(z)$, avem

$$Q(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{Q(z_k)}{\omega'(z_k)(z - z_k)}.$$

Deoarece $Q(z) \in \mathcal{P}^\alpha$, avem

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_j(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) Q(z_k)}{\omega'(z_k)} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{Q(z_k)}{\omega'(z_k)} \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j \sigma_j(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{L^k Q(z_k)}{\omega'(z_k)}, \end{aligned}$$

de unde

$$1 \leq \sum_{k=0}^n \frac{|L^k| |Q(z_k)|}{|\omega'(z_k)|} < \sum_{k=0}^n \frac{|L^k| |P(z_k)|}{|\omega'(z_k)|} = \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1,$$

adică am obținut o contradicție. Astfel $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha(M)$ și teorema este demonstrată.

Să scriem formula (14) în câteva cazuri particulare.

a) Dacă $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ ($a_0 = 1$), atunci

$$L^k = 1, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

și avem

$$P(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{z - z_k}, \quad (16)$$

care reprezintă un rezultat a lui Fekete [2].

b) Dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$ ($a_n = 1$), atunci

$$L^k = (-1)^n \sigma_n(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) = (-1)^n z_0 \dots z_{k-1} z_{k+1}$$

și avem

$$P(z) = \frac{(-1)^n \omega(z)}{z_0 z_1 \dots z_n} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k z_k}{z - z_k} \quad (17)$$

c) Dacă $\alpha_j = 1, \alpha_j = 0, i \neq j (a_j = 1)$, atunci

$$L^k = (-1)^j \sigma_j(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

și polinomul $P(z)$ capătă forma

$$P(z) = (-1)^j \omega(z) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{\sigma_j(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)(z - z_k)} \quad (18)$$

Din expresia (14) se vede că numerele L^k sînt diferite de zero pentru sistemul de puncte $\{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ care verifică teorema 4, căci avem

$$P(z_k) = \frac{\lambda_k \omega'(z_k)}{L^k}.$$

În general însă, luînd un sistem arbitrar de puncte $\{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ și numere complexe $\{\alpha_\nu\}_{\nu=0}^n$, anumite numere $L^k = L \left[\frac{\omega(z)}{z - z_k} \right]$ pot fi nule. Este interesant însă că pentru nici un sistem de puncte $\{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ din planul complex și nici un sistem de numere $\{\alpha_\nu\}_{\nu=0}^n$ nu toate nule, numerele corespunzătoare L^k nu se pot anula simultan pe acest sistem. Astfel avem următoarea

LEMĂ. *Oricare ar fi sistemul de numere complexe $\{\alpha_\nu\}_{\nu=0}^n$ nu toate nule, nu există nici un sistem de puncte distincte $\{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ din planul complex, așa încît să avem*

$$L^k = L \left[\frac{\omega(z)}{z - z_k} \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (19)$$

Într-adevăr, să presupunem contrariul, că ar exista un sistem de puncte distincte $\{z_\nu\}_{\nu=0}^n$ pentru care pentru un anumit sistem de numere complexe $\{\alpha_\nu\}_{\nu=0}^n$ am avea

$$L^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Atunci ar rezulta că sistemul linear și omogen în raport cu $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k \sigma_k^\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

unde $\sigma_k^\nu = \sigma_k(z_0, \dots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \dots, z_n)$, admite o soluție nebanală. Însă determinantul acestui sistem este

$$\Delta = (-1)^n \Delta_{n+1}(\sigma_k^\nu) = \begin{vmatrix} \sigma_0^0 & \sigma_1^0 & \dots & \sigma_n^0 \\ \sigma_0^1 & \sigma_1^1 & \dots & \sigma_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_0^n & \sigma_1^n & \dots & \sigma_n^n \end{vmatrix}$$

și este diferit de zero, căci vom arăta că are loc identitatea

$$\Delta = (-1)^n V(z_n, z_{n-1}, \dots, z_0), \quad (20)$$

de unde rezultă o contradicție care demonstrează lema.

Să arătăm deci că are loc (20). Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^0 & \sigma_2^0 & \dots & \sigma_n^0 \\ 1 & \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \dots & \sigma_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma_1^n & \sigma_2^n & \dots & \sigma_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^0 & \sigma_2^0 & \dots & \sigma_n^0 \\ 0 & z_0 - z_1 & (z_0 - z_1)\sigma_1^{0,1} & \dots & (z_0 - z_1)\sigma_n^{0,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & z_0 - z_n & (z_0 - z_n)\sigma_1^{0,n} & \dots & (z_0 - z_n)\sigma_n^{0,n} \end{vmatrix}$$

unde s-a notat cu $\sigma_k^{0,i} = \sigma_k(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)$.

Astfel am stabilit următoarea formulă de recurență :

$$\Delta_{n+1}(\sigma_k^v) = (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \dots (z_1 - z_n)\Delta_n(\sigma_k^{0,v}).$$

Din această formulă de recurență rezultă imediat (22). Prin urmare are loc următoarea identitate interesantă, pe care n-am întâlnit-o în literatură

$$\begin{vmatrix} \sigma_0^n & \sigma_1^n & \sigma_2^n & \dots & \sigma_n^n \\ \sigma_0^{n-1} & \sigma_1^{n-1} & \sigma_2^{n-1} & \dots & \sigma_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_0^0 & \sigma_1^0 & \sigma_2^0 & \dots & \sigma_n^0 \end{vmatrix} = V(z_0, z_1, \dots, z_n).$$

5. Vom studia la acest punct câteva proprietăți ale infrapolinoamelor în cazul cînd mulțimea K este o mulțime reală E .

Astfel, în acest caz, criteriul necesar și suficient dat în Teorema 3 se poate enunța și sub următoarea formă.

TEOREMA 6. Fie E o mulțime reală și $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$, $P(z) \neq 0$, $z \in E$ un polinom real. Pentru ca $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(E)$ este necesar și suficient să existe $n + 1$ puncte x_0, x_1, \dots, x_n din E , în așa fel încît pentru orice polinom real $P^*(z) \in \mathcal{P}_*^\alpha$, numerele

$$P^*(x_k)P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{21}$$

să nu fie toate de același semn.

Într-adevăr, din demonstrația Teoremei 3 rezultă că în cazul unei mulțimi reale E și al polinoamelor $P(z)$ și $P^*(z)$ reale $m = n + 1$. Deci există pe baza Teoremei 3 $n + 1$ puncte x_0, x_1, \dots, x_n din E în așa fel încît $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(N)$, $N = \{x_\nu\}_{\nu=0}^n$. Însă atunci din Teorema 2 rezultă că $O_{11} \in N_{P^*}$ oricare ar fi polinomul $P^*(z) \in \mathcal{P}_*^\alpha$. Prin urmare, numerele reale

$$w_k = \frac{P^*(x_k)}{P(x_k)} = \frac{P^*(x_k)P(x_k)}{[P(x_k)]^2} \tag{22}$$

nu pot fi toate pozitive sau toate negative și astfel necesitatea este demonstrată.

Suficiența rezultă din aceea că dacă un polinom real $P(z) \in \mathcal{P}^\alpha$, $P(z) \neq 0$, $z \in E$ verifică condiția că pentru orice polinom real $P^*(z) \in \mathcal{P}_*^\alpha$ numerele

$$P^*(x_k)P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

sînt de semne contrare, atunci rezultă că $O_w \in \mathcal{N}_{P^*}$, oricare ar fi $P^*(z)$, deci $O_w \in \mathcal{N} = \bigcap \mathcal{N}_{P^*}$. Însă atunci cu atît mai mult $O_w \in \mathcal{E}$, și din Teorema 2 rezultă că $P(z) \in \mathcal{I}^\alpha(E)$.

TEOREMA 7. *Dacă $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ din (4) sînt numere reale, atunci orice infrapolinom $P(x) \in \mathcal{I}^\alpha(E)$ pe o mulțime reală E , care conține cel puțin $n + 1$ puncte, este real.*

Într-adevăr, să presupunem că am avea

$$P(x) = P_1(x) + iP_2(x),$$

unde $P_1(x)$ și $P_2(x)$ sînt polinoame de gradul n ai căror coeficienți a'_k și a''_k ($a'_k = a_k + ia''_k$) verifică relațiile

$$\begin{aligned} \alpha_0 a'_0 + \alpha_1 a'_1 + \dots + \alpha_n a'_n &= 1, \\ \alpha_0 a''_0 + \alpha_1 a''_1 + \dots + \alpha_n a''_n &= 0. \end{aligned}$$

Vom arăta că dacă $P_2(x) \neq 0$, $x \in E$, atunci se poate construi un polinom adjunct al lui $P(x)$ pe E .

Astfel, fie $\{x_\nu\}_{\nu=1}^r$ mulțimea rădăcinilor din E a polinomului $P_2(x)$, adică $P_2(x_\nu) = 0$, $x_\nu \in E$, $\nu = 1, 2, \dots, r$. Atunci definim polinomul

$$Q(x) = P_1(x) + \varepsilon R(x), \quad \varepsilon > 0, \tag{23}$$

unde $R(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$ este un polinom care verifică condițiile

$$\begin{aligned} R(x_\nu) &= 0, \quad P_1(x_\nu) = 0, \\ R(x_j) &= A_j, \quad P_1(x_j) \neq 0, \quad \text{sign } A_j = -\text{sign } P_1(x_j) \\ \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n &= 0. \end{aligned}$$

Din (23) se vede că $Q(x) \in \mathcal{P}^\alpha$. De asemenea, dacă $P(x) = 0$, deci $P_1(x) = -P_2(x) = 0$, $x \in E$, rezultă și $Q(x) = 0$.

Pentru $x = x_\nu$ în care $P_1(x) \neq 0$, avem

$$|Q(x_\nu)| = |P_1(x_\nu) + \varepsilon R(x_\nu)| < |P_1(x_\nu)| = |P(x_\nu)|,$$

dacă

$$\varepsilon < \min_{P_1(x_\nu) \neq 0} \frac{-2P_1(x_\nu)R(x_\nu)}{[R(x_\nu)]^2}.$$

În $E - \{x_\nu\}$, avem evident pentru un ε destul de mic

$$|Q(x)| = |P_1(x) + \varepsilon R(x)| < |P_1(x) + iP_2(x)| = |P(x)|.$$

Astfel pentru un $\varepsilon > 0$ destul de mic polinomul $Q(x)$ astfel construit este un polinom adjunct al lui $P(x)$ pe E , contrar ipotezei. Rezultă deci $P_2(x) \equiv 0$, și astfel polinomul $P(x)$ este real.

6. În lucrarea [6] s-a arătat că, notînd cu φ_x unghiul sub care se vede mulțimea K din punctul z , dacă $P(z) \in \mathcal{J}^\alpha(K)$, $P(z) \neq 0$, $z \in K$, atunci β_1, \dots, β_n fiind rădăcinile polinomului $P(z)$, avem totdeauna

$$\varphi_{\beta_k} \geq \begin{cases} \pi, & \text{dacă } \alpha_n = 0, \\ \pi - \varphi_0, & \text{dacă } \alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n \neq 0, \end{cases}$$

ceea ce arată că rădăcinile polinomului $P(z)$ sînt conținute în primul caz în învelitoarea convexă a mulțimii K , iar în al doilea caz într-o mulțime din ale cărei puncte mulțimea K se vede sub un unghi mai mare decît $\pi - \varphi_0$.

Cu alte cuvinte, teorema lui F e j e r [1] nu mai este valabilă în general, cînd în polinom se fixează nu primul coeficient ci, de exemplu, ultimul.

În cazul cînd mulțimea E este reală și numerele $\{\alpha_k\}$ verifică o anumită condiție, se poate aduce o precizare relativ la localizarea rădăcinilor infrapolinoamelor definite pe această mulțime.

Astfel, fie $[a, b]$ cel mai mic segment care conține mulțimea E . Atunci are loc.

TEOREMA 8. *Dacă E este o mulțime reală care conține cel puțin $n + 1$ puncte și $P(z) \in \mathcal{J}^\alpha(E)$, $P(z) \neq 0$, $z \in E$, iar numerele reale $\{\alpha_k\}$ sînt în așa fel încît $L_k \neq 0$, pentru toți $k = 0, 1, \dots, n$ și orice sistem de puncte $\{x_k\}_{k=0}^n$, $x_k \in [a, b]$, atunci $P(z)$ are toate rădăcinile reale distincte separate de punctele mulțimii E .*

Într-adevăr, deoarece E este reală și $P(z) \neq 0$, $z \in E$, există $n + 1$ puncte $\{x_\nu\}_{\nu=0}^n$ în E pentru care

$$P(z) = \omega(z) \sum_{\nu=0}^k \frac{\lambda_\nu}{L^\nu(z-x_\nu)},$$

cu $\lambda_\nu > 0$ și $\sum \lambda_\nu = 1$. Să presupunem că $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Avem

$$P(x_k) = \frac{\lambda_k}{L_k} \omega'(x_k), \quad P(x_{k+1}) = \frac{\lambda_{k+1}}{L^{k+1}} \omega'(x_{k+1}).$$

Observăm că

$$L^k L^{k+1} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (24)$$

Într-adevăr, considerînd polinomul

$$Q(x) = L[(X - x_0) \dots (X - x_{k-1})(X - x)(X - x_{k+2}) \dots (X - x_n)] \times \\ \times V(x_0, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+2}, \dots, x_n)$$

avem

$$Q(x_k) = L^{k+1} V(x_0, \dots, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n),$$

$$Q(x_{k+1}) = L^k V(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Dacă am avea pentru un anumit $k(0 \leq k < n)$ $L^k L^{k+1} < 0$, ar rezulta și $Q(x_k)Q(x_{k+1}) < 0$.

Însă polinomul $Q(x)$ fiind o funcție continuă, există atunci un punct $\xi \in (x_k, x_{k+1})$ în care acesta se anulează, adică

$$Q(\xi) = 0.$$

dar atunci și

$$L[(X - x_0) \dots (X - x_{k-1})(X - \xi)(X - x_{k+2}) \dots (X - x_n)] = 0,$$

contrar ipotezei, căci atunci punînd $\xi = x_{k+1}$, $L^k = 0$.

Din (24), ținînd cont de faptul că $\text{sign } \omega'(x_k) = (-1)^{n-k}$, avem

$$P(x_k)P(x_{k+1}) = \frac{\lambda_k \lambda_{k+1} \omega'(x_k) \omega'(x_{k+1})}{L^k L^{k+1}} < 0,$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n$, ceea ce arată că există $y_{k+1} \in (x_k, x_{k+1})$, pentru care $P(y_k) = 0$, $\hat{a} = 0, 1, \dots, n$, și cu aceasta teorema este demonstrată.

Într-un anumit sens are loc și o teoremă inversă.

TEOREMA 9. *Dacă polinomul $P(x) \in \mathcal{P}^\alpha$ este real și are toate rădăcinile sale reale distincte separate de punctele mulțimii E și există un sistem de puncte x_1, \dots, x_n din E astfel încît $\text{sign}(L^0 a_0) = 1$, atunci $P(x) \in \mathcal{J}^\alpha(E)$.*

Într-adevăr, dacă $P(x) \in \mathcal{P}^\alpha$ și y_1, y_2, \dots, y_n sînt rădăcinile sale, există pe baza ipotezei $n + 1$ puncte din $E: x_0, x_1, \dots, x_n$ așa încît

$$x_0 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_n < x_n.$$

Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange pentru polinomul $P(x)$ pe nodurile x_0, x_1, \dots, x_n , avem

$$P(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{P(x_k)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}. \tag{25}$$

Însă

$$\text{sign} \left[\frac{P(x_k) L^k}{\omega'(x_k)} \right] = \frac{(-1)^{n-k} \text{sign}(L^k a_0)}{(-1)^{n-k}} = 1,$$

căci $\text{sign}(L^k a_0) = \text{sign}(L^0 a_0) = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Prin urmare, punînd

$$\lambda_k = \frac{L^k P(x_k)}{\omega'(x_k)} > 0,$$

formula (25) se poate scrie

$$P(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{L^k(x - x_k)}.$$

Deoarece $P(x) \in \mathcal{P}^\alpha$, avem din (25)

$$\sum_{k=0}^n \frac{L^k P(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1$$

și conform Teoremei 5 rezultă că $P(x) \in \mathcal{J}^\alpha(E)$.

Să analizăm câteva cazuri particulare.

a) Dacă $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, adică $a_0 = 1$, atunci $L^k = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$ și avem

COROLAR 1 (M. Marden [5]). *Dacă E este o mulțime reală care conține cel puțin $n + 1$ puncte, atunci $P(x) \in \mathcal{P}^\alpha$, $P(x) \neq 0$, $x \in E$, este și infrapolinom pe E, adică $P(x) \in \mathcal{J}^\alpha(E)$, atunci și numai atunci când admite numai rădăcini reale și distincte separate de punctele mulțimii E.*

b) Dacă $\alpha_p = \frac{1}{A_p}$, $\alpha_k = 0$, $k \neq p$, adică $a_p = A_p$, atunci

$$L^k = (-1)^p \sigma_p(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

și deci păstrează un semn constant dacă originea $O \notin [a, b]$ și astfel avem:

COROLAR 2. *Dacă E este o mulțime reală care conține cel puțin $n + 1$ puncte și $O \notin [a, b]$, atunci un polinom*

$$P(x) = a_0 x^n + \dots + a_{k-1} x^{n-k+1} + a_k x^{n-k} + a_{k+1} x^{n-k-1} + \dots + a_n$$

care nu se anulează pe E și cu $\text{sign}[(-1)^p a_0] = 1$ dacă $a > 0$ și $\text{sign}[(-1)^p a_0] = -1$ dacă $a < 0$, este atunci și numai atunci un infrapolinom pe E când admite numai rădăcini reale și distincte separate de punctele mulțimii E.

Se vede și de aici că dacă se fixează un alt coeficient, diferit de primul, atunci originea joacă un rol special. De aceea, dacă $O \in [a, b]$, atunci nu se poate obține nici o informație relativ la localizarea rădăcinilor infrapolinoamelor cu metoda folosită. În acest ultim caz s-ar putea folosi anumite transformări convenabile ca și în lucrarea [7], cu ajutorul cărora s-ar putea obține anumite informații și în acest caz.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Fejér, *Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen*. Math. Ann., **85** 1922, pp. 41–48.
2. M. Fekete, *On the Structure of Extremal Polynomials*. Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., **37**, nr. 2/1951, pp. 95–103.
3. M. Fekete and J. L. Walsh, *On Restricted Infrapolynomials*. J. Anal. Math., **5**, 1957, pp. 47–76.
4. A. A. Markov, *Izbrannije tvorí*, Moscova, 1948.
5. M. Marden, *Location of the Zeros of Infrapolynomials*. Amer. Mathem. Monthly, **70**, nr. 4, 1963, pp. 361–371.

6. I. Marușciac, *Sur certains infrapolynômes conditionnés*. *Mathematica*, 4(27), 1, 1962, pp. 33—52.
7. I. Marușciac, *Unele proprietăți ale infrapolinoamelor condiționate*. *Studii și Cercetări de Mat. Cluj*, 1/1963, pp. 73—83.
8. V. S. Videnski, *O naimenno ukloniaiusihsia ot nulia mnogocilenah, koeffiĭientĭ kotorĭk udovletvoriaiut dannoi lineinoi zavisiimosti*. *D.A.N.*, 126, nr. 2, 1959, pp. 248—250.
9. J. L. Walsh and M. Zedek, *On Generalized Tchebyscheff Polynomials*. *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, 42, nr. 2, 1956, pp. 299—304.

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ОБУСЛОВЛЕННЫХ ИНФРАПОЛИНОМОВ

(Р е з ю м е)

Пусть K компактное множество комплексной плоскости (z) и \mathcal{P}^n класс всех полиномов n -ой степени, коэффициенты которых удовлетворяют данному линейному отношению (4).

Говорят, что полином $Q(z) \in \mathcal{P}^n$ является *адьюнктным полиномом* для $P(z) \in \mathcal{P}^n$ на множестве K и обозначается через $Q(z) \mathcal{A} \in (P, K)$, если выполняются условия I—II. Если полином $P(z)$ не допускает ни одного адьюнктного полинома, т. е. $\mathcal{A}(P, K) = \Lambda$ то он называется *инфраполиномом*, обусловленным на K .

В работе продолжают исследования, проведённые автором в работах [6,7] в случае, когда берётся одно линейное отношение коэффициентов полинома. Исследуется, в особенности, случай, когда множество K действительно. В этом случае даётся одно необходимое и достаточное условие (Теорема 6), для того, чтобы многочлен $P(z) \in \mathcal{P}^n$ был инфраполиномом на K .

В теоремах 7—9 дано несколько результатов, касающихся случая, когда числа $\{\alpha_k\}$, входящие в условие связи (4), являются действительными числами. Так, например, показывается (Теорема 8), что, если K является действительным множеством, и числа $\{\alpha_k\}$ удовлетворяют кроме того определённому условию, тогда у любого инфраполинома $P(z)$ на K все действительные корни являются отличными и разделёнными от точек множества K .

PROPRIÉTÉS DE STRUCTURE DE CERTAINS INFRAPOLYNÔMES CONDITIONNÉS

(R é s u m é)

Soit K un ensemble compact du plan complexe (z) et \mathcal{P}^n la classe de tous les polynômes de degré n dont les coefficients satisfont à la relation linéaire donnée (4).

On dit d'un polynôme $Q(z) \in \mathcal{P}^n$ qu'il est une *polynôme adjoint* de $P(z) \in \mathcal{P}^n$ sur l'ensemble K et l'on note $Q(z) \mathcal{A} \in (P, K)$, si les conditions I-II sont remplies. Si le polynôme $P(z)$ n'admet aucun polynôme adjoint, c'est à dire si $\mathcal{A}(P, K) = \Lambda$, il prend alors le nom d'*infrapolynôme conditionné* sur K .

L'auteur poursuit dans son article des recherches antérieures [6, 7] relatives au cas où l'on prend une seule relation linéaire entre les coefficients du polynôme. Il étudie spécialement le cas où l'ensemble K est réel. Il donne dans ce cas une condition nécessaire et suffisante (Théorème 6) pour qu'un polynôme $P(z) \in \mathcal{P}^n$ soit un infrapolynôme sur K .

Les théorèmes 7—9 présentent quelques résultats relatifs au cas où les nombres $\{\alpha_k\}$ entrant dans la condition de liaison (4) sont des nombres réels. On montre ainsi, par exemple (Théorème 8) que, si K est un ensemble réel et si les nombres $\{\alpha_k\}$ vérifient en outre une certaine condition, alors tout infrapolynôme $P(z)$ sur K a toutes ses racines réelles distinctes et séparées par les points de l'ensemble K .

LEGĂTURA FORMULEI DE DERIVARE NUMERICĂ A LUI V. N. FADEEVA, CU DIFERENȚELE DIVIZATE

de

D. V. IONESCU

*Comunicare prezentată la prima Sesiune științifică a Institutului pedagogic de 3 ani,
Baia Mare, în ziua de 13 februarie 1965*

Să considerăm o funcție $f(x)$ de clasa C^6 pe intervalul $[a, b]$ și nodurile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică cu rația h , luate pe acest interval. V. N. Fadeeva [1] a pus în evidență formula de derivare numerică

$$\Delta^2 f(x_1) = f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) = \frac{h^2}{12} [f''(x_1) + 10f''(x_2) + f''(x_3)] + O(h^6) \quad (1)$$

pe care a aplicat-o în unele probleme de fizică matematică, la integrarea numerică a unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea cu condiții la limită.

V. N. Fadeeva a demonstrat formula (1), arătând că ea se obține din dezvoltarea lui $f(x+h)$, $f(x+2h)$ după puterile lui h , făcându-se grupări convenabile de termeni.

În această lucrare vom da o nouă demonstrație pentru formula (1) punând în evidență originea ei și determinând restul ei sub formă de integrală definită. În același timp vom stabili o legătură între formula (1) și diferențele divizate, din care va rezulta posibilitatea unor noi extinderi ale formulei (1).

1. Am demonstrat [2] că diferența divizată a funcției $f(x)$ pe nodurile x_1, x_2, x_3 luate oricum pe intervalul $[a, b]$ se poate reprezenta printr-o integrală definită

$$[x_1, x_2, x_3; f] = \int_{x_1}^{x_3} \varphi(x) f''(x) dx \quad (2)$$

unde, în cazul $x_1 < x_2 < x_3$, funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile

$$\varphi_1(x) = \frac{x-x_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x_3-x}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (3)$$

Funcția $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_1, x_3) . Aplicînd la membrul al doilea al formulei (2), o formulă de cuadratură relativă la funcția $f''(x)$, cu nodurile simple x_1, x_2, x_3 obținem formula

$$[x_1, x_2, x_3; f] = A_1 f''(x_1) + A_2 f''(x_2) + A_3 f''(x_3) + R \quad (4)$$

care este de tipul formulei (1).

Coefficienții A_1, A_2, A_3 , din formula (4) sînt

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) - (x_2 - x_3)^2}{12(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ A_2 &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1)^2}{12(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ A_3 &= \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)^2}{12(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

iar restul R este exprimat printr-o integrală definită

$$R = \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^5(x) dx \quad (6)$$

în care funcția $\psi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ care sînt soluțiile ecuațiilor diferențiale

$$\psi_1'''(x) = \varphi_1(x), \quad \psi_2'''(x) = \varphi_2(x) \quad (7)$$

care satisfac la condițiile la limită

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= 0, & \psi_1'(x_1) &= 0 \\ \psi_2(x_2) &= \psi_1(x_2), & \psi_2'(x_2) &= \psi_1'(x_2) \\ \psi_2(x_3) &= 0, & \psi_2'(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Este ușor să se integreze sistemul de ecuații diferențiale (7) cu condițiile (8). Ținînd seama de condițiile la limită din nodurile x_1 și x_3 avem

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_{x_1}^x \frac{(x-s)^2}{2} \varphi_1(s) ds + \lambda \frac{(x-x_1)^2}{2} \\ \psi_2(x) &= \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^2}{2} \varphi_2(s) ds + \mu \frac{(x-x_3)^3}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

unde λ și μ sînt două constante oarecare.

Scriind că și condițiile la limită din nodul x_2 sînt îndeplinite avem un sistem de ecuații care determină pe λ și μ . Se obține

$$\lambda = -A_1, \quad \mu = A_3 \quad (10)$$

Deducem astfel că $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sînt date de formulele

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{(x-x_1)^4}{24(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - A_1 \frac{(x-x_1)^2}{2} \\ \psi_2(x) &= -\frac{(x-x_3)^4}{24(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + A_3 \frac{(x-x_3)^2}{2},\end{aligned}\quad (11)$$

unde coeficienții A_1 , A_3 sînt dați de formulele (5).

Graficul funcției ψ' pe intervalul $[x_1, x_3]$ depinde de poziția nodului x_2 față de intervalul $[\xi, \xi']$, unde nodurile ξ , ξ' sînt date de formulele

$$\xi - x_1 = x_3 - \xi' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (x_3 - x_1) \quad (12)$$

Este important să observăm că dacă se descrie un cerc cu centrul în x_3 și rază $x_3 - x_1$ se notează cu P_1 nodul x_1 și cu M_1 punctul luat pe cerc astfel ca $P_1 M_1$ să fie latura decagonului regulat înscris în cerc și cu P'_1 simetricul lui P_1 în raport cu M_1 , atunci nodul ξ este proiecția punctului P'_1 pe axa Ox. Nodul ξ' este simetricul lui ξ în raport cu mijlocul intervalului (x_1, x_3) .

Dacă nodul x_2 este situat pe intervalul $(x_1, \xi]$ funcția $\psi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_1, x_3) , iar dacă nodul x_2 este situat pe intervalul $[\xi', x_3)$ funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) . Dacă nodul x_2 este situat pe intervalul (ξ, ξ') funcția $\psi(x)$ se anulează o dată pe intervalul (x_1, x_3) . Formula (4) are gradul de excitație 4, pentru orice x_2 din intervalul (x_1, x_3) , afară de cazul $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{3}$. În acest caz graficul funcției $\psi(x)$ este simetric față de mijlocul intervalului (x_1, x_3) și prin urmare avem

$$\int_{x_1}^{x_3} \psi(x) dx = 0 \quad (13)$$

Să construim formula de derivare numerică (4) pentru $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, să demonstrăm că gradul ei de exactitate este egal cu 5 și că în acest caz ea coincide cu formula (1).

2. Pentru aceasta să observăm că în cazul $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, în formula (2) avem

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_1}{2h^2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x - x_3}{2h^2} \quad (14)$$

La membrul al doilea al formulei (2) să aplicăm o formulă de caudratură cu nodurile simple x_1 , x_3 și nodul dublu x_2 . Vom obține o formulă de forma

$$\int_{x_1}^{x_3} \varphi(x) f''(x) dx = B_1 f''(x_1) + B_2 f''(x_2) + B_3 f''(x_3) + \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (15)$$

în care funcția $\psi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ care sînt soluțiile ecuațiilor diferențiale

$$\psi_1^{(4)}(x) = \frac{x - x_1}{2h^2}, \quad \psi_2^{(4)}(x) = -\frac{x - x_3}{2h^2} \quad (16)$$

și care verifică condițiile la limită

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= 0, & \psi_1'(x_1) &= 0, & \psi_1''(x_1) &= 0 \\ \psi_2(x_2) &= \psi_1(x_2), & \psi_2'(x_2) &= \psi_1'(x_2), & \psi_2''(x_2) &= \psi_1''(x_2) \\ \psi_2(x_3) &= 0, & \psi_2'(x_3) &= 0, & \psi_2''(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

În formula (15), avem

$$B_1 = -\psi_1'''(x_1), \quad B_2 = \psi_1'''(x_2) - \psi_2'''(x_2), \quad B_3 = \psi_2'''(x_3) \quad (18)$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (16) care verifică condițiile la limită (17) din nodurile x_1 și x_3 sînt

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \int_{x_1}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_1) ds + \lambda \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_3) ds + \mu \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (19)$$

unde λ și μ sînt constante oarecare.

Ținînd seama că

$$\int_{x_1}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_1) ds = \frac{(x-x_1)^5}{5!}, \quad \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_3) ds = \frac{(x-x_3)^5}{5!}$$

ecuațiile (14) se reduc la

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_1)^5}{5!} + \lambda \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_3)^5}{5!} + \mu \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (20)$$

Scriind că funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ verifică condițiile la limită (17) din nodul x_2 , avem ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^5}{5!} + \lambda \frac{(x_2-x_1)^3}{3!} &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^5}{5!} - \mu \frac{(x_3-x_2)^3}{3!} \\ \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^4}{4!} + \lambda \frac{(x_2-x_1)^2}{2!} &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^4}{4!} + \mu \frac{(x_3-x_2)^2}{2!} \\ \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^3}{3!} + \lambda \frac{x_2-x_1}{1!} &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^4}{4!} - \mu \frac{x_3-x_2}{1!} \end{aligned}$$

care, din cauză că $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, se reduc la

$$\lambda + \mu = 0, \quad \lambda - \mu = -\frac{1}{12},$$

și vom avea deci

$$\lambda = -\frac{1}{24}, \quad \mu = \frac{1}{24}.$$

ecuațiile (20) sînt prin urmare

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{1}{24} \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_3)^5}{5!} + \frac{1}{24} \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (21)$$

Observăm că mai putem scrie

$$\psi_1(x) = \frac{(x-x_1)^3}{240h^2} \left[(x-x_1)^2 - \frac{5}{3}h^2 \right], \quad \psi_2(x) = \frac{(x_3-x)^3}{240h^2} \left[(x_3-x)^2 - \frac{5}{3}h^2 \right] \quad (21')$$

de unde rezultă că funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) .

Formulele (18) arată că

$$B_1 = \frac{1}{24}, \quad B_2 = \frac{5}{12}, \quad B_3 = \frac{1}{24} \quad (22)$$

Deoarece nodurile x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică cu rația h , avem

$$[x_1, x_2, x_3 : f] = \frac{\Delta^2 f(x_1)}{2! h^2} = \frac{1}{2h^2} [f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)] \quad (23)$$

O dată obținute formulele (21), (22), (23), din formulele (2), (15) deducem că

$$f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) = \frac{h^2}{12} [f''(x_1) + 10f''(x_2) + f''(x_3)] + R, \quad (24)$$

unde

$$R = 2h^2 \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (25)$$

Am obținut astfel formula de derivare numerică (24), adică formula (1), utilizată de V. N. Fadeeva și în care am precizat restul prin formula (25). Formula (24) are gradul de exactitate egal cu 5, deoarece am demonstrat că funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) .

Фără greutate se arată că

$$2h^2 \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) dx = -\frac{h^6}{240}$$

de unde rezultă că restul R se mai scrie sub forma

$$R = -\frac{h^6}{240} f^{(6)}(\xi) \quad (25')$$

unde $\xi \in (x_1, x_3)$. Deducem evaluarea restului

$$|R| \leq \frac{h^6}{240} M_6, \quad M_6 = \sup_{(x_1, x_3)} |f^{(6)}(x)| \quad (26)$$

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Fadeeva, *La méthode des droites appliquée à quelques problèmes aux limites* (en russe). „Trudî mat. In-ta“ 28, 1949, p. 73—103.
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice* (cap. III). Editura tehnică, București, 1957.
3. D. V. Ionescu, *Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva*. „Annales Polonici Mathematici“ XIV (1964), p. 169—181.

СВЯЗЬ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В. Н. ФАДЕЕВОЙ С РАЗНОСТНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

(Резюме)

В работе устанавливается связь формулы численного дифференцирования (1) с формулой (2), дающей представление разностных отношений $[x_1, x_2, x_3; f]$ посредством определенного интеграла.

Применив к интегралу из формулы (2) формулу квадратуры с простыми узлами x_1, x_2, x_3 , получается формула (4) с коэффициентами (5) и остатком (6). График функции ψ в интервале $[x_1, x_3]$ зависит от положения узла x_2 по отношению к интервалу $[\xi, \xi']$, где узлы ξ, ξ' даны формулами (12). Функция ψ сохраняет свой знак в интервале (x_1, x_2) , если $x_2 \in (x_1, \xi]$ или $x_2 \in [\xi', x_3)$, однако изменяет свой знак, когда $x_2 \in (\xi, \xi')$. Для любого $x_2 \neq \frac{x_1 + x_3}{2}$ формула (4) имеет степень точности равную 4.

Для $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ степень точности формулы (4) равна 5 и формула (4) становится формулой Н(1)В. Н. Фадеевой. В работе остаток формулы (1) выражается в виде определенного интеграла и дается его оценка при помощи неравенства (26).

LA RELATION DE LA FORMULE DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE DE V.N. FADEEVA
AVEC LES DIFFÉRENCES DIVISÉES

(R é s u m é)

L'auteur établit une relation entre la formule de dérivation numérique (1) et la formule (2) qui donne la représentation de la différence divisée $[x_1, x_2, x_3; f]$ par une intégrale définie.

En appliquant à l'intégrale de la formule (2) une formule de quadrature à noeuds simples x_1, x_2, x_3 , on obtient la formule (4) avec les coefficients (5) et le reste (6). Le graphique de la fonction ψ dans l'intervalle x_1, x_3 , dépend de la position du noeud x_2 par rapport à l'intervalle $[\xi, \xi']$, où les noeuds ξ, ξ' sont donnés par les formules (12). La fonction ψ garde son signe dans l'intervalle (x_1, x_3) si $x_2 \in (x_1, \xi]$ ou $x_2 \in [\xi', x_3)$, mais elle change de signe quand $x_2 \in (\xi, \xi')$. Pour tout $x_2 \neq \frac{x_1 + x_3}{2}$, la formule (4) a un degré d'exactitude égal à 4.

Pour $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, le degré d'exactitude de la formule (4) est égal à 5 et la formule (4) devient la formule (1) de V. N. Fadeeva. L'auteur met le reste de la formule (1) sous forme d'intégrale définie et donne son évaluation par l'inégalité (26).

FAMILII DE FUNCȚII CU PROPRIETATEA LUI STURM

de

IOAN A. RUS

1. Fie F o mulțime de funcții, definite și continue pe un anumit interval $[a, b]$. Vom da la început următoarea

DEFINIȚIE.

Familia de funcții F are proprietatea lui Sturm pe intervalul $[a, b]$, dacă oricare ar fi funcția $f \in F$, între două zerouri consecutive x_1 și x_2 ale ei, orice altă funcție $g \in F$ ce nu se anulează în x_1 și x_2 se anulează o dată și numai o dată în intervalul (x_1, x_2) .

De exemplu familiile de funcții

$$\text{a) } y = c_1 e^{c_2 x} \sin x$$

$$\text{b) } y = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

C_1 și C_2 , constante arbitrare, au proprietatea lui Sturm.

Scopul notei de față este de a stabili anumite condiții suficiente pentru ca o familie de funcții F să aibă proprietatea lui Sturm.

2. Înainte de a trece la chestiunea propriu-zisă amintim unele rezultate cunoscute ([2], [3]) pe care le vom utiliza în cele ce urmează.

LEMA 1. Fie funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ continue în intervalul $[a, b]$ împreună cu derivatele de ordinul I. Dacă Wronskianul acestor funcții

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

în orice punct al intervalului $[a, b]$, atunci zerourile lor se separă în acest interval.

LEMA 2. (Tonelli). Fie funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ definite în intervalul $[a, b]$ și care satisfac următoarele condiții:

1° φ_1 și φ_2 au derivate de ordinul întâi continue,

2° $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$, $\varphi_2(x) > 0$, $x \in (a, b)$

$\varphi_1(x) > 0$, $x \in [a, b]$.

Atunci există un $\lambda > 0$ și $x_0 \in (a, b)$ astfel ca

$$\varphi_1(x_0) = \lambda \varphi_2(x_0), \quad \varphi_1'(x_0) = \lambda \varphi_2'(x_0).$$

3. Să trecem acum și să stabilim

TEOREMA 1. Fie F o familie de funcții definite pe un anumit interval $[a, b]$

Dacă

1. $F \subset C^1 [a, b]$,
2. Oricare ar fi $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x) \in F$, Wronskianul lor sau este identic egal cu zero sau este diferit de zero în orice punct al intervalului $[a, b]$, familia F are proprietatea lui Sturm.

Demonstratie. Într-adevăr dacă Wronskianul a două funcții din familia F este identic nul, atunci ele sînt liniar dependente și deci au toate zerourile comune. Dacă Wronskianul este diferit de zero, pe baza Lemei 1 zerourile lor se separă.

Din teorema de mai sus rezultă că soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul al doilea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

formează o familie de funcții cu proprietatea lui Sturm. Teorema 1 constituie astfel o generalizare a teoremei lui Sturm.

TEOREMA 2. Fie F o familie de funcții definite pe un anumit interval $[a, b]$

Dacă

- 1° $F \subset C^1 [a, b]$,
- 2° din $f \in F$ rezultă $\lambda f \in F$ pentru orice λ real,
- 3° Oricare ar fi λ și μ reali iar f și $g \in F$ sau ecuația $\lambda f + \mu g = 0$, nu are zerouri multiple sau $\lambda f + \mu g \equiv 0$. Rezultă că F are proprietatea lui Sturm.

Demonstratie. Dacă $\lambda f + \mu g \equiv 0$ atunci funcțiile f și g au toate zerourile comune. Să presupunem deci că ne situăm în cazul în care $\lambda f + \mu g \not\equiv 0$. Fie x_1 și x_2 două zerouri consecutive ale unei funcții $f \in F$. Să arătăm că oricare ar fi funcția $g \in F$ ce nu se anulează în x_1 și x_2 , ea se anulează o dată și numai o dată în interiorul intervalului (x_1, x_2) . Să presupunem contrariul și anume că g nu s-ar anula în intervalul (x_1, x_2) . Pe baza condiției 2° din teoremă putem presupune că avem

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \quad f(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2) \\ g(x) > 0, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Din Lema 2, rezultă că există un $\lambda > 0$, și un $x_0 \in (x_1, x_2)$ astfel ca

$$g(x_0) = \lambda f(x_0), \quad g'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Cu alte cuvinte ecuația

$$g(x) - \lambda(f)x = 0$$

admite pe x_0 ca zero multiplu, fapt ce vine în contradicție cu condiția 3° din teoremă și astfel teorema este complet demonstrată.

Să considerăm ecuația diferențială

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

în condițiile :

1° funcția $F(x, y, y', y'')$ este omogenă în raport cu ansamblul variabilelor y, y', y'' .

2° funcția F satisface o condiție de existență și unicitate a problemei lui Cauchy.

Din Teorema 2 rezultă că soluția generală a ecuației (1) formează o familie de funcții cu proprietatea lui Sturm. Teorema 2 constituie astfel o generalizare a teoremei lui Tonelli [1].

4. Probleme deschise.

1. În ce condiții o familie de funcții de formă

$$y = f(x; c_1, c_2)$$

are proprietatea lui Sturm?

2. În ce condiții o familie de funcții definită implicit de ecuația

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0$$

are proprietatea lui Sturm?

3. Dacă F este o familie de funcții cu proprietatea lui Sturm, în ce condiții familia F' de funcții formată din derivatele funcțiilor din F are proprietatea lui Sturm. Aceasta ar constitui o generalizare a unei bine cunoscute teoreme a lui V. A. Markov.

BIBLIOGRAFIE

1. Tonelli, L., *Un'osservazione su un teorema di Sturm*, „Boll. Un. Mat. It.”, **6**, 126—128 (1927).
2. Rus, I. A., *Asupra unor teoreme de tip Sturm*, „Studia Universitatis Babeş-Bolyai”, Cluj, fasc. 2, 1962, p. 33.
3. Rus, I. A., *Asupra rădăcinilor componentelor soluțiilor unui sistem de două ecuații diferențiale de ordinul 1*, „Studii și Cercet. de Matem.”, Cluj, **XIV**, nr. 1 (1963), p. 153.

СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ СО СВОЙСТВОМ ШТУРМА

(Резюме)

В начале работы даётся определение семейства функций со свойством Штурма. Определённые следующие: Семейство функций F имеет свойство Штурма в интервале $[a, b]$, если какой бы ни была функция f из F , между двумя последовательными её нулями x_1 и x_2 любая другая функция g из F , которая не равняется нулю в x_1 и x_2 , равняется нулю один и только один раз в интервале (x_1, x_2) .

Затем устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть F семейство функций, определённых в интервале $[a, b]$.

Если

1° $F \subset C^1 [a, b]$

2° Какими бы ни были φ_1 и $\varphi_2 \in F$ их вронскиан либо идентично равен нулю, либо разный от нуля в любой точке интервала $[a, b]$, тогда семейство F обладает свойством Штурма.

Теорема 2. Пусть F семейство функций, определенных в интервале $[a, b]$.

Если

1° $F \subset C^1 [a, b]$

2° Из $f \in F$ следует $\lambda f \in F$ для всякого действительного значения λ .

3° Какими бы ни были действительные значения λ и μ , а f и $g \in F$ либо уравнение $\lambda f + \mu g = 0$ не имеет многократных нулей, либо $\lambda f + \mu g \equiv 0$, тогда F обладает свойством Штурма.

В конце работы формулируются три нерешённые задачи.

FAMILLES DE FONCTIONS AYANT LA PROPRIÉTÉ DE STURM

(R é s u m é)

L'auteur définit d'abord ce qu'on entend par une famille de fonctions ayant la propriété de Sturm, à savoir : La famille de fonctions F a la propriété de Sturm dans l'intervalle $[a, b]$ si, quelle que soit la fonction $f \in F$, entre deux de ses zéros consécutifs x_1 et x_2 , toute autre fonction $g \in F$ ne s'annulant pas en x_1 et x_2 s'annule une fois et seulement une fois dans l'intervalle (x_1, x_2) .

On établit ensuite les théorèmes suivants :

Théorème 1. Soit F une famille de fonctions définies pour un certain intervalle $[a, b]$:

Si

1° $F \in C^1 [a, b]$,

2° Quels que soient φ_1 et $\varphi_2 \in F$, leur wronskien est, soit identiquement égal à zéro, soit différent de zéro en tout point de l'intervalle $[a, b]$,

Alors la famille F possède la propriété de Sturm.

Théorème 2. Soit F une famille de fonctions définies pour un certain intervalle $[a, b]$:

Si

1° $F \in C^1 [a, b]$,

2° de $f \in F$ résulte $\lambda f \in F$ pour tout λ réel,

3° Quels que soient λ et μ réels et que f et $g \in F$ ou que l'équation $\lambda f + \mu g = 0$ n'aient pas de zéros multiples ou si $\lambda f + \mu g = 0$, il résulte que F a la propriété de Sturm.

A la fin de l'article sont énoncés trois problèmes non résolus.

O METODĂ DE REZOLVARE A PROBLEMEI DE PROGRAMARE CONVEXĂ

de

I. MARUȘCIAC și M. RĂDULESCU

1. Una dintre metodele cele mai mult folosite în diverse probleme de extremum, în particular și în probleme de programare, este metoda gradientului. Modul cum este ea însă adaptată la diferite probleme concrete variază de la caz la caz. În problema de programare liniară această metodă a fost folosită de către S. I. Zuhovițki în [2], unde se dă un algoritm finit pentru rezolvarea unei probleme generale de programare liniară.

În programare patritică metodele folosite caută să reducă problema de programare patritică la mai multe subprobleme de programare liniară [3], sau în cazuri particulare se folosesc metode speciale ca, de exemplu, metoda capacității [1, 4].

O parte din lucrările apărute și legate de această problemă sînt consacrate problemelor teoretice privind programarea convexă, stabilindu-se diferite teoreme corespunzătoare de dualitate sau de existență a minimumului, respectiv a maximumului.

În prezenta lucrare ne-am propus să aplicăm metoda gradientului pentru construirea unui algoritm cu ajutorul căruia se rezolvă o problemă de programare convexă, care conține ca un caz particular problema generală de programare patritică.

2. Fie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o funcție de n variabile x_1, x_2, \dots, x_n , continuă și care admite derivate f'_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) continue într-o regiune Ω din spațiul euclidian al variabilelor (x_1, \dots, x_n) definită de inegalitățile

$$\Delta_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

În cele ce urmează vom presupune că mulțimea Ω nu este vidă și că funcția $f(x_1, \dots, x_n)$ este o funcție convexă pe punctele mulțimii Ω adică pentru orice punct $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ din Ω corpul definit de

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

este un corp convex.

Problema de programare de care ne ocupăm este următoarea: să se găsească minimul funcției $f(x_1, \dots, x_n)$ în condițiile ca punctul $x = (x_1, \dots, x_n)$ să aparțină mulțimii Ω .

Se observă că problema enunțată conține ca un caz particular și problema de programare patritică. Pentru aceasta e suficient ca funcția $f(x_1, \dots, x_n)$ să fie o funcție patritică pozitiv definită în domeniul Ω .

Mai observăm că dacă unul din punctele care realizează minimul absolut al funcției $f(x_1, \dots, x_n)$ este conținut în Ω , atunci acesta constituie soluția problemei. De aceea presupunem că punctele de minim absolut nu aparțin lui Ω .

3. Trecem acum la descrierea algoritmului.

Se pleacă de la un punct arbitrar $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ din Ω și se consideră suprafața de nivel

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (2)$$

Presupunem mai întâi că în x avem $\Delta_i(x) > 0$, $i = 1, \dots, m$. Din acest punct ne deplasăm pe direcția gradientului funcției $f(x_1, \dots, x_n)$ spre interiorul corpului

$$f(x) \leq f(x^0), \quad (3)$$

unde am notat pentru prescurtare cu $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, pînă ce întîlnim unul din planele

$$\Delta_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

sau pînă la punctul în care $f(x)$ ia valoarea minimă.

Pentru aceasta calculăm gradientul funcției $f(x)$ în punctul x^0 , adică vectorul $z^0 = (\zeta_1^0, \dots, \zeta_n^0)$, unde

$$\zeta_k^0 = \left[\frac{f'_{x_k}}{\pm \sqrt{\sum f'^2_{x_k}}} \right]_{x=x^0}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

și alegem semnul din fața radicalului în așa fel ca

$$\left[\frac{d}{dt} f(x^0 + tz^0) \right]_{t=0} < 0,$$

adică funcția $f(x)$ ($x = x^0 + tz^0$) să descrească pe această direcție.

Calculăm apoi valorile lui t din expresiile

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k + t\zeta_k^0) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

adică

$$t = t_i = - \frac{\Delta_i(x^0)}{\sum_{k=1}^n a_{ik} \zeta_k^0}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Fie

$$\tau'_i = \min_{(i)} t_i > 0.$$

Presupunem că τ'_0 este atins pentru $i = 1$ și numai pentru acesta. (Încăz că minimumul este atins pentru mai mulți indici, acest pas nu există și se trece dintr-odată la pasul următor.)

Calculăm apoi minimumul funcției

$$g(t) = f(x^0 + tz^0).$$

Fie τ'_0 cea mai mică valoare a lui t pentru care $g(t)$ își atinge minimumul.

Notăm cu

$$\tau_0 = \min(\tau'_1, \tau'_0).$$

A doua aproximație va fi punctul

$$x^1 = x^0 + \tau_0 z^0.$$

Dacă $\tau_0 < \tau'_0$ atunci punctul x^1 joacă rolul lui x^0 și, prin urmare, se trece la punctul x^2 urmînd aceeași cale prin care s-a trecut de la x^0 la x^1 .

Dacă $\tau_0 = \tau'_0$ adică punctul x^1 se găsește în planul $\Delta_1(x) = 0$, se consideră suprafața de nivel

$$f(x) = f(x^1)$$

și se determină versorul gradientului funcției $f(x)$ în punctul x^1 după formulele (5), luate însă în punctul x^1 , alegînd și aici semnul din fața radicalului astfel ca funcția $f(x)$ să fie descrescătoare, adică așa încît

$$\left[\frac{d}{dt} f(x^1 + tv^1) \right]_{t=0} < 0,$$

unde prin $v = (v_1^1, \dots, v_n^1)$ am notat versorul gradient al funcției $f(x)$ în punctul x^1 .

Dacă pentru t suficient de mic punctele $x = x^1 + tv^1$ verifică toate ecuațiile sistemului (1), atunci ne deplasăm în continuare pe această direcție. Pentru aceasta observăm că e suficient să verificăm numai inegalitatea $\Delta_1(x^1 + tv^1) > 0$, ceea ce revine la a verifica dacă expresia

$$\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k^1 \geq 0, \quad (6)$$

deoarece din $\Delta_i(x^1) > 0$, pentru $i = 1$, rezultă că avem și $\Delta_i(x^1 + tv^1) > 0$ dacă t este suficient de mic.

Dacă inegalitatea (6) este verificată, atunci din punctul x^1 ne deplasăm pe direcția vectorului $z^1 = v^1$, ca și la pasul precedent.

Dacă $a_{1k} = C v_k^1$, $k = 1, \dots, n$, $C = \text{const.}$, atunci punctul x^1 este un punct *optimal*, căci în acest caz planul $\Delta_1(x) = 0$ este tangent la

suprafața de nivel $f(x) = f(x^1)$ în punctul x^1 și punctele pentru care $f(x) \leq f(x^1)$ se află în regiunea negativă a planului $\Delta_1(x) = 0$.

Dacă $\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k^1 < 0$, atunci ne deplasăm de-a lungul proiecției versorului v^1 pe planul $\Delta_1(x) = 0$, adică determinăm versorul $z^1 = (\zeta_1^1, \dots, \zeta_n^1)$ din formula

$$\zeta_k^1 = v_k^1 + \lambda_1 a_{1k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

unde λ_1 se determină punând condiția ca z^1 să fie conținut în planul $\Delta_1(x) = 0$, adică

$$\lambda_1 = - \frac{\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k^1}{\sum_{k=1}^n a_{1k}^2} > 0.$$

Din punctul x^1 ne deplasăm pe direcția versorului z^1 pînă ce ajungem din nou fie la un alt plan de ecuație (4), fie la un punct de minim al funcției $f(x^1 + tz^1)$ în raport cu t .

Să presupunem că procedînd în modul arătat mai sus am ajuns la un punct $x^p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$ pentru care

$$\Delta_1(x^p) = \Delta_2(x^p) = \dots = \Delta_q(x^p) = 0, \quad 1 \leq q < n, \\ \Delta_i(x^p) > 0, \quad i = q + 1, \dots, m.$$

Considerăm și de data aceasta suprafața de nivel

$$f(x) = f(x^p)$$

și construim versorul gradient $v^p = (v_1^p, \dots, v_n^p)$ al funcției $f(x)$ în punctul x , orientat înspre interiorul corpului mărginit de suprafața $f(x) = f(x^p)$ adică calculînd componentele sale după formula

$$v_k^p = \left[\frac{f'_{x_k}}{\pm \sqrt{\sum_{x_k} f_{x_k}^2}} \right]_{x=x^p}, \quad p, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

și alegînd semnul din fața radicalului astfel ca să avem

$$\left[\frac{d}{dt} f(x^p + tv^p) \right]_{t=0} < 0.$$

Dacă acest versor este conținut în Ω , atunci ne deplasăm pe această direcție pînă se ajunge la un nou punct x^{p+1} , care este sau punct de minim pentru $f(x)$, sau este situat pe un alt plan din planele (4), diferit de primele q plane.

Analitic aceasta se verifică analizând semnul sumelor $\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^p$.

Dacă

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^p \geq 0, i = 1, 2, \dots, q,$$

atunci versorul v^p se găsește în domeniul Ω . În acest caz funcția $f(x)$ poate fi micșorată mergând pe această direcție și procedând ca la primul pas.

Dacă există un plan $\Delta_{i_0}(x) = 0$ ($1 \leq i_0 \leq q$), pentru care

$$\sum_{k=1}^n a_{i_0 k} v_k^p < 0,$$

atunci versorul v^p nu intră în Ω și deci nu ne putem deplasa pe această direcție. În acest caz ne vom deplasa pe direcția proiecției versorului v^p pe muchia comună a planelor $\Delta_1(x) = 0, \dots, \Delta_p(x) = 0$, adică pe direcția vectorului $z^p = (\zeta_1^p, \dots, \zeta_n^p)$ determinat din relațiile

$$\zeta_k^p = v_k^p + \sum_{j=1}^q \lambda_j a_{jk}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

unde parametrii $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ se determină din condițiile

$$\sum_{k=1}^n \left(v_k^p + \sum_{j=1}^q \lambda_j a_{jk} \right) a_{ik} = 0, i = 1, 2, \dots, q. \quad (10)$$

Acest sistem poate fi rezolvat relativ ușor, observînd că dacă notăm cu $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$ vectorii normali ai planelor (4), determinantul sistemului

$$\sum_{j=1}^q \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} a_{ik} \right) \lambda_j = - \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^p, \quad (11)$$

sau

$$\sum_{j=1}^q (a^i a^j) \lambda_j = - (a^i v^p) \quad (12)$$

este un determinant a lui Gramm

$$D = \begin{vmatrix} (a^1 a^1) & (a^1 a^2) & \dots & (a^1 a^q) \\ (a^2 a^1) & (a^2 a^2) & \dots & (a^2 a^q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^q a^1) & (a^q a^2) & \dots & (a^q a^q) \end{vmatrix} \quad (13)$$

Dacă notăm cu D_j determinantul corespunzător numărătorului lui λ_j , adică

$$D_j = \begin{vmatrix} (a^1 a^1) & \dots & (a^1 a^{j-1}) & (a^1 v^q) & (a^1 a^{j+1}) & \dots & (a^1 a^q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^q a^1) & \dots & (a^q a^{j-1}) & (a^q v^q) & (a^q a^{j+1}) & \dots & (a^q a^q) \end{vmatrix}$$

atunci avem

$$\lambda_j = - \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (14)$$

Deoarece în cazul nostru determinantul D este diferit de zero, căci vectorii a^1, \dots, a^q sînt liniar independenți, rezultă că sistemul (12) este totdeauna compatibil. Prin urmare z^q se poate totdeauna determina și, dacă $z^q \neq 0$, atunci se ajunge la următoarea aproximație, mergînd pe această direcție, la fel ca și în cazurile precedente.

Dacă $z^q = 0$, atunci gradientul v este perpendicular pe muchia comună a plantelor

$$\Delta_1(x) = 0, \Delta_2(x) = 0, \dots, \Delta_q(x) = 0, \quad (15)$$

adică aceasta din urmă se află în planul tangent la suprafața de nivel $(x) = f(x^p)$ și în orice direcție de pe această varietate n - q -dimensională ne-am deplasa, valoarea funcției $f(x)$ crește.

Condițiile analitice pentru $z^q = 0$ se obțin din

$$v_k^p + \sum_{j=1}^q \lambda_j a_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

înlocuind pe λ_j cu valorile din (14), adică avem

$$D v_k^p - \sum_{j=1}^q D_j a_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

ceea ce reprezintă tocmai condiția ca muchia comună a planelor (15) să fie conținută în planul tangent la suprafața de nivel în punctul x^p .

Pentru a găsi o altă direcție admisă, considerăm proiecțiile gradientului v^p pe planele (15), care se determină după formule analoge cu (7), adică notînd cu $z = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_n^i)$ proiecțiile lui v^p pe planul $\Delta_i(x) = 0$, avem

$$\zeta_k^i = v_k^p - \frac{(a^i v^p)}{a^i a^i} a_{ik}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, q.$$

Verificăm dacă unul din vectorii z^i ne păstrează în domeniul Ω , adică dacă

$$(a^i a^i) (a^j v^p) - (a^i v^p) (a^i a^j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (17)$$

pentru un i fixat. Dacă pentru un anumit $i = i_1$ are loc (17), atunci ne deplasăm pe direcția z^{i_1} . Dacă inegalitățile (17) nu au loc pentru nici un $i = 1, 2, \dots, q$, atunci punctul x^p este un punct *optimal*, deoarece se poate arăta ușor că în acest caz orice direcție care intră în Ω este de partea exterioară a planului tangent dus în punctul x^p la suprafața de nivel $f(x) = f(x^p)$.

Condiția analitică de optim în acest caz este verificarea relațiilor (16) și în plus a relațiilor

$$(a^i a^i)(a^i v^p) - (a^i v^p)(a^i a^i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (18)$$

pentru cel puțin un j ; ($1 \leq j \leq q$).

Să presupunem că s-a continuat procesul de mai sus, ajungându-se într-un punct x^s în care avem

$$\Delta_1(x^s) = \Delta_2(x^s) = \dots = \Delta_r(x^s) = 0, \quad r \geq n,$$

adică la un punct situat pe planele

$$\Delta_1(x) = 0, \quad \dots, \quad \Delta_r(x) = 0. \quad (19)$$

Considerăm și în acest caz suprafața de nivel $f(x) = f(x^s)$ și gradientul $v^s = (v_1^s, \dots, v_n^s)$ al funcției $f(x)$ în punctul x^s , îndreptat înspre interiorul corpului definit de $f(x) \leq f(x^s)$.

Dacă versorul v^s intră în Ω ,adică

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^s \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (20)$$

atunci ne deplasăm pe direcția acestui vector ajungând astfel la un alt punct de aproximație mai bună.

Dacă printre expresiile

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^s, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (21)$$

există cel puțin una negativă, atunci se procedează în felul următor. Fie ρ rangul matricei coeficienților sistemului (19).

Dacă $\rho < n$, atunci planele (19) au în comun o muchie $n - \rho$ -dimensională și se procedează, prin urmare, ca la pasul precedent, când prin punctul x^p treceau mai puțin de n plane din (4).

Dacă $\rho = n$ atunci planele (19) au în comun un punct (punctul x^s). Considerăm toate muchiile determinale de câte $n-1$ plane din (19) și proiectăm vectorul gradient v^s pe aceste drepte. Fie, de exemplu, muchia determinată de planele

$$\Delta_1(x) = 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1}(x) = 0.$$

Proiectînd vectorul v^s pe această dreaptă și notînd cu $z^s = (\zeta_1^s, \dots, \zeta_n^s)$ vectorul-proiecție obținut, verificăm dacă acesta nu iese din domeniul Ω , adică dacă avem

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \zeta_k^s \geq 0, \quad i = n, n+1, \dots, r. \quad (22)$$

Dacă cel puțin pentru un indice $i = i_0$ ($n \leq i_0 \leq r$) are loc inegalitatea contrară, atunci nu ne putem deplasa pe această direcție. Dacă însă relațiile (22) au loc, atunci ne deplasăm pe această direcție ajungînd astfel la un alt punct de aproximație mai bună. Dacă relațiile (22) nu sînt verificate pentru această muchie, se consideră o altă muchie, pînă se ajunge la una pentru care relațiile analoge cu (22) sînt verificate.

În cazul cînd pentru nici una din aceste muchii relațiile (22) nu sînt verificate, atunci acest punct x^s este un punct *optimal*. Într-adevăr, în acest caz orice direcție determinată de vectorul u care intră în domeniul Ω , plecînd din punctul x^s , este o combinație liniară de opușii vectorilor proiectați z_j^s , $j = 1, 2, \dots, C_r^{n-1}$, pe muchiile ce trec prin vîrfurile x^s , cu coeficienți nenegativi, adică

$$u = - \sum_{j=1}^{C_r^{n-1}} \alpha_j z_j^s, \quad \alpha_j \leq 0, \quad \sum \alpha_j \neq 0$$

și deci produsul scalar

$$(uv^s) = - \sum_{j=1}^{C_r^{n-1}} \alpha_j (z_j^s v^s) < 0.$$

Prin urmare, punctele domeniului Ω se găsesc în partea opusă planului tangent la suprafața de nivel $f(x) = f(x^s)$ în punctul x^s față de interiorul acestei suprafețe. De aici rezultă că pe orice direcție de acest fel u funcția $f(x)$ crește.

Continuînd așa vom obține un șir de puncte $x^0, x^1, \dots, x^p, \dots$, astfel încît

$$f(x^0) < f(x^1) < f(x^2) < \dots < f(x^p) < \dots \quad (23)$$

Deoarece acesta este un șir monoton și mărginit inferior, de exemplu de $\min_{x \in U} f(x)$, unde $U = \Omega \cap [f(x) \leq f(x^0)]$, $x \in \Omega$, rezultă că șirul are o limită finită în domeiul Ω .

Fie ξ astfel că

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^p = \xi$$

și

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(x^p) = f(\xi).$$

Să arătăm că punctul $\bar{\xi}$ este un punct optimal. Pentru aceasta observăm că dacă algoritmul conține o infinitate de pași, atunci $\bar{\xi}$ nu poate fi un vîrf al poliedrului Ω și deci, pentru p suficient de mare toate punctele x se află pe o aceeași muchie $n-r$ -dimensională a lui Ω , unde $0 < r < n$. Însă atunci

$$\sum_{k=1}^n f'_{x_k}(x^p) f'_{x_k}(x^{p+1}) = 0,$$

sau

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}^{\prime 2}(x^p) + \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(x^p) [f'_{x_k}(x^{p+1}) - f'_{x_k}(x^p)] = 0.$$

Deoarece derivatele parțiale f'_{x_k} prin ipoteză sînt continue, trecînd aici la limită, obținem

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_{x_k}^{\prime 2}(x^p) = 0,$$

de unde rezultă că

$$f'_{x_k}(\bar{\xi}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Această relație arată că punctul $\bar{\xi}$ este un punct minimal și deci aproximația x^p tinde către punctul optimal căutat.

Observație. Cazul în care apar o infinitate de pași în aplicarea prezentului algoritm poate fi exclus, dacă după ce s-a constatat că după un anumit pas punctele de aproximație aparțin unei aceleași varietăți a frontierei lui Ω cu mai mult de 2 dimensiuni, se rezolvă problema de minim cu legături cu mijloacele analizei, pentru planele care trec prin această varietate. De exemplu, dacă punctul optimal este conținut pe o față a domeniului Ω $n-1$ -dimensională, adică pe unul din planele (4), atunci se rezolvă problema de minim cu legături a funcției $f(x)$ cu legătura corespunzătoare dată de ecuația planului respectiv.

4. Pentru ilustrarea metodei dăm următorul exemplu de rezolvarea unei probleme de programare patritică.

Exemplu. Fiind dată funcția

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 12x_3 + 8, \quad (24)$$

să se găsească minimumul pe punctele domeniului Ω determinat de inegalitățile

$$\begin{aligned} \Delta^1(x) &= x_1 \geq 0 \\ \Delta^2(x) &= x_2 \geq 0 \\ \Delta^3(x) &= x_3 \geq 0 \\ \Delta^4(x) &= -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Mai întâi calculăm minimum absolut al funcției $f(x)$. Anulând derivatele parțiale ale funcției $f(x)$, găsim că minimum absolut al funcției $f(x)$ este atins în punctul $(-1, 1, 2)$, care evident nu verifică sistemul (25).

Ca punct de plecare considerăm originea $x^0 = (0, 0, 0)$. Suprafața de nivel corespunzătoare este

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$$

și vectorul gradient $v^0 = (-1, 2, 6)$.

Observăm că

$$\Delta_1(x^0) = \Delta_2(x^0) = \Delta_3(x^0) = 0,$$

și deoarece punctul x^0 este un vîrf pentru domeniul Ω , verificăm dacă vectorul v^0 intră în acest domeniu, după formulele (20). Se constată că avem

$$\sum_{k=1}^3 a_{1k} v_k^0 = -1 < 0$$

și, prin urmare, vectorul v^0 iese afară din Ω .

Conform metodei descrise mai sus, determinăm proiecțiile vectorului v^0 pe muchiile determinate prin intersecția a cîte două din cele trei plane: $\Delta_1(x) = 0$, $\Delta_2(x) = 0$, $\Delta_3(x) = 0$.

Calculînd proiecția vectorului v^0 pe muchia determinată de planele $\Delta_2(x) = 0$ și $\Delta_3(x) = 0$, obținem $z_1^0 = (-1, 0, 0)$.

Avem

$$\sum_{k=1}^3 a_{1k} \zeta_{1k}^0 = -1 < 0,$$

ceea ce ne arată că acest vector-proiecție ne scoate afară din Ω .

Construind proiecția vectorului v^0 pe muchia determinată de planele $\Delta_1(x) = 0$, $\Delta_3(x) = 0$, găsim $z_2^0 = (0, 1, 0)$. Deoarece

$$\sum_{k=1}^3 a_{2k} \zeta_{2k}^0 = 1 > 0,$$

urmează că acest vector-proiecție este în Ω , deci noua direcție pe care ne vom deplasa este $z^0 = (0, 1, 0)$.

Avem

$$f(x^0 + tz^0) = 2t^2 - 4t + 8,$$

deci minimumul acesteia este atins pentru $t = \tau_0'' = 1$.

Calculînd valoarea lui t pentru care punctul de pe direcția z^0 se află în planul $\Delta_4(x) = 0$, găsim $t_4 = \tau_0' = 1$. Deci $\tau_0 = 1$. A doua aproximație este deci $x^1 = (0, 1, 0)$, în care avem

$$f(x^1) = 6.$$

Gradientul funcției $f(x)$ în acest punct este $v^1 = (-1, 0, 6)$ și avem

$$\Delta_1(x^1) = \Delta_3(x^1) = \Delta_4(x^1) = 0,$$

deci punctul x^1 este din nou un vîrf. Se vede că gradientul v^1 nu intră în domeniul Ω . Proiectînd vectorul v^1 pe muchia comună planelor $\Delta_1(x)=0$, $\Delta_4(x)=0$, găsim $z_3^1 = (0, -1, 1)$ și

$$\sum_{k=1}^3 a_{3k} z_{3k}^1 = 1 > 0$$

deci aceasta este o direcție admisă pe care ne vom deplasa în continuare.

Avem

$$f(x^1 + tz^1) = 5t^2 - 12t + 6$$

care ia valoarea minimă pentru $t = \tau_1' = \frac{6}{5}$.

Planul $\Delta_3(x)=0$ este întepat pentru $t = \tau_1' = 1$, prin urmare $\tau_1 = \tau_1' - 1$. Astfel al treilea punct de aproximație este $x^2 = (0, 0, 1)$. În acest punct

$$f(x^2) = -1. \quad (26)$$

Dacă se calculează gradientul funcției $f(x)$ în punctul x^2 se obține $v^2 = (-1, 2, 3)$. Avem

$$\Delta_1(x^2) = \Delta_2(x^2) = \Delta_4(x^2) = 0$$

și

$$\sum_{k=1}^3 a_{1k} v_k^2 = -1 < 0$$

ceea ce ne arată că v^2 nu intră în domeniul Ω .

Proiectînd vectorul v^2 pe cele trei muchii determinate de planele $\Delta_1(x) = 0$, $\Delta_2(x) = 0$ și $\Delta_4(x) = 0$ se constată că pe nici una din acestea nu ne putem deplasa, deci punctul x^2 este un punct optimal. Astfel, minimul funcției $f(x)$ este atins în punctul $x^2 = (0, 0, 1)$.

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Houthakker, *The Capacity Method of Quadratic Programming*, „Econometrica” 28, No. 1, 1960.
2. S. I. Zuhovițki, *Algoritm dlia rešenja adnoi obobščionnoi zadacii lineinovo programmirovania*, „D.A.N.” 133, nr. 1, 1960, p. 20–24.
3. P. Wolfe, *The Simplex Method for Quadratic Programming*, „Econometrica” 27, nr. 3, 1959, p.382–398.
4. P. Wolfe, *A Duality Theorem for Non-Linear Programming*, „Quarterly of Appl. Math.” 19, 1961, p. 239–244.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Р е з ю м е)

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывная функция n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , допускающая частные производные первого порядка, непрерывные по отношению ко всем n переменным в области Ω n -мерного евклидова пространства переменных (x_1, \dots, x_n) , определяемой неравенствами

$$\Delta_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Предполагается также, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является выпуклой функцией в области Ω , т.е. для любой точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ из Ω тело, определяемое

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

является выпуклым.

В работе даётся алгоритм, основанный на варианте метода градиента для решения следующей задачи экстремума: найти минимум функции $f(x_1, \dots, x_n)$, который удовлетворяет вышеупомянутым условиям на множестве Ω .

В качестве частного случая, данная задача содержит задачу квадратичного программирования, а именно в том случае, когда функция $f(x)$ является квадратичной функцией, положительно определённой на Ω .

После описания алгоритма даётся конкретный пример, к которому применяется данный метод.

MÉTHODE DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE PROGRAMMATION CONVEXE

(R é s u m é)

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , continue et admettant des dérivées partielles du 1^{er} ordre continues par rapport à toutes les n variables dans une région Ω de l'espace euclidien n -dimensionnel des variables (x_1, \dots, x_n) définie par les inégalités

$$\Delta_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

On suppose également que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction convexe dans la région Ω , c'est à dire que, pour tout point $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ de Ω , le corps défini par

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

est un corps convexe.

On donne dans le présent travail un algorithme fondé sur une variante de la méthode du gradient pour la résolution du problème suivant d'extremum: trouver le minimum de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ qui vérifie les conditions ci-dessus pour l'ensemble Ω .

Comme cas particulier ce problème comprend le problème de programmation quadratique, à savoir dans le cas où la fonction $f(x)$ est une fonction quadratique positivement définie pour Ω .

La présentation de l'algorithme est suivie d'un exemple concret auquel est appliquée la méthode décrite.

CONVERGENȚA METODEI LUI CIAPLIĞHIN PENTRU ECUAȚIILE DE TIP PARABOLIC

de

E. SCHECHTER

Mai multe lucrări, ca de exemplu [1], [3], se ocupă de extinderea metodei lui Ciapliġhin pentru ecuațiile de tip parabolic, în condiții de convexitate a membrilor dreپți. Scopul lucrării de față este de a demonstra convergența șirului de aproximații succesive fără a recurge la această ipoteză (teorema 1). Șirul astfel obținut nu mai este în general monoton dar păstrează ordinul al doilea de convergență (teorema 2). În teorema 3 se dă o delimitare a erorii pentru o aproximație oarecare în funcție de datele cunoscute. Rezultatele se pot extinde și la sisteme de ecuații în condiții de valabilitate a ipotezei P. Demonstrațiile se bazează pe o delimitare a lui J. Szarski care face posibilă adaptarea raționamentelor lui Z. Kowalski din [2] pentru cazul ecuațiilor de tip parabolic.

Să considerăm problema :

$$\begin{aligned} z_t &= z_{xx} + f(x, t, z) \\ z|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde Γ este mulțimea compusă din punctele $(x, 0)$ cu $0 \leq x \leq \alpha$ și $(0, t)$, (α, t) cu $0 \leq t < T$.

Vom nota în cele ce urmează cu $R(\alpha, \beta, \gamma)$ domeniul

$$0 \leq x \leq \alpha, \quad 0 \leq t < \beta, \quad z| \leq \gamma;$$

și cu $R^*(\alpha, \beta)$ domeniul definit de $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq t < \beta$. Vom presupune de asemenea că $f(x, t, z)$ este continuă pe $R(\alpha, T, \infty)$.

IPOTEZA H. Să presupunem că funcțiile f și f_z sînt continue pe $R(\alpha, T, a)$ și astfel ca pe acest domeniu să fie satisfăcută următoarea condiție a lui Lipschitz :

$$\begin{aligned} |f_z(x, t, \bar{u})(\bar{v} - \bar{u}) + f(x, t, \bar{u}) - f_z(x, t, u)(v - u) - f(x, t, u)| &\leq \\ &\leq L_1 |\bar{u} - u| + L_2 |\bar{v} - v|, \end{aligned}$$

L_1 și L_2 fiind niște constante. Să presupunem de asemenea că există constantele A, B , astfel ca pe $R(\alpha, T, 0)$

$$f(x, t, 0) \mid \leq A, \quad |f_z(x, t, 0)| \leq B.$$

Să notăm $M = \max \{L_1 + L_2, B\}$, $N = \max \{2aL_2, A + aB\}$; și fie $s(t)$ soluția problemei :

$$y' = My + N \quad y(0) = 0, \quad (2)$$

iar I intervalul $[0, T']$, $T' \leq T$, pe care $s(t) \leq a$. Evident $T' > 0$.

Vom defini acum formal șirul aproximațiilor succesive $z^n(x, t)$; $n = 0, 1, \dots$ prin

$$\begin{aligned} z^0(x, t) &= 0 \\ z_t^{n+1} &= z_{xx}^{n+1} + f_z(x, t, z^n) (z^{n+1} - z^n) + f(x, t, z^n) \\ z^{n+1} \mid_{\Gamma} &= 0 \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Următoarea lemă ne arată că acest șir de aproximații succesive este definit pe un domeniu convenabil ales.

LEMA 1. Fie satisfăcută ipoteza H. Atunci pentru orice n și $x \in [0, \alpha]$

$$z^n(x, t) \mid \leq s(t), \quad t \in I.$$

Demonstrație. Vom folosi metoda inducției. Afirmația este evidentă pentru $n = 0$. Pentru $n = 1$, ne folosim de teorema 2.1 a lui Szarski [6]. Într-adevăr, z^0 este soluția problemei

$$z_t = z_{xx}, \quad z \mid_{\Gamma} = 0$$

și $|f_z(x, t, 0)u(x, t) + f(x, t, 0)| \leq B|u| + A$.

Urmează, deci, că $|z^1(x, t)|$ este mai mic decât soluția ecuației :

$$y' = By + A, \quad y(0) = 0$$

care la rândul ei este majorată de soluția $s(t)$ a lui :

$$y' = My + N, \quad y(0) = 0.$$

Să presupunem proprietatea adevărată pentru n . În același mod atunci, deoarece,

$$f_z(x, t, z^n)(u - z^n) + f(x, t, z^n) \mid \leq B|u| + Ba + A$$

rezultă :

$$|z^{n+1}(x, t)| \leq s(t) \quad \text{c.e.t.d.}$$

Din lemă urmează că pentru $(x, t) \in [0, \alpha] \times I$ aproximațiile $z^n(x, t)$ sînt definite, deoarece $z(x, t) \leq a$.

LEMMA 2. Să presupunem că șirul de funcții $w_n(t)$, $t \in I$, $w_n(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$ are următoarele proprietăți :

$$1^\circ w_0(t) = 2s(t) \quad t \in I.$$

2° $w_{n+1}(t)$ este soluția problemei :

$$y' = L_1 y + L_2 w_n(t), \quad y(0) = 0; \tag{4}$$

În aceste condiții :

a) $w_n(t) \geq 0 \quad t \in I \quad n = 0, 1, \dots$

b) $w_n(t) \geq w_{n-1}(t) \geq 0 \quad t \in I \quad n = 0, 1, \dots$

c) $w'_n(t) \geq L_1 w_n(t) - L_2 w_n(t) \quad t \in I \quad n = 0, 1, \dots$

d) $w_n(t) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$ pe orice interval închis din I .

Demonstrație. Din 1° și 2° se vede că șirul este perfect determinat pe I de $s(t)$. Evident $w^0(t) \geq 0$. Presupunind $w_n \geq 0$ rezultă prin înlocuirea lui 0 în (4) că și $w_{n+1} \geq 0$. Punctele b) și c) le demonstrăm prin inducție. Avem :

$$w_n = M w_0 + 2N \geq L_1 w_0 + 2L_2 a \geq L_1 w_0 + L_2 w_0.$$

Din această inegalitate se observă și că $w_0 \geq w_1$ pe I .

Pentru w_1 avem :

$$w'_1 = L_1 w_1 + L_2 w_0 \geq L_1 w_1 + L_2 w_1$$

și de aici $w_1 \geq w_2$ pe I .

Presupunind proprietatea adevărată pentru n să o demonstrăm pentru $n + 1$.

$$w'_{n+1} = L_1 w_{n+1} + L_2 w_n \geq L_1 w_{n+1} + L_2 w_{n+1}$$

și deci $w_{n+2} \leq w_{n+1}$.

Pentru a demonstra punctul d) să observăm că din (4) și b) rezultă că $w'_n(t) \geq w'_{n+1}(t) \geq 0$ pe I și prin urmare pe orice interval închis I' conținut în I șirul $w'_n(t)$ este egal mărginit. De aici rezultă că șirul $w_n(t)$ este egal continuu (el este evident și egal mărginit), ceea ce implică uniform convergența către o funcție $w(t)$ pe I' . În consecință $w'_n(t) \rightarrow w'(t)$ pe orice interval închis $I' \subset I$. La limită din (4) urmează :

$$w'(t) = (L_1 + L_2) w(t), \quad w(0) = 0,$$

și deci $w(t) = 0$, c.c.t.d.

În continuare introducem operatorul :

$$v = T(u; f),$$

definit prin relația $v(x, t) = q(x, t) + r(x, t)$, unde

$$r(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^x \frac{\exp(-\frac{(x-\xi)^2/4(t-\tau))}{\sqrt{t-\tau}}}{\sqrt{t-\tau}} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau)) d\xi d\tau$$

iar $q(x, t)$ este soluția problemei :

$$z_t = z_{xx} \quad z \Big|_{\Gamma} = -r(x, t).$$

Proprietatea P . Orice soluție continuă a ecuației $z = T(z; f)$ este o soluție regulară a problemei (I) pe $R^\circ(\alpha, T')$.

Condiții pentru îndeplinirea acestei proprietăți se găsesc de exemplu în lucrarea [3].

TEOREMA 1. Să presupunem că proprietatea P are loc și că problema (I) are o soluție regulară unică pe $R^\circ(\alpha, T')$. Atunci în condițiile ipotezei H pe orice domeniu $R^\circ(\alpha, T'') \subset R^\circ(\alpha, T')$, ($T'' < T'$) șirul de aproximații succesive $z_n(x, t)$ definit de (3) converge uniform către soluția problemei (I).

Aici prin soluție regulară s-a înțeles ca de obicei o soluție a problemei (I) care este o dată continuu derivabilă în raport cu t și de două ori continuu derivabilă în raport cu x , iar $R^\circ(\alpha, \beta)$ este domeniul închis $[0, \alpha] \times [0, \beta]$.

Demonstrație. Să demonstrăm că pe domeniul $\bar{R}^\circ(\alpha, T'')$ sînt îndeplinite condițiile criteriului lui Cauchy. Vom delimita

$$|z^p(x, t) - z^q(x, t)|,$$

unde $p, q \geq 0$ sînt arbitrari.

Din Lema 1 rezultă că

$$|z^p(x, t) - z^q(x, t)| \leq w_0(t) \quad t \in I,$$

căci fiecare termen e mai mic ca $s(t)$.

Să observăm acum că :

$$|f_z(x, t, z^{p-1})(z^p - z^{p-1}) + f(x, t, z^{p-1}) - f_z(x, t, z^{q-1})(z^q - z^{q-1}) - f(x, t, z^q)| \leq L_1 |z^p - z^{p-1}| + L_2 |z^{p-1} - z^{q-1}|,$$

pe $R^\circ(\alpha, T')$.

Fie $p, q \geq 1$. Evident $|z^{p-1} - z^{q-1}| \leq w_0(t)$, $t \in I$. Urmează că pentru membrul întii al lui (4) avem delimitarea :

$$L_1 |z^p - z^q| + L_2 w_0$$

și conform teoremei lui Szarski :

$$|z^p - z^q| \leq w_1(t) \quad \text{pe} \quad R^\circ(\alpha, T').$$

Să admitem acum că pe același domeniu, pentru $p, q \geq n$:

$$|z^p - z^q| \leq w_n(t).$$

Atunci membrul întâi al lui (4) se delimitează prin:

$$L_1 |z^p - z^q| + L_2 w_n$$

și conform aceleiași teoreme a lui Szarski, avem pentru $p, q \geq n + 1$:

$$|z^p - z^q| \leq w_{n+1}(t).$$

De aici rezultă convergența uniformă a șirului $z(x, t)$ pe orice domeniu $R^c(\alpha, T'')$ către o funcție continuă $Z(x, t)$. Evident, atunci

$$h_n = f_z(x, t, z^n)(z^{n+1} - z^n) + f(x, t, z^n)$$

va converge către $f(x, t, Z)$. Să arătăm că Z coincide cu soluția regulară z . Avem:

$$z_n = T(z_n, h_n, 0)$$

și prin trecere la limită:

$$Z = T(Z, f, 0).$$

Conform proprietății P , $Z = z$, c.c.t.d.

TEOREMA 2. Să presupunem că pe domeniul $R^c(\alpha, T'') \subset \bar{R}^c(\alpha, T')$, $z_n(x, t)$ converge uniform către soluția problemei (1), și că f_z și f_{zz} există și sînt mărginite pe acest domeniu. Fie K și H două constante astfel ca:

$$|f_z(x, t, z)| \leq K; \quad |f_{zz}(x, t, z)| \leq H$$

Fie șirul $\tau_i(t)$, $t \in [0, T'']$ definit astfel:

$$\tau_0(t) = s(t)$$

$$\tau_{n+1}(t) = H \int_0^t e^{h(t-s)} \tau_n^2(s) ds.$$

În aceste condiții:

$$|z(x, t) - z^n(x, t)| \leq \tau_n(t), \quad \text{pe } \bar{R}^c(\alpha, T'').$$

Demonstrație. Pentru $n = 0$ afirmația este evidentă, căci $|z(x, t)| \leq s(t)$ și $z^0(x, t) = 0$. Pentru $n = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z - z_1)}{\partial t} &= \frac{\partial^2(z - z_1)}{\partial x^2} - f_z(x, t, 0) z_1 - (f(x, t, 0) + f(x, t, z) = \\ &= \frac{\partial^2(z - z_1)}{\partial x^2} - f_z(x, t, 0) z_1 + f_z(x, t, \theta z) z = \\ &= \frac{\partial^2(z - z_1)}{\partial x^2} + f_z(x, t, \theta z) z - f_z(x, t, 0) z + f_z(x, t, 0)(z - z_1), \end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1$$

Comparând cu soluția nulă a lui :

$$u_i - u_{xx} = 0 \quad u \Big|_{\Gamma} = 0,$$

primim în acord cu teorema lui Szarski, din delimitarea

$$\begin{aligned} |f_z(x, t, \theta z) z - f_z(x, t, 0) z + f_z(x, t, 0)(z - z_1)| &\leq \\ &\leq K |z - z_1| + H \tau_0^2, \end{aligned}$$

rezultatul $|z - z_1| \leq \tau_1(t)$, căci $\tau_1(t)$ este soluția problemei :

$$y' = Ky + H\tau_0^2, \quad y(0) = 0.$$

Presupunem acum proprietatea adevărată pentru un n oarecare.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial x^2} + f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z_n) + f(x, t, z_n) \\ z_{n+1} \Big|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial t} - \frac{\partial^2(z - z_{n+1})}{\partial x^2} &= f(x, t, z) - f(x, t, z_n) + \\ &+ f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z) + f_z(x, t, z_n)(z - z_n). \end{aligned}$$

Membrul al doilea se delimitează din nou în valoare absolută prin :

$$K |z - z_{n+1}| + |H z - z_n|^2 \leq K |z - z_{n+1}| + K \tau_n^2(t)$$

și deci

$$|z - z_{n+1}| \leq \tau_{n+1}(t). \text{c.c.t.d.}$$

CONSECINȚA 1. În condițiile teoremei 2 există un număr natural p , astfel ca pentru $n > p$.

$$|z(x, t) - z^n(x, t)| \leq \frac{C}{2^{2^n}} \quad \text{pe} \quad R^\circ(\alpha, T''),$$

C fiind o constantă independentă de n .

Demonstrație : Să notăm :

$$G = H e^{KT''}, \quad C_1 = 1/2HT''e^{KT''}, \quad \varepsilon = 1/2T''.$$

Avem atunci :

$$\tau_{n+1}(t) < G \int_0^t \tau_n^2(s) ds$$

Fie p un număr natural, astfel ca $\tau_p(t) < C_1$ pentru $t \in [0, T'']$. Un astfel de p există în virtutea convergenței uniforme către zero a lui $\tau_n(t)$. Să admitem acum că pentru un n oarecare,

$$\tau_n(t) < C_1 [\varepsilon t]^{2^{n-p}-1}$$

și să arătăm că inegalitatea subzistă și pentru $n + 1$. Într-adevăr :

$$\tau_{n+1}(t) < G \int_0^t C_1 [\varepsilon s]^{2^n - p + 1 - 2} ds =$$

Deoarece $GC_1 = \varepsilon$ și $2^{n-p+1} - 1 > 1$,

$$\tau_{n+1}(t) < C_1 [\varepsilon t]^{2^n - p - 1}.$$

Reamintind că $\varepsilon = 1/2T''$, găsim :

$$\tau_n(t) < C_1 \left[\frac{1}{2} \right]^{2^n - p - 1}$$

Notînd în fine $2^{p+1}C_1 = C$, sîntem conduși tocmai la delimitarea căutată.

TEOREMA 3. Să presupunem că pe domeniul $\bar{R}^\circ(\alpha, T'') \subset R^\circ(\alpha, T')$, $z^n(x, t)$ converge uniform către soluția problemei (1) și că f_z este mărginit pe acest domeniu. Fie $\varepsilon(t)$ o funcție continuă, astfel ca pe domeniul $R^\circ(\alpha, T'')$:

$$| (z^{n+1})(x, t) - z^n(x, t) | \leq \varepsilon(t),$$

pentru un anumit n .

În aceste condiții pe $\bar{R}^\circ(\alpha, T'')$

$$| z^{n+1}(x, t) - z(x, t) | \leq x(t);$$

unde $x(t)$ este soluția ecuației :

$$x'(t) = Kx(t) + 2K\varepsilon(t) \quad x(0) = 0,$$

iar K o constantă, astfel ca

$$f(x, t, z) | \leq K, \quad (x, t) \in R^\circ(\alpha, T''), \quad |z| \leq a.$$

Demonstrație. Avem :

$$\begin{aligned} & | f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z_n) + f(x, t, z_n) - f(x, t, z) | = \\ & = | f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z_n) - f(x, t, z_{n+1}) + f(x, t, z_n) + \\ & + f(x, t, z_{n+1}) - f(x, t, z) | \leq K | z_{n+1} - z | + 2K\varepsilon(t) \end{aligned} \tag{5}$$

și deci conform lemei lui Szarski :

$$| z_{n-1} - z | \leq x(t).$$

CONSECINȚA 2. Cu ajutorul constantei H se poate da o delimitare care să reflecte mai bine ordinul de convergență.

Într-adevăr, din (5) putem primi :

$$\begin{aligned} & |(f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z_n) + f(x, t, z_n) - f(x, t, z))| \leq \\ & \leq |f_z(x, t, z_n)(z_{n+1} - z_n) - f_z(x, t, z_n + \theta(z_{n+1} - z_n))(z_{n+1} - z_n) + \\ & \quad f_z(x, t, z + \theta(z_{n+1} - z_n))(z_{n+1} - z)| = \\ & = |f_z(x, t, z_n + \theta_1(z_{n+1} - z_n))\theta(z_{n+1} - z_n)^2 + f_z(x, t, z + \theta(z_{n+1} - z_n))(z_{n+1} - z)| \leq \\ & \leq H\varepsilon^2(t) + K|z_{n+1} - z|, \end{aligned}$$

iar $x(t)$ se poate lua ca și soluția problemei :

$$x' = Kx + H\varepsilon^2(t) \quad x(0) = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Brzyczekzy S. *Extension of Chaplyghin's Method to the System of Non-linear Parabolic Equations in an Unbounded Domain.* „Bull. Acad. Pol. Sci.” XIII, 1965, 1, pp. 27—30.
2. Kowalski Z., *An Iterative Method of Solving Differential Equations.* „An., Pol. Math.” XII, 1963, pp. 213—230.
3. Mlak W. *The first Boundary Value Problem for a Non-Linear Parabolic Equation.* „An. Pol. Math.” V, 1958, pp. 257—262.
4. Mlak W. *Parabolic Differential Inequalities and Chaplyghin's Method.* „An. Pol. Math.” VIII, 1960, pp. 139—153.
5. Schechter E. *Observații cu privire la metoda lui Ciaplyghin pentru sisteme de ecuații* „Stud. Univ. Babeș - Bolyai”, fasc. 2. (1965). pp. 45—49.
6. Szarski J., *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre.* „An. Pol. Math.” II, 1955, 237—247.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Резюме)

Целью работы является доказательство сходимости последовательности аппроксимаций (3) без предположения выпуклости правых членов (Теорема 1). Полученная таким образом последовательность не является вообще монотонной, однако сохраняет второй порядок сходимости (Теорема 2). В теореме 3 дается оценка погрешности для какой-либо аппроксимации порядка n , зависящая от известных данных. Результаты можно распространить и на системы уравнений в условиях верности гипотезы Р. Доказательство основывается на одной оценке И. Шарского [6], которая делает возможным приспособление метода З. Ковальского [2] к случаю уравнений параболического типа.

THE CONVERGENCE OF CHAPLIGHIN'S METHOD FOR THE EQUATIONS OF
PARABOLIC TYPE

(S u m m a r y)

The purpose of this paper is to demonstrate the convergence of the sequence of successive approximations (3) without supposing the convexity of the right members (theorem 1). The sequence thus obtained is not monotonic in general, but it preserves the second order of convergence (theorem 2). The third theorem yields an estimate of the error for an approximation of some order n , depending only on the known data. The results can be also extended to systems of equations in conditions of validity of the P hypothesis. The proofs are based on Szarski's delimitation, (6) which makes possible the adaptation of Z. Kowalski's (2) arguments to the case of equations of parabolic type.

ASUPRA APROXIMĂRII FUNCȚIILOR CONTINUE PRIN POLINOAME BERNSTEIN

de
GRIGOR MOLDOVAN

1. În 1912 S.N. Bernstein [1] a dat o nouă demonstrație teoremei lui K. Weierstrass de aproximare prin polinoame a funcțiilor continue pe un interval închis $[a, b]$. Nu se știrbește cu nimic din generalitate dacă se consideră $a = 0$ și $b = 1$, adică intervalul $[0, 1]$. Astfel, considerând funcția $f(x)$ definită și continuă pe intervalul $[0, 1]$, demonstrația teoremei amintite decurge elegant utilizându-se polinoamele speciale

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) p_{n,i}(x) \quad (1)$$

unde

$$p_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (2)$$

Fie, acum, funcția $f(x)$ definită pe intervalul $[0, 1]$ și continuă aici împreună cu derivatele de ordinele care vor interveni în considerațiile noastre. În 1932 S.W. Wigert [6] a demonstrat că pe intervalul $[0, 1]$ are loc în mod uniform

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(r)}(x) = f^{(r)}(x).$$

Notînd cu $\omega_r(\delta)$ modulul de continuitate al derivatei de ordinul r a funcției $f(x)$, adică

$$\omega_r(\delta) = \max_{|x-y| \leq \delta} |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \quad (x, y \in [0, 1], \delta > 0), \quad (3)$$

T. Popoviciu [2] a dat, în 1937, o nouă demonstrație rezultatului lui Wigert, stabilind inegalitatea

$$|f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \leq A_{n,r} \omega_r\left(\frac{1}{\sqrt{n-r}}\right) + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f), \quad (0 \leq r \leq n) \quad (4)$$

unde

$$A_{n,r} = \frac{3}{2} - 2^r \frac{\sqrt{n+r}}{n} < \frac{3+2\sqrt{r}}{2}, \quad M_r(f) = \sup_{0,1} |f^{(r)}(x)| \quad (5)$$

În două lucrări mai recente [4], [5] D.D. Stancu a îmbunătățit această inegalitate, utilizînd o nouă metodă. Astfel în [4] se stabilește inegalitatea

$$|f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \leq \left(1 + \frac{2r + \sqrt{n+4r^2-r}}{2\sqrt{n}}\right) \omega_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f). \quad (6)$$

Apoi în lucrarea [5] D.D. Stancu a demonstrat că ordinul de aproximare dat de această inegalitate în general nu poate fi îmbunătățit.

În această lucrare¹ ne vom ocupa de inegalitatea (4). Vom extinde, cu ajutorul unei metode a lui P.C. Sikkema [3], rezultatele autorilor mai sus amintiți și vom obține o îmbunătățire a rezultatelor acestora.

2. Începem prin a da o evaluare diferenței

$$\Omega_n^r(x) = |f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \quad (7)$$

Notînd

$$C(n,r) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right), \quad (8)$$

avem

$$B_n^{(r)}(x) = r! C(n,r) \sum_{i=0}^{n-r} \Delta_n^i p_{n-r,i}(x), \quad (9)$$

unde Δ_n^i înseamnă diferența divizată

$$\Delta_n^i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i-1}{n}, \dots, \frac{i-r}{n}; f \right].$$

Considerînd polinomul

$$P_n^{(r)}(x) = \frac{1}{C(n,r)} B_n^{(r)}(x), \quad (10)$$

putem scrie

$$f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x) - (1 - C(n,r)) P_n^{(r)}(x)$$

Vom folosi în continuare formula de medie generalizată

$$r! \Delta_r^i = f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{n}\right) \quad (0 < \theta_i < 1), \quad (11)$$

¹ Prezentul studiu ne-a fost propus de D.D. Stancu - căruia îi exprimăm mulțumirile noastre sincere.

inegalitatea cunoscută

$$1 - C(n, r) \leq \frac{r(r-1)}{2n} \tag{12}$$

și identitatea

$$\sum_{i=0}^s p_{s,i}(x) \equiv 1. \tag{13}$$

Găsim că

$$|P_n^{(r)}(x)| = \left| \sum_{i=0}^{n-r} f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{n}\right) p_{n-r,i}(x) \right| \leq M_r(f), \tag{14}$$

unde $M_r(f)$ are semnificația dată la (5).

Putem scrie

$$\Omega'_n(x) \leq |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f). \tag{15}$$

De asemenea avem

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n-r} \left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{n}\right) \right| p_{n-r,i}(x) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-r} \omega_r\left(\left|x - \frac{i + \theta_i r}{n}\right|\right) p_{n-r,i}(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Ținînd seama că

$$\begin{aligned} \left|x - \frac{i + \theta_i r}{n}\right| &= \left|x - \frac{i}{n-r} + \frac{r}{n}\left(\frac{i}{n-r} - \theta_i\right)\right| \leq \\ &\leq \left|x - \frac{i}{n-r}\right| + \frac{r}{n} \left|\frac{i}{n-r} - \theta_i\right| < \left|x - \frac{i}{n-r}\right| + \frac{r}{n}, \end{aligned} \tag{17}$$

inegalitatea (16) devine

$$|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-r} \omega_r\left(\left|x - \frac{i}{n-r}\right| + \frac{r}{n}\right) p_{n-r,i}(x). \tag{18}$$

Aici am avut în vedere faptul că funcția $\omega_r(\delta)$ este nedescrescătoare. Vom folosi de asemenea inegalitatea

$$\omega_r(\alpha) \leq \left(1 + \left\lceil \frac{\alpha}{\delta} \right\rceil\right) \omega_r(\delta),$$

prin]a[înțelegînd cel mai mare întreg pozitiv care este strict mai mic decît a. Considerînd un număr $0 < \delta \leq 1$, vom avea

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| &\leq \omega_r(\delta) \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{n-r} \left| \frac{x - \frac{i}{n-r}}{\delta} + \frac{r}{n} \right| p_{n-r,i}(x) \right\} \leq \\ &\leq \omega_r(\delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{n-r} \left(\left| x - \frac{i}{n-r} \right| + \frac{r}{n} \right) p_{n-r,i}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

unde accentul înseamnă că însumarea se face numai pentru cazul

$$\left| x - \frac{i}{n-r} \right| + \frac{r}{n} > \delta,$$

deoarece în cazul contrar termenii sumei sînt egali cu zero. Mai departe, ultimul termen al inegalității de mai sus devine

$$|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq \omega_r(\delta) \left\{ 1 + \frac{r}{n\delta} + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{n-r} \left| x - \frac{i}{n-r} \right| p_{n-r,i}(x) \right\}. \quad (20)$$

3. Alegem pentru δ valoarea convenabilă

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n-r}} + \frac{r}{n}.$$

Notăm cu k valoarea cea mai mare a lui i pentru care mai este satisfăcută inegalitatea

$$x - \frac{i}{n-r} > \frac{1}{\sqrt{n-r}}. \quad (21)$$

Evident, întregul pozitiv k are valoarea

$$k =]x(n-r) - \sqrt{n-r}[. \quad (22)$$

Notăm de asemenea cu l cea mai mică valoare a lui i pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{i}{n-r} - x > \frac{1}{\sqrt{n-r}}. \quad (23)$$

Aici

$$l = [x(n-r) + \sqrt{n-r} + 1]. \quad (24)$$

Luînd în considerare notațiile și precizările de mai sus, adică relațiile (22) și (24), suma Σ' ce intervine în inegalitatea (20) se poate scrie astfel

$$\sum_{i=0}^{n-r} = \sum_{i=0}^k + \sum_{i=l}^{n-r} \quad (25)$$

Dacă $k < 0$ sau (și) $l > n-r$ atunci suma respectivă este egală cu zero.

4. Pentru calculul celor două sume din egalitatea (25) folosim următoarea leamnă.

Lemă. Fie $m \geq 1$ un număr întreg. Au loc următoarele relații :

a) Pentru $0 \leq k \leq m$ și $\frac{k}{m} \leq x \leq 1$ avem

$$\sum_{i=0}^k \left(x - \frac{i}{m}\right) p_{m,i}(x) = \binom{m-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{m-k} \quad (26)$$

b) Pentru $0 \leq l \leq m$ și $0 \leq x \leq \frac{l}{m}$ avem

$$\sum_{i=l}^m \left|x - \frac{i}{m}\right| p_{m,i}(x) = \binom{m-1}{l-1} x^l(1-x)^{m-l+1} \quad (27)$$

Demonstrația acestei leme este imediată (vezi [3]).

5. Utilizând lema enunțată la punctul precedent, relația (25) devine

$$\sum_{i=0}^{n-r} = \binom{n-r-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-r-k} + \binom{n-r-1}{l-1} x^l(1-x)^{n-r-l+1}$$

Acum, inegalitatea (20) se poate scrie astfel

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| &\leq \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} + \frac{r}{n} \right) \cdot \left\{ 1 + \frac{r\sqrt{n-r}}{n+r\sqrt{n-r}} + \frac{n}{n+r\sqrt{n-r}} \right. \\ &\left. \sqrt{n-r} \left\{ \binom{n-r-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-r-k} + \binom{n-r-1}{l-1} x^l(1-x)^{n-r-l+1} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Aici $\binom{n-r-1}{k} = 0$ dacă $k < 0$ și $\binom{n-r-1}{l-1} = 0$ dacă $l > n-r$.

Se observă că funcțiile

$$\binom{n-r-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-r-k}, \binom{n-r-1}{l-1} x^l(1-x)^{n-r-l+1} \quad (29)$$

prezintă salturi pentru acele valori ale variabilei x pentru care mărimile

$$x(n-r) - \sqrt{n-r}, x(n-r) + \sqrt{n-r} + 1 \quad (30)$$

sînt egale cu un număr întreg. Evident, pentru valorile lui x pentru care mărimile (30) nu devin întregi, funcțiile (29) sînt continue.

Introducem funcția

$$F_{n,r}^k(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \leq x \leq (n-r)^{-1/2} \\ \binom{n-r-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-r-k} & \text{dacă } (n-r)^{-1/2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (31)$$

Această funcție este de fapt primul termen din paranteza acoladă a inegalității (28), unde s-a considerat $k \geq 0$, adică $x(n-r) - \sqrt{n-r} > 0$, deci $x > (n-r)^{-1/2}$.

Al doilea termen, din parantezele amintite, se poate scrie

$$\binom{n-r-1}{l-1} x^l (1-x)^{n-l+1} = \binom{n-r-1}{n-r-l} x^l (1-x)^{n-r-l+1}$$

sau dacă notăm $k' = n-r-l$ avem

$$\binom{n-r-1}{l-1} x^l (1-x)^{n-r-l+1} = \binom{n-r-1}{k'} y^{k'+1} (1-y)^{n-r-k'} \quad (32)$$

unde $y = 1-x$. Vom arăta că $k' \geq 0$ revine la $y > (n-r)^{-1/2}$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} k' &= n-r - [x(n-r) + \sqrt{n-r} + 1] = \\ &= n-r - [n-r - (y(n-r) - \sqrt{n-r} - 1)] = \\ &= \begin{cases} y(n-r) - \sqrt{n-r} - 1 & \text{dacă } y(n-r) - \sqrt{n-r} \text{ este întreg} \\ [y(n-r) - \sqrt{n-r}] & \text{dacă } y(n-r) - \sqrt{n-r} \text{ nu este întreg} \end{cases} \end{aligned}$$

deci

$$k' = n-r-l =]y(n-r) - \sqrt{n-r}[. \quad (33)$$

$k' \geq 0$ înseamnă $y(n-r) - \sqrt{n-r} > 0$ sau $y > (n-r)^{-1/2}$ ceea ce trebuia arătat. Această condiție se obține de altfel și dacă ținem seama că $l < n-r$, adică $x(n-r) + \sqrt{n-r} < n-r$. Mai observăm că pentru $x = y$ avem $k' = k$. Din cele arătate aici rezultă

$$F_{n,r}^{k'}(1-x) = \binom{n-r-1}{l-1} x^l (1-x)^{n-r-l+1} \quad (34)$$

și în fine

$$\begin{aligned} &|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq \quad (35) \\ &\leq \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} + \frac{r}{n} \right) \cdot \left\{ 1 + \frac{r\sqrt{n-r}}{n+r\sqrt{n-r}} + \frac{n}{n+r\sqrt{n-r}} \sqrt{n-r} \left\{ F_{n,r}^k(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_{n,r}^{k'}(1-x) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Dacă notăm

$$S_{n,r}^k(x) = \sqrt{n-r} \{ F_{n,r}^k(x) + F_{n,r}^{k'}(1-x) \} \quad (36)$$

și

$$M_{n,r}^k = \sup_{[0,1]} S_{n,r}^k(x) \tag{37}$$

putem scrie

$$|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} + \frac{r}{n} \right) \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n+r\sqrt{n-r}} (r\sqrt{n-r} + n \cdot M_{n,r}^k) \right\}.$$

6. P.C. S i k k e m a [3] studiind funcția

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 \leq x \leq m^{-1/2}, \\ \binom{m-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{m-k} & \text{pentru } m^{-1/2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{39}$$

cu $k =] mx - \sqrt{m} [$, a demonstrat că

$$\max_{0 < x < 1} \sup \sqrt{m} \{F_m(x) + F_m(1-x)\} = S \tag{40}$$

unde

$$S = \frac{20983 \sqrt{6} - 47022}{46656}$$

$$(S = 0,093785 \dots).$$

Această constantă se obține calculînd valoarea funcției, a cărei supremum s-a luat în considerare, pentru $m = 6$. După cum s-a demonstrat egalitatea precedentă este adevărată pentru orice m , număr întreg pozitiv.

7. Funcția $F_{n,r}^k(x)$ introdusă de noi (31) are aceeași expresie analitică cu funcția (39) studiată de P.C. S i k k e m a, dacă notăm $n-r = m$.

Ținînd seama de această precizare și de egalitatea (40), avem

$$\begin{aligned} & |f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \leq \\ & \leq \left\{ 1 + \frac{1}{n+r\sqrt{n-r}} (r\sqrt{n-r} + nS) \right\} \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} + \frac{r}{n} \right) + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f). \end{aligned} \tag{41}$$

8. Din inegalitatea (41) pentru $r = 0$ obținem inegalitatea

$$|f(x) - B_n(x)| < (1 + S) \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

care a fost stabilită de P.C. S i k k e m a și care a apărut cu o îmbunătățire a inegalității lui T. P o p o v i c i u

$$|f(x) - B_n(x)| < \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

De asemenea pentru $r = 1$, obținem din (41) inegalitatea

$$|f'(x) - B'_n(x)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{n + \sqrt{n-1}} (\sqrt{n-1} + nS) \right\} \omega_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n} \right).$$

De remarcat aici este că termenul al doilea nu mai apare și deci avem o expresie mult simplificată a membrului doi din inegalitatea (41).

9. Dacă-l considerăm pe $\delta = \frac{1}{\sqrt{n-r}}$ atunci urmînd calea de la punctele 3,5 se obține din (20)

$$\begin{aligned} & |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq \\ & \leq \left\{ 1 + \frac{r\sqrt{n-r}}{n} + \sqrt{n-r} \{ \mathcal{F}_{n,r}^k(x) + \mathcal{F}_{n,r}^k(1-x) \} \right\} \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} \right), \end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{F}_{n,r}^k(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n-r}} - \frac{r}{n} \text{ și } \frac{1}{\sqrt{n-r}} - \frac{r}{n} > 0 \\ \text{dacă } \frac{1}{\sqrt{n-r}} - \frac{r}{n} < x \leq 1 \text{ și } \frac{1}{\sqrt{n-r}} - \frac{r}{n} > 0 \\ \binom{n-r-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-r-k} & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \text{ și } \frac{1}{\sqrt{n-r}} - \frac{r}{n} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{și } k = \left\lfloor x(n-r) + \sqrt{n-r} - \frac{r(n-r)}{n} \right\rfloor.$$

Notînd

$$\mathcal{M}_{n,r}^k = \sup_{[0,1]} \sqrt{n-r} \{ \mathcal{F}_{n,r}^k(x) + \mathcal{F}_{n,r}^k(1-x) \},$$

primim inegalitatea

$$\begin{aligned} & |f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \leq \\ & \leq \left(1 + \frac{r\sqrt{n-r}}{n} + \mathcal{M}_{n,r}^k \right) \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{n-r}} \right) + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f). \end{aligned}$$

10. Dacă $f^{(r)}(x)$ satisface condiția lui Lipschitz, adică

$$\begin{aligned} & |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| < A |x-y|^\alpha, \\ & (0 < x \leq 1, A > 0) \end{aligned}$$

atunci

$$\omega_r(\delta) \leq A \cdot \delta^\alpha.$$

Prin urmare inegalitatea (41) capătă forma

$$|f^{(r)}(x) - B_n^{(r)}(x)| \leq K_{n,r} A \left(\frac{1}{\sqrt{n+r}} + \frac{r}{n} \right)^\alpha + \frac{r(r-1)}{2n} M_r(f)$$

unde

$$K_{n,r} = 1 + \frac{1}{n+r\sqrt{n-r}} (r\sqrt{n-r} + nS).$$

Din această inegalitate avem posibilitatea să determinăm valoarea lui n pentru care obținem o aproximație dorită a funcției date prin polinomul Bernstein atașat ei.

B I B L I O G R A F I E

1. Bernstein S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités.* „Commun. Soc. Math. Kharkov.” 13(2) (1912), 1–2.
2. Popoviciu T., *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame.* Cluj, 1937.
3. Sikkema P. C., *Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen.* „Numer. Math.” I (1959), 221–239.
4. Stancu D. D., *Sur l'approximation des dérivées des fonctions par les dérivées correspondantes de certains polynômes de type Bernstein.* „Mathematica” 2(25) (1960), 335–348.
5. Stancu D. D., *Generalizations of an Inequality of G. G. Lorentz.* „Anal. Stiinț. Univ. Al. I. Cuza Iași”, secția I, 9 (1963), 49–58.
6. Wigert S., *Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues.* „Arkiv. för Mat. Astr. Fys.” 22 (1932), 1–4.

ОТНОСИТЕЛЬНО АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА

(Р е з ю м е)

В работе устанавливается неравенство (41), в котором улучшен коэффициент умножающий порядок аппроксимации производной порядка r функции $f(x)$ на производную порядка r присоединенного к ней многочлена Бернштейна.

Использованный автором метод основывается на результатах, полученных П.К. Сиккема, Д.Д. Станку и т. д.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR LES POLYNOMES BERNSTEIN

(R é s u m é)

L'auteur établit l'inégalité (41) dans laquelle on a obtenu une amélioration du coefficient qui multiplie l'ordre d'approximation de la dérivée d'ordre r de la fonction $f(x)$ par la dérivée d'ordre r du polynôme Bernstein qui lui est attaché.

Le procédé employé ici s'appuie sur les résultats obtenus par P.C. Sikkema, D.D. Stancu etc.

ELEMENTELE FOTOMETRICE ALE CEFEIDEI *SY PISCIMUM*

de
VASILE URECHE

Steaua *SY Piscium* este o variabilă de tipul *RR Lyrae*. Unica cercetare asupra acestei stele este cea a lui *Shapley și Hughes* [2]. Așa cum rezultă din *O.K.P.Z.* [1], ei au stabilit următoarele elemente ale variației de lumină:

$$\text{Max. hel.} = \text{D.J.2425180,30} + 0^{\circ},67354\text{E}, \quad (1)$$

cu o variație a luminozității între 12,4 și 13,8 magnitudini fotografice.

Pe baza planului de colaborare cu Observatorul astronomic din Odesa, variabila *SY Piscium* a fost introdusă în programul Observatorului astronomic din Cluj. Astfel între 7 octombrie 1963 și 11 ianuarie 1964 s-au efectuat 248 de expuneri de câte 10 minute, cu ajutorul telescopului Newton ($F = 250$ cm, $D = 50$ cm.) pe plăci Isopan F, sensibilizate cu o soluție de alcool, utilizându-se un filtru Schott GG 11. S-au obținut astfel 248 imagini fotovizuale ale variabilei. Observațiile au fost efectuate de colectivul Observatorului (Ureche 42%, Popa 34%, Todoran 12% și Mihoc 12%).

În vecinătatea variabilei am ales 8 stele de comparație, notate cu a, b, c, d, e, f, g, h (fig. 1). Pentru determinarea magnitudinilor lor fotovizuale, pe 6 plăci Isopan F sensibilizate, utilizând filtrul Schott GG 11, s-a fotografiat Secvența Polară de Nord și regiunea variabilei *SY Piscium*. Înregistrările stelelor de comparație le-am măsurat pe plăci cu ajutorul unui microfotometru fotoelectric $M\Phi - 2$. Curbele caracteristice ale plăcilor le-am trasat cu ajutorul a 21 stele standard din Secvența Polară de Nord cu magnitudini fotovizuale precis determinate. Eroa-

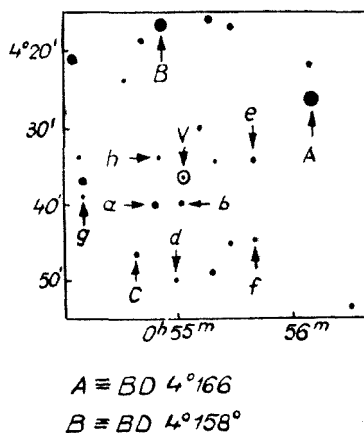


Fig. 1. Harta regiunii variabilei

rea de seară s-a eliminat prin medierea rezultatelor. Astfel s-au obținut următoarele valori pentru magnitudinile fotovizuale ale stelelor de comparație, corectate de extincție :

Tabel 1

Steaua	m_{pv}	Eroare medie pătratică
a	12,31	$\pm 0,02$
b	12,38	$\pm 0,03$
c	12,42	$\pm 0,02$
d	12,62	$\pm 0,05$
e	12,97	$\pm 0,03$
f	13,10	$\pm 0,07$
g	13,60	$\pm 0,04$
h	13,84	$\pm 0,03$

Dintre acestea s-au utilizat mai ales stelele a, d, e, f, g.

Pentru determinarea magnitudinilor fotovizuale ale variabilei, înnegririle imaginilor ei le-am măsurat pe plăci cu același microfotometru fotoelectric. Curbele caracteristice le-am trasat cu ajutorul stelelor de comparație date mai sus. S-au obținut astfel 248 valori m_{pv} , ale căror momente corespunzătoare au fost reduse la centrul Soarelui cu ajutorul tabelelor lui Prager. Momentele astfel reduse și magnitudinile corespunzătoare sînt date în tabelul observațiilor individuale (tabel 4).

Grupînd observațiile după fazele calculate cu ajutorul elementelor (1) s-au format 38 de puncte normale, date în tabelul 2, în care prima coloană reprezintă numărul de ordine al punctului normal, a doua faza φ , a treia magnitudinea fotovizuală m_{pv} , iar a patra numărul de observații individuale incluse într-un punct normal N.

Pe baza tabelului 2 s-a construit curba medie de lumină, reprezentată în fig. 2. Din curba medie de lumină se observă că luminozitatea stelei SY *Piscium* variază între $M = 12,46$ și $m = 13,43$ magnitudini fotovizuale. Maximul în curba de lumină este ascuțit. Asimetria în fază a curbei de lumină este

$$\xi = \varphi(M) - \varphi(m) = 0^p, 160$$

iar asimetria în magnitudine

$$\zeta = m \left(\varphi_{\max} + \frac{1}{2} P \right) - \frac{1}{2} (M + m) = 0^m, 39$$

De aici rezultă că variabila SY *Piscium* aparține clasei cefeidelor de tip RR Lyrae, subtipul RR₀.

În curba medie maximul are loc la faza $\varphi_{\max} = 0^p, 416$ fiind astfel deplasat cu aproape o jumătate de perioadă față de elementele (1). S-a ivit astfel problema de a determina noi elemente ale variației de lumină, întrucît maximele variației de lumină se produc cu aproximativ $6^h 41^m$ mai

tirziu decât indică elementele (1). Astfel pe baza observațiilor obținute am determinat momentele a 10 maxime, prin metoda lui Pogson pentru maximele cu observații pe ambele ramuri și cu ajutorul curbei medii pentru maximele cu observații pe o singură ramură a curbei de lumină. Maximele observate sînt date în tabelul 3, în care prima coloană reprezintă momen-

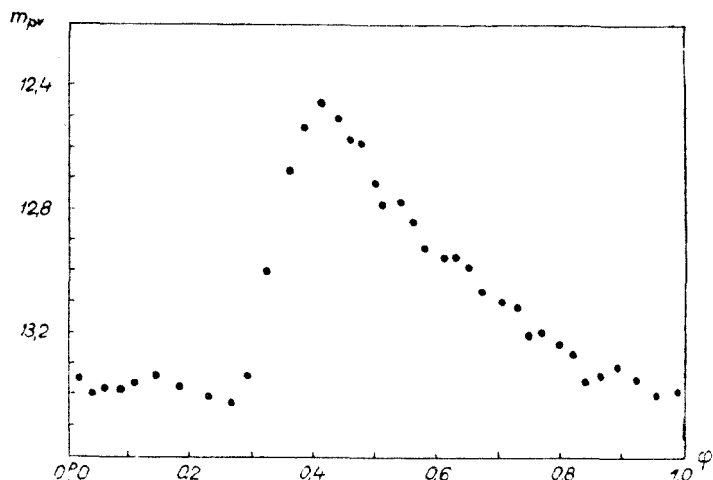


Fig. 2. Curba medie de lumină.

tul observat al maximului, a doua numărul de observații pe ramura ascendentă, a treia numărul de observații pe ramura descendentă, a patra ponderea p , a cincea diferențele O—C (momentul observat minus momentul calculat), calculate cu elementele (1), iar a șasea diferențele O—C₂, calculate cu noile elemente (2), care au fost determinate pe baza maximelor din acest tabel. Noile elemente au fost determinate prin metoda celor mai mici pătrate și au fost următoarele:

$$\text{Max. hel.} = \text{D. J. } 2438314.6085 + 0^{\circ}, 673573\text{E} \quad (2)$$

$$\begin{array}{cc} \pm 17 & \pm 33 \end{array}$$

În elementele (2) perioada nu diferă esențial de cea corespunzătoare elementelor (1), însă epoca inițială corespunde unei deplasări de $+0^{\circ}, 2785 = 6^{\text{h}} 41^{\text{m}}$ față de elementele inițiale (1). Această deplasare indică necesitatea urmăririi sistematice a cefeidei SY Piscium pentru a decide dacă ea se datorește preciziei mici a elementelor (1) sau eventual efectului Blajko.

BIBLIOGRAFIE

1. Kukarkiu, B. V. ș. a. „Obščii katalog peremennih zvezd” tom I, Moskva 1958.
2. Shapley, H.; Hughes, E. M., „Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College” 90, no. 4, 1934.

Puncte normale

Tabel 2

Nr. crt.	φ	m_{pv}	N	Nr. crt.	φ	m_{pv}	N
1	0 ^b ,0180	13,35	6	20	0 ^b ,5420	12,78	8
2	0,0420	13,40	6	21	0,5625	12,84	8
3	0,0627	13,39	6	22	0,5834	12,93	8
4	0,0842	13,39	6	23	0,6081	12,96	8
5	0,1128	13,37	6	24	0,6306	12,96	8
6	0,1447	13,34	6	25	0,6517	12,99	8
7	0,1857	13,38	6	26	0,6749	13,07	8
8	0,2297	13,41	6	27	0,7041	13,10	8
9	0,2682	13,43	6	28	0,7290	13,12	6
10	0,2957	13,34	6	29	0,7498	13,21	6
11	0,3227	13,00	6	30	0,7702	13,20	6
12	0,3630	12,68	6	31	0,7978	13,24	6
13	0,3858	12,54	6	32	0,8185	13,27	6
14	0,4100	12,46	6	33	0,8402	13,36	6
15	0,4418	12,51	6	34	0,8670	13,34	6
16	0,4593	12,58	6	35	0,8937	13,31	6
17	0,4762	12,59	6	36	0,9253	13,35	6
18	0,4975	12,72	8	37	0,9585	13,40	6
19	0,5214	12,79	8	38	0,9907	13,39	6

Tabel 3

Maxime observate

Max. hel. 2438...	Numărul observațiilor		p	0 - C ₁	0 - C ₂
	ramura ascendentă	ramura descendentă			
310,568	6	—	1	+0 ^z ,279	+0 ^z ,001
311,238	—	17	1	+0,276	-0,003
314,614	8	—	1	+0,284	+0,005
319,326	3	15	1,5	+0,281	+0,001
323,363	8	11	2	+0,277	-0,002
342,235	—	10	0,5	+0,290	+0,010
348,283	—	19	1	+0,276	-0,004
350,305	4	5	1,5	+0,277	-0,003
352,324	—	10	0,5	+0,276	-0,005
406,217	—	10	1	+0,286	+0,003

Tabel 4

Observații individuale

D. T. hel. 2438...	m_{pv}	D. T. hel. 2438...	m_{pv}	D. T. hel. 2438...	m_{pv}	D. T. hel. 2438...	m_{pv}
310,4763	13,39	311,2944	12,80	311,3888	13,03	311,4694	13,32
310,4912	13,20	311,3033	12,74	311,3999	13,01	311,4833	13,33
310,5013	12,91	311,3180	12,82	311,4110	13,15	311,5041	13,36
310,5318	12,83	311,3305	12,81	311,4242	13,07	311,5135	13,38
310,5402	12,54	311,3432	12,85	311,4301	13,05	311,5249	13,44
310,5540	12,56	311,3492	12,99	311,4416	13,11	311,5360	13,46
311,2833	12,62	311,3763	12,93	311,4555	13,15	313,2848	12,45

Tabel 4 (continuare)

D. J. hel. 2438....	m_{pv}	D. J. hel. 2438....	m_{pv}	D. J. hel. 2438....	m_{pv}	D. J. hel. 2438....	m_{pv}
313,2952	12,50	319,4374	12,93	323,4164	12,71	348,4975	13,12
314,4104	13,27	319,4496	13,03	323,4275	12,95	348,5093	13,26
314,4208	13,35	319,4621	13,00	323,4386	12,92	348,5204	13,15
314,4361	13,33	319,4756	13,01	323,4532	12,88	350,2461	12,77
314,4500	13,33	319,4885	13,02	323,4659	12,79	350,2746	12,47
314,4639	13,26	319,5003	13,02	323,4796	12,82	350,2884	12,58
314,4903	13,51	319,5253	13,27	323,4945	12,93	350,3016	12,43
314,5041	13,44	319,5402	13,19	323,5066	12,88	350,3169	12,46
314,5166	13,44	319,5531	13,13	324,2553	13,06	350,3280	12,53
314,5305	13,44	319,5669	13,15	324,2720	13,21	350,3391	12,52
314,5458	12,99	319,5808	13,30	324,2998	13,15	350,3503	12,54
314,5666	12,80	319,5947	13,30	324,3116	13,22	350,3614	12,64
314,5805	12,58	319,6086	13,31	324,3220	13,39	350,4058	12,89
314,5910	12,62	319,6364	13,30	324,3400	13,30	352,4071	12,77
314,6021	12,51	320,2524	13,31	324,4150	13,38	352,4175	12,71
315,4736	13,23	320,2677	13,29	324,4255	13,36	352,4279	12,74
315,4875	13,18	320,2968	13,32	325,2741	13,46	352,4377	12,97
315,5000	13,30	320,3100	13,33	325,2852	13,44	352,4474	12,97
315,5153	13,28	320,3211	13,30	325,2964	13,36	352,4627	13,11
315,5285	13,29	320,3378	13,31	325,3089	13,36	352,4738	13,14
315,5417	13,21	320,3517	13,34	325,3186	13,20	352,4870	13,13
315,5535	13,26	320,3642	13,40	329,2701	13,52	352,4974	13,10
315,5653	13,34	320,3781	13,34	329,2854	13,39	452,5078	13,12
315,5833	13,42	320,3920	13,30	329,2999	13,42	357,1918	12,92
315,5965	13,37	320,4061	13,35	331,5173	12,81	357,2023	12,95
315,6090	13,34	320,4184	13,34	342,2990	12,68	357,2141	13,03
315,6215	13,36	320,4281	13,36	342,3101	12,76	357,2509	13,03
316,2723	13,21	320,4420	13,31	342,3275	12,82	357,2668	13,00
315,2834	13,29	322,3726	13,34	342,3414	12,90	357,2821	13,09
315,2959	13,28	322,3865	13,57	342,3559	12,89	357,2974	13,09
316,3077	13,41	322,3990	13,55	432,3705	12,89	357,3182	13,19
318,3544	13,30	322,4115	13,50	342,3879	12,91	357,3342	13,20
318,3689	13,31	322,4254	13,46	342,4004	12,96	357,3446	13,34
318,3828	13,29	322,4393	13,38	342,4143	13,01	357,3717	13,35
318,3967	13,39	322,4518	13,44	342,4282	13,01	357,3821	13,39
318,4085	13,48	322,4629	13,46	347,3774	13,41	357,3967	13,38
318,4210	13,38	322,4782	13,48	347,3934	13,50	357,4474	13,40
318,4314	13,31	322,4907	13,43	347,4079	13,42	357,4613	13,42
318,4419	13,31	322,5046	13,28	347,4211	13,32	357,4766	13,41
318,4599	13,43	322,5199	13,30	348,3107	12,58	357,4912	13,32
318,4697	13,33	322,5476	13,43	348,3218	12,63	357,5016	13,37
318,4801	13,40	322,5615	13,39	348,3329	12,63	374,2812	13,29
318,5009	13,38	322,5740	13,28	348,3461	12,83	374,2923	13,32
318,5467	13,37	323,2677	13,51	348,3572	12,90	399,2258	13,42
319,3003	12,46	323,2802	13,37	348,3704	12,92	399,2397	13,38
319,3114	12,41	323,2920	13,31	348,3815	12,99	406,2336	12,53
319,3232	12,40	323,3031	13,11	348,3934	12,97	406,2447	12,58
319,3366	12,39	323,3143	13,04	348,4065	13,00	406,2558	12,58
319,3489	12,70	323,3257	12,75	348,4177	12,84	406,2669	12,69
319,3600	12,56	323,3372	12,68	348,4288	12,84	406,2798	12,66
319,3739	12,61	323,3511	12,51	348,4399	12,98	406,2926	12,70
319,3836	12,56	323,3629	12,48	348,4510	12,94	406,3065	12,85
319,3985	12,80	323,3747	12,53	348,4621	13,13	406,3311	12,89
319,4128	12,71	323,3858	12,71	348,4732	13,09	406,3457	12,92
319,4253	12,81	323,3969	12,60	348,4843	13,04	406,3637	12,97

ФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕФЕИДЫ *SY PISCUM*

(Резюме)

Автор приводит 248 фотовизуальных наблюдений цефеиды *SY Piscium*, произведённых в Клужской Астрономической Обсерватории в период с 7 октября 1963 г. по 11 января 1964 г. В работе даётся карта области и фотовизуальные величины звезд сравнения. Почернения снимков измерены при помощи фотоэлектрического микрофотометра МФ-2.

Наблюдения сгруппированы в 38 нормальных точках, при помощи которых построена средняя кривая блеска, указывающая на то, что переменная *SY Piscium* является цефеидой типа RR Lyrae, подтипа RRa. На основании наблюдений определены 10 максимумов, не проверяющих элементов Shapley и Hughes. По этой причине определены новые элементы вариации блеска (2). Новые элементы соответствуют смещению момента максимума на $0^p, 416 = 6^h 41^m$ по сравнению с элементами (1), смещению, которое может быть связано с эффектом Блажко. Это смещение указывает на необходимость систематического наблюдения переменной звезды.

LES ÉLÉMENTS PHOTOMÉTRIQUES DE LA CÉPHÉIDE *SY PISCUM*

(Résumé)

L'auteur présente 248 observations photovisuelles de la céphéide *SY Piscium*, effectuées à l'Observatoire Astronomique de Cluj entre le 7 octobre 1963 et le 11 janvier 1964. L'étude contient aussi la carte de la région et les magnitudes photovisuelles des étoiles de comparaison. Les noircissements des images ont été mesurés à l'aide d'un microphotomètre photoélectrique МФ-2.

Les observations ont été groupées en 38 points normaux, à l'aide desquels on a construit la courbe moyenne de lumière, qui montre que la variable *SY Piscium* est une céphéide du type RR Lyrae, sous-type RRa. On a déterminé également sur la base des observations les moments de 10 maxima ne vérifiant pas les éléments de Shapley et Hughes; c'est pourquoi l'on a déterminé de nouveaux éléments de la variation de lumière (2). Les nouveaux éléments correspondent à un déplacement du moment du maximum de $0^p, 416 = 6^h 41^m$ par rapport aux éléments (1), déplacement qui pourrait être lié à l'effet Blazhko, indiquant la nécessité de l'observation systématique de la variable.

PRIMUL MANUAL ROMÂNESC DE FIZICĂ

de

VICTOR MARIAN

În 1849 a apărut la Iași un manual didactic intitulat *Fizica Elementară*. Autorul manualului este paharnicul Teodor Stamati, profesor la Academia Mihăileană din Iași [1].

Importanța cărții constă în faptul că este primul manual românesc de fizică, reprezintă deci începutul învățămîntului în limba patriei al acestei discipline. În școlile grecești din Țările române s-a predat fizica încă din secolul al XVII-lea, în cadrul filozofiei. Astfel s-au păstrat manuscrise atît la București cît și la Iași după cursurile filozofului bizantin Coridaleu, celebru interpretator al filozofiei lui Aristotel [2]. În secolul al XVIII-lea se folosea la Iași manualul grecesc al lui N. Theotokis [3], tipărit la Leipzig în 1765. Un manuscris românesc cu conținut de fizică s-a descoperit de curînd în Transilvania. Este lucrarea lui G. Șincai [4]: *Învățătură firească spre surparea superstiției norodului*, scrisă probabil între 1804 și 1808 și tipărită în 1964. Ea însă era destinată masei mari de cititori pentru combaterea superstiției, deci nu era manual didactic și nu cuprinde chestiuni de fizică decît incidental. Valoarea ei scade prin faptul că nu a fost tipărită la timp, însă e totuși prețioasă atît pentru studiul epocii, cît și pentru terminologia folosită de Șincai, care împreună ca a lui Stamati ne dau indicații prețioase asupra formării limbajului științific românesc.

*

Manualul lui Stamati este o cărticică de format 12×18 cm, legată în jumătate pînză, avînd 188 pagini tipărite cu litere cirilice. Ea poartă titlul: *Fizica Elementară pentru clasele colegiale din Prințipatul Moldovei, compilată după F. Crișu de pah. Teodor Stamati, doctoru de filosofie și de frumoasele arte, profesoru publicu de fizică și istorica națiunei la Academia Mihăileană din Iași, mădulariu efectivu societății de medici și naturiști din Prințipatul Moldovei. Întîia ediție. Cu cheltueala Casei Școalelor, Iași. Tipografia Institutul Albinei 1849.*

Pe dosul foii de titlu sînt citate cuvintele lui Cicero: *Naturae cognitio est fons sapientiae* (Cunoașterea naturii este izvorul înțelepciunii).

Cuprinsul cărții este următorul : Scara pag. III—IV. Precuvîntare pag. V—VIII. Introducere pag. 1—4; Fizica generală pag. 5—62, Fizica specială pag. 63 — 140, Fizica aplicată 141—184, Tabla de materii pag. 185—188. La sfîrșit sînt anexate trei tabele cu figuri.

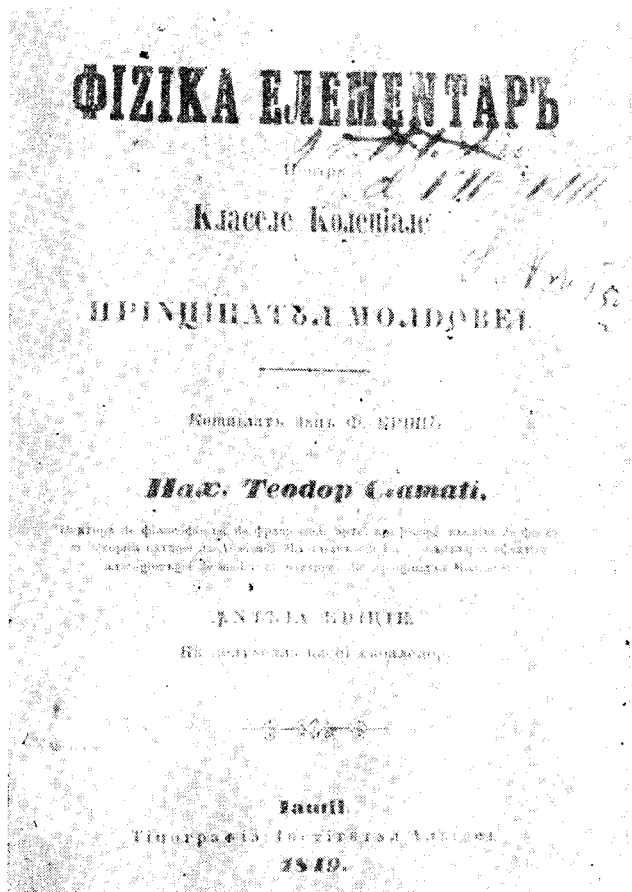


Fig. 1.

După cum rezultă din foaia de titlu manualul lui Stamati nu e original, ci o compilație după F. Crișu. Atanasiu și Câmpan au dedus că ar fi vorba de germanul F. Kries, care a publicat un *Lehrbuch der Physik* în 1805, [1, pag. 20], precum și manuale de matematici. Autorii articolului recunosc însă că nu au putut procura pînă acum cartea lui F. Kries, așa că nu au fost în măsură să arate întru cît s-a folosit Stamati de manualul german. Faptul că într-un memoriu al său din 1844 Stamati afirmă că a alcătuit în limba română și o *Fizică experimentală* după Muncke, lasă problema și mai încurcată, mai ales că manuscrisele lui Stamati s-au pierdut.

Pentru a lămuri această chestiune am căutat să dau de urmele manualelor lui Kries și Muncke. În Biblioteca Academiei, R.S.R. Filiala Cluj am descoperit atât manuale de fizică, cât și de matematici ale lui F. Kries.



Fig. 2.

Friedrich Christian Kries (1768—1849) a fost mai întâi învățător, apoi din 1789 profesor de matematică și fizică la gimnaziul din Gotha. În tinerețe a tradus în nemțește *Lettres à une princesse d'Allemagne* a lui L. Euler, apoi a scris cărți didactice și științifice.

Dintre manualele sale didactice de fizică și matematică, menționăm următoarele :

1. *Lehrbuch der Naturlehre für Anfänger*, 8°, Gotha, 1804; ed. 5 din 1824, iar ed. 8 din 1844.

2. *Lehrbuch der Physik*, 8°, Jena, 1805; ed. 3-a din 1821.

3. *Lehrbuch der reinen Mathematik*, 8°, Jena, 1810, ed. 7 din 1844.

4. *Lehrbuch der mathematischen Geographie*, 8°, Leipzig 1844.

Georg Wilhelm Muncke (1778—1847) a fost profesor de fizică la Universitatea din Marburg, apoi la cea din Hannover. Are numeroase lucrări științifice și didactice. Dintre aceste din urmă amintim următoarele :

1. *Anfangsgründe der Naturlehre*, 2 vol. 8°, Heidelberg, 1819—20.

2. *Anfangsgründe der mathematischen und physikalischen Geographie*, 8°, Ib. 1820.

3. *Die ersten Elemente der gesammten Naturlehre*, 8°, Heidelberg, 1825, ed. 2 din 1829.

4. *Handbuch der Naturlehre*, 2 vol. 8° Ibid. 1829.

Din *Lehrbuch der Physik* al lui Kries se află în Biblioteca Filialei din Cluj a Academiei, ediția a patra, tipărită la Jena în 1827. Ea este un manual de aproape 500 de pagini, de nivel mai înalt decât al lui Stamati.

Lehrbuch der Naturlehre für Anfänger se află în Biblioteca aceeași Filiale în ediția a opta, tipărită la Gotha în 1844. Comparînd această cărtică de același format cu a lui Stamati și avînd 192 de pagini, am descoperit că cuprinsul celor două manuale este aproape identic. Așadar manualul lui Stamati este o prelucrare după *Lehrbuch der Naturlehre* al lui F. Kries. În consecință, în cele ce urmează voi analiza cuprinsul *Fizicii Elementare* a lui Stamati, comparînd-o cu *Naturlehre* a lui Kries, arătînd în ce măsură a folosit-o Stamati și care e rolul său în scrierea manualului.

Felul în care a utilizat Stamati manualul lui Kries se vede deja din comparația cuprinsului celor două cărți. Kries tratează următoarele :

Einleitung § 1— 7

A. *Erster Haupttheil: Allgemeine Naturlehre*

I. Von der Körpern überhaupt.

1. Allgemeine Eigenschaften der Körper, § 8— 20

2. Von der Bewegung der Körper überhaupt, § 21— 32

3. Vom Fall der Körper, § 33— 40

II. Von den festen Körpern.

1. Vom Gleichgewicht fester Körper § 41— 53

2. Von den Schwingungen fester Körper § 41— 52

a) Vom Pendel § 54— 58

b) Vom Schall § 59— 66

3. Vom Stoss fester Körper § 67— 70

4. Vom Druck fester Körper auf eine schiefe Ebene § 71— 74

5. Von der Reibung oder Friction fester Körper . . § 75— 78

III. Von den flüssigen Körpern § 79

1. Von den tropfbaren Flüssigkeiten § 80— 88

2. Von den elastischen Flüssigkeiten § 89— 95

IV. Von festen und flüssigen in Verbindung.

1. Vom Gleichgewicht fester und flüssiger Körper . § 96—105

2. Vom Widerstand flüssiger gegen bewegte feste Körper §106—109

B. *Zweiter Haupttheil; Besondere Naturlehre.*

I. Von der chemischen Anziehung	§ 110—111
II. Von den einfachen Körpern, die eine merkliche Schwere haben	§ 118—124
III. Von den Säuren, Basen und Salzen	§ 125—129
IV. Vom Wasser	§ 130—138
V. Von den Luftarten	§ 139—144
VI. Vom Licht	§ 145—166
VII. Vom Feuer	§ 167—188
VIII. Von der Elektrizität	§ 189—206
IX. Vom Magnet	§ 207—223

C. *Dritter Haupttheil: Angewandte Naturlehre.*

I. Vom Weltgebäude und der mathematischen Eintheilung der Erde	§ 224—248
II. Von den physikalischen Beschaffenheit der Erde	§ 249—269
III. Von den Lufterscheinungen	§ 270—294
Einleitung in die Naturgeschichte	§ 295—331

Anhang. La Stamati acestora le corespunde următoarea

Scară.

<i>Introducere</i>	§ 1— 7
------------------------------	--------

A. *Partea întâi: fizica generală.*

I. Despre trupuri în general	
1. Insușirile generale ale trupurilor	§ 8— 20
2. De mișcarea trupurilor îndeobște	§ 21— 32
3. Despre căderea trupurilor	§ 33— 40
II. Despre trupurile solide.	
1. Despre ecvilibria trupurilor solide.	§ 41— 52
2. Despre oscilațiile trupurilor solide	§ 53
și despre pendel	§ 54— 58
3. Despre ciocnirea trupurilor solide	§ 59— 62
4. Despre apăsarea trupurilor solide pe un plan înclinat	§ 63— 66
5. Despre frecarea trupurilor solide	§ 67— 70
III. Despre trupurile fluide	§ 71
1. Despre fluidele licvoroase	§ 72— 80
2. Despre fluidele elastice seau gazoase	§ 81— 93
IV. Despre trupurile solide și fluide privite în unire.	
1. Despre ecvilibria trupurilor solide și fluide	§ 94—103
2. Despre împotrivirea trupurilor fluide către cele mișcate	§ 104—107
3. Despre son	§ 108—115

B. *Partea a doua : fizica specială.*

I. Despre atragerea chimică	§	116—119
II. Despre lumină	§	120—170
III. Despre foc și căldură	§	171—197
VI. Despre electricitate	§	198—223
V. Despre magnet	§	224—251

C. *Partea a treia : fizica aplicată.*

I. Despre împărțirea pământului cea matematică și despre univers	§	252—276
II. Geografia fizică. a) Fața pământului		
1. Marea	§	277—282
2. Lacuri	§	283
3. Fluvii	§	284
4. Izvoară, fântâni	§	285
5. Pământ uscat sau continent	§	286—288
6. Insule	§	289
b) În lăuntrul pământului	§	290—297
III. Despre Meteorologie	§	298

După cum se vede din această comparație deosebiri esențiale între cele două manuale există numai începînd cu Partea a doua, unde Stamati a omis paragrafele despre corpurile simple, acizi, baze și săruri. De asemenea în Partea a treia a introdus Geografia fizică, lăsînd afară *Anexa* cu Introducerea în istoria naturii. E interesant că Kries din motive pe care le consideră pedagogice nu a pus în cărticica sa nici o figură, pe cînd Stamati a anexat trei tabele cu figuri foarte bine executate. Mai amintesc că ambele manuale au la sfîrșit cîte un indice alfabetic al termenilor tehnici folosiți, care ușurează orientarea cititorului.

Manualul lui Stamati începe cu o Precuvîntare a sa, pe care pentru importanța ei istorică o redau aici în întregime. „Toate ființele universului sînt create de bunul D-zeu pentru un scop : Soarele-i pus să lumineze și să încălzească, apa să adape și să spele, aerul să fie de răsufat pentru viezetoare și prin mișcare se producă prefaceri în atmosferă, mineralele să făptuiască între sine și asupra altora, plantele să crească, să se reproducă și să fie mijloc de viață animalelor, animalele să crească, să se miște, să se reproducă, să fie în relație între sine și mijloc de viețuire, de înlesnire, de comoditate, de ajungere la un scop mai înalt altei ființe din imperiul lor, și acesta e omul.

Între toate ființele viezetoare dar spre pămîntul nostru, omul singur după mai multe dovezi, rezemate pe o cugitare rațională, este creat pentru un scop mai nobil, mai înalt, mai sublim, căci lui adecă omului, în privirea spiritului, i s-a dat ceva mai mult decît tuturor celorlalte ființe ale globului nostru, i s-au dat, zic, minte, rațiune ; iară în privirea fizică, i s-a dat un organ (trupul), în carele să lucreze și carele împreună cu celelalte ființe ale universului să-i fie de mijloc ca să ajungă la acel înalt, nobil, D-zeesc scop.

Dar care este acest nobil, înalt și sublim scop, la care omul trebuie să țintească și să se sirguiască ca să ajungă, sau macar să se apropie? Scriptura și toți înțelepții ne l-au spus, ne l-au lămurit, ne l-au făcut cunoscut.

Cum că fizicește omul când se naște este foarte mărginit, se știe, și cum că și lucrurile rațiunii se desfășură și sfera cunoștințelor se întinde cu creșterea și desevărsirea organismului și cu cunoștința obiecturilor ce-l încunjură este viderat.

Omul capătă cele întâi cunoștințe despre obiecturile naturii numai prin contact. Aceste cunoștințe urmează după gradul impresiunii, ce fac obiecturile asupra simțurilor. Cunoștințele despre obiecturile intelectuale le capătă prin rațiunea sa, treptat după gradul desfășurării cu creșterea și desăvârșirea trupului și după sfera cunoștințelor despre obiecturile universului.

Ca să voiască omul ceva și să țintească în ceva trebuie mai întâi să priceapă, să înțeleagă, să cunoască ce voește, și la ce țintește; și ca să ajungă la țință, la scop, trebuie să cunoască, să știe atît scopul acesta, cum și mijloacele prin care se poate ajunge la dînsul. Cunoștințele dar și științele sînt omului neaparat ca să ajungă la acel scop înalt, sublim. Acestea sînt uneltele, acestea sînt mijloacele, acestea sînt luminile, ce-l călăuzesc; fără dînsule omul rătăcește, rămîne, ori unde între celelalte animale, care potrivit naturii lor, țintesc numai la un scop material, și se aseamănă lor. „Alăturatu-s-au cu dobitoacele cele fără de minte și s-au asemănat lor.“ Fără cunoștințe și științe omul perde calea cea adevărată, oarbecă întru întuneric, nu cunoaște ce este de folos și ce este vătămător sufletului și trupului, nu cunoaște nici adevăratul bine, nici adevăratul rău; face ce nu-i de făcut, își perde timpul înzădar, își perde viața fără nici un scop, se perde trupește și sufletește pre sine însuși și pre alții. Cunoștințele și științele arată omului calea cea adevărată, cea mai scurtă și mai lesnicioasă; ele îl învață în fericire să nu-și iasă din măsuri și în nenorocire să nu-și piardă cumpătul, să nu se despereze. De aceea dar se cer cunoștințe și științe, se cere a ști, și spre a ști se cere a învăța, căci nimine nu se naște învățat.

Științele sînt foarte întinse și felurite, după felurimea obiecturilor și după gradul cunoștințelor de căpătat despre dînsule. Omul nu poate să aibă în speșial cunoștință despre toate, ba și în general este cu anevoe, drept care omul nu poate ști toate, căci numai D-zeu este a toate știitor; totuși prin o sistematică învățătură poate ajunge de știe multe, foarte multe; și după cele zise, este de nevoe să învețe un curs regulat și sistematic de științe, căci alt feliu învățînd numai cîte ceva de ici colea și adesea pe dos fără adevăratul înțeles, se face un om stricat și mai rău decît cel firesc pre care îl povățuește măcar frica lui D-zeu și dreapta sa judecată în cele ce cunoaște, și nu se atinge de cele ce nu cunoaște, căci nu se rușinează a-și mărturisi neștiința și a întreba pre cei ce știu. Un om stricat, un șarlatan vatămă mai mult soțietăței decît un om firesc, căci omul stricat și șarlatanul nu cunoaște adevărata vrednicie a omului, nu se cunoaște pre sine, este o creatură fără suflet, o mașină infernală, căzută din vrednicia omenirii, gata a împlini ori ce faptă nelegiuită și vătămătoare. Cunoștințe și științe sistematice sînt de nevoe omului ca să fie adevărat om.

Am zis că științele după feliurimea obiecturilor sînt fielerite. Științele ce ne povățuesc cătră cunoștința obiecturilor naturii se numesc științe naturale sau mai bine științele obiecturilor naturii.

Între aceste științe fizica este una din cele mai însemnate, căci după istoria naturii, apoi ne încunoaște chiar din pruncie cu fenomenii, cu prefacerii, cu legii statornicite de creator în natură.

Cînd aflăm în copilărie că focul arde, ne încălzește și ne frige, că apa ne adapă, ne răcorește, și ne înecă, învățăm fizica. Acestea însă sînt fenomene foarte cunoscute; dar sînt altele mai ascunse și mai greu de înțales, care touși atîrnă de la niște legi statornice, și pe acestea ni le spune fizica. O așa frumoasă și folositoare știință la națiile civilizate se împărtășește tinerimii încă în fragida vîrstă; noi Români pînă acum în limba noastră încă n-avem o carte cuprinzătoare de această știință, aceasta este cea întii care acum părăsește tipariul. Ea înse este menită a fi mai mult o carte elementară școlastică pentru clasele de colegii, drept care pre cît s-au putut potrivit pentru aceste clase m-am sirguit de o am și prelucrat-o

Iasi, în april, 1949.

T. Stamati"

În ciuda caracterului teologic al începutului Precuvîntării, ceea ce de altfel este caracteristic epocii și mediului în care a trăit Stamati, ea scoate în evidență importanța științelor și mai ales a folosului fizicii pentru educația tinerimii.

Introducerea cărții lui Stamati nu mai este originală, ci e luată din manualul lui Kries. Aceasta se poate vedea mai lămurit din confruntarea textelor. Iată începutul Introducerii în cele două manuale :

Kries

1. Es ist für den Menschen von Wichtigkeit, die Dinge, die ihn in der Nahe unde in der Ferne umgeben, und mit welchen er auf so vielfache Weise in Verbindung steht, kennen zu lernen. Die Menschen haben sich daher schon von Alters mit der Betrachtung und Untersuchung dieser Dinge, die man zusammen wohl unter dem Namen *Natur* begreift, beschäftigt, allein man ist darum noch lange nicht dahin gelangt, sie alle genau und vollständig zu kennen; woran theils die unermessliche Menge der Dinge, thils ihre verborgene Beschaffenheit—verbunden mit der Eingeschränktheit der menschlichen Erkenntnisskräfte—Schuld ist.

Stamati

1. În natură ne naștem, creștem și murim; ne este dar de mare trebuință a cunoaște obiecturile ei, cu care venim în atingere prin feliurite chipuri. Oamenii însă din vechime s-au îndeletnicit a observa și a cerceta pe aceste obiecturi cuprinse toate supt cuvîntul *Natură*; înse veacuri trecură pînă ce au ajuns îi a cunoaște macar pe unele cu deplinătate, parte din pricina mulțimei obiecturilor, iară parte și pentru însușimile lor cea ascunsă, și adese cu greu pătrunsă de cunoștința ominească cea foarte mărginită.

Avem așadar de a face cu o prelucrare strâns legată de original mai bine zis cu o traducere liberă a cărții lui Kries. În continuare în Introducere se definește ce sînt *științele naturale, fizica, puterea, fenomenele naturale*. „Fizica încă e una din științele naturale, căci ea se îndeletnicește cu *trupurile neorganice, cercetînd legile făptuirilor lor, între sine*“. Introducerea se încheie cu arătarea scopului fizicii, — care este stabilirea legilor cărora le sînt supuse fenomenele fizice — și a foloaselor acestei științe. Între foloase se amintesc: 1. Fizica ne luminează mintea; 2. Ne dă o mai lămurită cunoaștere a cauzelor unor fenomene și obiecte; „scoțîndu-ne din prejudețile ce ne sînt atît de înrădăcinate din copilărie, și care pricinuiră și pricinuesc încă atîte daune.“; 3. Ea ne învață să cunoaștem „Preputernicia plăsmuitorului“; 4. Ne învață să întrebuițăm spre folosul nostru o mulțime de lucruri și să ne ferim de „vătămătoarele înriuriri ale altora“. În sfîrșit: 5. Ne înlesnește și o plăcută îndeletnicire“.

*

Partea întâia care cuprinde fizica generală începe cu considerații asupra proprietăților generale ale corpurilor: „Între aceste se pot socoti următoarele: *întinderea, nepătrunderea, împărțibilimea, coherenția, porimea, greutatea*“. Aici Ștamatî amintește că „Unii mai adaog și alte însușiri între aceste“, fără însă a le înșira.

Întinderea are loc în trei „dimensii“, dar întinderea corpurilor e mărginită, de aceea orice trup „are o formă sau figură“. Locul ocupat de un trup se numește „trup matematic“. Corpul material se opune cu o „putere respingătoare“ ca un altul să-i ia locul; aceasta este „nepătrunzimea“. De aici urmează că trupurile se pot „despica“, dar nu se poate spune pînă unde. „Trupurile ce nu se mai pot împărți cu instrumentele noastre se numesc Atomî — niște asemenea înse nu sîntem în stare a arăta în faptă“.

Părțile trupurilor sînt ținute laolaltă de „*puterea atractivă* sau a *coheziei*“. Aceasta însă nu are aceeași tărie, de unde provin diferitele „graduri de *soliditatea* trupurilor“. Dar nu se știe de unde provine această soliditate. Cohezia este de mai multe feluri, de aceea trupurile încă sînt diferite și anume „solide și fluide, tari și moi, scrupoase (fragide) și elastice (vînjoase) ș.c.l.“

Între părțilelele unui trup „rămîn niște borțite mici numite *pori*“; această însușire generală a corpurilor se numește *porime* sau *porozitate*. Din cauza porozității trebuie să deosebim *masa* și *volumul* sau *cuprinsul* unui trup. Din raportul lor se obține *desimea* unui trup. Masele se măsoară cu *cumpăna*, din raportul *pondurilor*. „Pondul atîrnă de la *greutatea* trupurilor, carea este produsă de o putere numită a *greutății*, ce făptuește neconținut asupra tuturor trupurilor.“ Datorită *greutății* toate trupurile tind să cadă în direcția *verticalei*. Raportul *pondurilor* a două corpuri de aceeași mărime ne dă *pondul specific* al lor.

Paragrafele care urmează se ocupă cu mișcarea corpurilor. După ce se definește *locul* absolut și relativ al unui corp, repausul și mișcarea absolută și relativă se trece la noțiunea de *inerție*. Privitor la această noțiune Kries scrie:

„23. So viel ist aber gewiss, dass, wenn ein Körper einmal sich in wirklicher Ruhe befindet, er so lange darin verharret, als er nicht durch irgend eine Kraft daraus getrieben wird. Ist er hingegen einmal in wirkliche Bewegung gesetzt worden, so *wirkt die Kraft so lange beständig in ihm fort* bis sie durch eine andere Kraft aufgehoben wird. Dieses Beharren der Körper in dem Zustande, in welchem sie sich einmal befinden, nennt man ihre *Trägheit*“.

Stamati însă în loc să traducă acest paragraf îl prelucrează simplificându-l după cum urmează :

„23. Atîta se știe că ajungînd un trup să fie odată în repaos adevărat, nu se pornește de sine până nu va fi împins de vreo putere.

Aflîndu-se înse odată în mișcare adevărată, el merge neconținut și nu se oprește până ce nu va făptui dinpotrivă o altă putere. Deci această plecare a trupurilor, de a rămîne în repaosul în care au căzut odată se numește *inerția* sau *lenea lor*“.

Confruntarea acestor două texte arată că Stamati a modificat propoziția a doua înlocuind din enunțul lui Kries expresia „forța care acționează constant în el“ cu aceea că „el merge neconținut și nu se oprește“. În schimb însă traduce cuvîntul *Zustand* din Kries, cu termenul de *repaus*, care nu este potrivit.

În continuare se definește corect *repegiunea*, mișcarea *uniformă* și cea *neuniformă*, *prăpîită* și *întîrziată*, *regulată* și *neregulată*, dîndu-se exemple de mișcare uniformă.

După enunțarea principiului inerției întîlnim legea a doua a dinamicii exprimată astfel : „Puterea ce mișcă un trup poate să-i dea o repegiune cu atîta mai mare, cu cît mai mică masă are trupul. . . . Dinpotrivă ea dă unui trup o repegiune cu atît mai mică cu cît el are o masă mai mare. Așadar din raportul puterilor ce făptuiesc asupra unor trupuri, și din raportul meselor acelor trupuri se poate afla raportul repegiunii lor“.

Ca aplicație se dă următorul exemplu : „Dacă o putere va mîna un trup de o oacă de 50 de palme pe secundă, atunce o putere întrîit mai mare va mîna pe un trup de $1\frac{1}{2}$ oacă, 100 de palme. Așadar acesta va avea o repegiune îndoit mai mare“.

Se vede din cele de mai sus că Kries și după el Stamati folosește ca măsură a forței cantitatea de mișcare, adică produsul dintre masă și viteză. De fapt unii autori din secolul al XVIII-lea și al XIX-lea datorită haosului ce domnea privitor la noțiunea de forță, întrebuițau ca măsură a ei fie „forța moartă“ fie „forța vie“ a lui Leibniz. Alții luau ca măsură a forței *instantanee* cantitatea de mișcare și numai ca măsură a forței constante produsul dintre masă și accelerație.

Legea a treia a lui Newton (al cărui nume aici nu se pomenește) o întîlnim exprimată în următoarele :

„Făptuind un trup asupra altuia, perde acela pe atîta din puterea sa, pre cît el îi împotrivesc acestue, încît s-ar pute zice că aice puterea trece dintr-un trup în altul. Micșurarea în putere ce suferă trupul făptuitoriu, se numește *contra-făptuirea* altui trup asupra celui făptuitoriu; drept care se zice că *contra-făptuirea ar fi pururea egală făptuirii*, adecă un trup perde

pre atîta din puterea sa precît împărtășește altuia“. Aceste legi sînt completate cu observația că puterea determină nu numai mărimea mișcării, ci și direcția ei. Mișcarea unui corp sub acțiunea unei singure puteri este o *mișcare simplă*, sub acțiunea mai multor ea este *compusă*. Aceasta din urmă se determină cu ajutorul *paralelogramului puterilor*. Mișcarea *strîmblinică* se datorește făptuirii continue a multor puteri. Cazul cel mai simplu este cînd asupra trupului făptuiesc două puteri, una *centripetală*, iar cealaltă *centrifugă*. Spațiu plin cu materie se *împotrivește* mișcării.

Căderea corpurilor este o mișcare pripită ce are loc după legea : „*peăile trupurilor căzătoare se rapoartă ca patratele timpurilor*“. În vid toate corăurile cad la fel. La aruncarea în sus se pune întrebarea : „*Puteoar un trup s fugă de tot de la pămînt ? în sine nu ar fi cu neputință ; s-ar cere însă o repegiune de vr-o milă și jumătate pe secundă dar atîta de mare repegiune noi nu putem produce*“. În mod elementar, cu ajutorul unei figuri, se arată că linia descrisă de un corp aruncat orizontal este o *parabolă*.

La capitoul despre solide se studiază mai întii *ecvilibria* lor. Se tratează mai întii *rădicătorul matematic*, adică pîrghia matematică care este o *linie dreaptă neîndoibilă*, și se arată condiția de echilibru a rădicătorului cu *brate egale și neegale*, precum și a celui unghiat. Aceste sînt rădicătoare *dîbratate*; rădicătorul fixat la un capăt se numește *unibrațat*. Legea de echilibru însă este aceeași pentru ambele genuri de rădicătoare : „*puterea și povara vor fi în proporție întoarsă cu depărtările lor de la punctul opririi*“. De la rădicătorul matematic se poate face aplicație la cel *fizic*.

Scriptii pot fi *simpli*, *dupli* (roata cu sul) și *simpli cu osie întepenită*. Se definește apoi *punctul greutății*, adică *centrul de greutate*.

Oscilațiile trupurilor solide sînt tratate pe scurt. Mișcarea *oscilîndă* „se poate isca prin un îndoit chip. 1. *prin greutate*, 2. *prin elasticitatea trupurilor*. Din aceasta se nasc două feluri de fenomene *oscilații de pendel* și *oscilații de son*“.

O linie matematică adică fără greutate avînd „la unul din capetele ei întepenit un punct cu greutate“ formează un *pendul simplu* sau *matematic*. După enunțul legilor acestuia se trece la *pendelul fizic* sau *compus*, la care „și linia lui are o greutate și trupul din capăt o însemnată întindere“. Aici se definește atît *oscilația mijlocie*, cît și *punctul oscilațiilor*, adică centrul de oscilație.

La *ciocnirea trupurilor solide* se are în vedere atît ciocnirea trupurilor *vîrtoase*, cît și a celor *elastice*, fie în ciocnirea centrală fie în cea oblică pe o suprafață plană. La aceasta din urmă unghiul *încăderii* este egal cu unghiul *răsăririi*.

Expunerea *apăsărei trupurilor solide pe un plan înclinat*, Stamati o completează după *Lehrbuch der Physik* a lui Kries, folosind noțiunea de sinus. El arată că pe un plan înclinat „se rapoartă întreaga putere la partea ce apasă trupul spre plan ca 1 la sinul unghiului înclinării, iară la partea ce-l mîină paralel cu planul ca 1 la sinul acelu unghiu“. Se amintește aplicarea planului înclinat la *pană*, *șurub* etc.

Frecarea trupurilor solide „se naște din neaseminimea feților trupurilor“. Se dau cinci reguli practice pentru micșorarea frecării și anume : „1. *Lucierea seau netezirea trupurilor*.

2. Unsori, oloiuri, sopen și alte asemenea materii, puse între fețele ce se freacă.

3. Roți, vălătuci și suluri, pe care seau între care se dau povoarele.

4. O potrivită alegere de materii...

5. O formă potrivită“.

Capitolul despre *trupurile fluide* se ocupă pe rând cu *fluidele licvoroase* și cu cele *elastice* sau *gazoase*. Primele sînt caracterizate prin aceea că formează picături. Pentru ele e valabil paradoxul hidrostatic și legea *vaselor unite*. Se arată aplicația la *apăduceri*, *fîntîni săritoare* „sifonul anatomic al lui Wolf“, presa „reală“ (a lui Real) etc.

Gazele se pot „îndesa“ și „rări“; ele sînt grele. Se trece la aplicațiile aerului îndesat la *puștele de vînt*, *fîntîna lui Heron*, *puștele de foc*, *cufundaciul cartezian*. Se amintește că „decurînd unele gaze s-au condesat pînă ce s-au prefăcut în fluide licvoroase“. Prin rărirea aerului puterea lui elastică scade; pe această însușire a lui se razimă *pumpha* sau *tulumba pneumatică*, *aeropumpha*, inventată de Otto von Guericke. Se descrie experiența lui Torricelli care arată că „*apăsarea aerului în apropierea pămîntului stă în cumpănă cu o colonă (stălp) de argint viu 22 palme de naltă*“. Descriind această experiență, care nu se găsește în manualul lui Kries, Stamatî adaugă următoarea notiță istorică.

„La aceasta i-au dat pricină niște fîntînari, carii voea se rădice apa c-o pumpă sugătoare peste 32 palme, dar nu putea. Aceștia se duseră la vestitul fizic Galilei ca să le ajute în nedumerire, dar nice acesta nu le putu spune adevărata cauză. Mai tirziu scoleriul seu Toriceli au descoperit la 1643 că apăsarea aerului era pricina“.

Ca aplicații se dă *barometrul*, *sifonul*, *rădicător* etc.

Capitolul despre *echilibria trupurilor solide și fluide în unire* începe cu plutirea corpurilor solide și fluide într-un fluid. Fără a se menționa numele lui Arhimede se enunță că un corp cufundat într-un fluid „perde pe atîta din pondul seu, precît trage cîșimea de fluid rîspinsă din loc“. Ca aplicații se dau *arcometrul*, haine de scîldat, corăbiile și se atrage atenția că „un galben bun trage mai mult în apă decît unul rău (fals)“; iar la plutirea în gaze *baloanele* sau *aerostaturile*. Aflătorii acestora „au fost niște francezi, frații Montgolfier; îi întrebua la aceasta aerul cel rîrit prin căldură, și cea întîi călătorie aerică făcută la 21 noem. 1783 în Paris, Pilatru de Rozier și marchizul d'Arlandes“.

Cumpănirea trupurilor într-un fluid ne dă pondul lui specific. Aceasta se face cu *balanța edrostatică*. „Un palmac cubic decimal de Paris trage 557 grăunțe colonice“ (de Köln).

Fluidele se împotrivesc mișcării prin ele a solidelor. Împotrivirea e cu atît mai mare cu cît fluidul e mai mare, sau „cu cît mai multă masă se împotrivesc trupului mișcat“. Ea mai depinde de *forma* corpului mișcat și de *răpegiunea* lui. Ca aplicații se amintește navigația, morile de apă și de vînt.

Sonul sau *sunetul* este produs de oscilațiile corpurilor elastice. „Ba încă și trupurile fluide sînt în stare a oscila.“ Sunetul e produs de o mișcare, ciocnire sau o scuturare. Cu cît oscilațiile sînt mai repezi cu atît mai *sus* este *tonul* sunetului și cu cît sînt mai rari cu atît *tonul* e mai *jos*. Oscilațiile ne-

regulate produc niște sunete care se numesc : *scîrțiere, vuet, zuzăire* etc. Se amintește de *figurile regulate* ale lui Chladni, de *fundurile sunătoare*. Oscilațiile se *proplîntează* prin aer la urechea noastră și produc sunetul. El se *îmăntăște* în toate părțile în linii drepte numite *raze de sunet*. În aer sunetul *îmăntăște* cu o repeziune de vreo 1193 palme pe secundă. Prin *vorbariu* și prin *țevi lungi* sunetul se duce într-o direcție, iar cînd dă de un obstacol, unde se răsfrînge, se naște *ecoul*.

Partea a doua a fizicii, adică cea specială începe cu cîteva noțiuni de chimie, care e definită astfel : „ *Hemia* sau *maestria a desface* se îndelnetnicește cu desfacerea trupurilor în părțile constătătoare eterogene și din cele eterogene a compune felurite trupuri“. Se spune ce este *atragera hemică* a trupurilor *afine*. Cînd un corp solid cufundat într-un fluid e udut de acesta înseamnă că ele sînt *fini*. Se dau exemple de acest fel, cum este *mașina de funie* a lui Vera, fenomenele *capilare* etc.

Capitolele de chimie din Kries, care se ocupă cu elementele, acizi, baze și săruri, apă și gaze sînt omise, trecîndu-se direct la cel despre lumină. Acesta este tratat de Stamati cu mult mai pe larg decît în Kries, ocupînd un spațiu mai mare decît dublul din manualul german. Explicația e simplă : „Lumina pentru noi este cel mai minunat și mai însemnat obiect din natură ; căci prin trînsul ni se deschide priveliștea lumii ; carea alt fel mai ni ar fi cu totul necunoscută“. Cea mai multă lumină ne vine de la Soare în 8 minute.

În privința luminii corpurile se împart în : *singure luminătoare, luminoase și neluminătoare neluminoase*. Cele neluminătoare pot fi : „ori *luminale*, în care întîmplare multe din trînsese seamănă celor luminătoare ; ori *întunecoase*“. Trupurile neluminătoare prin care trece lumina sînt *prevăzii*, iar acelea prin care nu trece sînt *neprevăzii*. Lumina se răsîndește în toate părțile în linii drepte numite *raze de lumină*. Cînd razele de lumină întîlnesc un corp întunecat și netransparent îl *luminează* ; în dosul acestuia se face *umbră*. Tăria luminării la depărtare îndoită de corpul luminător este $1/4$ la una întreitată $1/9$, la una împătrită $1/16$ etc.

Cînd lumina cade pieziș pe un corp transparent are loc *frîngerea razelor de lumină* ; ea depinde de însușimea *mediului frîngătoriu*. Refracția este tratată după cartea lui Kries : *Lehrbuch der Physik*, din care e luată și figura. *Raza încăzetoare* „vine dintr-o spație deșartă ori dintr-un mediu mai rar și intră într-altul mai des apucă“ spre perpendiculară iar dacă „vine dintr-un mediu mai des și trece în spație deșartă, ori într-un mediu mai rar, apucă“ abătîndu-se de la verticală. „Raza încăzetoare și raza frîntă se află tot într-un plan“. Refracția luminii stă la originea *amăgiriilor optice*.

O aplicație foarte folositoare a frîngerii razelor de lumină este construirea *sticlelor optice*. Ele sînt de două feluri : unele măresc și se numesc *vișcate bulbucate*, iar altele micșurează și se numesc *găvănate, covăete, adăncate*, „și toate la un loc cu un cuvînt se cheamă *linți*, pentru că au forma unei linți“. Proprietățile acestor linți sînt redată iarăși după *Lehrbuch der Physik* al lui Kries.

Razele ce vin la lințile bulbucate paralel cu *osia linții* se taie într-un punct numit *focul linții*. Depărtarea acestuia de la linte se numește *depărtarea focului linții*. Cele care pleacă de la un punct mai depărtat de linte decât focul ei după frângere taie osia într-un punct mai depărtat de linte decât focul ei. Razele ce purced dintr-un foc al linții merg paralel cu osia. Razele ce pornesc dintr-un punct mai apropiat de linte decât focul ei, trecînd prin ea după frângere nu numai că nu se taie ci se despart. „Cu toate acestea desvertirea lor este mai mică, decât dacă n-ar fi lintea“.

La lințile găvănate razele paralele cu axa se *desvertesc* trecînd prin linte și numai prelungite îndărăt se întîlnesc în focar. Raza neparalelă cu osia și care nu se frînge se numește *rază principală*.

Razele ce vin la lentilă de la un punct sau se întîlnesc într-un punct numit *geometric* sau *virtuel*, sau se întîlnesc numai prelungite într-un punct *fizic*. În ambele cazuri avem cîte un *chip* al punctului. La imaginea unui obiect trebuie să luăm aminte la : 1. *locul* lui 2. *pusăciunea* și 3. *mărirea* lui. La lentilele bulbucate chipul este *întors*, la cele găvănate e *drept*. Se explică apoi ce este un *unghiu optic* și mărirea *părută* a unui obiect.

Cu ajutorul unei bucăți „de sticlă în trei muchi, numită *prismă*“ se obține un *spectru prismatic*. „Cu frîngerea luminii se aseamănă *plecarea*“ ei, adică *difracția*. Cu trecerea și refracția luminii se ocupă *dioptrica*.

„Căzînd o rază pe un trup întunecos și neprevăziu, se *răsfrînge*, și anume ca un trup elastic, *tot supt acel unghiu supt carele cade*“. Dacă fața obiectului e lucie avem o *oglinză*. Oglinzile sînt : *plane* sau *strîmbe*. Se amintește *oglinza unghetă*, oglinzile *paralele*, *lădițele*, *cămăruțele cu oglinzi* și *caleidoscopul*.

Oglinzile strîmbe sînt de două feluri : *Găvănate* și *veșcate*. Se arată după *Lehrbuch* a lui Kries, mersul razelor la aceste oglinzi.

Atît sticlele bulbucate cît și oglinzile găvănate produc în focul lor o căldură mare, de aceea se numesc *stecle* și *oglinzi arzătoare*. Așadar lumina produce și căldură. Herschel a observat că „printre razele luminătoare sînt unele *întunecate*, care produc căldură“. Lumina mai are și înrîurire *hemică*. Pe aceasta se razimă „minunata aflare a lui Daguer, numită *Daguerotipie* sau *fototipie*“.

Alte fenomene optice menționate sînt : *inelile colorate*, *interferențea*, *polarizarea* și *dupla frîngere*.

Trecînd la *instrumentele optice* se amintesc *ochilarii* și *microscopurile simple*, numite și *lupe*. Instrumentele optice mai complicate sînt construite din mai multe linți, linți și oglinzi sau numai din oglinzi. Primele se numesc *dioptrice*, ultimele *catoptrice*.

După descrierea microscopului simplu urmează cel compus, care are „trii linți bulbucate, din care cea despre obiecte, se numește *obiectivă*, cea din mijloc *colectivă* adică *culegătoare*, și a treia, ce o lipim de ochi *oculară*“.

O altă clasă de instrumente optice sînt *ochenile*, care sînt formate fie numai din lentile fie din lentile și oglinzi Din fiecare clasă sînt importante trei soiuri : „anume din clasa întîiea. 1. *ocheana Olandică* sau a lui *Galilei* ; cea *astronomică* sau a lui *Kepler* și cea *terestră* (pămîntească) *obicinuită*. Din adoa clasă sînt de însemnat : 1. *telescopul* lui *Newton*,

2. al lui Casegren, și 3. al lui Gregorie“. Ca o ocheană să fie bună se cer două condiții : *mărirea cîmpului vederii și o îndestulă curățenie.*

Alte instrumente optice descrise sînt : *cămara oscură, clară și lucidă ; laterna magică, microscopul solar și lădițele perspective* seau *panoramele.* „O lanternă mai mare și mișcătoare pe roate cu deosebit mehanism, se numește o *fantasmagorie*“. Laterna magică și panorama servesc „spre desfătare pentru copii“.

Capitolul despre foc și căldură începe cu unele considerații asupra naturii : „Foc, căldură, ferbiuțeală, arșiță sînt niște cuvinte, ce rostesc idei încă ne de ajuns determinate“. Totuși menționează că „fizicii primesc un element imponderabil foarte subțire numit caloric, și acesta în strînsă legătură cu lumina este cauza escării focului, a căldurii, a ferbiuței și a arșiței. Acest element este de o fire atît de tainică încît pînă acum despre dînsul trebuie a ne mărgini mai mult cu opoteze...“. Focul se poate naște în diferite chipuri : prin *împărtășire, atingere, frecare, razele soarelui, fulger și prin aprindere de sine.* Focul încălzește, înferbîntă și aprinde. Prin foc trupurile solide se topeșc ; la topire „o cîțime de căldură se *leagă amortește*“. Fluidele prin foc se prefac în *abori.*

Cu ajutorul termometrelor se stabilește o *scară* sau *grade* de căldură și de frig. Se descriu scările de temperatură „Fahrenheit, Celsie și Reaumur“. Trecînd la prefacerea apei în aburi se descrie *mașina cu abori* și se amintește aplicația ei la *vaporuri.*

Prin încălzire trupurile se *întind*, iar prin răcire se strîng ; mai cu seamă se întinde aerul. Căldura poate trece de la un trup la altul, dar ea nu pătrunde în toate trupurile cu aceeași ușurință, deosebim așadar *buni și răi conductori de căldură.* Uneori prin amestecul a două corpuri se naște *căldură, răceală* ori *frig.* „Acest fenomen ni dovedește că s-au schimbat chiar statul trupurilor, seau că ele au făptuit între sine hemic“. O mulțime de fenomene sînt însoțite de căldură și frig. Cu această ocazie căldura sau iasă *slobod*, sau se *leagă.*

Focul poate produce mari daune, de acea se înșiră mijloacele de a-l combate. Regulele de combătut focul sînt : stingerea lui imediată, oprirea curenților de aer prin închiderea ferestrelor și obloanelor, acoperirea focului cu o *mintă, țol, lopățele* de cenușă sau nisip. Apa nu trebuie aruncată pe pară ci pe lemnul arzător ; în lipsă de apă se pot folosi peteci ude legate de o prăjină. Foarte bune sînt pompele de foc. E bine să se țină la îndemînă o cantitate de apă etc.

Capitolului de electricitate Stamati de asemenea i-a dat o extindere mai mare, folosindu-se de *Lehrbuch* a lui Kries. Arată diferitele feluri de a produce electricitatea : prin *frecare și prin împărtășire, inducere* etc. Cuvîntul *electricitate* „vine de la grecește *electron*, adecă trăgătoriu, ce înseamnă chihlimbariu pentru că el trage foarte tare, frecat fiind“. Electricitatea se datorește unei *materii* numită *electrică.* Corpurile se împart în *conductori și neconductori.* Deosebim două feluri de electricitate : *pozitivă și negativă.* Electricitatea are două legi :

1. „Trupurile omogene electrizate se rîsping între sine, iară trupuri eterogen electrizate se atrag.

2. Orice trup pus în atmosfera electrică a altui trup electrizat, în partea despre dînsul arată electricitate opusă".

Se descrie *mașina electrică*, apoi se înșiră diferitele aparate electrice: *electroscopul*, *electrometrul*, *tabla lui Franklin*, „*butelia lui Leidner*”, *electroforul* și *condensatorul*.

Se vorbește apoi despre descoperirea *galvanismului*, a *elementului voltaic*, *coloanei* și *bateriei voltaice*. Cu coloana lui Volta, Oersted a descoperit fenomenele *electromagnetice*. Se amintește *turmalina* și *peștii electrice*. În general de la electricitate „atîrnă multe fenomene naturale. Despre unele știm cu siguranță. Iară despre chipurile prin care în natură urmează fenomenele electrice știm prea puțin”.

Magnetismul de asemenea este tratat mai pe larg decît în manualul elementar al lui Kries. El începe spunînd că: „Între *escurile feroase* se găsesc bucăți ce au însușime de a trage la sine fierul”. Aceste se numesc *magnete naturale*, *magnete firești*, *feromagnete*. Se definesc *polii magnetici nord* și *sud* și „un loc ca un inel în fierul magnetismului, de care piliturile nu s-animă nici cum, seau unde magnetul nu arată nici o tragere”. Puterea magnetică se poate împărtași fierului și oțelului, obținîndu-se *magnete maestrite*.

Legea principală a magnetismului este că „polii eterogeni se răsping între sine, iară cei omogeni se trag între sine”.

Acele sau acurile magnetice iau direcția *medianulelor magnetice*, acestea se taie în *polii magnetici ai pămîntului*. Dreapta ce unește polii magnetici ai pămîntului se numește *osia magnetică*, iar cercul cu centrul pe această osie și perpendicular pe ea este *ecuatorul magnetic*. Se descrie *busola* și se definește *abaterea magnetică*, adică *declinăciunea magnetică*, apoi plecarea numită *inclinăciunea magnetică*.

Dintre noile invenții în legătură cu magnetismul se amintește *multiplicatorul electromagnetic* al lui Poggendorf și *galvanometrul*. Dintre noile descoperiri din domeniul electromagnetismului sînt menționate legile lui Ampère privitoare la atracția a doi curenți electrice, producerea *scînteii electrice* cu ajutorul magneților de către Faraday și *termomagnetismul* sau *termoelectricitatea* descoperită de Seebeck. La fel se expune pe scurt teoria magnetismului a lui Aepinus și cea a lui Ampère. După această din urmă „care se ține tare”, nu există o deosebită materie magnetică, „ce tot aceleași materii sau tot aceleași puteri, de care atîrnă fenomenele electrice, produc și pe cele magnetice”.

*

Partea a treia, care cuprinde fizica aplicată începe cu noțiuni elementare de astronomie: pămîntul și universul, exact ca în manualul elementar al lui Kries.

Mai întîi se aduc dovezi privitoare la *rătușjimeca pămîntului*, apoi se definește *osia pămîntului*, *polii*, *ecuatorul*, *gradele*, *meridianul*, *lățimea* și *lungimea locului*, *orizontul*, *zenitul*, *răsăritul* și *apusul*. Se aduc argumente pentru rotirea pămîntului și se trece la descrierea universului.

Aici se definesc *polii cerului*, *polii lunii* sau *ai universului*, și *osia lumii*, care trece prin *steaua polară*, și se spune ce sînt *planeteii* și *steiele*

fipte. Descrierea mișcărilor cerești, corpurilor cerești se face mai bine cu ajutorul *sistemului copernicane* sau *sistemei soarești*. Numele planetelor sînt : Mercur, Vinerea, Pămîntul, Mars, Vesta, Astreea, Juna, Ceres, Palas, Joia, Saturn și Uran. Luna este *trabantul* sau *soțul* Pămîntului. Dar și celelalte planete au trabanții lor : „așa Joia are 4, Saturn 7, și Uran 7, precît sau descoperit pînă acuma. Printre planete se mișcă *comiții*, tot în jurul soarelui . . .”.

Stelele înfipte sînt foarte departe de soare și în număr foarte mare. Ele se clasează în *constelații*. Spre deosebire de planete care sînt opace, stelele fixe sînt corpuri ce luminează de sine, la fel ca soarele nostru. Deci dacă numărul lor e atît de mare cu cît mai mare trebuie să fie numărul planeteșilor ce le înconjoară ! Din nemărginirea universului în care numeroase corpuri ar fi locuite de nenumărate ființe „putem pricepe atuncea cîtîi de nemărginită mărimea și bunătatea ziditorului, carele au dat vieață tuturor acestor ființe, leau hotărît locul lor, și nu uită pe nici una dintrînsele !”

Urmează întrebarea : „cum se țin aceste trupuri cerești în locurile lor ? și cum se învîrtesc pe căile lor ?” Răspunsul este că există o putere care silește un trup să se miște către celălalt. „În adevăr în această putere a greutateii universale videm legătura ce ține la un loc pe toate trupurile universului”. Dar ca să nu cadă la un loc ele sînt respinse de o altă putere, numită centrifugă și așa se învîrtesc unul în jurul celuilalt.

Revenind la pămînt se definește ce este *ecliptica*, *zodiile*, *zodiicul*, *tropicale*, *zonele : ferbinte, stîmperate*, și *geroase*, și *cercurile polare*. Capitolul se încheie cu arătarea *echinocțiilor* și *solstițiilor*, care determină cele patru *timperi ale anului* și cu menționarea *antipozilor*.

Geografia fizică tratează în cîteva pagini următoarele teme : marea lacuri, fluvii, rîuri, izvoare, fîntîni, pămînt uscat sau continent, insule, înlăuntrul pămîntului.

Mai interesant pentru fizică este capitolul de meteorologie, care se ocupă cu „feluritele fenomene aerice numite *Meteor*”. Se descriu aici *vinturile*, *roa*, *bruma*, *negura*, *ploaia*, *ninsoarea*, *grindina*, *furtuna* și se dau regulile de păzire cînd e furtună : un mijloc foarte bun de apărare sînt *abătătorii de furtună*. Între fenomenele electrice ale atmosferei se mai înșiră *trompele* și *focurile plutitoare*. Urmează *stelile căzătoare*, *sferile focoase* numite și *bălauri zburători*, încheindu-se cu *căderea pietrelor aerice* sau *meteorice* numite *aeroliți*, *curcubeul*, *țercălamurile*, *sorii lăturali* sau *luni lăturale*, *amurgul*, *zorii*, *aurora boreală* și *cea australă*.

★

În concluzie din cele de mai sus se pot desprinde următoarele. Este firesc că Stamati care a studiat la Viena a ales ca manual pentru redare în limba română, cărți germane. Alegerea a fost bună, dar dificultățile traducerii au fost mari. El a folosit o seamă de termeni populari, dar a trebuit să și creeze termeni artificiali. Unii termeni s-au păstrat pînă azi, mulți însă au fost abandonați, mai cu seamă după apariția în 1870 a *Elementelor de Fizică* ale lui Bacaloglu, influențat de cultura franceză. În tot cazul Stamati are meritul de a fi pus la îndemîna elevilor săi un manual de fizică la nivelul european.

Desigur este regretabil că manuscrisul de *Fizică experimentală* al lui Stamati pe care l-a prelucrat după Muncke s-a pierdut, totuși prin tipărirea *Fizicii elementare* el a făcut un bun început editării în limba română a manualelor didactice de fizică.

BIBLIOGRAFIE

1. G. A t a n a s i u și T. C â m p a n, *Teodor Stamati, primul fizician moldovean*. „Revista fundațiilor regale“, nr. 7, iunie 1940.
2. C. T s o u r k a s, *Le début de l'enseignement philosophique et de la libre pensée dans les Balkans*. București, 1948.
3. N. T h e o t o k i s, *Stoicheia fizikes* (Elemente de fizică), Leipzig, 1765, 2 volume.
4. G h e o r g h e Ș i n c a i, *Inoățătură firească spre surparea superstiției norodului*. Ediție critică de Dumitru Ghiș: și Tudor Pompiliu. Editura științifică, București, 1964.

ПЕРВЫЙ РУМЫНСКИЙ УЧЕБНИК
ФИЗИКИ

(Р е з ю м е)

Элементарная физика Т. Стамати, вышедшая в свет в Яссах в 1849 г., является первым румынским учебником физики. До появления этого учебника как в Яссах, так и в Бухаресте физику изучали по рукописям или по греческим книгам. Учебник Стамати не оригинальная книга, а переработка по немецкому автору Кризу. Стамати использовал главным образом *Lehrbuch der Naturlehre* этого автора и в меньшей степени и *Lehrbuch der Physik*, вышедшие в нескольких изданиях в первой половине XIX-го века.

Учебник Стамати, имеющий формат в 12/18 см, и напечатанный на 180 страницах кириллицей, содержит предисловие автора и трактует следующее: I. Общая физика, т.е. механика и акустика; II. Специальная физика, т.е. оптика, теплота, электричество и магнетизм; III. Прикладная физика, т.е. математическая и физическая география и метеорология. В конце книги имеется 3 страницы с хорошо выполненными рисунками.

Естественно, что Стамати, — который учился в Вене — после того, как стал профессором высшего учебного заведения „Академия Михэйляне“ в Яссах, начал перерабатывать немецкие книги. Он встречал большие затруднения в переводе научных терминов, однако его заслуга в том, что он нашёл подходящие популярные термины и создал другие новые, из которых одни остались в употреблении, а другие были заменены впоследствии другими терминами, заимствованными из французского языка.

LE PREMIER MANUEL ROUMAIN DE PHYSIQUE

(R é s u m é)

La Physique élémentaire ((Fizica Elementară) de T. Stamati, parue à Jassy en 1849, est le premier manuel roumain de physique. Avant l'apparition de cet ouvrage, on étudiait la physique, tant à Jassy qu'à Bucarest, dans des livres ou des manuscrits grecs. Le manuel de Stamati n'est

pas un ouvrage original mais une adaptation d'après l'auteur allemand Kries. Stamati a utilisé de celui-ci surtout le *Lehrbuch der Naturlehre*, mais aussi, dans une mesure plus réduite, le *Lehrbuch der Physik*, paru en plusieurs éditions dans la première moitié du XIX^e s.

Le manuel de Stamati, de format 12 × 18 cm, imprimé sur 180 pages en caractères cyrilliques, comprend une préface (Precuvintare) de l'auteur et traite des matières suivantes : I. La Physique générale, c'est à dire la mécanique et l'acoustique ; II. La Physique spéciale, c'est à dire l'optique, la chaleur, l'électricité et le magnétisme ; III. La Physique appliquée, c'est à dire la géographie mathématique, la géographie physique et la météorologie. Enfin l'ouvrage contient aussi 3 feuilles de figures bien exécutées.

Il est naturel que Stamati, après avoir étudié à Vienne et avoir été nommé professeur à l'Academia Mihăileană de Jassy, ait adapté des livres allemands. Il a rencontré de grosses difficultés dans la traduction des termes scientifiques, mais il a le mérite d'avoir trouvé des termes populaires adéquats et d'en avoir créé de nouveaux, dont certains sont restés et d'autres ont été remplacés plus tard par des emprunts au français.

INFLUENȚA IONILOR Fe^{++} ASUPRA PERMEABILITĂȚII MAGNETICE ȘI A CONDUCTIBILITĂȚII ELECTRICE LA FERITE

de

I. MAXIM și C. BĂLINTFI

S-a constatat că permeabilitatea magnetică inițială, precum și conductibilitatea electrică a unor ferite policristaline depind de temperatura și durata sinterizării [1, 2, 3 ...]. Această dependență a fost explicată prin aceea că temperatura și durata sinterizării determină, pe lângă alți factori, concentrația ionilor Fe^{++} din ferită.

Noi ne-am propus să studiem proprietățile magnetice și electrice ale feritelor simple în funcție de concentrația ionilor Fe^{++} . Variația concentrației de ioni Fe^{++} s-a realizat nu prin varierea temperaturii de sinterizare, ci prin variația concentrației de Fe_2O_3 din probe. S-au ales pentru studiu feritele simple de Ni, Mg și Cu.

Prepararea probelor și modul de lucru. Ca materii prime s-au folosit oxizii Fe_2O_3 , MgO și CuO de calitate „p. a.” și azotat de nichel de calitate „pur”. Oxizii s-au amestecat în proporții moleculare, încît să fie satisfăcută relația :

$$\frac{Fe_2O_3}{MO} = \delta, \quad 0,7 \leq \delta \leq 1,3$$

în care M reprezintă ionul bivalent de Ni, Mg sau Cu. La o presiune de $2t/cm^2$ s-au presat probe cilindrice cu diametrul de 8 mm și lungimea de 8 mm, care au fost sinterizate în atmosferă de oxigen. Ferita de nichel a fost sinterizată la $1250^\circ C$, cea de Mg la $1200^\circ C$ iar ferita de Cu la $950^\circ C$.

Determinarea permeabilității magnetice s-a făcut prin metoda balistică, introducînd corecțiile corespunzătoare cîmpului demagnetizant. Pentru a face aceste corecții s-au determinat experimental factorii de demagnetizare pentru fiecare probă. Permeabilitatea magnetică a fost determinată în cîmp magnetic slab, a cărui intensitate a fost în jur de 0,1 Oe.

Rezistivitatea electrică a probelor s-a determinat prin metoda volt-ampermetrică, pe lângă un curent de aceeași intensitate la toate probele, deoarece am constatat că rezistența electrică a acestor compuși variază

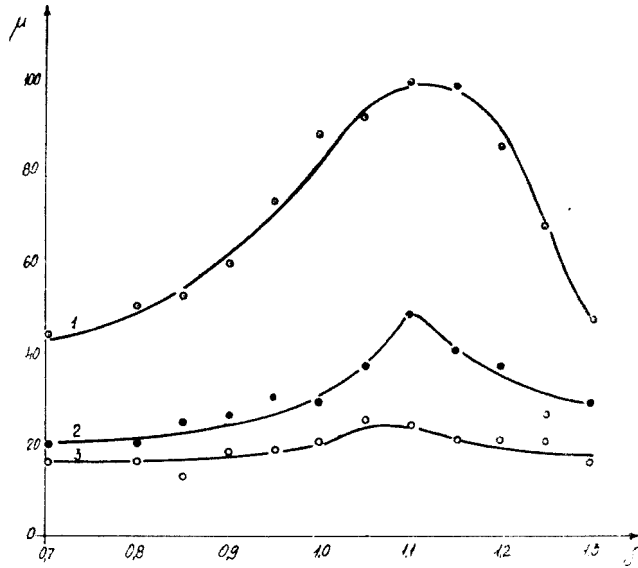


Fig. 1. Dependenta permeabilității magnetice a feritelor de Cu(1), Ni(2) și Mg(3) de concentrația trioxidului de fier.

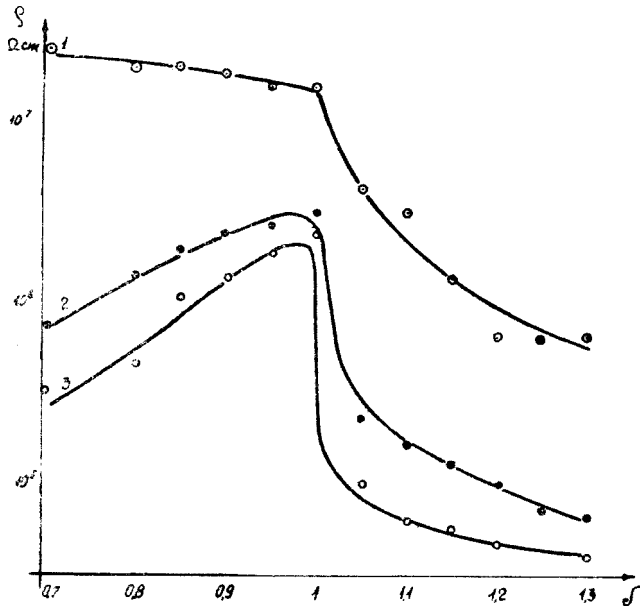


Fig. 2. Dependenta rezistivității electrice de concentrația Fe_2O_3 a feritelor de Mg(1), Ni(2), Cu(3).

în funcție de intensitatea curentului. Un studiu sistematic al acestei dependențe va forma obiectul unei alte lucrări.

Rezultatele experimentale. Măsurarea permeabilității magnetice s-a făcut la temperatura camerei în regim staționar, câmpul magnetizant menținându-se același pentru toate măsurătorile și anume 0,1 Oe.

Rezultatele sînt reprezentate în graficele din fig. 1.

Din aceste grafice se vede că permeabilitatea magnetică a feritelor studiate crește cu creșterea concentrației trioxidului de fier chiar și după depășirea concentrației stoechiometrice, iar după atingerea unui maxim pentru δ în jur de 1,1, începe să scadă. Acest maxim se află în jurul unei concentrații moleculare a FeO de 7%. Ceea ce înseamnă că o concentrație de cca 7% Fe^{++} îmbunătățește permeabilitatea magnetică a acestor ferite.

Rezistivitatea electrică s-a măsurat după grafitarea celor două fețe paralele ale probelor, în vederea realizării unor contacte cît mai bune. Rezultatele măsurătorilor sînt reprezentate în graficele din fig. 2.

Măsurătorile s-au făcut în regim staționar la temperatura camerei. Din alura acestor grafice se constată că rezistivitatea electrică a celor trei ferite studiate scad cu cîteva ordine de mărime la creșterea concentrației de Fe_2O_3 peste 50%. Acest lucru este în acord cu ipoteza [4] conform căreia conductibilitatea electrică a feritelor în mare parte este asigurată de existență în aceeași subrețea a ionilor de fier bivalenți și trivalenți.

BIBLIOGRAFIE

1. A. S. Pahomov, N. A. Smolkov, *Ferrit*, Izd. A. N. Moskva, 1962.
2. J. Smit and H. P. J. Wijn, *Ferrites*, 1959, Philips Technical Library, Eindhoven.
3. L. J. Rabkin, Z. J. Novikova *Ferrit*, Izd. A. N. BSSR, Minsk, 146, 1960.
4. Verwey, „Nature“ 144, 327, 1939.

ВЛИЯНИЕ ИОНОВ Fe^{++} НА МАГНИТНУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ФЕРРИТОВ

Резюме)

Авторами изучилось экспериментально изменение магнитной проницаемости в стационарном режиме для поля 0,1 э у ферритов Ni, Mg и Cu в зависимости от концентрации триоксида железа. Установлено, что для концентрации приблиз. в 7% ионов Fe^{++} магнитная проницаемость максимальна. Измерено также удельное электросопротивление в стационарном режиме и при комнатной температуре. Установлено, что удельное электросопротивление падает на несколько порядков величины при повышении концентрации Fe_2O_3 свыше 50% в молекулярных процентах.

INFLUENCE DES IONS Fe^{++} SUR LA PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE ET LA
CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DES FERRITES

(R é s u m é)

Les auteurs étudient expérimentalement la variation de la perméabilité magnétique en régime stationnaire, pour un champ de 0,1 Oe, des ferrites de Ni, Mg et Cu en fonction de la concentration du trioxyde de fer. Ils ont trouvé que, pour une concentration d'environ 7% des ions Fe^{++} , la perméabilité magnétique est maxima. Avec les mêmes essais on a mesuré la résistivité électrique, toujours en régime stationnaire et à la température de la chambre. On a constaté que la résistivité électrique diminue de quelques ordres de grandeur avec l'augmentation de la concentration en Fe_2O_3 au-delà de 50% en pourcentage moléculaire.

ANTIFEROMAGNETISMUL UNOR ALIAJE TERNARE PE BAZĂ DE NICHEL

de

IULIU POP și IOAN MAXIM

Studiului proprietăților magnetice ale aliajelor binare pe bază de nichel, în general, i-au fost consacrate multe lucrări [1—5]. În ce privește sistemele de aliaje ternare, domeniul este complet nestudiat, deși posibilitățile de realizare a unor interacțiuni de schimb sub diverse forme sînt mult mai mari. În cazul aliajelor ternare domeniul de solubilitate solidă este mai restrîns, dar însăși prezența a trei componente diferite poate duce la formarea unor subrețele cu interacțiune antiferomagnetică pentru compoziții care depășesc limitele solubilității solide.

Prezenta lucrare este destinată studiului comportării magnetice în domeniul paramagnetic al sistemelor de aliaje ternare Ni-Cu-Al și Ni-Au-Al, pentru care anterior s-a studiat numai dependența temperaturii Curie feromagnetice (θ_c) în funcție de concentrația atomică a componentelor nemagnetice pentru cazul solubilității solide [6].

Din sistemul ternar Ni-Cu-Al au fost studiate în domeniul de solubilitate solidă patru aliaje avînd concentrația de 85 ; 88 ; 90 ; și 93 % at. Ni, raportul componentelor Cu : Al fiind de 1 : 1, iar din sistemul Ni-Au-Al încă patru aliaje cu concentrația de 80 ; 86 ; 92 ; 86 % at. Ni, 15 ; 10,5 ; 6 ; 7 % at. Au și 5 ; 3,5 ; 2 ; 7 % at. Al.

Prepararea aliajelor s-a făcut într-un cuptor cu inducție sub vid. După topire, aliajele au fost supuse unui tratament termic de omogenizare și de călire pentru a asigura structura de soluție solidă.

La toate probele s-a studiat dependența de temperatură a susceptibilității magnetice cu o balanță de susceptibilități descrisă anterior [7], în intervalul de temperatură 100—1000°C. Rezultatele obținute pentru aliajele de Ni-Cu-Al sînt date în fig. 1, unde este reprezentată dependența de temperatură a susceptibilității reciproce $1/\chi$ în funcție de temperatură.

Din figură se vede că pentru probele studiate dependența $1/\chi(T)$ este liniară pînă la temperatura de aproximativ 600—650°C, după care se observă o ușoară încovoiere înspre axa temperaturilor. Abaterea de la liniaritate este cauzată de paramagnetismul de tip Pauli al electronilor liberi, suprapus peste paramagnetismul de tip Langevin, al stărilor electronice

localizate în jurul nodurilor rețelei cristaline. Cu scăderea concentrației de nichel susceptibilitatea magnetică scade. În funcție de temperatură sistemul de aliaje este stabil la încălzire și răcire repetată cu o susceptibilitate reversibilă care poate fi descrisă cu relația

$$\chi = \frac{C}{T - \theta_p} + \chi_p, \quad (1)$$

unde C este constanta lui Curie, θ_p — temperatura Curie paramagnetică, T temperatura, iar χ_p susceptibilitatea paramagnetică constantă de tip Pauli.

Din constanta Curie s-a calculat momentul magnetic efectiv P_p , care în funcție de concentrația

atomică a componentelor nemagnetice variază între limitele $1,6 - 1,33 \mu_B$ după o relație patrată [8] de forma

$$P_{p\text{aliaj}}^2 = P_{p\text{Ni}}^2 \left(1 - \frac{n\tau}{60} \right) \quad (2)$$

unde n este valența medie a componentelor nemagnetice, iar τ concentrația lor atomică, așa cum se vede din figura 2.

Pe aceeași diagramă este reprezentată și dependența de concentrație a punctului Curie paramagnetic, care, după cât se vede, scade liniar.

Pentru aliajele de Ni-Au-Al omogenizate și călite dependența $1/\chi(T)$ este liniară în tot intervalul de temperatură studiat, iar efectul electronilor de conductibilitate este inobservabil, așa cum rezultă din figura 3. Și în acest caz cu scăderea conținutului de nichel susceptibilitatea magnetică scade, însă rolul componentelor nemagnetice este echivalent, aluminiul avînd o influență mai mare (vezi curbele II și IV).

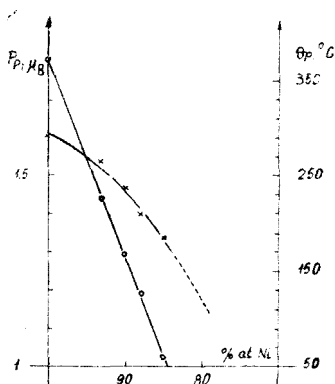


Fig. 2.

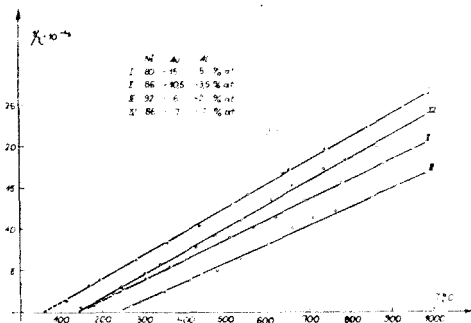


Fig. 3.

Dependența de concentrație a momentului magnetic efectiv și a punctului Curie paramagnetic pentru acest sistem de aliaje este dată în fig. 4. După cum se vede din figură, punctul Curie θ_p , scade linear cu concentrația, iar momentul magnetic efectiv nu mai urmează relația (2), avînd o variație cvasiliniară și mică cu concentrația, între limitele $1,6-1,5 \mu_B$. Toate aceste deosebiri față de sistemul Ni-Cu-Al, indică faptul că sistemul de aliaje Ni-Au-Al, nu ocupă o stare de echilibru stabilă cu temperatura, iar suscep-

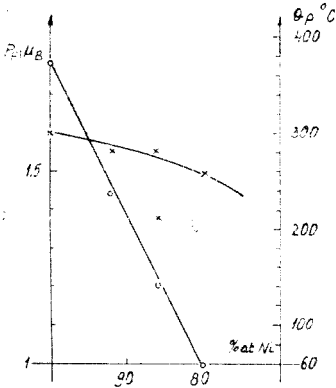


Fig. 4.

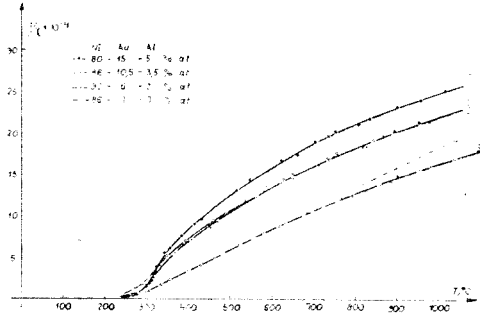


Fig. 5.

tibilitatea este ireversibilă față de încălzirea și răcirea repetată. Pentru aliajele care în diagrama de echilibru au o concentrație ce depășește domeniul solubilității solide la temperatura camerei, echilibrul față de temperatură se stabilește foarte lent în condiții normale, iar caracterul interacțiunilor magnetice se schimbă radical, așa cum rezultă din fig. 5, unde este reprezentată dependența $1/\chi(T)$ pentru aceleași aliaje de Ni-Au-Al.

În primul rînd are loc o expansiune a domeniului feromagnetic cu aproape 200° , iar caracterul dependenței $1/\chi(T)$ este pronunțat neliniar. Pentru aliajele cu aceeași concentrație de nichel (II și IV) susceptibilitatea magnetică coincide, iar pentru proba III deși se păstrează caracterul unui paramagnetism normal Langevin, se pune în evidență paramagnetismul electronilor liberi de tip Pauli la temperaturi mai ridicate (peste 600°C), prin curbarea ușoară înspre axa temperaturilor, momentul magnetic revenind la o valoare normală conform relației (2), marcat pe fig. 4 cu un punct singular.

În figura 6, pentru proba I (cu concentrația de 80% Ni, 15% Au și 5% Al), este arătat procesul de stabilire a echilibrului după multe încălziri și răciri repetate. Se vede că de la o dependență liniară

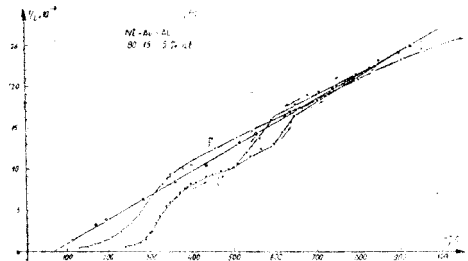


Fig. 6.

$1/\chi(T)$, caracteristică fazei de soluție solidă obținută prin călirea probei încălzite la 1000°C (curba I), după răcire repetându-se măsurătoarea, susceptibilitatea este ireversibilă și se ajunge la o dependență neliniară (curba I'), care însă este și ea instabilă. Repetându-se procesul de încălzire și răcire de mai multe ori pe lângă faptul că interacțiunile devin mai puternice, fapt indicat de creșterea susceptibilității, are loc și o transformare de rețea cristalină, care se vede pe curba I'' prin apariția ciclului de termohysteresis între 500 și 850°C .

În cazul acestor aliaje prin atingerea echilibrului, susceptibilitatea magnetică χ nu mai urmează legea lui Curie-Weiss (1), ci o lege mai complicată, caracteristică comportării magnetice a substanțelor cu un antiferomagnetism necompensat, legea lui Néel, de forma

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_0} + \frac{T}{C} - \frac{\sigma}{T - \theta} \quad (3)$$

unde χ_0 , C , σ și θ sînt niște constante, iar T este temperatura. O asemenea comportare a mai fost găsită și la unele aliaje binare de nichel-crom și mangan-stibiu [9, 10].

Conform teoriei lui Néel, în cazul feritelor [11] se formează niște subrețele magnetice care au momentul magnetic dirijat antiparalel una față de alta și diferit ca mărime din care cauză antiferomagnetismul este necompensat. Din relația (3) au fost calculate toate constantele care sînt reunite în tabel. Semnificația fizică a constantei C este aceeași ca și în cazul legii Curie-Weiss, prin urmare din ea se poate calcula momentul mag-

T A B E L

	Aliajul Ni-Au-Al	$1/\chi_0 \cdot 10^{-4}$	$C \cdot 10^4$	$\sigma \cdot 10^{-4}$	$\theta, ^{\circ}\text{K}$	P, μ_B
I	80; 15;	5% at - 5,862	40	216	553	1,59
II	86; 10,5;	3,5% .. - 5,84	43,9	167,2	553	1,61
IV	92; 6;	2% .. - 5,84	43,9	167,2	553	1,57
I'	80; 15;	5% .. - 3,325	44	184,16	493	1,66
I''	80; 15;	5% .. - 5,22	45,9	180,45	543	1,7

netic efectiv P_p . Pentru toate cazurile momentul magnetic al aliajelor în limita erorilor experimentale, corespunde cu momentul magnetic efectiv al nichelului: $P_p = 1,6 \mu_B$. De aici rezultă, interpretînd rezultatele prin analogie cu ferimagnetismul, că se formează în aliajele ternare de Ni-Au-Al (cu excepția III) trei subrețele magnetice ca Ni-Ni; Ni-Au; Ni-Al, care au momentele magnetice orientate antiparalel, în așa fel ca subrețelele de Ni-Au și Ni-Al fiind echivalente își compensează efectul reciproc, rămî-nînd activă numai subrețeaua Ni-Ni, în deplină concordanță cu valoarea experimentală a momentului magnetic efectiv P_p (aurul fiind monovalent).

În concluzie se poate spune că aliajele ternare de Ni-Cu-Al și Ni-Au-Al în domeniul de solubilitate solidă au o comportare paramagnetică normală, iar în afara solubilității solide au o comportare de antiferomagnetism necompensat.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Manders, „Ann. Phys.” **5**, 167 (1936).
2. L. Neel, „Ann. Phys.” **5**, 232 (1936).
3. V. Marian, „Ann. Phys.” (1936) (teză).
4. D. I. Volkov, V. I. Cecernikov, Izv. AN SSSR, Ser. fizică, **21**, **8**, 1111 (1957).
5. V. I. Cecernikov, „Vestnik Mosk. Un-ta, ser. meh. astr. fiziki, himii, **4**, 143 (1958).
6. V. Marian, I. Maxim, H. Țintea, „Com. Acad. R.P.R.”, **II**, **9** (1957).
7. Iuliu Pop, V. I. Cecernikov, „Pribori i Tehnika Experimenta”, **5**, 180, (1964).
8. Iuliu Pop, „Studia Univ. Babeș-Bolyai”, ser. I, fasc. 1, Math-Phys. 233 (1961).
9. V. I. Cecernikov, Iuliu Pop, „Fiz. Metallov i Metallovedenie”, **17**, **4**, 636 (1964).
10. D. I. Volkov, P. A. Psenickin, „F.M.M.”, **11**, **4**, 513 (1961).
11. L. Neel, „Ann. Phys.”, **10**, **3**, 137 (1948).

АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ НЕКОТОРЫХ ТРОЙНЫХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ НИКЕЛЯ

(Резюме)

Изучена температурная зависимость обратной величины магнитной восприимчивости $1/\chi$ для тройных систем сплавов: Ni-Cu-Al и Ni-Au-Al. У сплавов первой системы магнитная восприимчивость обратима по отношению к температуре и подчиняется закону Кюри-Вейса, дополненному постоянным парамагнитным термином типа Паули. Парамагнитная температура Кюри θ_p изменяется линейно с атомной концентрацией немагнитных компонентов, а эффективный магнитный момент P_p — по квадратичному закону.

Сплавы Ni-Au-Al, закаленные и отожженные при температуре 1000°C , имеют линейную зависимость $1/\chi(T)$, $\theta(\tau)$, $P_p(\tau)$, однако изучаемая система не находится в тепловом равновесии. После повторяемых нагреваний и охлаждений равновесие устанавливается, а магнитная восприимчивость больше не подчиняется закону Кюри-Вейса, а закону Неля для ферритов.

THE ANTIFERROMAGNETISM OF SOME NICKEL TERNARY ALLOYS

(Summary)

In the present paper was studied the dependence on temperature of the reciprocal magnetic susceptibility $1/\chi$ for the ternary alloys systems as Ni-Cu-Al and Ni-Au-Al. The magnetic susceptibility is reversible according to temperature for the alloys of the first system and follows Curie-Weiss' law, completed with a constant paramagnetic term of Pauli type. The paramagnetic Curie temperature θ varies linear with the atomic concentration of the nonmagnetic components, and the effective magnetic moment P_p varies with a quadratic relation.

The Ni-Au-Al alloys which are homogenized and steeld to 1000°C temperature shows a linear variation $1/\chi(T)$, $\theta(\tau)$, $P_p(\tau)$ but the system is not in equilibrium according to temperature. After repeated heatings and coolings the equilibrium is established and the magnetic susceptibility does not follow Curie-Weiss' law, but Neel's law for ferrites.



REZONANȚA ELECTRONICĂ DE SPIN A IONULUI V^{4+} ÎN ZEOLIȚI DE TIP X ȘI Y

de

A. NICULA, I. URSU, membru corespondent al Academiei și GH. CRISTEA

Spectrele RES ale ionilor metalelor de tranziție în sticle au fost puse în evidență prima dată și studiate de către S a n d s în anul 1951 [1]. Imediat după aceasta au urmat măsurători RES asupra acestor ioni introduși în substanțe poroase cum sînt rășinile schimbătoare de ioni, cărbunii activați, zeoliții și silicagelurile [2]. Ionul de vanadiu tetravalent V^{4+} , a fost apoi studiat în GeO_2 întrucît, acesta din urmă, se arată deosebit de interesant pentru studii RES, găsindu-se atît în stare amorfă cît și sub forma a două modificări cristalografice: forma tetragonală (structura de rutil) și forma hexagonală (structura cuarțului [3]). L. v a n R e i j e n [4] prezintă un studiu amănunțit asupra ionilor $(Cr-O)^{3+}$, $(V-O)^{2+}$ și $(Mo-O)^{3+}$ în două tipuri de complecși anorganici: clorați și oxalați.

Deoarece zeoliții au capacitatea să se comporte, datorită cantității mari de apă ce o pot absorbi, atît ca un mediu apos cît și policristalin, trecerea de la un mediu la altul făcîndu-se treptat prin eliminarea apei în urma activării termice sub vid, noi am abordat studiul ionului V^{4+} introdus în zeoliți. În afară de aceasta, ionul $^{51}V^{4+}$ se găsește în stare izotopică destul de pură (în proporție de 99,76 %) și are o valoare mare a spinului nuclear. El se găsește de asemenea în cîteva stări de valență ceea ce îl face și din acest punct de vedere interesant de studiat.

În lucrare s-a urmărit comportarea spectrului RES, a ionul V^{4+} , prin trecerea treptată de la un mediu aproape lichid (zeolit hidratat) la un mediu policristalin solid, în urma eliminării apei prin activare termică sub vid.

Tehnica experimentală. Probele s-au obținut pornind de la zeoliții simetrici de tip X $[(Na (AlO_2)_{88} (SiO_2)_{104})]$ și Y $[(Na_{56} (AlO_2)_{56} (SiO_2)_{36})]$ procurați de la Compania Linde SUA și de la sulfatul de vanadil $(VO_2 \cdot SO_4 \cdot 5H_2O)$ atît din import cît și preparat la I. C. al Academiei Republicii Socialiste România, Filiala Cluj. Din punctul de vedere la comportării lor în măsurătorile RES, probele din substanțe cu proveniență diferită, nu se deosebesc.

Zeolitul a fost uscat la $105^\circ C$ timp de 2 ore, după care a fost îmbibat cu soluție de sulfat de vanadil de concentrație dorită, iar pentru o diluare

mai mare în vederea schimbului cât mai complet, s-a adăugat apă distilată și s-a agitat timp de 4 ore. Amestecul obținut s-a filtrat iar filtratul s-a uscat timp de 2 ore la temperatura de 105 °C. Pentru a avea inițial un mediu cât mai apos probele astfel obținute s-au hidratat ținându-le timp îndelungat într-un vas cu vapori de apă saturați. Pentru eliminarea apei și trecerea treptată la un mediu policristalin solid, probele au fost activate termic sub vid de 10^{-5} mm Hg la temperaturile de 100 °C, 200 °C, 300 °C și 400 °C. Concentrația ionilor de vanadiu aleasă a fost de 1%, 5% și 10%.

Măsurătorile RES s-au efectuat cu ajutorul spectrometrului J. E. S. — B, de fabricație japoneză, ale cărui caracteristici sînt date în [5]. S-a lucrat în banda X de frecvențe.

Teoria spectrelor. Studii teoretice asupra RES, a ionului V^{4+} , aflat în câmpuri cristaline de diferite simetrii nu există pînă în prezent. Totuși au fost tratate două sisteme analoge. B. B l e a n e y [6] tratează cazul titanului trivalent în câmp trigonal, care este izoelectronic cu vanadiul tetraivalent. D. P o l d e r [7] tratează cazul ionului de cupru bivalent în câmp tetragonal și consideră configurația electronică a lui, ca fiind echivalentă cu a Ti^{3+} și V^{4+} , avînd un singur electron „pozitiv” în pătura 3d, adică o gaură. În cazul cuprului rezultatele diferă doar prin inversarea nivelelor energetice orbitale față de poziția lor la titan. Ambele teorii prezic pentru factorul g, valori apropiate de ale electronului liber ceea ce înseamnă că distanța între nivelul orbital fundamental și imediat următor este mare.

Hamiltonianul de spin care descrie spectrul RES obținut pentru ionul V^{4+} în zeoliți este [3]:

$$H = g_{//} \beta H_z \hat{S}_z + g_{\perp} \beta [H_x \hat{S}_x + H_y \hat{S}_y] + A \hat{S}_z \hat{I}_z + B [\hat{S}_x \hat{I}_x + \hat{S}_y \hat{I}_y]$$

unde $S = 1/2$, $I = 7/2$ — corespunzătoare ionului de vanadiu,

$$g = \sqrt{g_{//}^2 \cos^2 \theta + g_{\perp}^2 \sin^2 \theta}$$

$$kg = \sqrt{A^2 g_{//}^2 \cos^2 \theta + B^2 g_{\perp}^2 \sin^2 \theta}$$

θ fiind unghiul dintre direcția câmpului magnetic exterior H și axa câmpului cristalin.

Termenul care evidențiază structura fină lipsește pentru configurația $3d^1$ ($S = 1/2$) și am neglijat de asemeni termenii interacțiunii cuadrupolare și al interacțiunii directe între câmpul exterior H și momentul magnetic nuclear al vanadiului V^{51} .

Pentru simplitatea calculelor și a formulelor hamiltonianul de spin se diagonalizează, astfel că, condiția de rezonanță se poate scrie:

$$h\nu = g\beta H + Km$$

m — fiind proiecția spinului nuclear pe direcția câmpului magnetic H . Atît în substanța policristalină cît și în soluție complexii magnetici sînt orientați haotic. Prin urmare spectrul RES observat este o medie asupra tuturor orientărilor posibile. Există totuși o deosebire esențială între cele două situații. Într-un material policristalin fiecare complex magnetic este static în spațiu și spectrul global este înfășurătoarea spectrelor complexilor indi-

viduali, fiecare cu orientarea sa proprie ; în soluție fiecare complex se rotește rapid în comparație cu perioada câmpului de microunde, deci însăși spectrul unui complex individual este o medie asupra tuturor orientărilor sale. Dacă N_0 este numărul complexilor magnetici din proba considerată atunci numărul complexilor magnetici care au orientarea în limitele determinate de unghiurile θ și $\theta + d\theta$ este [8]

$$dN = \frac{N_0}{2} \sin \theta d\theta$$

Datorită factorului $\sin \theta d\theta$, în funcția de distribuție a orientărilor, orientarea cu $H \perp Z$ este mult mai frecventă decât orientarea $H \parallel OZ$ (Z este axa cristalină preferențială a complexului magnetic). De aici rezultă că liniile din spectru corespunzătoare lui $H \perp Z$ trebuie să fie mai intense decât cele corespunzătoare lui $H \parallel Z$. În cazul soluțiilor are loc o îngustare dinamică a liniilor RES și ca urmare liniile corespunzătoare diferitelor valori ale numărului cuantic nuclear, m , nu se suprapun, spre deosebire de cazul policristalelor unde suprapunerea este foarte accentuată. Coordinarea vanadiului tetravalent în compuşii vanadili se presupune a fi o piramidă pătratică (fig. 1) : patru liganzi X (în cazul nostru molecule de apă) la distanță aproximativ egală de ionul central și un atom de oxigen în vârful piramidei la o distanță foarte mică de ionul central.

Nivelele de energie ale ionului în câmpul cristalin al piramidei pătratice pot fi discutate din două puncte de vedere : în funcție de interacțiunile electrice ale electronului ionului central cu liganzii sau în funcție de stabilitatea legăturii, datorită formării orbitalilor moleculari între ionul central și liganzi.

În prima descriere piramida pătratică poate fi considerată ca provenind dintr-o configurație octaedrică. Se pot distinge două cazuri : un octaedru deformat tetragonal care este alungit în lungul axei de simetrie și unul care este comprimat în lungul acestei axe.

Schema nivelelor de energie care rezultă folosind teoria grupurilor [9], este redată în fig. 2.

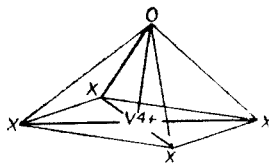


Fig. 1. Coordinarea piramidală pătratică a ionului V^{4+} în compuşii vanadili.

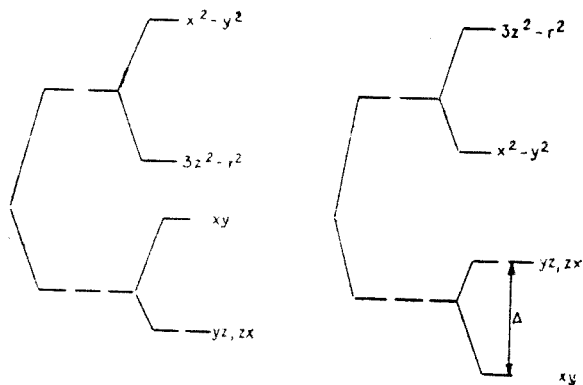


Fig. 2.

În octaedrul alungit, nivelul cel mai de jos este dubletul xz, yz , iar în cel comprimat singletul xy . Succesiunea nivelelor pentru piramida pătratică depinde de două circumstanțe : (1) distanța dintre ionul central și oxigenul din vârful piramidei este foarte mică ; (2) ligandul din vârful opus este foarte departe sau lipsește. Depinde care din aceste efecte predomină dacă piramida pătratică este alungită sau comprimată.

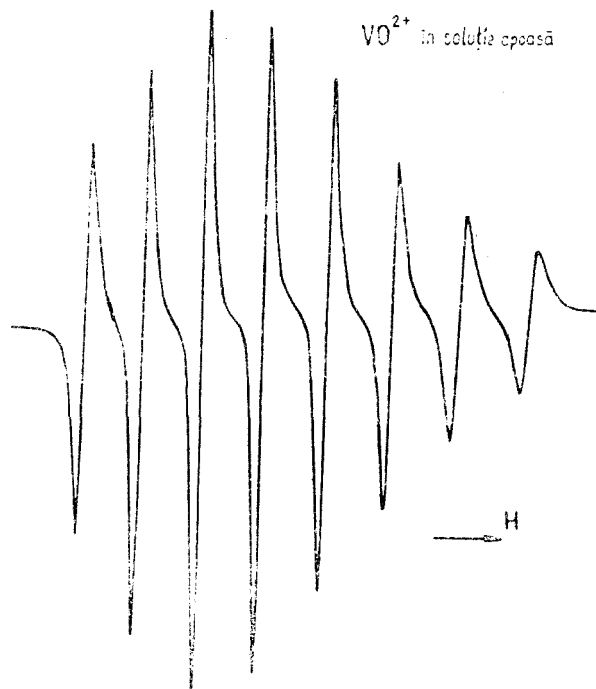


Fig. 3. RES a V^{4+} în soluție apoasă.

După cum vom vedea din discuția rezultatelor experimentale, măsurătorile RES ne permit să stabilim care din aceste situații se realizează în realitate și să tragem o serie de alte concluzii importante referitoare la comportarea ionului V^{4+} în zeoliți.

Date experimentale și discuții. În cele ce urmează vom prezenta spectrele RES ale ionului V^{4+} în zeoliți, pentru concentrația de 1%. Pentru o mai bună reliefare a transformărilor care survin în spectru, în fig. 3 prezentăm spectrul acestui ion și în soluție apoasă. Datorită mobilității foarte mari a moleculelor de apă îngustarea dinamică a liniilor RES este foarte pronunțată și spectrul este bine rezolvat la temperatura camerei. Din spectru se poate ușor verifica valoarea spinului nuclear al vanadiului ($I = 7/2$) și că simetria câmpului cristalin este cubică.

În fig. 4 prezentăm spectrul ionului V^{4+} introdus în zeolit de tip Y, obținut la temperatura camerei. Numărul componentelor de structură hiperfină se păstrează, ceea ce ne informează asupra conservării simetriei cubice, dar spectrul este puternic distorsionat. Cu creșterea temperaturii, pe de o parte crește intensitatea liniilor spectrale, iar pe de altă parte spectrul se desface în două seturi a câte opt linii de structură hiperfină. În fig. 5 prezentăm spectrul obținut la 400°C în care se disting cel mai bine aceste seturi.

V^{4+} ; 1%; 10Gs; 0dB; 20°C ;

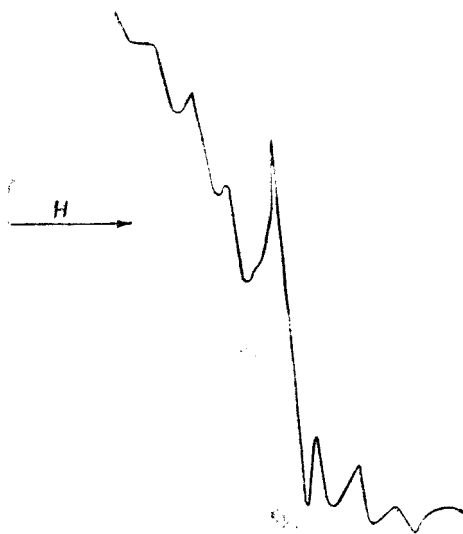


Fig. 4. RES a V^{4+} în zeolit hidratat la 20°C .

Apariția celor două seturi de linii, se datorește schimbării simetriei câmpului cristalin în locurile ocupate de ionul V^{4+} ; dintr-un câmp cubic (octaedru regulat apare un câmp de simetrie tetragonală, una din axele de simetrie devenind preferențială. Corespunzător acestei simetrii în hamiltonianul de spin apar două constante de structură hiperfină A și B două valori ale factorului de desplicare spectroscopică g_{\parallel} și g_{\perp} , corespunzătoare orientării paralele respectiv perpendiculare a câmpului magnetic în raport cu axa de simetrie a câmpului cristalin.

Valorile calculate din spectru ale acestor constante sînt:

$$\begin{aligned} A &= 165,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} & g_{\parallel} &= 1,9307 \\ B &= 76,16 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} & \text{și} & \\ & & g_{\perp} &= 1,9504 \end{aligned}$$

Semnul constantelor A și B nu poate fi calculat din cauza lipsei structurii fine a spectrului.

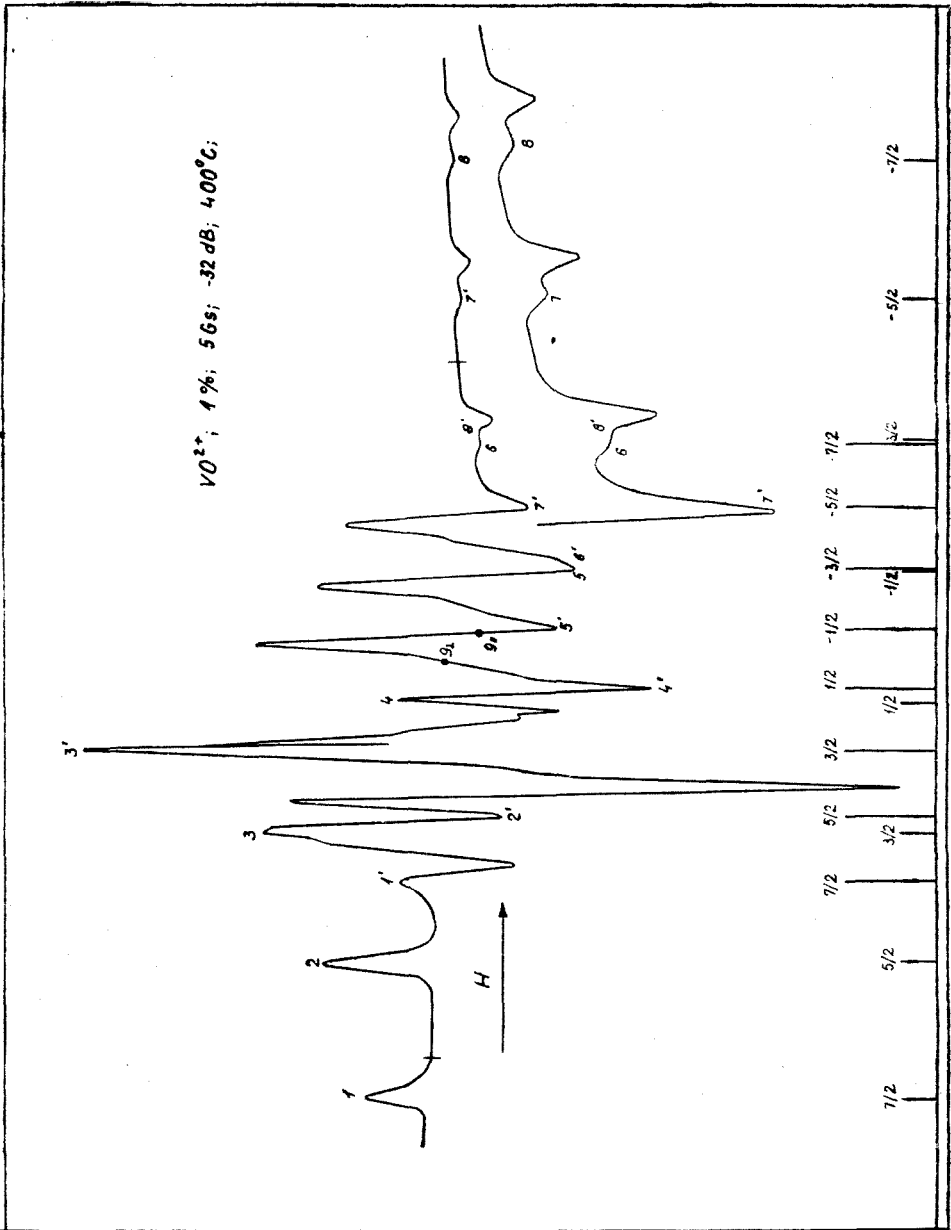


Fig. 5. RES a VO^{2+} în zeolit la 400°C.

Deoarece spectrul RES se observă ușor la temperatura camerei și chiar la temperaturi mult mai ridicate, interacțiunea spin-orbită între singletu orbital xy și dubletul orbital xz, yz este mică. Aceasta presupune pe de o parte o distanță mare între aceste nivele energetice (peste 10.000 cm^{-1}), iar pe de altă parte că nivelul energetic orbital fundamental este singlet. Acest rezultat, conform celor discutate în secțiunea precedentă, ne conduce la ipoteza că o dată cu creșterea temperaturii de activare termică octaedrul regulat se deformează în sensul comprimării lui pe direcția axei de simetrie. În acest fel legătura chimică stabilită între ionul central de vanadiu și oxigenul din vârful piramidei devine mult mai puternică decât legătura cu cei patru liganzi din vîrfurile pătratului. În aceste împrejurări ionul V^{4+} se manifestă sub forma $(V-O)^{2+}$.

O astfel de comportare a simetriei cîmpului cristalin în care se află ionul de vanadiu în zeoliți, precum și manifestarea sa în spectrul RES, era de așteptat: o dată cu creșterea temperaturii, moleculele de apă din vîrfurile pătratului încep să se îndepărteze de ionul central și chiar să părăsească aceste poziții, devenind tot mai apropiate locurile ocupate de atomii de aluminiu, distorsionîndu-se în acest fel cîmpul cristalin.

Figura 5 ne arată de asemeni că intensitatea liniilor corespunzătoare lui $H \perp Z$, este mai mare decât intensitatea liniilor corespunzătoare orientării $H \parallel Z$, ceea ce este în concordanță cu teoria formei liniei în substanțe policristaline [8].

O examinare mai atentă a spectrului RES la 400°C ne permite să observăm că pe lângă cele 16 componente de structură hiperfină corespunzătoare unei simetrii axiale mai apar unele picuri de intensitate foarte mică. Acestea se pot vedea mai bine în spectrul ridicat cu o modulație de 22 Gs. Apariția lor se pune pe seama existenței, la această temperatură și a unei componente ortorombice a cîmpului cristalin de intensitate slabă.

BIBLIOGRAFIE

1. R. M. Sands, „Physical Rev.”, 99,4 (1955).
2. A. Nicula, D. Stamires, J. Turkenich, „J. Chem. Phys.” 42,3684 (1965) și R. I. Faber and Max T. Rogers, „J. Am. Chem. Soc.” 81 (1949).
3. I. Siegel, „Phys. Rev.” 134. 1A 193 (1964).
4. L. L. van Reijen, *Teză de doctorat*, 1964.
5. A. Nicula și Gh. Cristea, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, oct. 1964
7. D. Polder, „Physica” 9.709 (1942).
8. A. Nicula (Disertație), „Studii și cercetări de fizică” 17, Nr. 3, 1965.
9. M. Sachs, *Solid State Theory*. Mc. Graw-Hill Book Company Inc. 1963.

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ИОНА V^{4+} В ЦЕОЛИТАХ
ТИПА X и Y
(Резюме)

Методом ЭПР исследовалось изменение симметрии кристаллического поля мест, занятых ионом V^{4+} в цеолитах типа X и Y. Установлена последовательность орбитальных энергетических уровней этого иона в кристаллическом поле и сделаны выводы о расстоянии между синглетом xy (самый нижний) и последующим вышележащим дублетом xz, yz.

Дается определение констант гипертонкой структуры и факторы спектроскопического расщепления, соответствующие параллельной и перпендикулярной ориентации по отношению к внешнему полю H из спектра пробы с концентрацией 1% ионов V^{4+} , при температуре активации 400°C.

ELECTRON SPIN RESONANCE OF V^{4+} ION IN ZEOLITES OF X AND Y TYPE
(Summary)

The authors have in view by ESR method, the symmetry variation of the crystalline field of the places occupied by V^{4+} ion in zeolites of X and Y type. The succession of the orbital energy levels of this ion in the crystalline field is established. They draw conclusions about the distance between the lowest xy singlet and the immediate superior xz, yz doublet.

From the spectrum of the concentration test 1% ion V^{4+} at the activating temperature of 400°C they have determined the constants of hyperfine structure, the factors of splitting spectroscopy corresponding to the parallel and perpendicular orientation in account with the H external field.

POTENȚIALUL EFECTIV ȘI STAREA LEGATĂ A DOI ELECTRONI ÎN CRISTALE

de

A. WEISSMANN, D. DEMCO

Folosind expresia potențialului efectiv de interacțiune în cristale [1] se studiază starea legată a doi electroni și existența bipolaronului, considerînd pe lîngă interacția electron-rețea respectiv electron-fonon [2], și interacțiunea electron-electron respectiv electron-plasmon. Se arată că interacțiunea electron-electron întărește starea legată ducînd la adîncirea și lărgirea groapei de potențial; la apariția unei gropi suplimentare înguste, stabilindu-se condițiile pentru existența stării legate a doi electroni respectiv bipolaronului. Se analizează mai amănunțit cazul germaniului. Atît calculul valorii minime a energiei cît și potențialul efectiv dedus conțin ca și cazuri limite, în aproximație uni-electronică, rezultatele cunoscute din literatură [2], [3], [5].

Sistemul multi-electronic. Se consideră rețeaua periodică cristalină și plasma electronică, în interacțiune. Neglijînd interacțiunea fonon-plasmon (care este slabă în raport cu interacțiunea electron-fonon și electron-plasmon), Hamiltonianul sistemului este [1]

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_i \frac{p_i^2}{2m^*} + \sum_K \frac{p_K p_K + \bar{\Omega}_K^2 q_K^* q_K}{2} + \sum_{K < K_D} \frac{P_K^* P_K + \bar{\omega}_K^2 Q_K^* Q_K}{2} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_K (v_K q_K p_K^* + \bar{v}_K q_K^* p_K) - \frac{i}{2} \sum_{K < K_D} (P_K \mu_K p_K^* + P_K^* \mu_K p_K) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{K > K_D} \mu_K^2 p_K p_K^*
 \end{aligned} \quad (1)$$

unde primul termen este energia cinetică a electronilor efectivi (cu m^* masa efectivă multi-electronică [1]) q_K , p_K ; Q_K , P_K sînt coordonatele și impulsurile fononice respectiv plasmonice; μ_K este o constantă definită prin:

$$\mu_K^2 = \frac{4\pi e^2}{K^2}$$

iar

$$\varphi_K = \sum_i e^{-iK \cdot \vec{r}_i}$$

reprezintă fluctuațiile de densitate electronică în plasmă. $\hbar = c = 1$; $K_D = \frac{1}{\lambda_D}$ unde λ_D este lungimea de undă Debye, limitând interacțiunile de lungă rază de acțiune (organizate, colective) de cele de scurtă rază de acțiune (haotice, de ecranare) iar

$$\overline{\Omega_K^2} = \begin{cases} = \Omega_K^2 - u_K^2 & \Rightarrow K < K_D \\ = \Omega_K^2 & \Rightarrow K > K_D \end{cases} \quad (2)$$

$$\overline{\omega_K^2} = \begin{cases} = \omega_p^2 + u_K^2 & \Rightarrow K < K_D \\ = 0 & \Rightarrow K > K_D \end{cases} \quad (3)$$

unde în cazul undelor sonore ($K < K_D$; $K \Rightarrow 0$) avem [13]

$$\Omega_K \cong \Omega_p = \left(\frac{4\pi z_i^2 N_i e^2}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

fiind frecvența „goală“ fononică și

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi N_e e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

frecvența oscilației plasmei electronilor „liberi“. Mai avem

$$v_K = \begin{cases} = v_K^i - i\mu_K u_K & \Rightarrow K < K_D \\ = v_K^i & \Rightarrow K > K_D \end{cases} \quad (6)$$

$$\overline{v}_K = \begin{cases} = v_K^i + i\mu_K u_K & \Rightarrow K < K_D \\ = v_K^i & \Rightarrow K > K_D \end{cases} \quad (7)$$

unde

$$v_K^i \cong - \frac{i4\pi z_i e^2 g}{K} \left(\frac{N_i}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

este elementul de matrice pentru interacțiunea electron-fonon în absența interacțiunii electron-electron, iar u_K este legat de elementul de matrice

reprezentînd efectul interacțiunii electron-electron de lungă rază de acțiune asupra elementului de matrice electron-fonon și are forma

$$u_K = \frac{k \left(\frac{N_i}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{K^2 v_0^2}{3\omega_p^2} \right)} \quad (9)$$

cu constanta $k = - (4\pi e^2)^{1/2} z_i g$ unde N_i , z_i , μ_i sînt densitatea, sarcina și masa ionică N_e densitatea electronilor iar g este coeficientul de cuplaj [5] specific.

$$g^2 = \frac{2\pi e^2}{\hbar} C \left(\frac{m^*}{\hbar \Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\text{cu } c = \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}$$

unde $\frac{1}{c}$ este constanta dielectrică „efectivă”, iar ϵ_0 , ϵ sînt constanta dielectrică optică respectiv statică.

Incluzînd în parte termenii de interacțiune electron-fonon, respectiv plasmon în energia cinetică și potențială a electronilor se obține potențialul efectiv de interacțiune sub forma

$$V_{eff}(r_{ij}) = \frac{e^2}{|r_{ij}|} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} S_i [k_D r_{ij}] \right\} - 2 \sum_k \frac{|A_k|^2}{\Omega_K} \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) - 2 \sum_{K < K_D} \frac{|B_k|^2}{\omega_k} \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) \quad (11a)$$

sau aproximînd termenul de ecranare a potențialul coulombian datorită interacțiunii de scurtă rază de acțiune, prin constanta dielectrică optică ϵ_0 [2], avem conform [1]

$$V_{eff}(r_{ij}) = \frac{e^2}{\epsilon |\bar{r}_i - \bar{r}_j|} - 2 \sum_K \frac{|A_k|^2}{\Omega_k} \cos[\bar{k}, (\bar{r}_i - \bar{r}_j)] - 2 \sum_{K < K_D} \frac{|B_k|^2}{\omega_k} \cos[\bar{K}, (\bar{r}_i - \bar{r}_j)] \quad (11b)$$

Energia stării normale. Din (1) se observă că presupunînd o distribuție maxwelliană a sistemului de ioni (rețea) și electroni în interacțiune (deci tăietura pentru K este K_D nu K_C) [6] avem pentru valoarea minimă a energiei [1]

$$E_0 = - N_i \sum_K \frac{|A_k|^2}{\Omega_k} - N_e \sum_{K < K_D} \frac{|B_k|^2}{\omega_k} \quad (12)$$

unde

$$\text{și } \begin{cases} A_K = - \frac{i}{V 2\Omega_k} v_k \\ B_K = - i \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \mu_k \end{cases} \quad (13)$$

sînt constantele de cuplaj electron-fonon respectiv electron-plasmon.

Considerăm

$$E_0 = E_0^{(1)} + E_0^{(2)} + E_0^{(3)} \quad (14)$$

cu

$$E_0^{(1)} = - N_i \sum_{K < K_D} \frac{|A_k|^2}{\Omega_k}; \quad E_0^{(2)} = - N_i \sum_{K < K} \frac{|A_k|^2}{\Omega_k}; \quad E_0^{(3)} = - N_i \sum \frac{|B_k|^2}{\omega_k} \quad (15)$$

și trecem la evaluarea lor concretă.

$$a) \quad E_0^{(1)} = - N_i \sum_{K < K_D} \frac{|V_k|^2}{2\Omega_k^2}$$

Din [6] avem $v_k = v_k^i + v_k^p = v_k^i - i\mu_k u_k$

În cazul undelor sonore ($K < K_D$; $K \Rightarrow 0$) însă

$$v_k = v_k^i - \frac{v_k^i}{1 + \frac{n^2 v_0^2}{3\omega_p^2}} \approx v_k^i \frac{k^2 v_0^2}{3\omega_p^2} \quad (16)$$

deoarece dezvoltarea în serie este justificată de faptul că: $\frac{k^2 v_0^2}{3\omega_p^2} \ll 1$ și astfel termenii superiori în $\frac{k^2 v_0^2}{3\omega_p^2}$ se neglijează.

Acum avem

$$E_0^{(1)} = - N_i \sum_{K < K_D} \frac{K^4 V_0^4}{9\omega_p^4} \left(\frac{4\pi z_i e^2 g}{K} \right)^2 \left(\frac{N_i}{\mu_i} \right) \frac{1}{2\Omega_K^2} \quad (17)$$

unde conform lui (2)

$$\frac{1}{\Omega_K^2} = \frac{1}{\frac{4\pi z_i^2 N_i e^2}{\mu_i} - u_k^2} \quad (18)$$

pentru cazul ($K < K_D$) în loc de (9) avem

$$u_K = - (4\pi e^2)^{\frac{1}{2}} z_i g \left(\frac{N_i}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Punînd (19) în (18), folosind (4) și (5) avem pentru (17)

$$E_0^{(1)} = - \frac{N_i}{N_0^2} \frac{v_0^4 m^2}{72\pi e^2} \frac{g^2}{1 - g^2} \sum_{K < K_D} K^2 \quad (20)$$

sau trecînd la integrală în loc de sumă :

$$E_0^{(1)} = - \frac{N_i v_0^4 m^2}{N_0^2 720 \pi^3 e^2} \frac{g^2}{1 - g^2} K_D^5 \quad (21)$$

partea energiei minime datorită oscilației colective fononice.

b) Pentru $K > K_D$ mișcarea nodurilor rețelei nefiind organizată excitația colectivă lipsește și conform (2) și (6) nu avem valori ale lui Ω_K și v_K^i . Introducînd vectorul rețelei reciproce \bar{K}_n , conform [4], reducem calculul în zona lungimilor de undă mari și avem

$$E_0^{(2)} = - N_i \sum_{|\bar{K} - \bar{K}_n| < K_D} \frac{|V_{|\bar{K} - \bar{K}_n|}|^2}{2 \bar{\Omega}_{|\bar{K} - \bar{K}_n|}^2} = - N_i 2\pi e^2 g^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{K_D} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{|\bar{K} - \bar{K}_n|^2} d(\bar{K} - \bar{K}_n) \quad (21)$$

ceea ce corespunde pentru volum unitar, contribuției la energia minimă din cauza mișcării haotice a nodurilor cuasi-liberi.

$$E_0^{(2)} = - \frac{N_i e^2 g^2}{\pi} K_D \quad (22)$$

c) Introducînd valoarea lui μ_K^2 și trecînd la integrală avem

$$E_0^{(3)} = - 2\pi e^2 N_e \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{K_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{K^2} d\bar{K} \quad (23)$$

de unde găsim

$$E_0^{(3)} = - \frac{e^2 N_e}{\pi} K_D$$

partea energiei minime datorită interacțiunii electron-electron de lungă rază de acțiune.

Din (14) avem

$$E_0 = - \frac{e^2 N_e}{\pi} K_D - \frac{e^2 g^2 N_i}{\pi} K_D - \frac{N_i v_0^4 m^2}{N_e^2 720 \pi^3 e^2} \frac{g^2}{1 - g^2} K_D^5 \quad (24)$$

energia minimă a sistemului de N_e electroni și N_i ioni în interacțiune. (24) include în sine în aproximație unielectronică energia minimă a polaronului Frölich [3]. Într-adevăr pentru $g \rightarrow 0$ din (8) $v_K^i \rightarrow 0$ și $E_0 = - \frac{e^2 N_e}{\pi} K_D$.

Din [2] avem pentru $\epsilon_0 = 1$

$$A_K = - \frac{ie}{K} \left(\frac{2\pi \hbar \omega_K}{V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

și

$$E_0 = - \sum_K \frac{|A_K|^2}{\hbar \omega_K} \Rightarrow E_0 = - \frac{e^2}{\pi} K_D$$

adică pentru cazul unui singur electron, neconsiderînd interacția cu rețea regăsim rezultatele din literatură (neglijînd desigur principiul lui Pauli).

Potențialul efectiv. Pentru evaluarea condițiilor existenței stărilor legate a doi electroni în cristale polare și în metale vom folosi relația (11b) transcrisă

$$V_{efj}(\mathbf{r}_{ij}) = \frac{e^2}{\epsilon_0 r_{ij}} + V_1 + V_2 + V_3 \quad (25)$$

unde

$$V_1 = -2 \sum_{K < K_D} \frac{|A_K|^2}{\Omega_K} \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}); \quad V_2 = -2 \sum_{K > K_D} \frac{|A_K|^2}{\Omega_K} \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij});$$

$$V_3 = -2 \sum_{K < K_D} \frac{|B_K|^2}{\omega_K} \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) \quad (26)$$

Pentru evaluarea lui V_1 folosim (20), de unde avem

$$V_1 = - \frac{1}{N_e^2} \frac{v_0^4 m^2}{36 \pi e^2} \frac{g^2}{(1-g^2)} \sum_{K < K_D} K^2 \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) \quad (27)$$

respectiv

$$V_1 = - \frac{1}{N_e^2} \frac{v_0^4 m^2}{36 \pi e^2} \frac{g^2}{1-g^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{K_D} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K^4 \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) d_K d\varphi \sin \theta d\theta \quad (28)$$

ceea ce după evaluarea integralei ne dă

$$V_1 = - \frac{1}{N_e^2} \frac{v_0^4 m^2}{7 \cdot 2 \pi^3 e^2} \frac{g^2}{1-g^2} \frac{1}{r_{ij}^5} \{ [3(K_D r_{ij})^3 - 6] \sin(K_D r_{ij}) +$$

$$+ [6(K_D r_{ij}) - (K_D r_{ij})^3] \cos(K_D r_{ij}) \} \quad (29)$$

partea potențialului efectiv datorită preponderent ramurii acustice a oscilației colective a rețelei — adică datorită interacției fononice.

Termenul V_2 reprezintă o ecranare a potențialului coulombian datorită mișcării haotice a nodurilor rețelei cristaline ($K > K_D$). Conform [4], în acest caz avem

$$V_2 = - \sum_{|\bar{K} - \bar{k}_n| < K_D} \frac{|V_{(\bar{K} - \bar{k}_n)}|^2}{\Omega^2 (\bar{K} - \bar{k}_n)} \cos[(\bar{K} - \bar{k}_n) \bar{r}_{ij}] \quad (30)$$

folosind (6) și (8) pentru $K > K_D$ avem

$$V_2 = -\frac{4\pi e^2 g^2}{(2\pi)^3} \int_0^{K_D} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{K'^2} \cos[\bar{K}' \bar{r}_{ij}] d\bar{K}'$$

unde am pus $K' = \bar{K} - \bar{K}_n$. Evaluând integrala avem

$$V_2 = -\frac{2e^2 g^2}{\pi r_{ij}} Si(K_D r_{ij}) \quad (31)$$

ceea ce corespunde pentru $g \rightarrow 1$ interacției electron-ramură optică a oscilațiilor longitudinale ale rețelei (formula (16) din [2]).

Interacția electron-electron de lungă rază de acțiune dă o contribuție la potențialul efectiv sub forma ecranării termenului coulombian printr-un nor plasmonic. Această contribuție este reprezentată prin V_3 .

$$V_3 = -\sum_{K < K_D} \mu_K^2 \cos(\bar{K}, \bar{r}_{ij}) \quad (32)$$

sau

$$V_3 = -\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3} \int_0^{K_D} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(K r_{ij} \cos \theta)}{K^2} d\bar{K}$$

Integrala se evaluează relativ simplu și se obține

$$V_3 = -\frac{2e^2}{\pi r_{ij}} Si(K_D r_{ij}) \quad (33)$$

adică tocmai ecranarea căutată datorită cuplajului electron-plasmon.

Din (25) avem acum punând $k_0 r_{ij} = x$

$$\frac{\epsilon_0}{K_D e^2} V_{eff}(x) = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2}{\pi} \epsilon_0 (1 + g^2) Si(x) \right] - e \frac{\epsilon_0 g^2}{1 - g^2} \frac{1}{x^5} [(3x^2 - 6) \sin x + (6x - x^3) \cos x] \quad (34)$$

potențialul efectiv de interacțiune electron-electron în cristale luând în considerare pe lângă cuplajul electron-rețea (ramură acustică și optică) și cuplajul electron-plasmon. Acest potențial se scrie într-o formă mai riguroasă dacă în loc de (11 b) se pornește din (11 a) astfel

$$\frac{1}{K_D e^2} V_{eff}(x) = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2}{\pi} (2 + g^2) Si(x) \right] - e \frac{g^2}{1 - g^2} \frac{1}{x^5} [(3x^2 - 6) \sin x + (6x - x^3) \cos x] \quad (34 a)$$

Problema existenței stării legate a doi electroni. Pentru analizarea alurei curbei de potențial să studiem $V_{eff}(x)$ în jurul lui $x \rightarrow 0$ ($x > 0$) și $x \rightarrow +\infty$.

Avem $V(x) \Rightarrow 0$ dacă $x \rightarrow \infty$ și $V(x) \Rightarrow \infty$ dacă $x \rightarrow 0$ deci alura curbei este tipică groapei de potențial dacă taie axa $0x$.

Din compararea potențialului nostru (34) cu cel al lui H r i v n a k (formula (23) din [2]) se observă că pe lângă termenul coulombian la noi figurează termenul cu $\frac{2}{\pi} \epsilon_0 g^2 Si(x) \frac{1}{x}$ care luînd în considerare (10) este analogul termenului al doilea din H r i v n a k (interacțiune electron-ramură optică a oscilațiilor longitudinale ale rețelei) dar mai general ca aceasta (interacțiunea electron-electron fiind luat în considerare mult mai consecvent de la început). Termenul al doilea din partea dreapta a curbei (34) la noi mai conține cuplajul pur electron-plasmon $\frac{2}{\pi} \frac{\epsilon_0}{x} Si(x)$ (ceea ce la H r i v n a k lipsește complet) iar termenul al treilea este iarăși analogul termenului al treilea a lui H r i v n a k — cuplaj electron-rețea ramură acustică (fononi) — dar de asemenea mai general (constanta $\propto \frac{\epsilon_0 g^2}{1-g^2}$) din cauza concepției multi-electronice folosite.

1. Pentru $g^2 \rightarrow 0$ avem evident cazul plasmelor metalice, căci $v_K^i \rightarrow 0$ deci și $v_K \rightarrow 0$ adică n-avem interacție electron-rețea. Caz special calculat de D. Pines [6].

2. Pentru $g^2 \neq 0$ analizăm mai întii curba simplificată

$$\frac{\epsilon_0}{K_0 e^2} V_{eff}(x) = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2}{\pi} \epsilon_0 (1 + g^2) Si(x) \right] \quad (35)$$

unde am neglijat interacțiunea electronilor cu ramura acustică a oscilației rețelei. Curba taie axa $0x$ în două puncte $x \approx 1,65$ și $x \approx 6,4$ dacă $\epsilon_0(1 + g^2) \cong \cong 1,1763$. Avem deci condiția necesară ca axa $0x$ să fie tăiată în cel puțin două puncte și deci să apară o stare legată

$$1 \leq \epsilon_0(1 + g^2) \leq 1,1763 \quad (36)$$

care pentru cazul teoretic $\epsilon_0 = 1$ dă $g^2 = 0,1763$. Sîntem deci în domeniul cuplajului slab. În [14] se arată că pentru existența stării legate electron-electron condiția suficientă este ca să avem

$$\int r |V(r)|_{r < 0} dr > \frac{\hbar}{2\mu} \quad (37)$$

cu $\mu = \frac{m^*}{2}$

Folosind (34) această condiție revine la

$$\begin{aligned} & - \left\{ \left[x(1 - \epsilon_0[1 + g^2]) - \frac{2}{\pi} \epsilon_0 (1 + g^2) \cos x \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon_0 g^2}{1 - g^2} \left(-\frac{\sin x}{x} + \frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{2 \cos x}{x^2} \right) \right\} \Bigg|_{x_1}^{x_2} > \frac{\hbar^2 K_D \epsilon_0}{m^* e^2} \quad (38) \end{aligned}$$

Sau

$$-\left\{ \left[x(-1 - g^2) - \frac{2}{\pi} (2 + g^2) \cos x \right] + \right. \\ \left. + \mathcal{O} \frac{g^2}{1 - g^2} \left(\frac{\sin x}{-x} + \frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{2 \cos x}{x^2} \right) \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} > \frac{\hbar r^2 K_D}{m^* e^2} \quad (38 a)$$

Pentru concluzii mai profunde vom reprezenta funcția (34) cu valori din (36) în cazul $T = 300^\circ\text{K}$ evaluând constanta φ cu mărimile $N_e = 10^{22} - 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ [1], [2]; $K_D = 10^7 - 10^8 \text{ cm}^{-1}$ [4] $v_0 = 10^8 - 10^9 \text{ cmsec}^{-1}$ [7]

Din graficul 1 a cu \mathcal{O} de ordinul unităților se constată apariția a două gropi de potențial. Prima foarte îngustă între $x = 0,95$ $x = 1,05$ datorită considerării interacțiunii electron-plasmon — pe care o vom numi „groapa plasmei” — și a doua mai largă între $x = 1,45$ $x = 6,4$ datorită cuplajului electron-fonon — pe care o vom numi „groapa fononică” — avînd o alură analoagă cu cel din [2] și lărgită datorită interacțiunii electron-electron.

Minimul curbei este pentru aproximativ $x \approx 1$ de $\frac{\epsilon_0}{K_D e^2} V_{eff} \approx 0,26$ iar la H r i v n a k în $x \approx 3$; $\frac{K_D e^2}{\epsilon_0} V_{eff} \approx -0,058$. Luarea în considerare a efectelor multielectronice în speță a interacțiunii electron-plasmon întărește deci cu cca. o ordine de mărime existența unor stări legate a doi electroni în anumite cazuri care îndeplinesc condițiile menționate în (36) și (38). Aceste condiții însă se mai lărgesc din cauza considerării termenului al doilea din V_{eff} care ridică curba mult deasupra axei $0x$. Acest fapt este demonstrat și mai elocvent de figura 2 a unde s-a reprezentat (34) cu \mathcal{O} de ordinul miilor. Toate aceste curbe se obțin în limitele condițiilor din (36) — (38) folosind pentru N_e , K_D și v_0 valorile menționate. Se observă mai departe din 2 a că pentru valori largi ale lui \mathcal{O} groapa „plasmei” tinde să dispară — mai precis se contopește cu groapa „fononică” — imprimînd acesteia din urmă alura ei: îngustime și adîncime excesivă. Această constatare atestă faptul că în anumite condiții de temperatură și densitate electronică interacțiunea electron-electron joacă un rol din ce în ce mai preponderent în stabilitatea stărilor legate.

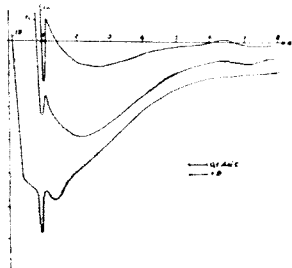


Fig. 1. (a, b, c).

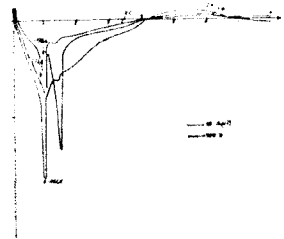


Fig. 2. (a, b, c).

Pentru aplicarea acestor considerații teoretice generale asupra unui material concret, vom analiza cazul germaniului. După [8] în Ge s-au constatat benzi de adsorbție în infraroșu care sînt asociate cu oscilațiile rețelei. Coeficientul de adsorbție a acestor benzi este de cca trei ordine de mărime mai mic ca și la cristalele ionice. Această trebuie să reflecte și în coeficientul de cuplaj. Folosind datele experimentale pentru indicele de refracție, masă efectivă și constanta dielectrică statică din [9], [10], [11], avem din (10) $g^2 = 0,06448$ ceea ce în comparație cu $g \approx 5$ [12] pentru *NaCl* este cu cca două ordine de mărime mai mic și corespunde deci scăderii coeficientului de adsorbție menționat mai sus.

Reprezentînd relația (34) pentru germaniu cu valorile arătate din figurile 1 b și 2 b se observă aceeași alură ca și în considerațiile generale (figura 1 a — 2 a). De menționat că în germaniu starea stabilă legată a doi electroni — mai probabil bipolaronul — apare numai pentru valori mari ale lui ϵ (figura 2 b) groapa de potențial fiind despărțită de restul curbei ($x \rightarrow \infty$) printr-o barieră de repulsie.

Cele expuse sînt confirmate întru totul de figurile 1 c — 2 c unde s-a reprezentat curba (34 a) pentru germaniu. Luîndu-se în considerare în mod riguros ecranarea de scurtă rază de acțiune — și care arată aceeași alură calitativă ca și figurile 1 b — 2 b — cu diferența că starea legată a doi electroni este condiționată și mai pregnant de groapa plasmei adică de intensificarea interacțiunilor electron-electron de lungă rază de acțiune.

Concluzii. Tratarea multielectronică a problemei potențialului efectiv întărește condiția apariției stărilor legate bielectronice în metale și bipolaroni în cristale polare, deoarece interacțiunea electron-electron de lungă rază de acțiune (apariția cîmpului plasmonic) adîncește groapa de potențial „fononică” — pe lângă apariția unei gropi suplimentare „de plasmă”. Această din urmă fiind foarte îngustă pentru valorile lui ϵ mici prezintă doar posibilitatea apariției unei stări legate relativ instabile datorită cîmpului plasmonic pur. Considerarea interacțiunii electron-electron însă duce la o tratare mult mai consecventă a problemei stărilor legate, ca tratarea uniparticulă ceea ce se observă mai ales la valori mari ale lui ϵ adică în anumite condiții de temperatură și densitate electronică, unde interacția electron-electron imprimă în esență caracterul curbei și joacă un rol din ce în ce mai preponderent în stabilitatea stărilor legate. Pe lângă cele expuse mai apare și un efect suplimentar, produs de interacția electron-plasmon, căci datorită ei apare o corecție esențială și în termenul interacțiunii electron-rețea.

Energia minimă a sistemului coboară datorită considerării consecvente a interacțiunilor complexe: electron-electron, electron-rețea și rezultatele obținute conțin — ca niște cazuri particulare — rezultatele din literatură referitoare la energia electronilor în cîmpul cristalin.

Aceste considerații se aplică germaniului și se arată că pentru valori experimentale uzuale starea de bipolaron este stabilă în anumite condiții de temperatură și densitate electronică.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Weissmann, I. Stan, „Czech. Journ. Phys.” 19, 910, 1964.
2. L. Hrivnak, „Czech. Journ. Phys.” 7, 482, 1963.
3. H. Frochlich, „Adv. Phys.” 3, 325, 1954.
4. S. Raimes, „Rep. Progr. Phys.” XX. 1. 1957.
5. D. Ter Haar, *Introduction to the physics of many body systems*. London-New-York, 1958.
6. D. Pines, *Solid States Physics* I. New-York, 1955.
7. D. Bohm—T. Staver, „Phys. Rev.” 84, 836, 1952.
8. H. Y. Fan, *Solid States Physics*. I. New-York, 1955.
9. D. Rank—D. Cronmeyer, „Phys. Rev.” 90, 203, 1953.
10. M. C. Dunlop—R. L. Watters, „Phys. Rev.” 92, 1392, 1953.
11. G. Dresselhaus, A. F. Kip, C. Kittel, „Phys. Rev.” 98, 368, 1955.
12. R. P. Feynmann, „Phys. Rev.” 97, 660, 1955.
13. D. Pines, *The many-body problem*, New-York, 1961.
14. V. Schwinger, „Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.” 47, 122, 1961.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛАХ

(Резюме)

Используя выражение эффективного потенциала взаимодействия в кристаллах [1], авторы изучают связанное состояние двух электронов, а также существование биполярона, причём учитывается, кроме электрон-решеточного, соответственно электрон-фононного взаимодействия [2], электрон-электронное и электрон-плазмонное взаимодействие. Показано, что электрон-электронное взаимодействие усиливает связанное состояние и приводит к углублению и расширению потенциальной ямы и к появлению дополнительной узкой потенциальной ямы, причём устанавливаются условия для существования связанного состояния двух электронов, соответственно биполярона. Подробно анализируется случай германия. Как значение минимальной величины энергии, так и выведенный эффективный потенциал содержат как предельные случаи в униэлектронной аппроксимации результаты, известные в литературе [2], [3], [5].

THE EFFECTIVE POTENTIAL AND THE BOUND STATE OF TWO ELECTRONS IN CRYSTALS

(Summary)

Using the expression of the interaction effective potential in crystals [1] we studied the bound state of two electrons and the existence of bipolaron, considering besides the interaction electron-lattice respectively electron-phonon [2] also the interaction electron-electron respectively electron-plasmon. It is shown that the interaction electron-electron strengthens the bound state leading to the deepening and the widening of the potential gap, at the appearance of a narrow supplementary gap, establishing the conditions for the existence of the bound state of two electrons, respectively of the bipolaron. More detailed is analysed the case of germanium.

The minimum value calculation of the energy and the deduced effective potential for limit cases in uni-electron approximation agreed with the results known from literature [2], [3], [5].

APLICAREA TRANSFORMĂRII FOLDY-WOUTHUYSEN LA STUDIUL POLARIZĂRII ELECTRONULUI

de

ZOLTÁN GÁBOS și MIHAI GOIA

Starea de polarizare a electronului poate fi caracterizată complet cu ajutorul parametrilor lui Stokes. Avem următoarele posibilități pentru a ajunge la valorile acestor parametri :

a) Se calculează matricea de densitate

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{unde} \quad \rho = \frac{1}{2} (1 + \vec{\xi} \vec{\sigma}),$$

care ne conduce într-un mod foarte simplu la valorile parametrilor ξ_i :

$$\vec{\xi} = S\rho(\vec{\rho}\vec{\Sigma}) = S\rho(\rho\vec{\sigma}),$$

b) Se utilizează matricea de polarizare \bar{P} sau $P^{(+)}$ definite prin

$$P_{\lambda\sigma} = u(\lambda)\bar{u}(\sigma),$$

$$P_{\lambda\sigma}^{(+)} = u(\alpha)u^+(\sigma),$$

unde u este bispinorul corespunzător electronului. Dacă avem expresia lui \bar{P} (sau a lui $P^{(+)}$) avem o mulțime de posibilități pentru a găsi valorile parametrilor ξ_i , [2], [3], [9]. Matricea \bar{P} poate fi scrisă sub forma [2] :

$$\bar{P} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{i}{m_0c} p_\mu \gamma_\mu + i s_\mu \gamma_5 \gamma_\mu - i m_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \right), \quad (1)$$

unde p_μ reprezintă un vector (cuadriimpulsul), s_μ un pseudovector, iar $m_{\mu\nu}$ un tensor antisimetric de ordinul doi. Mărimile s_μ și $m_{\mu\nu}$ ne informează despre starea de polarizare a electronului.

În această lucrare aplicînd transformarea Foldy-Wouthuysen ajungem la următoarele rezultate noi :

A) Fie $P^{(+)}(0)$ matricea $P^{(+)}$ în sistemul legat de particulă. Se arată că se poate ajunge la expresia matricii de polarizare $P^{(+)}$ printr-o trans-

formare FW. Rezultatul obținut ne dă posibilitatea de a exprima parametrii lui Stokes cu ajutorul mărimilor s_μ și $m_{\mu\nu}$.

B) Se stabilește expresia matricii $\tilde{\rho}$ pentru interacțiunile la care în starea finală avem prezent în sistem un singur electron și particule de altă natură.

1°. În sistemul legat de particulă (electron) matricile \bar{P} și $P^{(+)}$ au aceeași expresie [7]:

$$\bar{P}(0) = P^{(+)}(0) = \frac{1}{8} (1 + \gamma_4)(1 + \vec{\Sigma}\vec{\xi})(1 + \gamma_4) = \frac{1}{4} (1 + \gamma_4)(1 + \vec{\xi}\vec{\Sigma}).$$

Există posibilitatea de a trece de la $\bar{P}(0)$ la \bar{P} printr-o transformare Lorentz [2], [7]:

$$\bar{P} = L^{-1}\bar{P}(0)L, \quad (2)$$

unde

$$L = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0c^2}{2m_0c^2}} [1 - B(\vec{\alpha}, \vec{e})], \quad B = \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0c^2}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

Având în vedere că

$$P^{(+)} = \bar{P}\gamma_4, \quad \gamma_4(1 + \gamma_4) = (1 + \gamma_4)\gamma_4 = 1 + \gamma_4, \quad \vec{\alpha}\gamma_4 + \gamma_4\vec{\alpha} = 0,$$

pe baza relației (2) obținem

$$\begin{aligned} P^{(+)} &= \frac{\varepsilon + m_0c^2}{16m_0c^2} [1 + B(\vec{\alpha}, \vec{e})](1 + \gamma_4)(1 + \vec{\xi}\vec{\Sigma})(1 + \gamma_4)[1 - B(\vec{\alpha}, \vec{e})]\gamma_4 = \\ &= \frac{\varepsilon + m_0c^2}{8m_0c^2} [1 - B\gamma_4(\vec{\alpha}, \vec{e})](1 + \gamma_4)(1 + \vec{\xi}\vec{\Sigma})[1 + B\gamma_4(\vec{\alpha}, \vec{e})]. \end{aligned}$$

Se observă că expresia lui $P^{(+)}$ poate fi scrisă sub forma

$$P^{(+)} = \frac{\varepsilon}{m_0c^2} U^{-1}P^{(+)}(0)U, \quad (3)$$

unde U este operatorul transformării FW

$$U = \frac{\varepsilon + m_0c^2 + c\gamma_4(\vec{\alpha}, \vec{p})}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m_0c^2)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0c^2}{2\varepsilon}} [1 + B\gamma_4(\vec{\alpha}, \vec{p})].$$

Din (3) rezultă

$$P^{(+)}(0) = \frac{1}{4} (1 + \gamma_4)(1 + \vec{\xi}\vec{\Sigma}) = \frac{m_0c^2}{\varepsilon} UP^{(+)}U^{-1}.$$

Relația (3) ne dă posibilitatea de a exprima pe $P^{(+)}$ cu ajutorul lui $P^{(+)}(0)$ printr-o transformare FW. Ajungem deci la următorul rezultat: dacă trecerea de la $\bar{P}(0)$ la \bar{P} se realizează printr-o transformare Lorentz, atunci trecerea de la $P^{(+)}(0)$ la $P^{(+)}$ se realizează prin aplicarea unei transformări FW.

2°. Relațiile (2) și (3) ne dau posibilitatea de a exprima parametrii lui Stokes cu ajutorul matricii \bar{P} respectiv $P^{(+)}$:

$$\vec{\xi} = \frac{1}{4} Sp[\vec{\Sigma} L \bar{P} L^{-1}], \quad (4)$$

$$\vec{\xi} = \frac{1}{4} Sp[\gamma_4 \vec{\Sigma} L \bar{P} L^{-1}], \quad (5)$$

$$\vec{\xi} = \frac{m_0 c^2}{4\varepsilon} Sp[\vec{\Sigma} U P^{(+)} U^{-1}], \quad (6)$$

$$\vec{\xi} = \frac{m_0 c^2}{4\varepsilon} Sp[\gamma_4 \vec{\Sigma} U P^{(+)} U^{-1}]. \quad (7)$$

La efectuarea calculelor este avantajos să exprimăm matricea $P^{(+)}$ cu ajutorul matricilor de bază γ_4 , γ_5 , $\vec{\Sigma}$. Utilizând (1) și având în vedere că

$$P^{(+)} = \bar{P} \gamma_4,$$

obținem

$$P^{(+)} = \frac{1}{4} \left[\gamma_4 + \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} - \frac{1}{m_0 c} \gamma_5 (\vec{p}, \vec{\Sigma}) + (s, \vec{\Sigma}) + i s_4 \gamma_5 + \gamma_4 (\vec{F}, \vec{\Sigma}) - \gamma_5 \gamma_4 \vec{G}, \vec{\Sigma} \right]$$

Vectorii \vec{s} , \vec{F} , \vec{G} au componentele

$$\vec{s}(s_1, s_2, s_3), \quad \vec{F}(m_{23}, m_{31}, m_{12}), \quad \vec{G}(m_{14}, m_{24}, m_{34}).$$

Aplicând relațiile (4), (5), (6), (7) avem posibilitatea de a exprima parametrii ξ cu ajutorul mărimilor \vec{s} , s_4 , \vec{F} , \vec{G} :

$$\vec{\xi} = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \vec{F} - \frac{\vec{p}(\vec{p}, \vec{F})}{m_0(\varepsilon + m_0 c^2)} - i \frac{\vec{p} \times \vec{G}}{m_0 c},$$

$$\vec{\xi} = \vec{s} + \frac{\vec{p}(\vec{p}, \vec{s})}{m_0(\varepsilon + m_0 c^2)} + i \frac{s_4 \vec{p}}{m_0 c},$$

$$\vec{\xi} = \frac{m_0^2 c^4}{\varepsilon^2} \vec{s} + \frac{m_0 c^4 \vec{p}(\vec{p}, \vec{s})}{\varepsilon^2(\varepsilon + m_0 c^2)} + i \frac{m_0 c^3}{\varepsilon^2} (\vec{p} \times \vec{G}),$$

$$\vec{\xi} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} \vec{F} - \frac{m_0 c^4 \vec{p}(\vec{p}, \vec{F})}{\varepsilon^2(\varepsilon + m_0 c^2)} - i \frac{m_0 c^3}{\varepsilon^2} s_4 \vec{p}.$$

Utilizând expresiile găsite pentru $\vec{\xi}$, pot fi stabilite și alte rezultate, dintre care pentru exemplificare semnalăm următoarele

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 \vec{\xi} &= im_0c[(\vec{p} \times \vec{G}) - s_4 \vec{p}], \\ (\vec{p}, \vec{s}) &= \frac{\varepsilon}{m_0c^2}(\vec{p}, \vec{\xi}), \quad (\vec{p} \times \vec{s}) = (\vec{p} \times \vec{\xi}), \\ (\vec{p}, \vec{F}) &= (\vec{p}, \vec{\xi}), \quad (\vec{p} \times \vec{F}) = \frac{\varepsilon}{m_0c^2}(\vec{p} \times \vec{\xi}). \end{aligned}$$

Avantajul metodei indicate de noi față de cele folosite în literatură constă în aceea că aplicarea ei nu necesită cunoașterea expresiilor concrete ale mărimilor \vec{s} , s_4 , \vec{F} , \vec{G} .

3°. Amplitudinea de tranziție pentru un proces la care în starea finală avem prezent în sistem un singur electron poate fi scrisă sub forma

$$M_{i \rightarrow c} = u^+(\alpha)M(\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

unde u este bispinorul corespunzător electronului, iar M se referă în exclusivitate la restul particulelor participante la interacțiune. Deoarece u poate fi exprimat cu ajutorul bispinorilor de bază u_1, u_2

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

găsim

$$M_{i \rightarrow f} = c_1^* M_1 + c_2^* M_2, \quad M_j = u_j^+ M, \quad j = 1, 2.$$

Având în vedere că

$$\begin{aligned} 2c_1 c_1^* &= 1 + \bar{\xi}_3, & 2c_1 c_2^* &= \xi_1 - i\bar{\xi}_2, \\ 2c_2 c_1^* &= \bar{\xi}_1 + i\xi_2, & 2c_2 c_2^* &= 1 - \bar{\xi}_3, \end{aligned}$$

se ajunge la următorul rezultat

$$\begin{aligned} |M_{i \rightarrow f}|^2 &= \frac{1}{2} (|M_1|^2 + |M_2|^2) \left[1 + \bar{\xi}_1 \frac{-M_1 M_2^+ + M_2 M_1^+}{|M_1|^2 + |M_2|^2} + \bar{\xi}_2 \frac{i(M_1 M_2^+ - M_2 M_1^+)}{|M_1|^2 + |M_2|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\xi}_3 \frac{|M_1|^2 - |M_2|^2}{|M_1|^2 + |M_2|^2} \right]. \end{aligned}$$

Este important de observat că coeficientul lui $\bar{\xi}_i$ din paranteză ne dă tocmai valoarea lui ξ_i [3].

Utilizând (8) obținem

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = u(\beta)u^+(\alpha)M(\alpha)M^+(\beta) = P_{\beta\alpha}^{(+)}Q_{\alpha\beta} = Sp(P^{(+)}Q),$$

unde

$$Q_{\alpha\beta} = M(\alpha)M^+(\beta).$$

Dacă efectuăm transformările

$$P^{(+)' } = P^{(+)}(0) = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} U P^{(+)} U^{-1}, \quad Q' = U Q U^{-1},$$

se constată în urma unor calcule simple că

$$Sp(P^{(+)}Q) = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} Sp[P^{(+)}(0)Q'].$$

În consecință

$$|M_{i \rightarrow j}|^2 = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} Sp[P^{(+)}(0)Q'] = \frac{\varepsilon}{4m_0 c^2} \{Sp[(1 + \gamma_4)Q'] + \vec{\xi} Sp[(1 + \gamma_4)Q' \vec{\Sigma}]\}.$$

Având în vedere observația noastră de mai sus ajungem la următorul rezultat

$$\vec{\xi} = \frac{Sp[(1 + \gamma_4)Q' \vec{\Sigma}]}{Sp[(1 + \gamma_4)Q']}, \quad (9)$$

prin urmare

$$\vec{\rho} = \frac{(1 + \gamma_4)Q'(1 + \gamma_4)}{Sp[(1 + \gamma_4)Q'(1 + \gamma_4)]}.$$

Avem posibilitatea de a exprima matricea Q' cu ajutorul matricilor de bază $\gamma_4, \gamma_5, \vec{\Sigma}$:

$$Q' = A_1 + A_2 \gamma_4 + A_3 \gamma_5 + A_4 \gamma_4 \gamma_5 + (\vec{A}_5, \vec{\Sigma}) + \gamma_4 (\vec{A}_6, \vec{\Sigma}) + \gamma_5 (\vec{A}_7, \vec{\Sigma}) + \gamma_4 \gamma_5 (\vec{A}_8, \vec{\Sigma})$$

Înlocuind această expresie în (9) găsim

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{A}_5 + \vec{A}_6}{A_1 + A_2}.$$

În cazul particular când electronul este prezent și în starea inițială avem

$$M(\alpha) = T_{\alpha\rho} u_0(\rho),$$

în consecință

$$Q = T P_0^{(+)} T^\dagger.$$

Deoarece matricea de polarizare corespunzătoare stării inițiale $P_0^{(+)}$ poate fi exprimată cu ajutorul parametrilor lui Stokes corespunzători stării inițiale $(\xi_i)_0$, relația (9) face legătura între vectorii de polarizare $\vec{\xi}$ și $\vec{\xi}_0$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. I. Foldy, „Phys. Rev.“ 78, 29, 1950.
2. H. A. Tolhoek, „Rev. Mod. Phys.“, 28, 277, 1956.
3. A. I. Ahiezer—V. Berestețki, *Kvantovaja elektrodinamika*, ediția a doua, Moscova, 1959, p. 270—272.
4. M. E. Rose—R. H. Good, Jr., „Il Nuovo Cimento“, 22, 565, 1961.
5. R. H. Good, Jr. — M. E. Rose, „Il Nuovo Cimento“, 24, 864, 1962.
6. D. M. Fradkin—R. H. Good, Jr., „Il Nuovo Cimento“ 22, 643, 1961.
7. M. E. Rose, *Relativistic electron theory*, ed. John-Wiley, New York-London, 1961, p. 100—102, 196—215.
8. H. Jehle—Wm. C. Parke, „Phys. Rev.“, 137B, 760, 1965.
9. Z. Gábos—É. Simon, „Studia Univ. Babeș-Bolyai“ Ser. Math. Phys., fasc. 1, 1965, p. 115.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ FOLDY-WOUTHUYSEN
К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНА

(Р е з ю м е)

В работе осуществлена непосредственная связь матрицы плотности $\tilde{\rho}$ с матрицей поляризации $P^{(+)}$. В качестве применения результатов, установлено выражение матрицы $\tilde{\rho}$ для электрона, участвовавшего во взаимодействии элементарных частиц.

THE APPLICATION OF FOLDY-WOUTHUYSEN TRANSFORMATION TO THE
STUDY OF THE ELECTRON POLARIZATION

(S u m m a r y)

In the present paper is given the direct relation between the matrix of density $\tilde{\rho}$ and the matrix of polarization $P^{(+)}$. As an application of the obtained results, the expression of matrix for the electron that took part in an interaction between the elementary particles is established.

REȚELE ELECTRICE DUALE CU ELEMENTE NELINEARE ȘI VARIABLE ÎN TIMP*

de
EMIL TĂTARU

Două rețele se numesc duale dacă curenții, respectiv tensiunile din prima rețea au același mod de variație ca și tensiunile, respectiv curenții din a doua rețea. În lucrarea [1] este dată teoria dualității rețelelor și metoda grafică de găsim a dualului în cazul circuitelor electrice lineare și invariabile. Acest articol are scopul să arate că există corespondențe duale și în cazul elementelor nelineare și variabile—elemente care au o aplicabilitate practică crescândă. Ca exemple de elemente nelineare și variabile se pot cita: inductanțele bobinelor cu miez de fier sau ferită, capacitatea de sarcină a joncțiunii $p-n$, capacitatea condensatorului la care distanța între armături variază în timp, inductanța bobinei la care miezul oscilează, rezistența variabilă în timp a microfonului cu cărbune, rezistența nelineară a joncțiunii $p-n$, diodei tunel, structurii $p-n-p-n$, etc.

În cazul elementelor reactive nelineare și variabile, inductanța \mathcal{L} și capacitatea \mathcal{C} se definesc prin relațiile:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(i, t) &= \frac{\partial \Psi}{\partial i} \\ \mathcal{C}(u, t) &= \frac{\partial Q}{\partial u}\end{aligned}\tag{1}$$

unde:

i — curentul care circulă prin inductanță

u — tensiunea la bornele capacității

Ψ — fluxul magnetic prin bobină

Q — sarcina electrică pe armătura condensatorului

Rezultă că tensiunea la bornele inductanței este dată de relația:

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{L}(i, t) \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\tag{2}$$

* În continuare prin termenul „variabil” se va înțelege variabil în timp.

iar curentul prin capacitatea are expresia :

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \mathcal{C}(u, t) \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3)$$

În aceste relații :

$\mathcal{L}(i, t) \frac{di}{dt}$ — reprezintă tensiunea obținută la bornele inductanței cauzată de variația în timp a curentului care circulă prin inductanță;

$\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ — reprezintă tensiunea obținută la bornele inductanței, care urmare a variației fluxului magnetic—variație condiționată numai de variația în timp a inductanței;

$\mathcal{C}(u, t) \frac{du}{dt}$ — reprezintă curentul care circulă prin capacitate, produs de variația în timp a tensiunii la bornele capacității;

$\frac{\partial Q}{\partial t}$ — reprezintă curentul care circulă prin capacitate datorită variației sarcinii electrice — variație cauzată numai de variația în timp a capacității.

Se vede că relațiile (2) și (3) au aceeași formă matematică și se poate conchide că dacă inductanța $\mathcal{L}(i, t)$ și capacitatea $\mathcal{C}(u, t)$ au aceeași formă de nelinearitate și variație în timp, în condiții de alimentare duală, tensiune la bornele inductanței, respectiv curentul prin inductanță și curentul prin capacitate, respectiv tensiunea la bornele capacității au aceeași formă de variație.

Elementele rezistive nelineare și variabile se definesc prin relațiile : $u = u(i, t)$ respectiv $i = i(u, t)$. Dacă elementul rezistiv R definit prin relația $u = u(i, t)$ are aceeași formă de nelinearitate și variație în timp ca și elementul G definit prin relația $i = i(u, t)$, atunci, în condiții de alimentare duală tensiunea la bornele elementului R și curentul prin elementul G au aceeași formă de variație. Același lucru se spune despre curentul prin elementul R și tensiunea la bornele elementului G .

Prin urmare, pe baza raționamentelor de mai sus, în cazul rețelelor cu elemente neliniare și variabile, se pot da următoarele relații de dualitate :

$$\begin{aligned} e(t) &\longleftrightarrow i(t) \\ \mathcal{L}(i, t) &\longleftrightarrow \mathcal{C}(u, t) \\ \mathcal{C}(u, t) &\longleftrightarrow \mathcal{L}(i, t) \\ u_R = u_R(i, t) &\longleftrightarrow i_G = i_G(u, t) \end{aligned} \quad (4)$$

În consecință, metoda grafică de gășire a dualului, indicată în lucrarea [1] pentru rețelele electrice cu elemente lineare și invariabile poate fi folosită cu succes și în cazul rețelelor electrice cu elemente neliniare și variabile ținînd seama de relațiile (4).

Teoria de mai sus este ilustrată prin două exemple. Sînt arătate în fig. 1 două sisteme parametrice duale, cu inductanță, respectiv capacitate variabilă, iar în fig. 2 două scheme duale de generatori de impulsuri. Prima

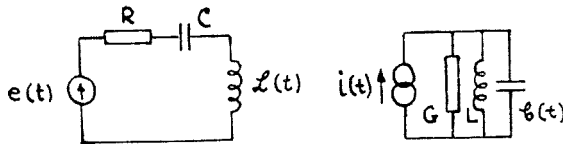


Fig. 1

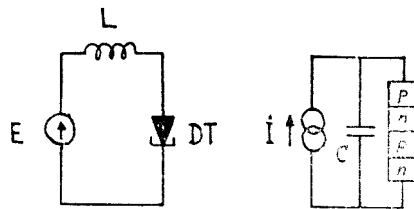


Fig. 2.

schemă de generator folosește ca element activ dioda tunel care are caracteristica voltamperică de tip N iar a doua schemă utilizează ca element activ structura $p-n-p-n$ care are caracteristica voltamperică de tip S .

BIBLIOGRAFIE

1. M. F. Gardner, J. L. Barnes, *Transients in linear systems*. New-York, 1942.

ДУАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ И ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕМЕНТАМИ

(Резюме)

Автор указывает на то, что метод нахождения дуального в случае электрических цепей с линейными и неизменяющимися во времени элементами [1] может использоваться и в случае электрических цепей с нелинейными и изменяющимися во времени элементами, учитывая отношения (4). Теория иллюстрируется двумя примерами.

DUAL ELECTRICAL NETWORKS WITH UNLINEAR AND VARIABLE ELEMENTS IN TIME

(Summary)

In the present paper is shown that the method of finding the dual in the case of the electrical networks with linear and invariable elements in time [1] is also utilizable in the case of electrical networks with unlinear and variable elements in time, taking into account the relations (4).

The theory is illustrated by two examples.

SCHEMĂ DE NUMĂRARE BINARĂ UTILIZÂND COMBINAȚIA TRANZISTOR—DIODA TUNEL

de

EMIL TĂTARU

Unul din cele mai răspândite elemente funcționale utilizate în radioelectronică este numărătorul binar. De aceea realizarea numărătoarelor cu performanțe bune se bucură de atenția unui grup mare de specialiști. Viteza de comutare foarte mare a diodelor tunel a provocat interesul specialiștilor conducând la utilizarea acestor elemente în schemele de numărare binară [1, 2]. Dar aceste numărătoare au un mare neajuns și anume toleranțele admisiabile sînt mici. De exemplu, în cazul folosirii celei de numărare binară echipată cu o diodă tunel, după cum este arătat în [3], toleranțele tensiunilor de alimentare și a curentului de vîrf a diodelor tunel trebuie să fie mai mici de $\pm 2\%$. Din această cauză schemele de numărare cu diode tunel nu au fost introduse în producție. Pentru înlăturarea acestui neajuns un compromis reușit îl constituie utilizarea combinației tranzistor—diodă tunel. Aceasta conduce la scheme de numărare binară cu toleranțe acceptabile și deci permite realizarea lor la scară industrială, numărul elementelor de circuit de aproximativ două ori mai mic față de schemele cu tranzistoare realizînd astfel o siguranță în funcționare mărită, viteză de comutare mare. Schemele care utilizează combinația tranzistor—diodă tunel au performanțe superioare schemelor echipate cu tranzistoare [4].

Un etaj al numărătorului binar, care folosește combinația tranzistor—diodă tunel, se compune din circuitul de formare a impulsurilor de durată scurtă realizat cu ajutorul unui tranzistor și celula de numărare propriu-zisă echipată cu diodă tunel. Circuitul de formare a impulsurilor are menirea să realizeze : forma și durata necesară impulsurilor, amplificarea în putere și înlăturarea reacției între celulele de numărare. Întrucît viteza de comutare a schemelor care folosesc combinația tranzistor—diodă tunel este determinată de proprietățile de frecvență ale tranzistorului, se impune cu necesitate alegerea schemei optime de formare a impulsurilor. În literatură este cunoscut circuitul de formare a impulsurilor cu grup RC în circuitul bazei tranzistorului, utilizat pentru excitarea celei de numărare binară echipată cu o diodă tunel [5] și circuitul de formare a impulsurilor cu grup RC în circuitul emiterului tranzistorului folosit la excitarea celei de numărare binară

echipată cu două diode tunel [6]. În prezentul articol se propune utilizarea circuitului de formare a impulsurilor cu grup RC în circuitul emiterului pentru excitarea celulei de numărare binară cu o diodă tunel. Astfel se realizează un numărător cu performanțe superioare celui descris în [5]: termostabilitate

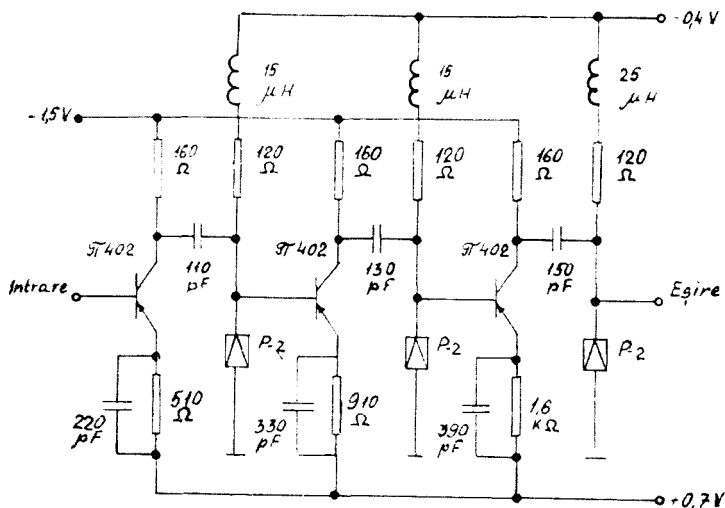


Fig. 1.

mare cauzată de prezența rezistenței de valoare mare în circuitul emite-rului și viteza de comutare sporită. Schema de principiu a acestui numărător este arătată în fig. 1. S-au folosit diode tunel din germaniu tip P-2 cu curent de vîrf, de 4,4 mA. Caracteristicile schemei sînt :

timpul de rezoluție	0,26 μ s
frecvența maximă de lucru	3 MHz
consumul de putere :	
fiecare celulă de numărare	0,82 mW
circuitul de formare din primul etaj	2,65 mW
circuitul de formare din al doilea etaj	1,47 mW
circuitul de formare din al treilea etaj	0,88 mW
toleranțele elementelor de circuit și a tensi- unilor de alimentare	$\pm 10\%$
toleranțele curentului de vîrf a diodelor tunel	$\pm 6\%$
toleranțele amplitudinii semnalului de intrare	$\pm 20\%$

Experimental a fost realizat un etaj al numărătorului descris în [5] cu scopul de a compara rezultatele. Folosind aceleași elemente active și admițînd ace-leași toleranțe, valorile elementelor de circuit s-au ales astfel încît consumul

de putere să fie același cu al primului etaj din fig. 1 și ele sînt indicate în fig. 2. Caracteristicile acestei scheme sînt :

timpul de rezoluție $1 \mu\text{s}$
 frecvența maximă de lucru 1 MHz

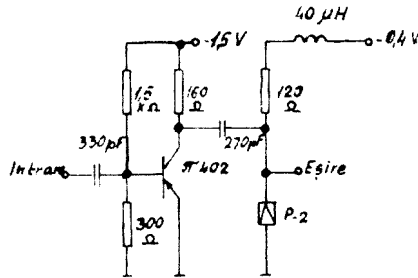


Fig. 2.

Prin urmare, se poate constata că schema propusă în prezentul articol în comparație cu schema descrisă în [5] are timpul de rezoluție de aproximativ patru ori mai mic, frecvența maximă de lucru de aproximativ trei ori mai mare și termostabilitate mult mai bună. Ambele scheme se caracterizează prin consum de putere redus. Aceasta se explică prin aceea că în regim static tranzistorul este aproape tăiat, iar diodele tunel cu curent de vîrf mic sînt elemente active cu consum de putere redus.

BIBLIOGRAFIE

1. R. A. Kaenel *One tunnel - diode flip-flop*, „Proc. I.R.E.”, nr. 3, 1961, p. 671.
2. W. F. Chow, *Tunnel diode digital circuitry*, „IRE Trans. Electronic Computers”, nr. 3, 1960, p. 295-302.
3. M. Cooperman, *300 Mc. Tunnel-diode logic circuits*, „I.R.E.E. Trans. Electronic Computers” nr. 1, 1964, p. 18-27.
4. E. Tătaru, *Explicarea unor proprietăți ale combinației tranzistor-diodă tunel*, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Series Mathematica-Physica, 1/1966
5. B. N. Kononov, A. S. Sidorov, *Primenie tunelnih diodov v uzlah elektrofiziceskoi aparatury*, „Trudi piatoi naucinotekhniceskoi konferenții po iadernoi radio- elektronike”, tom. 1, p. 169-183.
6. E. Gottlieb, J. Giorgis, *Tunnel diodes, Part IV: Logic and switching circuits*, „Electronics”, July 5, 1963 p. 16-23.

БИНАРНАЯ СЧЕТНАЯ СХЕМА, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ КОМБИНАЦИЮ ТРАНЗИСТОР-ТУННЕЛЬНЫЙ ДИОД

(Резюме)

Предлагается использование формирователя импульсов с RC цепочкой в цепи эмиттера транзистора [6] для возбуждения бинарной счётной ячейки с одним туннельным диодом [1]. Автор получил счётчик, обладающий преимуществами над счётчиком, описанным в [5]: повышенные термостабильность и скорость переключения. Даются экспериментальные данные.

SCHÉMA DE NUMÉRATION BINAIRE UTILISANT LA COMBINAISON
TRANSISTOR — DIODE TUNNEL

(Résumé)

Dans l'article on propose l'utilisation du circuit pour former des impulsions avec le groupe RC dans le circuit d'émitter du transistor (6) pour l'excitation de la cellule de numération binaire avec une diode tunnel (1). On montre qu'on réalise ainsi un numérateur avec des performances supérieures à celui qui est décrit en (5) : grande thermostabilité et vitesse de commutation accrue. L'article comprend des résultats expérimentaux comparatifs.

COMPUNEREA UNOR TENSIUNI NESINUSOIDALE DIN TENSIUNI DREPTUNGHIULARE

de
AL. BÓDI

Pereli I. a demonstrat [1] că orice funcție periodică care poate fi exprimată printr-o serie Fourier a funcțiilor sinusoidale, poate fi exprimată și cu o serie Fourier a unor funcții dreptunghiulare.

În cele ce urmează, bazându-ne pe această demonstrație, vom calcula pentru câteva tensiuni cu forme speciale, componentele dreptunghiulare.

Compunerea tensiunii în dinții de ferăstrău din tensiuni dreptunghiulare (fig. 1). Seria lui Fourier pentru tensiunea în dinții de ferăstrău are forma

$$u(\omega t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t - \frac{1}{4} \sin 4 \omega t + \dots \right)$$

Fiecăreia dintre componentele acestei serii îi corespunde o tensiune dreptunghiulară.

Armonicele fundamentale îi corespunde o tensiune dreptunghiulară exprimată prin seria

$$g(\omega t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right) \quad (1)$$

Armonicelor superioare le corespund tensiuni dreptunghiulare exprimate prin serii

$$g(i \omega t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin i \omega t + \frac{1}{3} \sin 3i \omega t + \frac{1}{5} \sin 5i \omega t + \dots \right) \quad (2)$$

unde $i = 1, 3, 5, \dots$

Egalând următoarele două funcții

$$u(\omega t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i g(i \omega t) \quad (3)$$

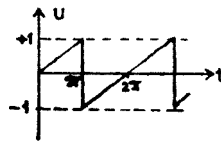


Fig. 1.

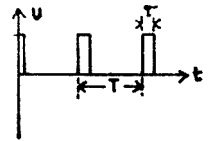


Fig. 2.

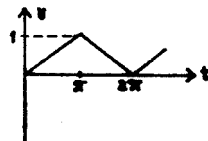


Fig. 3.

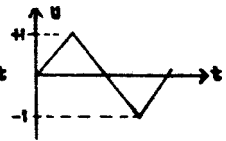


Fig. 4.

și identificînd coeficienții, găsim

$$C_0 = 0, C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{4}, C_3 = 0, C_4 = -\frac{1}{8}, C_5 = C_6 = C_7 = 0,$$

$$C_8 = -\frac{1}{16}, \text{ etc.}$$

Adică seria Fourier a tensiunii în dinți de ferăstrău construită din componente dreptunghiulare este următoarea :

$$u(\omega t) = \frac{1}{2} g(\omega t) - \frac{1}{4} g(2\omega t) - \frac{1}{8} g(4\omega t) - \frac{1}{16} g(8\omega t) - \dots$$

Compunerea succesiunii impulsurilor dreptunghiulare (fig. 2). Seria lui Fourier pentru o succesiune de impulsuri dreptunghiulare are expresia

$$u(\omega t) = k + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin k\pi}{1} \cos \omega t + \frac{\sin 2k\pi}{2} \cos 2\omega t + \frac{\sin 3k\pi}{3} \cos 3\omega t + \dots \right)$$

unde $k = \frac{\tau}{T}$ (de ex. $k = \frac{1}{6}$).

Armonicele fundamentale îi corespunde o tensiune dreptunghiulară exprimată prin seria

$$g(\omega t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos 1 \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t - \dots \right) \quad (4)$$

Armonicilor superioare le corespund tensiuni dreptunghiulare experimentate prin serii

$$g(i\omega t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos i \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 i \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 i \omega t - \dots \right) \quad (5)$$

unde $i = 2, 3, 4, \dots$

Egalînd cele două funcții

$$u(\omega t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i g(i\omega t)$$

și identificînd coeficienții, găsim

$$C_0 = k = \frac{1}{6}, C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = 0,216, C_3 = \frac{1}{4}, C_4 = 0,108, C_5 = 0, \\ C_6 = 0,072, \dots$$

Adică seria Fourier a unei succesiuni de impulsuri dreptunghiulare construită din componente dreptunghiulare are forma următoare :

$$u(\omega t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} g(\omega t) + 0,216g(2\omega t) + \frac{1}{4} g(3\omega t) + 0,108 g(4 \omega t) + \\ + 0,072 g(6 \omega t) + \dots$$

Compunerea tensiunii triunghiulare din tensiuni dreptunghiulare (fig. 3). Seria Fourier pentru tensiunea triunghiulară are forma

$$u(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots \right).$$

Armonicei fundamentale îi corespunde o tensiune dreptunghiulară exprimată prin seria (4).

Armonicelor superioare le corespund tensiuni dreptunghiulare exprimate prin serii (5) unde

$$i = 2, 3, 4, \dots$$

Egalând funcțiile $u(\omega t)$ și $g(i\omega t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ și identificând coeficienții, găsim

$$C_0 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = -0,318, \quad C_2 = C_4 = C_6 = \dots = C_{2n} = 0, \quad C_3 = -0,141,$$

$$C_5 = 0,051, \quad C_7 = -0,052, \dots$$

Seria Fourier a tensiunii triunghiulare construită din componente de tensiuni dreptunghiulare va fi

$$u(\omega t) = \frac{1}{2} - 0,318 g(\omega t) - 0,141 g(3\omega t) + 0,051 g(5\omega t) + \\ - 0,052 g(7\omega t) + \dots$$

Dacă vrem să scriem o tensiune triunghiulară simetrică, a cărei valoare în momentul $t = 0$ este nulă (fig. 4) seria lui Fourier se va modifica

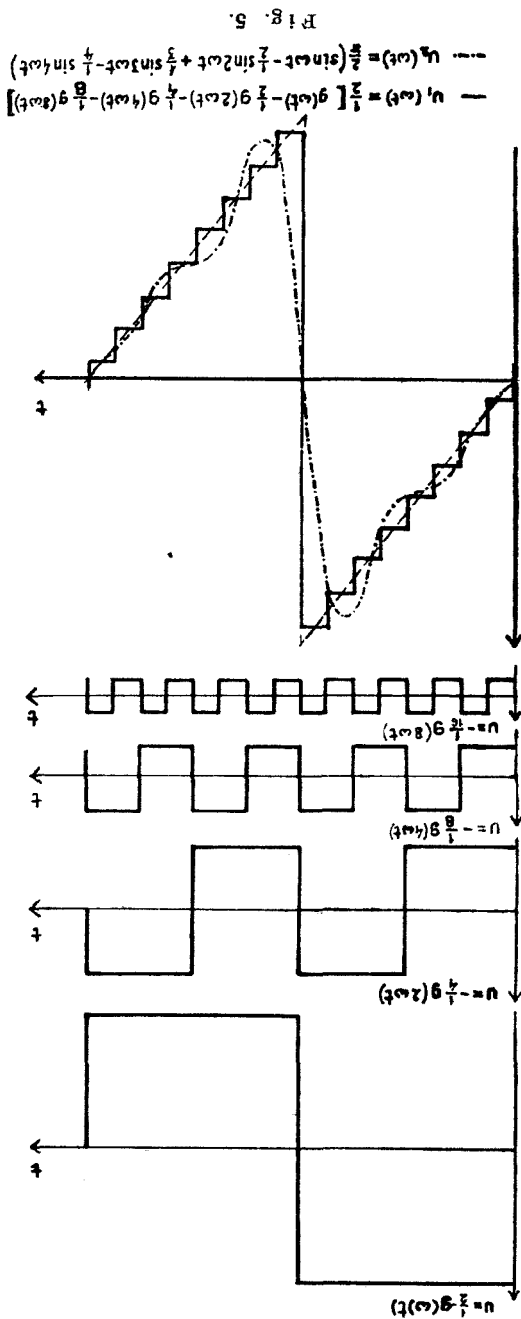
$$u(\omega t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sin \omega t}{1^2} - \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega t}{5^2} - \dots \right)$$

și rezultatul va fi

$$u(\omega t) = \frac{2}{\pi} g(\omega t) - \frac{8}{3^2\pi} g(3\omega t) + \frac{8}{5^2\pi} g(5\omega t) - \frac{17}{7^2\pi} g(7\omega t) - \dots$$

Pentru a compara rezultatele însumării componentelor sinusoidale respectiv dreptunghiulare, vom analiza grafic cazul tensiunii în dinți de ferăstrău. Putem observa (fig. 5) că rezultanta primilor patru termeni a dezvoltării în componente dreptunghiulare dă o aproximație mai bună decât însumarea primilor patru termeni sinusoidali. Abaterea maximă față de valoarea ideală nu întrece $\frac{1}{16}$ din amplitudinea pozitivă, adică 6%.

În concluzie se poate constata că compunerea tensiunilor cu o formă specială dintr-o serie a tensiunilor dreptunghiulare se oferă ca o posibilitate mai practică, chiar generală, care în unele condiții concrete dau o aproximație mai bună decât alte metode.



BIBLIOGRAFIE

1. Pereli I., „Electronic Engineering“, **31** (1959) nr. 373, p. 166.

СОСТАВЛЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

(Р е з ю м е)

На основании метода Перели, автору удалось выразить пилообразное и треугольное напряжение и последовательность прямоугольных импульсов при помощи ряда Фурье некоторых прямоугольных функций. Показано, что составление напряжений специальной формы ряда прямоугольных напряжений является более общей и практичной возможностью, дающей в некоторых конкретных условиях лучшую аппроксимацию, чем других методов.

THE COMPOSITION OF SOME UNSINUSOIDAL VOLTAGES FROM RECTANGULAR VOLTAGES

(S u m m a r y)

Using Pereli's method the author expresses the sawtooth voltage, the triangular voltage and a succession of the rectangular impulses through a Fourier series of some rectangular functions. It is shown that the composition of the voltages with a special form from a series of rectangular voltages appears, to be a more practical possibility — being even general — which in some actual conditions gives a better approximation than other methods.

RECENZII

Rezonanța electronică de spin. Descoperită după cel de-al doilea război mondial, rezonanța electronică de spin a devenit în zilele noastre un capitol important al fizicii moderne. Aplicațiile ei au depășit granițele fizicii și tehnicii electronice, ea folosindu-se chiar și în cercetările de chimie și biologie. Principiile teoretice și experimentale ale fenomenului de Rezonanță electronică de spin (RES) s-au dezvoltat foarte rapid și țara noastră există deja o activitate științifică bogată legată de aceste fenomene. Se simțea însă nevoia unei lucrări de sinteză care să redea nivelul actual, teoretic și experimental, al cercetărilor de RES precum și aplicațiile lui în diverse domenii din fizică electronică, chimie, biologi etc.

Lucrarea *Rezonanța electronică de spin* scrisă de prof. I. Ursu, membru corespondent al Academiei, apărută în Editura Academiei Republicii Socialiste România, vine să răspundă acestor cerințe. Ea își propune să aualizeze atât principiile generale fizice, teoretice ale fenomenului de RES (capitolele 1-7), cit și principii ale aplicații în diverse domenii (capitolele 8-14). În Anexe se dă, sub formă de tabele, un bogat material experimental precum și un rezumat al teoriei transformărilor de simetrie care se aplică în studiul nivelurilor de energie din corpul solid. Cartea se încheie cu un bogat material bibliografic, articole și monografii, din literatura universală și din literatura de specialitate din țara noastră.

În capitolele 1 și 2 se dau unele noțiuni fundamentale de mecanică cuantică și respectiv se face o prezentare generală a fenomenului RES.

Capitolul 3 tratează metodică experimentală a RES și principiile care stau la baza acestuia, în încheiere trecindu-se în revistă principalele tipuri de spectrometre RES.

Următoarele trei capitole (4-6) cuprind studiul teoretic amănunțit legat de tipurile de interacțiune care apar în cadrul fenomenului RES (cap. 4), forma liniei de rezonanță (cap. 5), la fel și studiul teoretic al fenomenelor de relaxare care au loc într-o substanță paramagnetică (cap. 6).

Prima parte a cărții (principiile teoretice și experimentale) se încheie cu capitolele 7 și 8 în care se expun fenomenele dublei rezonanțe (cap. 7) și se face o tratare amănunțită a spectrelor și a hamiltonienilor ionilor din grupele de tranziție în cristale ionice și soluții (cap. 8).

Partea a doua a cărții cuprinde un bogat material legat de aplicarea fenomenului RES în diferite domenii ale fizicii, electronicii, chimiei și biologiei. Începutul se face cu capitolul 9 în care se expune aplicarea metodei RES la studiul radicalilor liberi organici și anorganici. Tot aici se expun principalele teme ce se studiază cu metoda RES în biologie.

Capitolele 10, 11 și 12 se ocupă cu studiul RES în semiconductori, în metale și studiul centrilor de culoare. În aceste capitole se face și o analiză a semiconductoarelor, din

punct de vedere al stării lor energetice. Se tratează întreaga gamă de semiconductori cunoscuți pînă în prezent (cap. 10). În capitolul 11, se prezintă cercetările RES asupra metalelor și aliajelor. În capitolul referitor la centrele de culoare (cap. 12) se face o prezentare generală a diferitelor tipuri de centri de culoare și obținerea lor. Apoi se trece la studiul centrilor de culoare prin metoda RES.

În capitolul 13 sînt expuse aplicațiile metodei RES în cataliza heterogenă. Sînt tratați diferiții catalizatori care au fost studiați pe această cale.

Capitolul 14 cuprinde problema generatorilor și amplificatorilor cuantici, insistîndu-se în special asupra maserilor solizi.

Cartea este scrisă într-un stil foarte clar; figurile sînt executate cu foarte mare atenție. Editura Academiei s-a îngrijit să scoată cartea sub o formă care să reflecte conținutul.

Salutăm apariția acestei cărți care răspunde cu siguranță necesităților de studiu pentru studenți, aspiranți și cercetătorii din diferitele domenii amintite mai sus.

ALEXANDRU NICULA

Béla Sz. - Nagy, **Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions**. Cet ouvrage, destiné aux étudiants universitaires et présenté en traduction anglaise, est remarquable par ses qualités pédagogiques, clarté et simplicité de l'exposition, aussi bien que par l'ampleur des matières traitées. Une préoccupation constante de l'auteur est de rendre accessibles des théories qui ont généralement un caractère ardu et deviennent facilement fastidieuses pour le débutant, pour peu que l'on glisse vers l'abus des notions abstraites, sans justification suffisante dans l'immédiat. L'ouvrage présente les résultats fondamentaux les plus significatifs, que l'on a acquis dans la théorie des fonctions jusqu'à nos jours. Ce sont des connaissances qui doivent faire partie de la culture générale de tout mathématicien, vu leur grand inté-

rêt théorique et leur portée pour l'ensemble des sciences mathématiques.

L'ouvrage débute par une introduction qui retrace l'évolution historique de la notion de fonction et amène le lecteur à se poser d'une manière naturelle les problèmes de la nouvelle théorie: continuité, existence des dérivées, intégrale, représentation analytique et classification des fonctions.

Un premier chapitre pose les définitions et notations de base relatives aux ensembles, à leurs puissances, et à leur topologie dans un espace euclidien. L'ensemble triadique de Cantor, si utile pour exemplifier diverses propriétés des fonctions, est étudié avec des moyens aussi élémentaires que possible. Suit un chapitre sur les fonctions continues: notions fondamentales de limite, $\lim \sup$ et $\lim \inf$ d'une fonction, continuité, semi-continuité, continuité uniforme; convergence uniforme et quasi-uniforme des suites, continuité de la limite d'une suite, classification de R. Baire; approximation par polynômes (Weierstrass-Stone), prolongement des fonctions continues (Tietze); fonctions monotones et fonctions à variation bornée. Le chapitre suivant, différentiation, débute par l'exemple, dû à van der Waerden, d'une fonction continue sans dérivée, dont la démonstration occupe moins d'une page. Suit le théorème fondamental de Lebesgue sur la dérivabilité d'une fonction monotone, démontrée, suivant F. Riesz, par une méthode bien adaptée à l'enseignement. Le théorème de Fubini et le théorème de densité de Lebesgue préparent le lecteur au théorème de Denjoy-Young-Saks. Ici, de même qu'en d'autres endroits, des figures suggestives aident la compréhension des notions assez subtiles qui sont employées.

Le chapitre suivant, relatif à l'intégrale de Riemann, débute par les propriétés des fonctions d'intervalle, l'intégrale riemannienne étant ensuite présentée dans ce cadre, avec les critères d'intégrabilité de Riemann et Lebesgue. Problèmes de l'intégrale indéfinie et de la fonction primitive, avec les exemples nécessaires, et intégration des fonctions de

plusieurs variables. Suit le chapitre sur l'intégrale de Lebesgue, construite, suivant F. Riesz, par la méthode des fonctions en escalier; théorèmes fondamentaux de Lebesgue et Fatou; intégrale indéfinie et continuité absolue; les notions de fonction mesurable et d'ensemble mesurable sont présentées comme applications de l'intégrale mais le point de vue historique n'est pas ignoré, d'autant plus que les concepts de Lebesgue restent un modèle pour la théorie générale de la mesure, développée à notre époque. Ensembles de Borel, mesurabilité des fonctions de Baire, théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables dus à Egoroff et Lusin, intégrale des fonctions de deux variables. Le chapitre suivant traite de l'intégrale de Stieltjes et son application au calcul fonctionnel (théorème de Riesz); intégrale de Lebesgue-Stieltjes, notions sur l'intégrale de Radon; aperçus sur la théorie de l'intégrale et de la mesure dans les espaces abstraits. Au suivant chapitre

se place d'abord une étude assez complète de l'espace L^2 avec ses systèmes orthogonaux, suivie des applications aux séries trigonométriques, puis à d'autres systèmes orthogonaux (polynômes orthogonaux, systèmes de Haar, Rademacher). Notions de base sur les intégrales et transformations de Fourier. Le chapitre se termine par une étude de l'espace L et de ses fonctionnelles linéaires, et le concept d'espace de Banach. Le dernier chapitre donne une étude plus approfondie des séries de Fourier en utilisant les méthodes de sommation; avant d'arriver au théorème fondamental de L. Fejér, les résultats antérieurs (Dirichlet, Jordan) sont traités par les méthodes directes. Le volume se termine par l'exposition des méthodes de sommation avec application aux séries de Fourier. La plupart des paragraphes sont suivis d'exercices proposés au lecteur.

Acad. GEORGE CĂLUGĂREANU

AVIS AUX LECTEURS A L'ETRANGER

Afin de vous assurer un service prompt et régulier, il est recommandé de renouveler dès maintenant votre abonnement aux STUDIA UNIVERSITATIS BABES-BOLYAI.

Nous vous prions de vous adresser à cet effet, soit directement à CARTIMEX, P.O.B. 134-135 à BUCAREST (Roumanie), soit à une des maisons suivantes:

- | | |
|--|--|
| <p>ALBANIE — Ndermarja Shtetnore e Botimeve
TIRANA</p> <p>ALEMAGNE (République Démocratique)
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstrasse 16
LEIPZIG 701
(République Fédérale)
Kubon und Sagner
POB 68 — MÜNCHEN 34
W. E. Saarbach
POB 1510 — 6 KOLN</p> <p>AUTRICHE — „Globus“ Buchvertrieb
Salzgrles 16 — WIEN XX</p> <p>BELGIQUE — Librairie du Monde Entier
5, place St. Jean — BRUXELLES</p> <p>BULGARIE — Raznoisnos
1, rue Tzar Assan — SOFIA</p> <p>CHINE — Waiwen Studian
POB 88 — PEKING</p> <p>CORÉE (République Populaire Démocratique)
Chulphanmul
PYONGYANG</p> <p>CUBA — Cubartimpex
Calle Ermita 48 San Pedro — HABANA</p> <p>ESPAGNE — Libreria Herder
Calle de Balmos 26 — BARCELONA</p> <p>ÉTATS UNIS — Fam Book Service
69 Fifth Avenue Suite 8 F
NEW YORK 10003 N.Y.

Continental Publications
111, South Mermanee Ave.
ST. LOUIS Missouri 63105</p> <p>FINLANDE — Akateminen Kirjakauppa
POB 128 — HELSÜNKI</p> <p>FRANCE — Messageries de la Presse Parisienne
111, rue Réaumur — PARIS 2e</p> <p>GRANDE BRETAGNE — Collet's Holdings Ltd.
Denington Industrial Estate
WELLINGBOROUGH, Northants</p> | <p>HONGRIE — Kultúra
POB 149 — BUDAPEST 62</p> <p>ISRAËL — Haiflepac Ltd.
11 Arlosoroff Street — HAIFA
Lepac
15 Rambam Street — TEL AVIV</p> <p>ITALIE — So. Co. Lib. Ri. Export-Import
Piazza Margana 33 — ROMA</p> <p>JAPON — Nauka Ltd.
2 Kanda Zimbocho
2 Chome Kiyoda-ku — TOKYO</p> <p>MONGOLIE — Mongolgosknigtorg
ULAN BATOR</p> <p>NORVEGE — Norsk Bogimport
POB 3267 — OSLO</p> <p>PAYS-BAS — Moulenhoff
Beulingstraat 2 — AMSTERDAM</p> <p>POLOGNE — Ruch
ul. Wilcza 46 — WARSZAWA</p> <p>PORTUGAL — Libreria Bucholz
Av. da Liberdade — LISBOA</p> <p>SUEDE — D. C. Fritze
Fredgatan 2 — STOCKHOLM 16</p> <p>SUISSE — Pinkus et Cie
Froschaugasse 7 — ZURICH</p> <p>TCHÉCOSLOVAQUIE — Artia
Ve Smenkach 30 — PRAHA I</p> <p>U.R.S.S. — Mejdounarodnaia Kniga
MOSKVA G 200</p> <p>VIETNAM (République Démocratique)
So Xunt Nhap Khap Sach Bao
Hai Ba Trung 32 — HANOI</p> <p>YUGOSLAVIE — Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27 — BEOGRAD

Forum
Terazije 16/1 — BEOGRAD

Prosveta
I Vojvode Misica — NOVISAD</p> |
|--|--|