

451507

Ex. 3

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

BIBL. CENTR. UNIV. CLUJ
Nr. d. 515 1965

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1965

C L U J

În cel de al X-lea an de apariție (1965) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На X году издания (1965), *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями :

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur X-me année de publication (1965) les *Studia Universitatis, Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules)

491307

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

d. 515 - 65

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1965

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ—BOLYAI
Anul X 1965

REDACTOR ȘEF:

Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI:

Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, Prof. AL. ROȘCA, membru corespondent al Academiei,
Prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei.

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:

Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ,
Prof. D. V. IONESCU, Prof. V. MARIAN, Prof. GH. PIC,
Prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei.

Redacția:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu 1
Telefon 1—34—50

S U M A R — C O N T E N T S

GH. PIC, Despre o formulă combinatorică	7
I. GY. MAURER, M. SZILÁGYI, Despre convergența produselor înfinite de înite în inelele de endomorfisme ale unui grup abelian	17
I. TORSAN, Asupra limitării în modul a rădăcinilor ecuațiilor algebrice	25
V. CÎMPIAN, Relații între numerele cardinale atașate mulțimilor închise și funcționalelor continue definite pe un același spațiu topologic	31
M. DUTTA, L. DEBNATH, Solution of some partial differential equations by method of integral transform (Rezolvarea unor ecuații diferențiale cu ajutorul transformărilor integrale)	37
E. SCHIECHTER, Observații cu privire la metoda lui Ciaplighin pentru sisteme de ecuații	45
I. TODORAN, Asupra prezenței celui de-al treilea corp în sistemele <i>SW Cygni</i> , <i>Z Draconis</i> și <i>RT Persei</i>	51
A. TURCU, Asupra oscilațiilor subarmonice ale ecuației lui Duffing.	67
I. STAN, I. P. BELDIE, AL. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂȚAGĂ, Aparat pentru determinarea figurilor Chladni la plăcile de vioară	75
F. KELEMEN, A. NÉDA, O metodă de impuls de căldură pentru determinarea căldurii specifice a corpurilor solide	81
D. AUSLÄNDER, E. CONSTANTIN, Variația permitivității dielectrice în câmp ultrasonic în cazul unor alcooli primari (II)	89
R. V. DEUTSCH, L. BLÎNDU și M. CRISTEA, Fenomene electromagnetice în interiorul frontului undei de șoc slabe magnetohidrodinamice	93
I. POP, Unele proprietăți magnetice și structurale ale aliajelor de gadolinu-ceriu	101
A. BÓDI, P. CIOARĂ, Măsurarea pe cale absolută a concentrației de electroni neimperecheați cu metoda rezonanței electronice de spin	105
S. GOCAN, L. STĂNESCU, ȘT. MAN, Spectrele de absorbție în infraroșu și conductibilitatea electrică ale sistemului: $V_2O_5-B_2O_3-PbO$	109
E. DEZSŐ, Determinări privind proprietățile optice ale Cu_2S , Ag_2S și SnS_2	115
Z. GÁBOS, Contribuțiuni la studiul unor efecte de polarizare în cazul proceselor care au loc cu participarea unui singur electron.	123
FL. CONSTANTINESCU, Calculul statistic al susceptibilităților Bloch în cazul fenomenelor de rezonanță magnetică	133
I. URSU, A. NICULA, S. NISTOR, G. CRISTEA, RES a ionului Cu^{2+} în complecși cristalini de tipul MX_6 , parțial covalenți	139

Recenzii

Acad. prof. Gh. Călugăreanu, <i>Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă</i> (PETRU T. MOCANU)	147
D. V. Ionescu, <i>Ecuații diferențiale și integrale</i> (C. KALIK)	147

Cronică

Studiul unor proprietăți fizice ale catalizatorului nichel-trioxid de crom pentru reacția de schimb izotopic hidrogen-deuteriu (DĂNILĂ BARB)	149
Rezonanța electronică de spin a ionilor de cupru(II) și mangan (II) în substanțe policristaline (ALEXANDRU NICULA)	150
Ședințe de comunicări	151
Participări la manifestări științifice internaționale	151

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Г. ПИК, Об одной комбинаторной формуле	7
И. ДЬ. МАУРЕР, М. СИЛАДИ, О сходимости бесконечных произведений, определяемых в кольцах эндоморфизмов одной абелевой группы	17
И. ТОРСАН, Об ограничении модулей алгебраических уравнений	25
В. КЫМПЯН, Отношения между кардинальными числами, соответствующими замкнутым множествам и непрерывным функционалам, определенным на одном и том же топологическом пространстве	31
М. ДУТТА, Л. ДЕБНАТ, Решение дифференциальных уравнений при помощи интегральных преобразований	37
Э. ШЕХТЕР, О методе Чаплыгина для систем уравнений	45
И. ТОДОРАН, О присутствии третьего тела в системах $S W$ <i>Cygni</i> , <i>Z Draconis</i> и <i>R T Persei</i>	51
А. ТУРКУ, О подгармонических колебаниях уравнения Дuffинга	67
И. СТАН, И. П. БЕЛДИЕ, А. ТОТ, Т. ПЕНЧУК, Э. БЭЦАГЭ, Прибор для определения фигур Хладни у скрипичных пластинок	75
Ф. КЕЛЕМЕН, А. НЕДА, Метод теплового импульса для определения удельной теплоемкости твердых тел	81
Д. АУСЛЭНДЕР, Э. КОНСТАНТИН, Изменение диэлектрической проницаемости в ультразвуковом поле в случае первичных спиртов (II).	89
Р. В. ДОЙЧ, Л. БЛЫНДУ, М. КРИСТЯ, Электромагнитные явления внутри фронта слабой магнитогидродинамической ударной волны	93
И. ПОП, Некоторые магнитные и структурные свойства сплавов гадолиния - церия	101
А. БОДИ, П. ЧОАРЭ, Измерение абсолютным методом концентрации неспаренных электронов при помощи электронно - спинового резонанса	105
С. ГОКАН, Л. СТЭНЕСКУ, Ш. МАН, Спектры поглощения в ИК области и электропроводность системы $V_2O_5 - V_2O_3 - PbO$	109
Э. ДЕЖЕ, Определение оптических свойств Cu_2S , Ag_2S и SnS_2	115
З. ГАБОШ, К исследованию некоторых эффектов поляризации в случае процессов, происходящих с участием одного электрона	123
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, Статистическое исчисление восприимчивостей Блоха в случае явлений магнитного резонанса	133
И. УРСУ, А. НИКУЛА, С. НИСТОР, Г. КРИСТЯ, ЭПР иона Cu^{2+} в кристаллических частично ковалентных комплексах типа MX_6	139
Рецензии	147
Хроника	149

S O M M A I R E C O N T E N T S

GH. PIC, Sur une formule combinatoire	7
I. GY. MAURER, M. SZILÁGYI, Sur la convergence des produits infinis définis dans les anneaux d'endomorphismes d'un groupe abélien	17
I. TORSAN, Sur la limitation en module des racines des équations algébriques	25
V. CÎMPIAN, Relations entre les nombres cardinaux attachés aux ensembles fermés et aux fonctionnelles continues définies par un même espace topologique	31
M. DUTTA, L. DEBNATH, Solution of some partial differential equations by method of integral transform	37
R. SCHECHTER, Observations relatives à la méthode de Tchaplýguine pour les systèmes d'équations	45
I. TODORAN, Sur la présence du troisième corps dans les systèmes <i>SW Cygni</i> , <i>Z. Draconis</i> et <i>RT Persei</i>	51
A. TURCU, Sur les oscillations sous-harmoniques de l'équation de Duffing	67
I. STAN, I. P. BELDIE, AL. TÓTH, T. PENCUC, E. BĂȚAGĂ, Appareil pour la détermination des figures Chladni sur les plaques de violon	75
E. KELEMEN, A. NÉDA, Une méthode d'impulsion de chaleur pour la détermination de la chaleur spécifique des corps solides	81
D. AUSLÄNDER, E. CONSTANTIN, Variation de la permittivité diélectrique dans un champ ultrasonique dans le cas d'alcools primaires (II)	89
R. V. DEUTSCH, L. BIÎNDU, M. CRISTEA, Phénomènes électromagnétiques à l'intérieur du front de l'onde de choc magnéto-hydrodynamique faible	93
I. POP, De certaines propriétés magnétiques et structurales des alliages de gadolinium-cérium	101
A. BÓDI, P. CIOARĂ, Mesure absolue de la concentration en électrons noncouplés par la méthode de résonance électronique de spin	105
S. GOCAN, L. STĂNESCU, ȘT. MAN, Les spectres d'absorption dans l'infrarouge et la conductibilité électrique du système $V_2O_5 - B_2O_3 - PbO$	109
E. DEZSŐ, Détermination des propriétés optiques de Cu_2S , Ag_2S et SnS_2	115
Z. GÁBOS, Contribution à l'étude d'effets de polarisation dans le cas des processus qui ont lieu avec la participation d'un seul électron	123
FL. CONSTANTINESCU, Calcul statistique des susceptibilités Bloch dans le cas des phénomènes de résonance magnétique	133
I. URȘU, A. NICULA, S. NISTOR, G. CRISTEA, RES de l'ion Cu^{2+} dans des complexes cristallins du type MX_6 , partiellement covalents	139
Livres parus — Books	147
Chronique — Chronicle	149

DESPRE O FORMULĂ COMBINATORICĂ

de

GH. PIC

1. În anul 1867 a apărut la Nanking o carte a matematicianului chinez Li-Jen-Su în care este reproducă o formulă combinatorică cunoscută de mult de matematicienii chinezi și anume :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 C_{n+2k-j}^{2k} = \left(C_{n+k}^k \right)^2 \quad (1)$$

Nu s-a dat și nu se cunoaște calea pe care matematicienii chinezi au ajuns la acest rezultat.

După anul 1954 mai mulți matematicieni au dat o demonstrație a acestui rezultat ; prima a fost dată de P. Turán [10] care are și meritul de a fi atras atenția matematicienilor asupra acestei formule. Demonstrația lui P. Turán se bazează pe proprietăți ale polinoamelor lui Legendre. După P. Turán au mai dat demonstrații ale acestui rezultat L. Takács [9], J. Surányi [7], Hua-Loken, G. Huszár [2], L. Carlitz [1], J. Máthé [6]. De egalitatea (1) s-a ocupat începând din 1962 J. Kacuky [3], [4], [5] care a dat o nouă demonstrație și a indicat strînsa legătură ce există între ea și unele probleme ale calculului probabilităților.

În prezenta lucrare ne propunem să arătăm că (1) este un caz particular al unei egalități mai generale referitoare la funcțiile Gamma, care este dedusă folosindu-ne de polinoamele lui Jacobi. Se dă și o altă generalizare și anume egalitatea analogă care subsistă dacă în locul numărului C_n^k folosim un alt număr N_n^k care poate avea și legătură cu teoria grupurilor abeliene.

2. Vom începe prin a calcula în două moduri deosebite expresia :

$$A = \left\{ \frac{(z+x)^{\alpha+\beta}}{z^\alpha} \cdot \frac{d^n [z^{n+\alpha}(z+x)^{-n-\alpha-\beta-1}]}{dz^n} \right\}_{z=-1} \quad (2)$$

În aceste calcule vom folosi anumite dezvoltări în serie care subsistă în anumite condiții care nu vor fi indicate explicit, căci nu sînt esențiale pentru existența rezultatului stabilit.

Folosind regula lui Leibniz vom avea :

$$A = \left\{ \frac{(z+x)^{\alpha+\beta}}{z^\alpha} \sum_{h=0}^n C_n^h (n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(n+\alpha-h+1) z^{n+\alpha-h} \times \right. \\ \left. \times (-1)^{n+h} (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\dots(2n+\alpha+\beta-h)(z+x)^{2n-\alpha-\beta-h} \right\}_{z=-1} \\ = \sum_{h=0}^n C_n^h \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-h+1)} \cdot \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-h+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} (x-1)^{-2n+h-1}$$

și scriind în locul lui $n-h$ pe k

$$A = \sum_{h=0}^n C_n^h \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} (x-1)^{-n-k-1} \quad (3)$$

Pe de altă parte noi putem scrie pe A și sub forma :

$$A = \left\{ z^\beta \left(1 + \frac{x}{z}\right)^{\alpha+\beta} \right\}_{z=-1} \times \left\{ \frac{d^n}{dz^n} \left[\left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-n-\alpha-\beta-1} \frac{1}{z^{\beta+\alpha}} \right] \right\}_{z=-1}$$

luînd firește precauțiile necesare în ce privește determinarea aleasă pentru $(-1)^\beta$.

Dezvoltînd $\left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-n-\alpha-\beta-1}$ în serie avem :

$$\left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-n-\alpha-\beta-1} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{x}{z}\right)^h$$

și

$$\left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-n-\alpha-\beta-1} \frac{1}{z^{\beta+\alpha}} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{x^h}{z^{\beta+h+1}}$$

Derivînd de n ori deducem :

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{n+\alpha}(z+x)^{-n-\alpha-\beta-1}] = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \times \\ \times \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} \cdot \frac{x^h}{z^{n+\beta+h+1}}$$

și

$$\left\{ \frac{d^n}{dz^n} [z^{n+\alpha}(z+x)^{-n-\alpha-\beta-1}] \right\}_{z=-1} = \\ = - \frac{1}{k} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} x^h$$

unde $u = \{z^\beta\}_{z=-1}$. Avem totodată :

$$\frac{(z+x)^{\alpha+\beta}}{z^\alpha} = z^\beta \left(1 + \frac{x}{z}\right)^{\alpha+\beta} = z^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+\beta-j+1)} \left(\frac{x}{z}\right)^j$$

$$\left\{ \frac{(z+x)^{\alpha+\beta}}{z^\alpha} \right\}_{z=-1} = u \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+\beta-j+1)} x^j$$

Deci

$$A = - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+\beta-j+1)} x^j \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} x^h$$

și înmulțind cele două serii obținem a doua expresie pentru A :

$$A = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma(\alpha+\beta+h-k+1)} x^k \quad (4)$$

Expresia (3) a lui A se obține folosindu-ne și de polinoanele lui Jacobi și de unele rezultate indicate în cartea lui Szegő [8].

În baza unei cunoscute formule¹

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t-1}{2}\right)^k$$

Punînd $t = \frac{x+1}{x-1}$ vom avea $\frac{t-1}{2} = \frac{1}{x-1}$ și deci

$$(x-1)^n P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} (x-1)^{n-k}$$

și deci ținînd seamă și de (3)

$$(x-1)^n P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{(x-1)^{2n+1}}{n!} A \quad (5)$$

Dar în baza formulei (4, 3,1) din cartea lui Szegő

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{1}{2^n n! (t-1)^\alpha (t+1)^\beta} \frac{d^n [(t-1)^{n+\alpha} (t+1)^{n+\beta}]}{dt^n}$$

¹ Vezi [8] formula (4, 21, 2).

Deci aplicând regula lui Leibniz deducem :

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(t) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \beta - k + 1)} (t-1)^k (t+1)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{t-1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \beta - k + 1)} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

Substituind $x = \frac{t+1}{t-1}$ avem

$$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1}{n! (x-1)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \beta - k + 1)} x^{n-k}$$

și schimbând $n - k$ cu k

$$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1}{n! (x-1)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - k + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(k + \beta + 1)} x^k$$

Introducând această expresie a lui $P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ în (5) iar pentru A expresia (4) deducem :

$$\begin{aligned} &(1-x)^{-(2n+1)} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - k + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(k + \beta + 1)} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + h + 1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + h + 1)}{\Gamma(\beta + h + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma(\alpha + \beta + h - k + 1)} x^k \end{aligned}$$

Dezvoltînd $(1-x)^{-(2n+1)}$ în serie și înmulțind cele două dezvoltări obținem că prima parte a egalității de mai sus este

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k C_n^k C_{2n+k-h}^{2n} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - h + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + h + 1)} x^k$$

și egalînd coeficientul lui x^k din ambele părți ale egalității astfel stabilite obținem :

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^k C_n^k C_{2n+k-h}^{2n} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - h + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + h + 1)} = \\ &= \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + h + 1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \cdot \frac{\Gamma(n + \beta + h + 1)}{\Gamma(\beta + h + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma(\alpha + \beta + h - k + 1)} \end{aligned}$$

care constituie generalizarea relației (1) în care firește pentru α și β se impun restricții datorită faptului că $\Gamma(z)$ are pe $0, -1, -2, \dots$ ca poli.

3. Vom stabili în cele ce urmează o egalitate analogă cu (1) pentru numerele

$$N_n^k = \frac{(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p-1)(p^2 - 1) \dots (p^k - 1)} \quad n \geq k > 0 \quad N_n^k = 0 \text{ dacă } n < k \quad (6)$$

În cazul particular când p este un număr prim N_n^k nu este altceva decît numărul subgroupurilor de ordin p^k al grupului abelian elementar $(1, 1, \dots, 1)$ care are n componente. Numerele N_n^k se bucură de o serie de proprietăți analoge cu cele ale numerelor C_n^k . Vom stabili în cele ce urmează unele din ele.

Pentru simplificarea scrisului vom nota

$$[k]! = (p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \dots (p - 1)$$

Cu ajutorul acestei notații N_n^k se va putea scrie :

$$N_n^k = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} p^{C_2^k} \quad (7)$$

Aceasta ne arată că

$$p^{C_{n-k}^2} N_n^k = p^{C_k^2} N_n^{n-k} \quad (8)$$

Totodată

$$\begin{aligned} N_n^j N_{n-j}^{s-j} &= p^{C_j^2} \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} p^{C_{s-j}^2} \frac{[n-j]!}{[s-j]![n-s]!} = p^{C_j^2 + C_{s-j}^2} \frac{[n]!}{[j]![s-j]![n-s]!} = \\ &= p^{C_s^2} \frac{[n]!}{[s]![n-s]!} \cdot p^{C_j^2} \frac{[s]!}{[j]![s-j]!} p^{C_{s-j}^2 - C_s^2} \end{aligned}$$

Deci folosindu-ne din nou de (7).

$$N_n^j N_{n-j}^{s-j} = p^{C_s^2 - j - C_s^2} N_n^s N_s^j \quad (9)$$

se verifică imediat prin calcul că

$$N_{n+1}^k = p^k N_n^k + p^{k-1} N_n^{k-1}$$

și plecînd de aici prin inducție completă

$$N_{n+1}^k = \sum_{j=0}^l p^{l(k-j)} N_l^j N_{n-l+1}^{k-j} \quad (10)$$

Se mai pot stabili și alte formule, de exemplu una analogă cu formula binomului, dar ne-am mărginit aici la cele pe care le vom folosi în cele ce urmează.

Ne propunem să calculăm următoarea sumă :

$$S = \sum_{j=0}^k N_l^j N_n^j N_{n+k+l-j}^{k-j} p^{kj - C_j^2}$$

Ținând seamă de (10):

$$S = \sum_{j=0}^k N_l^j N_n^j \sum_{h=0}^{k-j} N_{k+l}^h N_{n-j}^{k-j-h} p^{kj+(k+l)(k-j-h)-C_j^2}$$

căci prin definiție N_{n-j}^{k-j-h} este egal cu zero pentru $h > k - j$. Schimbînd ordinea însumării și notînd pe urmă $k - h = s$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{h=0}^k N_{k+l}^h \sum_{j=0}^{k-h} N_l^j N_n^j N_{n-j}^{k-j-h} p^{kj+(k+l)(k-j-h)-C_j^2} = \\ &= \sum_{s=0}^k N_{k+l}^{k-s} \sum_{j=0}^s N_l^j N_n^j N_{n-j}^{s-j} p^{kj+(k+l)(s-j)-C_j^2} \end{aligned}$$

și aplicînd pe rînd formula (9), (8) și (10)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{s=0}^k N_{k+l}^{k-s} \sum_{j=0}^s N_l^j N_n^s N_j^j p^{kj+(k+l)(s-j)-C_j^2 + C_{s-j}^2 - C_s^2} = \\ &= \sum_{s=0}^k N_{k+l}^{k-s} N_n^s \sum_{j=0}^s N_l^j N_s^{s-j} p^{kj+(k+l)(s-j)-C_s^2} = \\ &= \sum_{s=0}^k N_{k+l}^{k-s} N_n^s N_{l+s}^s p^{ks-C_s^2} \end{aligned}$$

Aplicînd din nou formula (9) vom avea :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{s=0}^k N_{k+l}^k N_k^{k-s} N_n^s p^{ks-C_k^2} = \\ &= N_{k+l}^k \sum_{s=0}^k N_k^{k-s} N_n^s p^{ks-C_k^2} = N_{k+l}^k N_{k+n}^k p^{-C_k^2} \end{aligned}$$

și astfel am stabilit că :

$$\sum_{j=0}^k N_l^j N_n^j N_{n+k+l-j}^{k-j} p^{kj-C_j^2} = N_{k+l}^k N_{k+n}^k p^{-C_k^2} \quad (11)$$

Plecînd de la acest rezultat se poate stabili formula corespunzătoare lui (1) și alte care corespund unor rezultate stabilite de Surányi și Huszár.

Punînd $k = l$ vom avea

$$\sum_{j=0}^k N_k^j N_n^j N_{n+2k-j}^{k-j} p^{kj-C_j^2} = N_{2k}^k N_{k+n}^k p^{-C_k^2}$$

care corespunde unui rezultat stabilit de Huszár [2].

Folosind expresia (7) deducem că

$$\begin{aligned} & \frac{[k]![n+k]!}{[n]![2k]!} \sum_{j=0}^k N_k^j N_n^j N_{n+2k-j}^{k-j} = \\ &= \sum_{j=0}^k N_k^j \frac{[k]!}{[j]![k-j]!} p_j^{C_j^2} \frac{[n+2k-j]}{[2k]![n-j]!} p^{C_{k-j}^2} p^{kj-C_j^2} = \\ &= \sum_{j=0}^k N_k^j N_k^j N_{n+2k-j}^{2k} p^{C_{k-j}^2 - C_{2k}^2 + kj - C_j^2} \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\frac{[k]![n+k]!}{[n]![2k]!} N_{2k}^k N_{k+n}^k p^{-C_k^2} = (N_{n+k}^k)^2 p^{-C_k^2}$$

și deci am ajuns la egalitatea

$$\sum_{j=0}^k (N_k^j)^2 N_{n+2k-j}^{2k} p^{C_{k-j}^2 + kj - C_j^2} = (N_{n+k}^k)^2 p^{C_{2k}^2 - C_k^2}$$

care corespunde formulei (1).

Din formula (II) putem deduce și o egalitate care corespunde unei formule stabilită de Surányi [7]. Avem :

$$\begin{aligned} & \frac{[k]![n+l]!}{[n]![k+l]!} N_l^j N_n^j N_{n+k+l-j}^{k-j} p^{kj-C_j^2} = \\ &= N_l^j \frac{[k]!}{[j]![k-j]!} p_j^{C_j^2} \frac{[n+k+l-j]}{[k+l]![n-j]!} p^{C_{k-j}^2 + kj - C_j^2} = \\ &= N_l^j N_k^j N_{n+k+l-j}^{k+l} p^{C_{k+j}^2 + kj - C_j^2 - C_{k+l}^2} \end{aligned}$$

Totodată

$$\frac{[k]![n+l]!}{[n]![k+l]!} N_{k+l}^k N_{k+n}^k p^{-C_k^2} = N_{k+l}^l N_{k+k}^k p^{-C_l^2}$$

și deci :

$$\sum_{j=0}^k N_l^j N_k^j N_{n+k+l-j}^{k+l} p^{C_{k-j}^2 + kj - C_j^2} = N_{n+l}^l N_{n+k}^k p^{C_{k+l}^2 - C_l^2}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] L. Carlitz, *On a Problem of the History of Chinese Mathematics*, Matematikai Lapok, **6** (1955), pp. 219–20.
- [2] G. Huszár, *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok, **6** (1955), pp. 36–38.
- [3] J. Kaucký, *Poznámka k jednomu článku P. Turána*, Matematicko fyzikálny časopis, **12** (1962), pp. 212–215.

- [4] J. K a u c k y, *O jednom problemu z dejin cinské matematiky*. Matematicko-fyzikální casopis, **13** (1963), pp. 32–39.
- [5] J. K a u c k y, *Une nouvelle démonstration élémentaire de la formule combinatoire de Li Jen-Shu*. Matematicko-fyzikální casopis, **14** (1964), pp. 50–52.
- [6] J. M á t h é, *A kínai matematika történetének egy problémájáról*. Matematikai Lapok, **7** (1956), pp. 112–113.
- [7] J. S u r á n y i, *Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához*. Matematikai Lapok, **6** (1955) pp. 30–35.
- [8] G. S z e g ő, *Orthogonal Polynomials*, New-York, 1959.
- [9] L. T a k á c s, *Megjegyzések Turán Pál „A kínai matematika történetének egy problémájáról” című dolgozatához*. Matematikai Lapok, **6** (1955), pp. 27–29.
- [10] P. T u r á n, *A kínai matematika történetének egy problémájáról*. Matematikai Lapok, **5** (1954), pp. 1–6.

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ФОРМУЛЕ

(Резюме)

Возобновляется изучение одной формулы древней китайской математики, снова найденной и доказанной П. Тураном (10). Автор показывает, используя определенные свойства многочленов Якоби, что имеет место более общее равенство, а именно:

$$\sum_{h=0}^k C_n^h C_{2n+k-h}^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-h+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} =$$

$$= \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma(\alpha+\beta+h-k+1)}$$

Затем рассматриваются числа

$$N_n^k = \frac{(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{k-1})}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^k-1)}$$

где p — простое число. Число N_n^k равно числу подгрупп порядка p^k элементарной абелевой группы $(1, 1, \dots, 1)$, имеющей n компонентов. Показывается, что

$$\sum_{j=0}^n (N_n^j)^2 N_{n+2k-j}^{2k} p^{C_{k-j}^2 + kj - C_j^2} = (N_{n+k}^k)^2 p^{C_{2k}^2 - C_k^2}$$

который соответствует формуле Турана. Доказываются и другие формулы, подобные тем, найденным Шурани [7] или Хусаром [2].

SUR UNE FORMULE COMBINATOIRE

(Résumé)

L'auteur reprend une ancienne formule mathématique chinoise, retrouvée et démontrée par P. Turán [10]. Il montre, en utilisant certaines propriétés des polynômes de Jacobi, qu'une égalité plus générale a lieu, à savoir :

$$\sum_{h=0}^k C_n^h C_{2n+k-h}^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-h+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} =$$

$$= \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+h+1)}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+h+1)}{\Gamma(\beta+h+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma(\alpha+\beta+h-k+1)}$$

On considère ensuite les nombres

$$N_n^k = \frac{(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p - 1)(p^2 - 1) \dots (p^k - 1)}$$

où p est un nombre premier. Le nombre N_n^k est égal au nombre de sous-groupes d'ordre p^k du groupe abélien élémentaire $(1, 1, \dots, 1)$ ayant n composantes. On montre que

$$\sum_{j=0}^n (N_k^j)^2 N_{n+2k-j}^{2k} p^{C_{k-j}^2 + kj - C_j^2} = (N_{n+k}^k)^2 p^{C_{2k}^2 - C_k^2}$$

qui correspond à la formule de Turán. On démontre aussi d'autres formules semblables à celles trouvées par Surányi [7] ou Huszár [2].

DESPRE CONVERGENȚA PRODUSELOR INFINITE DEFINITE ÎN INELELE DE ENDOMORFISME ALE UNUI GRUP ABELIAN

de

I. GY. MAURER și M. SZILÁGYI

Fie G un grup abelian oarecare și $E(G)$ inelul complet al endomorfismelor lui G . Elementele lui G vor fi notate cu litere latine, endomorfismele și în general aplicațiile lui G în G cu litere grecești. Operația în G se va numi adunare, aplicațiile lui G în G se folosesc ca și operatori la dreapta.

Se poate introduce în spațiul $E(G)$ o topologie pe baza următoarei noțiuni de convergență [1]:

Șirul $\{\alpha_r\}$ de endomorfisme $\alpha_r \in E(G)$ are ca limită pe $\alpha \in E(G)$ atunci și numai atunci, dacă pentru orice $x \in G$ există un număr natural R_x , astfel ca să avem $x\alpha_r = x\alpha$ pentru $r > R_x$. În acest caz zicem că $\{\alpha_r\}$ este convergent și scriem: $\alpha_r \rightarrow \alpha$.

În [2] s-a introdus noțiunea de produs infinit de endomorfisme în felul următor:

Numim produs infinit $\prod_{r=1}^{\infty} \alpha_r$ (notat mai scurt $\Pi \alpha_r$) șirul $\{\sigma_r\}$ format din elementele șirului $\{\alpha_r\}$ după formula de recurență $\sigma_r = \sigma_{r-1} \cdot \alpha_r$ ($r = 1, 2, \dots$), unde $\sigma_0 = \varepsilon$ reprezintă elementul unitate al lui $E(G)$.

Zicem că produsul $\Pi \alpha_r$ este convergent atunci și numai atunci, dacă șirul $\{\sigma_r\}$ este convergent. Dacă $\sigma_r \rightarrow \sigma$, atunci zicem că σ este valoarea produsului infinit considerat.

S-a dedus în [2] următoarea condiție necesară și suficientă pentru convergența produselor infinite:

Produsul $\Pi \alpha_r$ este atunci și numai atunci convergent, dacă pentru orice $x \in G$ există un număr natural R_x , astfel ca să avem pentru $r > R_x$: $x(\sigma_{R_x})\alpha_r = x\sigma_{R_x}$

Avînd în vedere că operația de înmulțire definită în $E(G)$ nu este comutativă, rezultă că convergența unui produs infinit depinde în general de ordinea factorilor. Vom zice că produsul este *necondiționat convergent*, dacă convergența și valoarea produsului este independentă de ordinea factorilor produsului. În nota de față vom studia produse necondiționat convergente. Pentru acest studiu avem nevoie de generalizarea noțiunii de convergență în sensul următor:

DEFINIȚIA 1. Fie H o submulțime oarecare a grupului G . Numim limită relativă la H a șirului $\{\alpha_r\}$, unde $\alpha_r \in E(G)$, o aplicație univocă α a lui $H \subseteq G$ în G , care se bucură de proprietatea: pentru orice $x \in H$ există un număr natural R_x astfel încît $x\alpha_r = x\alpha$ dacă $r > R_x$. În acest caz zicem că șirul converge pe H și scriem: $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha$.

TEOREMA 1. Șirul $\{\alpha_r\}$ ($\alpha_r \in E(G)$) este atunci și numai atunci convergent pe $H \subseteq G$, dacă pentru orice $x \in H$ există un număr natural R_x în așa fel ca pentru $r_1, r_2 > R_x$ să subziste egalitatea $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$.

Demonstrație. Din convergența pe H a șirului $\{\alpha_r\}$, rezultă că pentru orice $x \in H$ și pentru orice $r_1, r_2 > R_x$, avem $x\alpha_{r_1} = x\alpha$ și $x\alpha_{r_2} = x\alpha$, deci $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$.

Să presupunem acum condiția îndeplinită. Rezultă că $x\alpha_{r_1} = x\alpha_{r_2}$ pentru $r_1, r_2 > R_x$. Fie $g_x = x\alpha_{r_1} = x\alpha_{r_2} \in G$. Definim o aplicație $\alpha: H \rightarrow G$ în felul următor: $x\alpha = g_x$ pentru orice $x \in H$. Din construcția lui α , rezultă că α este o aplicație univocă a lui H în G și că $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha$.

Din definiția 1 rezultă imediat

TEOREMA 2. Dacă H și K sînt două submulțimi ale lui G , astfel că $H \subseteq K \subseteq G$, atunci din $\alpha_r \xrightarrow{K} \alpha_K$ rezultă convergența pe H a șirului $\{\alpha_r\}$ și dacă $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha_H$, atunci $\alpha_K = \alpha_H$ pe mulțimea H .

TEOREMA 3. Dacă șirul $\{\alpha_r\}$ este convergent pe subgrupul $G' \subseteq G$ și $\alpha_r \xrightarrow{G'} \alpha$, atunci α este o aplicație omomorfă a lui G' în G .

Demonstrație. Fie x și y două elemente oarecare alui G' . Deoarece G' este un subgrup al lui G , rezultă că $x + y \in G'$. Din $\alpha_r \xrightarrow{G'} \alpha$, rezultă existența unor numere naturale R_x, R_y, R_{x+y} astfel ca să avem pentru $r > \max(R_x, R_y, R_{x+y})$ egalitățile: $x\alpha_r = x\alpha$, $y\alpha_r = y\alpha$, $(x + y)\alpha_r = (x + y)\alpha$. Dar $\alpha_r \in E(G)$, deci $(x + y)\alpha_r = x\alpha_r + y\alpha_r$, și astfel: $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$.

COROLAR. Dacă $G' = G$, atunci $\alpha \in E(G)$.

DEFINIȚIA 2. Produsul infinit $\prod \alpha_r$ ($\alpha_r \in E(G)$) este convergent pe o submulțime $H \subseteq G$, atunci și numai atunci, dacă șirul $\{\sigma_r\}$ al produselor parțiale este convergent pe H . Dacă $\sigma_r \rightarrow \alpha$, atunci zicem că α este valoarea relativă la H a lui $\prod \alpha_r$ și scriem: $\prod \alpha_r = \alpha(H)$.

DEFINIȚIA 3. Produsul infinit $\prod \alpha_r$ ($\alpha_r \in E(G)$) este necondiționat convergent pe o submulțime $H \subseteq G$ atunci și numai atunci dacă $\prod \alpha_r$ este convergent pe H și are aceeași valoare relativă la H pentru orice ordine a factorilor săi.

LEMA 1. Dacă factorii produsului $\prod \alpha_r$ sînt automorfisme ale lui G și $\prod \alpha_r = \alpha(G)$, atunci α este un automorfism al lui G .

Demonstrație. Din $\prod \alpha_r = \alpha(G)$ rezultă că $\sigma_r \xrightarrow{G} \alpha$. Pe baza corolarului teoremei 3, $\alpha \in E(G)$, deci trebuie să arătăm că dacă $x, y \in G$ și $x \neq y$ atunci $x\alpha \neq y\alpha$. Din condiția $\sigma_r \xrightarrow{G} \alpha$ rezultă existența unor numere naturale R_x, R_y astfel încît $x\sigma_r = x\alpha$ și $y\sigma_r = y\alpha$ pentru $r > \max(R_x, R_y)$. Avînd în vedere că $\sigma_r = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_r$ este un automorfism al lui G , rezultă că $x\sigma_r \neq y\sigma_r$. Deci $x\alpha \neq y\alpha$.

TEOREMA 4. Fie $\Pi \alpha_r$ un produs convergent pe G și α_r ($r = 1, 2, \dots$) automorfisme ale lui G . Produsul $\Pi \alpha_r$ este necondițional convergent pe G atunci și numai atunci, dacă factorii săi sînt comutativi doi cîte doi.

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie $\Pi \alpha_r$ necondițional convergent pe G și $\Pi \alpha_r = \alpha(G)$. Considerăm doi factori arbitrari α_i și α_j ai produsului și formăm produsele $\alpha_i \alpha_j \Pi_{ij}$ și $\alpha_j \alpha_i \Pi_{ij}$, unde Π_{ij} reprezintă produsul obținut din $\Pi \alpha_r$ prin suprimarea factorilor α_i și α_j . Conform ipotezei avem $\alpha_i \alpha_j \Pi_{ij} = \alpha$ și $\alpha_j \alpha_i \Pi_{ij} = \alpha$.

Demonstrăm că π este convergent pe G . Presupunem contrariul. Atunci conform teoremei 1 există un element $x' \in G$ pentru care nu putem găsi nici un număr natural R'_x , astfel ca să avem $x'(\sigma'_{r_1} - \sigma'_{r_1}) = 0$ dacă $r'_1, r'_2 > R'_x$. Observăm că se notează cu σ'_r un produs parțial de rangul r al produsului Π_{ij} . Avînd în vedere că $\alpha_i \alpha_j$ este un automorfism al lui G , există un singur element $x \in G$ pentru care $x(\alpha_i \alpha_j) = x'$. Deoarece produsul $\Pi \alpha_r = \alpha_i \alpha_j \Pi_{ij}$ este convergent pe G , rezultă existența unui R_x astfel că pentru $r_1, r_2 > R_x$ subzistă egalitatea $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, unde σ_r reprezintă produsul parțial de rangul r al lui $\alpha_i \alpha_j \Pi_{ij}$. Astfel avem: $\sigma_{r_1} = \alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_1}$ respectiv $\sigma_{r_2} = \alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_2}$, unde $r'_1 = r_1 - 2$ respectiv $r'_2 = r_2 - 2$. Deci dacă $r'_1, r'_2 > R'_x := R_x - 2$, atunci

$$\begin{aligned} x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) &= x(\alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_1} - \alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_2}) = x(\alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_1}) - x(\alpha_i \alpha_j \sigma'_{r_2}) = \\ &= [x(\alpha_i \alpha_j)] \sigma'_{r_1} - [x(\alpha_i \alpha_j)] \sigma'_{r_2} = x' \sigma'_{r_1} - x' \sigma'_{r_2} = x'(\sigma'_{r_1} - \sigma'_{r_2}). \end{aligned}$$

Deoarece pentru $r_1, r_2 > R_x$ subzistă egalitatea $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, rezultă pentru $r'_1, r'_2 > R'_x = R_x - 2$ egalitatea $x'(\sigma'_{r_1} - \sigma'_{r_2}) = 0$, ceea ce reprezintă o contradicție.

Deoarece factorii produsului Π_{ij} sînt automorfisme ale lui G și Π_{ij} este convergent pe G , rezultă conform lemei 1 că $\Pi_{ij} = \beta(G)$ este un automorfism al lui G . Deci egalitatea $\alpha_i \alpha_j \beta = \alpha_j \alpha_i \beta$, care rezultă din $\alpha_i \alpha_j \beta = \alpha$ și $\alpha_j \alpha_i \beta = \alpha$, poate fi înmulțită cu β^{-1} și astfel obținem: $\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i$.

Condiția este suficientă. Presupunem că factorii produsului convergent pe G sînt comutativi doi cîte doi și fie $\Pi \alpha_r = \alpha(G)$. Rezultă că pentru orice $x \in G$ există un R_x astfel ca să avem $x\sigma_r = x\alpha$ pentru $r > R_x$. Fie $\Pi \alpha'_r$ acel produs, care se obține din $\Pi \alpha_r$ printr-o permutare oarecare a factorilor produsului $\Pi \alpha_r$. Notăm cu r_1, r_2, \dots, r_{R_x} indicii factorilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{R_x}$ ai produsului $\Pi \alpha_r$ în produsul $\Pi \alpha'_r$ și fie $R'_x = \max(r_1, r_2, \dots, r_{R_x})$. Avem evident $R'_x \geq R_x$, deci pentru $r > R'_x$ subzistă egalitatea $x\sigma_r = x\alpha$. Folosind condiția de comutativitate a factorilor putem scrie pentru orice $x \in G$ și $r > R'_x$: $x\sigma'_r = x(\sigma_{R'_x} \alpha_{R'_x+1} \dots \alpha_r) = x\alpha_r$. Deci $\Pi \alpha'_r = \alpha(G)$.

Observație. La demonstrarea suficienței condiției nu s-a folosit condiția ca factorii produsului să fie automorfisme. Deci este valabilă

următoarea afirmație: Dacă factorii produsului $\prod_{z_r} [z_r \in E(G)]$, convergent pe G , sint comutativi doi cîte doi, atunci \prod_{z_r} este un produs necondiționat convergent pe G .

În cele ce urmează vom examina anumite condiții în cadrul cărora comutativitatea factorilor constituie o condiție necesară și suficientă pentru convergența necondiționată a produsului. Prealabil vom preciza un lucru. Fie $\alpha \in E(G)$, $G\alpha$ imaginea lui G în α și β o aplicație omomorfă în G a unui subgrup G' pentru care $G\alpha \subseteq G'$. Atunci produsul $\alpha\beta$ definit în felul obișnuit $[x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ pentru orice $x \in G$] are sens și $\alpha\beta \in E(G)$. Dacă deci $\alpha_1, \alpha_2 \in E(G)$ și $G\alpha_1 = G\alpha_2 = G'$, atunci avînd în vedere că $G(\alpha_1 - \alpha_2) \subseteq G'$, rezultă că produsul $(\alpha_1 - \alpha_2)\beta$ are sens și $(\alpha_1 - \alpha_2)\beta \in E(G)$.

LEMMA 2. Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in E(G)$, $G\alpha_1 = G\alpha_2 = G'$ și β o aplicație omomorfă a lui G' în G . Atunci pentru orice $x \in G$ are loc egalitatea: $x[(\alpha_1 - \alpha_2)\beta] = x(\alpha_1\beta) - x(\alpha_2\beta)$.

Demonstrație. Fie $x\alpha_1 = x' \in G'$, $x\alpha_2 = x'' \in G'$. Atunci avem: $x[(\alpha_1 - \alpha_2)\beta] = [x(\alpha_1 - \alpha_2)]\beta = (x\alpha_1 - x\alpha_2)\beta = (x' - x'')\beta = x'\beta - x''\beta$ și $x(\alpha_1\beta) - x(\alpha_2\beta) = (x\alpha_1)\beta - (x\alpha_2)\beta = x'\beta - x''\beta$.

Comparînd cele două egalități, rezultă afirmația lemei.

TEOREMA 5. Fie \prod_{z_r} un produs convergent pe G și $\alpha_r \in E(G)$ ($r = 1, 2, \dots$). Dacă 1° într-o anumită ordine a factorilor $\prod_{z_r} = \alpha(G)$ este un element regular la stînga al lui $E(G)$, 2°. $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ ($i, j = 1, 2, \dots$) și 3° $[G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)] \alpha_i\alpha_j \subseteq G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots$), atunci condiția necesară și suficientă pentru convergența necondiționată pe G a lui \prod_{z_r} constă în comutativitatea doi cîte doi a factorilor produsului.

Demonstrație. Conform observației făcute la sfîrșitul teoremei 4 este suficient să se arate necesitatea condiției. Fie \prod_{z_r} necondiționat convergent pe G și α_i, α_j doi factori ai acestui produs. Considerăm produsele $\alpha_i\alpha_j\prod_{ij}$ și $\alpha_j\alpha_i\prod_{ij}$, unde \prod_{ij} reprezintă produsul obținut din \prod_{z_r} prin suprimarea factorilor α_i și α_j . Conform ipotezei avem $\alpha_i\alpha_j\prod_{ij} = \alpha$ și $\alpha_j\alpha_i\prod_{ij} = \alpha$.

Demonstrăm că \prod_{ij} este convergent pe subgrupul $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ al grupului G . Presupunem contrariul. Atunci conform teoremei I există un element $x' \in G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ pentru care nu putem găsi nici un număr natural $R_{x'}$, astfel ca să avem $x'(\sigma'_{r_1} - \sigma'_{r_2}) = 0$ dacă $r_1, r_2 > R_{x'}$. Observăm că se notează cu σ'_r un produs parțial de rangul r al produsului \prod_{ij} . Deoarece $x' \in G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$, există un element $x \in G$ pentru care $x(\alpha_i\alpha_j) = x'$. Deoarece produsul $\prod_{z_r} = \alpha_i\alpha_j\prod_{ij}$ este convergent pe G , rezultă existența unui R_x astfel că pentru $r_1, r_2 > R_x$ subzistă egalitatea $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, unde σ_r reprezintă produsul parțial de rangul r al lui $\alpha_i\alpha_j\prod_{ij}$. Astfel avem: $\sigma_{r_1} = \alpha_i\alpha_j\sigma'_{r_1}$ respectiv $\sigma_{r_2} = \alpha_i\alpha_j\sigma'_{r_2}$, unde $r'_1 = r_1 - 2$ respectiv $r'_2 = r_2 - 2$. Deci dacă $r'_1, r'_2 > R_{x'} = R_x - 2$, atunci:

$$\begin{aligned} x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) &= x(\alpha_i\alpha_j\sigma'_{r_1} - \alpha_i\alpha_j\sigma'_{r_2}) = x(\alpha_i\alpha_j\sigma'_{r'_1}) - x(\alpha_i\alpha_j\sigma'_{r'_2}) = \\ &= [x(\alpha_i\alpha_j)]\sigma'_{r'_1} - [x(\alpha_i\alpha_j)]\sigma'_{r'_2} = x'\sigma'_{r'_1} - x'\sigma'_{r'_2} = x'(\sigma'_{r'_1} - \sigma'_{r'_2}). \end{aligned}$$

Deoarece pentru $r_1, r_2 > R_x$ subzistă egalitatea $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, rezultă pentru $r'_1, r'_2 > R'_x = R_x - 2$ egalitatea $x'(\sigma'_{r'_1} - \sigma'_{r'_2}) = 0$, ceea ce reprezintă o contradicție.

Deoarece Π_{ij} este un produs convergent pe subgrupul $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ al lui G , rezultă conform teoremei, 3, că $\Pi_{ij} = \beta(G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i)$ este o aplicație omomorfă a lui $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ în G . Pe de altă parte din egalitățile $\alpha_i\alpha_j\beta = \alpha$ și $\alpha_j\alpha_i\beta = \alpha$ rezultă pentru orice $x \in G$: $x(\alpha_i\alpha_j\beta) - x(\alpha_j\alpha_i\beta) = 0$. De aici deducem pe baza lemei 2 egalitatea $x[(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)\beta] = 0$ pentru orice $x \in G$. Dacă deci pentru prescurtare se introduce notația $\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = \gamma$, atunci avem $x(\gamma\beta) = 0$ pentru orice $x \in G$. Avînd în vedere că $x(\gamma\beta) = (x\gamma)\beta$, rezultă: $(G\gamma)\beta = 0$. Dar conform condiției 3° avem $(G\gamma)\alpha_i\alpha_j \subseteq G\gamma$. Deci pentru orice $x \in G$ avem: $x(\gamma\alpha_i\alpha_j) = (x\gamma)\alpha_i\alpha_j \in G\gamma$. Rezultă, folosind relația $(G\gamma)\beta = 0$, că pentru orice $x \in G$ subzistă egalitatea $x(\gamma\alpha) = x(\gamma\alpha_i\alpha_j\beta) = [x(\gamma\alpha_i\alpha_j)]\beta = 0$. Aceasta înseamnă că $\gamma\alpha = 0$. Deoarece conform ipotezei I° endomorfismul α este un element regular la stînga în $E(G)$, rezultă că $\gamma = 0$, deci $\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$.

B I B L I O G R A F I E

1. I. G y. M a u r e r, *Despre topologizarea inelelor (Sur la topologisation des anneaux)*, Studii și Cerc. de Mat., Acad. R.P.R., fil. Cluj, **8** (1957), 177—180.
 2. I. G y. M a u r e r, *Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte*, Acta Scientiarum Mathematicarum, **XXIII**. (1962), f. 1—2, 171—175.

О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ В КОЛЬЦАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ОДНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

(Р е з ю м е)

Пусть G какая-нибудь абелева группа и $E(G)$ полное кольцо эндоморфизмов группы G . Элементы группы G обозначаются латинскими буквами, а применения группы G в G — греческими. Операция в G называется сложением, а применения группы G в G используются как правые операторы.

В работе [1] введена топология в $E(G)$ на основании понятия сходимости, а в [2] дано необходимое и достаточное условие для сходимости бесконечных произведений, определяемых в G , зависит от порядка факторов произведения. В настоящей работе изучается класс бесконечных произведений, определяемых в G , для которого сходимость независима от порядка факторов произведения.

Определение 1. Пусть H какое-нибудь подмножество группы G . Называем предельом, относящимся к H , последовательности $\{\alpha_r\}$, где $\alpha_r \in E(G)$ и α — однозначное отображение $H \subseteq G$ в G , которое обладает следующим свойством: для любого $x \in H$ имеется натуральное число R_x , так, что $x\alpha_r = x\alpha$, если $r > R_x$. В этом случае говорим, что ряд сходится в H и пишем:

Теорема 1. Последовательность $\{\alpha_r\}$ ($\alpha_r \in E(G)$) тогда и только тогда является сходящейся в $H \subseteq G$, когда для любого $x \in H$ имеется одно натуральное число R_x , таким образом, чтобы для $r_1, r_2 > R_x$ имелось равенство $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$.

Теорема 2. Если H и K — два подмножества группы G , так, чтобы $H \subseteq K \subseteq G$, тогда из $\alpha_r \xrightarrow{K} \alpha_K$ следует сходимость в H последовательности $\{\alpha_r\}$ и если $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha_H$, тогда $\alpha_K = \alpha_H$ в множестве H .

Теорема 3. Если последовательность $\{\alpha_r\}$ является сходящейся в подгруппе $G' \subseteq G$ и $\alpha_r \xrightarrow{G'} \alpha$, тогда α есть гомоморфное отображение G' в G .

Королларий. Если $G' = G$, тогда $\alpha \in E(G)$.

Определение 2. Бесконечное произведение $\Pi \alpha_r$ ($\alpha_r \in E(G)$) является сходящимся в одном подмножестве $H \subseteq G$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_r\}$ частичных произведений $\sigma_r = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_r$ является сходящейся в H . Если $\sigma_r \xrightarrow{H} \alpha$, тогда говорим, что α есть значение произведения $\Pi \alpha_r$ относительно H и пишем: $\Pi \alpha_r = \alpha(H)$.

Определение 3. Бесконечное произведение $\Pi \alpha_r$ ($\alpha_r \in E(G)$) является безусловно сходящимся в подмножестве $H \subseteq G$ тогда и только тогда, когда $\Pi \alpha_r$ сходится в H и имеет то же самое значение относительно H , для любого расположения своих факторов.

Лемма 1. Если факторы произведения $\Pi \alpha_r$ являются автоморфизмами группы G и $\Pi \alpha_r = \alpha(G)$, тогда α является автоморфизмом группы G .

Теорема 4. Пусть $\Pi \alpha_r$ одно сходящееся произведение в G и α_r ($r = 1, 2, \dots$) автоморфизмы группы G . Произведение $\Pi \alpha_r$ является безусловно сходящимся в G тогда и только тогда, когда его факторы коммутативны попарно.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 4 вытекает следующее: если факторы произведения $\Pi \alpha_r$ ($\alpha_r \in E(G)$), сходящегося в G , коммутативны попарно, тогда $\Pi \alpha_r$ является безусловным произведением, сходящимся в G .

Лемма 2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in E(G)$, $G\alpha_1 = G\alpha_2 = G'$ и β гомоморфное отображение G' в G . Тогда, для любого $x \in E$ имеет место равенство: $x[(\alpha_1 - \alpha_2)\beta] = x(\alpha_1\beta) - x(\alpha_2\beta)$.

Теорема 5. Пусть $\Pi \alpha_r$ — сходящееся произведение в G и $\alpha_r \in E(G)$ ($r = 1, 2, \dots$). Если 1° в определенном порядке факторов $\Pi \alpha_r = \alpha$ есть левый регулярный элемент $E(G)$, 2° $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i$ ($i, j = 1, 2, \dots$) и 3° $[G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)]\alpha_i\alpha_j \subseteq G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots$), тогда необходимое и достаточное условие для безусловной сходимости в G произведения $\Pi \alpha_r$ состоит в парной коммутативности факторов произведения.

SUR LA CONVERGENCE DES PRODUITS INFINIS DÉFINIS DANS LES ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES D'UN GROUPE ABÉLIEN

(R é s u m é)

Soient G un groupe abélien quelconque et $E(G)$ l'anneau complet des endomorphismes de G . Les éléments de G sont notés en caractères latins, les applications de G en G en caractères grecs. L'opération en G se nomme addition, les applications de G en G sont utilisées comme des opérateurs à droite.

Dans le travail [1] on a introduit une topologie en $E(G)$ sur la base d'une notion de convergence, et en [2] on a donné une condition nécessaire et suffisante pour la convergence des produits infinis, définis en $E(G)$. La convergence des produits infinis définis en [2] dépend de l'ordre des facteurs du produit. Dans la note présente on étudie une classe de produits infinis définis en G , pour lesquels la convergence est indépendante de l'ordre des facteurs du produit.

Définition 1. Soit H un sous-ensemble quelconque du groupe G . Nous appelons limite relative à H de la suite $\{\alpha_r\}$ où $\alpha_r \in E(G)$, une application univoque α de $H \subseteq G$ en G , qui jouit de la propriété suivante : pour tout $x \in H$ il existe un nombre naturel R_x tel que $x\alpha_r = x\alpha$, si $r > R_x$. En ce cas, nous disons que la série converge sur H et nous écrivons : $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha$:

Théorème 1. La suite $\{\alpha_r\}$ ($\alpha_r \in E(G)$) est convergente sur $H \subseteq G$ et ne l'est que si, pour tout $x \in H$, il existe un nombre naturel R_x tel que, pour $r_1, r_2 > R_x$, subsiste l'égalité $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$.

Théorème 2. Si H et K sont deux sous-ensembles de G , tels que $H \subseteq K \subseteq G$, alors de $\alpha_r \xrightarrow{K} \alpha_K$ résulte la convergence sur H de la suite $\{\alpha_r\}$ et si $\alpha_r \xrightarrow{H} \alpha_H$, alors $\alpha_K = \alpha_H$ sur l'ensemble H .

Théorème 3. Si la suite $\{\alpha_r\}$ est convergente sur le sous-groupe $G' \subseteq G$ et $\alpha_r \xrightarrow{G'} \alpha$, alors α est une application homomorphe de G' en G .

Covollaire. Si $G' = G$, alors $\alpha \in E(G)$.

Définition 2. Le produit infini $\prod \alpha_r [\alpha_r \in E(G)]$ est convergent sur un sous-ensemble $H \subseteq G$ si (et seulement si) la suite $\{\sigma_r\}$ des produits partiels $\sigma_r = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ est convergente sur H . Si $\sigma_r \xrightarrow{H} \alpha$, alors on dit que α est la valeur relative à H de $\prod \alpha_r$ et l'on écrit : $\prod \alpha_r = \alpha(H)$.

Définition 3. Le produit infini $\prod \alpha_r (\alpha_r \in E(G))$ est inconditionnellement convergent sur un sous-ensemble $H \subseteq G$ si (et dans ce cas seulement) $\prod \alpha_r$ est convergent sur H et a la même valeur relative à H quel que soit l'ordre de ses facteurs.

Lemme 1. Si les facteurs du produit $\prod \alpha_r$ sont des automorphismes de G et si $\prod \alpha_r = \alpha(G)$, alors α est un automorphisme de G .

Théorème 4. Soit $\prod \alpha_r$ un produit convergent sur G et $\alpha_r (r = 1, 2, \dots)$ des automorphismes de G . Le produit $\prod \alpha_r$ est inconditionnellement convergent sur G si (et alors seulement) ses facteurs sont commutatifs deux à deux.

O b s e r v a t i o n. De la démonstration du théorème 4 résulte ce qui suit : Si les facteurs du produit $\prod \alpha_r [\alpha_r \in E(G)]$, convergent sur G sont commutatifs deux à deux, alors $\prod \alpha_r$ est un produit inconditionnellement convergent sur G .

Lemme 2. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in E(G)$, $G\alpha_1 = G\alpha_2 = G'$ et β une application homomorphe de G' en G ; alors, pour tout $x \in G$ a lieu l'égalité : $x[(\alpha_1 - \alpha_2)\beta] = x(\alpha_1\beta) - x(\alpha_2\beta)$.

Théorème 5. Soit $\prod \alpha_r$ un produit convergent sur G et $\alpha_r \in E(G) (r = 1, 2, \dots)$. Si 1° dans un certain ordre des facteurs, $\prod \alpha_r = \alpha(G)$ est un élément régulier à la gauche de $E(G)$; si 2° $G\alpha_i\alpha_j = G\alpha_j\alpha_i (i = 1, 2, \dots)$; et si 3° $[G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i)]\alpha_i\alpha_j \subseteq G(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i) (i, j = 1, 2, \dots)$, alors la condition nécessaire et suffisante pour la convergence inconditionnelle sur G de $\prod \alpha_r$, consiste dans la commutativité deux à deux des facteurs du produit.

ASUPRA LIMITĂRII ÎN MODUL A RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR ALGEBRICE

de

ILIE TORSAN

Se consideră ecuația

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

Referitor la limitarea modulului rădăcinilor ecuației (1), P. Williams, în [1], a demonstrat că modulul oricărei rădăcini a ecuației (1) satisface condiția

$$|x_i| \leq \sqrt{1 + |1 - a_1|^2 + |a_1 - a_2|^2 + \dots + |a_{n-1} - a_n|^2 + |a_n|^2} \quad (2)$$

Carmichael și Mason, în [2], găsesc ca limită superioară a modulului rădăcinilor ecuației (1) expresia

$$|x_i| \leq \sqrt{1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2} \quad (3)$$

În cele ce urmează vom demonstra o teoremă care cuprinde drept cazuri particulare rezultatele de mai sus.

I. Fie α un parametru arbitrar. Vom considera ecuația

$$(x - \alpha)f(x) = 0 \quad (4)$$

care are ca rădăcini, rădăcinile ecuației (1) și în plus rădăcina $x = \alpha$, deci o margine superioară a modulului rădăcinilor ecuației (4) determinată pentru toate valorile parametrului α ne va da în același timp o margine superioară pentru modulul rădăcinilor ecuației (1).

Ecuația (4) se scrie

$$x^{n+1} + (a_1 - \alpha)x^n + (a_2 - \alpha a_1)x^{n-1} + \dots + (a_n - \alpha a_{n-1})x - \alpha a_n = 0 \quad (5)$$

Vom presupune pentru început că

$$|x| > 1, \quad (6)$$

atunci din ecuația (5) se obține

$$x = (x - a_1) + (\alpha a_1 - a_2) \frac{1}{x} + \dots + (\alpha a_{n-1} - a_n) \frac{1}{x^{n-1}} + \alpha a_n \frac{1}{x^n}$$

de unde rezultă

$$|x| = \left| (x - a_1) + (\alpha a_1 - a_2) \frac{1}{x} + \dots + (\alpha a_{n-1} - a_n) \frac{1}{x^{n-1}} + \alpha a_n \frac{1}{x^n} \right| \quad (7)$$

Se știe însă (de exemplu în [3]) că, avînd $2n$ numere reale sau complexe a_k și b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) și două numere reale p și q mai mari decît unu, astfel încît

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

atunci avem

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left[\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right]^{1/q} \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{1/p} \quad (8)$$

care constituie inegalitatea lui Hölder.

Aplicînd inegalitatea (8) relației (7) obținem

$$|x| \leq \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{1/q} \left[1 + \frac{1}{|x|^p} + \dots + \frac{1}{|x|^{np}} \right]^{1/p} \quad (9)$$

sau, ținînd seama că în a doua paranteză avem o progresie geometrică, rezultă

$$|x| \leq \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{1/q} \left[\frac{1 - \frac{1}{|x|^{np+p}}}{1 - \frac{1}{|x|^p}} \right]^{1/p} \quad (10)$$

Ridicînd la puterea p această inegalitate, se obține

$$|x|^p \leq \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{p/q} \left[\frac{1 - \frac{1}{|x|^{np+p}}}{1 - \frac{1}{|x|^p}} \right], \quad (11)$$

dar din (6) rezultă că

$$1 - \frac{1}{|x|^p} > 0 \quad (12)$$

și deci, amplificînd inegalitatea (11) cu membrul stîng al inegalității (12) și majorînd apoi membrul drept, obținem

$$|x|^p - 1 \leq \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{p/q}, \quad (13)$$

de unde rezultă

$$|x| \leq \left\{ 1 + \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{1/q} \right\}^{1/p} \quad (14)$$

Inegalitatea (14) a fost dedusă în cazul $|x| > 1$, dar ea se poate deduce și pentru $|x| < 1$. Rezultă deci că ea este valabilă pentru toate rădăcinile ecuațiilor (1) și (4).

Am demonstrat deci :

TEOREMA 1. Pentru modulul tuturor rădăcinilor ecuației (1) avem

$$|x_i| \leq \left\{ 1 + \left[|x - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^q \right]^{1/q} \right\}^{1/p}$$

unde p și q sînt două numere reale mai mari decît unu, astfel încît

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Observații.

1) Dacă $p = q = 2$ și $\alpha = 0$, din teorema 1 rezultă inegalitatea (3) a lui *Carmichael* și *Mason*.

2) Dacă $p = q = 2$ și $\alpha = 1$, din teorema 1 rezultă inegalitatea (2) a lui *Williams*.

3) Dacă ecuația (1) are coeficienții în progresie geometrică cu rația α , atunci din inegalitatea (14) rezultă

$$|x_i| \leq \left[1 + |\alpha|^{np+p} \right]^{1/p}$$

II. În cele ce urmează vom determina valoarea parametrului α , astfel încît delimitarea dată de teorema 1 să fie optimă. Aceasta înseamnă că trebuie determinat α pentru care

$$|\alpha - a_1|^1 + |\alpha a_1 - a_2|^2 + \dots + |\alpha a_n|^2 \quad (15)$$

este minimă.

Fie $p = q = 2$ și α un număr real oarecare.

Dacă $a_k = r_k + i\mu_k$, atunci (15) devine

$$\begin{aligned} (\alpha - r_1)^2 + \mu^2 + (\alpha r_1 - r_2)^2 + (\alpha \mu_1 - \mu_2)^2 + \dots + (\alpha r_{n-1} - r_n)^2 + \\ (\alpha \mu_{n-1} - \mu_n)^2 + (\alpha r_n)^2 + (\alpha \mu_n)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

sau, derivînd în raport cu α , obținem

$$\alpha \left[1 + \sum_{k=1}^n (r_k^2 + \mu_k^2) \right] - \left[r_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (r_k r_{k+1} + \mu_k \mu_{k+1}) \right] \quad (17)$$

care se anulează pentru

$$\alpha = \frac{\eta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \eta_{k+1} + \mu_k \mu_{k+1}}{1 + \sum_{k=1}^n \eta_k^2 + \mu_k^2} \quad (18)$$

aceasta fiind valoarea parametrului real α pentru care delimitarea dată de teorema 1 este optimă în cazul $p = q = 2$

Aplicație.

Fie

$$f(x) = x^4 - x^3 + (3 - 2i)x^2 + 3ix - 2$$

În acest caz din (18) rezultă

$$\alpha = -\frac{5}{14}$$

și deci, din teorema 1 avem

$$|x_i| < 4,39,$$

din (2) avem

$$|x_i| < 8,7178,$$

iar din (3) avem

$$|x_i| < 5,2915,$$

deci marginea superioară a modului rădăcinilor dată de teorema 1 este mai bună decât (2) și (3).

Dacă $p = q = 2$ iar $\alpha = R + iI$, un calcul simplu ne conduce la

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\eta_1 + \sum_{k=6}^{n-1} (\eta_k \eta_{k+1} + \mu_k \mu_{k+1})}{1 + \sum_{k=1}^n (\eta_k^2 + \mu_k^2)} \\ I = \frac{\mu_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_k \mu_{k+1} - \mu_k \eta_{k+1})}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_k^2 + \mu_k^2)} \end{array} \right. \quad (19)$$

pentru care delimitarea dată de teorema 1 este optimă.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Williams, *Note Concerning the Roots of an Equation*. „Bull. of the American Mathematical Society”. 28 (1922), pp. 394—396.
2. Carmichael și Mason, *Note on Roots of Algebraic Equations*. „Bull. of the American Mathematical Society” 21 (1915), pp. 14—22.
3. M. Parodi, *Lokalizația caracteristiceskih cisel matriti i ee primeneniia*. Moskva, 1960, pp. 37—38.

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ МОДУЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Даются ограничения модулей корней уравнения (1). Обобщаются таким образом результаты, полученные П. Вильямсом в [1], и Кармайкелом и Масоном в [2].

Основным результатом работы является

Теорема 1. Для модуля всех корней уравнения (1) имеем

$$|x_i| \leq \left(1 + [|\alpha - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^{(q-p)/q}] \right)^{1/p}$$

где p и q — два действительных числа больше единицы, так, чтобы

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Во второй части работы определяются значения для параметра α , так чтобы ограничение, данное теоремой 1 было наилучшим.

SUR LA LIMITATION EN MODULE DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

(Résumé)

On donne des limitations en module pour les racines de l'équation (1); on généralise ainsi les résultats obtenus par P. Williams en [1] et par Carmichael et Mason en [2].

Le résultat de base de notre contribution est constitué par le

Théorème 1. On a pour module de toutes les racines de l'équation (1)

$$|x_i| \leq \left(1 + [|\alpha - a_1|^q + |\alpha a_1 - a_2|^q + \dots + |\alpha a_n|^{(q-p)/q}] \right)^{1/p}$$

où p et q sont deux nombres réels plus grands que un, tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dans la seconde partie, on détermine des valeurs pour le paramètre α telles que la délimitation donnée par le théorème 1 soit la meilleure.

RELAȚII ÎNTRE NUMERELE CARDINALE ATAȘATE
MULȚIMILOR ÎNCHISE ȘI FUNCȚIONALELOR CONTINUE DEFINITE
PE UN ACELAȘI SPAȚIU TOPOLOGIC

de

V. CÎMPLAN

Între noțiunile: mulțime închisă și aplicație continuă există o strinsă legătură. Unul din criteriile pentru continuitatea aplicației f din spațiul topologic X în spațiul Y e următorul:

Aplicația $f: X \rightarrow Y$ e continuă pe întreg spațiul X , dacă și numai dacă imaginea inversă, prin f , a oricărei mulțimi închise din Y , e o mulțime închisă din X .

Astfel apare în mod natural problema relației dintre numărul cardinal atașat familiei mulțimilor închise ale spațiului X și numărul cardinal atașat mulțimii aplicațiilor continue din X în Y . Trei exemple vor rezolva, în general, problema.

Notăm cu: \mathcal{F} — familia mulțimilor închise din X ; \mathcal{C} — mulțimea aplicațiilor continue din X în Y ; $\text{card } \mathcal{F}$, $\text{card } \mathcal{C}$ — numerele cardinale atașate celor două mulțimi.

1. Fie $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1\}$ două spații în care am introdus topologia discretă: fiecare submulțime e deschisă (închisă). În acest caz avem o singură aplicație $f: X \rightarrow Y$ și patru mulțimi închise ale spațiului X . Deci

$$\text{card } \mathcal{F} > \text{card } \mathcal{C}$$

2. Fie $X = Y = R$; axa reală cu topologia euclidiană. E cunoscut rezultatul:

$$\text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathcal{C} = \aleph$$

3. Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dotat cu topologia discretă, $Y = R$. Spațiul X fiind discret, orice aplicație a acestuia pe axa reală, R , e continuă. Deci $\text{card } \mathcal{C} = (\text{card } R)^{\text{card } X} = \aleph^n = \aleph$, iar $\text{card } \mathcal{F} = 2^n$; de unde rezultă și a treia relație:

$$\text{card } \mathcal{F} < \text{card } \mathcal{C}.$$

Am arătat, astfel, că nu există o aceeași relație între numărul cardinal asociat familiei mulțimilor închise, ale unui spațiu topologic X și numărul cardinal asociat mulțimii aplicațiilor continue din X în Y .

Vrem să arătăm că, în anumite condiții, numărul cardinal atașat familiei mulțimilor închise ale unui spațiu topologic X e același cu numărul cardinal atașat mulțimii funcționalelor continue pe X . Deci, în continuare, ne vom limita la cazul $Y = \mathbb{R}$, iar X va fi un spațiu topologic oarecare. Problema prezintă interes, pentru că se încadrează în una din problemele importante din topologie :

Fiind dat spațiul funcționalelor continue, $C(X)$, definite pe spațiul topologic X , cum se reflectă proprietățile din $C(X)$ asupra lui X .

Considerăm, pentru aceasta, mulțimea tuturor aplicațiilor axei reale în familia mulțimilor închise, adică :

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}^{\mathbb{R}} \quad (1)$$

Vom arăta că, oricărei funcționale continue îi putem asocia o astfel de aplicație, iar pentru funcționale continue diferite se obțin aplicații diferite. Astfel va fi stabilită o corespondență biunivocă între mulțimea funcționalelor continue și o parte a submulțimii \mathcal{A} , de unde va rezulta :

$$\text{card } \mathcal{O} \leq \text{card } \mathcal{A} \quad (2)$$

În adevăr, dacă $f \in C$, atunci imaginea sa inversă, f^{\leftarrow} , va aparține familiei \mathcal{A} , căci fie $r \in \mathbb{R}$, un punct oarecare al axei reale, el fiind o mulțime închisă, imaginea ei inversă prin f , va fi o mulțime închisă, deci $f^{\leftarrow}(r) \in \mathcal{F}$, adică $f \in \mathcal{A}$. Iar dacă $f \neq g$, rezultă că există un punct $p \in X$, încît $f(p) \neq g(p)$. Notăm cu $r = f(p)$ valoarea funcționalei f în punctul p . Atunci $p \in f^{\leftarrow}(r)$ și $p \notin g^{\leftarrow}(r)$, căci $g(p) \neq f(p) = r$. Deci din $f \neq g$ rezultă $f^{\leftarrow} \neq g^{\leftarrow}$, și astfel relația (2) e demonstrată.

Din (1) rezultă $\text{card } \mathcal{A} = (\text{card } \mathcal{F})^{\text{card } \mathbb{R}} = (\text{card } \mathcal{F})^{\aleph_1}$; folosind (2) găsim

$$\text{card } \mathcal{O} \leq (\text{card } \mathcal{F})^{\aleph_1}. \quad (3)$$

Pentru a delimita inferior cardinalul funcționalelor continue în funcție de cardinalul mulțimilor închise, ne restrîngem la spațiile topologice care verifică proprietatea :

— Orice mulțime închisă e o zeromulțime¹. (Q)

În spațiile topologice care verifică proprietatea (Q), putem asocia oricărei mulțimi închise, F , o funcțională continuă $f(x)$ încît $F = f^{\leftarrow}(0)$, iar mulțimilor închise diferite, funcționale diferite. În adevăr, fie $F_1 \neq F_2$;

¹ E cunoscută definiția zeromulțimii. Mulțimea F din X e o zeromulțime dacă există o funcțională continuă, f , încît $F = f^{\leftarrow}(0) = \{x \in X; f(x) = 0\}$.

deci există un punct $x_0 \in X$, încît, făcînd abstracție de ordinea mulțimilor, să fie îndeplinite relațiile : $x_0 \in F_1$ și $x_0 \in F_2$. Dar conform proprietății (Q) există funcționalele continue f_1 și f_2 , încît $F_1 = \overleftarrow{f_1}(0)$ și $F_2 = \overleftarrow{f_2}(0)$. Pe punctul x_0 , $f_1(x_0) = 0$, căci $x_0 \in F_1 = \overleftarrow{f_1}(0)$, iar $f_2(x_0) \neq 0$, căci $x_0 \in F_2 = \overleftarrow{f_2}(0)$. Deci din $F_1 \neq F_2$ rezultă $f_1 \neq f_2$.

Astfel am pus în evidență o corespondență biunivocă între familia mulțimilor închise și o parte din mulțimea funcționalelor continue, definite pe un același spațiu topologic ce verifică proprietatea (Q). Deci

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} \leq \text{card } \mathcal{C}. \tag{4}$$

Din relațiile (3) și (4) rezultă

TEOREMA. Oricare ar fi spațiul topologic cu proprietatea că orice mulțime închisă e o zeromulțime, între familia mulțimilor închise și mulțimea funcționalelor continue definite pe acest spațiu există relația :

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} \leq \text{card } \mathcal{C} \leq (\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}})^{\aleph}$$

Consecința 1. Dacă cardinalul mulțimilor închise ale unui spațiu topologic, ce verifică proprietatea (Q) e 2^{\aleph} , atunci

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = \text{card } \mathcal{C}$$

Demonstrație. Fiind în condițiile teoremei, avem :

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} \leq \text{card } \mathcal{C} \leq (\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}})^{\aleph}$$

Dar $\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = 2^{\aleph}$, iar $(\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}})^{\aleph} = 2^{\aleph^2} = 2^{\aleph} = \text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}}$, de unde $\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = \text{card } \mathcal{C}$.

Consecința 2. Admițînd ipoteza continuului $\aleph = \aleph_1$, pentru orice spațiu topologic care verifică proprietatea (Q) avem

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = \text{card } \mathcal{C}$$

dacă $\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} > \aleph$.

Demonstrație. Fiind în condițiile teoremei, avem :

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} \leq \text{card } \mathcal{C} \leq (\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}})^{\aleph}$$

Dar, folosind [1], avem relația $(\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}})^{\aleph} = \text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}}$ dacă $\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = \aleph^{\alpha}$, $\alpha > 2$, de unde, în ipotezele consecinței 2, găsim egalitatea :

$$\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} = \text{card } \mathcal{C}$$

Observația 1. Condiția $\text{card } \overleftarrow{\mathcal{F}} > \aleph$ e implicată de următoarea : spațiul topologic X verifică axioma T_1 — orice punct din X e o mulțime închisă — și $\text{card } X > \aleph$.

Observația 2. Spațiul numerelor reale, spațiile metrice separabile ce conțin \aleph mulțimi închise, verifică concluzia consecinței 2, fără a se încadra în ipotezele acesteia.

Existența spațiilor topologice care verifică proprietatea (Q) se pune în evidență prin următorul

Exemplu. Orice spațiu metric verifică proprietatea (Q).

Se știe că orice spațiu metric, $[X, d]$, d fiind metrica din X , e topologic, unde mulțimile închise se definesc astfel:

$$\bar{M} = \{x \in X, d(x, M) = 0\}$$

pentru orice mulțime M din X ; înțelegând prin $d(x, M)$, funcționala continuă

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y)$$

Oricărei mulțimi închise, F , din X îi asociem funcționala continuă $f(x) = d(x, F)$. Prin definiție avem $F = \bar{F} = \{x \in X; d(x, F) = 0\}$. Deci $F = f^{-1}(0)$, adică mulțimea închisă, F , e o zeromulțime.

BIBLIOGRAFIE

1. Heinz Bachmann, *Transfinite Zahlen*, Berlin, 1955, p. 162.

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КАРДИНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВАМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ФУНКЦИОНАЛАМ, ОПРЕДЕЛЕННЫМ НА ОДНОМ И ТОМ ЖЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Резюме)

Для некоторых топологических пространств между кардинальным числом, соответствующим семье замкнутых множеств топологического пространства X и кардинальным числом, соответствующим множеству непрерывных функционалов, определенных на X , существует тесная связь. В работе дается следующая теорема:

Теорема. Каким бы ни было топологическое пространство со свойством, что любое замкнутое множество является нулевым множеством, между семейством замкнутых множеств, \mathcal{F} , и множеством непрерывных функционалов, \mathcal{O} , определенных на этом пространстве, существует следующее отношение:

$$\text{card } \mathcal{F} \leq \text{card } \mathcal{O} \leq (\text{card } \mathcal{F})^*$$

Следствие. В гипотезе континуума, $\aleph = \aleph_1$, для любого топологического пространства, для которого любое замкнутое множество является нулевым множеством, имеется следующее отношение:

$$\text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathcal{O}$$

если $\text{card } \mathcal{F} > \aleph$.

RELATIONS
ENTRE LES NOMBRES CARDINAUX ATTACHÉS AUX ENSEMBLES
FERMÉS ET AUX FONCTIONNELLES CONTINUES DÉFINIES PAR UN MÊME
ESPACE TOPOLOGIQUE

(R é s u m é)

Pour certains espaces topologiques il existe une étroite relation entre le nombre cardinal attaché à la famille des ensembles fermés de l'espace topologique X et le nombre cardinal attaché à l'ensemble des fonctionnelles continues définies sur X . On établit le théorème suivant :

Théorème. Quel que soit l'espace topologique pour lequel tout ensemble fermé est un zéro-ensemble, il existe entre la famille \mathcal{F} des ensembles fermés et l'ensemble \mathcal{C} des fonctionnelles continues définies pour cet espace, la relation suivante :

$$\text{card } \mathcal{F} \leq \text{card } \mathcal{C} \leq (\text{card } \mathcal{F})^{\aleph}$$

Corollaire. Dans l'hypothèse du continu $\aleph = \aleph_1$, il existe pour tout espace topologique possédant la propriété que tout ensemble fermé est un zéro-ensemble, la relation suivante :

$$\text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathcal{C}$$

si $\text{card } \mathcal{F} > \aleph$.

SOLUTION OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY METHOD OF INTEGRAL TRANSFORM

by

M. DUTTA and L. DEBNATH (Calcutta, India)

1. 1. Introduction : Usually, integral transforms are defined by means of integrals over a range for a class of Kernels and then the theory of these transforms is developed and applied in deriving the solutions of a certain class of linear partial differential equations of Applied Mathematics and Theoretical Physics under certain prescribed boundary conditions.

The theory of Laplace, Fourier, Mellin and Hankel transforms etc. has been developed and applied in finding the solutions of differential equations occurring in many problems of Applied Mathematics and Mathematical Physics.

Churchill [1] introduced the theory of Legendre Transform and applied it in finding the solutions of partial differential equations of the theory of Potential under certain prescribed boundary conditions. Conte [3] introduced the Gegenbauer transform and utilised the transform in deriving the solution of one dimensional heat equation with variable conductivity under certain boundary conditions.

Debnath [4]—[8] has recently introduced the theory of Laguerre, Hermite and Jacobi transforms and has made applications of these transforms in deriving the solutions of certain partial differential equations of theory of conduction of heat in solids containing sources and oscillation of a very long and heavy chain etc. under certain prescribed boundary conditions.

The object of the present paper is to introduce a suitable integral transform associated with any given linear partial differential equation and to develop a general theory of such transform by application of which the general solution of the given partial differential equation can be derived, under certain prescribed boundary conditions.

1.2. Statement of the Problem : Let us consider a linear partial differential equation of the form

$$L_x[Y(x, t)] = B_t[Y(x, t)] \quad (1)$$

where L_x is a linear differential operator of the second order of the form

$$L_x \equiv a_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(\lambda, x) \frac{\partial}{\partial x}$$

where λ is any constant and B_t is also a linear partial differential operator of any finite order such that the equation of the form

$$B_t[U(t)] = cU(t) \quad (c \text{ being a constant})$$

can be solved.

For simplicity, we shall take at present $a_2(x)$ and $a_1(x)$ as polynomials. Consider the linear ordinary differential equation of the form

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + a_0(\lambda, n)y = 0 \quad (2)$$

having discrete eigen values only and subject to the condition $a_0(\lambda, n) \neq a_0(\lambda, n')$.

Further, we may assume that the function $K_n^\lambda(x)$ is a solution of the differential equation (2) and it can be easily shown that $K_n^\lambda(x)$ satisfies the orthogonal relations

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) K_m^\lambda(x) dx &= 0 & n \neq m \\ &= \delta_{n,\lambda} & n = m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where the range (a, b) of the integral is somehow related to the ordinary differential equations (2) and $\omega_\lambda(x)$ is the weight function associated with the orthogonal function $K_n^\lambda(x)$.

Now, we shall introduce an integral transform of a function $F(x)$, denoted by $f_\lambda(n)$ associated with the differential equation (2), by means of the integral

$$f_\lambda(n) = T\{F(x)\} = \int_a^b \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) F(x) dx \quad (4)$$

provided the integral exists in the sense of Lebesgue and $\omega_\lambda(x)$ is the weight function of the orthogonal function $K_n^\lambda(x)$ and the range (a, b) of the integral defining the transform is related to equation (2).

Next, we propose to develop a theory of the integral transform (4) in order to make applications in deriving the solution of the given linear partial differential equation of the form (1), under certain prescribed boundary conditions.

1.3. Important Results :

THEOREM 1 : The inverse transformation of $f_\lambda(n)$ can be represented by

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n,\lambda})^{-1} f_\lambda(n) K_n^\lambda(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

Proof: Let us consider the function $F(x)$ which can be represented as

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n K_n^\lambda(x) \tag{1}$$

Multiplying (1) by $\omega_\lambda(x) K_m^\lambda(x)$ and then using the integrating over (a, b) and then using the orthogonal relation (3), we obtain

$$C_n = \frac{f_\lambda^{(n)}}{\delta_{n, \lambda}}$$

Hence we conclude that

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n, \lambda})^{-1} f_\lambda^{(n)} K_n^\lambda(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

We multiply the differential equation (2) by $\omega_\lambda(x)$ so that the equation can be put into the form

$$\frac{d}{dx} \left[\Phi(x) \frac{dy}{dx} \right] + \omega_\lambda(x) \lambda_n \cdot y = 0 \quad y = K_n^\lambda(x) \tag{5}$$

Now comparing the coefficients of (2) and (5), we obtain

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= a_2(x) \omega_\lambda(x) \\ \Phi'(x) &= a_1(x, \lambda) \omega_\lambda(x) \\ \lambda_n &= a_0(\lambda, n) \end{aligned}$$

From this, we can deduce

$$\omega_\lambda(x) = \frac{A}{a_2(x)} e^{\int \frac{a_1(x, \lambda)}{a_2(x)} dx}$$

Hence

$$\Phi(x) = A \cdot e^{\int \frac{a_1(x, \lambda)}{a_2(x)} dx}$$

Now, it is to be noticed, for classes of all orthogonal functions that $\omega_\lambda(x)$ plays a role like a convergent factor and which is non-negative and integrable in (a, b) .

Thus, if the range (a, b) be infinite, in order that the integral (3) exists, the function $\omega_\lambda(x)$ must be $0(e^{ax})$, $a < 0$ Hence, it is easy to note that the zeros of $a_2(x)$ are also zeros of $\Phi(x)$, provided $\omega_\lambda(x)$ is bounded. This has been observed in cases of classical orthogonal functions. Further, it can be easily seen, for the classes of all well known orthogonal functions defined in (a, b) that if a, b are either zeros of $a_2(x)$ as in the case of Legendre function or one of them is a zero of $a_2(x)$ and the other is a pole of $a_1(x)$ as in the case

of Laguerre function or both are poles of $a_1(x)$ as in case of Hermite function. For simplicity, we assume that the zeros of $a_2(x)$ at a or b or at a, b both, must be simple zeros and $a_1(x)$ should have a negative principal part at its poles i.e. at a or b or at both a, b if there be any. It can be easily seen that these assumptions are valid in known classical orthogonal functions and polynomials. Hence the function $\Phi(x)$ vanishes at a and b . In the present discussion, we impose the above conditions on $a_1(x)$ and $a_2(x)$.

THEOREM 2: If $F'(x)$ be continuous and $F''(x)$ be bounded and integrable (L) in each of the subintegrals $a < x < b$ and $T\{F(x)\}$ exists, then $T\{R[F(x)]\}$ also exists and is given by

$$T\{R[F(x)]\} = -\lambda_n f_\lambda(n)$$

where $R[F(x)]$ is the differential form

$$R[F(x)] = \{\omega_\lambda(x)\}^{-1} \frac{d}{dx} \left[\Phi(x) \frac{d}{dx} K_n^\lambda(x) \right]$$

Proof: Now

$$\begin{aligned} T\{R[F(x)]\} &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\Phi(x) \frac{d}{dx} F(x) \right] K_n^\lambda(x) dx = \\ &= \left[K_n^\lambda(x) \Phi(x) \frac{d}{dx} F(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[K_n^\lambda(x) \right] \left[\Phi(x) \frac{d}{dx} F(x) \right] dx = \\ &= - \left[\Phi(x) \left\{ \frac{d}{dx} K_n^\lambda(x) \right\} F(x) \right]_a^b + \int_a^b F(x) \frac{d}{dx} \left[\Phi(x) \frac{d}{dx} K_n^\lambda(x) \right] dx \\ &\quad \text{(by partial integration)} \\ &= - \int_a^b \lambda_n \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) F(x) dx \\ &\quad \text{(by (5), § 1.3)} \\ &= -\lambda_n f_\lambda(n) \end{aligned}$$

Hence the result follows.

1.4. Solution of the given partial differential equation: Now, we shall open the main discussion how the given linear partial differential equation of the form

$$L_x[Y(x, t)] = B_t[Y(x, t)] \quad (1)$$

where $B_t \equiv \sum_{r=0}^b b_r(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r}$ and $b_r(t)$ are functions of t alone, can be solved by

the integral transform (4). Multiplying the equation (1) by $\omega_\lambda(x)$, we can reduce it into the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(x) \frac{\partial}{\partial x} Y(x, t) \right] &= \lambda_n \omega_\lambda(x) Y(x, t) \\ &+ \omega_\lambda(x) b_0(t) Y(x, t) \\ &+ \omega_\lambda(x) b_1(t) \frac{\partial}{\partial t} Y(x, t) \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ \omega_\lambda(x) b_p(t) \frac{\partial^p}{\partial t^p} Y(x, t) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} R[Y(x, t)] &= \{\lambda_n + b_0(t)\} Y(x, t) + b_1(t) \frac{\partial}{\partial t} Y(x, t) + \dots + \\ &+ b_p(t) \frac{\partial^p}{\partial t^p} Y(x, t) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} T\{R[F(x)]\} &= \{\lambda_n + b_0(t)\} T\{Y(x, t)\} + b_1(t) T\left\{\frac{\partial}{\partial t} Y(x, t)\right\} + \dots \\ &+ b_p(t) T\left\{\frac{\partial^p}{\partial t^p} Y(x, t)\right\}. \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} -\lambda_n I_\lambda(n, t) &= \{\lambda_n + b_0(t)\} I_\lambda(n, t) + b_1(t) \frac{d}{dt} I_\lambda(n, t) + \\ &+ \dots + b_p(t) \frac{d^p}{dt^p} I_\lambda(n, t) \end{aligned}$$

where

$$I_\lambda(n, t) = T\{Y(x, t)\} = \int_a^b \omega_\lambda(x) K_n^\lambda(x) Y(x, t) dx$$

we therefore obtain an ordinary linear differential equation of the form

$$\begin{aligned} b_p(t) \frac{d^p}{dt^p} I_\lambda(n, t) + b_{p-1}(t) \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} I_\lambda(n, t) + \dots + \\ + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} I_\lambda(n, t) + \{2\lambda_n + b_0(t)\} I_\lambda(n, t) = 0 \end{aligned}$$

The solution of the equation can be given by

$$I_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^b C_m u_m(t, \lambda, n)$$

where C_m are constants and $u_m(t, \lambda, n)$ are fundamental set of solutions.

Suppose that

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial t^i} Y(x, t) \right]_{t=0} = G_i(x)$$

and

$$g_\lambda^{(i)}(n) = T \{G_i(x)\}$$

where $i = 0, 1, 2, \dots, (p-1)$

Hence

$$g_\lambda^{(q)}(n) = \sum_{m=1}^p C_m u_m^{(q)}(0, \lambda, n) \quad (2)$$

where

$$u_m^{(q)}(0, \lambda, n) = \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} u_m(t, \lambda, n) \right]_{t=0}$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, (p-1).$$

Thus

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, 3, \dots, p$$

where

$$\Delta = \Delta(u_1(n, 0), u_2^1(n, 0), \dots, u_p^{(p-1)}(n, 0))$$

is the Wronskian determinant of the system of equation (3) and Δ_i is the determinant obtained from Δ by replacing the i th column of Δ by $g_\lambda^{(i)}(n)$'s. Therefore

$$I_\lambda(n, t) = \sum_{m=1}^p \frac{\Delta_m}{\Delta} u_m(t, \lambda, n)$$

Using the inverse-transformation formula (1) of § 1.3, we obtain

$$Y(x, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_m}{\Delta} (\delta_n, \lambda)^{-1} K_n^\lambda(x) u_m(t, \lambda, n)$$

which is the required solution of (1).

In conclusion, we express our sincere thanks to Mr. P. K. Ghosh, Department of Applied Mathematics, Calcutta University for his interest during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] Churchill, R. V., *Operational Calculus of Legendre Transform*, Jour. Math. and Phys. **33**, p. 165 (1954).
- [2] — *Operational Mathematics* (1951).
- [3] Conte, S. D., *Gegenbauer Transforms*, Quart. Jour. Math., Vol. 6, p. 48 (1955).
- [4] Debnath, L., *On Laguerre Transform*, Bull. Cal. Math. Soc., **52**, nr. 2, p. 69—77 (1960)-
- [5] — *On Jacobi Transform*, Bull. Cal. Math. Soc. (1962) (in Press.)
- [6] — *Application of Laguerre Transform on heat conduction problem*, Annali dell' Univ. di Ferrara, Sez. VII, Scienze Matematiche, **X**, nr. 3 (1962).
- [7] — *An application of Laguerre Transforms on the problem of oscillation of a heavy and long chain*, Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, Scienze Matematiche, **IX**, nr. 12 (1961)
- [8] — *Hermite Transform*, Communicated for publication. Poble. Inst. Math. (1963).
- [9] Erdélyi, *Higher Transcendental function*, vol. 2 (1953).
- [10] Sneddon, I. N., *Fouvier Transform* (1951).
- [11] Mikusinski, J., *Operational Calculus* (1959).

REZOLVAREA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE CU AJUTORUL
TRANSFORMĂRIILOR INTEGRALE

(R e z u m a t)

În lucrare se introduce o transformare integrală legată de ecuația cu derivate parțiale dată. Se dezvoltă teoria generală a transformării introduse și se dau aplicații la anumite probleme la limită.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Р е з ю м е)

В работе вводится интегральное преобразование, связанное с уравнением с частными производными (1). Развивается общая теория введенного преобразования и даются применения к определенным предельным задачам.

OBSERVAȚII CU PRIVIRE LA METODA LUI CIAPLIĞHIN PENTRU SISTEME DE ECUAȚII

de

E. SCHECHTER

Se știe că metoda lui Ciapliġhin ne furnizează un șir monoton de funcții rapid convergent către soluția ecuației sau sistemului de ecuații studiat. Pentru aplicarea ei însă, trebuie presupusă monotonia membrilor dreپți ai ecuațiilor diferențiale, precum și convexitatea de un anumit tip a acestora [1]. În plus prezintă dificultăți găsirea aproximației inițiale.

În această notă se arată că ambele inconveniente pot fi înlăturate, renunțând la monotonia șirului aproximant. După cum rezultă din Teorema 2, convergența este de același ordin cu cea de la cazul unei ecuații cu condiții suplimentare de convexitate [3].

I. Vom enunța sub formă de lemă o consecință a unei teoreme a lui Z. K o w a l s k i. Pentru aceasta vom introduce întâi :

IPOTEZA H: 1. Funcția $h(t, u, v)$ este definită și continuă pe domeniul ω definit de relațiile

- ω ; $0 \leq t \leq \alpha$, u și v elemente ale unui spațiu Banach complet B .
 - 2. $h(t, u, v) \in B$ pentru $(t, u, v) \in \omega$
 - 3. Are loc, pe domeniul ω , condiția lui Lipschitz
- $$\|h(t, \bar{u}, \bar{v}) - h(t, u, v)\| \leq M\|\bar{u} - u\| + N\|\bar{v} - v\|.$$

Vom nota de asemenea, cu $s(t)$; $t \in [0, \alpha)$, soluția ecuației

$$s'(t) = (M + N)s(t) + \|h(t, 0, 0)\|,$$

cu condiția inițială $s(0) = 0$; și cu I intervalul $[0, \alpha)$.

LEMA 1 (K o w a l s k i [2]). Să presupunem că funcția $h(t, u, v)$ satisface ipoteza H. În acest caz

1° Șirul de aproximații succesive $y_n(t)$ este unic determinat pe intervalul I de $y_0(t) \equiv 0$ și de ecuațiile

$$y'_{n+1}(t) = h(t, y_{n+1}(t), y_n(t)) \tag{1}$$

unde $y_{n+1}(0) = y_n(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots, t \in I$.

2° $\|y_n\| \leq s(t)$, $t \in I$, $n = 0, 1, \dots$

3° Şirul y_n converge uniform pe orice interval închis conţinut în I , către soluţia ecuaţiei

$$y' = h(t, y, y) \quad (2)$$

cu condiţia iniţială $y(0) = 0$.

4° $\|y(t)\| \leq s(t)$, $t \in I$.

În cele ce urmează ne interesează sisteme finite de ecuaţii diferenţiale. Pentru simplificare ne mărginim la sistemul de două ecuaţii :

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y, z) \\ z' &= g(t, y, z) \end{aligned} \quad (3)$$

cu condiţiile iniţiale $y(0) = z(0) = 0$.

Să ataşăm acestui sistem funcţia $h(t, u, v)$ de două componente $h_1(t, u, u, v, \bar{v})$ şi $h_2(t, u, u, v, \bar{v})$ definite astfel

$$\begin{aligned} h_1(t, u, v) &= f_y(t, u, \bar{u})(v - u) + f_z(t, u, \bar{u})(\bar{v} - \bar{u}) + f(t, u, \bar{u}) \\ h_2(t, u, v) &= g_y(t, u, \bar{u})(v - u) + g_z(t, u, \bar{u})(\bar{v} - \bar{u}) + g(t, u, \bar{u}) \end{aligned} \quad (4)$$

Vom enunţa acum o teoremă relativă la convergenţa metodei lui Ciaplişghin :

TEOREMA 1. Să presupunem că funcţia $h(t, u, v)$ definită de (4) există şi satisface ipotezei H . Atunci şirul de aproximaţii succesive definit pe I de

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= h_1(t, y_n, z_n, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ z'_{n+1} &= h_2(t, y_n, z_n, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ y_{n+1}(0) &= z_{n+1}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

şi de aproximaţiile iniţiale $y_0(t) = z_0(t) \equiv 0$, sînt mărginite de $s(t)$ şi converg uniform pe orice interval închis cuprins în I , către soluţia sistemului (3).

Pentru demonstraţie este suficient să observăm că

$$\begin{aligned} h_1(t, y, z, y, z) &= f(t, y, z) \\ h_2(t, y, z, y, z) &= g(t, y, z), \end{aligned}$$

şi să aplicăm lema 1.

2. În acest punct ne vom ocupa de viteza de convergenţă a metodei lui Ciaplişghin, în condiţiile noastre. Vom avea nevoie în acest scop de următoarea leamnă :

LEMA 2 (W a z e w s k i [5]). Fie ecuaţia diferenţială

$$y' = f(t, y) \quad y(0) = 0. \quad (6)$$

Atunci dacă :

1° $f(t, y)$ este definită pentru $t \in I$ și y oarecare.

2° Funcția continuă $\varphi(t)$ satisface pe intervalul I inegalitatea :

$$D_+ |\varphi(t)| \geq f(t, |\varphi(t)|)$$

precum și condiția $\varphi(0) = 0$.

3° Ecuația (6) are o soluție unică $\tau(t)$ care trece prin origine.

Avem îndeplinită relația :

$$|\varphi(t)| \leq \tau(t) \quad \text{pe } I.$$

Prin inegalitatea de la punctul 2° se înțelege că cel puțin unul dintre derivatele Dini la dreapta satisface relația.

Înainte de a enunța următoarea teoremă să notăm

$$\delta_n(t) = y(t) - y_n(t) \quad \text{și} \quad \eta_n(t) = z(t) - z_n(t) \quad n = 0, 1, \dots,$$

și să reamintim că aceste funcții sînt definite pe intervalul I .

TEOREMA 2. Să presupunem că funcțiile $f(t, y, z)$, $g(t, y, z)$ sînt continue și au derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea pentru

$$t \in [0, a]; \quad y, z \text{ oarecari}, \quad 0 < a < \alpha.$$

În acest caz, începînd de la un anumit ordin n

$$|\delta_n(t)| \quad \text{și} \quad |\eta_n(t)| \leq \frac{2C}{2^{2n}} \quad \text{pentru } t \in [0, a].$$

Demonstratie: Deoarece $[y_n(t)| |z_n(t)|, |y(t)|, |z(t)| \leq s(t)$ pentru $t \in [0, a]$, putem alege niște constante λ și μ astfel ca derivatele de ordinul întîi ale lui f și g să fie mărginite în valoare absolută pe $(t, y(t), z(t))$ și $(t, y_n(t), z_n(t))$ de $\frac{\Delta}{2}$, iar derivatele de ordinul al doilea de $\frac{\mu}{2}$, pentru $n = 0, 1, \dots$ și $t \in [0, a]$.

Cu ajutorul formulei mediei găsim :

$$\begin{aligned} f(t, y, z) - f(t, y_n, z_n) &= f_y(t, y_n + \theta_1 \delta_n, z) \delta_n + f_z(t, y_n, z_n + \theta_1 \eta_n) \eta_n = \\ &= f_y(t, y_n, z) \delta_n + f_z(t, y_n, z_n) \eta_n + f_{y^2}(t, y_n + \theta_2 \delta_n, z) \theta_1 \delta_n^2 + \\ &+ f_{z^2}(t, y_n, z_n + \theta_3 \eta_n) \theta_1 \eta_n^2 = f_y(t, y_n, z_n) \delta_n + f_z(t, y_n, z_n) \eta_n + \\ &+ f_{y^2}(t, y_n + \theta_2 \delta_n, z) \theta_1 \delta_n^2 + f_{z^2}(t, y_n, z_n + \theta_3 \eta_n) \theta_1 \eta_n^2 + f_{yz}(t, y_n, z_n + \theta_4 \eta_n) \delta_n \eta_n. \end{aligned}$$

Rezultă deci că,

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}(t) &= f_y(t, y_n, z_n) \delta_{n+1} + f_z(t, y_n, z_n) \eta_{n+1} + f_{y^2}(t, y_n + \theta_2 \delta_n, z) \theta_1 \delta_n^2 + \\ &+ f_{z^2}(t, y_n, z_n + \theta_3 \eta_n) \theta_1 \eta_n^2 + f_{yz}(t, y_n, z_n + \theta_4 \eta_n) \delta_n \eta_n. \end{aligned}$$

Prin majorări adecvate găsim

$$|\delta'_{n+1}(t)| \leq \frac{\lambda}{2} (|\delta_{n+1}(t)| + |\gamma_{n+1}(t)|) + \frac{\mu}{2} (|\delta_n(t)| + |\gamma_n(t)|)^2$$

și în mod analog

$$|\gamma'_{n+1}(t)| \leq \frac{\lambda}{2} (|\delta_{n+1}(t)| + |\gamma_{n+1}(t)|) + \frac{\mu}{2} (|\delta_n(t)| + |\gamma_n(t)|)^2$$

Dar $D_+ |\delta_{n+1}| \leq \delta'_{n+1}$ și $D_+ |\gamma_{n+1}| \leq \gamma'_{n+1}$

și în consecință :

$$D_+ (|\delta_{n+1}(t)| + |\gamma_{n+1}(t)|) \leq \lambda (|\delta_{n+1}(t)| + |\gamma_{n+1}(t)|) + \mu (|\delta_n(t)| + |\gamma_n(t)|)^2 \quad (7)$$

Evident $|\delta_{n+1}(0) + |\gamma_{n+1}(0)| = 0$.

Să înlocuim (7) cu problema

$$\Delta'_{n+1}(t) = \lambda \Delta_{n+1}(t) + \mu \Delta_n^2(t), \quad \Delta_{n+1}(0) = 0$$

și $\Delta_0(t) = |\delta_0(t)| + |\gamma_0(t)|$.

Dacă $\Delta_p(t) \leq C$, unde $C = 1/2 \mu a e^{\lambda a}$, (un astfel de p există în virtutea convergenței șirului) se poate demonstra reproducând raționamentul lui L u z i n [3] că șirul $\Delta_n(t)$ tinde la zero ca și $2 C/2^{2^n}$, începînd de la rangul p . Prin urmare și, $|\delta_n(t)| + |\gamma_n(t)|$ conform lemei 2 va avea aceeași viteză de convergență. Cu atît mai mult atunci au loc inegalitățile din concluzia teoremei.

O b s e r v a Ț i e 1. După cum rezultă din [2] dacă domeniului ω i-se impune restricția $\|u\| \leq b$ și $\|v\| \leq b$ atunci rezultatele rămîn valabile pe un interval $I' \leq I$ astfel ca pe acest interval $s(t) \leq b$. De asemenea alegerea particulară a aproximației de ordinul zero, nu este esențială în aceste rezultate.

O b s e r v a Ț i e 2. Evident ordinul de convergență se păstrează și dacă impunem condițiile suplimentare din [1]. Prin urmare ordinul dat acolo se poate îmbunătăți pînă la 2^{2^n} .

B I B L I O G R A F I E

1. G. A. A r t e m o v, *Ob odnom vidoizmenenii metoda Ciaplighina dlia sistem obtknovennih differentsialnih uravnenii pervogo poriadka*. DAN SSSR, **101**, 2, 197—200 (1955).
2. Z. K o w a l s k i, *An Iterative Method of Solving Differential Equations*. Annales Polonici Mathematici **XII**, 3, 213—230 (1963).
3. N. N. L u z i n, *Sobranie socineniia II*, Moskva, 145—208 (1956).
4. W. W a l t e r, *Differential- und Integral-Ungleichungen*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New-York, 81—89 (1964).
5. T. W a z e w s k i, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires et leurs applications*. Ann. Soc. Pol. Math. **XXIII**, 112—166 (1950).

О МЕТОДЕ ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Как известно, метод Чаплыгина даёт монотонный быстро сходящийся ряд функций к решению уравнения или системы уравнений. Однако для его применения следует предположить монотонность правых членов дифференциальных уравнений, а также их выпуклость определённого типа [1,4]. Сверх того, затруднения представляет нахождение начальной аппроксимации.

Автор работы показывает, используя общую теорему З. Ковальского [2], что оба неудобства можно преодолеть, отказываясь от монотонности аппроксимирующего ряда. Как следует из теоремы 2, сходимость является того же порядка, что и в случае одного уравнения, имеющего дополнительные условия выпуклости [3], т. е. порядок 2^{-2^n} . Этот порядок улучшает результат [4].

OBSERVATIONS RELATIVES A LA MÉTHODE DE TCHAPLYGUINE
POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

(Résumé)

On sait que la méthode de Tchapyguine nous fournit une série monotone de fonctions convergeant rapidement vers la solution de l'équation ou du système d'équations étudié. Mais son application suppose la monotonie des membres droits des équations différentielles ainsi que la convexité d'un certain type de celles-ci [1, 4]. En outre, la recherche de l'approximation initiale offre des difficultés.

L'auteur montre dans sa note, en utilisant un théorème général de Z. Kowalski [2], que ces deux inconvénients peuvent être écartés en renonçant à la monotonie de la série approximante. Comme il résulte du théorème 2, la convergence est du même ordre que celle du cas d'une seule équation aux conditions supplémentaires de convexité [3], c'est à dire d'ordre 2^{-2^n} . Cet ordre améliore le résultat de [4].

ASUPRA PREZENȚEI CELUI DE-AL TREILEA CORP ÎN SISTEMELE SW CYGNI, Z DRACONIS ȘI RT PERSEI

de
IOAN TODORAN

Studiul variației perioadei unor stele variabile, bazat pe analiza diferențelor dintre momentele minimelor observate și cele calculate (0—C), a condus la câteva ipoteze referitoare la explicarea cauzei care ar putea provoca variația respectivă.

La unele binare fotometrice s-a observat că perioada sistemului respectiv este supusă unor variații periodice, curba 0—C-urilor putând fi reprezentată printr-o sinusoidă. În asemenea cazuri, pentru explicarea cauzei variației perioadei sistemului dublu, se fac două ipoteze: a) mișcarea liniei apsidale și b) prezența unui al treilea corp.

Perioada sinusoidelor 0—C-urilor fiind destul de lungă — aproximativ 30—40 de ani —, a împus cercetătorilor, în majoritatea cazurilor, să se bazeze pe un singur ciclu sau, uneori, pe un ciclu incomplet. Dar, practica observațională a arătat că examinarea unui singur ciclu din variația perioadei, nu poate duce la concluzii durabile deoarece, în majoritatea cazurilor, observațiile ulterioare arată că ciclul respectiv se modifică atât în ceea ce privește durata cât și forma sa.

În cele ce urmează, vom arăta că variația perioadei la sistemele SW Cygni, Z Draconis și RT Persei, cunoscute în literatura astronomică ca „sisteme triple”, nu poate fi explicată prin presupunerea existenței unui al treilea corp.

SW Cygni. Variația perioadei sistemului SW Cygni a fost pusă în evidență de S. N. Blajko [32] în anul 1925 când determină elementele parabolice

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2417128,356 + 4^d572856. E - 0^d60 \cdot 10^{-7} \cdot E^2$$

iar în anul 1930, P. P. Parenago [32] redetermină noi elemente parabolice

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2418440, 758 + 4^d5728184. E - 0^d706 \cdot 10^{-7} \cdot E^2$$

În anul 1939, R.S. Dugan și F. W. Wright [32] reiau studiul variației perioadei sistemului SW Cygni și, bazați pe un ciclu incomplet,

admit ipoteza prezenței unui al treilea corp, perioada de rotație a sistemului dublu în jurul centrului de greutate al sistemului triplu fiind $\pi = 3500 \cdot P$ ($P =$ perioada în sistemul dublu) iar amplitudinea $A = 0,012$.

În anul 1954, N. P. Slovohotova [32] reia studiul prezenței celui de-al treilea corp în sistemul *SW Cygni* și, bazându-se pe un ciclu aproape complet și utilizând metoda lui J. V o l t j e r, determină elementele „sistemului triplu” cu perioada $\pi = 4405 \cdot P$.

Observațiile efectuate după anul 1954 au arătat însă că elementele determinate de N. P. Slovohotova [32] în ipoteza celui de al treilea corp nu mai corespund. Astfel, G. A. L a n g e [17], [18] arată că noile observații nu pot fi reprezentate prin elementele deduse în ipoteza sistemului triplu.

Problema variației perioadei la sistemul *SW Cygni* este reluată de H. S c h n e l l e r [27] care găsește pentru perioada π o valoare cu aproximativ 10% mai mare decât aceea determinată de N. P. Slovohotova. În concluzie, H. Schneller arată că ipoteza celui de-al treilea corp nu poate explica variația perioadei și cercetează instabilitatea componentelor arătând că sistemul *SW Cygni* este o binară semi-detașată.

La Observatorul astronomic din Cluj am efectuat 152 evaluări directe și 40 pe plăci fotografice din care au rezultat trei minime normale care sînt date în tabelul 1.

Tabel 1

D. J. hel. 24	E	0-C	0-C ₁	0-C ₂	0-C ₃	Observatori și surse
14658,986	- 827	+0,171	-0,060	-0,010		N.P. Slovohotova (32)
14928,787	- 768	+0,170	-0,049	-0,006		„
15491,254	- 645	+0,168	-0,026	0,000		„
16433,276	- 439	+0,170	+0,015	+0,013		„
17366,144	- 235	+0,163	+0,045	+0,015		„
18619,098	+ 39	+0,138	+0,067	-0,003		„
19341,603	+ 197	+0,123	+0,075	+0,012		„
21472,487	+ 663	+0,028	+0,044		+0,004	„
23996,623	+1215	-0,085	-0,010		-0,008	„
24961,482	+1426	-0,111	-0,018		-0,004	„
28322,515	+2161	-0,171	-0,036		+0,004	„
33087,501	+3203	-0,163	-0,023		+0,006	„
33156,093	+3218	-0,164	-0,025		+0,003	G. A. Lange [17]
34070,686	+3418	-0,156	-0,022		-0,002	„
34157,572	+3437	-0,154	-0,022		-0,002	N. S. Slovohotova
34322,201	+3473	-0,150	-0,020		-0,002	G. A. Lange [17]
34683,476	+3552	-0,135	-0,008		+0,005	H. Schneller [27]
35296,254	+3686	-0,128	-0,008		-0,002	G. A. Lange [17]
35963,916	+3832	-0,101	0,000		-0,003	H. Schneller [27]
36439,496	+3936	-0,115	-0,010		-0,021	G. A. Lange [17]
36787,052	+4012	-0,100	-0,001		-0,018	„ [18]
37436,454	+4154	-0,052	+0,036		+0,007	I. Todoran
38264,16	+4335	-0,04	+0,03		-0,03	K. Kordylewski [11]
38296,195	+4342	-0,019	+0,053		+0,007	I. Todoran
38625,469	+4414	+0,005	+0,070		+0,018	„

Pentru examinarea modului în care variază perioada sistemului *SW Cygni*, am plecat de la tabloul minimelor normale întocmit de N. P. Slovohotova [32], completându-l cu minimele normale obținute ulterior de diferiți autori, rezultatele fiind date în tabelul 1, unde diferențele $0-C$ sunt raportate la elementele lineare

$$\text{Min.hel.} = D.J. 2418440,616 + 4^d,5729153, E \quad (1)$$

Reprezentarea grafică a diferențelor $0-C$ în funcție de numărul de perioade (E) este dată în fig. 1, de unde se vede clar că nu putem vorbi de o sinusoidă ci mai curînd de un arc de parabolă sau eventual „o porțiune

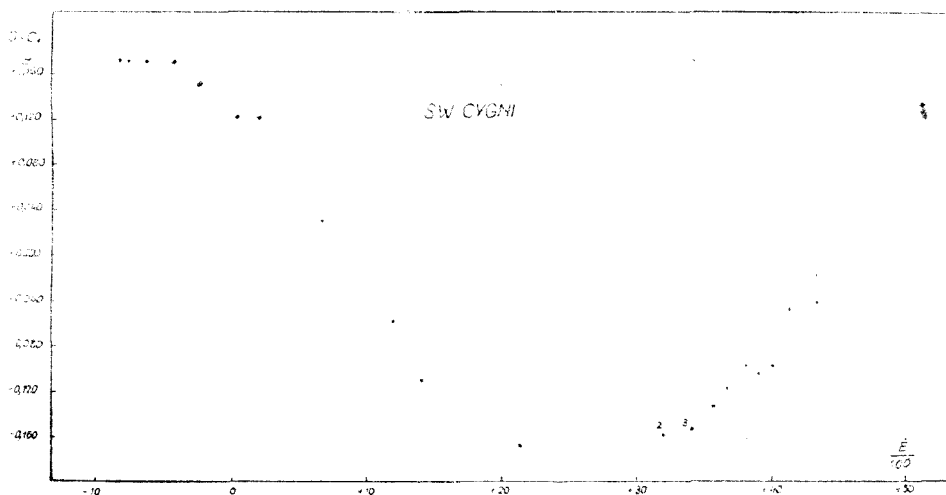


Fig. 1.

dintr-o sinusoidă“ cu perioada π mult mai mare decît se cunoștea pînă acum. Prin urmare, considerăm că încă nu poate fi vorba, deocamdată, de examinarea prezenței unui al treilea corp, extrapolarea pe care ar trebui s-o facem ar putea să ne ducă la rezultate prea puțin sigure.

Dacă admitem că printre punctele din fig. 1 ar trece un arc de parabolă, atunci prin rezolvarea unui sistem de 25 ecuații de condiție de forma

$$0-C = \Delta T + E \cdot \Delta P + q \cdot E^2 \quad (2)$$

rezultă următoarele elemente parabolice:

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2418440, 694 + 4^d,572754 \cdot E + 2^d,918 \cdot 10^{-8} \cdot E^2 \quad (3)$$

Cu ajutorul acestor elemente am calculat diferențele $0-C_1$ din tabelul 1 iar reprezentarea lor grafică este dată în fig. 2, de unde rezultă că noua

diagramă obținută are fluctuații periodice, însă nu putem găsi o singură funcție periodică care să reprezinte în întregime curba respectivă.

Utilizarea elementelor parabolice (3) a redus mult amplitudinea diagramei $0-C$ -urilor (cu aproximativ $0^d,2$) însă, cu toate acestea, nici aceste elemente nu verifică bine observațiile. Din fig. 2 se vede că prima serie de observații ($-1000 < E < +200$) pot fi reprezentate prin elementele (3) aducând

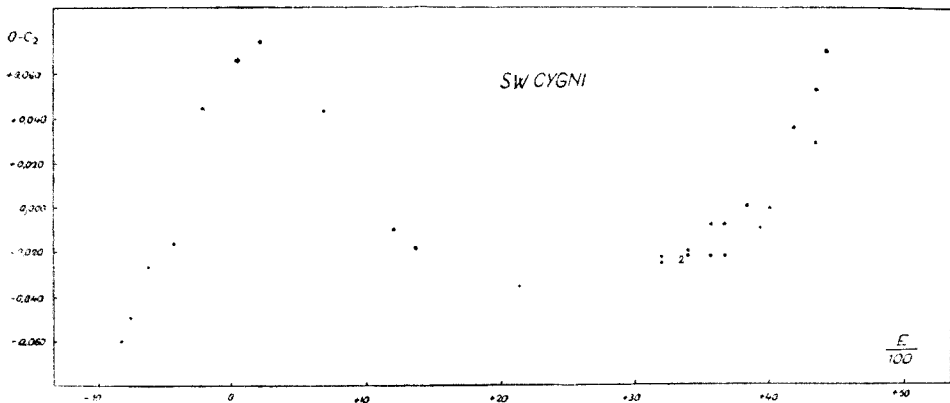


Fig. 2

corecțiile corespunzătoare primilor doi termeni, iar celelalte observații ($0 < E < 4500$) vor putea fi reprezentate prin noi elemente parabolice obținute din (3) prin determinarea corecțiilor corespunzătoare tuturor celor trei termeni. În acest mod obținem

$$\text{Min. hel.} = D.J.2418440,756 \pm 7 + 4,572890 \pm 12 \cdot E + 2,918 \pm 405 \cdot 10^{-8} \cdot E^2$$

pentru prima serie de observații ($-1000 < E < +250$) cu ajutorul cărora am calculat diferențele $0-C_2$, și

$$\text{Min. hel.} = D.J.2418440,807 \pm 15 + 4,572628 \pm 13 \cdot E + 5,463 \pm 236 \cdot 10^{-8} \cdot E^2 \quad (5)$$

pentru a doua serie de observații ($0 < E < 4500$) la care sînt raportate diferențele $0-C_3$.

Din rezultatele obținute aici se vede că pentru fiecare serie de observații putem determina elemente de forma

$$T_{\text{min.}} = T_0 + P_0 E + q \cdot E^2 \quad (6)$$

unde T_0 este epoca inițială iar P_0 reprezintă perioada medie presupusă constantă.

Dacă admitem că perioada P este egală cu diferența de timp dintre două minime consecutive, atunci putem scrie

$$P = T_{(E+1)} - T_E = P_0 + 2qE + q$$

sau neglijînd termenul liber q care, de obicei, este foarte mic, obținem

$$P = P_0 + 2qE. \quad (7)$$

De aici rezultă că, în ipotezele făcute mai sus, perioada variază proporțional cu numărul de perioade (E), adică proporțional cu timpul. Sensul de variație al lui P este dat de semnul lui q ; perioada se micșorează cînd $q < 0$ și crește cînd $q > 0$.

Pentru perioadele de timp cărora le corespund elementele (4) și (5) deduse mai sus, putem considera P_0 și q constante, atunci din (7) rezultă

$$dP = 2qdE \quad (8)$$

adică variația perioadei pe unitate de timp egală cu perioada P .

În cazul sistemului *SW Cygni*, utilizînd valorile lui q din elementele (4) și (5), obținem

$$2q_1 = 5,836 \cdot 10^{-8} \quad \text{pentru intervalul } -1000 \leq E \leq +200, \text{ și}$$

$$2q_2 = 10,926 \cdot 10^{-8} \quad ,, \quad ,, \quad 0 \leq E \leq 4500.$$

Variația perioadei pusă aici în evidență, poate fi legată de instabilitatea componentelor sistemului.

Z. Kopal [9] încadrează binara *SW Cygni* între sistemele semi-detașate cu componenta secundară în contact cu prima suprafață echipotențială critică. De asemenea, problema instabilității acestui sistem este studiată și de H. Schneller [27] care ajunge la aceeași concluzie — sistemul *SW Cygni* este o binară semi-detașată.

Atît Kopal cît și Schneller utilizează aceleași raze determinate de H. Shapley [31] din observații vizuale obținute cu un fotometru polarizator.

În anul 1925, din observații vizuale efectuate de A. A. Nijland, J. Feltlar [43] redetermină constantele sistemului *SW Cygni* și obține pentru cele două componente: $r_1 = 0,098$ și $r_2 = 0,350$. Utilizînd masele determinate de Kopal și razele calculate de Feltlar, ajungem la concluzia că raza componentei secundare, în direcția perpendiculară la planul orbital, depășește cea de a doua suprafață echipotențială critică cu 0,032 unități din raza orbitei.

Oricare ar fi elementele utilizate, instabilitatea componentei secundare este sigură, iar variația perioadei poate fi pusă în legătură cu această instabilitate. În acest scop vom utiliza două relații [41] care exprimă variația perioadei în funcție de variația masei m_2 a componentei secundare

$$\frac{dP}{P} = (z - 3) \frac{dm_2}{m_2} \quad (9)$$

pentru cazul cînd componenta secundară pierde masă în afara sistemului dublu, și

$$\frac{dP}{P} = -3 \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \frac{dm_2}{m_2} \quad (10)$$

pentru cazul cînd există o scurgere de masă de la componenta secundară spre componenta principală.

În expresiile (9) și (10) am notat $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$, unde $m_2 < m_1$ adică valoarea lui α este cuprinsă între 0,0 și 0,5.

Din examinarea expresiilor (9) și (10) rezultă că totdeauna valoarea lui dP va avea semnul opus față de dm_2 , ceea ce este în deplină corcondanță cu observațiile ($q_1 > 0$, $q_2 > 0$) adică perioada crește cînd are loc pierdere de masă ($dm_2 < 0$).

Compararea relațiilor (9) și (10) cu relația (8) ne arată că în ipoteza cînd variația perioadei ar fi cauzată numai de variația masei componentei secundare, am putea calcula această variație dm_2 corespunzătoare celor două intervale de timp pentru care sînt determinate valorile lui q din elementele (4) și (5). În cazul sistemului SW *Cygni*, această variație este de ordinul a -10^{-8} mase solare pe an.

Z Draconis. Variația perioadei sistemului *Z Draconis* a fost pusă în evidență de către R. S. D u g a n [29] care, pe baza observațiilor efectuate între anii 1890—1915, stabilește primele elemente periodice.

$$\begin{aligned} \text{Min. hel.} = & D.J. 2418388,63736 + 1^d 3574258 E - 0^d 0069 \sin(0^\circ, 050 E \\ & + 42^\circ) + 0^d 0028 \sin(0^\circ, 125 E - 4^\circ). \end{aligned}$$

S. N. B l a j k o [29], bazat pe observațiile efectuate între anii 1903—1921, determină de asemenea un sistem de elemente periodice, iar I. I s c e n k o [4], bazat pe 172 minime observate de diferiți observatori, stabilește următoarele elemente periodice

$$\begin{aligned} \text{Min. hel.} = & D.J. 2416177,410 + 1,3574225 E + \\ & + 0^d 0209 \sin \left[(E - 4200) \frac{360}{10400} \right] \end{aligned}$$

Din elementele obținute, I. Iscenko trage concluzia că variația perioadei acestui sistem este cauzată de prezența unui al treilea corp și determină, în această, ipoteză valorile constantelor „sistemului triplu”.

În anul 1956, G. A. L a n g e [14] arată că noile observații nu sînt verificate de elementele deduse în ipoteza celui de al treilea corp.

Problema existenței celui de al treilea corp în sistemul *Z Draconis* a mai fost studiată de E. I l e ș - A l m a r și I. A l m a r [1], care, în anul 1960, redetermină constantele sistemului presupus triplu.

În legătură cu prezența celui de al treilea corp în sistemul *Z Draconis*, H. S c h n e l l e r [28] arată că elementele deduse în această ipoteză nu

verifică noile observații și calculează abaterea minimelor observate față de momentele calculate cu elementele obținute de E. Almar și I. Almar. De asemenea, H. Schneller trage concluzia că nu se poate găsi nici o funcție periodică care să poată reprezenta diagrama 0—C-urilor.

La Observatorul astronomic din Cluj au fost efectuate 65 observații fotografice pentru determinarea momentelor minimelor, iar diferențele 0—C au condus la cercetarea modului de variație al perioadei în vederea confirmării sau infirmării ipotezei prezenței celui de al treilea corp în sistemul *Z Draconis*. În acest scop am utilizat tabelul minimelor normale întocmit de I. Iscenko [4] pe care l-am completat cu minimele observate de diferiți astronomi după publicarea lucrării acestuia. Am dispus astfel de 35 minime care sînt date în tabelul 2 (tabelul minimelor individuale).

Tabel 2

Min. hel. 243	0—C	E	Observatori și surse
	<i>a</i>		
2790,8965	—0,0389	10610	G. A. Lange [14]
3005,366	—0,043	10768	A. Szczepanowska [36]
3032,515	—0,042	10788	„
3066,452	—0,041	10813	„
3172,331	—0,041	10891	„ [37]
3184,547	—0,042	10900	„
3385,447	—0,041	11048	„
3628,4284	—0,0385	11227	M. F. Lenouvel [22]
3799,465	0,038	11353	A. Szczepanowska [37]
3890,415	—0,035	11420	„
3928,422	—0,036	11448	„
4490,408	—0,024	11862	„ [38]
4661,441	—0,027	11988	„
4848,769	—0,023	12126	R. H. Koch [6]
5360,527	—0,015	12503	A. Kruszewski [12]
5371,382	—0,019	12511	A. Szczepanowska [38]
5394,4545	—0,0230	12528	G. A. Lange [14]
5713,4563	—0,0162	12763	J. Lazarewicz [21]
5743,321	—0,015	12785	A. Szczepanowska [39]
5762,324	—0,016	12799	„
5876,353	—0,011	12883	J. Kordylewski [10]
5930,648	—0,013	12923	„
6047,384	—0,015	13009	E. A. Sataiova [26]
6051,455	—0,016	13012	„
6070,463	—0,012	13026	„
6074,531	—0,017	13029	„
6081,322	—0,013	13034	„
6112,538	—0,018	13057	G. A. Lange [46]
6662,3028	—0,0101	13462	K. Kordylewski [46]
7202,5667	—0,0015	13860	J. Rodzinki [46]
7202,5674	—0,0008	13860	Z. Szpor [46]
7202,5681	—0,0001	13860	B. Rubika [46]
7866,3575	+0,0082	14349	I. Todoran
8151,4175	+0,0088	14559	„
8246,4350	+0,0066	14629	„
8626,5200	+0,0124	14909	„

Minimele individuale din tabelul 2 au fost grupate în 11 minime normale care sînt date în ultima parte a tabelului 3, unde primele 26 minime normale sînt reproduse din lucrarea lui I. Iscenko [4].

În tabelele 2 și 3, diferențele $0-C$ sînt raportate la elementele lineare

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2418388,6508 + 1,3574255 \cdot E$$

Tabel 3

Min. hel. 24.	E	O-C	O-C ₁	O-C ₂
16152,6950	- 1647	^d -0,0060	^d +0,0030	
16223,5506	- 1595	-0,0065	+0,0028	
16383,7244	- 1477	-0,0089	+0,0012	
16743,4387	- 1212	-0,0124	-0,0005	
16948,4072	- 1061	-0,0151	-0,0024	
17389,5693	- 736	-0,0163	-0,0018	
17800,8677	- 433	-0,0179	-0,0021	
18084,5689	- 224	-0,0186	-0,0022	
18290,8980	- 72	-0,0182	-0,0014	
18942,4624	+ 408	-0,0180	-0,0006	
19782,7081	+ 1027	-0,0187	-0,0015	
20544,2266	+ 1588	-0,0159	-0,0002	
21516,1517	+ 2304	-0,0075	+0,0049	
22222,0143	+ 2824	-0,0061	+0,0025	
22925,1620	+ 3342	-0,0048	-0,0006	
23757,2742	+ 3955	+0,0055	+0,0032	
24418,3423	+ 4442	+0,0074	-0,0011	
24627,3882	+ 4596	+0,0098	-0,0009	
24828,2873	+ 4744	+0,0099	-0,0021	
25584,3743	+ 5301	+0,0109		^d -0,0050
26250,8648	+ 5792	+0,0055		-0,0009
26978,4375	+ 6328	-0,0019		+0,0009
27684,2893	+ 6848	-0,0113		+0,0002
28459,3704	+ 7419	-0,0202		-0,0025
29116,3681	+ 7903	-0,0164		+0,0063
30019,0520	+ 8568	-0,0205		+0,0076
32790,8965	+10610	-0,0389		-0,0072
33142,4671	+10869	-0,0415		-0,0103
33811,6851	+11362	-0,0342		-0,0053
34666,8727	+11992	-0,0247		-0,0001
35375,4544	+12514	-0,0191		+0,0005
35805,7634	+12831	-0,0140		+0,0020
36070,4602	+13026	-0,0152		+0,0006
36662,3028	+13462	-0,0101		+0,0011
37202,5674	+13860	-0,0008		-0,0045
37866,3575	+14349	+0,0082		-0,0015
38341,4575	+14699	+0,0093		-0,0025

Reprezentarea grafică a diferențelor $0-C$ din tabelul 3 în funcție de numărul de perioade (E), este dată în fig. 3, de unde se vede că există anumite fluctuații periodice, însă, așa cum a arătat deja H. Schneller, aceste diferențe nu pot fi reprezentate printr-o funcție periodică. Prin urmare, ipo-

teza prezenței celui de al treilea corp nu poate sta la baza explicării cauzei variației perioadei sistemului *Z Draconis*.

Modul de cercetare al variației perioadei sistemului *SW Cygni* poate fi aplicat și în cazul sistemului *Z Draconis*. Într-adevăr, examinarea graficului din fig. 3 ne arată că este mult mai ușor de reprezentat observațiile

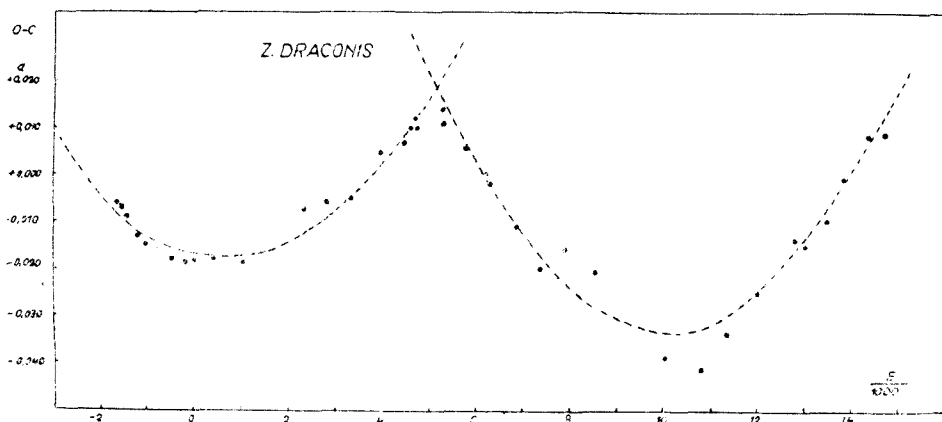


Fig. 3.

prin două arce de parabolă decât printr-o sinusoidă. În acest mod se obțin următoarele elemente parabolice :

$$\text{Min. hel.} = D.J. \underset{\pm 52}{2418388,6339} + \underset{\pm 52}{1,3574235} \cdot E + \underset{\pm 154}{1,740 \cdot 10^{-9}} \cdot E^2 \quad (11)$$

pentru observațiile efectuate între anii 1900–1928 ($-1700 \leq E \leq +5000$), și

$$\text{Min. hel.} = D.J. \underset{\pm 148}{2418388,8353} + \underset{\pm 32}{1,3573823} \cdot E + \underset{\pm 158}{2,149 \cdot 10^{-9}} \cdot E \quad (12)$$

pentru observațiile efectuate între anii 1928–1964 ($+5000 \leq E \leq 15000$).

Utilizând expresia (8), din elementele (11) și (12) obținem pentru unitatea de timp egală cu perioada,

$$dP_1 = 3,480 \cdot 10^{-9} dE \text{ pentru prima serie de observații, și}$$

$$dP_2 = 4,298 \cdot 10^{-9} dE \text{ pentru a doua serie de observații}$$

Instabilitatea sistemului *Z Draconis* este semnalată de Z. K o p a l și M. B. S h a p l e y [8] care redetermină constantele orbitei fotometrice și razele celor două componente din observațiile fotometrice vizuale efectuate de R.S. Dugan. Dacă însă, luăm în considerare razele determinate, I. I s c e n k o [4] din observații fotografice, instabilitatea este și mai mare. Astfel,

luind masele determinate de Z. Kopal și M. B. Shapley ($m_1 = 1,4 m_{\odot}$ și $m_2 = 0,38 m_{\odot}$ și razele determinate de I. Iscenko ($r_1 = 0,187$ și $r_2 = 0,301$) se obțin următoarele rezultate :

$$a'_2 - r_2 = -0,004, \quad b'_2 - r_2 = -0,037, \quad c'_2 - r_2 = -0,047$$

unde a'_2 , b'_2 și c'_2 reprezintă dimensiunile primei suprafețe echipotențiale critice corespunzătoare ovalului din jurul componentei secundare.

Dacă luăm ca unitate de timp anul, putem exprima pierderea de masă în unități de masă solară pe an; se obține astfel:

$$\dot{m}_2 \approx -10^{-7} \text{ mase solare pe an.}$$

RT Persei. Variația luminozității sistemului *RT Persei* a fost descoperită de L. C e r a s k i [1] în anul 1904 la Observatorul din Moscova. De atunci și pînă în prezent s-a adunat un mare număr de observații a căror prelucrare a condus la unele rezultate care au fost, uneori, infirmate de observațiile ulterioare. Astfel, R. S. D u g a n [45], în anul 1915, pune în evidență variația perioadei și presupune că aceasta este cauzată de mișcarea liniei apszilor și prezența unui al treilea corp. În 1938, același autor analizînd curba 0—C-urilor, constată că aceste diferențe sînt reprezentate prin aceeași curbă atît pentru minimul principal cît și pentru cel secundar. Deci, ipoteza mișcării liniei apsidale este infirmată de însuși autorul ei, urmînd ca variația perioadei să fie explicată prin presupusa existență a celui de-al treilea corp. În acest mod, R.S. Dugan [45] și A. A. V a s i l i e v a [45] au încercat să explice variația perioadei sistemului *RT Persei*. În urma acestor cercetări, A.A. Vasilieva își întitulează lucrarea „Sistemul triplu RT Persei“, însă ulterior, diferiți astronomi ca Z. K o p a l [8], G. A. L a n g e [14] pun la îndoială prezența unui al treilea corp. În „Catalogul general de stele variabile“ [13] se menționează că ciclul de 16 000 zile care a fost stabilit de A. A. Vasilieva nu verifică observațiile efectuate ulterior.

Într-o lucrare recent apărută, H. S c h n e l l e r [30] arată de asemenea că elementele deduse de S c o t t (*H. B.* 912, 3, 1940) cu ciclul de 13590 zile, nu verifică noile observații.

La Observatorul din Cluj, steaua variabilă *RT Persei* a fost introdusă în planul de observații pentru observații de minime. Astfel între 26. XI. 1959 și 4. X. 1964 s-au efectuat de către întregul colectiv un număr de 129 expuneri fotografice din care s-au determinat momentele a 15 minime principale care sînt date în tabelul 4. De asemenea au fost efectuate 39 evaluări vizuale directe din care au rezultat 5 minime principale (tabel 4).

Pentru examinarea modului de variație a perioadei am plecat de la tabloul minimelor normale întocmit de A.A.Vasilieva [45], pe care l-am completat cu încă 10 minime normale care au rezultat din tabelul 4, rezultatele fiind date în tabelul 5. În tabelele 4 și 5, diferențele 0—C sînt raportate la elementele lineare date de Vasilieva :

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2424553,248 + 0^d 84940765 \cdot E$$

Reprezentarea grafică a diferențelor 0—C în funcție de numărul de perioade (E) este dată în fig. 4, de unde se vede că perioada are fluctuații

Tabel 4

Min. hel. D.J. 243	n	O—C	E	Observatori și surse
		<i>d</i>		
3159,450		+0,004	10132	B. A. Ustinov [44]
3509,408		+0,006	10544	"
3532,340		+0,004	10571	"
3543,383		+0,004	10584	"
4634,868		+0,001	11869	I. C. Koch, R. H. Koch [7]
5364,505	15	-0,004	12728	V. P. Tsesevich [43]
5444,346	18	-0,007	12822	G. A. Lange [14]
5444,3554	21	+0,0025	12822	V. M. Grigorevski [3]
5445,2033	21	+0,0010	12823	"
5445,201	18	-0,001	12823	G. A. Lange [14]
5451,147	12	-0,001	12830	"
5451,1488	15	+0,0007	12830	V. M. Grigorevski [3]
5456,240	19	-0,005	12836	G. A. Lange [14]
5495,3193	28	+0,0020	12882	G. A. Lange [15]
5669,4423	10	-0,0036	13087	"
5691,5268	18	-0,0037	13113	"
5719,5495	16	-0,0115	13146	"
5726,3494	16	-0,0068	13154	"
5742,4876	13	-0,0074	13173	"
5742,4936	23	-0,0014	13173	S. D. Markovski [24]
5743,3430	24	-0,0014	13174	G. A. Lange [15]
5748,4339	28	-0,0069	13180	"
5748,4353	28	-0,0055	13180	N. X. Izraetskaia [5]
5749,2773	24	-0,0129	13181	G. A. Lange [15]
6069,5144	30	-0,0025	13558	O. E. Mandel [23]
6075,4620	22	-0,0008	13565	"
6075,4533	23	-0,0095	13565	G. A. Lange [16]
6081,3982	20	-0,0104	13572	"
6081,4094	25	+0,0008	13572	O. E. Mandel [23]
6104,3318	20	-0,0108	13599	G. A. Lange [16]
6256,379	11	-0,008	13778	R. Szafraniec [34]
6453,438	9	-0,011	14010	"
6629,265	8	-0,012	14217	" [35]
6809,339	16	-0,012	14429	G. A. Lange [18]
6814,432	18	-0,015	14435	"
6849,263	16	-0,010	14476	"
6894,285	14	-0,007	14529	"
6899,370	8	-0,018	14535	I. Todoran
7163,536	4	-0,018	14846	"
7175,425	8	-0,021	14860	"
7180,528	11	-0,014	14866	"
7181,373	5	-0,019	14867	"
7192,419	9	-0,015	14880	"
7197,516	5	-0,014	14886	"
7208,552	7	-0,021	14899	"
7284,156	14	-0,014	14988	G. A. Lange, R. K. Ka- nisheva [20]
7519,437	15	-0,019	15265	G. A. Lange [14]
7525,384	11	-0,018	15272	"
7564,466	9	-0,008	15318	I. Todoran
7564,466	5	-0,008	15318	I. Popa (manuscris)

Tabel 4 (continuare)

Min. hel. 24	n	O-C	E	Observatori și surse
		\bar{d}		
7565,317	8	-0,007	15319	I. Todoran [40]
7565,315	9	-0,009	15319	I. Popa (manuscris)
7570,406	9	-0,014	15325	I. Todoran
7576,359	5	-0,007	15332	I. Todoran [40]
7582,298	28	-0,014	15339	O. Oburka, Brno [25]
7582,298	10	-0,014	15339	G. A. Lange [19]
7605,227	19	-0,019	15366	"
7943,288	7	-0,022	15764	I. Todoran
7976,419	4	-0,018	15803	"
7983,215	5	-0,017	15811	"
8658,490	4	-0,021	16606	"
8659,341	11	-0,020	16607	"
8665,285	6	-0,022	16614	"

Tabel 5

Min. hel. 24	E	O-C	O-C ₁	O-C ₂	O-C ₃	O-C ₄
		\bar{d}	\bar{d}			
13432,7860	-13092	-0,0170	+0,0212			
16122,8727	-9925	-0,0044	+0,0020			
16772,6714	-9160	-0,0025	-0,0038			
17030,8984	-8856	+0,0045	+0,0002			
17244,9501	-8604	+0,0055	-0,0013			
17451,3630	-8361	+0,0124	+0,0031			
17873,5226	-7864	+0,0164	+0,0021			
18278,6960	-7387	+0,0223	+0,0032			
18715,2938	-6873	+0,0246	+0,0003			
19556,2113	-5883	+0,0285	-0,0057			
19997,9038	-5363	+0,0290		\bar{d}		
20394,5755	-4896	+0,0274		-0,0001		
21970,2193	-3041	+0,0200		+0,0005		
23520,3783	-1216	+0,0100		+0,0024		
24279,7404	-322	+0,0017		+0,0015		
24616,9561	+75	+0,0025		-0,0024		
24769,8473	+255	+0,0003		+0,0004		
26092,3649	+1812	-0,0098		-0,0009		
27219,5259	+3139	-0,0127		-0,0032		
28117,3463	+4196	-0,0162		+0,0004		
29542,6530	+5874	-0,0155		+0,0022		
30868,5839	+7435	-0,0100			\bar{d}	
32433,3954	+9289	-0,0003			+0,0021	
33434,6585	+10456	+0,0041			-0,0012	
34634,868	+11869	+0,0006			-0,0019	\bar{d}
35449,4460	+12828	+0,0024			+0,0009	-0,0039
35730,5982	+13159	-0,0051				-0,0004
36104,3366	+13599	-0,0060				+0,0012
36764,3230	+14376	-0,0094				+0,0002
37196,6640	+14885	-0,0169				+0,0015
37565,3113	+15319	-0,0125				+0,0019
37969,6226	+15795	-0,0192				-0,0030
38659,3400	+16607	-0,0208				+0,0035
						-0,0009
						-0,0015

periodice, intervalul dintre două valori maxime fiind de 16 050 perioade (=13 600 zile) care este egal cu acela dat de Scott și mai mic decât ciclul stabilit de A. A. Vasilieva [45].

Examinarea graficului din fig. 4 ne arată că și aici am putea reprezenta observațiile prin elemente parabolice corespunzătoare unor anumite intervale de observații. Astfel prima serie de observații care corespunde intervalului de timp cuprins între anii 1904—1910, ar putea fi reprezentată

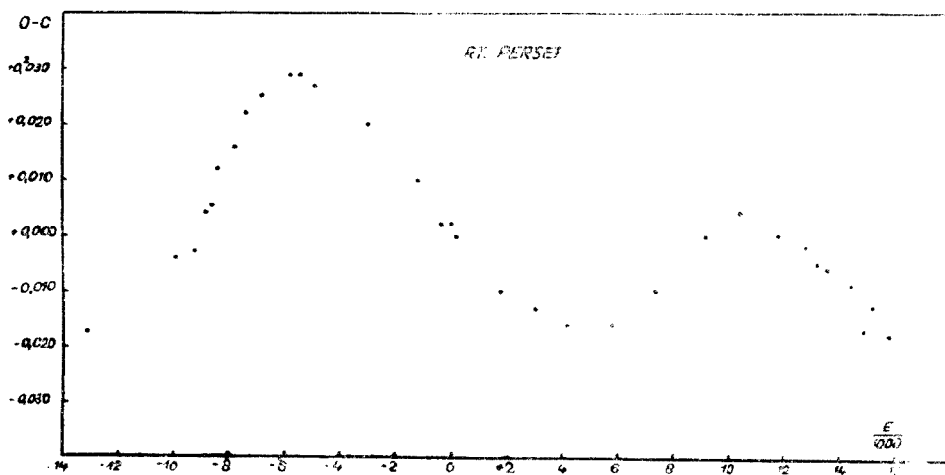


Fig. 4.

printr-un arc de parabolă, însă observațiile sînt prea puține pentru a putea determina elementele parabolice respective. Observațiile dintre anii 1911—1950 pot fi reprezentate prin elemente

$$\text{Min. hel.} = D.J. 2424553,2468 + 0^d,84940379 \cdot E + 3^d,895 \cdot 10^{-10} \cdot E^2 \quad (15)$$

iar ultima serie de observații corespunzătoare anilor 1952—1964 ar putea să aparțină și ea unui arc de parabolă care, deocamdată, nu poate fi determinată.

Coeficientul lui E^2 din (15) ne arată că perioada crește în intervalul de timp corespunzător și, prin urmare, aceste elemente sînt în concordanță cu formulele (9) și (10) pentru cazul instabilității componentei secundare.

Pentru cercetarea instabilității componentelor sistemului *RT Persei* am adunat elementele fotometrice determinate de diferiți autori și masele celor două componente determinate de Z. Kopal în colaborare cu M. B. Shapley [8] și cele determinate de A.A. Vasilieva [45]. Rezultatele obținute sînt aproximativ aceleași, iar aici dăm numai cele obținute utilizînd razele componentelor date de Z. Kopal și M. B. Shapley: $r_1 = 0,310$, $r_2 = 0,255$ și masele $m_1 = 1,4$, $m_2 = 0,35$ determinate de A.A. Vasilieva cu ajutorul razelor și spectrelor corespunzătoare.

Utilizînd metoda și notațiile indicate în cazul sistemului *Z Draconis*, obținem

$$a'_2 - r_2 = + 0,036, \quad b'_2 - r_2 = + 0,003, \quad c'_2 - r_2 = -0,007$$

ceea ce ne arată că, în sistemul *RT Persei*, componenta secundară se află la limita instabilității, fapt care ar putea cauza variația perioadei.

Din graficul 0—C-urilor se poate trage și concluzia că variația perioadei s-ar produce prin salturi bruște între care observațiile pot fi reprezentate prin elemente lineare. În acest scop am determinat următoarele patru serii de elemente :

Min. hel. =	<i>D. J.</i> 2413432,7648	+ 0,84941770 · <i>E</i>	pentru anii	1904—1910
	=	<i>D. J.</i> 2419997,9039	+ 0,84940268 · <i>E</i>	„ „ 1911—1936
	=	<i>D. J.</i> 2429542,6509	+ 0,84941330 · <i>E</i>	„ „ 1938—1950
	=	<i>D. J.</i> 2433434,6624	+ 0,84940272 · <i>E</i>	„ „ 1952—1964

Diferențele 0—C raportate la elementele lineare sînt date în ultimele patru coloane ale tabelului 5, de unde se vede că primul minim normal nu este verificat de elementele lineare ale primei serii de observații ceea ce este în favoarea ipotezei că prima serie de observații ar putea fi reprezentată printr-un arc de parabolă.

Concluzii. Din cercetarea modului de variație a perioadei sistemelor *SW Cygni*, *Z Draconis* și *RT Persei* se desprind următoarele concluzii :

1. ipoteza prezenței unui al treilea corp nu este potrivită pentru cazurile cînd dispunem numai de un singur ciclu, observațiile ulterioare neputînd fi reprezentate de elementele deduse în această ipoteză,
2. sistemele studiate aici sînt binare semi-detașate cu componenta secundară la limita instabilității,
3. minimele observate pot fi reprezentate de elemente parabolice care sînt în concordanță cu ipoteza variației masei componentei secundare.

BIBLIOGRAFIE

1. Almar I., Almar J. E., *Acta Astronomica* **13**, 72, 1963.
2. Ceraski L., *A.N.* **166**, 155, 1904.
3. Grigorevski V. M., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **167**, 22, 1956.
4. Iscenko I., *Tashk. Bull.* **2**, 435.
5. Izraetskaia N. N., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **175**, 20, 1956.
6. Koch R. H., *A.J.* **66**, 35, 1961.
7. Koch I. C., Koch R. H., *A.J.* **67**, 462, 1962.
8. Kopal Z., Shapley M. B., *Jordel Bank Annals* **1**, 140, 1956.
9. Kopal Z., *Annales d'Astrophysique* **19**, 308, 1956.
10. Kordylewski J., *S.A.C.* **29**, 108, 1958.
11. Kordylewski K., *Inform. Bull. on Variable Stars* nr. 35 Budapest.
12. Kruszyewski A., *S.A.C.* **29**, 108, 1958.
13. Kukarkin B. V., Parenago P. P., Efremov Iu. I., Holopov P. N., *Obščii katalog peremennih zvezd*, Moskva 1958.

14. Lange G. A., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **167**, 19, 1956.
15. „ „ „ „ **175**, 19, 1956.
16. „ „ „ „ **190**, 24, 1958.
17. „ „ „ „ **201**, 13, 1959.
18. „ „ „ „ **209**, 24, 1960.
19. „ „ „ „ **228**, 24, 1962.
20. Lange G. A., Konidheva R. K., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **219**, 31, 1961.
21. Lazarevicz J., Pagaczewski B., *Acta Astronomica* **3**, 48, 1958.
22. Lenouvel M. F., *Journal des Observateurs* **34**, 19, 1951.
23. Mandell O. E., *Peremennie zvezdi* **13**, 228, 1960.
24. Markovski S. D., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **177**, 18, 1957.
25. Obourka O. B., *B.A.C.* **14**, nr. 1, pg. 26, 1963.
26. Satanova E. A., *Peremennie zvezdi* **13**, 125, 1960.
27. Schneller H., *A.N.* **287**, 183, 1963.
28. „ „ „ „ *A. N.* **288**, 1, 1964.
29. „ „ „ „ *Geschichte und Literatur der veränderlichen Sterne*, II, 78, 1963.
30. „ „ „ „ *Mitteilungen der Sternwarte der Ungarischen Akad. der Wissenschaften* **53**, 1, 1962.
31. Shapley H., *Princ. Contr.* **3**, 1915.
32. Slovohotova N. P., *Peremennie zvezdi*, **10**, 21, 1954.
33. Struve O., *Ap. J.* **106**, 92, 1947.
34. Szafraniec R., *Acta Astronomica* **9**, 49, 1959.
35. „ „ „ „ **10**, 70, 1960.
36. Szczepanowska A., *Acta Astronomica* **4**, 117, 1954.
37. „ „ „ „ **5**, 75, 1955.
38. „ „ „ „ **6**, 144, 1956.
39. „ „ „ „ **9**, 46, 1959.
40. Todoran I., *Studii și cercetări de astronomie*, **8**, 245, 1963.
41. „ „ „ „ **10**, „, 1965.
42. Tschudovicev N. J., *Biulleten Astronomiceskoi Observatorii imeni V. P. Engelgardta* nr. 28, 1952.
43. Tsesevich V. P., *Astronomiceskii Ţirkuliar* **167**, 20, 1956.
44. Ustinov V., „ „ „ „ **113**, 5, 1951.
45. Vasilieva A. A., *Biulleten Stalinabadskoi Astronomiceskoi Observatorii*, **4**, 1, 1952.
46. * * * *Eclipsing Binaires Circulares*, Krakow, Oct. 1960.

О ПРИСУТСТВИИ ТРЕТЬЕГО ТЕЛА В СИСТЕМАХ *SW CYGNI*, *Z DRAGONIS* И *RT PERSEI*

(Резюме)

Автором исследован вопрос о вариации периодов двойных систем *SW Cygni*, *Z Dragonis* и *RT Persei*. С этой целью автор дополнил новыми наблюдениями таблицу нормальных минимумов, данную различными авторами, и представил графически разницы $O-C$ в зависимости от числа периодов (E), откуда вытекает, что вариацию периода нельзя объяснить гипотезой присутствия третьего тела.

Для представления наблюдений, автор определил параболические элементы для различных промежутков времени. Коэффициент члена второй степени показывает, что в соответствующих промежутках период возрастает пропорционально времени.

В связи с причиной, которая могла бы вызывать исследуемую вариацию периода, автор прослеживал неустойчивость компонентов и получил, что в каждой изучаемой здесь системе, второстепенный компонент находится в пределе неустойчивости. В связи с этим, автор предположил, что вариация периода вызвана вариацией массы вторичного компонента.

SUR LA PRÉSENCE DU TROISIÈME CORPS DANS LES SYSTÈMES
SW CYGNI, Z DRACONIS ET RT PERSEI

(R é s u m é)

L'auteur étudie dans le présent travail le mode de variation des périodes des systèmes binaires *SW Cygni, Z Draconis* et *RT Persei*. A cet effet, il a complété par des observations nouvelles le tableau des minimes normaux donné par divers auteurs et il a représenté graphiquement les différences O—C en fonction du nombre de périodes (E) ; il en est résulté que la variation de la période ne peut pas s'expliquer par l'hypothèse de la présence d'un troisième corps.

Pour représenter les observations l'auteur a déterminé des éléments paraboliques pour différents intervalles de temps ; le coefficient du terme de degré deux montre que, dans les intervalles respectifs, la période croît proportionnellement au temps.

Relativement à la cause qui pourrait produire la variation observée de la période, l'auteur a étudié l'instabilité des composantes, d'où il résulte que, dans chaque système étudié ici, la composante secondaire se trouve à la limite d'instabilité. Cela étant, l'auteur fait la supposition que la variation de la période serait due à la variation de la masse composante secondaire.

ASUPRA OSCILAȚIILOR SUBARMONICE ALE ECUAȚIEI LUI DUFFING

de
AUREL TURCU

În articolul de față se studiază, prin metoda lui Malkin [1], condițiile în care pot lua naștere oscilațiile subarmonice de ordinul $\frac{1}{n}$ ale ecuației lui Duffing [2], de forma :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu(\gamma x^3 - 2H\dot{x}) + \lambda \cos(t + \psi) \equiv \mu(\gamma x^3 - 2H\dot{x}) + F \cos t - G \sin t, \quad (1)$$

unde $k, \gamma \geq 0, H \geq 0, \lambda > 0, \psi, (F > 0, G > 0)$ sînt niște constante iar μ este un parametru mic real.

Vom studia această problemă în prezența amortizării ($H \neq 0$) cu condiția $\psi \neq 0$, dar neprecizat a priori și vom face observații asupra cazului cînd amortizarea lipsește ($H = 0$) iar $\psi = 0$.

Vom arăta că în prezența amortizării condițiile de existență a oscilațiilor subarmonice de ordinul $\frac{1}{3}$ sînt mai exacte decît acelea găsite de Y. H. Ku [4], care studiază această problemă printr-o metodă mai puțin riguroasă propusă de J. S t o k e r [5].

Aceeași problemă, în lipsa amortizării ($H = 0$), cu condiția $\psi = 0$ a fost analizată de V. M e n d e l s o n, ale cărui rezultate sînt expuse în cartea lui I. G. M a l k i n [1].

1. În studiul problemei puse, ecuația lui Duffing (1) poate fi considerată, după cum se știe, ca un caz particular al ecuației cvasiliniare de forma :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x + f(t) = \mu \bar{F}(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2)$$

unde f și F sînt funcții continue, periodice, de perioadă 2π , în raport cu t , dezvoltabile în serie Fourier; \bar{F} este o funcție analitică în raport cu x și \dot{x} , iar μ este un parametru mic real.

Presupunînd că constanta k diferă puțin de $\frac{1}{n}$, unde n e un număr întreg, adică

$$k^2 = \frac{1}{n^2} - \mu \frac{a}{n^2}. \quad (3)$$

(unde a este o mărime pozitivă sau negativă finită) și înglobînd termenul $\mu \frac{a}{n^2} x$ în funcția μF , ecuația (2) se va scrie sub forma :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{n^2}x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (4)$$

Este cunoscut că, spre deosebire de sistemele liniare, în sistemele neliniare, sub acțiunea forțelor excitatoare de perioadă T , pot să apară oscilații forțate intense și în cazul cînd perioada oscilațiilor proprii este apropiată de nT (n fiind un număr întreg diferit de 1), atît în cazul prezenței cît și al lipsei forței de amortizare. (În acest caz perioada oscilațiilor forțate este egală cu nT .) Acest fenomen observat, după M a n d e l ș t a m și P a p a l e x i [3], poartă denumirea de rezonanță de ordinul n , iar oscilațiile care apar se numesc oscilații subarmonice de ordinul $\frac{1}{n}$.

Problema noastră, de determinare a oscilațiilor subarmonice de ordinul $\frac{1}{n}$ se reduce deci la determinarea condițiilor pentru care în sistemul deschis de ecuațiile (4), iau naștere soluții periodice de perioadă $2\pi n$, care nu se reduc la oscilații periodice de perioadă 2π , cînd μ tinde către zero.

Pentru existența unor asemenea soluții, conform rezultatelor lui Malkin, este necesar și suficient ca în descompunerea funcției $F(t, \dot{x}_0, x_0, 0)$, după sinușii și cosinușii unghiurilor multiple de $\frac{t}{n}$, să lipsească termenii în $\cos \frac{t}{n}$ și $\sin \frac{t}{n}$, adică e necesar și suficient să avem :

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin \frac{t}{n} dt = 0 \\ Q(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos \frac{t}{n} dt = 0 \end{cases} \quad (5)$$

iar determinantul funcțional

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0 \quad (6)$$

să fie diferit de zero. În ecuațiile (5), x_0 , dat de expresia

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos \frac{t}{n} + N_0 \sin \frac{t}{n}, \quad (7)$$

unde M_0 și N_0 sînt două constante arbitrare, reprezintă familia de soluții periodice a ecuației generatoare ($\mu = 0$), de perioadă $2\pi n$. Funcția $\varphi(t)$ este soluția periodică particulară a ecuației generatoare neomogene.

2. În cele ce urmează pentru studiul ecuației lui Duffing (1), vom alege așa fel unitatea de timp încît partea dreaptă a ecuației (1) să aibă perioada $\frac{2\pi}{n}$.

În acest caz problema constă în a determina condițiile pentru care ecuația lui Duffing are soluții periodice de perioadă 2π și care nu se reduc la soluția periodică de perioadă $\frac{2\pi}{n}$, cînd μ tinde către zero.

Procedînd după cum s-a arătat mai sus, vom pune deci :

$$k^2 = \frac{1}{n^2} - \mu \frac{a}{n^2} \tag{8}$$

$$n^2\gamma = \gamma_1; \quad t = n\tau, \quad n^2\lambda = \lambda_1, \quad Hn = H_1,$$

(n fiind un număr întreg diferit de 1). Atunci ecuația (1) devine :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \lambda_1 \cos(n\tau + \psi) + \mu(ax + \gamma_1 x^3 - 2H_1 x) \tag{9}$$

și problema noastră constă în a căuta soluțiile periodice ale acestei ecuații de perioadă 2π . Aceste soluții le căutăm sub forma seriei [1] :

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \tag{10}$$

unde

$$x_0 = \frac{\lambda_1}{1 - n^2} \cos(n\tau + \psi) + M_0 \cos\tau + N_0 \sin\tau \tag{11}$$

este soluția periodică a ecuației generatoare, care depinde de două constante arbitrare M_0 și N_0 iar $x_i (i = 1, 2, \dots)$ sînt funcții periodice de τ . Vom determina aceste constante din condiția ca ecuația diferențială în x_1 să aibă soluție periodică. Înlocuind seria (10) în (9) și identificînd coeficienții ui μ , obținem ecuația care determină pe x_1 , în forma :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = ax_0 + \gamma_1 x_0^3 - 2H_1 \frac{dx_0}{d\tau} = & \left\{ M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_1^2}{(1 - n^2)^2} + \right. \right. \tag{12} \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - 2H_1 N_0 \right\} \cos\tau + \left\{ N_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_1^2}{(1 - n^2)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2H_1 M_0 \right\} \sin\tau + \frac{1}{4} \gamma_1 M_0 (M_0^2 - 3N_0^2) \cos 3\tau + \\ & + \frac{1}{4} \gamma_1 N_0 (3M_0^2 - N_0^2) \sin 3\tau + \frac{3}{4} \frac{\gamma_1 \lambda_1}{1 - n^2} (M_0^2 - N_0^2) \cos [\\ & [(n - 2)\tau + \psi] - \frac{3}{2} \frac{\gamma_1 \lambda_1}{1 - n^2} M_0 N_0 \sin [(n - 2)\tau + \psi] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{a \lambda_1}{1-n^2} + \frac{3}{2} \frac{\lambda_1 \gamma_1}{1-n^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{1-n^2} \right)^2 + M_0^2 + N_0^2 \right] \right\} \cos(n\tau + \psi) + \\
& + 2H_1 \frac{n\lambda_1}{1-n^2} \sin(n\tau + \psi) + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_1}{1-n^2} M_0 N_0 \sin[(n+2)\tau + \psi] + \\
& + \frac{3}{4} \frac{\gamma_1 \lambda_1}{1-n^2} (M_0^2 - N_0^2) \cos[(n+2)\tau + \psi] + \\
& + \frac{3}{4} \gamma_1 \frac{\lambda_1^2}{(1-n^2)^2} M_0 \cos[(2n-1)\tau + 2\psi] - \frac{3}{4} \gamma_1 \frac{\lambda_1^2}{(1-n^2)^2} N_0 \sin[\\
& [(2n-1)\tau + 2\psi] + \frac{3}{4} \gamma_1 \frac{\lambda_1^2}{(1-n^2)^2} M_0 \cos[(2n+1)\tau + 2\psi] + \\
& + \frac{3}{4} \frac{\lambda_1^2 \gamma_1}{(1-n^2)^2} N_0 \sin[(2n+1)\tau + 2\psi] + \frac{1}{4} \gamma_1 \frac{\lambda_1^3}{(1-n^2)^3} \cos 3(n\tau + \psi).
\end{aligned}$$

Se observă, din această ecuație, că condițiile de periodicitate al funcției x_1 vor diferi după cum $n \neq 3$ sau $n = 3$.

A. În cazul vibrațiilor subarmonice cu amortizare ($H \neq 0$) cu condiția $\psi \neq 0$ (neprecizat încă) pentru $n \neq 3$, condițiile de periodicitate ale funcției x_1 capătă forma :

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = N_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_1^2}{(1-n^2)^2} + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2H_1 M_0 = 0 \\ Q(M_0, N_0) = M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_2}{(1-n^2)^2} + \frac{3}{4} \gamma_1^* (M_0^2 + N_0^2) \right] - 2H_1 N_0 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Aceste ecuații nu admit decît soluția trivială

$$M_0 = N_0 = 0$$

Din acest motiv, însemnează că pentru $n = 3$ în sistemul nostru nu pot lua naștere decît soluții periodice de perioadă 2π , care se reduc pentru $\mu = 0$ la soluția periodică generatoare $x_0 = \frac{\lambda^2}{1-n^2} \cos(n\tau + \psi)$, de perioadă 2π , soluții de care, așa după cum spus, nu ne ocupăm.

B. Pentru cazul $n = 3$, din (12) obținem următoarele condiții de periodicitate :

$$\begin{aligned}
P(M_0, N_0) & = N_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \frac{\lambda_1^2}{64} + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2H_1 M_0 + \\
& + \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) \sin \psi + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 \cos \psi = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

$$Q(M_0, N_0) = M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2 \cdot 64} \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - 2H_1 N_0 - \\ - \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) \cos \psi + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 \sin \psi = 0$$

Aceste ecuații, în afară de $M_0 = N_0 = 0$, admit, pentru M_0 și N_0 soluția :

$$N_0 = 0; \quad M_0 = + \frac{3\gamma_1 F_1 \pm \sqrt{-3072 a \gamma_1 - 9\gamma_1^2 (8\lambda_1^2 - F_1^2)}}{48 \gamma_1} \quad (15)$$

unde

$$F_1 = \lambda_1 \cos \psi$$

Pentru ca această soluție să fie reală e necesar ca expresia de sub radical să fie pozitivă, adică

$$-1024 a \gamma_1 - 3\gamma_1^2 \cdot (8\lambda_1^2 - F_1^2) > 0$$

De aici rezultă că a și γ_1 trebuie să fie de semne contrare și în plus trebuie ca

$$|a| \geq \frac{3}{1024} |\gamma_1| (8\lambda_1^2 - F_1^2) \quad (17)$$

deoarece din faptul că $F_1^2 + G_1^2 = \lambda_1^2$, unde $G_1 = \lambda_1 \sin \psi$, rezultă că $\lambda_1^2 - F_1^2 \geq 0$ și în consecință și $8\lambda_1^2 - F_1^2 \geq 0$

Ținând seama de relațiile (8), inegalitatea (17) se poate scrie sub forma :

$$\left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{3 \cdot 9^2}{1024} |\mu \gamma| (8\lambda^2 - F^2); \quad \left(k^2 - \frac{1}{9} \right) \gamma > 0 \text{ pentru } \gamma > 0, a > 0 \quad (18)$$

Dacă în prima ecuație (14) facem $N_0 = 0$ găsim ecuația

$$2H_1 + \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 M_0 \sin \psi = 0, \quad (19)$$

de unde rezultă că

$$|\sin \psi| = \left| \frac{-2H_1}{\frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 M_0} \right| \quad (20)$$

În felul acesta faza inițială a forței excitatoare este determinată. Aceasta revine, pe de altă parte, la a spune că am determinat raportul $\frac{F}{G}$ care inițial nu era precizat.

Având în vedere faptul că $|\sin \psi| \leq 1$, din ecuația (20) găsim următoarea condiție care se impune asupra coeficientului de amortizare H :

$$2H_1 \leq \frac{3}{32} |\gamma_1 \lambda_1 M_0| \text{ sau } 2H \leq \frac{3 \cdot 27}{32} |\gamma \lambda M_0| \quad (21)$$

Această relație demonstrează faptul că oscilațiile subarmonice de ordinul $\frac{1}{3}$ nu sînt posibile decît dacă coeficientul de amortizare nu este o cantitate mică, cel puțin de același ordin ca al coeficientului părții neliniare a forței de restabilire. În cazul nostru această condiție este satisfăcută prin însuși faptul că am luat coeficientul de amortizare egal cu $2\mu H$.

Y. H. Ku [4], rezolvînd aceeași problemă printr-o metodă mai puțin riguroasă propusă de J. Stoker¹ [5], a găsit următoarele inegalități:

$$\left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{3}{1024} \frac{|\mu\gamma|}{k^4} (8\lambda^2 - F^2) \quad (22)$$

$$2H \leq \frac{3}{32} \frac{|\gamma\lambda M_0|}{k^3} \quad (23)$$

Comparînd aceste inegalități cu inegalitățile (18), (21) deduse de noi în cele de mai sus, prin metoda lui Malkin, se observă că, prin această ultimă metodă, condițiile de existență ale soluțiilor subarmonice de ordinul $\frac{1}{3}$ sînt mai riguros determinate.

3. Observație. În absența amortizării ($H = 0$) cu condiția $\psi = 0$, pe baza ecuațiilor (14) obținem următoarele condiții de existență a oscilațiilor subarmonice de ordinul $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = N_0 \left[a + \frac{3}{128} \gamma_1 \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 = 0 \\ Q(M_0, N_0) = M_0 \left[a + \frac{3}{128} \gamma_1 \lambda_1^2 + \frac{3}{34} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Așa după cum remarcă și Mendelson [1], ecuațiile (24), au, printre alte soluții, în afară de $M_0 = N_0 = 0$, soluția:

$$N_0 = 0, \quad M_0 = \frac{3\gamma_1 \lambda_1 \pm \sqrt{-3072 a \gamma_1 - 63 \gamma_1^2 \lambda_1^2}}{48 \gamma_1} \quad (25)$$

$$\left(\text{pentru care } \frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0 \right)$$

Pentru ca această soluție să fie reală, e necesar ca a și γ_1 să fie de semne contrare și totodată să fie satisfăcută inegalitatea:

$$|a| \geq \frac{21}{1024} - \lambda_1^6 |\gamma_1| \quad (26)$$

¹ Metoda lui Stoker, de găsim a oscilațiilor subarmonice atît în prezența amortizării cît și în lipsa acesteia, constă în căutarea soluției sub forma unei serii Fourier a cărei coeficienți îi determină prin metoda aproximațiilor succesive.

sau, ținând seama de (8), e necesar să fie satisfăcută inegalitatea :

$$\left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{21.81}{1024} \lambda^2 |\mu\gamma| \text{ și } \left(k^2 - \frac{1}{9} \right) \gamma > 0 \text{ (dacă } a > 0, \gamma > 0). \quad (27)$$

J. S t o k e r [5], rezolvînd aceeași problemă printr-o metodă mai puțin riguroasă, găsește inegalitatea

$$\left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{21}{1024} \frac{1}{k^4} \lambda^2 |\mu\gamma| \quad (28)$$

Se observă, așadar, că folosirea metodei lui Malkin conduce și în acest caz la rezultate mai exacte.

B I B L I O G R A F I E

1. M a l k i n I. G., *Nekotorie zadaci teorii nelineinîh kolebanii*. G.I.T.T.L., Moskva, 1956.
2. D u f f i n g G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918.
3. M a n d e l ŝ t a m L. I. i P a p a l e k s i N. D., *O iavlenniiah rezonansa n-go roda*. „Jurn. tehn. fiziki” II, 7—8, 1932.
4. K u Y. H., *Analysis and Control of Nonlinear Systems, Nonlinear Vibrations and Oscillations in Physical Systems*. Ronald Press Company, New York, 1958.
5. S t o k e r J. J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. Interscience Publications, New York — London, 1950.

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

(Р е з ю м е)

Методом М а л к и н а [1] изучаются условия, в которых могут образоваться субгармонические колебания порядка $\frac{1}{n}$ уравнения Д у ф ф и н г а [2], вида:

$$\ddot{x} + k^2x = \mu(\gamma x^3 - 2Hx) + \lambda \cos(t + \psi) = \mu(\gamma x^3 - 2Hx) + F \cos t - G \sin t \quad (1)$$

где $k, \gamma \geq 0, H \geq 0, \lambda > 0, \psi, (F > 0, G > 0)$ — постоянные, а μ — действительный малый параметр.

Этот вопрос изучается при наличии затухания ($H \neq 0$) с условием $\dot{\psi} = 0$, но нефиксированного заранее, и делаются замечания о случае, когда отсутствует затухание ($H = 0$) а $\dot{\psi} \neq 0$.

Доказывается, что в присутствии затухания условия существования субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{3}$ точнее тех, найденных И. Х. Ку [4], изучающим этот вопрос менее строгим методом, предложенным Ж. С т о к е р о м [5].

Тот же самый вопрос, в отсутствии затухания ($H = 0$), с условием $\dot{\psi} = 0$, был проанализирован В. Мендельсоном, чьи результаты изложены в книге И. Г. М а л к и н а [1].

SUR LES OSCILLATIONS SOUS-HARMONIQUES DE L'ÉQUATION DE DUFFING

(R é s u m é)

On étudie, par la méthode de M a l k i n [1], sous quelles conditions peuvent prendre naissance les oscillations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{n}$ de l'équation de D u f f i n g [2] de forme :

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu(\gamma x^3 - 2 H \dot{x}) + \lambda \cos(t + \psi) = \mu(\gamma x^3 - 2 H \dot{x}) + F \cos t - G \sin t \quad (1)$$

où $k, \gamma \geq 0, H \geq 0, \lambda > 0, \psi, (F > 0, G > 0)$ sont des constantes et μ est un petit paramètre réel.

On étudie ce problème en présence de l'amortissement ($H \neq 0$) sous la condition $\psi \neq 0$ mais non précisé a priori, et l'on fait des observations sur le cas où l'amortissement manque ($H = 0$) et où $\psi = 0$.

On montre qu'en présence de l'amortissement les conditions d'existence des oscillations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{3}$ sont plus exactes que celles trouvées par V. H. Ku [4], qui étudie ce problème suivant une méthode moins rigoureuse proposée par J. S t o k e r [5].

Le même problème, en l'absence de l'amortissement ($H = 0$) et sous la condition $\psi = 0$, a été analysé par V. M e n d e l s o n, dont les résultats sont exposés dans l'ouvrage de I. G. M a l k i n [1].

APARAT PENTRU DETERMINAREA FIGURILOR CHLADNI LA PLĂCILE DE VIOARĂ

de

ION STAN, ION PAUL BELDIE, ALEXANDRU TÓTH, TRAIAN PENCIUC,
EMIL BĂȚAGĂ

I. În ultimii ani s-au preconizat unele metode în vederea ameliorării calității acustice a violilor fabricate pe scară industrială. Cercetările în această direcție sînt de natură experimentală, avîndu-se în vedere numărul mare de parametri (forma complicată a conturului, faptul că plăcile sînt curbate, în interiorul feței este lipită asimetric o bară, etc.), ceea ce face ca această problemă să nu poată fi rezolvată pe cale teoretică.

Alături de problema materialului din care sînt construite violurile, a lacului (verniului), este și problema modului de îmbinare a feței și spatelui violii.

O metodă larg răspîndită în construcția violurilor, de îmbinare a feței și spatelui violii este aceea care susține că fața și spatele violii trebuie să aibă anumite sunete de percuzie* înainte de îmbinare. De obicei lutierii urmăresc ca tonurile de bază a feței și spatelui să nu difere între ele mai mult de un ton [1].

Această metodă este o metodă subiectivă, bazîndu-se numai pe practica și urechea exersată a lutierului.

Plecînd de la această metodă empirică, am căutat să o transpunem pe o bază obiectivă. În acest scop ne-am gîndit să utilizăm figurile Chladni și frecvențele de vibrație corespunzătoare, ca mijloc obiectiv de aplicare a metodei amintite mai sus.

Din diversele posibilități de punere în vibrație a plăcilor am folosit** metoda excitării plăcilor prin introducerea lor într-un cîmp sonor dirijat.

Metoda aleasă de noi prezintă mai multe avantaje:

a) Proprietățile mecano-acustice nu sînt modificate, ca în cazul instalației transductorului electromagnetic***.

* Cînd scobirea este în fază înaintată, lutierul țînînd placa între degetul arătător și degetul mare, bate cu un deget placa în diferite puncte.

** Prin plăcile violii înțelegem atît fața cît și spatele violii.

*** Această metodă necesită lipirea unei lame metalice pe placă care schimbă într-o oarecare măsură proprietățile mecano-acustice, este o operație în plus într-o producție de serie, și lasă pete a căror înlăturare influențează din nou proprietățile violii.

b) Liniile nodale se vizualizează direct fără a fi necesară filtrarea punctelor în diferite faze.

c) Datorită posibilității de dirijare a cîmpului sonor se poate excita placa în diferite regiuni.

d) Instalația poate fi folosită pentru punerea în vibrație a plăcilor din orice material (lemn, metal, sticlă, stiplax, etc.).

e) Poate fi folosită la studierea proprietăților, viorii gata montate.

f) Este ușor de manevrat.

II. În realizarea unei instalații electro-acustice pentru obținerea figurilor Chladni ale plăcilor de vioară, am avut în vedere ca ea să poată fi utilizată ușor în procesul de producție.

Schema bloc a instalației este dată în figura 1 și cuprinde următoarele părți:

Un generator de ton (2) de tip RC TESLA BM 365 cu o precizie de 3%. Un amplificator I. O. R. (3) tip AT 6 C de 20 W. Două difuzoare cu caracteristici diferite, unul pentru frecvențe joase și medii (25—900 Hz) notat (4) și unul (4') pentru frecvențe relativ înalte (900—8000 Hz).

Întreaga instalație a fost alimentată de la rețea printr-un stabilizator de tensiune (1). Plăcile studiate (5) au fost fixate la o înălțime de 1—5 cm deasupra membranei difuzorului, fiind sprijinite pe benzi de material sintetic spongios. Figurile Chladni au fost vizualizate folosindu-se un praf din pesmet prăjit, colorat cu tuș negru, fiind fotografiate cu un aparat fotografic (6) fixat deasupra instalației.

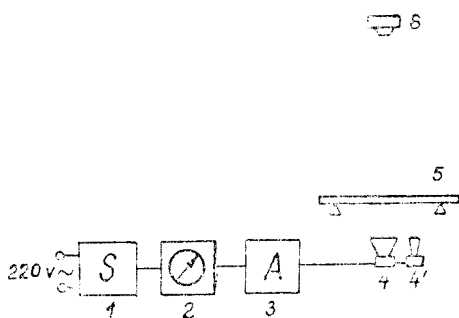


Fig. 1.

III. Verificarea metodei și a funcționării instalației am făcut-o utilizând plăci plane izotrope ale căror figuri Chladni și frecvențele corespunzătoare sînt cunoscute din literatura de specialitate. În acest scop am comparat figurile Chladni și frecvențele obținute de noi la o placă dreptunghiulară de aluminiu, cu acelea obținute prin metoda excitării directe — prin evaporarea rapidă a bioxidului de carbon solid [2].

Rezultatele obținute de noi prin metoda excitării plăcilor în cîmp sonor dirijat, sînt în bună concordanță cu cele obținute de M. D. W a l l e r [2].

IV. Cu ajutorul acestei instalații am putut determina cu suficientă precizie frecvențele de rezonanță ale plăcilor viorii, avînd astfel posibilitatea obiectivă de a combina acele plăci care îndeplinesc criteriul de îmbinare amintit (diferența maximă de un ton).

Studiul figurilor Chladni ne-a permis punerea în evidență a influenței pe care o are în construcția viorii neomogenitatea plăcilor, provenită din neparalelismul inelelor anuale, grosimi neuniforme, structura neomogenă a lemnului, o proastă prelucrare a sa, etc.

În continuare dăm câteva fotografii ale figurilor Chladni, obținute pentru diferite plăci. În figura 2 dăm plăci plane cu formă de vioară în care prima (a) este o placă de aluminiu izotropă, iar celelalte (b, c, d) plăci plane cu feuri, din molid de rezonanță.

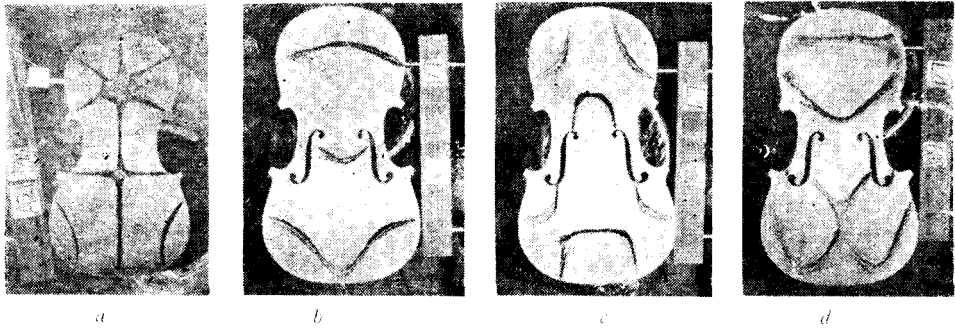


Fig. 2.

Se observă o perfectă simetrie a figurilor obținute atât la frecvențe joase, cât și la frecvențe ridicate, asemănătoare cu cele ale plăcii izotrope de aluminiu.

Aceasta reflectă faptul că plăcile anizotrope sînt omogene în ceea ce privește paralelismul inelelor anuale, al grosimii uniforme, etc.

În figura 3 (a,b,c,d) dăm figurile Chladni pentru o placă de vioară cu feuri, prelucrată de maestrul lutier Boianciuc Roman. Se observă o perfectă

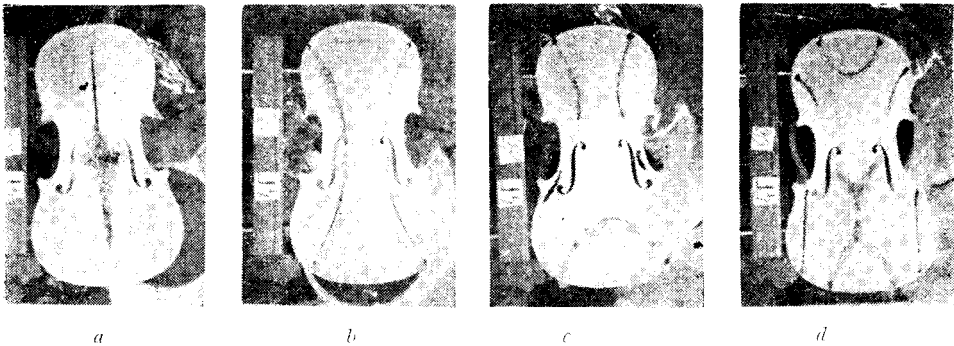


Fig. 3.

simetrie a figurilor obținute între frecvențele de 83—640 Hz. Aceasta denotă o prelucrare a plăcii la un nivel ridicat, cu o mare precizie.

În fig. 4, dăm figurile unei plăci de serie între frecvențele 83,5 — 805 Hz.

Se observă că la frecvențe joase figurile prezintă simetrie, dar la frecvențe ridicate nu. Trebuie remarcat că defectele de fabricație apar numai la frecvențe relativ înalte. În acest mod instalația construită de

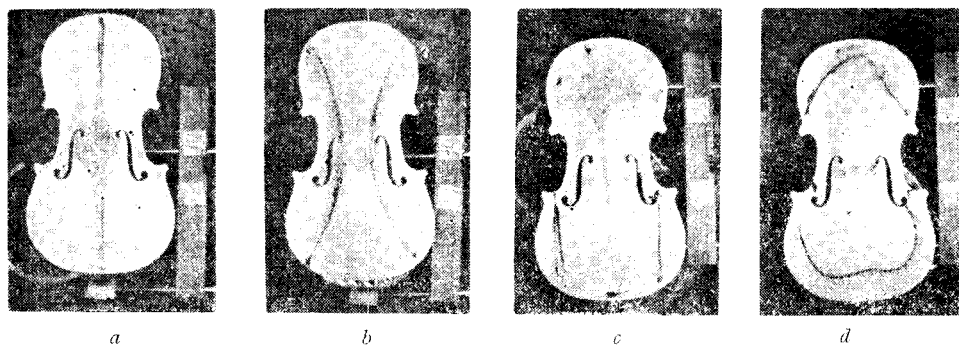


Fig. 4.

noi pune în evidență în diferite etape ale producției buna prelucrare a plăcii, putându-se interveni la înlăturarea eventualelor defecte de prelucrare, în diferite faze. Pentru a arăta influența oricărei modificări a plăcii de vioară, dăm figurile Chladni obținute după montarea barei. Se observă o deplasare a liniilor nodale către partea unde este montată bara, fapt ce reiese foarte clar din figura 5 (a,b,c).

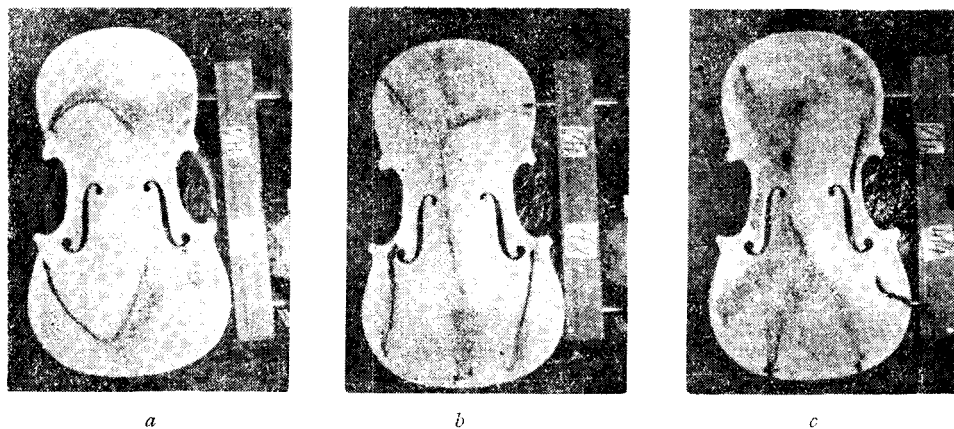


Fig. 5.

Acestea sînt numai unele rezultate obținute cu ajutorul aparatului construit de noi. Într-o lucrare următoare vom dezvolta aceste rezultate atît sub aspect teoretic, cît și sub aspect experimental.

B I B L I O G R A F I E

- 1 F. A. Saunders, „Sound”, July-August, 15, 1962.
- 2 M. D. Waller, *Chladni figures, A Study in Symmetry*, London, 1961.

П Р И Б О Р Д Л Я О П Р Е Д Е Л Е Н И Я Ф И Г У Р Х Л А Д Н И У С К Р И П И Ч Н Ы Х П Л А С Т И Н О К

(Р е з ю м е)

Авторы представляют прибор для определения фигур Хладни у скрипичных пластинок, основанный на методе направленного звукового поля. При помощи этого прибора авторы смогли определить с точностью резонансные частоты скрипичных пластинок и смогли выявить эвентуальное отсутствие гомогенности пластинки, а также дефекты фабрикации.

A P P A R E I L , P O U R L A D É T E R M I N A T I O N D E S F I G U R E S C H L A D N I S U R L E S P L A Q U E S D E V I O L O N

(R é s u m é)

Les auteurs présentent une installation pour la détermination des figures Chladni sur les plaques de violon, fondée sur la méthode du champ sonore dirigé. Cette installation a permis de déterminer avec précision les fréquences de résonance des plaques de violon, de mettre en évidence le manque éventuel d'homogénéité de la plaque ainsi que les défauts de fabrication.

O METODĂ DE IMPULS DE CĂLDURĂ PENTRU DETERMINAREA CĂLDURII SPECIFICE A CORPURILOR SOLIDE

de

FRIDERIC KELEMEN și ARPAD NEDA

*Lucrare comunicată în sesiunea științifică a Institutului pedagogic de 3 ani,
Baia Mare, din 12—13 februarie 1965*

Introducere. În ultimii ani s-au elaborat mai multe metode pentru determinarea difuzivității termice prin impuls de căldură, adică prin încălzire de scurtă durată [1]. În afară de aceasta s-au făcut câteva încercări de a aplica procedeul acesta și la determinarea coeficientului de conductibilitate termică, respectiv a căldurii specifice. Astfel, în lucrarea [2] se propune un procedeu prin care, printr-o singură experiență, se poate determina atât difuzivitatea termică cât și conductibilitatea termică, folosindu-se un corp etalon la care sînt cunoscute aceste două mărimi. Autorul acestei lucrări însă nu menționează detalii experimentale ale metodei propuse. În lucrarea [3] s-a elaborat o metodă rapidă pentru determinarea difuzivității termice și a căldurii specifice a metalelor în jurul temperaturii camerei. Metoda aceasta, însă, necesită un aparat cu care se pot înregistra variații mici de temperatură și de durată scurtă (de ordinul 10^{-2} s), la care se poate neglija schimbul de căldură între corpul de probă și mediul ambiant.

În lucrarea de față se prezintă o metodă de determinare a căldurii specifice la probe mici de metal și semiconductor, prin impuls de căldură, luîndu-se în considerație transmisia de căldură între corpul de probă și mediul ambiant. Avantajul metodei constă în faptul că permite determinarea căldurii specifice chiar pentru probe mai mici decît un gram, iar măsurarea temperaturii se poate face cu un galvanometru. Totodată metoda, în forma realizată de noi, poate fi aplicată la determinarea căldurii specifice în domeniul de temperatură 20° — 400° C.

Principiul metodei. Să considerăm că un corp de probă P, în formă de disc circular, este iradiat pentru un timp scurt la suprafața frontală cu un fascicul de lumină Φ (fig. 1) Grosimea probei să fie așa de mică, încît egalizarea temperaturii să se facă într-un timp

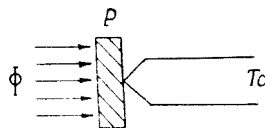


Fig. 1.

scurt, de ordinul duratei impulsului de căldură. Astfel, diferența de temperatură între suprafața frontală și cea posterioară este mică, neglijabilă. Variația temperaturii corpului la iradiere se măsoară cu ajutorul unui cuplu termoelectric, T_c , care este în contact cu suprafața posterioară a corpului. Această variație, în timpul $d\tau$, este descrisă de formula

$$dT = \frac{\alpha \cdot S_f}{c \cdot m} \cdot (T_e - T) d\tau \quad (1)$$

unde S_f — suprafața frontală, c — căldura specifică, m — masa corpului, T_e — temperatura mediului (corpului iradiant), T — temperatura corpului într-un moment dat, iar α — un coeficient care caracterizează puterea de absorbție a unității de suprafață a corpului. Din formula (1) rezultă că temperatura corpului variază după o funcție exponențială în timp [4].

După încetarea încălzirii, temperatura corpului scade exponențial în funcție de timp, conform ecuației:

$$T - T_0 = (T_i - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot S}{c \cdot m} \tau\right) \quad (2)$$

în care T_i — temperatura corpului în momentul inițial, T_0 — temperatura mediului ambiant, S — aria suprafeței totală a corpului, iar h — coeficientul de transmisie între corpul și mediul ambiant (4).

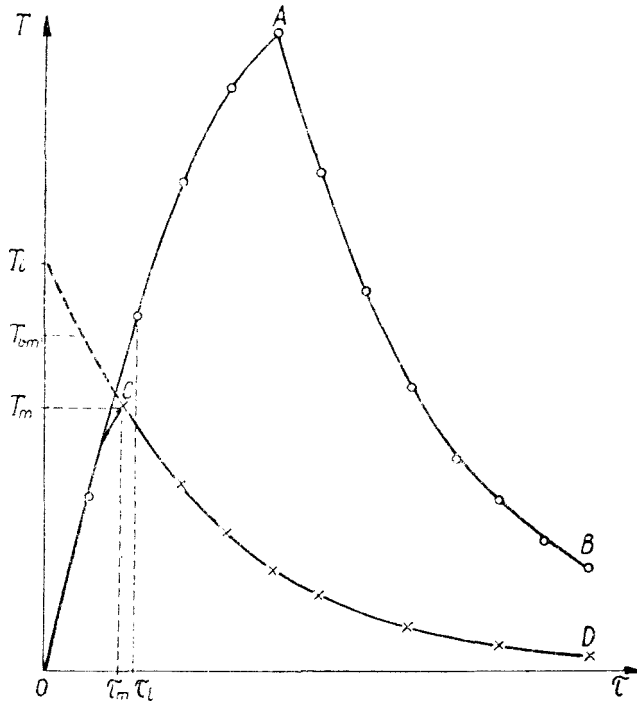


Fig. 2.

Variația temperaturii corpului, la încălzire și răcire, în funcție de temperatură este reprezentată prin curba OAB în figura 2. Această variație de temperatură a fost ridicată la o probă de semiconductor, de grosime 2 mm. În această figură se observă că la începutul încălzirii, aproximativ pînă la timpul τ_i , variația temperaturii se poate considera liniară. Astfel, dacă durata încălzirii (impulsului) τ_i este mai mică decît τ_i , variația temperaturii este dată de curba OCD care între punctul O și c este liniară, iar pe porțiunea CD este exponențială.

Cantitatea de căldură transmisă corpului în timpul τ_i servește la ridicarea temperaturii corpului de la T_0 la T_m , iar o mică parte a acestei cantități de căldură este transmisă mediului ambiant. Dacă nu s-ar produce transmisia de căldură către mediul exterior, temperatura corpului ar atinge o valoare T_{om} mai mare decît T_m . Prelungirea porțiunii exponențiale CD a curbei OCD intersectează la valoarea T_i axa ordonatelor, temperatura de la care s-ar răci corpul la T_m , în timpul τ_i . Durata impulsului de căldură τ_i fiind mică, variația temperaturii între T_i și T_m se poate considera liniară, astfel că temperatura T_{om} va fi dată de relația

$$T_{om} = T_m + \frac{1}{2} (T_i - T_m) = \frac{1}{2} (T_i + T_m). \quad (3)$$

Rezultă că, cantitatea de căldură ΔQ transmisă corpului în timpul τ_i , printr-un impuls de căldură, este dată de relația

$$\Delta Q = c \cdot m (T_{om} - T_0). \quad (4)$$

Pentru determinarea căldurii specifice din această formulă, diferența de temperatură ($T_{om} - T_0$) se măsoară prin deviația galvanometrului care este legat în circuitul cuplului termoelectric, iar temperatura T_i se determină prin extrapolare la $\tau = 0$ a porțiunii CD a curbei de temperatură-timp. Extrapolarea se face reprezentînd grafic $\log T$ în funcție de τ .

Cantitatea de căldură ΔQ transmisă corpului se determină folosind un corp etalon a cărui căldură specifică este cunoscută, ca și la metodele propuse de autorii [2] și [3].

Procedeu experimental. Schița dispozitivului experimental este reprezentată în figura 3. Corpul de probă este introdus într-un bloc cilindric B confecționat dintr-un material ceramic și acesta este așezat în porțiunea centrală a cuptorului electric C , în așa fel ca să fie în contact cu blocul cilindric A , confecționat de asemenea din material ceramic. Temperatura cuprului se măsoară cu cuplul termoelectric T_2 , iar variația temperaturii probei la iradiere, cu cuplul termoelectric T_1 . Amîndouă cuplurile termoelectrice sînt din fier-constantan. Sudura s_1 a cuplului T_1 este în contact cu suprafața probei iar sudura s_2 este introdusă în blocul B . Sudura cuplului termoelectric T_2 se introduce de asemenea în blocul ceramic B .

Pentru a asigura un contact perfect între sudura s_1 a cuplului T_1 și suprafața probei, ea se sudează pe probă, sau se montează pe o plăcuță de argint care se lipește cu pastă de argint de suprafața probei.

Impulsul de căldură se produce cu ajutorul unui bec electric I (de 35 wați) care iradiază proba pentru un timp bine determinat. Becul este legat în circuitul secundar al unui transformator, circuitul primar fiind legat

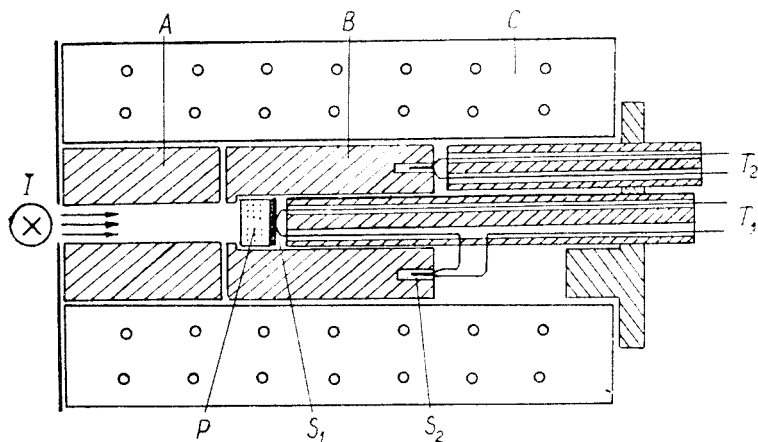


Fig. 3.

la un stabilizator de tensiune alternativă. Durata impulsului de căldură este determinată prin viteza de rotație a unui întrerupător circular, legat în circuitul primar [1].

S-au făcut măsurători, cu impulsuri de căldură de diferite durate de timp (1,8 s, 6,5 s, 7,2 s). Variația cantității de căldură transmisă unei probe de cupru prin iradiere, la două valori ale duratei impulsului de căldură, este reprezentată în fig. 4, în funcție de temperatură.

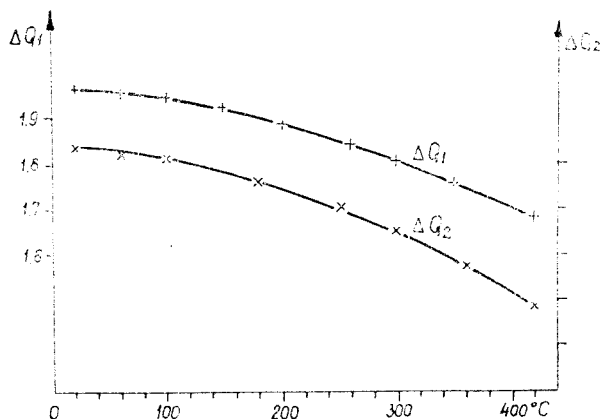


Fig. 4.

Pentru a asigura ca structura suprafeței iradiată a diferitelor probe să fie aceeași, s-a depus un strat subțire de pastă de argint pe această suprafață, și după aceea, pe acesta s-a depus negru de fum. Prin procedeul acesta s-a asigurat totodată ca stratul de negru de fum să nu se desprindă de pe suprafața corpului.

Rezultatele măsurătorilor. Pentru a verifica valabilitatea metodei s-au făcut măsurători cu corpuri de probă confecționate din diferite substanțe: fier, argint, aluminiu, grafit și clorură de sodiu. Variația căldurii specifice în funcție de temperatură la aceste substanțe, este reprezentată în figurile 5 și 7. Curbele punctate și notate cu e reprezintă variația obținută de noi, iar curbele notate cu l variația calculată din formula

$$c = a + bT + dT^2 \quad (5)$$

mărimile caracteristice fiind luate din literatură [5,6].

La grafit și clorură de sodiu concordanța dintre valorile obținute de noi și valorile din literatură este bună. În cazul aluminiului variația lui c , obținută de noi în funcție de temperatură, este mai lentă, iar la argint este mai bruscă, decât la variația dată în literatură (la argint s-au găsit valori diferite pentru căldura specifică, în cele două lucrări citate). Această abatere provine probabil de la impuritățile conținute în probe. La fel se explică și faptul că valorile găsite pentru c la fier sînt mai mici decât cele din literatură (diferența cea mai mare dintre valorile găsite de noi și cele din literatură este de 5–6%).

În afară de cele menționate s-au făcut măsurători și la semiconductori $ZnTe$, $HgTe$ și $HgSe$. Valorile căldurii specifice a acestor substanțe obținute de noi la diferite temperaturi, sînt notate în fig. 6. Curbele repre-

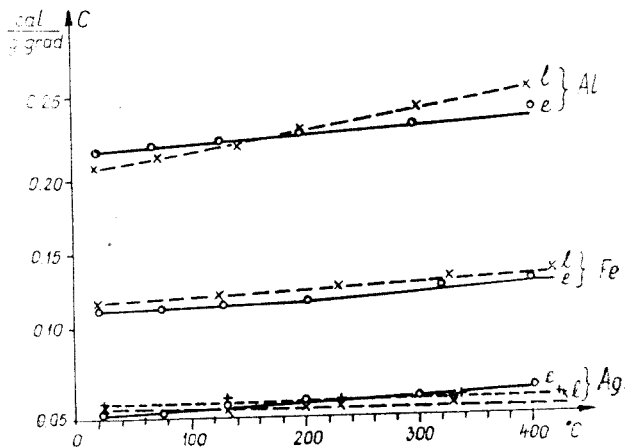


Fig. 5.

zintă variația calculată după regula lui Neumann-Kopp. Se vede că concordanța între valorile măsurate și cele calculate este bună. Se observă o abatere de la variația calculată numai la $HgTe$ peste $200^{\circ}C$, probabil

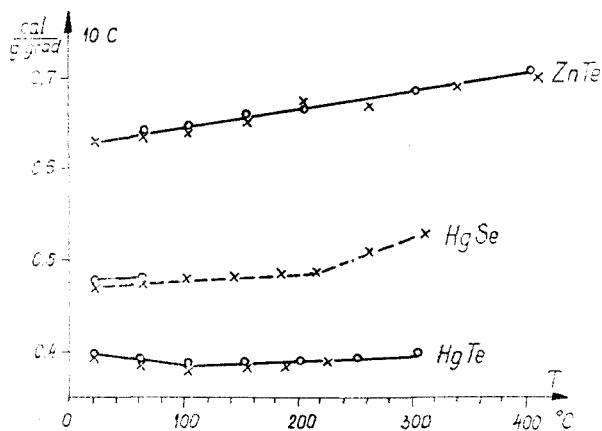


Fig. 6.

din cauza variației structurii rețelei, prin sublimarea mercurului. Valoarea căldurii specifice a seleniului nu s-a găsit în literatură decât în intervalul de temperatură $20^{\circ}-60^{\circ}C$.

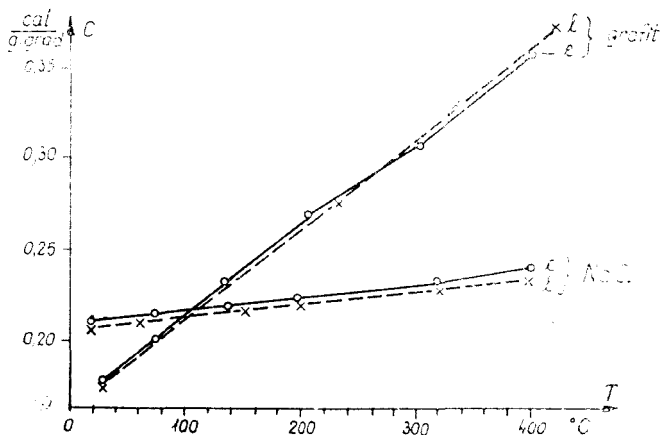


Fig. 7.

Erori și surse de erori. La determinarea căldurii specifice după formula (4), cea mai mare eroare provine din măsurarea temperaturii T_m și T_i . Măsurarea lui T_m se poate face cu o precizie pînă la $0,5\%$, iar determina-

rea lui T_i cu o precizie pînă la 1%. Astfel, dacă luăm în considerare că aceste erori pot exista și la ridicarea curbei de etalonare, eroarea comisă la determinarea căldurii specifice este maximum 3%.

O eroare sistematică poate rezulta din oscilația tensiunii aplicată la becul electric I. De aceea este necesar să se controleze tensiunea aplicată în circuitul primar al transformatorului. În acest scop mai este necesar să se asigure o turație constantă pentru întrerupătorul rotativ, pentru ca durata impulsului de căldură să rămînă aceeași. Eliminarea erorilor sistematice de altă natură a fost menționată mai sus.

BIBLIOGRAFIE

- [1] F. Kelemen, *Eine Wärmeimpulsmethode zur Bestimmung der Temperaturleitung und Wärmeübergangszahl*. Zeitschrift angew. Physik, **17(7)**, 562 (1964).
- [2] K. R. Kanter, *Ob odnom metode mgnovennogo istocinika tepla dlea opredeleniia termiceskih harakteristik* J.T.F. XXV (3), 472, (1955).
- [3] W. J. Parker and alias *Flesh Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity*. J. Appl. Phys. **32(1)**, 679, (1961).
- [4] I. Hamburger, *Introducere în teoria propagării căldurii*, vol. I. Ed. Acad. R.P.R. (1956) p. 284.
- [5] G. W. Kaye and T. B. Laby, *Tables of Physical and Chemical Constants* (în limba rusă) p. 169. Gos. izd. fiz. mat. lit. Moscova (1962).
- [6] K. Schäfer und E. Lar, „*Landolt Börstein, Zahlenwerte und Funktionen*”, vol. II partea 4, p. 475. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1961).

МЕТОД ТЕПЛОВОГО ИМПУЛЬСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

(Резюме)

В работе описан простой метод определения удельной теплоёмкости небольших металлических и полупроводниковых образцов, в температурном интервале 20° — 400° С. При постоянной температуре фронтальная поверхность образца, в виде тонкого диска, подвергается кратковременному облучению пучком света. Определяется изменение температуры образца, а также изменение температуры, происходящее из теплообмена между образцом и окружающей средой в течение облучения. Количество теплоты, переданное телу тепловым импульсом, определяется при помощи эталонного образца с известной теплоёмкостью.

UNE MÉTHODE D'IMPULSION DE CHALEUR POUR LA DÉTERMINATION DE LA CHALEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS SOLIDES

(Résumé)

Les auteurs décrivent une méthode simple permettant de déterminer la chaleur spécifique de petits essais de métal et de semiconducteur, dans l'intervalle de température 20° — 400° С. A température constante la surface frontale du corps d'essai, en forme de disque mince, est irradiée pour une brève durée par un faisceau de lumière. On détermine la variation de la température du corps, ainsi que la variation de température provenant de l'échange de chaleur entre le corps d'essai et le milieu ambiant durant l'irradiation. La quantité de chaleur transmise au corps par l'impulsion de chaleur est déterminée en employant un corps étalon dont la chaleur spécifique est connue.

VARIAȚIA PERMITIVITĂȚII DIELECTRICE ÎN CÎMP ULTRASONIC ÎN CAZUL UNOR ALCOOLI PRIMARI (II)

de

D. AUSLÄNDER, E. CONSTANTIN

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că literatura furnizează date contradictorii în ceea ce privește acțiunea ultrasunetelor asupra lichidelor dielectrice. Rezultatele experimentale obținute de noi [1] în cazul unui câmp ultrasonic cu frecvența de 1 MHz și energii corespunzătoare la curenți de placă avînd valori între 65 mA — 100 mA și tensiuni la placă variînd între 1,15 Kv — 1,3 Kv, ne-au permis să stabilim următoarele :

1. Există substanțe a căror permitivitate nu suferă variații în nici un sens ; ea rămîne riguros constantă atît la intensități mari ale cîmpului cît și la valori apreciabile ale timpului de ultrasonare.

2. Determinările făcute au arătat că apa și o serie de alcooli primari manifestă o scădere a permitivității. Notînd $\Delta\epsilon$ variația permitivității și considerînd că $t=0$, coincide cu momentul de apariție a cîmpului ultrasonic s-a remarcat în alura curbei $\Delta\epsilon = f(t)$ o creștere inițială bruscă, urmată de o desfășurare paralelă cu axa timpului.

Drept una din cauzele ce determină acest fenomen am presupus a fi variația gradului de asociere a moleculelor lichidului, atît apa cît și alcoolii fiind caracterizați de existența legăturii de hidrogen și implicit de o structură evasicristalină care poate fi perturbată de prezența cîmpului ultrasonic.

Cum gradul de asociere se poate modifica prin încălzirea sau răcirea lichidului, am considerat că semnificative în verificarea ipotezei puse pot fi variațiile lui $\Delta\epsilon$ cu temperatura. Într-adevăr, dacă ultrasunetele aduc schimbări în gradul de asociere a moleculelor, rezultatul global al acestor schimbări trebuie să depindă de numărul de molecule asociate existente la momentul considerat. Astfel curba reprezentativă a lui $\Delta\epsilon$, în funcție de temperatură, trebuie să reflecte, sub un anume aspect, modul de acționare a ultrasunetelor asupra moleculelor de lichid.

Scopul lucrării de față îl constituie urmărirea modificărilor de permitivitate în cîmp ultrasonic în cazul alcoolilor metilic, etilic, n-propilic, i-propilic, n-butilic, i-butilic, luînd drept parametru temperatura.

Modul de lucru. Pentru măsurarea permitivității s-a folosit un DK-metru tip OEHME ce lucrează pe o frecvență de 7 MHz. S-a utilizat un condensator plan cu plăci de platină.

Fasciculul ultrasonic a fost orientat paralel cu plăcile condensatorului și s-a obținut de la un generator tip TESLA având frecvența de 1 MHz. În condițiile de lucru tensiunea la placă a avut valoarea 1,2 KV, iar curentul de placă a fost 70 mA.

Lichidul studiat s-a introdus într-un vas de sticlă, cu pereții dubli pentru a se asigura o bună termostatare.

Intervalul de temperatură explorat este cuprins între 10°C—30°C.

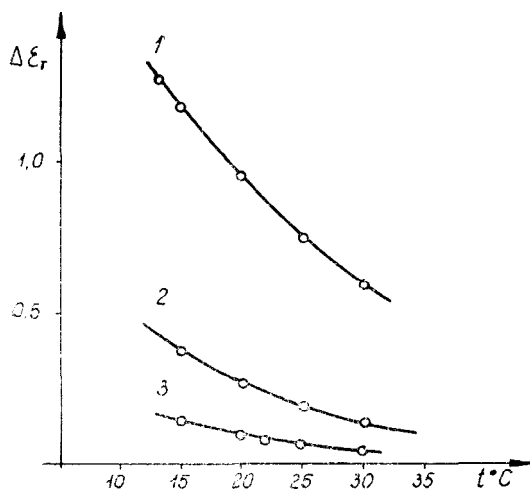
S-a determinat permitivitatea în următoarele condiții: înainte de ultrasonare, în timpul ultrasonării și după ultrasonare.

Timpul de ultrasonare a fost de 10 minute.

Rezultate experimentale. Rezultatele determinărilor făcute figurează în tabelul I. Din tabel se vede că, pe de o parte valoarea lui $\Delta\epsilon$, pentru o temperatură dată, depinde de alcool, iar pe de altă parte, în intervalul de temperatură studiat alcoolii citați prezintă o variație a lui $\Delta\epsilon$ cu temperatura, cea mai mare valoarea a lui $\Delta\epsilon$ revenind temperaturii celei mai mici considerate. Astfel, în cazul alcoolilor metilic și etilic, dacă la 15°C efectul este reflectat în valoarea unităților, la 30°C el afectează numai valoarea cifrelor zecimale.

Tabel 1

Tipul alcoolului	$\Delta\epsilon$			
	15° C	20° C	25° C	30° C
Metilic	1,17	0,93	0,75	0,58
Etilic	1,12	0,66	0,40	0,24
I-propilic	0,37	0,28	0,19	0,12
N-butilic	0,33	0,24	0,20	0,18
I-butilic	0,13	0,08	0,06	0,04



Mai reprezentative sînt curbele de pe fig. 1, ce corespund la alcoolii metilic, izopropilic și izobutilic, curbe care indică o scădere neliniară a efectului cu temperatura.

Pare interesantă ordinea în care se succed curbele în sensul lui $\Delta\epsilon$ descrescător (alcool

Fig. 1. Variația efectului ultrasunetelor în funcție de temperatură:

1. alcoolul metilic,
2. alcool i-propilic,
3. alcool i-butilic.

metilic, i—propilic, i—butilic) ca și convergența lor lentă în domeniul temperaturilor mai mari. Tabelul 2 consemnează această comportare prin valorile pantelor calculate pentru curbe la 15°C și 30°C în cazul alcoolilor metilic, i—propilic și i—butilic ca și prin valoarea variației lui $\text{tg } \alpha$ ce s-a raportat la alcoolul metilic.

Tabel 2

Tipul alcoolului	$\text{tg } \alpha \text{ } \%$		$\Delta \text{tg } \alpha \text{ } \%$	
	15° C	30° C	15° C	30° C
Metilic	5,0	2,8	0,0	0,0
I-propilic	3,0	1,0	2,0	1,8
I-butilic	1,3	0,5	3,7	2,0

De asemenea, se remarcă o deosebire în ceea ce privește mărimea efectului la compușii normali și izo: alcool n—butilic și i—butlic. Pe fig. 2 se poate urmări această deosebire.

Într-o lucrare anterioară [1] am semnalat existența unor diferențe asemănătoare la alcoolii amilic și izoamilic la 20°C.

Interpretarea rezultatelor experimentale. Rezultatele obținute confirmă ipoteza formulată de noi după care una din cauzele ce modifică permitivitatea lichidelor studiate rezidă în perturbarea legăturilor, preexistente între molecule în virtutea punții de hidrogen.

În acest sens pledează nu numai variația în sine a lui $\Delta \epsilon$ ci și convergența menționată a curbelor, convergența similară celei ce se întîlnește în reprezentarea lui $\Delta \epsilon$ în funcție de temperatură pentru diferiți alcooli. Or, se știe că în acest ultim caz, alura curbelor este determinată de variația gradului de asociere.

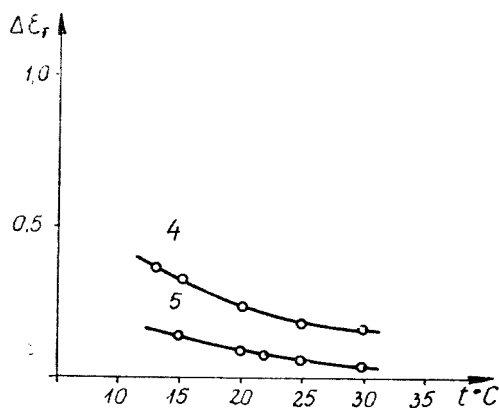
Concluzii. 1. Efectul cîmpului ultrasonic asupra permitivității dielectrice a alcoolilor studiați depinde de temperatură.

2. Efectul se manifestă diferit la compușii normali și izo.

3. Fenomenul îl atribuim variației gradului de asociere a moleculelor.

Fig. 2. Variația lui $\Delta \epsilon$ în funcție de temperatură:

3. alcool i—butilic,
4. alcool n-butilic.



BIBLIOGRAFIE

1. D. Ausländer, E. Constantin, S. Vădeanu, *Studiul acţiunii ultrasunetelor asupra constantei dielectrice a unor dielectrici lichizi*. Lucrare prezentată la consfătuirea „Metode ultrasonice de măsurare şi control”, Buc., 29—31 oct. 1964.

ИЗМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ В СЛУЧАЕ ПЕРВИЧНЫХ СПИРТОВ (II)

(Резюме)

Установлено экспериментально снижение диэлектрической проницаемости ряда первичных спиртов в присутствии ультразвукового поля частотой 1 мГц.

Проведенные измерения показывают зависимость эффекта ультразвукового поля от температуры жидкости.

VARIATION DE LA PERMITIVITÉ DIÉLECTRIQUE DANS UN CHAMP ULTRASONIQUE DANS LE CAS D'ALCOOLS PRIMAIRES (II)

(Résumé)

On a établi par voie expérimentale la diminution de la permittivité diélectrique pour une série d'alcools primaires en présence d'un champ ultra-sonique à fréquence de 1 MHz.

Les déterminations effectuées mettent en évidence la dépendance de l'effet du champ ultra-sonique à la température du liquide.

FENOMENE ELECTROMAGNETICE ÎN INTERIORUL FRONTULUI UNDEI DE ȘOC SLABE MAGNETOHIDRODINAMICE

de

R. V. DEUTSCH, L. BLÎNDU și M. CRISTEA

1. Undele de șoc magnetohidrodinamice au o mare importanță în problemele practice ale fizicii plasmei. Cu ocazia trecerii frontului undei de șoc prin plasmă, în interiorul frontului au loc o serie de fenomene cu importanță practică. Pe baza metodelor elaborate în lucrările [1—3] se pot studia sistematic fenomenele electrice și termodinamice din interiorul frontului. În lucrarea de față se pune chiar această problemă.

Vom scrie ecuațiile care trebuie să fie satisfăcute la suprafața de discontinuitate, și vom alege axa OX astfel ca ea să fie perpendiculară pe această suprafață.

Ecuația conservării materiei va fi:

$$j = \frac{v_x}{V} = j_0 \quad (1.1)$$

unde v_x este componenta vitezei hidrodinamice iar V volumul specific. Indicele „0” îl vom întrebuința de obicei pentru a nota mărimile din fața frontului undei de șoc.

Din ecuația $\text{div } \vec{H} = 0$ obținem

$$H_x = H_{x0} = H_n \quad (1.2)$$

iar din ecuațiile

$$\text{rot. } \vec{E} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{rot. } \vec{H} = \frac{4\pi\vec{J}}{c} \quad (1.4)$$

$$\vec{q} - (5kT/2e1)\vec{J} = -Tx \nabla \ln T + \alpha\vec{J} \quad (1.5)$$

$$\vec{E} - \tau_i \nabla \xi = \alpha \nabla \ln T + \sigma^{-1}\vec{J} \quad (1.6)$$

vom avea pentru un mediu în mișcare

$$E_y = \alpha_{yx} \frac{d \ln T}{dx} + A_{yz} \frac{dH_y}{dx} - A_{yy} \frac{dH_z}{dx} + \frac{1}{c} (v_x H_z - v_z H_x) = 0 \quad (1.7)$$

$$E_z = \alpha_{zx} \frac{d \ln T}{dx} + A_{zx} \frac{dH_y}{dx} - A_{zy} \frac{dH_z}{dx} + \frac{1}{c} (v_y H_x - v_x H_y) = 0 \quad (1.8)$$

În aceste ecuații am folosit următoarele notații: k — constanta lui Boltzmann, \vec{E} — intensitatea câmpului electric, \vec{H} — intensitatea câmpului magnetic, \vec{j} — intensitatea densității curentului, ξ — potentialul chimic al mediului, η — coeficient care caracterizează efectele difuziono-electrice, χ , α , σ^{-1} — tensorii conductibilității termice, tensorul caracteristic efectelor termoelectrice și tensorul invers tensorului de conductibilitate electrică.

Dacă am alege sistemul de coordonate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) astfel ca axa ξ_1 să fie orientată în direcția liniilor de forță ale câmpului magnetic, tensorii amintiți ar avea forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_H \\ 0 & -B_H & B_\perp \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

iar tensorul $A = c\sigma^{-1/1} 4\pi$.

Din ecuația Navier-Stokes pentru componentele curentului de impuls, dacă axa y este aleasă astfel că $H_{z0} = 0$, avem:

$$jv_y - \frac{1}{4\pi} H_n H_y + \rho_{12} j \frac{dV}{dx} + \lambda_{12} \frac{dv_y}{dx} + \mu_{12} \frac{dv_z}{dx} = jv_{y0} - \frac{1}{4\pi} H_n H_{y0} \quad (1.10)$$

$$jv_z - \frac{1}{4\pi} H_n H_z + \rho_{13} j \frac{dV}{dx} + \lambda_{13} \frac{dv_y}{dx} + \mu_{13} \frac{dv_x}{dx} = 0 \quad (1.11)$$

$$j^2 V + \frac{1}{8\pi} (H_y^2 + H_z^2) + p + \rho_{11} j \frac{dV}{dx} + \lambda_{11} \frac{dv_y}{dx} + \mu_{11} \frac{dv_z}{dx} = \\ = j^2 V_0 + \frac{1}{8\pi} H_{y0}^2 + p_0 \quad (1.12)$$

Componenta curentului de energie q_x se compune din curentul care este în legătură cu transportul simplu de masă, din curentul datorit efectelor de frecare internă și din curentul de energie calorică:

$$q_x = j \left[\frac{1}{2} (j^2 V^2 + v_y^2 + v_z^2) + w \right] + \rho_{11} j^2 V \frac{dV}{dx} + \lambda_{11} j V \frac{dv_y}{dx} + \mu_{11} j V \frac{dv_z}{dx} + \\ + \rho_{12} v_y j \frac{dV}{dx} + \lambda_{12} v_y \frac{dv_y}{dx} + \mu_{12} v_y \frac{dv_z}{dx} + \rho_{13} v_z j \frac{dV}{dx} + \lambda_{13} v_z \frac{dv_y}{dx} + \\ + \mu_{13} v_z \frac{dv_z}{dx} - \chi_{xx} T \frac{d \ln T}{dx} + \frac{c}{4\pi} \left(\alpha_{xz} \frac{dH_y}{dx} - \alpha_{xy} \frac{dH_z}{dx} \right) = \frac{1}{2} j^3 V_0^2 \frac{1}{2} + jv_{y0}^2 + jw_0 \quad (1.13)$$

Aici au fost introduse următoarele notații:

w — entalpia unității de masă a materiei, și coeficienții ρ_{ik} , λ_{ik} , μ_{ik} care sînt în legătură cu componentele tensorului tensiunii vîscoase:

$$\pi_{ik} = \rho_{ik} \frac{dv_x}{dx} + \lambda_{ik} \frac{dv_y}{dx} + \mu_{ik} \frac{dv_z}{dx}$$

2. Pornind din ecuațiile (1.1), (1.2), (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), (1.12) și (1.13) ne vom limita la studiul undelor de șoc slabe, cînd saltul de presiune Δp este mult mai mic decît presiunea mediului p . În acest caz diferența mărimilor fizice

$$\delta p = p - p_0, \quad \delta V = V - V_0, \quad \delta T = T - T_0, \quad \delta H_y = H_y - H_{y0}, \quad \delta H_z = H_z - H_{z0},$$

$$\delta v_y = v_y - v_{y0}, \quad \delta v_z = v_z - v_{z0}$$

va fi o mărime mică și poate fi dezvoltată în serie în raport cu $\Delta p/p$.

În acest caz, aplicînd metoda din lucrarea [3] vom obține

$$H_y = H_{y0} - \frac{HU_{\pm}^2 \Delta p}{2c(U_x^2 - U_{\pm}^2)V_0^2} \left(1 + th \frac{x}{l_{\pm}}\right) (\sin \theta \cdot \cos \theta + \dots) \quad (2.1)$$

$$H_z = - (H\rho_{xz} \cos \theta) + \frac{U_x^2 H \sin \theta}{U_x^2 - U_{\pm}^2} \lambda_{xz} + \frac{U_{\pm}^2 c \rho H}{U_x^2 - U_{\pm}^2} \beta_y \sin \theta -$$

$$- \sqrt{\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)} \frac{1}{T} v_0 c \rho \alpha_{yx} \frac{U_{\pm} (\Delta p)^2}{2c^2 v_0^2 (U_x^2 - U_{\pm}^2) \lambda c h^2 \frac{x}{l_{\pm}}} \quad (2.2)$$

iar cîmpul electric longitudinal

$$E_x = \eta \frac{d\xi}{dx} + \left[\frac{\alpha_{xy} + \alpha_{yx} \operatorname{tg} \theta}{T \rho v_0} \sqrt{T \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{U_{\pm}^2 H_y}{c(U_x^2 - U_{\pm}^2) \cdot v_0^2} (\beta_{xz} - \beta_y \operatorname{tg} \theta) \right] \frac{(\Delta p)^2}{2\lambda c h^2 \frac{x}{l_{\pm}}} \quad (2.3)$$

unde U_{\pm} — viteza de propagare a undelor magnetohidrodinamice,

ρ — densitatea substanței,

v_0 — viteza sunetului,

θ — unghiul între \vec{H} și normala la discontinuitate,

c_v și c_p — căldurile specifice la volum, respectiv presiune constantă.

$$U = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad ; \quad \beta = cA$$

Indicele (+) se referă la undele accelerate, iar (-) la undele lente. Mărimea 1_{\pm} :

$$1_{\pm} = 4 \left\{ x_{xx} (U^2 - U_{\pm}^2) \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) + \frac{cv_0 H_y}{4\pi} \sqrt{T \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)} \cdot (\alpha_{xz} - \alpha_{zx}) - \right. \\ \left. - [\lambda_{xy} v_0^2 + U^2 (\rho_{xx} \cos^2 \theta + (\lambda_{xx} + \rho_{xy}) \sin \theta \cdot \cos \theta + \lambda_{xy} \sin^2 \theta) - (\lambda_{xx} + \rho_{xx}) U_{\pm}^2 - \right. \\ \left. - (v_0^2 - U_{\pm}^2) \rho c \beta_{xx}] \right\} \times \left\{ U_{\pm} \left[\rho^3 v_0^2 (U^2 - U_{\pm}^2) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s + 3 \frac{v_0^2 - U_{\pm}^2}{v_0^2} \right] \Delta p \right\}^{-1}$$

iar

$$\lambda = l \Delta p$$

3. Conform relației (2.1) liniile de forță magnetică vor fi deviate în planul definit de \vec{H} și normala la suprafața de discontinuitate cu unghiul:

$$\delta \theta_{\pm} = \frac{\Delta \theta_{\pm}}{2} \left(1 + th \frac{x}{l_{\pm}} \right) \quad (3.1)$$

unde

$$\Delta \theta_{+} = - \frac{U_{\pm}^2 \sin \theta \cos \theta}{\rho v_0^2 (U_x^2 - U_{\pm}^2)} \Delta p \quad (3.2)$$

În cazurile limită:

$$\begin{aligned} U^2 \gg v_0^2 \quad \Delta \theta_{\pm} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho v_0^2} \Delta p; \quad \Delta \theta_{-} = \frac{\cotg \theta}{\rho U^2} \Delta p \\ U^2 = v_0^2 \quad \Delta \theta_{\pm} &= \frac{\cos \theta}{\rho v_0^2} \Delta p; \quad \Delta \theta_{-} = - \Delta \theta_{+} \\ U^2 \gg v_0^2 \quad \Delta \theta_{\pm} &= \frac{\cotg \theta}{\rho v_0^2} \Delta p; \quad \Delta \theta_{-} = - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho U^2} \Delta p \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Conform ecuației (2.2), în interiorul frontului $H_x \neq 0$. De aceea, dacă liniile de forță magnetică înaintea frontului unei de șoc sînt paralele cu planul xOy , după discontinuitate vor fi din nou paralele cu acest plan, dar în interiorul discontinuității pentru $H_x \neq 0$ liniile de forță vor fi deviate. Proiectînd liniile de forță pe planul xy primim din ecuația (2.2) următoarea ecuație pentru liniile de forță

$$z - z_0 = \frac{\Delta z}{2} \left(1 + th \frac{x}{l} \right) \quad (4.1)$$

unde saltul liniilor de forță:

$$\Delta z = - \frac{U_{\pm} \Delta p}{2 \rho^2 v_0^2 (U_x^2 - U_{\pm}^2)} \left[\frac{U_x^2 \operatorname{tg} \theta}{U_x^2 - U_{\pm}^2} \lambda_{xz} + \rho_{xz} + \frac{\rho c U_{\pm}^2}{U_x^2 - U_{\pm}^2} \beta_{yz} \operatorname{tg} \theta - \right. \\ \left. - \frac{c \rho v_0}{H \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)} \alpha_{yx} \right] \quad (4.2)$$

Trebuie să menționăm că, în sistemul de coordonate unde \vec{v} și \vec{H} sînt paralele înaintea discontinuității, vor fi paralele și în interiorul frontului unde de șoc și după discontinuitate. Deci în acest sistem de coordonate liniile de forță pot fi considerate drept linii de curent.

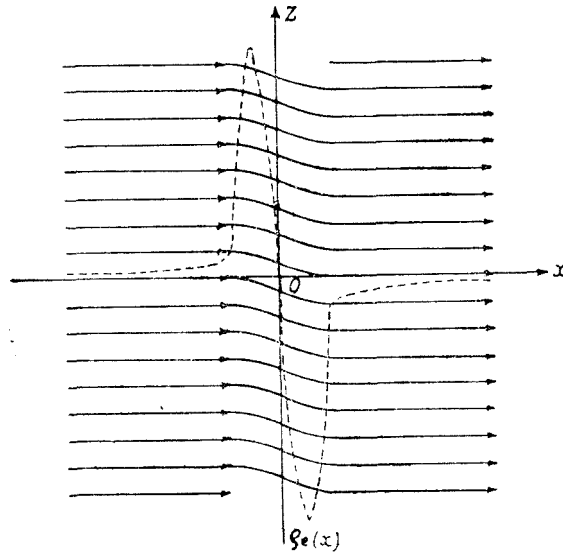


Fig. 1.

Conform ecuației (4.2) mărimea Δz este legată de componentele tensorului de disipație, care în mediu izotrop se anulează. De aceea, acest efect de deformare a liniilor de forță magnetice și liniilor de curent apare ca un efect legat de anizotropia mediului, provocată de câmpul magnetic exterior intens. În urma acestui efect câmpul magnetic din interiorul frontului unde de șoc se intensifică. Această intensificare ar fi de așteptat să se accentueze mai ales în cazul undelor de șoc mai intense.

5. Dacă mediul se presupune neutru din punct de vedere electric, se poate arăta că :

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right)_{n_0, s} \frac{dp}{dx}$$

unde n_0 este raportul concentrațiilor electronilor și ionilor, și $E_x \neq 0$ în interiorul discontinuității. De aceea, în interiorul discontinuității apare un strat dublu electric cu densitatea de sarcină (fig. 1) :

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE_x}{dx}$$

E_x , și prin urmare ρ_e în interiorul frontului, este diferit de zero conform expresiei (2.3) și în medii izotrope în urma proceselor de difuzie și termo-

difuzie. Apariția acestui efect în cazul plasmei parțial ionizate duce la o creștere a gradului de ionizare în interiorul frontului undei de șoc nu numai din cauza creșterii temperaturii, dar și din cauza prezenței câmpului electric longitudinal.

6. Efectele înșirate sub punctul 4 și 5 sînt legate de fenomenele disipative. Tensorii disipativi pentru plasma complet ionizată sînt cunoscuți în literatură. Ca și în lucrarea [3], și aici vom caracteriza plasma cu un singur parametru $P = n^{-1} T^4 L^{-2}$ unde n — numărul particulelor în 1 cm^3 al plasmei, T — temperatura, L — logaritmul coulombian.

De aceea se pot analiza efectele de mai sus în funcție de parametrii P și H .

a) Vom considera cazul $V^2 \gg v_0^2$ cînd ecuația (4.2) se simplifică și avem

$$\Delta z_+ = \frac{c^2 \sigma_H^{-1} \Delta \rho}{4\pi \rho U v_0^2 \sin^3 \theta} \quad (6.1)$$

iar

$$E_{x+} = \frac{H c \sigma_H^{-1} (\Delta \rho)^2}{2\pi \rho v_0^2 \lambda_+ c h^2 \frac{x}{l_+}}$$

care pentru cîmpuri atît de intense, ca $\omega \gg \nu$ (unde ω este frecvența Larmor, iar ν frecvența medie de ciocnire dintre ioni și electroni) avem:

$$E_{x+} = \frac{4U^2 (\Delta \rho)^2}{n e v_0^2 \lambda_+ c h^2 \frac{x}{l_+}} \quad (6.2)$$

În cazul undelor lente:

$$E_{x-} = \frac{3,7 \sin^2 \theta - 0,8}{n e \lambda_{-1}} \cdot \frac{(\Delta \rho)^2}{c h^2 \frac{x}{l_-}} \quad (6.3)$$

Din expresiile (6.2) și (6.3) se vede că în medii anizotrope, cu intensificarea câmpului electric E_{x+} crește ca H^3 , iar E_{x-} tinde către o valoare constantă. De asemenea ρ_{e+} crește ca H^4 iar ρ_{e-} tinde către o mărime constantă. De aceea, creșterea ionizației unui mediu parțial ionizat este de așteptat mai ales în cazul undelor de șoc rapide.

Aici dorim să mulțumim tov. prof. K. P. Staniucovici, V. P. Silin și S. I. Sîrovaskii pentru îndrumările prețioase.

BIBLIOGRAFIE

1. L. D. Landau, E. M. Lifșit, *Mehanika splotnih sred.*, 2-e izd. Gostehizdat Moskva, 1954.
2. E. P. Siroșina, S. I. Sirovatski, „JETP”, **39**, 746, 1960.
3. R. V. Deutsch, „JETP”, **43**, 8, 1962.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ВНУТРИ ФРОНТА СЛАБОЙ МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

(Резюме)

В экспериментальной физике плазмы особое значение представляют ударные волны. Поэтому, в настоящей работе поставлен вопрос о теоретическом изучении явлений, происходящих внутри фронта ударной волны. Доказывается существование двойного электрического слоя, а также продольного электрического поля внутри фронта ударной волны и в том случае, когда волна распространяется в электронейтральной среде. Изучается также деформация магнитного поля внутри фронта ударной волны.

PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES A L'INTÉRIEUR DU FRONT DE L'ONDE DE CHOC MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUE FAIBLE

(Résumé)

Les ondes de choc présentent une importance particulière dans la physique expérimentale liée à l'étude des propriétés du plasma. C'est pourquoi les auteurs du présent article ont posé le problème de l'étude théorique des phénomènes qui se passent à l'intérieur du front de l'onde de choc. On démontre l'existence d'une double couche électrique et d'un champ électrique longitudinal à l'intérieur du front de l'onde de choc et dans le cas où l'onde se propage en milieu électro-neutre. On étudie également la déformation du champ magnétique à l'intérieur du front de l'onde de choc.

UNELE PROPRIETĂȚI MAGNETICE ȘI STRUCTURALE ALE ALIAJELOR DE GADOLINIU—CERIU

de
IULIU POP

În ultimii ani, studiul proprietăților fizice și mai cu seamă al celor magnetice a metalelor din seria pământurilor rare, i-au fost consacrate un mare număr de lucrări. Acest fapt se explică prin proprietățile magnetice și structurale interesante pe care le prezintă lantanidele, precum și prin latura lor aplicativă în tehnica modernă. Cu toate acestea, aliajele și compușii intermetalici ai lantanidelor au fost relativ puțin studiați pînă în prezent, deși proprietățile lor magnetice nu suscită mai puțin interes.

Lucrarea de față este o continuare a studiului proprietăților magnetice început la sistemul de aliaje de gadoliniu-ceriu [1, 2]. În lucrările [3,4] a fost elaborată diagrama de echilibru pentru acest sistem de aliaje, utilizînd un complex de metode structurale și de analiză termomagnetică. Conform diagramei stabilite, sistemul prezintă patru domenii de solubilitate solidă, a căror structură cristalină diferă de la domeniu la domeniu. Această diversitate a structurii cristaline se manifestă foarte pronunțat în comportarea magnetică a aliajelor. S-a stabilit că, susceptibilitatea magnetică [1, 2] prezintă o comportare anomală în intervalul de temperatură 100° — 300° K, unde are loc procesul de ordonare magnetică de tipul paramagnetism-antiferomagnetism-feromagnetism pentru aliajele cuprinse în domeniul de concentrație de la gadoliniu și pînă la 53% Gd, și ordonarea de tipul paramagnetism-antiferomagnetism pentru restul concentrațiilor pînă la ceriul pur.

În acest interval de temperatură am studiat izotermele intensității de magnetizare în funcție de cîmpul magnetizant. În fig. 1 este reprezentată dependența $\sigma(H)$ la temperatură constantă pentru aliajul cu 95% Gd. Se vede

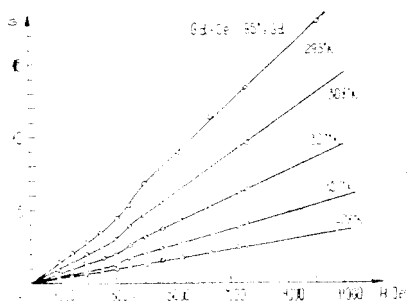


Fig. 1.

că σ , în funcție de câmpul magnetic, la început crește linear, și la un câmp magnetic denumit critic $H_c \approx 3\,000$ Oe suferă un salt, după care crește în continuare linear cu intensitatea câmpului magnetic. Această dependență este specifică întregului domeniu de solubilitate solidă α cu rețea hexagonală compactă de la gadoliniu și pînă la 95% Gd, precum și amestecului mecanic de două faze $\alpha + \alpha$ de la 95% Gd și pînă la 90% Gd.

Pentru domeniul de solubilitate solidă α cu rețea hexagonală de tipul samariului, a cărui ax c este de 4,5 ori mai mare decît într-o rețea obișnuită, cuprins între 65–90% Gd, izotermele de magnetizare au o formă cu totul deosebită. În fig. 2 a și 2 b sînt reprezentate aceste curbe pentru aliajele cu concentrația de 73,8% Gd și 65% Gd.

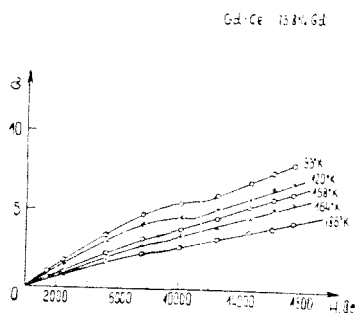


Fig. 2 a.

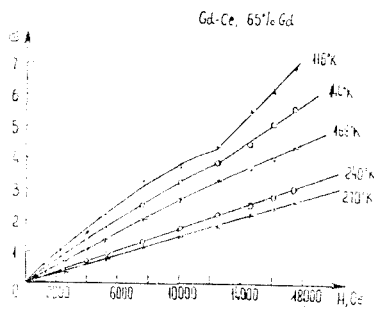


Fig. 2 b.

În acest domeniu dependența $\sigma(H)_{T=const.}$ este neliniară pînă la valoarea critică a câmpului magnetic $H_c \approx 11\,000$ Oe, pentru temperatura de 93°K, după care se continuă printr-o variație liniară cu câmpul magnetic. Se vede că valoarea critică a câmpului magnetic, cu creșterea temperaturii se deplasează înspre valori mai mici. Dependența neliniară a intensității de magnetizare în funcție de câmpul magnetic este caracteristică pentru substanțele feromagnetice, iar saltul care apare la valoarea critică a câmpului magnetic H_c , indică o transformare de fază magnetică.

În intervalul de concentrație 49%–65% Gd este un amestec mecanic de două faze $\beta + \alpha$ și comportarea magnetică a aliajelor este analogă structurii $\alpha + \alpha$. Sub concentrația de 49% Gd și pînă la ceriul pur, se întinde faza de soluție solidă β cu structura hexagonală, avînd axul c dublu. În acest domeniu de solubilitate solidă se disting două categorii de aliaje; unele mai bogate în gadoliniu, ca aliajele 30% și 40% Gd pentru care izotermele intensității de magnetizare cresc

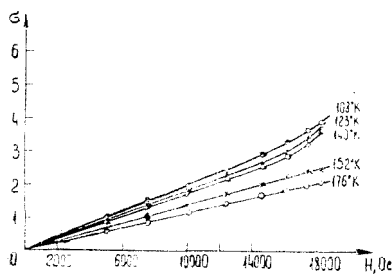


Fig. 3.

liniar cu câmpul magnetic pînă la aproximativ 13 000 Oe, după care urmează o creștere neliniară mai pronunțată așa cum se vede în fig. 3, și altele cu conținut de ga-

doliniu mai scăzut pînă la ceriul pur, care prezintă dependența $\sigma(H)$ la fel ca și aliajele cu structură α , așa cum se vede din fig. 4 a, b și c pentru aliajele cu concentrația de 20%, 15% și 5% Gd.

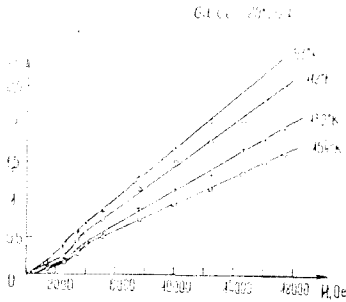


Fig. 4 a.

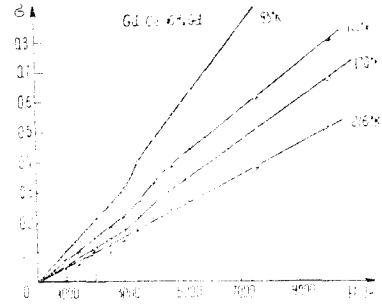


Fig. 4 b.

Din datele prezentate mai sus rezultă că întregul sistem de aliaje gadoliniu-ceriu are o comportare magnetică interesantă, determinată de structura cristalină destul de complicată, unde prin mărirea axului c al celulei elementare, crește distanța dintre planele atomice, care sînt orientate unele față de altele cu spinii sub un unghi oarecare. Această dispoziție a spinilor duce la o interacțiune de schimb pozitivă în cadrul planelor și la o interacțiune de schimb negativă între diferitele plane, dispuse succesiv în lungul axului c în formă de spirală.

Sub influența temperaturii și a cîmpului magnetic la valori $H > H_c$ se distruge aranjamentul spiral al spinilor, și drept consecință, intensitatea de magnetizare suferă un salt care dă naștere anomaliilor observate în datele de mai sus.

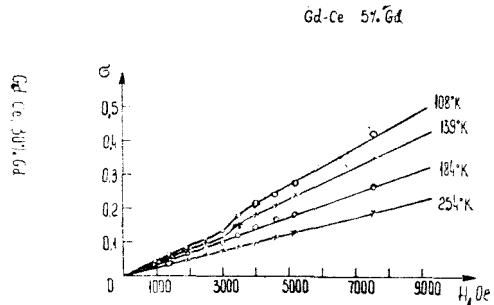


Fig. 4 c.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Cecernikov, I. Pop și I. V. Burov, *Voprosi teorii i primeneniia redkozemelnih metallov*, Izd. „Nauka”, Moskva (1964) p. 55—59.
2. V. I. Cecernikov și Iuliu Pop, „F.M.M.” **18**, nr. 3 (1964) p. 363—367.
3. Burov I. V., Terehova V. F. Savitzki E. M., J.N.H. (1963) 12, p. 186.
4. Burov V. I., Cecernikov V. I., Savitzki E. M., Pop Iuliu „J.N.H.” (1964) nr. 11.

НЕКОТОРЫЕ МАГНИТНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ ГАДОЛИНИЯ-ЦЕРИЯ

(Р е з ю м е)

Работа представляет собой продолжение исследования магнитных свойств сплавов гадолиния-церия в зависимости от температуры и магнитного поля. Между магнитными свойствами и данными кристаллической структуры системы сплавов устанавливается тесная связь, в том смысле, что разнообразие типов кристаллической решётки, свойственное системе сплавов гадолиния-церия, определяет аномальную и весьма различную зависимость изотерм намагничивания от магнитного поля. Установлено существование критических полей H_c , у которых намагничивание претерпевает скачки, обусловленные геликоидальной или даже более сложной спиновой структурой изучаемых сплавов.

DE CERTAINES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES ET STRUCTURALES
DES ALLIAGES DE GADOLINIUM-CÉRIUM

(R é s u m é)

L'auteur présente la suite de son étude des propriétés magnétiques des alliages de gadolinium-cérium en fonction de la température et du champ magnétique. Entre les propriétés magnétiques et les données de structure cristalline du système d'alliages on établit un étroit rapport, en ce sens que la diversité des types de réseau cristallin, propre au système d'alliages gadolinium-cérium, détermine une dépendance anormale et très différente des isothermes de l'intensité de magnétisation en fonction du champ magnétique. On a établi en outre l'existence de valeurs critiques H_c du champ magnétique, par lesquelles l'intensité de magnétisation subit des sautes qui sont attribuées à une structure de spin, hélicoïdale ou même plus compliquée dans les alliages étudiés.

MĂSURAREA PE CALE ABSOLUTĂ A CONCENTRAȚIEI DE ELECTRONI NEÎMPERECHEAȚI CU METODA REZONANȚEI ELECTRONICE DE SPIN

de

AL. BÓDI și P. CIOARĂ

Determinarea concentrației electronilor neîmperecheați prin metoda R.E.S. se face comparativ, folosind substanțe etalon, de obicei D.P.P.H., pentru care se admite o concentrație de $1,53 \cdot 10^{21}$ spin/gram. La măsurătorile efectuate cu ajutorul spectrometrului de rezonanță electronică de spin JES—3B, am constatat, în acord cu alți autori [1], că în unele cazuri etaloanele D.P.P.H. având proveniențe, moduri de preparare și vechimi diferite, dau semnale ce corespund unor concentrații deosebite de electroni neîmperecheați pe gram. Pentru a putea controla etaloanele folosite în metoda comparativă, ne-am propus să studiem posibilitatea de măsurare pe cale absolută a concentrației de electroni neîmperecheați a unei probe cu instalația noastră, unde în *puntea de microunde se folosește un T magic* [5].

Pornind pe calea urmată de J. S m i d t [2] și alții [3], am obținut pentru cazul nostru special formulele

$$N = \frac{3\mu_0 k T V_{ef} Q_c (\Gamma_1 - \Gamma_2)}{2\omega_0 g^2 m_B^2 s(s+1) Q_s^2 T_2 Z} \cdot \frac{\Delta U}{U} \quad (1)$$

respectiv

$$N' = \frac{3\mu_0 k T V_{ef} Q_c (\Gamma_1 - \Gamma_2)}{\omega_0 g^2 m_B^2 s(s+1) Q_s^2 T_2 Z} \cdot \frac{\Delta P_3}{P_3} \quad (1')$$

care leagă numărul electronilor neîmperecheați din probă respectiv de mărimi măsurabile la instalație și constante cunoscute. Anume: N este numărul particulelor cu electroni neîmperecheați, s numărul lor cuantic de spin, g factorul de despicare spectroscopică, m_B magnetonul lui Bohr, ω_0 pulsația la rezonanță a cîmpului magnetic de înaltă frecvență în cavitate, T_2 timpul de relaxare spin-spin, Z factorul de saturație, k constanta lui Boltzmann, T temperatura absolută a probei, V_{ef} este volumul efectiv al cavității

— noțiune introdusă de Bleaney și Stevens [4] —, Γ_1 și Γ_2 sînt valorile absolute ale coeficienților de reflexie în brațele 1 respectiv 2, iar Q_e și Q_s factorul de calitate extern, respectiv în sarcină al cavității.

În formula (1) dU/U reprezintă variația relativă a tensiunii pe detector la rezonanță care se determină ridicînd curba de absorbție a probei [5]. Constanta κ apare în relația $U = \text{const. } P^*$ care caracterizează dioda detectoare și valorează în cazul nostru aproximativ 2.

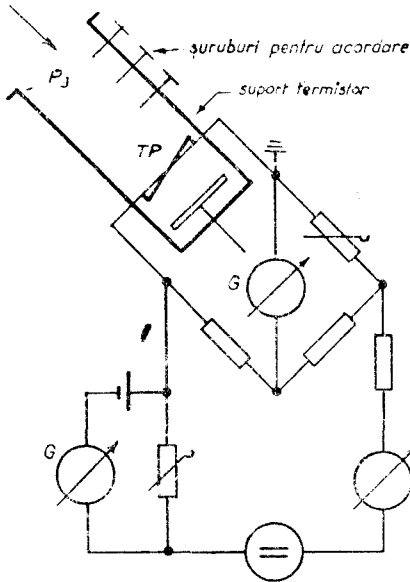


Fig. 1.

În formula (1') dP_3/P_3 reprezintă variația relativă de putere absorbită la rezonanță care s-a determinat folosind un montaj cu termistor perlă (TP) pentru măsurarea puterii în microunde — putere de ordinul microwaților — construit de noi (fig. 1).

Rezultatele măsurărilor, concluzii. Am determinat concentrația de spin/gram la o probă de D.P.P.H. îngrijit preparată, folosind relațiile (1) și (1'). Detalii asupra măsurării mărimilor care intră în relația (1) sînt date în lucrarea noastră anterioară [5].

Folosind relația (1) și măsurînd dU/U am obținut pentru o probă de 0,79 mg D. P. P. H., $N = 1,29 \cdot 10^{18}$ spin, adică

$$N_1 = (1,63 \pm 0,54)10^{21} \text{ spin/gram.}$$

Folosind relația (1') și măsurînd dP_3/P_3 , extrapolat pentru modulația zero (fig. 2), am obținut pentru aceeași probă

$$N'_1 = (1,42 \pm 0,40)10^{21} \text{ spin/gram.}$$

Eroarea relativă maximă cu care este afectat rezultatul în măsurătorile noastre, fără a ține seama de abaterea curbei de la cea lorentziană este de aproximativ 18–20%. Eroare mare poate introduce valoarea atribuită timpului de relaxare T_2 , datorită faptului că curbele de absorbție reale nu sînt nici pur lorentziene, nici gaussiene. După cum rezultă din literatură, se poate greși cu aproximativ 30% la determinarea lui T_2 , dacă se confundă cele două tipuri de curbe de absorbție, respectiv 130% în cazul derivatei curbelor de absorbție (aceste curbe sînt înscrise de înregistratorul automat).

Deoarece noi am determinat pe T_2 din curba de absorbție foarte apropiată de una lorentziană [5], considerăm că eroarea maximă introdusă

de valoarea atribuită timpului de relaxare spin-spin nu întrece 15%. Deci eroarea relativă totală este de ordinul lui 30%, considerată acceptabilă în astfel de măsurători.

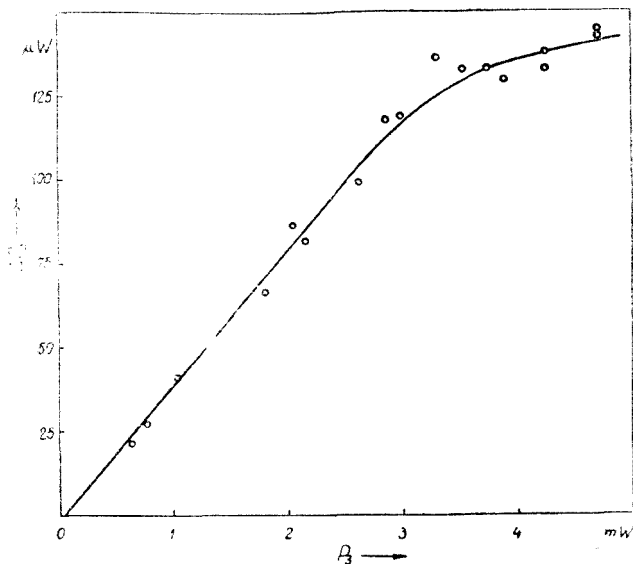


Fig. 2.

Valorile obținute pentru N_1 și N'_1 încadrează cifra $1,53 \cdot 10^{21}$ spin/gram admisă pentru D.P.P.H., și considerăm că relațiile (1) și (1') respectiv întreaga metodă de măsurare sînt corecte.

Măsurătorile pe cale absolută sînt utile la instalațiile de R.F.S.; ele permit pe de o parte controlul periodic al probelor etalon folosite, iar pe de altă parte permit, de exemplu, realizarea unor etaloane pentru măsurători unde D.P.P.H.-ul nu corespunde.

BIBLIOGRAFIE

1. I. E. Bennett, E. J. H. Morgan, Nature **182**, 199 (1958)
2. J. Smidt, Colocviul A.M.P.E.R.E., Pisa, 1960, p. 337.
3. A. Yariv, I. P. Gordon, Rev. Sci. Instr. **32**, 462 (1961).
4. B. Bleaney, K. W. Stevens, Rep. Progr. Phys. **16**, 109 (1953).
5. A. Bódi, P. Cioară, Studii și Cercetări de Fizică, **15**, 385 (1964).

ИЗМЕРЕНИЕ АБСОЛЮТНЫМ МЕТОДОМ КОНЦЕНТРАЦИИ НЕСПАРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОННО-СПИНОВОГО РЕЗОНАНСА

(Резюме)

В первой части работы выведены две формулы, позволяющие измерение абсолютным методом, соответственно исчисление концентрации неспаренных электронов при помощи спектрометра электронно-спинового резонанса, использующего в части микроволн магический T.

Во второй части работы показано, что экспериментальные результаты находятся в согласии с теорией, причём описанные измерительные методы полезны для периодического контроля использованных эталонов или для создания таких эталонов, которые можно использовать при сравнительных измерениях, где ДФПГ не применим.

MESURE ABSOLUE DE LA CONCENTRATION EN ÉLECTRONS
NON-COUPLÉS PAR LA MÉTHODE DE RÉSONANCE ÉLECTRONIQUE DE SPIN

(R é s u m é)

Dans la première partie du travail on a établi deux formules permettant de mesurer d'une manière absolue et de calculer ensuite la concentration des électrons non-couplés à l'aide d'un spectromètre de résonance électronique de spin, lequel utilise dans la partie des micro-ondes un T-magique.

Dans la seconde partie on montre que les résultats expérimentaux sont en concordance avec la théorie, les méthodes de mesure décrites étant utiles pour le contrôle périodique des étalons employés ou pour la réalisation d'étalons pouvant être employés à des mesures comparatives là où le D.P.P.H. ne correspond pas.

SPECTRELE DE ABSORBȚIE ÎN INFRAROȘU ȘI CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ALE SISTEMULUI: $V_2O_5-B_2O_3-PbO$

de

S. GOCAN, L. STĂNESCU și ȘT. MAN

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat sistemul $V_2O_5-B_2O_3$ și s-a constatat că B_2O_3 funcționează în special ca diluant. În studiul de față am inclus oxidul de plumb (PbO), care intră în compoziția multor faze sticloase cărora le conferă anumite proprietăți mecanice, optice și electrice.

Partea experimentală. Prepararea probelor s-a făcut plecându-se de la substanțe p. a.

În tabelul 1 sînt redată compozițiile probelor studiate.

Tabel 1

Compoziția probelor

Nr. probei:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V_2O_5 %	50	50	50	50	60	60	60	70	70	80	80	90
B_2O_3 %	40	30	20	10	30	20	10	20	10	15	10	5
PbO %	10	20	30	40	10	20	30	10	20	5	10	5

Probele s-au studiat sub formă de perle obținute din topituri avînd ca electrozi sîrmă subțire de argint.

Aparatură. Spectrele de absorbție în infraroșu au fost obținute cu ajutorul unui spectrograf de infraroșu UR 10, folosindu-se metoda cu nuyol.

Măsurătorile variației rezistenței electrice cu temperatura au fost efectuate cu ajutorul instalației descrisă în lucrarea [1].

Rezultatele măsurătorilor. Spectrele de absorbție în infraroșu ale probelor studiate sînt redată în figurile 1—5.

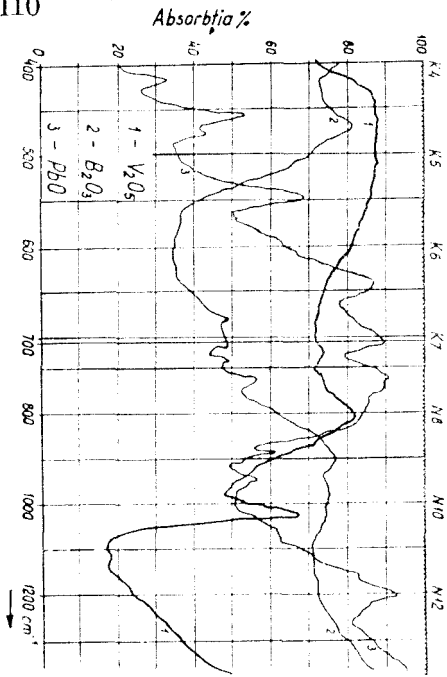


Fig. 1.

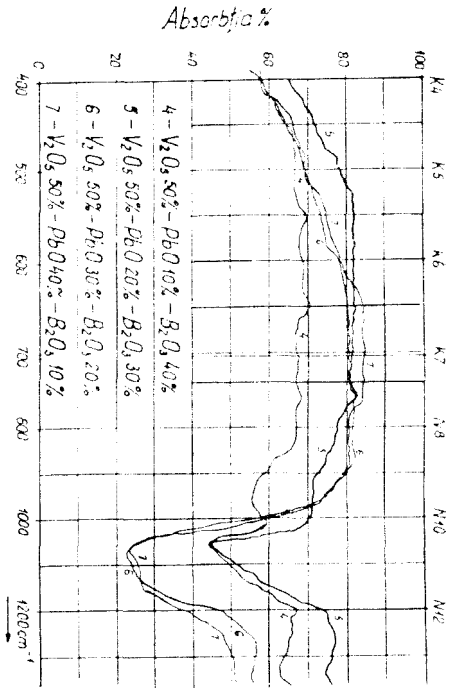


Fig. 2.

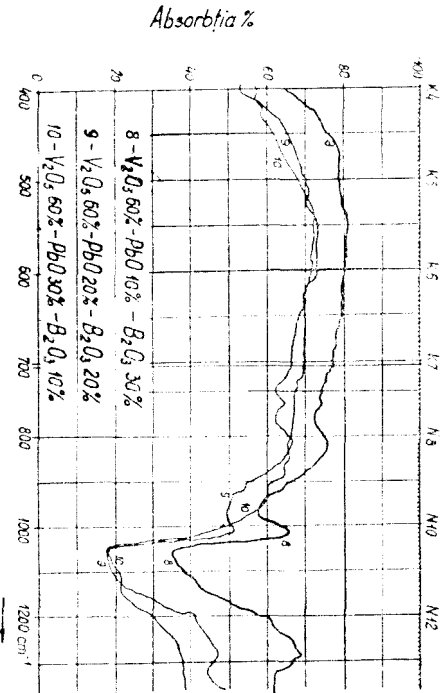


Fig. 3.

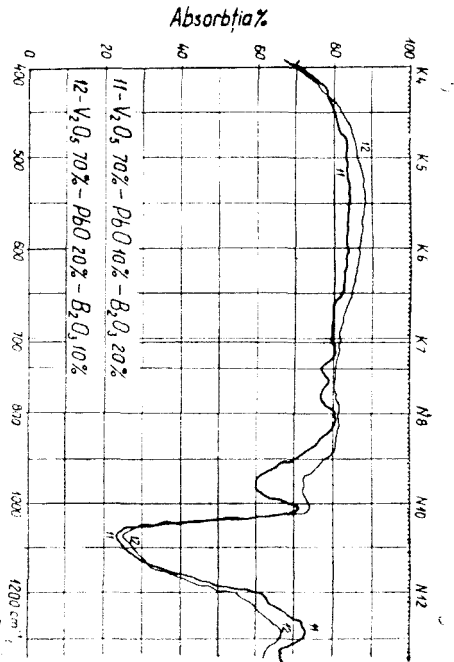


Fig. 4.

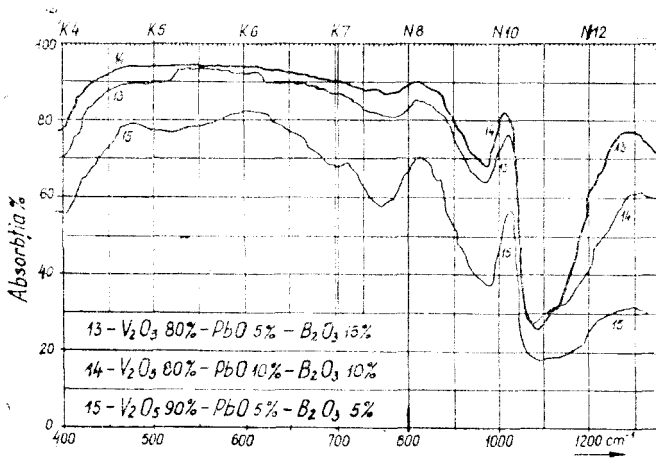


Fig. 5.

În fig. 6 sînt redate graficele, ce reprezintă variația lui $\log R$ în funcție de inversul temperaturii absolute pentru probele studiate.

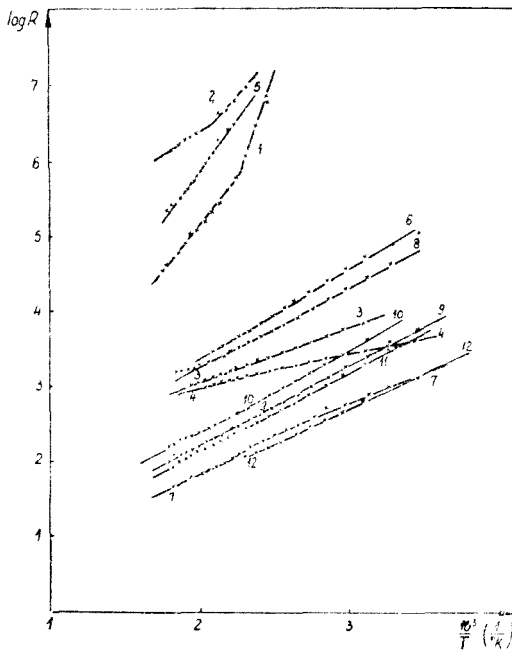


Fig. 6. Variația rezistenței electrice în funcție de temperatură, pentru probele :

1. 50% V_2O_5 - 40% B_2O_3 - 10% PbO
2. 50% V_2O_5 - 30% B_2O_3 - 20% PbO
3. 50% V_2O_5 - 20% B_2O_3 - 30% PbO
4. 50% V_2O_5 - 10% B_2O_3 - 40% PbO
5. 60% V_2O_5 - 30% B_2O_3 - 10% PbO
6. 60% V_2O_5 - 20% B_2O_3 - 20% PbO
7. 60% V_2O_5 - 10% B_2O_3 - 30% PbO
8. 70% V_2O_5 - 20% B_2O_3 - 10% PbO
9. 70% V_2O_5 - 10% B_2O_3 - 20% PbO
10. 80% V_2O_5 - 15% B_2O_3 - 5% PbO
11. 80% V_2O_5 - 10% B_2O_3 - 10% PbO
12. 90% V_2O_5 - 5% B_2O_3 - 5% PbO

Energiile de activare corespunzătoare curbelor din fig. 6 sînt redată în tabelul 2 și ele au fost calculate cu ajutorul relației [2]:

$$\Delta E = 1,98 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta \log R}{\Delta \left(\frac{1}{T} \right)}$$

Tabel 2

Energia de activare a probelor

Nr. probelor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E_a (eV)	$\frac{1,06}{0,48}$	$\frac{0,42}{0,34}$	0,14	0,09	0,50	0,22	0,17	0,21	0,21	0,21	0,21	0,20

În fig. 7 este arătată reproductibilitatea valorilor rezistenței electrice, după un tratament termic de 55 h la cca 220°C, pentru proba nr. 11.

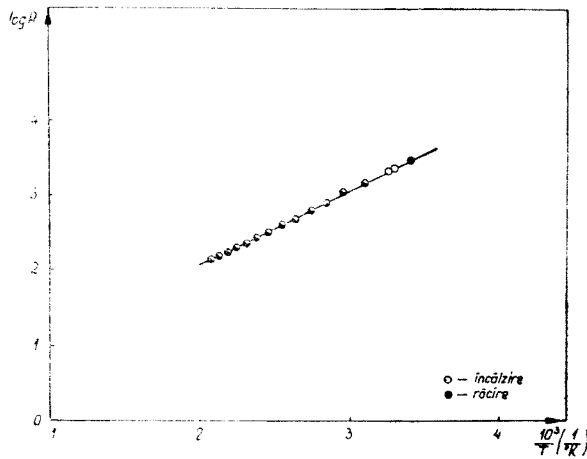


Fig. 7. Variația rezistenței electrice cu temperatura, pentru proba: 80% V_5O_2 - 10% B_2O_3 - 10% PbO , tratată termic.

Discutarea rezultatelor și concluzii. Spre deosebire de sistemul V_2O_5 - B_2O_3 a cărui comportare a fost dictată de diluarea cu B_2O_3 , după cum rezultă din spectrele de absorbție în infraroșu și măsurătorile electrice [1] în sistemul de față PbO a schimbat sensibil atât spectrele de absorbție în infraroșu cât și comportarea electrică. Astfel, spectrele de absorbție în infraroșu au fost puternic influențate de prezența oxidului de plumb (PbO), care la concentrații mai mari, a făcut să dispară maximele de absorbție ale celorlalți componenți. Exemplul cel mai concludent în acest sens

este redat în fig. 2, care corespunde compoziției nr. 4, ce are un spectru de absorbție în infraroșu cu un aspect diferit de al componentilor, ceea ce denotă o interacțiune relativ puternică între componente.

Din punctul de vedere al comportării electrice, situația este identică. Oxidul PbO, după cum se constată din tabelul 2, are o influență puternică în probele unde V_2O_5 este în concentrație mică. Cu creșterea conținutului de oxid de plumb, energia de activare scade, iar scăderea este cu atât mai accentuată cu cât pentoxidul de vanadiu este în concentrație mai mică. La concentrații mai mari de V_2O_5 , spectrele de absorbție în infraroșu păstrează caracteristicile componentilor V_2O_5 și B_2O_3 , după cum se vede din fig. 4—5. În același timp, energiile de activare sînt practic independente de cantitățile de PbO. Tonul în acest domeniu de concentrații îl dă V_2O_5 .

Reîntorcîndu-ne la proba nr. 4 al cărei spectru de absorbție în infraroșu l-am mai discutat, constatăm din tabelul 2 că îi corespunde și o energie de activare foarte mică.

În general, probele din sistemul studiat prezintă o reproductibilitate bună a valorilor rezistenței cu temperatura, ceea ce se constată din fig. 7.

Un aspect interesant îl prezintă curbele 1 și 2 din fig. 6, unde se constată două domenii cu energie de activare diferită. Cauzele acestor schimbări de pantă sînt în curs de studiu.

Topiturile obținute din sistemul studiat au, toate, aspect sticlos și proprietățile mecanice mai bune decît ale sistemului binar $V_2O_5-B_2O_3$.

B I B L I O G R A F I E

1. S. Gocan, L. Stănescu, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Series Mathematica-Physica, nr. 1/1965.
2. A. F. Joffe, *Fizika poluprovodnikov*, Moskva—Leningrad 1957.

СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ В ИК ОБЛАСТИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ СИСТЕМЫ $V_2O_5-B_2O_3-PbO$

(Резюме)

Произведены и изучены спектры поглощения в ИК области, а также изменение сопротивления в зависимости от температуры системы $V_2O_5-B_2O_3-PbO$.

Анализ полученных результатов показывает, что в малых концентрациях в V_2O_5 PbO сильно влияет на спектры поглощения в ИК области и одновременно энергия активации снижается с повышением концентрации окиси свинца. При больших концентрациях в V_2O_5 , спектры поглощения в ИК области сохраняют свойства компонентов и энергии активации практически не зависят от количеств окиси свинца.

LES SPECTRES D'ABSORPTION DANS L'INFRA-ROUGE ET LA
CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DU SYSTÈME $V_2O_5-B_2O_3-PbO$

(R é s u m é)

On a réalisé et étudié les spectres d'absorption dans l'infra-rouge, ainsi que la variation de la résistance en fonction de la température, du système $V_2O_5-B_2O_3-PbO$.

De l'analyse des résultats obtenus, il ressort que PbO influence puissamment les spectres d'absorption dans l'infra-rouge pour de faibles concentrations en V_2O_5 et que, d'autre part, l'énergie d'activation diminue avec l'augmentation de la concentration en oxyde de plomb. Pour de fortes concentrations en V_2O_5 les spectres d'absorption en IR gardent les caractéristiques des composants et les énergies d'activation sont pratiquement indépendantes des quantités d'oxyde de plomb.

DETERMINĂRI PRIVIND PROPRIETĂȚILE OPTICE ALE Cu_2S , Ag_2S și SnS_2

de
ERVIN DEZSÓ

1. Introducere. Scopul lucrării este de a studia proprietățile optice ale Cu_2S , Ag_2S și SnS_2 în domeniul vizibil și infraroșu apropiat. Sulfurile amintite sînt semiconductoare fotoconductive. Primele două aparțin grupei $A_{\text{I}}B_{\text{VI}}$ iar sulfura de staniu grupei $A_{\text{IV}}B_{\text{VI}}$.

La începutul secolului, C o b l e n t z [1, 2] a studiat spectrul de reflexie al sulfurilor în infraroșu și a sintetizat rezultatele obținute în felul următor: „În general, studiul sulfurilor arată că atomul de sulf diminuează proprietatea de reflexie a metalului, fără să formeze însă în domeniul studiat benzi selective de reflexie“. Coblentz s-a ocupat cu sulfura de cupru în formă de chalcotită.

Cu clasificarea semiconductorilor s-a ocupat K ö n i g s b e r g e r [12]. Cunoștințele moderne despre optica semiconductorilor sînt sistematizate de M o s s [5]. Cu proprietățile fotoelectrice s-a ocupat mult Institutul de cercetări din Kiev, iar Congresul din anul 1959 ținut la Kiev [6, 8, 9, 10, 11] cu proprietățile optice S p i t z e r și F a n [7].

Tehnica cercetărilor în infraroșu a fost prelucrată de L e c o m t e [3], iar problema straturilor subțiri de W o l t e r [4].

Proprietățile optice ale semiconductorilor sînt mai generale, mult mai puțin influențate de temperatură și de impurități decît cele electrice.

2. Bazele teoretice ale măsurărilor. Amplitudinea unei unde ce intră într-un mediu absorbant este:

$$U_x = U_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{nx}{c} + i \frac{kx}{c} \right) \right] \quad (1)$$

Legea ce descrie fenomenul refracției:

$$\sin \varepsilon = (n - ik) \sin \varepsilon' \quad (2)$$

unde indicii de refracție, $\sin \varepsilon$ și $\sin \varepsilon'$ sînt valori complexe.

La semiconductori de obicei $k^2 \ll n^2$, și ecuația reală aproximativă este

$$\sin \varepsilon = n \left(1 + \frac{k^2}{2n^4} \right) \sin \varepsilon'; \quad (\pm 1\%) \quad (3)$$

Partea reală a indicelui de refracție este legată de curentul de deplasare

$$n^2 - k^2 = \mu \varepsilon \quad (4)$$

iar partea imaginară depinde de curentul de conducție.

Fluxul de radiație ce traversează mediul absorbant de grosime x este determinat de coeficientul de absorbție k

$$\Phi_x = \Phi_0 \exp \left(- \frac{2\omega k}{c} x \right) = \Phi_0 \exp(-\alpha x) = \Phi_0 t^2 \quad (5)$$

unde: $\frac{2\omega k}{c} = \frac{4\pi k}{\lambda} = \alpha$ și $t = \exp \left(- \frac{\alpha x}{2} \right)$; α poartă numele de constanta de extincție. Afară de extincție, o altă sursă de pierderi este reflexia pe suprafață, caracterizată prin coeficientul de reflexie R .

Printr-un strat subțire transmisia este

$$T = \frac{\Phi_x}{\Phi_0} = \frac{(1 - R)^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)}{t^2 - R^2 t^2} \quad (6)$$

Dacă $t^4 \gg R^2$ și $k^2 \ll n^2$, în prima aproximație ($\pm 10\%$)

$$T \cong (1 - R)^2 t^2 \text{ și mai exact } T = (1 - R)^2 t^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right); \quad (\pm 1\%) \quad (6a)$$

Coeficientul de reflexie la straturi masive depinde de indicele de refracție și de coeficientul de absorbție. La limita de separare a mediilor 1 și 2

$$R_0 = \frac{(n_2 - n_1)^2 + (k_2 - k_1)^2}{(n_2 + n_1)^2 + (k_2 + k_1)^2} \quad (7)$$

La straturi subțiri coeficientul de reflexie depinde și de grosimea plăcii:

$$R = R_0 \frac{\left(t - \frac{1}{t} \right) + 4 \sin^2 \alpha}{\left(t - \frac{R_0}{t} \right) + 4 R_0 \sin^2(\alpha + \psi)} \quad (8)$$

unde $\alpha = 2\pi \frac{n x}{\lambda}$ și $\text{tg} \psi = \frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}$

În prima aproximație $R \cong R_0 (1 - t^2)$; ($\pm 5\%$) (8a)

Formula mai exactă a fost dată de Drude și Kellner [13].

3. **Tehnica măsurătorilor.** La metoda intensității, folosită de noi, este nevoie să măsurăm coeficientul de reflexie și de transmisie în vizibil și în infraroșu.

a) *Măsurarea reflexiei.* Pe o placă de sticlă am depus un strat mai gros de metal prin evaporare în vid. Am determinat coeficientul de reflexie pe metal masiv R_0 cu dispozitivul după Fig. 1. Lumina se reflectă de două ori; dacă fluxul incident este Φ_0 , atunci după reflexie dublă este $\Phi_R = \Phi_0 R_0^2$

În zona vizibilă am lucrat cu Universal Spectrofotometru VS I Zeiss, iar în infraroșu cu spectrafotometru UR 10 Zeiss.

b) *Măsurarea transmisiei.* Pe un suport de mică am depus un strat subțire de metal prin evaporare în vid. Mica drept suport nu este amintită pînă acum în literatură, dar experiențele noastre au arătat că pînă la lungimea de undă 8 microni ea este transparentă. În curba de absorbție a micii au apărut franjuri de interferență. Transmisia totală a plăcii de mică utilizată a fost în jurul a 82% în domeniul respectiv, fiind în mare măsură independent de grosimea plăcii, reflexia luminii jucînd mai mare rol decît absorbția. Am determinat curba de transmisie a stratului în zona vizibilă și în infraroșu.

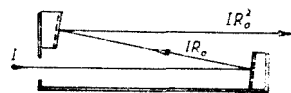


Fig. 1. Dispozitiv pentru măsurarea reflexiei la spectrafotometru în infraroșu UR.10.

c) *Măsurarea reflexiei la stratul subțire.* Cu metoda și dispozitivul descris înainte, am determinat coeficientul de reflexie R al stratului transparent.

d) *Sulfurarea.* În atmosfera umedă de H_2S am transformat metalul în sulfură. A rezultat un strat omogen, fără pete, mai puțin lucios decît metalul, nu a difuzat lumina, și nici sub microscop nu s-a remarcat cristale.

La stratul de sulfură am determinat coeficienții de reflexie R'_0 , și R' transmisie T' cu metoda descrisă înainte.

4. **Mersul calculelor.** Din măsurători am obținut rezultatele următoare (Fig. 2, 3 și 4, partea superioară):

	Reflexia la mat. masiv	Reflexia la strat subțire	Transmisia
Metal	R_0	R	T
Sulfură	R'_0	R'	T'

Între datele obținute avem următoarele relații:

$$R = R_0(1 - t^2) \quad 8/a$$

$$T = (1 - R)^2 t^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right) \quad 6/a$$

sau cu aproximație

$$T = (1 - R)^2 t^2; \quad t = \exp \left(-\frac{\alpha x}{2} \right)$$

Formulele sînt socotite la straturi simple, dar în cursul măsurătorilor intervin straturi multiple : aer—metal—suport. Transmisia suportului a fost compensată în instrument. Reflexia suportului în aer este R'' , iar pe limita de separare metal — suport : R' .

Coeficientul de transmisie a suportului singur : $T'' = (1 - R'')^2 t''^2$

„ „ „ a stratului suport : $T' = (1 - R')(1 - R'')(1 - R'')^2 t'^2$

Raportul coeficienților va fi : $T = \frac{T'}{T''} = (1 - R)t^2 \frac{1 - R''}{1 - R''} \cong (1 - R)t^2$

Întrucît $R'' = R' (\pm 5\%)$.

Din relația obținută se determină $t^2 = \exp(-\alpha x)$ pentru λ_D . Din măsurătorile lui Drude, cunoscînd coeficientul de absorbție k_D și α_D , determinăm grosimea stratului depus de metal, x . În infraroșu determinăm coeficientul de absorbție din valoarea k_D ; $k_\lambda = \frac{(\alpha x)_\lambda}{(\alpha x)_D}$

Grosimea stratului de sulfură poate fi determinată din raportul greutăților moleculare M și din cel al densităților d

$$x' = x \frac{M'd}{Md'} = xc' \quad \text{unde } c' = \frac{M'd}{Md'}$$

Din măsurătorile făcute după sulfurare, determinăm mărimile t'^2 și $(\alpha x)'$. Pentru o lungime de undă dată raportul între coeficientul de absorbție k și constanta de extincție α este constant : $k' = k \frac{(\alpha x)'}{c'(\alpha x)}$

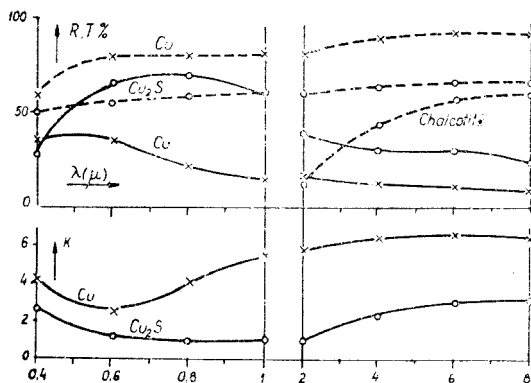


Fig. 2. Rezultatele măsurătorilor la Cu și Cu_2S (262)

Transmisia la metal. — x — x — x —
 Transmisia la sulfură. — 0 — 0 — 0 —
 Reflexia la metal. — x — x — x —
 Reflexia la sulfură. — 0 — 0 — 0 —
 Coeficientul de absorbție la metal. x — x — x —
 Coeficientul de absorbție la sulfură. — 0 — 0 — 0 —

5. **Rezultate.** Rezultatele măsurătorilor sînt redată în Fig. 2 (cupru), Fig. 3 (argint) și Fig. 4 (staniu). Coeficienții de reflexie R_0 și R'_0 sînt marcați cu linii întrerupte, cei de transmisie T_0 și T' cu linii continue. Linile cu cruce înseamnă metale pure, iar cele cu ceruțele — sulfuri. Curbele inferioare arată variația lui k și k' .

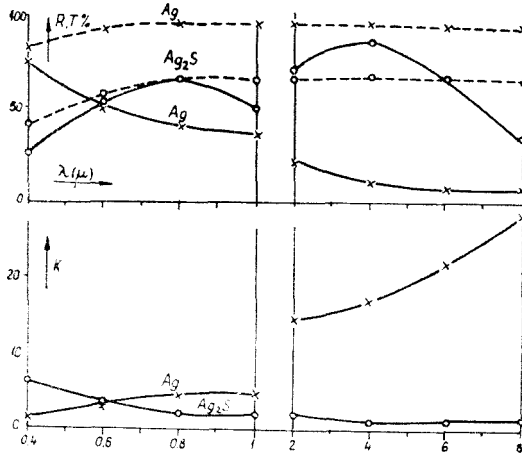


Fig. 3. Rezultatele măsurărilor la Ag și la Ag_2S .

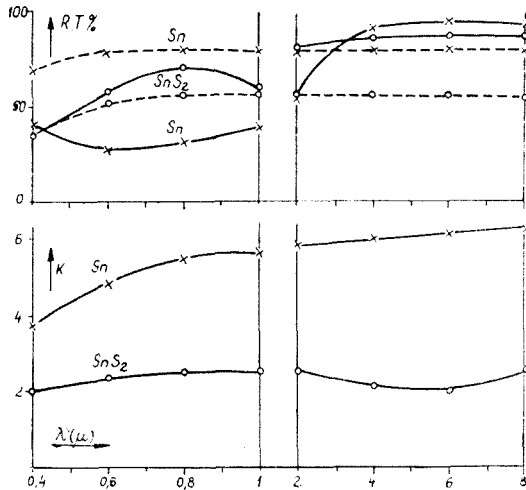


Fig. 4 Rezultatele măsurărilor la Sn și la SnS_2 .

La cupru și argint transmisia scade la jumătate în infraroșu la lungimi de unde lungi. Comportarea staniului se deosebește de celelalte metale, aici transmisia crește cu λ .

Comparînd comportarea metalului și a sulfurii sale, se observă că prin sulfurare transparența crește la cupru și argint, în infraroșu creșterea fiind încă mai pronunțată.

Staniul prezintă o excepție. La ambele probe făcute, transmisia metalului și a sulfurii sale era la același nivel.

Ca bază a calculelor am luat datele lui Drude, k_D și n_D , care în ultimii ani au fost controlate și corectate de Försterling, Oppitz, Socolov, Born.

Cuprinzînd rezultatele obținute într-un tabel, avem :

Material	n_D	k_D	$k_{1\mu}$	$k_{4\mu}$	$k_{8\mu}$
Cu	0,62	2,57	5,4	6,0	6,2
Cu ₂ S	3,8	5,9	1,0	2,7	3,0
Ag	0,20	3,44	5,0	16,6	28,0
Ag ₂	2,0	1,8	2,6	1,9	1,8
Su	1,48	5,25	5,1	6,0	6,3
SuS ₂	3,0	2,45	2,4	2,3	2,6

Comparînd datele obținute de noi cu ale altora, pentru argint în cartea lui Born [14] am găsit $k_{1\mu} = 6$ (noi am obținut 5) și $k_{4\mu} = 22$ (noi am obținut 16,6). Hodgson [15] a găsit că argintul și cuprul au un mers asemănător, iar la staniu curba diferă mult. Kretzmann [16] are date concordante pentru zona vizibilă.

La sulfuri, reflexia chalcotitei la Coblenz $R_0 = 50-55\%$, la noi, pentru sulfură pură, $59-66\%$. Pentru reflexia metalelor, datele din literatură au fost concordante.

BIBLIOGRAFIE

Generală:

1. W. W. Coblenz, *Investigations of Infra-red Spectra*. Carnegie Institution, Washington, 1905-1906.
2. W. W. Coblenz, *Supplementary Investigations of Infra-red Spectra*. Carnegie Institution, Washington, 1908.
3. Jean Lecomte, *Spectroscopie dans l'infrarouge*. Handbuch d. Physik, XXVI, Springer, VI, 1958.
4. Hans Wolter, *Optik dünner Schichten*. Handbuch d. Physik, XXV, Springer, VI, 1956.
5. T. S. Moss, *Opticeskie svoistva poluprovodnikov*. Izd. inostranoi lit. Moscova, 1961.
6. T. S. Moss, *Fotoelektriceskie i opticeskie iavleniia u poluprovodnikov*. Izd. Ak. nauk, Kiev, 1959.

Probleme speciale:

7. Spitzer, W. G., „Fan Phys. Rev.”, **106**, 882, 1957.
8. G. B. Dubrowschi, „Opt. tverd. tela,” **3**, nr. 5, 1778, 1957.
9. P. G. Borzjac, „Opt. tverd. tela,” **3**, nr. 6, 1305, 1961.
10. I. L. Boica, „Opt. tverd. tela,” **3**, nr. 7, 1950, 1957.
11. M. I. Uchanov, „Opt. tverd. tela,” **3**, nr. 7, 2105, 1957.

12. Königsberger, „Jahrbuch Radioakt. u. El.“ 4, 161, 1907.
13. R. Schulze, „Phys. Zeitschrift“, 34, 24, 1933.
14. Born, *Principles of Optics*, London, 1964, p. 623.
15. J. H. Hodgson, „Proc. Phys. Soc., London“ B. 68, 593—602, 1955.
16. R. Kretzmann, „Ann. d. Physik“, 5. Folge, 37, 1940.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ Cu_2S , Ag_2S И SnS_2

(Р е з ю м е)

Определяется коэффициент поглощения металлов Cu, Ag, Sn и их сульфидов в видимой и близкой инфракрасной области, между длиной волны 0,4—1, соответственно 2—8 микронов. Методом интенсивности измеряется у тонкого прозрачного слоя передача и отражение, а у массивного материала — отражение. Из n_D и k_D данных металлов определяется коэффициент поглощения в ИК области металлов и сульфидов. Результаты совпадают с теми, полученными Кобленцем.

DÉTERMINATION DES PROPRIÉTÉS OPTIQUES DE Cu_2S , Ag_2S ET SnS_2

(R é s u m é)

Le coefficient d'absorption des métaux Cu, Ag et Sn et de leurs sulfures est déterminé par l'auteur dans le domaine visible et dans l'infra-rouge voisin, entre les longueurs d'onde respectives de 0,4—1 et 2—8 microns. La méthode employée est la méthode d'intensité, avec mesure de la transmission et de la réflexion pour une couche mince transparente, et de la réflexion pour un matériel massif. Avec les données n_D et k_D des métaux on détermine le coefficient d'absorption dans l'infra-rouge pour les métaux et celui des sulfures. Les résultats concordent avec ceux de Coblenz.

CONTRIBUȚIUNI LA STUDIUL UNOR EFECTE DE POLARIZARE
ÎN CAZUL PROCESELOR CARE AU LOC CU PARTICIPAREA UNUI
SINGUR ELECTRON

de
Z. GĂBOS

În lucrare se studiază efectele de polarizare în două cazuri particulare : a) dezintegrarea β^- a neutronilor cu spin orientat și neorientat ; b) împrăștierea electronului într-un câmp columbian. În ambele cazuri la proces participă un singur electron.

Utilizînd pentru electron bispinorii lui Darwin, regăsim pe o cale simplă rezultatele cunoscute și stabilim rezultate noi privind polarizarea electronilor emiși de neutroni cu spinul orientat și polarizația electronilor împrăștiati într-un câmp columbian.

1. În cazurile menționate elementul de matrice corespunzător trecerii din starea inițială în starea finală poate fi scris sub forma :

$$M_{i \rightarrow f} = u_f^\dagger(x) M(x), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4; f = 1, 2, \quad (1)$$

unde M nu conține date care aparțin electronului prezent în starea finală. $u_1(\vec{p})$ respectiv $u_2(\vec{p})$ este bispinorul lui Darwin corespunzător electronului cu impulsul \vec{p} și elicitatea 1 respectiv -1 :

$$u_1 = N_c \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ B_{\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad u_2 = N_c \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -B_{\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

N_c este constantă de normare

$$B = \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 + e_3 \\ e_1 + ie_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -e_1 + ie_2 \\ 1 + e_3 \end{pmatrix}.$$

Pentru cazul dezintegrării $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ avem [10] :

$$M = \frac{g}{\sqrt{2}} [u_\nu(u_p^\dagger u_n) - \lambda \sum u_\nu(u_p^\dagger \sum u_n)], \quad \lambda = 1, 25. \quad (3)$$

iar pentru cazul împrăștierei în câmpul coulombian

$$M = Au_i, \quad A = \frac{2\pi^2 Z e^2}{\hbar^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4)$$

θ este unghiul de împrăștiere.

Bispinorul

$$u_{\vec{v}} = N_{\vec{v}} \begin{pmatrix} z \\ -z \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} -v_1 + iv_2 \\ 1 + v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{k}}{k} \quad (5)$$

care figurează în expresia (3) corespunde antineutriniului cu impulsul \vec{k} .

Vom considera dezintegrarea β^- a neutronului în repaus. În acest caz, în bună aproximație, se poate neglija energia cinetică a protonului. La fel vom neglija influența câmpului coulombian al protonului asupra electronului. Pentru nucleoni avem deci bispinori de forma :

$$\begin{aligned} u_{1N} &= N_{nc} \begin{pmatrix} \varphi_{1N} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2N} = N_{nc} \begin{pmatrix} \varphi_{2N} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_{1N} &= \begin{pmatrix} 1 + N_3 \\ N_1 + iN_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{2N} = \begin{pmatrix} -N_1 + iN_2 \\ 1 + N_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

N_{nc} este constantă de normare. Bispinorul cu indicele 1 (u_{1N}) respectiv cu indicele 2 (u_{2N}) corespunde nucleonului cu spinul orientat de-a lungul vectorului \vec{N} respectiv $-\vec{N}$.

Avînd în vedere că parametrii lui Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3 sînt coeficienți de orientare corespunzători sistemelor de funcții

$$u_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 + u_2), \quad u_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 - u_2),$$

respectiv

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 + iu_2), \quad u_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 - iu_2),$$

respectiv

$$u_1, u_2$$

obținem [4] :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2ReM_{i \rightarrow 1} M_{i \rightarrow 2}^*}{|M_{i \rightarrow 1}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}|^2}, \quad \xi_2 = -\frac{2ImM_{i \rightarrow 1} M_{i \rightarrow 2}^*}{|M_{i \rightarrow 1}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}|^2}, \\ \xi_3 &= \frac{|M_{i \rightarrow 1}|^2 - |M_{i \rightarrow 2}|^2}{|M_{i \rightarrow 1}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}|^2} \end{aligned} \quad (7)$$

(Dacă avem $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$, unde u_1, u_2 este un sistem de funcții ortonormate, atunci $|c_1|^2 - |c_2|^2$ se numește coeficient de orientare raportat la sistemul u_1, u_2 . În cazul când u_1, u_2 sînt bispinorii lui Darwin, ξ_3 ne indică polarizarea longitudinală, iar ξ_1 și ξ_2 polarizarea transversală a electronului.

2' Dezintegrarea β^- a neutronilor cu spinul neorientat. În acest caz nu avem direcții privilegiate pentru vectorii \vec{N}_n, \vec{N}_p și nu există o corelație (\vec{N}_n, \vec{N}_p). Deci în urma medierii în raport cu direcțiile posibile ale vectorilor \vec{N}_n și \vec{N}_p obținem

$$\overline{(N_n)_i} = \overline{(N_p)_i} = 0, \quad \overline{(N_n)_i (N_p)_k} = \overline{(N_n)_i} \overline{(N_p)_k} = 0,$$

în consecință

$$|\overline{u_p^+ u_n}|^2 \propto 1, \quad (8)$$

$$\overline{(u_p^+ \sum_i u_n)} \overline{(u_n^+ \sum_k u_p)} \propto \delta_{ik}, \quad (9)$$

$$\overline{(u_p^+ u_n)} \overline{(u_n^+ \sum_i u_p)} = 0. \quad (10)$$

Obținem sub (8) valoare diferită de zero, dacă indicele bispinorilor u_p și u_n este același. Avem sub (9) valori diferite de zero, dacă în cazul $i = 1, 2$ indicele bispinorilor u_p, u_n este diferit, iar în cazul $i = 3$ dacă este același. \propto este semnul de proporționalitate. Pe baza relațiilor (3), (1) găsim

$$\begin{aligned} |M_{i \rightarrow 1}|^2 &\propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) [1 + 3\lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \vartheta], \\ |M_{i \rightarrow 2}|^2 &\propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \cos \vartheta], \end{aligned} \quad (11)$$

$$M_{i \rightarrow 1} M_{i \rightarrow 2}^* \propto \frac{m_0 v^2}{\varepsilon} (1 - \lambda^2) \sin \vartheta.$$

ϑ este unghiul format de vectorii \vec{p} și \vec{k} . La efectuarea calculilor este avantajos dacă sistemul de referință se alege astfel încît să avem

$$e_1 = \sin \vartheta, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = \cos \vartheta, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = 1.$$

Utilizînd expresiile (11) pe baza relațiilor (7) obținem

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{m_0 v^2}{\varepsilon} \frac{a \sin \vartheta}{1 - a \frac{v}{c} \cos \vartheta}, & \xi_2 &= 0, & \xi_3 &= \frac{v}{c} \frac{a \cos \vartheta}{1 - a \frac{v}{c} \cos \vartheta}, \\ \frac{1}{2} (|M_{i \rightarrow 1}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}|^2) &\propto (1 + 3\lambda^2) \left(1 - a \frac{v}{c} \cos \vartheta\right), & a &= \frac{\lambda^2 - 1}{3\lambda^2 + 1}. \end{aligned}$$

Am regăsit pe o cale simplă rezultatele cunoscute [3], [5], [10]. Gradul de polarizare al fascicului de electroni este

$$P = \frac{\vec{\xi}_2^2}{\xi^2} = 1 - \frac{(1 - a^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - a \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}.$$

Dacă $\lambda = 0$, avem $a = -1$ (cuplaj V). Dacă facem ca λ să tindă către infinit, a tinde către $\frac{1}{3}$ (cuplaj A). Se observă că avem polarizare totală când avem numai cuplaj V ($\lambda = 0$) sau când viteza electronului tinde către c . (În acest ultim caz $\xi_3 = -1$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$; ξ_3 este gradul polarizării longitudinale, iar ξ_1 este gradul polarizării transversale.) Gradul de polarizare P , în general, este mai mic decât unu, adică fascicului de electroni este parțial polarizat, ceea ce era de așteptat, deoarece în cazul cuplajului $V-A$ avem superpoziția necoerentă a patru unde parțiale.

3°. Dezintegrarea β^- a neutronilor cu spinul orientat. Vom studia: a) corelația (\vec{N}_n, \vec{e}) și corelația (\vec{N}_n, \vec{v}) ; b) polarizarea electronului și c) orientarea spinului protonilor în direcția \vec{N}_n .

Este avantajos dacă se alege sistemul de referință astfel, încât axa Oz să fie orientată în direcția lui \vec{N}_n . În acest caz pentru neutroni avem bispinorul cu indicele 1:

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece spinul protonului format în urma dezintegrării poate avea, fie orientarea lui \vec{N}_n , fie a lui $-\vec{N}_n$, avem pentru protoni unul din bispinori

$$u_{p1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{p2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă probabilitatea de tranziție este diferită de zero, în cazul când pentru proton se ia bispinorul u_{p1} respectiv u_{p2} , avem tranziție Fermi respectiv Gamow-Teller. Deoarece

$$\begin{aligned} (u_{p1}^\dagger u_n) &= 1, & (u_{p1}^\dagger \sum_3 u_n) &= 1, \\ (u_{p2}^\dagger \sum_1 u_n) &= 1, & (u_{p1}^\dagger \sum_2 u_n) &= i, \end{aligned}$$

expresia (3) a lui M poate fi descompusă într-o sumă de doi termeni, unul corespunzător tranziției Fermi, iar altul corespunzător tranziției Gamow-Teller :

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} [(1 - \lambda \sum_3) u_{\bar{\nu}} - 2\lambda \sum_{\mp} u_{\bar{\nu}}], \quad \sum_{\mp} = \sum_1 + i \sum_2.$$

Pentru tranziția Fermi avem

$$\begin{aligned} |M_{i \rightarrow 1}^{(1)}|^2 &\propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) [1 + \lambda^2 + (\lambda^2 - 1)\cos\vartheta + 2\lambda(\nu_3 - e_3) - 2\lambda^2\nu_3e_3], \\ |M_{i \rightarrow 2}^{(1)}|^2 &\propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) [1 + \lambda^2 - (\lambda^2 - 1)\cos\vartheta + 2\lambda(\nu_3 + e_3) + 2\lambda^2\nu_3e_3], \\ M_{i \rightarrow 1}^{(1)} M_{i \rightarrow 2}^{(1)*} &\propto \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} \{e_1 [2\lambda + (1 + \lambda^2)\nu_3] + i(1 - \lambda^2)\nu_2\}, \\ W_1 &= \frac{1}{2} (|M_{i \rightarrow 1}^{(1)}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}^{(1)}|^2) \propto \left\{1 + \lambda^2 + 2\lambda\nu_3 - \frac{v}{c} [(\lambda^2 - 1)\cos\vartheta - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda e_3\nu_3]\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

iar pentru tranziția Gamow-Teller

$$\begin{aligned} |M_{i \rightarrow 1}^{(2)}|^2 &\propto 2\lambda^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 + \nu_3 + e_3 + e_3\nu_3), \\ |M_{i \rightarrow 2}^{(2)}|^2 &\propto 2\lambda^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) (1 + \nu_3 - e_3 - e_3\nu_3), \\ M_{i \rightarrow 1}^{(2)} M_{i \rightarrow 2}^{(2)*} &\propto -2\lambda^2 \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} e_1, \\ W_2 &= \frac{1}{2} (|M_{i \rightarrow 1}^{(2)}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}^{(2)}|^2) \propto 2\lambda^2 (1 + \nu_3) \left(1 - \frac{v}{c} e_3\right). \end{aligned} \quad (13)$$

(Am ales sistemul de referință astfel încît să avem $e_2 = 0$. În formulele de mai sus $\cos \vartheta = e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3$.)

Însumînd expresiile găsite pentru tranzițiile Fermi și Gamow-Teller obținem

$$|M_{i \rightarrow 1}|^2 \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) [1 + 3\lambda^2 + (\lambda^2 - 1)\cos\vartheta + 2\lambda(\lambda + 1)\nu_3 + 2\lambda(\lambda - 1)e_3], \quad (14)$$

$$|M_{i \rightarrow 2}|^2 \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2)\cos\vartheta + 2\lambda(\lambda + 1)\nu_3 - 2\lambda(\lambda - 1)e_3], \quad (15)$$

$$M_{i \rightarrow 1} M_{i \rightarrow 2}^* \propto \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} \{e_1 [-2\lambda(\lambda - 1) + (1 + \lambda^2)\nu_3] + i(1 - \lambda^2)\nu_3\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (|M_{i \rightarrow 1}|^2 + |M_{i \rightarrow 2}|^2) \propto \left\{1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(\lambda + 1)\nu_3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v}{c} [(\lambda^2 - 1)\cos\vartheta + 2\lambda(\lambda - 1)e_3]\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Avînd toate formulele de bază, putem trece la rezolvarea problemelor enumerate la începutul acestui punct.

a) **C o r e l a Ț i a** (\vec{N}_n, \vec{e}) și (\vec{N}_n, \vec{v}). Pentru a obține concluzii privind corelația (\vec{N}, e), în literatură se procedează în felul următor [10]: mediem W în raport cu direcțiile de emisie ale antineutrinelui presupunînd că $v_i = 0$. Se obține astfel

$$W_e \propto (1 + 3\lambda^2) \left[1 - \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{3\lambda^2 + 1} \frac{v}{c} e_3 \right]. \quad (18)$$

La stabilirea corelației (\vec{N}_n, \vec{v}) mediem expresia (17) pentru toate direcțiile de emisie ale electronului. Presupunînd că $\bar{e}_i = 0$, se obține astfel

$$W_v \propto (1 + 3\lambda^2) \left[1 + \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{3\lambda^2 + 1} v_3 \right]. \quad (19)$$

După părerea noastră procedeul folosit în literatură nu este suficient de justificat. La stabilirea corelației (\vec{N}_n, \vec{e}) putem admite o simetrie cilindrică, dar nici decum una sferică pentru direcțiile de emisie ale antineutrinelui. De altfel din (19) reiese în mod clar că \bar{v}_3 este diferit de zero. Dacă în (17) efectuăm medierea astfel ca să avem $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_3 \neq 0$, expresia (18) se va înlocui cu

$$W_e \propto [1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(\lambda + 1)v_3] \left(1 - \frac{2\lambda(\lambda - 1) + (\lambda^2 - 1)\bar{v}_3}{3\lambda^2 + 1 + 2\lambda(\lambda + 1)v_3} \frac{v}{c} e_3 \right). \quad (20)$$

Un calcul estimativ ne arată că \bar{v}_3 are valoare mică, prin urmare expresia (19) poate fi menținută. Din (19) rezultă

$$\bar{v}_3 = \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{3(3\lambda^2 + 1)} \approx \frac{1}{3}.$$

Menționăm că și formula (20) este în bună concordanță cu datele experimentale, deoarece în formulele (18) și (20) coeficienții din paranteză ai lui $-\frac{v}{c} e_3$ ne conduc aproximativ la aceași valoare (0, 11 respectiv 0,1074)

Dacă în cazul lui W_e modificările aduse de schimbarea procedurii de mediere sînt neînsemnate, ele devin importante în cazul polarizării electronului.

b) **P o l a r i z a r e a m e d i e a e l e c t r o n i l o r e m i Ț i**. Utilizînd expresiile (14), (15), (16) pe baza formulelor (7) găsim

$$\xi_1 = \frac{m_0 c^2}{e} \frac{-2\lambda(\lambda - 1) + (1 + \lambda^2)\bar{v}_3}{1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(\lambda + 1)v_3 - \frac{v}{c} [2\lambda(\lambda - 1) + (\lambda^2 - 1)\bar{v}_3] e_3} e_1, \quad \xi_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \frac{[(\lambda^2 - 1)\bar{v}_3 + 2\lambda(\lambda - 1)]e_3 - \frac{v}{c} [1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(\lambda - 1)\bar{v}_3]}{1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(\lambda + 1)\bar{v}_3 - \frac{v}{c} [2\lambda(\lambda - 1) + (\lambda^2 - 1)\bar{v}_3] e_3}.$$

Se observă că coeficienții lui Stokes sînt mult mai sensibili față de schimbarea procedului de mediere. Deocamdată nu dispunem de date experimentale care ne-ar permite să alegem dintre cele două posibilități ($\bar{v}_3 = 0$ respectiv $\bar{v}_3 \neq 0$).

c) **Orientarea protonilor.** Deoarece orientarea nucleonilor se schimbă numai cu ocazia tranziției Gamow-Teller, pentru orientarea protonilor avem

$$O_p = \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_2}{\bar{W}_1 + \bar{W}_2}.$$

\bar{W}_1 și \bar{W}_2 se obțin în urma medierii expresiilor (12) și (13) în raport cu direcțiile de emisie ale electronului și ale antineutrinoiului. Neglijînd termenii în care apare \bar{e}_3 , obținem următoarea expresie aproximativă:

$$O_p = \frac{1 - \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\bar{v}_3}{1 + 3\lambda^2 + 2\lambda(1 + \lambda)\bar{v}_3},$$

care după înlocuirea valorilor $\lambda = 1,25$, $\bar{v}_3 = 0,33$ ne conduce la $O_p \approx -0,1$.

4°. Imprăștierea electronului în câmpul coulombian. Elementul de matrice corespunzător trecerii din starea inițială în cea finală este

$$M_{in \rightarrow fn} = A(u_{fn}^+ u_{in}). \quad (21)$$

Pentru a ajunge la expresia secțiunii eficace avem nevoie de valoarea lui

$$|u_{fn}^+ u_{in}|^2 = u_{fn}^+(\alpha) u_{in}(\alpha) u_{in}^+(\beta) u_{fn}(\beta) = (\bar{P}_{fn} \gamma_4)_{\beta\alpha} (\bar{P}_{in} \gamma_4)_{\alpha\beta} = Spur(\bar{P}_{fn} \gamma_4 \bar{P}_{in} \gamma_4),$$

unde

$$P_{\alpha\beta} = \frac{m_0 c^2}{4\epsilon} \left(1 - i \frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{m_0 c} + \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \gamma_4 + i s \gamma_5 \vec{\gamma} + i s_4 \gamma_5 \gamma_4 - i \vec{F} \gamma_5 \gamma_4 \vec{\gamma} - i \vec{G} \gamma_5 \gamma_4 \right)_{\alpha\beta}$$

Avem factorul $\frac{m_0 c^3}{\epsilon}$ deoarece din (21) reiese că bispinorii u_r trebuie să fie normate astfel ca să avem $u_r^+ u_s = \delta_{rs}$.

Dacă pentru bispinorii u_r se ia reprezentarea lui Darwin și sistemul de referință se alege astfel ca să avem $e_1 = \sin \Theta$, $e_2 = 0$, $e_3 = \cos \Theta$, obținem [11]:

$$\begin{aligned} s_1 &= \xi'_1 \cos \Theta + \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \xi'_3 \sin \Theta, \\ \vec{s} (s_1, s_2, s_3) \quad s_2 &= \xi'_2, \\ s_3 &= -\xi'_1 \sin \Theta + \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \xi'_3 \cos \Theta, \\ s_4 &= i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \xi'_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}(m_{23}, m_{31}, m_{12}) \quad m_{23} &= -\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \xi'_1 \cos \Theta + \xi'_3 \sin \Theta, \\
m_{31} &= -\frac{\varepsilon}{m_0 c^3} \xi'_2, \\
m_{12} &= -\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \xi'_1 \sin \Theta + \xi'_3 \cos \Theta, \\
\vec{G}(m_{14}, m_{24}, m_{34}) \quad m_{14} &= -i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \xi'_2 \cos \Theta, \\
m_{24} &= i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \xi'_1, \\
m_{34} &= i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \xi'_2 \sin \Theta.
\end{aligned}$$

Notînd expresiile corespunzătoare stării inițiale cu indicele zero găsim

$$\text{Spur}(\vec{P}_{fn} \gamma_4 \vec{P}_{in} \gamma_4) = \frac{m_0^2 c^4}{4 \varepsilon^2} \left[1 + \frac{(\vec{p}, \vec{p}^{(0)})}{m_0^2 c^2} + \frac{\varepsilon^2}{m_0^2 c^4} + (s, s^{(0)}) - s_4 s_4^{(0)} + \vec{F} \vec{F}^{(0)} - \vec{G} \vec{G}^{(0)} \right].$$

Problema următoare care trebuie studiat este de a stabili legătura între polarizația electronului în starea inițială ($\Theta = 0$, $\vec{\xi}'_{in} = \vec{\xi}^{(0)}$) și cea finală ($\Theta \neq 0$, $\vec{\xi}'_{fn} = \vec{\xi}'$).

Pentru acest scop utilizăm expresiile (7), expresia lui $M_{in \rightarrow fn}$ dată sub (21) și expresiile (2) ale bispinorilor u_r . După efectuarea unor calcule simple găsim

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \frac{1}{\Phi_+} \left[\Phi_- \xi_1^{(0)} - \varepsilon \sin \Theta \xi_3^{(0)} \right], \\
\xi'_2 &= \xi_2^{(0)}, \\
\xi'_3 &= \frac{1}{\Phi_+} \left[\Phi_- \xi_3^{(0)} + \varepsilon \sin \Theta \xi_1^{(0)} \right],
\end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\Phi_{\pm} = \frac{\varepsilon^2}{m_0^2 c^4} \cos^2 \frac{\Theta}{2} \pm \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Din (22) rezultă

$$\vec{\xi}'^2 = \vec{\xi}^{(0)2}. \tag{23}$$

Avînd în vedere (22) obținem final

$$|u_{fn}^{\dagger} u_{in}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \vec{\xi}^{(0)2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right).$$

Dacă punem $\vec{\zeta}^{(0)2} = 1$, regăsim rezultatul cunoscut [4]:

$$u_{fn}^+ u_{in}^- \Big| = 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Considerăm că calculele noastre de mai sus dau o justificare a utilizării metodei obișnuite, care utilizează unele ipoteze neformulate în mod explicit (de exemplu rezultatul formulat sub (23) și care introduce la mediere un factor 1/2 după o justificare incompletă). În același timp am obținut și următoarele rezultate noi:

— formulele date sub (22) fac legătură între polarizarea electronului din starea inițială și cea finală. Formule analoge au fost stabilite de F. Sauter [9]. O comparație a rezultatului obținut de noi și a celui obținut de F. Sauter ne arată că rezultatele noastre sînt mai exacte;

— rezultatul (24) ne sugerează posibilitatea de a stabili gradul de polarizare a unui fascicul de electroni prin metoda împrăștierii în cîmpul coulombian.

BIBLIOGRAFIE

1. H. A. Tolhoek — S. R. de Groot, *Physica*, **17**, p. 1,17, 81, 1951.
2. H. A. Tolhoek, *Rev. Mod. Phys.*, **28**, p. 277, 1956.
3. I. Smorodinski, *U.F.N.*, **67**, p. 43, 1959.
4. A. I. Ahiezer — V. B. Berestețki, *Kvantovaiia elektrodinamika*, izd. vtoroe, Moskva 1959, p. 270—374.
5. G. Györgyi — H. Überall, *Nuclear Phys.*, **5**, p. 405, 1958.
6. A. I. Alihanov, *Slabie vzaimodeistvia. Noveișie issledovania β raspada*, Moskva, 1960
7. M. E. Rose, *Polarization Phenomena in Beta and Gamma Emission*. „Lectures in Theoretical Physics” vol. 2, p. 1—142, Brandeis Summer Institute, 1961, New York, 1962.
8. W. R. Johnson—T. A. Weber—C. J. Mullin, *Phys. Rev.* **121**, p. 933, 1961
9. F. Sauter, *Ann. der Phys.*, **18**, p. 61, 1933
10. L. B. Okuni, *Slabie vzaimodeistvia elementarnih ciastiț*, p. 117—121, Moskva, 1963.
11. Z. Gábos—E. Simon, *Studia Univ. Babeș—Bolyai, Math. Phys.* nr. 2, 1965.
12. M. A. Preston, *Fizika iadra* (traducere din l. engleză), Moscova, 1964, p. 341—372.

К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ С УЧАСТИЕМ ОДНОГО ЭЛЕКТРОНА

(Резюме)

В работе приведены новые результаты, полученные при поляризации электронов, вышущенных нейтронами с ориентированным спином при β^- дезинтеграции, а также результаты, полученные при поляризации электронов, рассеянных в кулоновском поле.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE D'EFFETS DE POLARISATION DANS LE CAS DES PROCESSUS QUI ONT LIEU AVEC LA PARTICIPATION D'UN SEUL ÉLECTRON

(Résumé)

L'auteur expose les nouveaux résultats qu'il a obtenus concernant d'une part la polarisation des électrons émis par des neutrons à spin orienté à l'occasion de la désintégration β^- et d'autre part, la polarisation des électrons diffusés dans un champ coulombien.



CALCULUL STATISTIC AL SUSCEPTIBILITĂȚILOR BLOCH ÎN CAZUL FENOMENELOR DE REZONANȚĂ MAGNETICĂ

de

FLORIN CONSTANTINESCU

În principiu, fenomenele de rezonanță magnetică [1] revin la coincidența frecvenței unui câmp magnetic variabil H_1 cu frecvența precesiei Larmor a unui sistem de spini în jurul unui câmp magnetic constant și omogen H_0 . La o analiză mai amănunțită a fenomenului se constată că alături de procesul de absorbție de cuante din câmpul de înaltă frecvență, sistemul de spini este supus și unor procese de relaxare datorită interacțiunilor spin-rețea și spin-spin. Ecuațiile fenomenologice ale stării staționare care se atinge sub influența absorbției și a relaxării au fost studiate de către Bloch [2]. Din tratarea fenomenologică a lui Bloch rezultă și expresiile susceptibilităților magnetice (partea de absorbție și cea de dispersie), foarte importante atunci când se discută forma liniei de rezonanță :

$$\begin{aligned} \chi' &= \chi_0 + \chi_0 \omega \tau \frac{(\omega_0 - \omega) \tau}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2 + \gamma^2 H_1^2 \tau^2} \\ \chi'' &= \chi_0 \omega \tau \frac{1}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2 + \gamma^2 H_1^2 \tau^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Aici χ_0 este susceptibilitatea statică a sistemului de N spini, ω_0 frecvența precesiei Larmor, ω frecvența câmpului rotitor H_1 , γ factorul giromagnetic iar τ timpul de relaxare a sistemului de spini. De fapt în mod corect se introduc doi timpi de relaxare T_1 și T_2 corespunzători interacțiunilor spin-rețea și spin-spin. Expresiile (1) au fost scrise pentru cazul în care acești doi timpi de relaxare sînt aproximativ egali $T_1 \cong T_2 = \tau$. Se va vedea în cursul lucrării că putem trata și cazul $T_1 \neq T_2$ în mod cu totul analog.

Pentru cazul rezonanței electronice de spin, relațiile (1) pot fi regăsite și pe cale statistică, cu ajutorul metodei matricei de densitate [1], [3]. Nu există însă calcule efectuate pentru cazul în care numărul cuantic de spin I este mai mare decît $1/2$.

În această lucrare ne propunem să găsim matricea de densitate pentru cazul unui sistem de spini cu numărul cuantic de spin $I > 1/2$, iar apoi

ca o aplicație, să regăsim pe această cale expresiile susceptibilităților Bloch în cazul $I = 1$.

Ecuția matricii de densitate în cazul unui sistem de spini. Să notăm cu $\psi(\vec{r}, t)$ funcția de undă a unui spin din sistemul de N spini considerați independenți și care poate fi dezvoltată după funcțiile proprii ale componentei I_z a operatorului de spin I .

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) u_n(\vec{r})$$

Elemente matricii de densitate a sistemului de spini [4] sînt

$$\rho_{nm} = c_m^* c_n$$

medierea făcîndu-se după toate sistemele ansamblului statistic. Cu ajutorul lui ρ putem calcula valoarea medie a unei mărimi fizice căreia i se atașează operatorul F

$$\langle F \rangle = Sp(F\rho) \quad (2)$$

Matricea de densitate verifică ecuația de mișcare [4]

$$- \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (3)$$

unde \mathcal{H} este hamiltonianul sistemului, iar parantezele drepte indică un comutator. Hamiltonianul \mathcal{H} se compune din hamiltonianul sistemului de spini în cîmpul constant H_0 , hamiltonianul sistemului în cîmpul magnetic H_1 și dintr-o parte de intersecțiune \mathcal{H}_i care caracterizează procesele de relaxare spin-rețea și spin-spin. Se poate arăta [3] că ne putem dispensa de partea de interacțiune \mathcal{H}_i , dacă în ecuația de mișcare (3) introducem un timp de relaxare τ . În acest mod ecuația (3) devine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] - \frac{\rho(t) - \bar{\rho}(t)}{\tau} \quad (4)$$

unde $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}} + \mathcal{H}_i$ și

$$\bar{\rho}(t) = \frac{e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}}}{Sp e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}}}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (5)$$

este matrice de densitate în lipsa proceselor de relaxare. Dacă notăm

$$\begin{aligned} I_+ &= I_x + iI_y \\ I_- &= I_x - iI_y \end{aligned} \quad (6)$$

unde I_x, I_y, I_z sînt componentele operatorului de spin I , avem

$$\bar{\mathcal{H}} = - \gamma \hbar H_0 I_z - \frac{\gamma \hbar H_1}{2} (I_+ e^{i\omega t} + I_- e^{-i\omega t}) \quad (7)$$

Din mecanica cuantică se știe că

$$\begin{aligned} I_z |m\rangle &= m |m\rangle \\ I_+ |m\rangle &= \sqrt{I(I+1) - m(m+1)} |m+1\rangle \\ I_- |m\rangle &= \sqrt{I(I+1) - m(m-1)} |m-1\rangle \\ m &= I, I-1, \dots, -I+1, -I. \end{aligned} \quad (8)$$

Dacă notăm $\Delta \equiv \Delta(t) = \rho(t) - \bar{\rho}(t)$, ecuația (4) devine

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\bar{\mathcal{H}}, \Delta] - \frac{\Delta}{\tau} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \quad (9)$$

deoarece $\bar{\rho}$ comută cu $\bar{\mathcal{H}}$. Acesta este ecuația care dă variația în timp a matricei de densitate.

Rezolvarea ecuației matricei de densitate. Ne propunem să rezolvăm ecuația diferențială (9) în cazul unui sistem de spini cu numărul cuantic de spin I . Pentru cazul $I = 1/2$ aceste calcule au fost deja efectuate [1], [3]. Ne vom limita deocamdată la cazul unui câmp magnetic H_1 cu polarizare circulară :

$$H_x = H_1 \cos \omega t, \quad H_y = -H_1 \sin \omega t$$

Vom mai nota

$$H_+ = H_x + iH_y = H_1 e^{-i\omega t}, \quad H_- = H_y - iH_x = H_1 e^{i\omega t}$$

Atunci din (7) avem

$$\bar{\mathcal{H}} = -\gamma \hbar H_0 I_z - \frac{\gamma \hbar}{2} (I_+ H_- + I_- H_+) \quad (8)$$

Elementul de matrice a hamiltonianului $\bar{\mathcal{H}}$ între stările m și n va fi

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{H}})_{m,n} \equiv \langle m | \bar{\mathcal{H}} | n \rangle &= -\gamma \hbar m H_0 \delta_{mn} - \frac{\gamma \hbar H_1}{2} \left(e^{i\omega t} \sqrt{I(I+1) - n(n+1)} \right. \\ &\left. \delta_{m,n+1} + e^{-i\omega t} \sqrt{I(I+1) - n(n-1)} \delta_{m,n-1} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

deoarece

$$(I_+)_{m,n} \equiv \langle m | I_+ | n \rangle = \sqrt{I(I+1) - n(n+1)} \delta_{m,n+1}$$

$$(I_-)_{m,n} \equiv \langle m | I_- | n \rangle = \sqrt{I(I+1) - n(n-1)} \delta_{m,n-1}$$

Apoi avem

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}, \Delta]_{m,n} &= \bar{\mathcal{H}}_{ms} \Delta_{sn} - \Delta_{mr} \bar{\mathcal{H}}_{rn} = H_0 \gamma \hbar (n-m) \Delta_{mn} - \\ &- \frac{\gamma \hbar H_1}{2} \left[e^{i\omega t} \left(\sqrt{I(I+1) - m(m-1)} \Delta_{m-1,n} - \sqrt{I(I+1) - n(n+1)} \Delta_{m,n+1} \right) + \right. \\ &\left. + e^{-i\omega t} \left(\sqrt{I(I+1) - m(m+1)} \Delta_{m+1,n} - \sqrt{I(I+1) - n(n-1)} \Delta_{m,n-1} \right) \right] \end{aligned}$$

Datorită faptului că în condiții experimentale obișnuite $\beta = \frac{1}{\hbar T} \ll 1$, putem să ne limităm la primul factor al dezvoltării lui $\bar{\rho}$ după puterile lui β :

$$\bar{\rho} = \frac{e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}}}{S_{\beta} e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}}} = \frac{1}{2I+1} (1 - \beta \bar{\mathcal{H}}) \quad (12)$$

Elementul de matrice va fi

$$(\bar{\rho})_{m,n} = \frac{1}{2I+1} \left\{ \delta_{mn} + \frac{\gamma \hbar}{kT} \left[mH_0 \delta_{mn} + \frac{H_1}{2} \left(e^{i\omega t} \sqrt{I(I+1) - n(n+1)} \delta_{m,n+1} + e^{-i\omega t} \sqrt{I(I+1) - n(n-1)} \delta_{m,n-1} \right) \right] \right\} \quad (13)$$

Matricile ρ și $\bar{\rho}$ fiind hermitice, și matricea Δ este hermitică, $\Delta_{mn} = \Delta_{nm}^*$. Din relațiile de mai sus rezultă că elementele ei sînt egale cu zero dacă indicii respectivi diferă cu mai mult de o unitate. Pentru $n < m$ vom căuta pe Δ sub forma

$$\Delta_{mn} = (P_{mn} + iQ_{mn})e^{i\omega t} \quad (14)$$

Inlocuind în ecuația (9) pentru cazurile $n = m$ și $n = m - 1$ și identificînd cu zero atît partea reală cît și cea imaginară vom obține următoarele ecuații algebrice pentru determinarea matricei

$$\begin{aligned} \Delta_{mm} - \gamma \tau H_1 (Y_m - Y_{m-1}) &= 0 \\ X_m - \tau(\omega - \omega_0) Y_m &= 0 \\ \tau(\omega - \omega_0) X_m + Y_m + \frac{\gamma H_1 \tau}{2} A_m^2 (\Delta_m - \Delta_{m-1}) + \\ &+ \frac{\omega H_1 \gamma \tau \hbar}{2(2I+1)kT} \Delta_m^2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} A_m &= \sqrt{I(I+1) - m(m-1)} \\ A_m P_{m,m-1} &= X_m, \quad A_m Q_{m,m-1} = Y_m \\ \Delta_{m,m} &= \Delta_m \end{aligned} \quad (16)$$

În acest mod determinarea matricei Δ , și cu aceasta a matricei de densitate ρ se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice. El poate fi rezolvat și sub formă generală, dar pentru scopurile aplicației

noastre este suficient să dăm soluția lui pentru cazul $I = 1$. Pentru $I = 1$ vom avea un sistem de șapte ecuații cu șapte necunoscute care conduce la

$$\begin{aligned} Y_1 = Y_0 = -\frac{\omega \zeta \alpha_1}{n}, \quad X_1 = X_0 = -\frac{1}{3} \frac{\omega \zeta^2 (\omega - \omega_0) \alpha_1}{n} \\ \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = -\Delta_{-1} = -\frac{1}{3} \frac{\gamma \zeta^2 \omega H_1}{n} \end{aligned} \quad (15)$$

unde

$$\eta = 1 + \gamma^2 H_1^2 \zeta^2 + \zeta^2 (\omega - \omega_0)^2 \quad \text{și} \quad \alpha_1 = \frac{\gamma h H_1}{kT}$$

Calculul susceptibilităților Bloch. Pentru a face un calcul statistic al susceptibilităților Bloch în cazul unui sistem de N spini cu numărul cuantic de spin $I = 1$, vom observa că proiecția vectorului de magnetizare pe axa x este

$$M = H_1 (X' \cos \omega t + X'' \sin \omega t) \quad (16)$$

Pe de altă parte M poate fi aflat și cu ajutorul matricii de densitate după relația (2)

$$M_x = Sp(\rho I_x) = Sp(\rho I_x^i) + Sp(\Delta I_x) \quad (17)$$

În relația (17) cunoaștem pe ρ și Δ . Vom avea

$$M = N \rho h \left[\left(X_1 + X_0 + \frac{2}{2} \alpha_1 \right) \cos \omega t - (Y_1 + Y_0 \sin \omega t) \right] \quad (18)$$

unde N a fost introdus din cauza faptului că am trecut deja la sistemul de N spini. Din identificarea relațiilor (16) și (18) și utilizarea soluțiilor (15) se obține

$$\begin{aligned} \chi' &= \chi_0 + \chi_0 \frac{\omega (\omega - \omega_0) \zeta^2}{n} \\ \chi'' &= \chi_0 \frac{\omega \zeta}{n} \end{aligned} \quad (19)$$

unde χ_0 este susceptibilitatea statică, $\chi_0 = \frac{N}{3kT} \gamma^2 h^2 I (I + 1) = \frac{2}{3} \frac{N \gamma^2 h^2}{kT}$, adică tocmai expresiile susceptibilităților Bloch (1).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Abragam, *The Principles of Nuclear Magnetism*, Oxford, 1961.
2. F. Bloch, „Phys. Rev.” 70., 460 (1946).
3. G. Vojta, „Zeitschrift für Naturforschung”, 12 a, 4, 282 (1957).
4. C. Kittel, *Elementary Statistical Physics*, New-York, 1958.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВОСПРИИМЧИВОСТЕЙ БЛОХА В СЛУЧАЕ
ЯВЛЕНИЙ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

(Р е з ю м е)

Дано решение дифференциального уравнения матрицы плотности для случая магнитного резонанса одной системы N самостоятельных спинов со спиновым квантовым числом $I > 1/2$. В качестве приложения полученных решений дается статистическое обоснование восприимчивостей Блоха в частном случае $I = 1$.

CALCUL STATISTIQUE DES SUSCEPTIBILITÉS BLOCH DANS LE CAS DES
PHÉNOMÈNES DE RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

(R é s u m é)

On résout l'équation différentielle de la matrice de densité pour le cas de la résonance magnétique d'un système de N spins indépendants ayant le nombre quantique de spin $I > 1/2$. Comme application des solutions obtenues, on donne un fondement statistique des susceptibilités Bloch dans le cas particulier de $I = 1$.

REȘ A IONULUI Cu^{2+} ÎN COMPLECȘI CRISTALINI DE TIPUL MX_6 , PARȚIAL COVALENȚI

de

I. URȘU, A. NICULA, S. NISTOR și G. CRISTEA

Introducere.

Studiile REȘ efectuate în ultimul timp au dus la concluzia caracterului parțial covalent al legăturilor chimice din cristalele ionice. Într-o serie de lucrări [1 — 4] s-au calculat aproximativ constantele de structură hiperfină și factorul g pentru complecși, de tipul MX_6 , pe baza introducerii orbitalilor moleculari. Ulterior, s-au dedus [5 — 8] formulele exacte pentru complexul plan, de tipul CuX_4 , ce se formează într-o serie de compuși organici.

În cele ce urmează ne-am propus să efectuăm calculul complet pentru complexul CuX_6 cu simetrie axială și să arătăm cum influențează legăturile de covalență constantele K (constanta de cuplaj Fermi) și Q (constanta de interacțiune cuadripolară). Formulele deduse explică rezultatele experimentale obținute în laboratorul nostru [9—10].

Teoria.

1. *Funcțiile de undă.* În calculul hamiltonianului de spin al ionului de Cu^{2+} vom considera că celula elementară a rețelei cristaline este un octaedru, determinat de cei șase nuclei ai liganzilor. Acest octaedru este alungit de-a lungul axei Oz . Cei șase ioni liganzi cu centrele în punctele de coordonate 1(a, 0, 0), 2(0, a, 0), 3(0, 0, b), 4(-a, 0, 0), 5(0, -a, 0), 6(0, 0, -b) determină o rețea cu simetrie tetragonală. Sub influența câmpului electric cristalin, de simetrie cubică și sub influența componentei tetragonale a acestui câmp, nivelul fundamental al ionului de Cu^{2+} ($3d^9$, ${}^2D_{5/2}$) se despică în subnivele a căror schemă este dată în fig. 1.

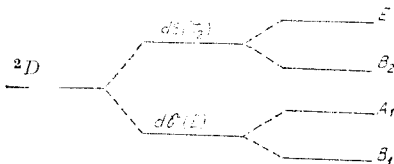


Fig. 1.

Funcțiile de undă corespunzătoare acestor nivele sînt :

$$\begin{aligned} B_1 &\rightarrow d_{x^2-y^2} & A_1 &\rightarrow d_{3z^2-r^2} \\ B_2 &\rightarrow d_{xy} & E &\rightarrow d_{xz}, d_{yz} \end{aligned} \quad (1)$$

În cele ce urmează, vom considera că distorsiunile tetragonale ale rețelei, constituie o perturbare care modifică doar poziția nivelelor energetice, fără a schimba funcțiile de undă. Orbitalii moleculari ce se formează pe baza acestor funcții de undă, desemnați ca reprezentări ireductibile ale grupului O_h vor fi :

$$\begin{aligned} B_1 &= |0\rangle = N_\sigma \left[d_{x^2-y^2} - \frac{1}{2} \eta_\sigma (-\psi_x^1 + \psi_y^2 + \psi_x^4 - \psi_y^5)_\sigma \right] \\ A_1 &= |1\rangle = N_\sigma \left[d_{3z^2-r^2} - \sqrt{\frac{1}{12}} \eta_\sigma (-2\psi_z^5 + 2\psi_z^6 - \psi_x^4 + \psi_x^1 + \psi_y^2 - \psi_y^5)_\sigma \right] \\ B_2 &= |2\rangle = N_\pi \left[d_{xy} + \frac{1}{2} \eta_\pi (\psi_y^1 + \psi_x^2 - \psi_y^4 - \psi_x^5)_\pi \right. \\ E &= |3\rangle = \begin{cases} N'_\pi \left[d_{yz} + \frac{1}{2} \eta'_\pi (\psi_z^3 + \psi_y^3 - \psi_z^5 - \psi_y^6)_\pi \right] \\ N'_\pi \left[d_{xz} + \frac{1}{2} \eta'_\pi (\psi_x^3 + \psi_z^1 - \psi_z^4 - \psi_x^6)_\pi \right] \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

unde s-au folosit notațiile :

$$\begin{aligned} (\psi_j^i)_\sigma &= \eta_{p\sigma} p_j^i \pm r_s s^i \\ (\psi_j^i)_\pi &= p_j^i \end{aligned} \quad (3)$$

Din condiția de normare rezultă :

$$\eta_{p\sigma}^2 + r_s^2 = 1 \quad (4)$$

N_σ , N_π , N'_π , η_σ , η_π , η'_π sînt coeficienții de amestec, funcțiile d sînt funcțiile de undă a atomului paramagnetic iar funcțiile ψ sînt funcțiile de undă $2s$, $2p$ a atomilor liganzi.

Între coeficienții de amestec avem următoarele relații, rezultate din impunerea condiției de normare a orbitalilor moleculari :

$$\begin{aligned} N_\sigma^2 (1 + \eta_\sigma^2 + 4\eta_\sigma S_\sigma) &= 1 \\ N_\pi^2 (1 + \eta_\pi^2 + 4\eta_\pi S_\pi) &= 1 \\ N_\pi'^2 (1 + \eta_\pi'^2 + 4\eta_\pi' S_\pi') &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Expresiile integralelor de acoperire S sînt date la anexa I, introducerea coeficienților $N'_\pi \neq N_\pi$ și $\eta'_\pi \neq \eta_\pi$ marcînd existența distorsiunii tetragonale.

Folosind în locul orbitalilor atomici, orbitali moleculari configurația electronică va fi $(d\varepsilon)^6(d\gamma)^3$ sau pentru o gaură pozitivă $d\gamma$. Nivelului fundamental îi va corespunde funcția de undă $|0\rangle = \Phi_{x^2-y^2}$, iar primului nivel excitat funcția $|2\rangle = \Phi_{3z^2-r^2}$.

2. *Hamiltonianul de spin*. Pe baza hamiltonianului real de interacțiune corespunzător absenței momentelor nucleare ale liganzilor [11]

$$W_N = \lambda \vec{l} \vec{s} + \beta_0 H(\vec{l} + 2\vec{s}) + 2\gamma\beta_0\beta_N \left[\frac{(\vec{l} - \vec{s}) \cdot \vec{I}}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{s})(\vec{r} \cdot \vec{I})}{r^5} \right] + \\ + 2\gamma\beta_0\beta_N \frac{8\pi}{3} \delta(\vec{r}) \vec{s} \cdot \vec{I} + \frac{e^2 Q}{2I(2I-1)} \left[\frac{I(I+1)}{r^3} - \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{I})^2}{r^5} \right] - \gamma\beta_N \vec{H} \cdot \vec{I} \quad (6)$$

se obține hamiltonianul de spin, din primele două ordine de perturbație $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^{(1)} + \mathcal{H}_s^{(2)}$. În calcule vom ține cont de faptul că orbitalii atomici din (2) sînt dați în sisteme de coordonate diferite, astfel că vom folosi relațiile de transformare la trecerea de la un sistem de coordonate la altul pentru operatorii impulsului (anexa II).

Din primul ordin de perturbație obținem termenii :

$$\mathcal{H}_s^{(1)} = 2\beta_0 \vec{H} \cdot \vec{s} + PN_\sigma^2 \left[-\frac{4}{7} s_z I_z + \frac{2}{7} (s_x I_x + s_y I_y) \right] - \\ - K' P s \vec{I} + q_1 N_\sigma^2 \langle r^{-3} \rangle_d \left[I_z^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right] - \gamma\beta_N \vec{H} \cdot \vec{I} \quad (7)$$

unde

$$P = 2\gamma\beta_0\beta_N \langle r^{-3} \rangle_d$$

$$q_1 = -\frac{3e^2 Q}{7I(2I-1)}$$

$$\frac{16\pi}{3} \gamma\beta_0\beta_N \langle 0 | \delta(\vec{r}) | 0 \rangle = -K'P \quad (8)$$

Calculînd aproximația de ordinul doi obținem :

$$\mathcal{H}_s^{(2)} = -\lambda\beta_0 \Lambda_{zz} H_z s_z - \lambda\beta_0 \Lambda_{xx} (H_x s_x + H_y s_y) - \\ - \lambda P' \Lambda'_{zz} s_z I_z - \lambda P' \Lambda'_{xx} (s_x I_x + s_y I_y) \quad (9)$$

unde

$$\Lambda_{zz} = \frac{8N_\sigma^2 N_\pi^2}{E_{xy} - E_0} [1 + 4(\eta_\sigma S_\sigma + \eta_\pi S_\pi) + \eta_\pi \eta_\sigma (\eta_{p\sigma} + a\eta_s \Omega)] \\ \Lambda_{xx} = \frac{2N_\sigma^2 N_\pi^2}{E_{xz} - E_0} [1 + 4(\eta_\sigma S_\sigma + \eta'_\pi S'_\pi) + \eta_\sigma \eta'_\pi \eta_{p\sigma}] \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda'_{xz} &= \frac{8N_\sigma^2 N_\pi^2}{E_{xy} - E_0} \left[1 + 2(\eta_\sigma S_\sigma + \eta_\pi S_\pi) + \frac{1}{2} \eta_\pi \eta_\sigma (\eta_{p\sigma} + a\eta_s \Omega) \right] \\
 \Lambda'_{xz} &= \frac{2N_\sigma^2 N_\pi'^2}{E_{xz} - E_0} \left[1 + 2(\eta_\sigma S_\sigma + \eta'_\pi S'_\pi) + \frac{1}{2} \eta_\sigma \eta'_\pi \eta_{p\sigma} \right] \\
 \Omega &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int R_{21} r^2 \frac{\delta}{\delta r} R_{20} dr
 \end{aligned} \tag{10}$$

Rezultă expresia hamiltonianului de spin în forma generală :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_s &= \beta_0 g_{||} H_z s_z + \beta_0 g_{\perp} (H_x s_x + H_y s_y) + A s_z I_z + B (s_z I_z + s_y I_y) + \\
 &+ Q' \left[I_z^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right] - \gamma \beta_N \vec{H} \vec{I}
 \end{aligned} \tag{11}$$

factorii g și constantele de structură fină și hiperfină fiind date de relațiile :

$$\begin{aligned}
 g_{||} &= 2,0023 - \frac{8\lambda N_\sigma^2 N_\pi^2}{\Delta_{xy}} [1 + 4(\eta_\sigma S_\sigma + \eta_\pi S_\pi) + \eta_\pi \eta_\sigma N] \\
 g_{\perp} &= 2,0023 - \frac{2\lambda N_\sigma^2 N_\pi'^2}{\Delta_{xz}} [1 + 4(\eta_\sigma S_\sigma + \eta'_\pi S'_\pi) + \eta'_\pi \eta_\sigma \eta_{p\sigma}] \\
 A &= -P \left[\frac{4}{7} N_\sigma^2 + K' + (2,0023 - g_{||}) - \frac{8\lambda N_\sigma^2 N_\pi^2}{\Delta_{xy}} \left(2\eta_\pi S_\pi + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\eta_\sigma S_\sigma + \frac{1}{2} \eta_\pi \eta_\sigma N \right) \right] \\
 B &= -P \left[-\frac{2}{7} N_\sigma^2 + K' + (2,0023 - g_{\perp}) - \frac{2\lambda N_\sigma^2 N_\pi'^2}{\Delta_{xz}} \left(2\eta'_\pi S'_\pi + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\eta_\sigma S_\sigma + \frac{1}{2} \eta'_\pi \eta_\sigma \eta_{p\sigma} \right) \right] \\
 N &= \eta_{p\sigma} + a\eta_s \Omega \qquad Q' = g_1 N_\sigma^2 \langle r^{-3} \rangle_d
 \end{aligned} \tag{12}$$

Relațiile (12) ne permit evaluarea exactă a constantelor de structură în funcție de gradul de covalență a complexului, adică în funcție de valorile date coeficienților de amestec.

3. Structura superfină. În unele cazuri se poate ca nucleii atomilor liganzi să poseze moment nuclear, ceea ce duce la apariția liniilor de structură superfină în spectrul RES, în urma interacțiunii electronilor magnetici cu momentele lor nucleare.

Considerăm hamiltonianul de interacțiune dat de relația :

$$W_N^{(i)} = \frac{16\pi}{3} \gamma \beta_0 B_N \delta(\vec{r}) \vec{s} \vec{I}^N + 2\gamma \beta_0 \beta_N \left[\frac{\vec{l} - \vec{s}}{r_i^3} \vec{I}^N + \frac{3(\vec{r}_i \vec{s}) (\vec{r}_i \vec{I}^N)}{r_i^5} \right] \tag{13}$$

scrisă pentru unul din nucleii liganzilor. În total vom avea șase astfel de termeni, corespunzători celor șase nuclee liganzi, în care am notat cu \vec{r}_i raza vectoare cu originea aflată pe nucleul ligandului i la electronul magnetic și cu \vec{I}^N operatorul moment nuclear.

Hamiltonianul de spin corespunzător, îl vom obține din aproximația de ordinul întâi a teoriei perturbațiilor :

$$\mathcal{H}_s^{(i)} = \langle 0 | W_N^{(i)} | 0 \rangle \quad (14)$$

Examinînd funcția de undă a nivelului fundamental se observă că nucleii aflați pe axa Oz nu contribuie la hamiltonianul de spin. Pentru ceilalți patru nuclee obținem hamiltonianul de spin de forma :

$$\mathcal{H}_s^{(i)} = [A^N s_z I_z^N + B^N (s_x I_x^N + s_y I_y^N)]^i \quad (15)$$

iar constantele structurii superfine sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} A^N &= \frac{1}{2} \gamma \beta_0 \beta_N N_\sigma^2 \eta_\sigma^2 \left[\frac{8\pi}{3} K^N - \frac{2}{3} \gamma_{p\sigma}^2 \langle r^{-3} \rangle_p \right] \\ B^N &= \frac{1}{2} \gamma \beta_0 \beta_N N_\sigma^2 \eta_\sigma^2 \left[\frac{8\pi}{3} K^N + \frac{4}{5} \gamma_{p\sigma}^2 \langle r^{-3} \rangle_p \right] \\ K^N &= \gamma_{i\sigma}^2 \langle s | \delta(r) | s \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

Hamiltonianul de spin ce descrie spectrul RES a ionului Cu^{2+} în rețea cristalină cu simetrie tetragonală va avea forma :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s &= g_{\parallel} \beta_0 H_z s_z + g_{\perp} \beta_0 (H_x s_x + H_y s_y) + A s_z I_z + B (s_x I_x + s_y I_y) + \\ &+ Q' \left[I_z^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right] - \gamma \beta_N \vec{H} \vec{I} + [A^N s_z I_z^N + B^N (s_x I_x^N + s_y I_y^N)]^1 + \\ &+ [A^N s_z I_z^N + B^N (s_x I_x^N + s_y I_y^N)]^2 + [A^N s_z I_z^N + B^N (s_x I_x^N + s_y I_y^N)]^4 + \\ &+ [A^N s_z I_z^N + B^N (s_x I_x^N + s_y I_y^N)]^5 \end{aligned} \quad (17)$$

Discuția rezultatelor.

Expresiile constantelor de structură (12) ne permit să tragem o serie de concluzii importante. Se observă că dacă considerăm în aceste formule $N_\sigma = N_\pi = N'_\pi = 1$ și $\eta_\sigma = \eta_\pi = \eta'_\pi = 0$, adică cazul orbitelor atomice pure, obținem :

$$\begin{aligned} g_{\parallel} &= 2,0023 - \frac{8\lambda}{\Delta} ; \quad g_{\perp} = 2,0023 - \frac{2\lambda}{\Delta} \\ A &= -P \left[\frac{4}{7} + K + 2,0023 - g_{\parallel} \right] \\ B &= -P \left[-\frac{2}{7} + K + 2,0023 - g_{\perp} \right] \\ Q' &= q_1 \langle r^{-3} \rangle_d \end{aligned} \quad (18)$$

relații bine cunoscute în cazul modelului ionic [11].

În cazul cînd neglijăm integralele de acoperire, care de obicei dau o contribuție mică, relațiile (12) devin :

$$\begin{aligned}
 g_{\parallel} &= 2,0023 - \frac{8\lambda N_{\sigma}^2 N_{\pi}^2}{\Delta_{xy}} & g_{\perp} &= 2,0023 - \frac{2\lambda N_{\sigma}^2 N_{\pi}^2}{\Delta_{xz}} \\
 A &= -P \left[\frac{4}{7} N_{\sigma}^2 + K' N_{\sigma}^2 + 2,0023 - g_{\parallel} \right] \\
 B &= -P \left[-\frac{2}{7} N_{\sigma}^2 + K' N_{\sigma}^2 + 2,0023 - g_{\perp} \right] \\
 Q' &= q_1 < r^{-3} >_d N_{\sigma}^2
 \end{aligned} \tag{19}$$

Aceste expresii explică rezultatele din lucrările [9], [10].

Într-adevăr, modificarea constantei de cuplaj spin-orbită se datorește apariției constantei de cuplaj aparent

$$\lambda' = \lambda N_{\sigma}^2 N_{\pi}^2, \quad \lambda'' = \lambda N_{\sigma}^2 N_{\pi}^2 \tag{20}$$

Analog, constantele structurii hiperfine se schimbă datorită apariției în expresia lor a coeficienților de amestec. Modificarea se face prin micșorarea lor, ceea ce s-a observat experimental [9].

Remarcăm că în expresia constantei de cuadrupol intervine numai coeficientul de amestec a orbitelor σ astfel că observarea tranzițiilor „interzise“ $\Delta m = \pm 1$ sau $\Delta m = \pm 2$ ne-ar furniza expresia acestui coeficient. Dacă considerăm formulele (12) se observă că în ele apar ca necunoscute mărimile N_{σ} , N_{π} , N'_{π} , η_{σ} , η_{π} , η'_{π} , S_{π} , S_{σ} , S'_{π} , a , η_i , Ω . Dintre acestea, constanta rețelei a se poate determina prin măsurători structurale, η_s se consideră egală cu $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (hibridizare sp) iar Ω se calculează folosind metoda Hartree. Integralele de acoperire se pot determina prin metode numerice, valoarea lor depinzînd de constanta rețelei. Ne rămîn șase coeficienți nedeterminați. Pentru calcularea lor spectrele RES ne pun la dispoziție în general, valorile constantelor g_{\parallel} , g_{\perp} , A și B . De aceea fie întroducem condițiile $N_{\pi} = N'_{\pi}$ și $\eta_{\pi} = \eta'_{\pi}$, fie trebuie să determinăm constanta de cuadrupol din tranzițiile „interzise“, precum și constanta interacțiunii Fermi.

Expresiile structurii superfine (16) obținute mai sus pot constitui în multe cazuri relații valoroase pentru determinarea acestor coeficienți. În acest scop se pot face și ridicări de spectre de RMN din care se pot determina acești coeficienți. În general este importantă determinarea teoretică sau prin alte metode experimentale a acestor coeficienți de amestec, lucru care ar furniza o serie întreagă de informații suplimentare asupra structurii rețelei și distribuției sarcinilor legînd metoda RES de respectiva metodă experimentală.

Anexa I

Integralele de acoperire sînt :

$$\begin{aligned}
 S_{\sigma} &= \langle d_{x^2-y^2} | \psi^1 \rangle = \langle a_{x^2-y^2} | \psi^5 \rangle = - \langle d_{x^2-y^2} | \psi^2 \rangle = \\
 &= - \langle d_{x^2-y^2} | \psi^4 \rangle \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^3 \rangle \simeq - \frac{\sqrt{3}}{2} \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^6 \rangle = \\
 &= \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^4 \rangle = - \sqrt{3} \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^1 \rangle = \sqrt{3} \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^5 \rangle = \\
 &= - \sqrt{3} \langle d_{3z^2-r^2} | \psi^2 \rangle \\
 S_{\pi} &= \langle d_{xy} | p_y^1 \rangle = \langle d_{xy} | p_x^2 \rangle = - \langle d_{xy} | p_y^4 \rangle = - \langle d_{xy} | p_x^5 \rangle \\
 S'_{\pi} &= \langle d_{yz} | p_z^2 \rangle = \langle d_{yz} | p_y^3 \rangle = - \langle d_{yz} | p_x^5 \rangle = - \langle d_{yz} | p_y^6 \rangle = \\
 &= \langle d_{zx} | p_x^3 \rangle = \langle d_{zx} | p_z^1 \rangle = - \langle d_{zx} | p_z^4 \rangle = - \langle d_{zx} | p_x^6 \rangle
 \end{aligned}$$

Anexa nr. II

Relațiile de transformare a operatorului moment la translatarea axelor de coordonate

$$\begin{aligned}
 l_x &= l_x^{(1)} = l_x^{(4)} \\
 l_x &= l_x^{(2)} + a \hat{p}_z^{(2)} = l_x^{(5)} - a \hat{p}_z^{(5)} \\
 l_x &= l_x^{(3)} - b \hat{p}_y^{(3)} = l_x^{(6)} + b \hat{p}_y^{(6)} \\
 l_y &= l_y^{(1)} - a \hat{p}_z^{(1)} = l_y^{(4)} + a \hat{p}_z^{(4)} \\
 l_y &= l_y^{(2)} = l_y^{(5)} \\
 l_y &= l_y^{(3)} + b \hat{p}_x^{(3)} = l_y^{(6)} - b \hat{p}_x^{(6)} \\
 l_z &= l_z^{(1)} + a \hat{p}_y^{(1)} = l_z^{(4)} - a \hat{p}_y^{(4)} \\
 l_z &= l_z^{(2)} - a \hat{p}_x^{(2)} = l_z^{(5)} + a \hat{p}_x^{(5)} \\
 l_z &= l_z^{(3)} = l_z^{(6)}
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Stevens K. W. H., Rep. Prog. Phys. **16**, 108, 1953.
2. Owen J., Proc. Roy. Soc. A **227**, 184, 1955.
3. Maki A., Mc Garvey R., J. Chem. Phys. **29**, 1,31, 1958.
4. Roberts E, Koski W.; J. Am. Chem. Soc. **82**, 3006, 1960.
5. Kivelson D., Neiman R. ; J. Chem Phys. **149**, 35, 1961.
6. Harrison S, Assour J. *Paramagnetic Resonance* vol. II, New York, 1963.
7. Tinkham M., Proc. Roy. Soc. A **236**, 535, 1956.
8. Tinkham M., Proc. Roy Soc., A **236**, 549, 1956.
9. Nicula A., Disertație, Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj, 1964.
10. Nicula A., Stamires D., Turkevich J., Rev. Roum. Phys. **9**, 613, 1964.
11. Abragam A., Pryce M. H. L., Proc. Roy. Soc., A **205**, 135, 1951.

ЭПР ИОНА Cu^{2+} В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНО КОВАЛЕНТНЫХ КОМПЛЕКСАХ ТИПА MX_6

(Резюме)

Исследования ЭПР, проведенные на ионных комплексах в кристаллическом виде, показали наличие значительной степени ковалентности химических связей, первоначально рассмотренных как чисто ионные. Этот факт обусловил изменение теоретической трактовки спектров ЭПР, полученных от соединений такого рода. Авторы работы задались целью определить константы, входящие в спиновой гамильтониан, заменив электростатическое кристаллическое поле молекулярным, построенным на основе метода ЛКАО. Исчисления, произведенные для комплекса MX_6 , имеющего тетрагональную симметрию, ведут к формулам, объясняющим экспериментальные результаты, полученные в других работах, и которые дают зависимость структурных констант от степени ковалентности комплекса. На их основе можно определить с большей точностью структуру энергетических уровней парамагнитного иона. Как следствие появляется возможность одновременного проведения исследований ЭПР и ЯМР, которые могут доставлять полные сведения о структуре и распределении зарядов этого типа комплексов.

RES DE L'ION Cu^{2+} DANS DES COMPLEXES CRISTALLINS DU TYPE MX_6 , PARTIELLEMENT COVALENTS

(Résumé)

Les études RES relatives aux complexes ioniques sous forme cristalline ont montré l'existence d'un degré important de covalence des liaisons chimiques, considérées initialement comme purement ioniques. Ce fait a provoqué la modification du traitement théorique des spectres RES obtenus de tels composés. Les auteurs de l'article se sont proposé de réévaluer les constantes intervenant dans l'hamiltonien de spin, en remplaçant le champ cristallin électrostatique par un champ moléculaire, construit suivant la méthode L.C.A.O. Les calculs effectués pour le complexe MX_6 à symétrie tétragonale conduisent à des formules expliquant les résultats expérimentaux obtenus dans d'autres travaux et donnent la dépendance des constantes de structure en fonction du grade de covalence du complexe. On peut, sur cette base, déterminer avec une plus grande précision la structure des niveaux énergétiques de son ion paramagnétique. Il apparaît en conséquence une possibilité d'effectuer concomitamment des études RES et RMN capables de fournir des données complètes sur la structure et les distributions de charges de ce type de complexes.

RECENZII

Acad. prof. G. H. Călugăreanu, **Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă**. — Această carte este un manual de teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă, redactat conform programei analitice a facultăților de matematică-mecanică de la universități. Deși se adresează în primul rând studenților de la cursurile de zi și fără frecvență ai acestor facultăți, manualul poate fi deosebit de util și celor de la institutele pedagogice și institutele tehnice de învățământ superior.

Manualul cuprinde partea clasică a teoriei, care este tratată sub o formă deosebit de accesibilă și în același timp la un înalt nivel științific. În dezvoltarea acestei teorii se adoptă inițial punctul de vedere al lui Cauchy (pornindu-se de la derivată), care, sub aspect metodologic, pare cel mai adecvat.

După ce se revăd operațiile cu numerele complexe, se introduce noțiunea generală de funcție de variabilă complexă, apoi de funcție monogenă, funcție olomoră, transformare conformă. Ca un caz particular important de transformări conforme, se studiază transformările circulare. Apoi se studiază șirurile și seriile de numere complexe și de funcții, insistându-se în special asupra seriilor de puteri, care constituie materialul de bază în construirea noțiunii de funcție analitică. Cu ajutorul seriilor de puteri se definesc funcțiile elementare. Se trece apoi la expunerea teoriei integralei complexe, care dezbănuie bogatul conținut al noțiunii de funcție olomoră. Se dă apoi noțiunea globală de funcție analitică cu ajutorul prelungirii analitice, după care se studiază punctele singulare ale funcțiilor analitice. Se introduc cele două clase importante de funcții analitice uniforme: funcțiile întregi și funcțiile meromorfe. Teorema reziduurilor este însoțită de numeroase aplicații.

Se dau descompunerile funcțiilor meromorfe în serii Mittag-Leffler și a funcțiilor întregi în produse de factori canonici ai lui Wierstrass. Se face apoi un studiu destul de aprofundat al funcțiilor eliptice, dându-se o frumoasă aplicație a acestor funcții la teoria cubicelor plane. Un capitol special este consacrat studiului funcțiilor univalente. Se studiază apoi proprietățile de compactitate ale familiilor de funcții care se aplică la rezolvarea problemei reprezentării conforme a domeniilor simplu conexe. Se întreprinde de asemenea un studiu mai aprofundat al corespondenței frontierelor în reprezentarea conformă. Se expune apoi principiul simetriei care se aplică la reprezentarea conformă a poligoanelor. Ultimul capitol tratează despre funcțiile modulare, care se aplică la demonstrarea teoremei lui Picard.

Menționăm că unele dintre problemele studiate (ca de exemplu aplicațiile funcțiilor eliptice la cubicele plane, funcțiile univalente, corespondența frontierelor în reprezentarea conformă) de obicei lipsesc sau se expun destul de rar în tratatele similare.

PETRU T. MOCANU

D. V. Ionescu, **Ecuatii diferențiale și integrale**. Editura didactică și pedagogică, București, 1964. — Acest manual este destinat studenților din anul II al facultăților de matematică-mecanică. Conține materia prevăzută în programa analitică de la cursul de ecuații diferențiale și integrale. Manualul este compus din *treisprezece* capitole, după cum urmează: Cap. I — Noțiuni fundamentale, Cap. II — Ecuatii diferențiale de ordinul întâi integrabile prin cuadraturi, Cap. III — Ecuatii diferențiale de ordin superior

integrabile prin cuadraturi sau reductibile la ecuații diferențiale de ordin mai mic, Cap. IV — Teoreme de existență în domeniul real, Cap. V — Ecuații diferențiale liniare de ordin superior, Cap. VI — Sisteme de ecuații liniare de ordinul întâi, Cap. VII — Complemente la teoremele de existență, Cap. VIII — Diferite metode de rezolvare pentru ecuațiile și sistemele de ecuații diferențiale, Cap. IX — Ecuații diferențiale liniare în domeniul complex, Cap. X — Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare, Cap. XI — Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi neliniare, Cap. XII — Ecuații integrale și Cap. XIII — Ecuații integrale cu nucleu simetric.

Deja din titlurile capitolelor înșirate mai sus reiese că acest manual conține un material foarte bogat din domeniul ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor integrale. Prezentarea

este sistematică și riguroasă. Ea reflectă experiența de mai mulți ani a autorului în predarea cursului de ecuații diferențiale și integrale în cadrul Facultății de matematică-mecanică a Universității din Cluj. Rezultatele teoretice sînt urmate de exemple care ajută la o mai bună înțelegere și la fixarea noțiunilor tratate. Tot acest scop urmăresc și exercițiile care sînt propuse la sfîrșitul fiecărui capitol. Menționăm că manualul este redactat într-un limbaj îngrijit și frumos, iar datorită acestui fapt cartea se citește foarte ușor. Toate acestea ne fac să credem că manualul prezentat va fi util nu numai studenților de la facultățile de matematică-mecanică din cadrul universităților, dar și tuturor aceluia care vor să se familiarizeze cu teoria ecuațiilor diferențiale și integrale.

C. KALIK

STUDIUL UNOR PROPRIETĂȚI FIZICE ALE CATALIZATORULUI NICHEL-TRIOXID
DE CROM PENTRU REACȚIA DE SCHIMB IZOTOPIC HIDROGEN-DEUTERIU

Rezumatul disertației prezentate de DĂNILĂ BARB pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice, la Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj, în 3 aprilie 1964

Un domeniu de aplicație a metalelor și semiconductorilor este folosirea lor în calitate de catalizatori ai reacțiilor chimice. Proprietățile catalitice ale metalelor și semiconductorilor sînt determinate de proprietățile lor fizice și în special electronice. De aceea, determinarea mecanismului acțiunii catalizatorilor nu se poate elucida în afara fizicii actuale a corpului solid.

În disertație se dau rezultatele cercetărilor unor proprietăți magnetice, structurale și electrice ale sistemului nichel-trioxid de crom și corelarea acestor proprietăți cu activitatea catalitică a acestui sistem pentru reacția de schimb izotopic hidrogen-deuteriu. Lucrarea conține 5 capitole după cum urmează :

- Capitolul I : Chemisorbția și cataliza pe metale și semiconductori.
- Capitolul II : Metodica experimentală de măsură a proprietăților fizice și prepararea probelor de nichel-trioxid de crom.
- Capitolul III : Conductibilitatea electrică a sistemului nichel-trioxid de crom.
- Capitolul IV : Activitatea catalitică a sistemului nichel-trioxid de crom pentru schimbul izotopic hidrogen-deuteriu.
- Capitolul V : Influența oxigenului asupra activității catalitice a sistemului nichel-trioxid de crom.

Lucrarea conține 43 de figuri și o bibliografie ce numără 93 de indicații bibliografice. Lucrarea a fost efectuată în Laboratorul de catalizatori al Institutului de fizică atomică al Academiei Republicii Socialiste România și în Laboratorul de corp solid al Facultății de fizică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:

Prof. I. URSU, membru corespondent al Academiei (Universitatea Cluj).

REFERENȚI:

- Prof. Dr. ALEXANDRU CIȘMAN, membru coresp. al Academiei (Institutul politehnic Timișoara).
- Prof. Dr. I. AGÂRBICEANU, membru coresp. al Academiei (Institutul politehnic București)
- Prof. V. MERCEA, membru coresp. al Academiei (Universitatea Cluj)

REZONANȚA ELECTRONICĂ DE SPIN A IONILOR DE CUPRU(II) ȘI MANGAN(II)
ÎN SUBSTANȚE POLICRISTALINE

Rezumatul disertației prezentate de ALEXANDRU NICULA pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice, la Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj, în 4 aprilie 1964

O metodă eficace pentru studiul celor mai joase nivele de energie a ionilor paramagnetici într-un câmp cristalin este rezonanța electronică de spin (RES). Eficacitatea acestei metode constă în aceea că ea poate să dea informații asupra interacțiunilor dintre ionii paramagnetici pe de o parte și interacțiunile dintre acești ioni și rețeaua cristalină pe de altă parte. Cu ajutorul acestei metode se obțin, de asemenea, informații cu privire la interacțiunea electronilor cu nucleele aparținând aceleiași ion sau aparținând ionilor înconjurători (nemagnetici).

În lucrare se studiază cu ajutorul RES ionul $Cu(II)$ și $Mn(II)$ introduși în sitele moleculare de tipul zeoliților X și Y. Determinările experimentale s-au făcut cu un spectrometru Varian V-4500 la Universitatea Princeton, S.U.A. și cu un spectrometru JES-3B la Universitatea din Cluj.

Partea teoretică a lucrării este expusă în capitolul I, iar tehnica experimentală și procedeul de preparare a probelor sînt expuse în capitolul II. Capitolul III conține rezultatele experimentale și concluziile ce se desprind din studiul RES al ionului $Cu(II)$. S-au studiat șase serii de probe cu concentrații de la 0,3 la 22 ioni $Cu(II)$ pe celula elementară, în funcție de temperatură și în funcție de tratamentul termic. Proba cu patru ioni $Cu(II)$ pe celula elementară prezintă spectrul cel mai bine rezolvat, cu patru linii de structură hiperfină în banda paralelă, concentrate în jurul lui g (rezolvate în literatură) și alte patru linii de structură hiperfină în banda perpendiculară, concentrate în jurul lui g (puse în evidență pentru prima oară în prezenta disertație). Spectrul astfel rezolvat concordă foarte bine cu principiile teoretice ale lui Sands. S-au mai obținut rezultate importante cu privire la dependența spectrului RES de temperatura din cavitate, de temperatura de activare precum și informații asupra legăturilor de covolență care au loc între ionul paramagnetic $Cu(II)$ și ionii înconjurători nemagnetici.

Capitolul IV cuprinde studiile experimentale și teoretice referitoare la ionul $Mn(II)$, în acest caz s-au studiat probe de diferite concentrații (de la 0,01% până la 10%) în funcție de temperatura din cavitate, în funcție de temperatura de activare și în funcție de diferite gaze absorbite de zeoliți, după un tratament termic prealabil. La temperatura de activare de 100°C, la proba de concentrație 0,1% $Mn(II)$ s-a obținut un spectru complex în care se manifestă atât liniile de structură fină cit și cele de structură hiperfină. La o temperatură de activare mai ridicată spectrul acestei probe prezintă numai linii de structură hiperfină, însă bine rezolvate. Spectrul probei cu concentrația de 0,01% $Mn(II)$ are pe lângă liniile de structură hiperfină, date de regula de selecție $\Delta M = \pm 1$ și $\Delta m = 0$ și linii datorită tranzițiilor interzise date de regula de selecție $\Delta M = \pm 1$ și $\Delta m = \pm 1$. Date interesante s-au obținut și în ceea ce privește dependența formei liniei de concentrația în ionii paramagnetici precum și asupra influenței gazelor paramagnetice absorbite de zeoliți.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: prof. I. URȘU, membru corespondent al Academiei (Universitatea Cluj).

REFERENȚI OFICIALI: prof. Al. CIȘMAN, membru corespondent al Academiei (Institutul politehnic Timișoara), prof. I. AGÎRBICEANU, membru corespondent al Academiei (Institutul politehnic București) și prof. univ. emerit V. MARIAN (Universitatea Cluj).

ȘEDINȚE DE COMUNICĂRI

În 1964 Facultatea de matematică—mecanică a ținut următoarele ședințe de comunicări:

10 ianuarie

Acad. G. Călugăreanu, O relație diferențială bilocală la curbele de gradul trei.

A. Ney, Despre rest operator.

M. Țarină, Spațiul A_n care admite $n < m$ forme Pfaff invariante.

15 noiembrie

Acad. G. Călugăreanu, Cîteva probleme deschise din teoria funcțiilor.

Gh. Chiș, Variația maselor binarelor fotometrice.

18 decembrie

Gh. Pic, Despre o teoremă a lui Schmidt-Iwasawa.

F. Radó, Scufundarea semișesurilor în șesuri regulate.

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE INTERNAȚIONALE

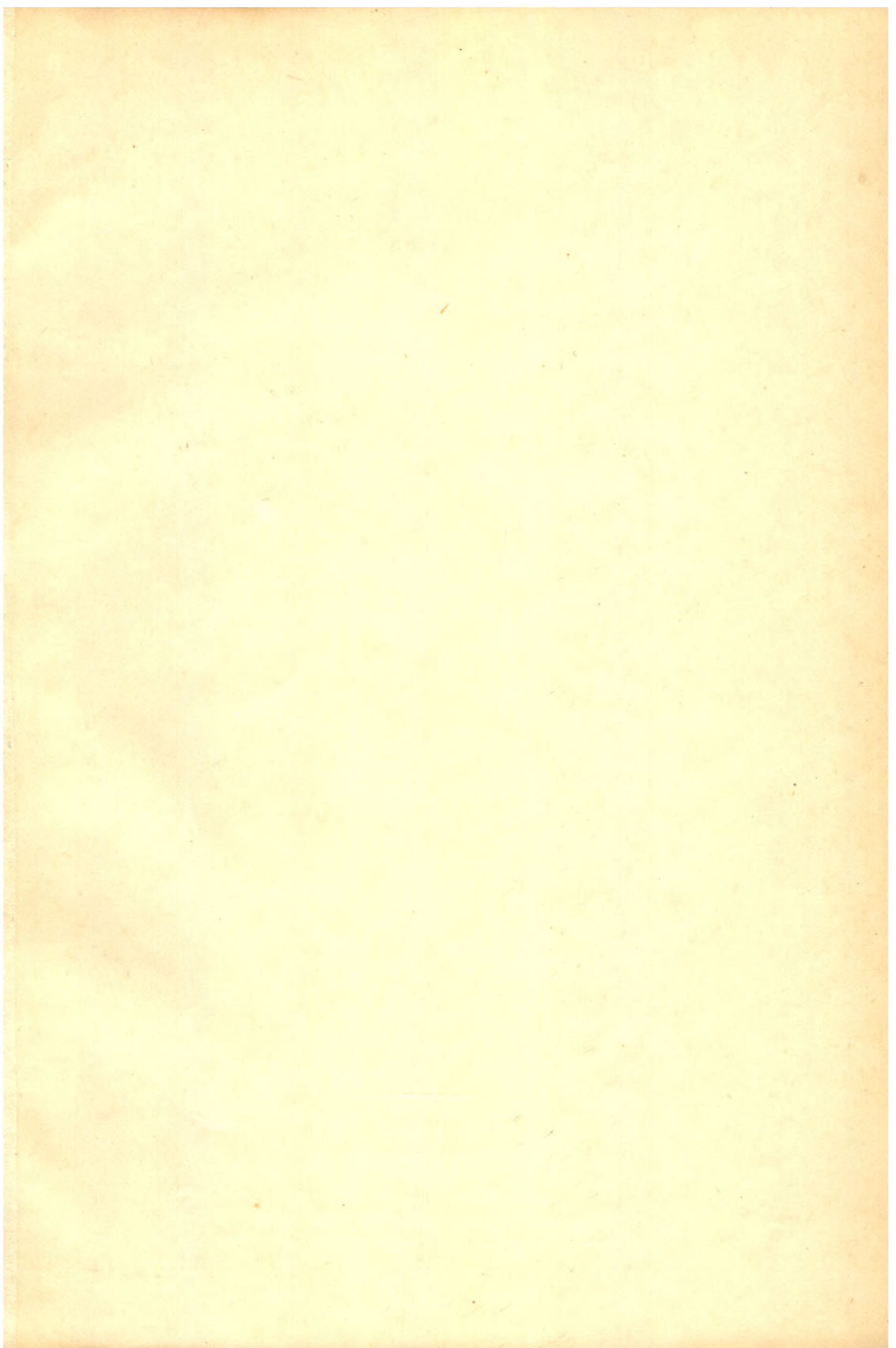
Iunie, 1964, Budapesta. Congresul pentru aplicațiile matematicii în economie.

Acad. prof. T. Popovici, Metode de calcul care intervin în tratarea problemelor matematice în economie.

Conf. E. I. Popovici — Moldovan, Metode de calcul în programare liniară.

7—14 septembrie 1964, Varșovia. Congresul internațional de astronaucică. Au participat: conf. A. Páll, lect. I. Stan, cercet. I. Todoran.

19—26 octombrie 1964, Varșovia. Ședință de lucru a Comisiei țărilor socialiste de programare automată la mașinile electronice de calcul (GAMS). A participat conf. D. Stancu.



43875

Abonament anual : 20 lei seria, 150 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Prețul 10 lei