

491307

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1965

C L U J

În cel de-al X-lea an de apariție (1965) *Studia Universitatis Babeș--Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На X году издания (1965) *Studia Universitatis Babeș — Bolyai* выходит следующими сериями:

математика — физика (2 выпуска) ;
химия (2 выпуска) ;
геология — география (2 выпуска) ;
биология (2 выпуска) ;
философия — политэкономия ;
психология — педагогика ;
юридические науки ;
история (2 выпуска) ;
языкознание — литературоведение (2 выпуска).

Dans leur X-ème année de publication (1965) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

491357

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1965

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ—BOLYAI
ANUL X 1965

REDACTOR ȘEF:

Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTOR ȘEF ADJUNCT:

Acad. prof. ȘT. PÉTERFI

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:

Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), Prof. GH. CHIȘ, Prof. D. V. IONESCU, Prof. V. MARIAN, Prof. GH. PIC, Prof. I. URSU, membru coresp.
Acad. R.P.R.

Redacția:

CLUJ, str. M. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

I. GY. MAURER, M. VEÉGH, Două demonstrații pentru o teoremă a lui B. Gyires	7
V. GROZE, GH. COMAN, O nomogramă optimă dintr-o clasă de nomograme cu puncte aliniate de ordinul 3	13
P. SANDOVICI, Suprafețe cu m dimensiuni dintr-un spațiu euclidian, cu primul spațiu normal unidimensional	23
M. ȚARINĂ, Spații A_n care admit $m < n$ forme Pfaff invariante	31
A. NEY, O extindere a teoremei de contracție a lui Banach în spații metrice	41
I. A. RUS, Proprietăți ale zerourilor soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare de ordinul al doilea	47
I. MARUȘCIAC, Un algoritm pentru rezolvarea unui sistem de inegalități	51
P. PAVEL, Asupra unei formule de cuadratură	59
V. URECHE, Cefeida scurt periodică TU Comae Berenices	73
A. TURCĂ, Soluții aproape-periodice ale ecuației lui Duffing în cazul rezonanței	83
I. MAXIM, C. BĂLINTFFI, Studiul temperaturii Curie la feritele magneziu-zinc și cupru-zinc	95
R. BĂICAN, D. POPESCU, Măsurări de constantă dielectrică a catalizatorului pe bază de V_2O_5 , la frecvențe ultrainalte	99
S. GOCAN, L. STĂNESCU, Studiul unor proprietăți semiconductoare ale sistemului $V_2O_5 - B_2O_3$	105
Z. GĂBOS, E. SIMON, Contribuții la studiul relativist al polarizării electronului	115
V. GRECU, R.V. DEUTSCH, S. NISTOR, Contribuțiuni la studiul cîmpului cristalin cu metoda operatorilor echivalenți	131
I. STAN, A. WEISSMANN, Structura fină a spectrului masei efective	141
I. POP, Unele proprietăți magnetice ale ceriului metalic	147

СОДЕРЖАНИЕ

И. Д. МАУРЕР, М. ВЕГ, Два доказательства для теоремы Б. Диреша	7
В. ГРОЗЕ, Г. КОМАН, Наилучшая номограмма из класса номограмм с выравненными точками 3-го порядка	13
П. САНДОВИЧ, m -мерные поверхности в евклидовом пространстве, имеющие первое нормальное пространство одномерное.	23
М. ЦАРИНЭ, Пространства A_n , допускающие $m < n$ инвариантные формы Пфаффа	31
А. НЕЙ, Обобщение теоремы контракции Банаха для метрических пространств	41
И. А. РУС, Свойства нулей решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка	47
И. МАРУЩАК, Алгоритм для решения системы неравенств.	51
П. ПАВЕЛ, Об одной формуле квадратуры.	59
В. УРЕКЕ, Краткопериодическая цефеида TU Comae Berenices	73
А. ТУРКУ, Почти-периодические решения уравнения Дуффинга в случае резонанса	83
И. МАКСИМ, К. БАЛИНТФФИ, Изучение температуры Кюри у магнево-цинковых и медно-цинковых ферритов	95
Р. БАЙКАН, Д. ПОПЕСКУ, Измерения диэлектрической постоянной катализатора на основании V_2O_5 при сверхвысоких частотах	99
С. ГОКАН, Л. СТЭНЕСКУ, Исследование некоторых полупроводниковых свойств системы $V_2O_5 - B_2O_3$	105
З. ГАБОШ, Е. ШИМОН, К релятивистскому исследованию поляризации электрона.	115
В. ГРЕКУ, Р. В. ДОЙЧ, С НИСТОР, К изучению кристаллического поля методом эквивалентных операторов.	131
И. СТАН, А. ВЕЙСМАН, Тонкая структура спектра эффективной массы	141
И. ПОП, Некоторые магнитные свойства металлического церия.	147

S O M M A I R E

I. GY. MAURER, M. VEÉGH, Deux démonstrations d'un théorème de B. Gyires	7
V. GROZE, GH. COMAN, Un nomogramme optimum d'une classe de nomogrammes à points alignés d'ordre 3	13
P. SANDOVICI, Surfaces à m dimensions d'un espace euclidien pour lesquelles le premier espace normal est unidimensionnel	23
M. ȚARINĂ, Espaces A_n admettant $m < n$ formes Pfaff invariantes.	31
A. NEY, Une extension du théorème de contraction de Banach dans un espace métrique	41
I. A. RUS, Propriétés des zéros des solutions des équations différentielles non-linéaires du deuxième ordre	47
I. MARUȘCIAC, Un algorithme pour la résolution d'un système d'inégalités	51
P. PAVEL, Sur une formule de quadrature	59
V. URECHE, La céphéide à période courte TU Comae Berenices	73
A. TURCU, Solutions presque-périodiques de l'équation de Duffing dans le cas de résonance	83
I. MAXIM, C. BÁLINTFFI, Etude de la température Curie pour les ferrites magnésium-zinc et cuivre-zinc	95
V. BAICAN, D. POPESCU, Mesures de constante diélectrique du catalyseur sur la base de V_2O_5 aux fréquences ultra-hautes.	99
S. GOCAN, L. STĂNESCU, Etude de propriétés semi-conductrices du système V_2O_5 — B_2O_3	105
Z. GÁBOS, E. SIMON, Contribution à l'étude relativiste de la polarisation de l'électron	115
V. GRECU, R. V. DEUTSCH, S. NISTOR, Contribution à l'étude du champ cristallin par la méthode des opérateurs équivalents	131
I. STAN, A. WEISSMANN, La structure fine du spectre de la masse effective	141
I. POP, Sur certaines propriétés magnétiques du cérium métallique	147

DOUĂ DEMONSTRAȚII PENTRU O TEOREMĂ A LUI B. GYÍRES

de

I. GY. MAURER și M. VEÉGH

B. Gyíres a publicat în 1957 [2] următoarea teoremă: *Dacă se notează cu (r, s) c.m.m.d.c. al numerelor întregi r și s , și i reprezintă un număr natural oarecare, atunci*

$$D_n^{(i)} = \begin{vmatrix} (1,1)^i & (1,2)^i & \dots & (1,n)^i \\ (2,1)^i & (2,2)^i & \dots & (2,n)^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1)^i & (n,2)^i & \dots & (n,n)^i \end{vmatrix} = \Phi_i(1) \cdot \Phi_i(2) \dots \Phi_i(n), \quad (1)$$

unde

$$\Phi_i(m) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } m = 1 \\ m^i \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{1}{p_j^i}\right) & \text{dacă } m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l} \neq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Această teoremă constituie o generalizare a unei teoreme datorită lui S. t. S m i t h [3]. Pentru $i = 1$, obținem rezultatul acestui autor:

$$D_n^{(1)} = [(r, s)] = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \dots \varphi(n), \quad (3)$$

unde φ reprezintă funcția lui Euler.

În această notă vom da două demonstrații simple pentru teorema lui B. Gyíres. În prima demonstrație vom folosi inducție completă în raport cu ordinul n al determinantului $D_n^{(i)}$, iar în a doua demonstrație vom utiliza un raționament sugerat de o idee, care stă la baza demonstrației clasice a formulei (3) (v. de ex. [1], p. 101–103).

* μ este funcția aritmetică (multiplicativă) a lui Möbius: $\mu(1) = 1$; $\mu(m) = 0$ dacă m se divide printr-un pătrat perfect; $\mu(m) = (-1)^l$, dacă $m = p_1 \cdot p_2 \dots p_l \neq 1$. Transcrierea produsului în formă de sumă se face pe baza formulei $\sum_{\alpha|m} \mu(d)f(d) = \prod_{j=1}^l [1 - f(p_j)]$, valabilă pentru orice funcție aritmetică multiplicativă f , deci și pentru $f(m) = m^i$ (v. de ex. [4], p. 26).

PRIMA DEMONSTRAȚIE. Pentru $n = 1$ teorema este adevărată în mod evident: $D_1^{(i)} = |(1, 1)^i| = 1 = \Phi_i(1)$.

Să presupunem teorema adevărată pentru $n - 1$:

$$D_{n-1}^{(i)} = \Phi_i(1) \cdot \Phi_i(2) \dots \Phi_i(n-1). \quad (4)$$

Să considerăm determinantul $D_n^{(i)}$. Numărul d fiind un divizor oarecăr al lui n , să înmulțim cu $\mu(d)$ elementele coloanei $\left| \left(1, \frac{n}{d}\right), \left(2, \frac{n}{d}\right), \dots, \left(n, \frac{n}{d}\right) \right|$ și să le adunăm cu elementele corespunzătoare din coloana a n -a. Procedînd la fel în raport cu fiecare divizor al lui n , ultima coloană transformată a lui $D_n^{(i)}$ va conține elementele:

$$z_{kn} = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(k, \frac{n}{d}\right)^i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Vom arăta că

$$z_{kn} = \begin{cases} \Phi_i(n) & \text{dacă } k = n \\ 0 & \text{dacă } k < n. \end{cases} \quad (6)$$

Într-adevăr, pentru $k = n$, avem:

$$z_{nn} = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(n, \frac{n}{d}\right)^i = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^i = n^i \sum_{d \neq n} \frac{\mu(d)}{d^i} = \Phi_i(n).$$

Fie $k < n$, ceea ce înseamnă că există cel puțin un factor prim p_i în reprezentarea canonică a lui n , astfel că $p_i^{\alpha_i} \nmid k$. Rezultă că avem: $k = A p_i^\beta$, unde $0 \leq \beta \leq \alpha_i - 1$ și $(A, p_i) = 1$, deci

$$(k, p_i^{\alpha_i}) = (k, p_i^{\alpha_i - 1}) = p_i^\beta. \quad (7)$$

Vom folosi notația $n' = p_1^{\alpha_1} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$. Deoarece $(n', p_i) = 1$, rezultă:

$$(k, n) = (k, n' p_i^{\alpha_i}) = (k, n') \cdot (k, p_i^{\alpha_i}). \quad (8)$$

Folosind egalitățile (7) și (8) și ținînd seama de egalitățile $\mu(p_i) = -1$, $\mu(p_i^i) = 0$ ($i \geq 2$), de faptul că μ este o funcție aritmetică multiplicativă și de faptul că orice divizor d' al lui n' divide și pe n , obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(k, \frac{n}{d}\right)^i &= \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n}{d'}\right)^i + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n'}} \mu(d) \cdot \left(k, \frac{n}{d}\right)^i = \\ &= \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n' p_i^{\alpha_i}}{d'}\right) + \sum_{d'|n'} \mu(d' p_i) \cdot \left(k, \frac{n' p_i^{\alpha_i - 1}}{d'}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i \cdot (k, p_i^{\alpha_i})^i + \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \mu(p_i) \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i \cdot (k, p_i^{\alpha_i-1})^i = \\
&= (k, p_i^{\alpha_i})^i \cdot \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i + \mu(p_i) \cdot (k, p_i^{\alpha_i-1}) \cdot \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i = \\
&= p_i^{\beta_i} \cdot \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i - p_i^{\beta_i} \cdot \sum_{d'|n'} \mu(d') \cdot \left(k, \frac{n'}{d'}\right)^i = 0.
\end{aligned}$$

Egalitățile (6) fiind demonstrate, obținem, folosindu-ne și de (4) :

$$D_n^{(i)} = \begin{vmatrix} (1,1)^i & \dots & (1,n-1)^i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1,1)^i & \dots & (n-1,n-1)^i & 0 \\ (n,1)^i & \dots & (n,n-1)^i & \Phi_i(n) \end{vmatrix} = D_{n-1}^{(i)} \cdot \Phi_i(n) = \Phi_i(1) \cdot \Phi_i(2) \dots \Phi_i(n).$$

A DOUA DEMONSTRATIE. Considerăm un determinant $A = |a_{ik}|$ de ordinul n , pentru care

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \nmid i \\ 1 & \text{dacă } k \mid i. \end{cases} \quad (9)$$

Înmulțind linii cu coloane, se deduce ușor că

$$A^2 = 1. \quad (10)$$

Să formăm acum produsul :

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} \Phi_i(1) & \dots & a_{1n} \Phi_i(n) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \Phi_i(1) & \dots & a_{nn} \Phi_i(n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Dacă scoatem drept factor pe $\Phi_i(j)$ din coloana a j -a ($j = 1, 2, \dots, n$), obținem :

$$P = \Phi_i(1) \cdot \Phi_i(2) \dots \Phi_i(n) \cdot A^2 = \Phi_i(1) \cdot \Phi_i(2) \dots \Phi_i(n). \quad (12)$$

Pe de altă parte, efectuînd înmulțirea (11), înmulțind linii cu linii, obținem elementele p_{rs} ale determinantului $P = |p_{rs}|$ în următoarea formă :

$$p_{rs} = \sum_{d=1}^n a_{rd} a_{sd} \Phi_i(d) \quad (r = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, n).$$

Folosind (9), rezultă că $a_{rd} a_{sd} = 1$, dacă $d \mid (r, s)$ (deoarece în acest caz $d \mid r$ și $d \mid s$), și $a_{rd} a_{sd} = 0$, dacă $\nmid (r, s)$ (deoarece în acest caz d nu divide cel puțin unul dintre indicii r și s). Deci avem :

$$p_{rs} = \sum_{d \mid (r, s)} \Phi_i(d) \quad (r = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Pentru a evalua valoarea acestei sume, observăm că, dacă f este o funcție aritmetică uniformă, pentru care avem :

$$\sum_{d|m} f(d) = m^i = F(m),$$

unde m este un număr întreg oarecare, atunci, conform legii de inversiune a funcțiilor aritmetice (v. de ex. [4], p. 35), avem :

$$f(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \cdot F\left(\frac{m}{d}\right) = \sum_{d|m} \mu(d) \cdot \left(\frac{m}{d}\right)^i = m^i \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^i} = \Phi_i(m).$$

Rezultă că

$$\sum_{d|m} \Phi_i(d) = m^i. \quad (14)$$

Deci, conform lui (13), avem :

$$p_{rs} = (r, s)^i \quad (r = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Rezultă :

$$P = D_n^{(i)}. \quad (16)$$

Comparînd formulele (16) și (12), obținem tocmai formula (1).

BIBLIOGRAFIE

1. Beke M., *Determinánsok*, Budapest.
2. Gyires B., *Über eine Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes*, „Publications Mathematicae (Debrecen)”, 5, f. 1–2, p. 162–171.
3. Smith S. t., *On the Value of a Certain Arithmetical Determinant*, „Proc. London Math. Soc.” 7 (1875–76), 208–212.
4. Vinogradov I. M., *Bazele teoriei numerelor* (trad. din l. rusă), București, 1954.

ДВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДЛЯ ТЕОРЕМЫ Б. ДИРЕША

(Резюме)

Б. Диреш обобщил в 1957 г. теорему (3) С. Смита, доказывая формулу (1), где арифметическая функция Φ определена равенством (2), а (r, s) является общим наибольшим делителем целых чисел r и s .

В настоящей работе даются два простых доказательства теоремы Диреша. В первом доказательстве используется полная индукция по отношению к порядку n определителя (1), а во втором доказательстве используется метод, лежащий в основе классического доказательства формулы (3).

DEUX DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME DE B. GYÍRES

(R é s u m é)

B. Gyíres a généralisé en 1957 le théorème (3) de S. t. S m i t h, en démontrant la formule (1), où la fonction arithmétique Φ est définie par (2) et (r, s) représente le p.g.c.d. des nombres entiers r et s .

La présente note donne deux démonstrations simples pour le théorème de Gyíres. La première utilise l'induction complète par rapport à l'ordre n du déterminant (1) et la seconde emploie un raisonnement suggéré par une idée qui se trouve à la base de la démonstration classique de la formule (3).

O NOMOGRAMĂ OPTIMĂ DINTR-O CLASĂ DE NOMOGRAME CU PUNCTE ALINIATE DE ORDINUL 3

de
V. GROZE și GH. COMAN

1°. În lucrarea [5] s-a studiat îmbunătățirea scării rezultatului la nomogramele ecuațiilor de ordinul III nomografic de formă canonică

$$f_1(x) + f_2(y) = f(z)$$

cu ajutorul unor transformări neproiective.

În această lucrare vom studia îmbunătățirea scării rezultatului la nomogramele ecuațiilor de forma canonică

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) = \varphi(z) \quad z_0 \leq z \leq z_1 \quad (1)$$

folosind transformări neproiective.

Notînd cu

$$f_1 = \ln \varphi_1, \quad f_2 = \ln \varphi_2, \quad f = \ln \varphi$$

ecuația (1) devine

$$e^{f_1} \cdot e^{f_2} = e^f$$

care este echivalentă cu ecuația

$$f_1(x) + f_2(y) = f(z) \quad (2)$$

deci transformările aplicate nomogramei ecuației (2) în lucrarea [5] pot fi aplicate și nomogramei ecuației (1).

Dar reducerea ecuației (1) la (2) nu este posibilă dacă în intervalul $[z_0, z_1]$ funcția $\varphi(z)$ se anulează. Să presupunem că $\varphi(z_0) = 0$. Vom aplica în acest caz particular nomogramei ecuației (1) o altă transformare neproiectivă. Împărțind ecuația (1) prin $\varphi(z_1)$ și notînd $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z_1)} = F(z)$ vom avea ecuația de forma

$$F_1(x) \cdot F_2(y) = F(z) \quad z_0 \geq z \geq z_1 \quad (3)$$

unde $F(z_0) = 0$, $F(z_1) = 1$. Ridicînd la puterea k ambii membrii ai ecuației (3), găsim

$$F_1^K(z) \cdot F_2^K(z) = F^K(z)$$

Din familia de scări

$$S = F^K(z) \quad 0 < k < \infty \quad (4)$$

vom determina scara cu eroarea absolută minimă.

În această lucrare se arată că în familia de scări (4) există o singură scară cu eroarea absolută minimă. Notînd cu z_2 valoarea lui z pentru care

$$F^K(z_2) = e^{-1}$$

și

$$m_s(k) = \min_{z_0 \leq z \leq z_2} |[F^K(z)]'| \quad (A)$$

$$m_d(k) = \min_{z_2 \leq z \leq z_1} |[F^K(z)]'|$$

vom arăta că parametrul k corespunzător scării cu eroarea minimă este rădăcina unică a ecuației

$$m_s(k) = m_d(k)$$

Se dau și două metode simple pentru aproximarea acestei valori a lui k .

2°. Scara rezultatului a nomogramei fiind $s = F(z)$, unde $F(z_0) = 0$, $F(z_1) = 1$, se consideră scara $S = s^K = F^K(z)$ unde $0 < k < \infty$. Eroarea absolută a scării S este cea mai mică, dacă minimumul caracteristicii scării în raport cu z

$$\min_z \varphi_K = \min_z \frac{dS}{dz} = \min_z k s^{k-1} |F'(z)|$$

este maxim în raport cu k . Presupunem $F'(z) \neq 0$ în intervalul (z_0, z_1) , în caz contrar nomograma neputînd fi utilizată.

Caracteristicile scărilor $s = F(z)$ și $S' = F^K(z)$ fiind

$$\psi = \frac{ds}{dz} = |F'(z)| \quad \psi_K = \frac{dS}{dz} = k s^{k-1} |F'(z)|,$$

avem

$$\frac{\psi_K}{\psi} = \frac{dS}{ds} = k s^{k-1}$$

În intervalul în care acest raport (care este totdeauna pozitiv) este mai mare ca 1, gradațiile scării S se dilată față de gradațiile scării s și se

contractă unde acest raport este subunitar. În vecinătatea punctului în care $\frac{dS}{ds} = 1$ (punctul neutru), gradațiile scărilor s și S nu se schimbă. Vom studia variația expresiei $\frac{dS}{ds} = ks^{k-1}$ în funcție de s . Punctul neutru s^* se obține rezolvând ecuația

$$ks^{k-1} = 1$$

unde $s^* = k^{\frac{1}{1-k}}$

Din expresia $\frac{dS}{ds}$ se vede că dacă $0 < k \leq 1$, atunci $\frac{dS}{ds}$ este mai mare decât 1 în intervalul $(0, s^*)$ și mai mic decât 1 în intervalul $(s^*, 1)$, iar în cazul în care $1 \leq k < \infty$ invers, $\frac{dS}{ds}$ este supraunitar în intervalul $(s^*, 1)$ și subunitar în intervalul $(0, s^*)$. În continuare vom stabili limitele lui s^* și S^* când scara S tinde către scara inițială s , adică când $k \rightarrow 1$. Dintr-un calcul ușor rezultă că

$$\lim_{k \rightarrow 1} s^* = \lim_{k \rightarrow 1} k^{\frac{1}{1-k}} = e^{-1}$$

și

$$\lim_{k \rightarrow 1} S^* = \lim_{k \rightarrow 1} k^{\frac{k}{1-k}} = e^{-1}$$

Variația lui s^* și S^* în raport cu k se dă în tabelul (I)

k	0	1	$+\infty$
s^*	0	$\nearrow e^{-1}$	$\nearrow 1$
S^*	$+\infty$	$\searrow e^{-1}$	$\searrow 0$

(I)

Contraimaginea punctului $S = e^{-1}$ pe scara s este $s = e^{-\frac{1}{k}}$

Vom arăta că s^* totdeauna este cuprins între punctele $e^{-\frac{1}{k}}$ și e^{-1} . Într-adevăr, dacă $0 < k \leq 1$ din tabelul (I), rezultă că $s^* \leq e^{-1}$. Să arătăm că $s^* \geq e^{-\frac{1}{k}}$ adică $k^{\frac{1}{1-k}} \geq e^{-\frac{1}{k}}$. Această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea

$$\frac{\ln k}{1-k} \geq -\frac{1}{k} \quad \text{sau} \quad \ln k \geq \frac{k-1}{k} \quad (5)$$

Figurînd într-un reper kOy curbele de ecuații $Y = \ln k$ și $y = \frac{k-1}{1-k}$, se constată că cele două curbe sînt tangente în punctul $(1,0)$, și în afară de acest punct nu mai au nici-un punct comun.

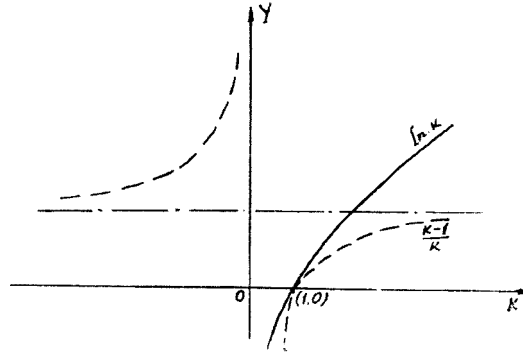


Fig. 1.

Din fig. 1 reiese că în cazul în care $0 < k \leq 1$ are loc inegalitatea (5). Dacă însă $1 \leq k < \infty$, inegalitatea $s^* \geq e^{-1}$ rezultă din tabelul (I), iar inegalitatea $s^* \leq e^{-\frac{1}{k}}$ care și în acest caz este echivalentă cu inegalitatea (5), rezultă din fig. 1. Deci avem următoarele situații :

a) $0 < k \leq 1$

s	0	$e^{-\frac{1}{k}}$	s^*	e^{-1}	1
$\frac{dS}{ds}$	$+\infty$	\searrow	1	\searrow	k

b) $1 \leq k < +\infty$ (II)

s	0	e^{-1}	s^*	$e^{-\frac{1}{k}}$	1
$\frac{dS}{ds}$	0	\nearrow	1	\nearrow	k

LEMA 1. Folosind notațiile (A) vom avea în cazurile

a) $m_s(k) \geq m_s(1)$ și $md(k) \leq md(1)$

b) $m_s(k) \leq m_s(1)$ și $md(k) \geq md(1)$

Demonstrație. Notînd cu $F^{-1}(s)$ inversa funcției $s = F(z)$ (care există, deoarece am presupus că $F'(z) \neq 0$) putem scrie

$$m_s(k) = \min_{z_0 \leq z \leq z_2} |[F(z)]'| = \min_{0 < s < \epsilon^{\frac{1}{k}}} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)]$$

În cazul a) avem :

$$\min_{0 < s < \epsilon^{\frac{1}{k}}} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)] \geq \min_{0 < s < s^*} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)]$$

dar în intervalul $(0, s^*)$ în acest caz $\frac{dS}{ds} > 1$, deci putem scrie

$$\min_{0 < s < s^*} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)] \geq \min_{0 < s < s^*} F'[F^{-1}(s)] \geq \min_{0 < s < \epsilon^{-1}} F'[F^{-1}(s)] = m_s(1)$$

Deci avem

$$m_s(k) \geq m_s(1).$$

În mod analog, în cazul a) avem

$$\begin{aligned} m_d(k) &= \min_{z_1 \leq z \leq z_2} |[F(z)]'| = \min_{\epsilon^k < s < 1} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)] \leq \min_{s^* < s < 1} \frac{dS}{ds} F'[F^{-1}(s)] \leq \\ &\leq \min_{s^* < s < 1} F'[F^{-1}(s)] \leq \min_{\epsilon^{-1} < s < 1} F'[F^{-1}(s)] = m_d(1) \end{aligned}$$

deci

$$m_d(k) \leq m_d(1)$$

Inegalitățile în cazul b) se demonstrează în mod analog.

LEMA 2. Dacă $k_1 > k_2$, atunci $m_s(k_1) \leq m_s(k_2)$ și $m_d(k_1) \geq m_d(k_2)$.

Demonstrație. În lema 1 în locul funcției $F(z)$ vom pune funcția $F^k(z)$. Atunci, în loc de $m_s(k)$ și $m_d(k)$ vom scrie $m_s(kk_1)$ și $m_d(kk_1)$, iar în loc de $m_s(1)$ și $m_d(1)$ vom scrie $m_s(k_1)$ și $m_d(k_1)$. Alegînd pe $k = \frac{k_2}{k_1}$, $k < 1$, și conform cazului a) al lemei 1, avem :

$$m_s(k_2) \geq m_s(k_1) \text{ și } m_d(k_2) \leq m_d(k_1)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Deci, dacă k crește de la 0 la $+\infty$, $m_s(k)$ descrește monoton iar m_d crește monoton.

Să studiem limitele funcțiilor $m_s(k)$ și $m_d(k)$ cînd k tinde la zero, respectiv la infinit. Putem scrie (luînd în considerare tabelul II) :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} m_s(k) &= \lim_{k \rightarrow 0} \min_{0 < s < c} \frac{dS}{ds} F' [F^{-1}(s)] \geq \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{dS}{ds} \right)_{z_0 < z < z_1} \min F'(z) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} k e^{k^{-1}-1} \min_{z_0 < z < z_1} F'(z) \end{aligned}$$

și deoarece

$$= \lim_{k \rightarrow 0} k e^{k^{-1}-1} = \lim_{\frac{1}{k} \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{k}-1}}{\frac{1}{k}} = \infty,$$

avem

$$\lim_{k \rightarrow 0} m_s(k) = +\infty$$

În mod analog se arată că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_d(k) = \infty.$$

Deci avem situația reprezentată în figura 2.

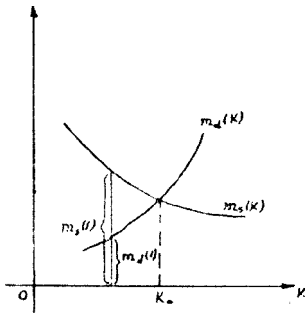


Fig. 2.

Rezultă deci, că există o singură valoare $k = k_0$ pentru care

$$m_s(k_0) = m_d(k_0)$$

și deoarece

$$\min_{z_0 \leq z \leq z_1} [F'(z)]' = \min \{m_s(k), m_d(k)\}$$

evident că

$$\min_{z_0 \leq z \leq z_1} [F^k(z)]'$$

este maxim pentru $k = k_0$.

Deci am demonstrat teorema : în familia de scări $S = F^k(z)$ există o singură scară cu eroarea absolută minimă. Parametrul k_0 corespunzător acestei scări este rădăcina ecuației

$$m_s(k) = m_d(k)$$

3°. a) Parametrul k_0 se poate determina aproximativ în felul următor : fie k_1 o valoare luată la întîmplare. Dreapta ce trece prin punctele $[1, m_s(1)]$, $[k_1, m_s(k_1)]$ intersectează dreapta determinată de punctele $[1, m_d(1)]$, $[k_1, m_d(k_1)]$ într-un punct P. Abscisa k_2 a acestui punct este o aproximație pentru k_0 . Deoarece $\min [F^k(z)]'$ este cuprins între $m_d(k_2)$ și $m_s(k_2)$, diferența $|m_d(k_2) - m_s(k_2)|$ arată precizia cu care k_2 aproximează pe k_0 .

Din figura 3 rezultă că, dacă

$$m_s(1) = \min_{0 < s < e^{-1}} F'[F^{-1}(s)] < \min_{e^{-1} < s < 1} F'[F^{-1}(s)] = m_d(1),$$

atunci $k_0 > 1$, și dacă $m_s(1) > m_d(1)$, atunci $k_0 < 1$. Dacă $m_s(1) = m_d(1)$, atunci $k_0 = 1$.

b) Valoarea parametrului k_0 corespunzător scării cu eroarea absolută minimă se poate determina și printr-un procedeu grafic foarte simplu.

Se știe că eroarea scării $S = s^k$ unde $s = F(z)$ este dată de

$$\min_{z_0 \leq z \leq z_1} \psi_k(z) = \min_{z_0 \leq z \leq z_1} \frac{dS}{dz} = \min_{z_0 \leq z \leq z_1} ks^{k-1} F'(z)$$

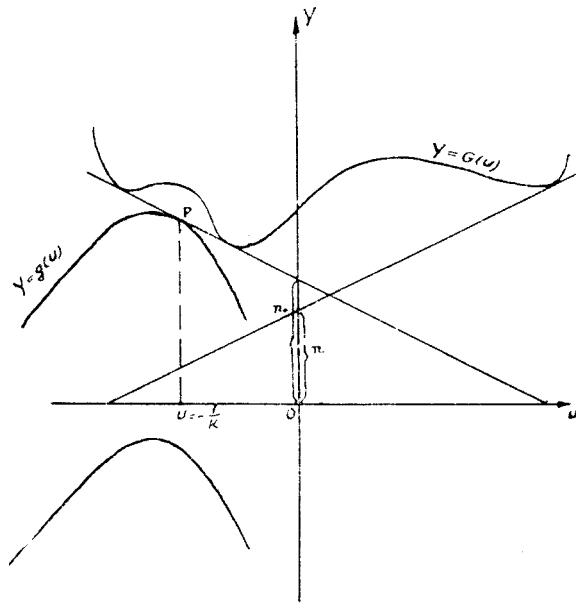


Fig. 3.

Minimul unei funcții fiind atins în aceleași puncte ca și logaritmul ei, putem considera în locul $\min \psi_k(z)$, $\min \ln \psi_k(z)$.

Notînd cu $m_k = \min \ln \psi_k(z)$ putem scrie

$$\ln \psi_k(z) = (k - 1) \ln s + \ln k + \ln [F'[F^{-1}(s)]] \geq m_k$$

Dacă introducem notația $\ln s = u$, unde $-\infty < u < 0$ și

$$\ln F[F^{-1}(e^u)] = G(u),$$

vom avea

$$G(u) \geq m_k + (1 - k)u - \ln k \tag{6}$$

Curba dată $Y = G(u)$ o reprezentăm în planul uoy . În acest reper ecuația

$$Y = (1 - k)u + m_k - lnk$$

reprezintă o familie de drepte de parametru k . Pentru un k fixat din relația (6), m_k corespunzător se determină grafic în felul următor: construim o dreaptă de coeficient unghiular $1 - k$ și o translatăm pînă devine tangentă la înfășurătoarea convexă a curbei (G). Dacă n este ordonata la origine a dreptei construite, atunci

$$m_k = lnk + n$$

Notăm valoarea maximă a lui m_k cu m . Valoarea parametrului k corespunzătoare acestui m este k_0 care dă scara cu eroarea minimă.

Pentru determinarea lui k_0 din familia de drepte

$$Y = (1 - k)u + m - lnk \quad (**)$$

alegem o dreaptă tangentă înfășurătoarei convexe a curbei $Y = G(u)$.

În acest scop considerăm înfășurătoarea (g) a familiei de drepte (**), adică eliminăm pe k din ecuațiile

$$\begin{cases} Y = (1 - k)u + m - lnk \\ 0 = -1 - \frac{1}{k} \end{cases} \quad (***)$$

Rezultă că ecuația înfășurătoarei este

$$Y = u + ln(-u) + 1 + m \quad (g)$$

Practic putem construi înfășurătoarea, considerînd în prealabil curba de ecuație $Y = u + ln(-u)$ și translatînd-o pînă devine tangentă la înfășurătoarea convexă a curbei (G) într-un punct P . Tangenta dusă în punctul P la (g) va fi tangenta comună la (G) și (g). Notînd cu α coeficientul unghiular al tangentei comune în P , parametrul k_0 corespunzător scării cu eroarea minimă va fi dat de relația

$$k_0 = 1 - \alpha$$

Deoarece curba fixă $Y = u + ln(-u)$ se poate construi grafic exact și deplasarea ei de-a lungul axei OY se poate efectua precis, această metodă ne dă un procedeu practic ușor pentru determinarea lui k_0 .

Rămîne de a demonstra că, k_0 astfel determinat este același cu k_0 determinat în prima parte a lucrării, adică trebuie să arătăm că

$$m_s(k_0) = m_d(k_0)$$

Din relațiile (***) rezultă că abscisa punctului P este $u = -\frac{1}{k}$. Valoarea corespunzătoare pe scara s este $e^{-\frac{1}{k}}$.

Pentru un k fix, după cum am văzut, avem $m_s(k) = n + \ln k$ unde n este ordonata la origine a tangentei de coeficient unghiular $1 - k$ dusă la înfășurătoarea convexă a curbei (G) situată la stînga punctului P . În mod analog obținem și $m_d(k)$.

Dacă $k_0 = 1 - \alpha$, tangenta corespunzătoare la înfășurătoarea convexă a curbei (G) fiind tangenta în punctul P , rezultă că

$$m_s(k_0) = m_d(k_0)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

De aici rezultă și unicitatea lui k_0 determinat prin această metodă grafică.

BIBLIOGRAFIE

1. M. V. Pentkovski, *Nomograficeski metod otiskania nailuciseva preobrazovania priamolineinîh skal*. D.A.N. XVI (1949) pag. 339—342.
2. F. Radó, *Cea mai bună transformare proiectivă a scărilor la nomograme cup uncte aliniate*. „Studii și cercetări de matematică (Cluj)” 1—2 VIII (1957), pag. 161—168.
3. F. Radó, *Despre transformarea proiectivă optimă a scărilor rectilinii*.
4. L. G. Nemțova, *Nomografirovanie uravnenij tretevo nomograficeskove poriadka*. „Vicislitelnaia matematika” (6) 1960.
5. S. Groze și B. Orbán, *O clasă de transformări neproiective a nomogramelor de ordinul trei*.

НАИЛУЧШАЯ НОМОГРАММА ИЗ КЛАССА НОМОГРАММ С ВЫРАВНЕННЫМИ ТОЧКАМИ 3-ГО ПОРЯДКА

(Резюме)

Рассматривается семья прямолинейных масштабов уравнения

$$S \quad F^k(z), \quad z_0 \leq z \leq z_1, \quad 0 < k < \infty,$$

где $F(z_0) = 0$, $F(z_1) = 1$. Обозначая через z_2 значение z , для которого $F^k(z_2) = e^{-1}$ и

$$m_s(k) = \min_{z_2 \leq z < z_1} | [F^k(z)]' |$$

$$m_d(k) = \min_{z_2 < z \leq z_1} | [F^k(z)]' |$$

показывается, что параметр k , соответствующий масштабу с минимальной абсолютной погрешностью, является единственным корнем уравнения

$$m_s(k) = m_d(k).$$

Даны и два простых метода для аппроксимации этого значения k .

UN NOMOGRAMME OPTIMUM D'UNE CLASSE DE NOMOGRAMMES A
POINTS ALIGNÉS D'ORDRE 3

(R é s u m é)

On considère une famille d'échelles rectilignes d'équation

$$S = F^k(z), \quad z_0 \leq z \leq z_1, \quad 0 < k < \infty$$

où $F(z_0) = 0$, $F(z_1) = 1$. En notant par z_2 la valeur de z pour laquelle $F^k(z_2) = \varepsilon^{-1}$ et

$$m_s(k) = \min_{z_0 \leq z < z_2} |[F^k(z)]'|$$

$$m_d(k) = \min_{z_2 < z \leq z_1} |[F^k(z)]'|$$

on montre que le paramètre K correspondant à l'échelle ayant une erreur absolue minima est la racine unique de l'équation

$$m_s(k) = m_d(k)$$

On donne aussi deux méthodes simples pour l'approximation de cette valeur de K .

SUPRAFEȚE CU m DIMENSIUNI DINTR-UN SPAȚIU EUCLIDIAN,
CU PRIMUL SPAȚIU NORMAL UNIDIMENSIONAL,

de

PROFIRA SANDOVICI

1. Fie S_m o suprafață cu m dimensiuni din spațiul euclidian E_{m+q} descrisă de punctul $M = M(u^1, \dots, u^m)$ și a cărei metrică este $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$. Presupunem că S_m admite în fiecare punct M un plan tangent E_m și că funcția $M(u^1, \dots, u^m)$ este continuu diferențiabilă de un număr de ori suficient de mare. Suprafeței S_m îi asociem o familie de repere semiortogonale

$$\left\{ M, \vec{I}_1, \dots, \vec{I}_m, \vec{I}_{m+1}, \dots, \vec{I}_{m+q} \right\}, \quad (1)$$

unde $\vec{I}_k = \frac{\partial M}{\partial u^k}$, iar $\vec{I}_{m+1}, \dots, \vec{I}_{m+q}$ sînt vectorii unei baze ortonormate din spațiul normal E_q la S_m în punctul M .

Familiei de repere (1) îi corespund formulele de derivare

$$\begin{cases} dM = du^k I_k, \\ d\vec{I}_i = \omega_i^k \vec{I}_k + \omega_i^{m+s} \vec{I}_{m+s}, \\ d\vec{I}_{m+s} = \omega_{m+s}^k \vec{I}_k + \omega_{m+s}^{m+t} \vec{I}_{m+t}, \end{cases} \quad (2)$$

$(i, k = 1, \dots, m; s, t = 1, \dots, q),$

unde

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k du^j, \quad \omega_i^{m+s} = -g_{ij} \omega_{m+s}^j = \lambda_{ij}^s du^j, \quad \omega_{m+s}^{m+t} = -\omega_{m+t}^{m+s} = A_{st}^t du^i.$$

Condițiile de integrabilitate a sistemului (2), numite și ecuații de structură ale suprafeței, se scriu :

$$\begin{cases} D\omega_i^k - [\omega_i^h, \omega_j^k] = [\omega_i^{m+s}, \omega_{m+s}^k], \\ D\omega_i^{m+s} - [\omega_i^j, \omega_j^{m+s}] = [\omega_i^{m+t}, \omega_{m+t}^{m+s}], \\ D\omega_{m+t}^{m+s} - [\omega_{m+t}^i, \omega_i^{m+s}] = [\omega_{m+t}^{m+\tau}, \omega_{m+\tau}^{m+s}], \end{cases} \quad (3)$$

($i, j, k = 1, \dots, m; s, t, \tau = 1, \dots, q$).

Introducînd notația

$$\frac{\vec{\delta I}_i}{\delta u^i} = \frac{\vec{\partial I}_i}{\partial u^i} - \Gamma_{il}^k \vec{I}_k,$$

din formulele (2) rezultă că

$$\frac{\delta I_i}{\delta u^i} = \lambda_{il}^s \vec{J}_{m+s}, \quad (4)$$

și prin urmare $\frac{\vec{\delta I}_i}{\delta u^i}$ sînt vectori ai spațiului normal E_q . Spațiul determinat de vectorii $\frac{\vec{\delta I}_i}{\delta u^i}$ într-un punct M este numit *primul spațiu normal* al suprafeței.

În cazul cînd primul spațiu normal este un subspațiu al spațiului normal E_q al suprafeței, prin operații de derivare se definesc spații normale succesive, care împreună alcătuiesc spațiul E_q .

Corespunzător cu acest mod de a obține spațiul normal, se construiesc formulele de derivare ale suprafeței. Sub această formă sînt considerate de către H. K. Weisse [1] formulele de derivare ale suprafeței în problema stabilirii criteriilor pentru clasa $k \leq 2$ a unui spațiu Riemann. Astfel, în mod firesc, se disting în această problemă situații după cum primul spațiu normal este unidimensional sau bidimensional.

În cele ce urmează sînt considerate acele suprafețe S_m dintr-un spațiu euclidian E_n pentru care primul spațiu normal are dimensiunea unu, cu intenția de a rezolva în primul rînd problema clasei lor.

2. Fie S_m o suprafață din spațiul euclidian E_{m+q} , $q > 1$, cu primul spațiu normal unidimensional, și fie \vec{I}_{m+1} un vector unitar din acest spațiu. Din (4) rezultă că

$$\lambda_{il}^x = 0, \quad (x = 2, \dots, q),$$

și deci

$$\omega_i^{m+x} = 0, \quad (x = 2, \dots, q). \quad (5)$$

Avînd în vedere egalitățile (5), condițiile de integrabilitate (3) ne dau

$$0 = D\omega_i^{m+\alpha} = [\omega_i^{m+1}, \omega_{m+1}^{m+\alpha}], \quad (i = 1, \dots, m; \alpha = 2, \dots, q).$$

De aici rezultă că formele ω_i^{m+1} și $\omega_{m+1}^{m+\alpha}$ sînt proporționale pentru oricare i și α și prin urmare rangul formelor $\omega_i^{m+1}, \omega_{m+1}^{m+\alpha}$, adică numărul de forme liniar independente din acest sistem, este unu. Pentru formele ω_i^{m+1} , condițiile de integralitate (3) ne dau:

$$D\omega_i^{m+1} = [\omega_i^j, \omega_j^{m+1}],$$

care se pot scrie și sub forma

$$D\omega_i^{m+1} = 0, \text{ mod. } \omega_j^{m+1} \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Aceste egalități exprimă complet integrabilitatea sistemului de ecuații $\omega_i^{m+1} = 0$. Avînd în vedere acest rezultat și faptul că, sistemul de forme ω_i^{m+1} are rangul unu, putem scrie:

$$\omega_i^{m+1} = \rho_i df, \quad (6)$$

unde ρ_i și f sînt funcții de u^1, \dots, u^m .

După o transformare corespunzătoare de coordonate u^1, \dots, u^m putem presupune că

$$\omega_i^{m+1} = \lambda_{im}^1 du^m \quad (\text{nu se însumează în raport cu } m),$$

deci

$$\lambda_{i\alpha}^1 = 0, \quad (i = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, m-1)$$

Întrucît tensorul λ_{ij}^1 este simetric, rezultă

$$\lambda_{\alpha i}^1 = \lambda_{i\alpha}^1 = 0$$

și prin urmare $\lambda_{mm}^1 = \lambda$ este singura componentă a acestui tensor diferită de zero. În sfîrșit, putem scrie:

$$\begin{aligned} \omega_{m+1}^{m+1} &= \lambda du^m, \quad \omega_a^{m+1} = 0, \quad \omega_{m+1}^{m+t} = h^t du^m, \\ &(\alpha = 1, \dots, m-1; t = 2, \dots, q). \end{aligned} \quad (7)$$

Din condițiile (3) avem egalitățile

$$D\omega_{m+1}^{m+t} = [\omega_{m+1}^{m+\tau}, \omega_{m+\tau}^{m+t}], \quad (t, \tau = 2, \dots, q),$$

care se scriu, ținînd seamă de (7), sub forma:

$$[dh^t, du^m] = [h^\tau du^m, A_{\tau b}^t du^b]$$

sau

$$[dh^t + h^\tau A_{\tau k}^t du^k, du^{m+1}] = 0,$$

de unde rezultă :

$$\frac{\partial h^t}{\partial u^k} + h^\tau A_{\tau k}^t = 0, \quad (t, \tau = 2, \dots, q; k = 1, \dots, m-1). \quad (8)$$

Înmulțind (8) prin h^t și efectuând însumare în raport cu t , obținem, având în vedere că $A_{\tau k}^t + A_{tk}^\tau = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \sum_{t=2}^q (h^t)^2 = 0, \quad (k = 1, \dots, m-1)$$

și deci se poate scrie :

$$\sqrt{\sum (h^t)^2} = \varphi_1(u^m).$$

Cu aceste observații, formulele de derivare (2) devin :

$$\begin{aligned} d\vec{I}_\alpha &= \omega_\alpha^k \vec{I}_k, \\ d\vec{I}_m &= \omega_m^k \vec{I}_k + \lambda du^m \vec{I}_{m+1}, \\ d\vec{I}_{m+1} &= -g^{im} \lambda du^m \vec{I}_i + \varphi_1 \left(\frac{\Sigma h^t}{\rho_1} \vec{I}_{m+t} \right) du^m \\ &\dots \dots \dots \\ &(t \geq 2, \alpha = 1, \dots, m-1) \end{aligned} \quad (9)$$

Considerăm acum în spațiul normal E_q o nouă bază ortonormată în care sînt incluși vectorii :

$$\vec{n}_1 = \vec{I}_{m+1}, \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{\rho_1} \sum_{t=2}^q h^t \vec{I}_{m+t}.$$

Prin această schimbare, formulele (9) se scriu :

$$\begin{aligned} d\vec{I}_\alpha &= \omega_\alpha^k \vec{I}_k, \\ d\vec{I}_m &= \omega_m^k \vec{I}_k + \lambda du^m \vec{n}_1, \\ d\vec{n}_1 &= -g^{im} \lambda du^m \vec{I}_i + \rho_1 du^m \vec{n}_2, \\ d\vec{n}_2 &= -\rho_1 du^m \vec{n}_1 + \sum_{t=3}^q \omega_{m+2}^{m+t} \vec{I}_{m+t}. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10)$$

unde, evident, formele ω_{m+2}^{m+t} și vectorii \vec{I}_{m+t} ($t = 3, \dots, q$) sînt, în general, diferiți de ω_{m+2}^{m+t} și \vec{I}_{m+t} din formulele (9).

Din (10) rezultă că :

$$\omega_{m+1}^{m+2} = \varphi_1 du^m, \omega_{m+1}^{m+3} = \dots = \omega_{m+1}^{m+q} = 0,$$

iar din (3) :

$$0 = D\omega_{m+1}^{m+t} = [\omega_{m+1}^{m+2}, \omega_{m+2}^{m+t}] (t = 3, \dots, q)$$

deci

$$[du^m, \omega_{m+2}^{m+t}] = 0,$$

de unde

$$\omega_{m+2}^{m+t} = g^t du^m, (t = 3, \dots, q).$$

Efectuînd operații analoge cu cele făcute pentru $\omega_{m+1}^{m+t} = h^t du^m$, obținem :

$$\sqrt{\sum_{t=3}^q (g^t)^2} = \varphi_2(u^m),$$

și alegînd o bază ortonormată în spațiul E_q în care să fie cuprinși vectorii

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 = \frac{1}{\varphi_2} \sum_{t=3}^q g^t \vec{I}_{m+t},$$

formulele (10) se scriu :

$$\begin{aligned} d\vec{I}_\alpha &= \omega_\alpha^k \vec{I}_k, \\ d\vec{I}_m &= \omega_m^k \vec{I}_k + \lambda du^m \vec{n}_1, \\ d\vec{n}_1 &= -g^{im} \lambda du^m \vec{I}_i + \varphi_1 du^m \vec{n}_2, \\ d\vec{n}_2 &= -\varphi_1 du^m \vec{n}_1 + \varphi_2 du^m \vec{n}_3, \\ d\vec{n}_3 &= -\varphi_2 du^m \vec{n}_2 + \sum_{t=4}^q \omega_{m+3}^{m+t} \vec{I}_{m+t}, \\ &\dots \end{aligned}$$

unde, în general, formele ω_{m+3}^{m+t} și vectorii \vec{I}_{m+t} diferă de ω_{m+3}^{m+t} și \vec{I}_{m+t} din formulele (10).

Planele E_m tangente la una dintre suprafețele S_m considerate, formează o familie de plane care depinde de un parametru u^m .

Rezultă de aici că varietățile $u^m = \text{const.}$ sînt varietăți plane și deci :

O suprafață S_m cu primul spațiu normal unidimensional admite o stratificare în plane $E_{m-1} : S_m = \infty^1 E_{m-1}$ și de-a lungul unui E_{m-1} planul tangent E_m rămîne constant împreună cu vectorii normali $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_q$.

O formă canonică a formulelor (11) se poate obține observînd că, pentru suprafețele considerate, varietățile $u^m = \text{const.}$ sînt varietăți total geodezice și deci, metrica suprafeței poate fi adusă la forma

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2 + \dots + (du^{m-1})^2 + g(du^m)^2,$$

g fiind o funcție de variabilele u^1, \dots, u^m . Natural, metrica fiind euclidiană, g satisface condițiile corespunzătoare.

3. Încheiem aceste considerații indicînd un exemplu de suprafață cu primul spațiu normal unidimensional.

Fie C o curbă din spațiul euclidian E_n și fie $\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_{n-1}$ vectorii unitari care determină, într-un punct M al curbei, tangenta, prima normală, a doua normală, \dots a $(n-1)$ -a normală. Notînd cu s arcul pe curba C , formulele lui Frenet corespunzătoare punctului M se scriu :

$$\frac{dM}{ds} = \vec{\xi}_0, \quad \frac{d\vec{\xi}_p}{ds} = -\rho_p \vec{\xi}_{p-1} + \rho_{p+1} \vec{\xi}_{p+1}, \quad (12)$$

unde $\rho_0 = \rho_n = 0$ și $p = 0, 1, \dots, n-1$.

Vectorii $\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_{q-2}$ determină, împreună cu punctul M planul osculator $(q-1)$ dimensional P_{q-1} . Cînd punctul M parcurge curba C , planul P_{q-1} generează varietatea cu q dimensiuni S_q , descrisă de punctul R dat de :

$$R = M(s) + u^0 \vec{\xi}_0 + u^1 \vec{\xi}_1 + \dots + u^{q-2} \vec{\xi}_{q-2}, \quad q < n-1. \quad (13)$$

Avînd în vedere formulele lui Frenet, rezultă că planul tangent la S_q în punctul R este planul osculator P_q determinat în punctul M de vectorii $\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_{q-1}$.

Astfel, prin derivarea vectorilor tangenți la S_q în R și ținînd seama de formulele [12], obținem vectori din planul osculator P_{q+1} , adică planul determinat în M de vectorii $\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q$.

De aici rezultă că primul spațiu normal într-un punct R al varietății S_q este unidimensional și prin urmare :

Suprafețele generate de planele osculatoare P_{q-1} ale unei curbe C dintr-un spațiu euclidian E_n au primul spațiu normal unidimensional. Aceste suprafețe sînt înfășurate de planele osculatoare P_q .

BIBLIOGRAPHIE

1. H. K. Weierstrass *Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen*. „Mathematische Annalen”. **110**, 1935.
2. N. N. Iannenko, *Nekotore voprosy teorii vlojenia rimanovih metrik v evklidovoe prostranstvo*. „Uspehi matematicheskikh nauk”, **VIII**, nr. 1, 1953.

m - МЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИМЕЮЩИЕ
ПЕРВОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОМЕРНОЕ

(Резюме)

Рассматриваются многообразия S_m в эвклидовом пространстве E_{m+q} , имеющие первое нормальное пространство одномерное. Доказывается, что эти поверхности имеют эвклидовую метрику и что допускают расслоение в плоскостях E_{m-1} , так что вдоль E_{m-1} касательная плоскость E_m к многообразию остаётся постоянной, вместе с нормальными векторами.

В качестве примера даны многообразия, образованные соприкасающейся плоскостью кривой C с размером меньше $n-2$ в эвклидовом пространстве E_n .

SURFACES A m DIMENSIONS D'UN ESPACE EUCLIDIEN POUR LESQUELLES
LE PREMIER ESPACE NORMAL EST UNIDIMENSIONNEL

(Résumé)

On considère les variétés S_m d'un espace euclidien E_{m+q} qui ont le premier espace normal unidimensionnel. On montre que ces surfaces ont une métrique euclidienne et qu'elles admettent une stratification dans les plans E_{m-1} , de telle sorte que le long d'un E_{m-1} , le plan E_m tangent à variété demeure constant avec les vecteurs normaux.

On donne comme exemple les variétés engendrées par le plan osculateur de dimension inférieure à $n-2$ d'une courbe C dans un espace euclidien E_n .

SPAȚII A_n CARE ADMIT $m < n$ FORME PFAFF INVARIANTE

de
M. ȚARINĂ

Spațiile A_n care admit o formă Pfaff invariantă au fost considerate mai întâi de academicianul Gh. Vrăncianu [1], care a arătat că astfel de spații posedă un grup maxim de transformări în ele înseși, cu n^2 parametri.

În legătură cu acest subiect ne propunem studiul spațiilor A care admit m forme Pfaff invariante și care posedă o mobilitate maximă, prin aceeași metodă, folosind ecuațiile de structură corespunzătoare.

Fie ds^1, ds^2, \dots, ds^m ($m < n$) formele Pfaff invariante ale spațiului A_n . Presupunem de la început că sînt independente și că fac parte dintr-un sistem de n congruențe definite prin formele ds^a ($a = 1, 2, \dots, n$), la care raportăm spațiul considerat. În tot ceea ce urmează, indicii latini a, b, c, \dots parcurg valorile $1, 2, \dots, n$, indicii h, i, j, k, \dots iau valorile $1, 2, \dots, m$, iar indicii grecești $\alpha, \beta, \gamma \dots$ iau valorile $m+1, m+2, \dots, n$.

Considerăm grupul general al transformărilor de congruențe ale spațiului A_n

$$\bar{ds}^a = c_b^a ds^b \quad (1)$$

Ecuațiile de structură ale spațiului A_n sînt

$$\begin{aligned} \Delta s^a &= [ds^b ds_b^a] - \frac{1}{2} t_{bc}^a [ds^b ds^c] \\ \Delta s_b^a &= - [ds_c^a ds_b^c] + \frac{1}{2} \gamma_{bcd}^a [ds^c ds^d] \end{aligned} \quad (2)$$

unde $ds_b^a = \gamma_{bc}^a ds^c$ iar γ_{bc}^a sînt componentele conexiunii spațiului pe sistemul de congruențe ds^a .

Scriind primele ecuații de structură (2) în sistemul de congruențe ds^a și apoi ținînd seama de (1), se obțin formulele

$$c_b^f \bar{ds}_f^a = c_j^a ds_b^j + dc_b^a \quad (3)$$

În cazul considerat, formele ds^i fiind invariante, grupul de transformări de congruențe ale spațiului este

$$ds^i = ds^i, \quad ds^\alpha = c_i^\alpha ds^i + c_\beta^\alpha ds^\beta \quad (4)$$

prin urmare avem $c_a^i = \delta_a^i$.

Formulele (3) scrise pentru indicii $a = i, b = j$, respectiv $a = i, b = \alpha$ ne dau

$$\begin{aligned} ds_j^i &= ds_j^i + c_j^\beta ds_\beta^i \\ ds_\alpha^i &= c_\alpha^i ds_\alpha^i \end{aligned} \quad (5)$$

de unde rezultă că spațiul formelor ds_α^i este invariant. Astfel, dacă aceste forme sînt nule într-un sistem de congruențe, ele vor fi nule în orice alt sistem.

Pentru scopul urmărit, presupunem $ds_\alpha^i = 0$ deci $\gamma_{\alpha\alpha}^i = 0$. Atunci formele ds_j^i sînt și ele invariante, astfel că γ_{jk}^i sînt invarianți absoluți, iar γ_{ja}^i sînt invarianți relativi în raport cu transformările grupului.

Dacă invarianții relativi sînt diferiți de zero, ei vor impune condiții coeficienților c_b^a din grupul (1). De aceea, pentru ca spațiul dat să admită un grup maxim de mișcări în sine însuși, este necesar ca invarianții relativi să fie nuli, adică $\gamma_{ja}^i = 0$. Astfel avem

$$\gamma_{ja}^i = \gamma_{ja}^i = 0 \quad ds_j^i = \gamma_{jk}^i ds^k \quad (6)$$

Ecuatiile de structură (2) se scriu atunci sub forma

$$\Delta s^i = \frac{1}{2} (\gamma_{jk}^i - \gamma_{kj}^i - t_{jk}^i) [ds^j ds^k] - \frac{1}{2} t_{\alpha\beta}^i [ds^\alpha ds^\beta] \quad (7)$$

Deoarece covariantul bilinear Δs^i și produsele exterioare din membrul al doilea sînt invarianți, rezultă că și coeficienții acestora sînt invarianți, care în cazul cînd nu se anulează identic, impun de asemenea condiții funcțiilor c_b^a . Așadar, pentru ca spațiul să posedे mobilitate maximă, este necesar ca

$$\begin{aligned} \gamma_{jk}^i - \gamma_{kj}^i - t_{jk}^i &= 0 \\ t_{ja}^i &= t_{\alpha\beta}^i = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

În acest caz formele ds^i sînt diferențiale totale exacte ale funcțiilor s^i , căci coeficienții covarianților biliniari ai lor sînt nuli $\omega_{ab}^i = 0$. Se știe că

$$\omega_{ab}^i = \gamma_{ab}^i - \gamma_{ba}^i - t_{ab}^i = 0$$

și din formulele (8) urmează atunci

$$l_{aj}^i = 0 \quad \gamma_{ax}^i = 0$$

Celelalte ecuații de structură (2) devin

$$\Delta s_j^i = \frac{1}{2} (\gamma_{jhl}^i + \gamma_{kl}^i \gamma_{jh}^k - \gamma_{kh}^i \gamma_{jl}^k) [ds^h ds^l] + \frac{1}{2} \gamma_{jka}^i [ds^k ds^a] + \frac{1}{2} \gamma_{j\alpha\beta}^i [ds^\alpha ds^\beta] \quad (10)$$

Formele ds_j^i fiind invariante, covarianții lor biliunari sînt și ei invari-anți, iar coeficienții lor impuu din nou condiții funcțiilor c_b^a , restrîngînd mobilitatea spațiului, afară de cazul cînd avem

$$\begin{aligned} \gamma_{jhl}^i + \gamma_{kl}^i \gamma_{jh}^k - \gamma_{kh}^i \gamma_{jl}^k &= 0 \\ \gamma_{lka}^i &= \gamma_{j\alpha\beta}^i = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Atunci formele ds_j^i sînt de asemenea diferențiale totale exacte.

Din expresia componentei γ_{jka}^i a tensorului de curbură

$$\gamma_{jka}^i = \frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial s^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{j\alpha}^i}{\partial s^k} + \gamma_{ak}^i \gamma_{j\alpha}^a - \gamma_{a\alpha}^i \gamma_{jk}^a + \gamma_{aj}^i \omega_{ka}^a \quad (12)$$

în cazul considerat rezultă

$$\frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial s^\alpha} = 0$$

deci invarianții γ_{jk}^i depind cel mult de variabilele s^i .

Se verifică ușor că avem

$$\gamma_{\beta ci}^i = 0$$

și astfel cea de a doua ecuație de structură (2), corespunzătoare indicilor $a = i, b = \beta$, este identic satisfăcută.

Ecuațiile de structură rămase sînt

$$\Delta s^\alpha = [ds^a ds_a^\alpha] - \frac{1}{2} l_{bc}^\alpha [ds^b ds^c] \quad (13)$$

$$\Delta s_b^\alpha = - [ds_f^\alpha ds_b^f] + \frac{1}{2} \gamma_{bcd}^\alpha [ds^c ds^d]$$

Pentru a determina spații cu grup maxim de mișcări, considerăm că subspațiile definite de sistemul $ds^i = 0$ sînt spații afine. Presupunem deci că formele $ds^\alpha, ds_\beta^\alpha$ verifică sistemul (13) corespunzător unui spațiu afin. În acest fel se obțin condițiile

$$l_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \quad \gamma_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0 \quad (14)$$

Din formulele de transformare ale torsiunii și curburii referitoare la celelalte componente, se deduce faptul că acestea impun condiții coeficienților c_b^a , în afară de cazul în care ele sînt de forma

$$t_{i\beta}^\alpha = \rho_i \delta_{\beta}^\alpha, \gamma_{ij\beta}^\alpha = \lambda_{ij} \delta_{\beta}^\alpha \quad (15)$$

unde ρ_i și λ_{ij} sînt scalari invarianți.

Într-adevăr, pentru componentele torsiunii, avem legea de transformare

$$\bar{t}_{pq}^\alpha c_b^p c_c^q = t_{bc}^\alpha c_p^a$$

deci

$$\bar{t}_{j\mu}^\alpha c_i^j c_\beta^\mu = t_{i\beta}^\alpha c_\gamma^a$$

și apoi, ținînd seama de (15), avem

$$\delta_i^j \delta_u^\alpha \bar{\rho}_j c_\beta^\mu = \delta_\beta^\gamma \rho_i c_\gamma^a$$

adică $\bar{\rho}_j = \rho_j$.

Pentru componentele curburii afirmația se verifică analog.

În acord cu ipotezele făcute vom presupune.

$$ds_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha p ds^1 \quad (p = \text{const})$$

Ținînd seama de formulele (15) în ecuațiile (13), avem

$$\begin{aligned} \Delta s^\alpha &= [ds^i ds_i^\alpha] + [ds^\beta, \delta_\beta^\alpha p ds^2] - \rho_i [ds^i, ds^\alpha] \\ \Delta s_j^\alpha &= - [ds_i^\alpha ds_j^i] - [ds_\gamma^\alpha ds_j^\gamma] + \lambda_{ji} [ds^i ds^\alpha] \end{aligned} \quad (16)$$

Pentru a satisface primele ecuații (16) sub forma $\Delta s^\alpha = 0$ le scriem

$$[ds^i, ds_i^\alpha - h_i ds^\alpha] = 0 \quad h_i = p \delta_i^1 + \rho_i$$

și aplicînd o cunoscută lemă a lui E. Cartan, aflăm

$$ds_i^\alpha - h_i ds^\alpha = k_{ij}^\alpha ds^j \quad (k_{ij}^\alpha = k_{ji}^\alpha)$$

deci

$$ds_i^\alpha = h_i ds^\alpha + k_{ij}^\alpha ds^j \quad (17)$$

Formele ds^α devin astfel diferențiale totale exacte ale variabilelor s^α , iar celelalte ecuații (16) se scriu sub forma

$$\Delta s_j^\alpha = (k_{ii}^\alpha \gamma_{jk}^i - \delta_k^1 k_{ji}^\alpha) [ds^k ds^i] + [\gamma_{jk}^i h_i - \delta_k^1 h_{ip} - \lambda_{ik}] [ds^i ds^\alpha] \quad (18)$$

Pe de altă parte, din formulele (17) deducem

$$\Delta s_j^\alpha = [ds^\alpha d\rho_j] + [ds^k dk_{jk}^\alpha]$$

deci

$$\Delta s_j^\alpha = \left(\delta_\rho^\alpha \frac{\partial \rho_j}{\partial s^k} - \frac{\partial h_{jk}^\alpha}{\partial s^\beta} \right) [ds^\beta ds^k] + \frac{\partial h_{jk}^\alpha}{\partial s^l} [ds^k ds^l] + \frac{\partial \rho_j}{\partial s^\beta} [ds^\alpha ds^\beta] \quad (19)$$

Identificînd formulele (18) și (19), se obțin relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{jk}^\alpha}{\partial s^l} &= \gamma_{jk}^i k_{il}^\alpha - \delta_k^l h_{jl}^\alpha \\ \frac{\partial h_{jk}^\alpha}{\partial s^\beta} &= \delta_\rho^\alpha \left\{ \frac{\partial \rho_j}{\partial s^k} + \gamma_{jk}^i h_i - \delta_k^l h_j^\beta + \lambda_{jk} \right\} \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial s^\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Din formulele (3) deducem

$$\begin{aligned} d\bar{s}_j^\alpha &= c_j^\alpha ds_j^i + c_\beta^\alpha ds_j^\beta + dc_j^\alpha \\ dc_\beta^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

prin urmare $c_\beta^\alpha = \text{const.}$

Formele ds^i , ds^α fiind diferențiale totale, din formulele (4) aflăm prin integrare

$$\bar{s}^i = s^i + c^i, \quad \bar{s}_\beta^\alpha = c_\beta^\alpha s^\beta + \varphi^\alpha(s^j) \quad (22)$$

unde φ^α sînt funcții de s^j , iar c^i sînt constante.

Avem de asemenea

$$c_j^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial s^j}$$

Înlocuind în formulele (21), obținem

$$h_j d\bar{s}^\alpha + \bar{h}_{jk}^\alpha d\bar{s}^k = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial s^i} ds_j^i + c_\beta^\alpha (h_j ds^\beta + h_{jk}^\beta ds^k) + \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial s^j \partial s^k} ds^k \quad (23)$$

și deoarece avem

$$ds^\alpha = c_s^\alpha ds^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial s^j} ds^j$$

din ecuația (23) rezultă

$$\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial s^j \partial s^k} + (\gamma_{jk}^i - \delta_k^i h_j) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial s^i} + c_\beta^\alpha k_{jk}^\beta - k_{jk}^\alpha = 0 \quad (24)$$

În cazul în care coeficienții γ_{jk}^i satisfac relațiile

$$\gamma_{jk}^i k_{il}^\alpha - \delta_k^l k_{jl}^\alpha = 0 \quad (25)$$

prin urmare atunci, cînd k_{jk}^α nu depind de variabilele s^i , funcțiile k_{jk}^α sînt de forma

$$k_{jk}^\alpha = \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial s^k} + \gamma_{jk}^i h_i - \delta_k^l p h_j + \lambda_{jk} \right\} s^\alpha \quad (26)$$

Avem de asemenea

$$\bar{k}_{jk}^\alpha = \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial s^k} + \gamma_{jk}^i h_i - \delta_k^l p h_j + \lambda_{jk} \right\} s^\alpha$$

deci înlocuind în ecuația (24), și ținînd seama de formulele (23), se obțin ecuațiile

$$\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial s^j \partial s^k} + (\gamma_{jk}^i - \delta_k^i h_j) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial s^i} - \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial s^k} + \gamma_{jk}^i h_i - \delta_k^l p h_j + \lambda_{jk} \right) \varphi^\alpha = 0 \quad (27)$$

Prin urmare, în cazul în care sînt îndeplinite condițiile (26), spațiul A_n admite un grup maxim de mișcări dat de formulele (22) conținînd $n + (n - m)^2$ parametri c^i , c_s^α și $n - m$ funcții φ^α care satisfac sistemul diferențial (27). Desigur, în cazul general pentru un număr m destul de mare, se pun condiții de compatibilitate asupra soluțiilor acestui sistem.

În cazul particular $m = 1$, condițiile (25) nu apar, deoarece produsul exterior $[ds^k ds^l]$ din ecuațiile (18), (19) este nul, iar pentru $p = 0$ sistemul (27) se reduce la ecuația diferențială aflată de acad. G h. V r ă n c e a n u

$$\frac{d^2 \varphi^\alpha}{d(s^1)^2} + (\mu - \rho) \frac{d\varphi^\alpha}{ds^1} - (\rho' + \mu\rho + \lambda)\varphi^\alpha = 0$$

notațiile fiind următoarele

$$\rho = \rho_1, \quad \lambda = \lambda_{11}, \quad \mu = \gamma_{11}^1$$

Pentru a ne convinge că problema prezentată nu constituie numai o generalizare formală a cazului $m = 1$, să o însoțim de cîteva exemple.

Exemplul 1. Să considerăm spațiul A_n care are singurele componente nenule ale conexiunii

$$\Gamma_{11}^1 = I, \quad \Gamma_{12}^1 = A, \quad \Gamma_{22}^1 = B, \quad \Gamma_{21}^2 = -1, \quad \Gamma_{a1}^\alpha = -1 \quad (28)$$

unde I , A , B sînt constante.

Acest spațiu a fost întâlnit de acad. G. h. V r ă n c e a n u [1, vol II p. 88] în problema spațiilor parțial proiective cu grup maxim de mișcări. Singurele componente nenule ale tensorului de curbura pentru spațiul (28) sînt

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{121}^1 &= A & \Gamma_{11x}^\alpha &= I + I \\
 \Gamma_{212}^1 &= B(I + I) - A^2 & \Gamma_{12x}^\alpha &= A \\
 \Gamma_{121}^2 &= -(I + I) & \Gamma_{21x}^\alpha &= A \\
 \Gamma_{212}^2 &= A & \Gamma_{22x}^\alpha &= B
 \end{aligned} \tag{29}$$

iar tensorul de torsiune este nul. Se verifică ușor relațiile

$$\Gamma_{jhl}^i + \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jh}^k - \Gamma_{kh}^i \Gamma_{jl}^k = 0$$

deci formulele (11) sînt satisfăcute. De asemenea formulele (14) (15) și (25) sînt îndeplinite pentru sistemul de coordonate dat, căci avem

$$\varphi_i = 0, \quad \lambda_{11} = I + I, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = A, \quad \lambda_{22} = B, \quad \Gamma_{ji}^\alpha = 0, \quad \rho = -1$$

Pentru spațiul (28) definit în coordonate carteziane, sistemul de ecuații (27) ne dă

$$\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} + (\Gamma_{jk}^i + \delta_k^i \delta_j^1) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} = 0$$

prin urmare

$$\varphi^\alpha = \text{const.}$$

Regăsim astfel rezultatul cunoscut că, spațiul (28) admite grupul maxim de mișcări

$$\begin{aligned}
 x'^1 &= x^1 + a^1 \\
 x'^2 &= x^2 + a^2 \\
 x'^\alpha &= a_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha
 \end{aligned} \tag{30}$$

cu $n^2 - 2n + 2$ parametri $a^1, a^2, a_\beta^\alpha, a^\alpha$, și posedă două forme invariante, dx^1, dx^2 , diferențiale totale exacte.

Exemplul 2. Considerăm spațiul care are singurele componente nenule ale conexiunii

$$\Gamma_{11}^\alpha = a^2 x^\alpha, \quad \Gamma_{12}^\alpha = \Gamma_{21}^\alpha = abx^\alpha, \quad \Gamma_{22}^\alpha = b^2 x^\alpha \tag{31}$$

unde a, b sînt constante.

Acest spațiu face parte de asemenea dintr-o clasă de spații A omogene considerate de academicianul G. h. V r ă n c e a n u ([2], p. 247).

Singurele componente nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\Gamma_{11\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} a^2, \quad \Gamma_{12\beta}^{\alpha} = \Gamma_{21\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} ab, \quad \Gamma_{22\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} b^2 \quad (32)$$

deci

$$\lambda_{11} = a^2, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = ab, \quad \lambda_{22} = b^2$$

Tensorul de torsiune este nul.
Condițiile (27) sînt satisfăcute, căci

$$\Gamma_{jk}^i = 0$$

Sistemul de ecuații (27) se scrie în acest caz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial (x^2)^2} - a^2 \varphi^{\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^1 \partial x^2} - ab \varphi^{\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial (x^1)^2} - b^2 \varphi^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

și ne dă prin integrare

$$\varphi^{\alpha} = c_1^{\alpha} e^{a x^1 - b x^2} + c_2^{\alpha} e^{- (a x^1 + b x^2)}$$

Spațiul (31) admite grupul

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + c^1 \\ x'^2 &= x^2 + c^2 \\ x'^{\alpha} &= a_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + \varphi^{\alpha} \end{aligned} \quad (34)$$

cu $n^2 - 2n + 2$ parametri $c^1, c^2, a_5^{\alpha}, c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}$ și posedă două forme Pfaff invariante dx^1, dx^2 .

Determinînd pe cale directă grupul spațiului (31), obținem tot formulele (34).

Spațiul (31) nu este proiectiv euclidian, căci componentele tensorului lui Weyl de forma

$$K_{11\alpha}^{\alpha} = \frac{2n-3}{n-1} a^2$$

nu se anulează pentru $a \neq 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. h. V r ă n c e a n u, *Leçon de Géométrie différentielle*, vol. I, II. 2^e éd., Bucarest, 1957.
2. G. h. V r ă n c e a n u, *Leçon de Géométrie différentielle*, vol. III, București, 1960.

ПРОСТРАНСТВА A_n , ДОПУСКАЮЩИЕ $m < n$ ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ
ПФАФФА
(Резюме)

При помощи соответствующих структурных уравнений изучаются пространства A_n , допускающие $m < n$ инвариантные формы Пфаффа и обладающие максимальной подвижностью. Инвариантные формы должны быть в этом случае точными полными дифференциалами, так как, иначе, коэффициенты их двухлинейных ковариантов ставят условия параметрам группы. Вообще рассматриваемые пространства обладают группами преобразований вида (22) и содержат $n + (n - m)^2$ параметры и $n - m$ функций φ_α , удовлетворяющие системе уравнений с частичными производными (27). В качестве примера дано пространство (28), рассматриваемое и акад. Г. В р э н ч а н у [1], а также пространство, определяемое формулами (31). Оба пространства обладают максимальной группой движений с $n^2 - 2n + 2$ параметрами и допускают две инвариантные формы Пфаффа dx^1, dx^2 .

ESPACES A_n ADMETTANT $m < n$ FORMES DE PFAFF INVARIANTES
(Résumé)

A l'aide des équations de structure correspondante, on étudie les espaces A_n admettant $m < n$ formes de Pfaff invariantes et possédant une mobilité maxima. Les formes invariantes doivent être en ce cas les différentielles totales exactes, sinon les coefficients de leurs covariants bilinéaires imposent des conditions aux paramètres du groupe. En général les espaces considérés possèdent des groupes de transformations de la forme (22) contenant $n + (n - m)^2$ paramètres et $n - m$ fonctions φ satisfaisant au système d'équations aux dérivées partielles (27). Comme exemple s'encadrant dans cette théorie, on donne l'espace (28) considéré aussi par Gh. Vrăncescu (1), ainsi que l'espace défini par les formules (31). Ces deux espaces possèdent un groupe maximum de mouvements à $n^2 - 2n + 2$ paramètres et admettent deux formes de Pfaff invariantes dx^1, dx^2 .

O EXTINDERE A TEOREMEI DE CONTRACȚIE A LUI BANACH ÎN SPAȚII METRICE

de

ANDREI NEY

Teorema de contracție a lui Banach se enunță în general astfel :

Dacă operatorul U , care transformă *spațiul metric complet* E în el însuși, este un operator de contracție, adică, dacă pentru orice pereche de puncte x, x' din E are loc inegalitatea

$$\rho(U(x), U(x')) < \alpha \cdot \rho(x, x') \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1)$$

$\rho(x, x')$ fiind distanța elementelor x și x' din E , atunci în acest spațiu există un punct și numai unul x^* , astfel încît

$$U(x^*) = x^*.$$

Acest punct x^* se numește punctul fix al operatorului U și se poate aproxima succesiv cu ajutorul iterației

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

pornind de la un punct x_0 , oarecare, al spațiului E .

Se menționează în [1] — și se ilustrează cu un exemplu — faptul că inegalitatea

$$\rho(U(x), U(x')) < \rho(x, x') \quad (x \neq x')$$

nu este o condiție suficientă pentru existența punctului fix.

În prezenta lucrare se pune în evidență o condiție suficientă pentru existența punctului fix, fără să se apeleze la constanta subunitară α , care figurează în (1). Menționăm, că M. A. K r a s n o s e l s k i tratează în „Uspeli matem. nauk” nr. 1, X, 1955, pp. 123—127, o problemă similară într-un *spațiu Banach*, U fiind un *operator complet continuu*.

Se consideră un operator U , care transformă spațiul metric complet E în el însuși. Considerăm numărul pozitiv $\alpha(x, x')$ atașat perechei de elemente x, x' din E astfel, încît să aibă loc

$$\varphi(U(x), U(x')) \leq \alpha(x, x') \cdot \varphi(x, x'); \quad (2)$$

în orice caz se poate lua drept $\alpha(x, x')$ raportul $\frac{\varphi(U(x), U(x'))}{\varphi(x, x')}$.

Se consideră iterația

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

cu elementul de pornire $x_0 \in E$. Alegînd $m > n$ (de altfel întregi pozitivi arbitrari, n putînd fi și zero) are loc inegalitatea

$$\varphi(x_n, x_m) \leq \varphi(x_n, x_{n+1}) + \varphi(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \varphi(x_{m-1}, x_m). \quad (4)$$

Deoarece

$$\varphi(x_k, x_{k+1}) = \varphi(U(x_{k-1}), U(x_k)) \leq \alpha(x_{k-1}, x_k) \varphi(x_{k-1}, x_k)$$

rezultă, în continuare

$$\varphi(x_k, x_{k+1}) \leq \varphi(x_0, x_1) \prod_{i=1}^k \alpha(x_{i-1}, x_i)$$

cu ajutorul căreia inegalitatea (4) se transcrie astfel:

$$\varphi(x_n, x_m) \leq \varphi(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \prod_{i=1}^k \alpha(x_{i-1}, x_i). \quad (5)$$

Seria cu termenul general $u_n = \prod_{i=1}^n \alpha(x_{i-1}, x_i)$ este convergentă, dacă — în conformitate cu criteriul lui Kummer — există un șir $\{c_n\}$ de numere pozitive, astfel, ca inegalitatea

$$c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \geq \mu > 0$$

să fie îndeplinită. În cazul seriei considerate mai sus, aceasta revine la condiția

$$c_n \frac{1}{\alpha(x_n, x_{n+1})} - c_{n+1} \geq \mu > 0. \quad (6)$$

Dacă (6) este îndeplinită, seria $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \alpha(x_{i-1}, x_i)$ converge, deci restul ei $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^k \alpha(x_{i-1}, x_i)$ poate fi mai mic decît un număr pozitiv arbitrar, ε , dacă $n > N_\varepsilon$. În baza inegalității (5) se va putea scrie

$$\varphi(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (m > n > N_\varepsilon),$$

adică șirul $\{x_n\}$ este un șir Cauchy într-un spațiu metric complet, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in E$. În continuare

$$\varphi(x_{n+1}, U(x^*)) = \varphi(U(x_n), U(x^*)) \leq \alpha(x_n, x^*) \cdot \varphi(x_n, x^*). \quad (7)$$

Dacă pentru orice pereche de puncte x', x'' din E avem $\alpha(x', x'') < A$, unde A este un număr pozitiv (nu negreșit mai mic ca unitatea), rezultă din (7) — în baza continuității distanței φ —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n+1}, U(x^*)) = 0,$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = U(x^*)$. Pe de altă parte s-a văzut mai sus, că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$, deci $U(x^*) = x^*$, ceea ce înseamnă, că x^* este un punct fix al operatorului U .

În scopul examinării problemei unicității, se presupune existența a încă unui punct fix, x , obținut pe orice altă cale, și se scriu relațiile evidente

$$\varphi(x, x^*) = \varphi(U(x), U(x^*)) \leq \alpha(x, x^*) \varphi(x, x^*)$$

de unde rezultă $1 \leq \alpha(x, x^*)$. Dacă însă se presupune $\alpha(x', x'') < 1$ pentru orice pereche x', x'' de elemente din E , fără să existe neapărat un număr pozitiv subunitar, α , astfel ca $\alpha(x', x'') \leq \alpha < 1$, atunci din contradicția de mai sus, ($1 < 1$), rezultă, că punctul fix x^* este unic. În baza celor de mai sus se poate enunța următoarea

TEOREMĂ. Fie operatorul U , care transformă spațiul metric complet E în el însuși și pentru oricare pereche de elemente x', x'' din E să fie valabilă inegalitatea

$$\varphi(U(x'), U(x'')) \leq \alpha(x', x'') \cdot \varphi(x', x''), \quad (8)$$

unde φ indică distanța între două puncte din E , $\alpha(x', x'')$ este un număr pozitiv corespunzător perechii de elemente x', x'' , iar mulțimea $\{\alpha(x', x'')\}_{x', x'' \in E}$ să fie mărginită. Dacă pentru mulțimea $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\}$, $n=0, 1, 2, \dots$ corespunzătoare șirului de elemente x_0, x_1, x_2, \dots obținut prin intermediul relației de recurență

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

are loc inegalitatea

$$c_n \frac{1}{\alpha(x_n, x_{n+1})} - c_{n+1} \geq \mu > 0 \quad (10)$$

$\{c_n\}_{n=0, 1, 2, \dots}$ fiind un șir de numere pozitive și μ de asemenea un număr pozitiv, atunci șirul $\{x_n\}$ are o limită $x^* \in E$, care este un punct fix al transformării (o soluție a ecuației $x = U(x)$).

Dacă — în particular — pentru orice pereche de elemente x', x'' din E are loc inegalitatea $\alpha(x', x'') < 1$, fără ca să existe neapărat un număr pozitiv

subunitar α astfel, ca $\alpha(x', x'') \leq \alpha < 1$, și dacă totodată relația (10) este îndeplinită, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, x^* fiind unicul punct fix al operatorului U (unica soluție a ecuației $x = U(x)$), independent de elementul de pornire x_0 a relației de recurență (9).

Observația 1. Din (10) rezultă

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{c_n}{\mu + c_{n+1}}.$$

Dacă $c_n = c > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), atunci $\alpha(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{c}{\mu + c} < 1$, și punînd $\alpha = \frac{c}{\mu + c} < 1$ se realizează cazul prevăzut de teorema de contracție a lui Banach.

Dacă $\alpha(x_n, x_{n+1}) < 1$, fără ca să existe un număr subunitar și pozitiv, α , astfel, ca pentru orice n să aibă loc relația $\alpha(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha < 1$, contracția se poate denumi slabă, în opoziție cu cazul prevăzut de Banach, care s-ar putea denumi contracție în sens tare.

Observația 2. Dacă privitor la seria introdusă mai sus, cu termenul general $u_n = \prod_{i=1}^n \alpha(x_{i-1}, x_i)$, avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha(x_n, x_{n+1})$, iar șirul $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\}$ are puncte de acumulare în conformitate cu cele tratate în [2] — de exemplu, dacă

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(x_{2p}, x_{2p+1}) = \alpha' \quad \text{și} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(x_{2p+1}, x_{2p+2}) = \alpha'' \neq \alpha',$$

atunci seria $\sum_1^{\infty} u_n$ este convergentă dacă $\alpha' \alpha'' < 1$. Astfel s-ar putea avea $\alpha' < 1$ și $\alpha'' > 1$ (dar $\alpha' \alpha'' < 1$) și seria ar fi convergentă. În acest caz operatorul U efectuează pe baza lui (9) de o infinitate de ori contracție și de o infinitate (numerabilă) de ori dilatare. Sîntem în cazul unei contracții „aproape peste tot” pe un șir, cînd totuși există punct fix.

Observația 3. În cazul existenței unui punct fix, rezultă din (5) prin trecere la limită cînd $m \rightarrow \infty$, inegalitatea $\varphi(x_n, x^*) \leq \varphi(x_0, x_1) \cdot R_{n-1}$, unde $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^k \alpha(x_{i-1}, x_i)$. Atunci, cu ajutorul șirului $\{c_n\}$ din relația (10) și în baza formulei de evaluare a restului unei serii cu termeni pozitivi, dedusă în lucrarea [3], rezultă

$$\varphi(x_n, x^*) \leq \frac{\varphi(x_0, x_1)}{\mu} \left(c_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \alpha(x_{i-1}, x_i) - b \right) \quad (11)$$

unde $b = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \prod_{i=1}^n \alpha(x_{i-1}, x_i)$. Astfel, avem o evaluare a aproximării punctului fix x^* prin x_n .

BIBLIOGRAFIE

1. Natanson, I. P., *Teoriaa funkții veščestvennoi peremennoi*. Gostehizdat Moskva-Leningrad, 1950.
2. Ne y, A., *Extinderea domeniului de aplicabilitate al criteriului de convergență al lui d'Alembert*. „Gaz mat. fiz.” seria A, nr. 12, 1958, pp. 709-712 București.
3. Ne y, A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului. seriilor convergente cu termeni pozitivi*. „Studii și cercet. de matematică”, XII, nr. 2, 1961, p. 315 - 332, Cluj.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОНТРАКЦИИ БАНАХА ДЛЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Резюме)

Пусть оператор U , отображающий полное метрическое пространство E в его самого, и такой, чтобы имело место неравенство

$$\rho(U(x'), U(x'')) \leq \alpha(x', x'') \cdot \rho(x', x'') \quad (I)$$

для любой пары элементов x', x'' из E , где ρ является расстоянием между двумя точками из E , $\alpha(x', x'')$ является положительным числом, соответствующим паре элементов x', x'' , а множество $\{\alpha(x', x'')\}_{x', x'' \in E}$ должно быть ограниченным. Если для множества $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\}_{n=0,1,2,\dots}$ полученного при помощи рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (II)$$

из последовательности x_0, x_1, x_2, \dots имеет место неравенство

$$c_n \frac{1}{\alpha(x_n, x_{n+1})} - c_{n+1} \geq \mu > 0. \quad (III)$$

$\{c_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ будучи рядом положительных чисел и μ будучи также положительным числом, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $x^* \in E$, который является неподвижной точкой отображения U (решение уравнения $x = U(x)$).

Если, в частности, для любой пары элементов x', x'' из E имеет место неравенство $\alpha(x', x'') < 1$ без того, чтобы существовало непременно положительное число α меньше единицы, таким образом, чтобы $\alpha(x', x'') \leq \alpha < 1$, и если одновременно отношение (III) выполняется, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, причем x^* является единственной неподвижной точкой оператора U , единственное решение уравнения $x = U(x)$, независимо от исходного элемента x_0 отношения рекуррентности (II).

Автор даёт и формулу для исчисления погрешности аппроксимации.

UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE CONTRACTION DE BANACH DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

(R é s u m é)

Soit U un opérateur qui transforme l'espace métrique complet, E , en soi-même et pour chaque couple d'éléments x', x'' de E considérons comme valable l'inégalité

$$\rho(U(x'), U(x'')) \leq \alpha(x', x'') \cdot \rho(x', x''), \quad (I)$$

où ρ indique la distance entre deux points de E , $\alpha(x', x'')$ est un nombre positif correspondant au couple x', x'' et soit l'ensemble $\{\alpha(x', x'')\}_{x', x'' \in E}$ borné. Si pour l'ensemble $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\}_{n=0, 1, 2, \dots}$ correspondant à la suite x_0, x_1, x_2, \dots obtenue à l'aide de la relation de récurrence

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{(II)}$$

a lieu l'inégalité

$$c_n \frac{1}{\alpha(x_n, x_{n+1})} - c_{n+1} \geq \mu > 0, \quad \text{(III)}$$

où $\{c_n\}_{n=0, 1, 2, \dots}$ est une suite de nombres positifs et μ de même un nombre positif, alors la suite $\{x_n\}$ aura une limite $x^* \in E$, qui est un point fixe de la transformation U (une solution de l'équation $x = U(x)$).

Si, en particulier, pour chaque couple d'éléments x', x'' de E a lieu l'inégalité $\alpha(x', x'') < 1$, sans qu'il existe nécessairement un nombre positif α plus petit que l'unité tel que l'on ait $\alpha(x', x'') \leq \alpha < 1$ et si en même temps la relation (III) a lieu, alors on aura $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$;

x^* étant le point fixe unique de l'opérateur U , la solution unique de l'équation $x = U(x)$. Ce point fixe est indépendant de l'élément initial x_0 de la relation de récurrence (II).

L'auteur donne aussi une formule d'évaluation de l'approximation.

PROPRIETĂȚI ALE ZEROURILOR SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE NELINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

de

IOAN A. RUS

1. În lucrarea [1] matematicianul italian L. Tonelli a stabilit o teoremă de tip Sturm relativ la ecuația neliniară de ordinul al doilea

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

în anumite condiții asupra funcției F . Rezultate în această direcție au mai obținut printre alții I. Bihari [2], [3], Okley [4], L. M. Kus [5]. De asemenea în [6], în ultima parte, se abordează această problemă. În [7] Butlewski dă câteva criterii de oscilație și neoscilație relativ la o ecuație de forma

$$\frac{d}{dt} (\theta(x, t) \cdot x') + Q(x, t) = 0 \quad (2)$$

Scopul notei de față este de a pune în evidență alte proprietăți ale zerourilor soluțiilor unei ecuații diferențiale neliniare de ordinul al doilea.

2. Treceam acum și stabilim

TEOREMA 1. Dacă ecuația (1) este astfel, încît

1° funcția $F(x, y, y', y'')$ este omogenă în raport cu ansamblul variabilelor y, y', y'' ;

2° dîndu-se $x_0 \in (a, b)$ și y_0' și $y_0'' \in (-\infty, +\infty)$, există o soluție și numai una a ecuației (1) ce satisface condițiile

$$y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0''.$$

atunci, dacă x_1 și x_2 sînt două zerouri consecutive ale derivatei $y_1'(x)$ a unei soluții $y_1(x)$ a ecuației (1), orice altă soluție $y_2(x)$ a cărei derivată $y_2'(x)$ nu se anulează în x_1 și x_2 se bucură de proprietatea că $y_2'(x)$ are un zero și numai în intervalul (x_1, x_2) .

Demonstrație. Să presupunem contrariul și anume că $y_2'(x)$ este diferită de zero în intervalul $[x_1, x_2]$. În baza ipotezelor din teoremă putem presupune că

$$\begin{aligned} y_1'(x) &> 0 \text{ pentru } x \in (x_1, x_2) \\ y_2'(x) &> 0 \text{ pentru } x \in [x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Ținând cont de Lema lui Tonelli [8] rezultă că există un $x_0 \in (x_1, x_2)$ și $\lambda > 0$ astfel încât

$$y_2'(x_0) = \lambda y_1'(x_0), \quad y_2''(x_0) = \lambda y_1''(x_0)$$

Din condiția 2^o rezultă că $y_2(x) \equiv \lambda y_1(x)$ și astfel am ajuns la o contradicție, contradicție care demonstrează teorema.

TEOREMA 2. Dacă ecuația (I) este astfel încât

1^o funcția $F(x, y, y', y'')$ este omogenă în raport cu ansamblul variabilelor y, y', y'' ;

2^o funcția $F(x, y, y', y'')$ satisface unei anumite condiții de unicitate a problemei lui Cauchy;

3^o ecuația

$$F(x, \gamma^2, \gamma, 1) = 0$$

nu are nici o rădăcină reală în intervalul (a, b) pentru orice $\gamma \neq 0$ din intervalul $(-\infty, +\infty)$, atunci, oricare ar fi $y = y(x)$, o soluție a ecuației (I), zerourile lui $y(x)$ și $y'(x)$ se separă în intervalul $[a, b]$.

Demonstrație. Va trebui să arătăm că dacă x_1 și x_2 sînt două zerouri consecutive ale lui $y'(x)$, atunci $y(x)$ se anulează în intervalul (x_1, x_2) . Pentru aceasta să presupunem contrariul și anume că, $y(x) \neq 0$ în intervalul $[x_1, x_2]$. Pe baza Lemii lui Tonelli există un $x_0 \in (x_1, x_2)$ și un λ (pozitiv sau negativ), astfel încît

$$y(x_0) = \lambda y'(x_0), \quad y'(x_0) = \lambda y = y''(x_0) = (x_0)$$

sau

$$y'(x_0) = \frac{1}{\lambda} y(x_0), \quad y''(x_0) = \frac{1}{\lambda^2} y(x_0)$$

și înlocuind în relația

$$F[x_0, y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)] = 0$$

obținem ținînd cont de 1^o și de faptul că $y(x_0) \neq 0$

$$F(x_0, \lambda^2, \lambda, 1) = 0$$

Am ajuns astfel în contradicție cu condiția 3^o, și astfel teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Tonelli, *Un'osservazione su di un teorema di Sturm*. „Bollettino della Unione Matematica Italiana“, 6 (1927), pp. 126—128.
2. I. Bihari, *Ausdehnung der Sturmschen Oscillations- und Vergleichsätze auf die Lösungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. „Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences“, 2 (1957), pp. 159—173.
3. I. Bihari, *Extension of Certain Theorems of the Sturmian Type to Nonlinear Second Order Differential Equations*. „Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences“, 1—2 (1958), pp. 13—20.
4. C. O. Oakley, *Differential Equations Containing Absolute Values of Derivatives*. „American Journal of Mathematics“, LVII, 3 (1930), pp. 659—672.
5. L. M. Kuks, *O nekotoryh svoystvah peşeni nelineinîh uravnenii ellipticeskogo tipa*. „Izvestia vişşih uchebniîh zavedenii matematika“, nr.4 (1958), pp. 136—137.
6. Ioan A. Rus, *Teoreme de tip Sturm*. „Studia Universitatis Babeş—Bolyai“ seria I, fasc. 1 (1961), pp. 133—134.
7. Z. Butlewski, *Sur les intégrales oscillantes et bornées d'une équation différentielle du second ordre*. „Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa“, 9 (1940).
8. Ioan A. Rus, *Proprietăţile rădăcinilor componentelor integralcilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul i* . „Studii şi cercetări matematice“, [Cluj], (1963) (sub tipar).

СВОЙСТВА НУЛЕЙ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Резюме)

Находятся некоторые свойства нулей решений одного дифференциального уравнения второго порядка. Основные результаты содержатся в

Теореме 1. Если уравнение (I) таково, что

1°. Функция $F(x, y, y', y'')$ является однородной по отношению к совокупности переменных y, y', y''

2°. Для $x_0 \in (a, b)$ и $y_0' \text{ и } y_0'' \in (-\infty, +\infty)$, существует одно и лишь одно решение уравнения (I), удовлетворяющее условиям

$$y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0''$$

тогда, если x_1 и x_2 являются двумя последовательными нулями производной $y_1'(x)$ решения $y_1(x)$ уравнения (I), то для любого решения $y_2(x)$ производная которого $y_2'(x)$ не равна нулю в x_1 и x_2 , $y_2'(x)$ имеет один и лишь один нуль в промежутке (x_1, x_2) .

Теорема 2. Если уравнение (I) таково, что

1°. Функция $F(x, y, y', y'')$ является однородной по отношению к совокупности переменных y, y', y''

2°. Функция $F(x, y, y', y'')$ удовлетворяет определенному условию единственности задач Коши

3°. Уравнение $F(x, y^2, y, 1) = 0$

не имеет ни одного действительного корня в интервале (a, b) для любого $\gamma \neq 0$ из $(-\infty, +\infty)$, тогда для любого $y = y(x)$ уравнения (I), нули $y(x)$ и $y'(x)$ отделяются в интервале $[a, b]$.

PROPRIÉTÉS DES ZÉROS DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
NON-LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

(Résumé)

Les résultats obtenus quant à ces propriétés sont contenus dans les théorèmes suivants :

Théorème 1. Si l'équation (1) est telle que :

1°. La fonction $F(x, y, y', y'')$ est homogène par rapport à l'ensemble des variables y, y', y'' ;

2°. Etant donné $x \in (a, b)$ et y' et $y'' \in (-\infty, +\infty)$, il existe une solution de l'équation (1) et une seule qui satisfasse aux conditions

$$y'(x_0) = y', \quad y''(x_0) = y''$$

alors, si x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de la dérivée $y_1'(x)$ d'une solution $y_1(x)$ de l'équation (1), toute autre solution $y_2(x)$ dont la dérivée $y_2'(x)$ ne s'annule pas en x_1 et x_2 , jouit de la propriété que $y_2'(x)$ a un zéro et un seulement dans l'intervalle (x_1, x_2) .

Théorème 2. Si l'équation est telle que :

1°. La fonction $F(x, y, y', y'')$ est homogène par rapport à l'ensemble des variables y, y', y'' ;

2°. La fonction $F(x, y, y', y'')$ satisfait à une certaine condition d'unicité du problème de Cauchy;

3°. L'équation

$$F(x, \gamma^2, \gamma, 1) = 0$$

n'a aucune racine réelle dans l'intervalle (a, b) pour tout $\gamma \neq 0$ de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, alors, quel que soit $y = y(x)$ comme solution de l'équation (1), les zéros de $y(x)$ et $y'(x)$ se séparent dans l'intervalle $[a, b]$

UN ALGORITM PENTRU REZOLVAREA UNUI SISTEM DE INEGALITĂȚI

de

I. MARUȘCIAC

1. În rezolvarea diferitelor probleme de programare liniară, majoritatea metodelor cunoscute pornesc de la o soluție cunoscută a sistemului de inegalități la care sînt supuse variabilele. Este adevărat că în multe probleme concrete de programare liniară, de cele mai multe ori, se cunoaște o astfel de soluție din practică. De asemenea, cînd sistemul de inegalități nu este prea complicat și numărul ecuațiilor nu este prea mare, o astfel de soluție se poate obține și empiric destul de ușor. Dacă însă numărul ecuațiilor este mare, găsirea unei soluții este o problemă destul de dificilă. De aceea sînt necesare anumite metode mai generale cu care să se poată rezolva această problemă și cu actualele mașini electronice de calcul. În acest scop se poate folosi și metoda simplex, luînd ca funcție de minimizat o funcție arbitrară de variabilele respective.

În această notă vom prezenta un algoritm cu care se poate totdeauna determina o astfel de soluție și care constă în aplicarea algoritmului lui S. I. Z h o v i ț k i [3] construit pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară mai generală, cînd se cere de maximizat mai multe funcții liniare de variabile considerate. Acest algoritm se bazează pe metoda gradientului și are o sferă foarte mare de aplicabilitate. Autorul sus amintit a dat algoritme analoge și pentru rezolvarea diferitelor probleme de cea mai bună aproximație [1, 2].

2. Fie deci un sistem de inegalități

$$\Delta_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i \geq 0, \quad (1)$$

care poate fi compatibil sau nu. Problema care se pune este de a stabili dacă sistemul este compatibil sau nu, iar în caz de compatibilitate să se găsească o soluție. Algoritmul pe care-l dăm mai jos va rezolva simultan amîndouă din problemele puse.

3. Să trecem la prezentarea schemei algoritmului.

Se pleacă de la un punct arbitrar $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ din spațiul n dimensional al variabilelor x_1, x_2, \dots, x_n . Înlocuind coordonatele acestui punct în membrii întii ai ecuațiilor (1), putem avea două cazuri: sau toate ecuațiile $\Delta_i(x') > 0$, și atunci x' este punctul căutat, sau unele dintre ele sînt negative. Fie i_1 indicele ecuației pentru care avem

$$\Delta_{i_1}(x') = \min_{(i)} \Delta_i(x') < 0.$$

Putem presupune că avem o singură ecuație pentru care este atins minimul, căci în caz contrar, după cum vom vedea, se reduce numai numărul pașilor în algoritm. De asemenea, renumerotînd eventual ecuațiile, putem presupune că $i_1 = 1$. Astfel avem

$$\Delta_1(x') < \Delta_i(x'), \quad i \neq 1.$$

Din punctul x' ne deplasăm pe direcția normalei la planul $\Delta_1(x) = 0$ spre acesta, pînă ce „distanța” la $\Delta_1(x) = 0$ devine egală cu distanța la încă un plan $\Delta_i(x) = 0$, $i = 1$.¹⁾ Cu alte cuvinte, ne deplasăm de-a lungul vectorului $z' = (\zeta'_1, \dots, \zeta'_n)$, unde

$$\zeta'_k = \frac{a_{1k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_{1k}^2}},$$

unde semnul din fața radicalului se ia în așa fel, încît

$$\frac{d}{dt} \Delta_1(x' + tz') \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \zeta'_k > 0$$

și determină apoi cea mai mică valoare pozitivă a parametrului t pentru care avem

$$\Delta_1(x' + tz') = \Delta_i(x' + tz'), \quad i \neq 1.$$

De unde

$$t_i = \frac{\Delta_i(x') - \Delta_1(x')}{\sum_{k=1}^n (a_{1k} - a_{ik}) \zeta'_k}.$$

Fie

$$t_1 = \min_{(i)} t_i > 0.$$

¹⁾ Înțelegem aici prin „distanță” de la un punct la planul $\Delta_i(x) = 0$ valoarea membrului întii în acest punct.

Putem presupune că t_1 este atins pentru $\Delta_2(x)$, așa încît, notînd $x'' = x' + t_1 z'$, avem

$$\Delta_1(x'') = \Delta_2(x'') < \Delta_i(x''), \quad i \neq 1, 2. \quad (3)$$

Dacă $\Delta_1(x'') \geq 0$, atunci x'' este soluția căutată. Dacă $\Delta_1(x'') < 0$, atunci ne deplasăm din punctul x'' în planul „bisector” al planelor $\Delta_1(x) = 0$ și $\Delta_2(x) = 0$ pe direcția gradientului funcției

$$\Phi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \Delta_1(x'' + tz) + \lambda_1[\Delta_1(x'' + tz) - \Delta_2(x'' + tz)],$$

adică pe direcția vectorului $z'' = (\zeta_1'', \dots, \zeta_n'')$ pentru care

$$\zeta_k'' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_k} = t(a_{1k} + \lambda_1(a_{1k} - a_{2k})), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

unde λ_1 se determină din condiția

$$\sum_{k=1}^n [a_{1k} + \lambda_1(a_{1k} - a_{2k})] (a_{1k} - a_{2k}) = 0,$$

adică

$$\lambda_1 = \frac{\sum a_{1k}(a_{2k} - a_{1k})}{\sum (a_{1k} - a_{2k})^2}$$

iar

$$t = \frac{1}{\pm \sqrt{\sum [a_{1k} + \lambda_1(a_{1k} - a_{2k})]^2}}.$$

Semnul din fața radicalului se ia în așa fel încît

$$\frac{d}{dt} \Delta_1(x'' + tz'')_{t=0} = \sum a_{1k} \zeta_k'' > 0.$$

Pe această direcție ne deplasăm, mărind toate distanțele, pînă ce acestea devin egale cu încă una la un al treilea plan, adică determinăm parametrul t din egalitățile

$$\Delta_1(x'' + tz'') = \Delta_i(x'' + tz''), \quad i \neq 1, 2,$$

adică

$$t_i = \frac{\Delta_i(x'') - \Delta_1(x'')}{\sum (a_{1k} - a_{ik}) \zeta_k''},$$

și determinăm $t_2 = \min t_i > 0$.

Presupunem și acum că t_2 este atins pentru $\Delta_3(x)$. Atunci avem în punctul $x''' = x'' + t_2 z''$ relațiile:

$$\Delta_1(x''') = \Delta_2(x''') = \Delta_3(x''') < \Delta_i(x'''), \quad i \neq 1, 2, 3. \quad (4)$$

Dacă $\Delta_1(x''') \geq 0$, atunci x''' este soluția căutată. Dacă $\Delta_1(x''') < 0$, atunci procedăm ca și în cazul precedent.

Continuînd așa vom ajunge la un punct $x^{(p)}$ ($p < n$) pentru care

$$\Delta_1(x^{(p)}) = \Delta_2(x^{(p)}) = \dots = \Delta_p(x^{(p)}) < \Delta_i(x^{(p)}), \quad i \neq 1, 2, \dots, p. \quad (5)$$

Dacă $\Delta_1(x^{(p)}) \geq 0$, atunci $x^{(p)}$ este soluția căutată. Dacă $\Delta_1(x^{(p)}) < 0$, atunci construim următoarea aproximație ca și pînă acum, deplasîndu-ne pe direcția gradientului funcției

$$\Phi_{p-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \Delta_1(x^{(p)} + tz) + \sum_{j=2}^p \lambda_j [\Delta_1(x^{(p)} + tz) - \Delta_j(x^{(p)} + tz)],$$

adică pe direcția vectorului $z^{(p)} = (\zeta_1^{(p)}, \dots, \zeta_n^{(p)})$, pentru care

$$\frac{\zeta_k^{(p)}}{\zeta_k} = \frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial \zeta_k} = t \left(a_{1k} + \sum_{j=2}^p \lambda_j (a_{1k} - a_{jk}) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

unde parametrii λ_j se determină din condițiile

$$\sum_{k=1}^n \zeta_k^{(p)} \cdot (a_{1k} - a_{jk}) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p. \quad (6)$$

iar

$$t = \frac{t}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left[a_{1k} + \sum_{j=2}^p \lambda_j (a_{1k} - a_{jk}) \right]^2}}.$$

Semnul din fața radicalului se alege astfel încît $\Delta_1(z^{(p)}) + b_1 > 0$.

După ce s-a determinat gradientul $z^{(p)}$, ne deplasăm pe această direcție, majorînd toate distanțele (avînd mereu $\Delta_1(x^{(p)} + tz^{(p)}) = \dots = \Delta_p(x^{(p)} + tz^{(p)})$), pînă ce se ajunge ca aceste distanțe să fie egale cu măcar încă una la un alt plan, adică determinăm parametrul t din egalitățile

$$\Delta_1(x^{(p)} + tz^{(p)}) = \Delta_i(x^{(p)} + tz^{(p)}), \quad i \neq 1, 2, \dots, p.$$

adică

$$t_i = \frac{\Delta_i(x^{(p)}) - \Delta_1(x^{(p)})}{\sum_{k=1}^n (a_{1k} - a_{ik})}, \quad i \neq 1, 2, \dots, p$$

și fie $t_p = \min t_i > 0$. Presupunînd că t_p este atins pentru $\Delta_{p+1}(x)$, următoarea aproximație va fi atunci $x^{(p+1)} = x^{(p)} + t_p z^{(p)}$.

Continuînd așa, vom ajunge fie la o soluție, fie la un punct staționar $x^{(q)}$ ($q \geq n$), adică la un punct în care avem

$$\Delta_1(x^{(q)}) = \dots = \Delta_q(x^{(q)}) < \Delta_i(x^{(q)}), \quad i \neq 1, 2, \dots, q, \quad \Delta_1(x^{(q)}) < 0 \quad (7)$$

și nu există nici o direcție în care să ne putem deplasa, măbind toate distanțele cu păstrarea egalității din membrul întâi din (7).

Analitic, aceasta înseamnă că sistemul (6), care determină vectorul gradient, nu are soluție diferită de cea banală $\zeta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Să considerăm sistemul

$$\Delta_1(x) = 0, \quad \Delta_2(x) = 0, \quad \dots, \quad \Delta_q(x) = 0. \quad (8)$$

Fie r_0 rangul matricei coeficienților sistemului (8). Aceasta înseamnă că există r_0 plane care au în comun o varietate $n-r_0$ dimensională. Ducem prin punctul $x^{(q)}$ un plan r_0 dimensional, perpendicular pe planul $n-r_0$ dimensional de intersecție. Punctul de intersecție îl vom numi vîrf. Dacă $r_0 = n$, atunci vîrfurile corespunzător se obține prin intersecția planelor din (8) ai căror matricea coeficienților ecuațiilor este egală cu n . În cazul $r_0 < n$, dacă există mai multe matrici de rangul r_0 , atunci este evident că toate planele de intersecție $n-r_0$ dimensionale corespunzătoare vor fi paralele între ele, căci în caz contrar ar rezulta că rangul este mai mare decît r_0 . În concluzie, aceste vîrfuri se obțin fie rezolvînd sistemul format din cîte n ecuații din (8) cu determinant diferit de zero (dacă $r_0 = n$), fie prin intersecție a cîte r_0 plane din (8) cu planul perpendicular pe muchia comună $n-r_0$ dimensională, dus din punctul $x^{(q)}$, adică rezolvînd sistemul format din cîte r_0 ecuații din (8) și $n-r_0$ ecuații ale planelor perpendiculare pe muchia comună a primelor r_0 plane.

Fiecărui vîrf îi atașăm, după S. I. Zuhovicki [3], un număr *caracteristic* $k = k_1 + k_2$, unde k_1 este numărul planelor ce trec prin vîrfurile ζ , iar k_2 este numărul planelor din (8) pentru care $\Delta_i(\zeta) > 0$.

Dacă $k < q$ pentru fiecare vîrf, atunci sistemul de inegalități este incompatibil.

În acest caz, punctul $x^{(q)}$ se găsește în interiorul unei prisme (în particular cînd $r_0 = n$, în interiorul unui simplex) mărginită de planele (8) și nu există nici o direcție pe care toate distanțele la planele (8) să crească.

Dacă există un vîrf ξ cu caracteristica $k = q$, atunci din punctul $x^{(q)}$ ne deplasăm de-a lungul segmentului $x^{(q)}\xi$ pînă ce dăm de un alt punct staționar. În timpul deplasării, toate distanțele la planele (8) cresc, rămînînd egale între ele numai cele la planele ce trec prin vîrfurile ξ , restul crescînd mai repede.

Continuînd astfel procesul, vom ajunge, după un număr finit de pași, fie la soluția căutăată, fie la un punct staționar pentru care caracteristicile vîrfurilor corespunzătoare vor fi mai mici decît numărul planelor, deci sistemul format din aceste plane este incompatibil, prin urmare și cel inițial.

Pentru ilustrarea metodei dăm următorul

EXEMPLU : Fie dat sistemul de inegalități

$$\begin{array}{ll} \Delta_1(x) = 3x_1 + x_2 - 3 \geq 0 & \Delta_5(x) = -4x_1 - 3x_2 + 12 \geq 0 \\ \Delta_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \geq 0 & \Delta_6(x) = -x_1 + 2 \geq 0 \\ \Delta_3(x) = x_2 - 1 \geq 0 & \Delta_7(x) = x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ \Delta_4(x) = x_1 \geq 0 & \end{array}$$

Pornim din origine, adică $x' = 0$ (0,0). Se observă că $\Delta_1(0,0) = -3$ este valoarea cea mai mică. Prin urmare ne deplasăm spre planul $\Delta_1(x) = 0$ pe direcția perpendicularei, adică pe direcția vectorului $z' = (3,1)$. Calculând valorile lui t_i după formula dată în pag. 3, găsim că cea mai mică valoare a parametrului este atinsă pentru planul $\Delta_2(x) = 0$, și este egală cu $\frac{1}{6}$, adică $t_2 = \frac{1}{6}$. Deci

$$x'' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right).$$

Calculând gradientul corespunzător, avem $z'' = (0,1)$, iar $t_3 = \frac{4}{3}$ și este atins pentru planul $\Delta_7(x) = 0$. Prin urmare a doua aproximație este

$$x''' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

În acest punct avem

$$\Delta_1(x''') = \Delta_2(x''') = \Delta_3(x''') = 0,$$

$$\Delta_4(x''') = \Delta_5(x''') = \frac{1}{2}, \quad \Delta_6(x''') = \frac{11}{2}, \quad \Delta_7(x''') = \frac{3}{2}.$$

De aici se vede că x''' este o soluție, și procesul s-a încheiat.

Observație. Pentru ușurarea calculului se poate lua în loc de versorul gradient un vector paralel în așa fel, încît componentele să fie numere întregi, așa cum am procedat și în cazul exemplului de mai sus. De asemenea și punctul de pornire, de cele mai multe ori, se poate alege în așa fel, încît numărul ecuațiilor cu membrul întîi negativ să fie mic, căci atunci se reduce numărul pașilor în algoritm.

BIBLIOGRAFIE

1. S. I. Zuhovițki, *Algorifm dlia vidșukania tociki, șcio naimenșe vîdheliatetsia (v rozumini P. L. Cebîșeva) vid danoi sistemî m tocek*. DAN URSR, 6, 1951, p. 404.
2. S. I. Zuhovițki, *Algorifm dlia reșenia cebîșevskoi zadaci približenia v sluciaie konecnoi sistemî nesovmestnih lineinîh uravnenii*. DAN, 79, nr. 4, 1951, p. 561.
3. S. I. Zuhovițki, *Algorifm dlia reșenia adnoi obobščionnoi zadaci lineinovo programmirovania*. DAN, 1960, 133, nr. 1, p. 20.

АЛГОРИФМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

(Резюме)

Приводится конечный алгоритм при помощи которого можно всегда определять, по конечному числу шагов, решение любой системы линейных неравенств. Этот алгоритм одновременно позволяет определить совместность или несовместность системы неравенств, к которой он применяется.

Алгоритм основан на удобном приспособлении метода градиента.

В заключение, для иллюстрирования метода дается один пример.

UN ALGORITHME POUR LA RÉOLUTION D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS

(R é s u m é)

On présente un algorithme fini à l'aide duquel on peut toujours déterminer, après un nombre fini de pas, une solution de tout système d'inégalités linéaires. Cet algorithme permet également de reconnaître la compatibilité ou l'incompatibilité du système d'inégalités auquel il s'applique.

L'algorithme se fonde sur une variante de la méthode du gradient, convenablement adaptée.

On donne enfin un exemple illustrant la méthode.

ASUPRA UNEI FORMULE DE CUADRATURĂ

de
PARASCHIVA PAVEL

1. Prof. D. V. Ionescu a arătat [1] că punînd restul în formulele de cuadratură cu noduri exterioare sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_m} \varphi(x) f^{(n+m)}(x) dx$$

și dînd o evaluare a lui sub forma

$$|R| < KM_{m+n}$$

numărul K este în general mai mare, decît în formulele de cuadratură cu noduri interioare și a dat exemple în care a pus în evidență aceasta.

Se pune problema de a se vedea ce se întîmplă cu restul formulelor de cuadratură cînd la nodurile exterioare se adaugă noduri interioare.

În această lucrare vom studia formule de cuadratură relative la intervalul $[a, b]$ cu noduri exterioare la dreapta lui b , în progresie aritmetică, cu reșia $h = \frac{b-a}{2}$, la care se adaugă nodurile a și b și nodul interior $\frac{a+b}{2}$, adică vom studia formule de forma

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) + R$$

x_0, x_1, \dots, x_n fiind noduri echidistante, unde $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$

2. Pentru determinarea formulei (1), întrebuițăm metoda folosită în lucrarea [2] atașînd fiecărui interval $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ cîte o funcție $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ care satisface la ecuațiile

$$\varphi_1^{(n+1)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(n+1)}(x) = 1, \quad \varphi_k^{(n+1)}(x) = 0 \quad (k = 3, 4, \dots, n) \quad (2)$$

Scriind

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} \varphi_1^{(n+1)}(x) f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(n+1)}(x) f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n^{(n+1)}(x) f(x) dx$$

și aplicînd fiecărei integrale formula de integrare prin părți generalizată, și introducînd apoi condițiile la limită

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= 0 & \varphi_1'(x_0) &= 0 & \dots & \varphi_1^{(n-1)}(x_0) &= 0 \\ \varphi_1(x_1) &= \varphi_2(x_1) & \varphi_1'(x_1) &= \varphi_2'(x_1) & \dots & \varphi_1^{(n-1)}(x_1) &= \varphi_2^{(n-1)}(x_1) \\ \varphi_2(x_2) &= \varphi_3(x_2) & \varphi_2'(x_2) &= \varphi_3'(x_2) & \dots & \varphi_2^{(n-1)}(x_2) &= \varphi_3^{(n-1)}(x_2) \\ & \dots & & & & & \\ \varphi_{n-1}(x_{n-1}) &= \varphi_n(x_{n-1}) & \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) &= \varphi_n'(x_{n-1}) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_{n-1}) &= \varphi_n^{(n-1)}(x_{n-1}) \\ \varphi_n(x_n) &= 0 & \varphi_n'(x_n) &= 0 & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

formula (1) devine

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= -\varphi_1^{(n)}(x_0)f(x_0) + \sum_1^{n-1} [\varphi_i^{(n)}(x_i) - \varphi_{i+1}^{(n)}(x_i)]f(x_i) + \varphi_n^{(n)}(x_n)f(x_n) + \\ &+ (-1)^{n+1} \int_a^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

adică avem o formulă de cuadratură de forma (1) unde

$$\begin{aligned} A_0 &= -\varphi_1^{(n)}(x_0) \\ A_i &= \varphi_i^{(n)}(x_i) - \varphi_{i+1}^{(n)}(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ A_n &= \varphi_n^{(n)}(x_n) \end{aligned} \quad (5)$$

Determinarea formulei de tipul (1) s-a redus astfel la integrarea ecuațiilor diferențiale (2) cu condițiile la limită (3).

3. Din ecuațiile diferențiale (2) și condițiile la limită (3) din nodurile x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , deducem că

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \lambda_0 \frac{(x-a)^n}{n!} \\ \varphi_2 &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \lambda_0 \frac{(x-a)^n}{n!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^n}{n!} \\ \varphi_k &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(x-x_2)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \frac{(x-x_{i-1})^k}{n!} \quad (k = 3, 4, \dots, n). \end{aligned} \quad (6)$$

unde $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sînt constante oarecare.

4. Dacă în formula de cuadratură (1) înlocuim funcția $f(x)$ cu funcțiile

$$f_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{n!} \quad (11)$$

se obțin în acest mod coeficienții A_i . Efectuînd substituția

$$x = x_0 + uh$$

obținem expresia coeficienților A_i

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h \int_0^1 u(u-1) \dots (u-i+2)(u-i-1) \dots (u-n-1) \quad (12)$$

$$2u^2 + u(2-2i-n) + ni - n - i] du$$

pentru $i = 1, 2, \dots, n-1$.

În mod analog se obține

$$A_0 = \frac{(-1)^n}{n!} h \int_0^1 (u-1) \dots (u-n+1)(2u-n) du \quad (13)$$

și se constată că $A_0 > 0$, presupunînd $n \geq 3$

La fel se obține

$$A_n = \frac{h}{n!} \int_0^1 u(u-1) \dots (u-n+2)(2u-n+2) du \quad (14)$$

și se constată că A_n are semnul lui $(-1)^{n-1}$ pentru $n \geq 4$

5. Graficul funcției $\varphi_1(x)$ este dat în figura 1.

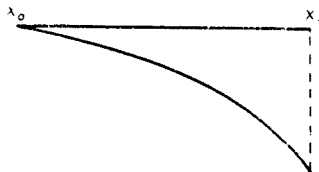


Fig. 1.

Într-adevăr avem

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_0 \frac{(x-a)^n}{n!}$$

și vrem întâi să demonstrăm că coeficienții A_i din formula de cuadratură (1) se bucură de următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}A_n &> 0 \\ (-1)^i(A_i + A_{i-1}) &> 0 \quad n \leq 2i \\ (-1)^{i-1}(A_i + A_{i-1}) &> 0 \quad n > 2i + 1 (i = 4, 5, \dots, n) \end{aligned} \quad (17)$$

În general avem, ținând seama de formula (13)

$$\begin{aligned} A_i + A_{i-1} &= \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i+1)!} \int_0^1 u(u-1)\dots(u-i+3)(u-i-1)\dots(u-n+1) \\ &\{2u^3(n-2i+1) + u^2[-n^2 + n(5-2i) + 8i^2 - 14i + 6] + u \cdot n^2(2i-3) + \\ &+ n(1-2i^2) - 4i^3 + 14i^2 - 12i + 4\} + [n^2(-i^2 + 3i - 2) + n(2i^3 - \\ &- 5i^2 + 3i - 2) - 2i^3 + 4i^2 - 2i] \} du \end{aligned} \quad (18)$$

Să observăm că produsul din fața parantezei mari de sub semnul integrală are semnul lui $(-1)^n$. Rămîne să cercetăm semnul polinomului din paranteza mare, pe care-l notăm cu $\Delta_i(u)$ și care se poate pune sub forma

$$\Delta_i(u) = 2A_i u^3 + B_i u^2 + C_i u + D_i \quad \text{pentru } u \in (0,1), \text{ unde} \quad (19)$$

$$A_i = n - 2i + 1$$

$$B_i = -n^2 + (5 - 2i)n + 8i^2 - 14i + 6 \quad (20)$$

$$C_i = (2i - 3)n^2 + (i - 2i^2)n + (-4i^3 + 14i^2 - 12i + 4)$$

$$D_i = (-i^2 + 3i - 2)n^2 + (2i^3 - 5i^2 + 3i - 2) + n(-2i^3 + 4i^2 - 2i)$$

Pentru aceasta vom considera derivatele succesive ale lui $\Delta_i(u)$

$$\Delta_i'(u) = 6A_i u^2 + 2B_i u + C_i$$

$$\Delta_i''(u) = 12A_i u + 2B_i$$

$$\Delta_i'''(u) = 12A_i$$

1°. Semnul lui $\Delta_i'''(u)$. Dacă $n > 2i - 1$, $\Delta_i'''(u) > 0$, iar dacă $n < 2i - 1$, $\Delta_i'''(u) < 0$. Cînd $n = 2i - 1$, $\Delta_i(u)$ se reduce la un polinom de gradul al doilea. Acest caz se va examina aparte.

2. Semnul lui $\Delta_i''(u)$. Dacă $n > 2i - 1$, Δ_i'' crește de la $2B_i$ la $2(A_i + B_i)$.
Avem

$$B_i(n) = -n^2 + (5 - 2i)n + (8i - 6)(i - 1) \quad \text{iar}$$

$$B_i(n) + 6A_i(n) = -n^2 + (11 - 2i)n + 8i^2 - 26i + 12$$

Trinomul $B_i(n)$ are două rădăcini reale, una este negativă iar alta pozitivă. Deoarece $B_i(2i-1) > 0$, și $B_i(2i) < 0$ rezultă că $B_i(n) + 6A_i(n)$ este un trinom de gradul al doilea cu o rădăcină negativă și alta pozitivă.

$$\begin{aligned} \text{Avem} \quad & B_i(2i-1) + 6A_i(2i-1) > 0 \\ & B_i(2i) + 6A_i(2i) < 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă că $B_i(n) + 6A_i(n) < 0$ pentru $n > 2i-1$

Prin urmare $\Delta_i''(u) < 0$, pe intervalul $[0, 1]$ pentru $n > 2i-1$.

Dacă $n < 2i-1$, trinoamele $B_i(n)$, $B_i(n) + 6A_i(n)$ sînt pozitive pentru $3 < n < 2i-1$

Deci $\Delta_i''(u) > 0$ pe intervalul $[0, 1]$ pentru $n < 2i-1$

3°. Semnul lui $\Delta_i'(u)$. Pentru $u = 0$ avem $\Delta_i'(0) = C_i$, iar pentru $u = 1$ avem $\Delta_i'(1) = 6A_i + 2B_i + C_i$

Să examinăm semnele polinoamelor de gradul al doilea în n , $C_i(n)$ și $6A_i(n) + 2B_i(n) + C_i(n)$ Avem

$$C_i(n) = (2i-3)n^2 + (1-2i^2)n + (-4i^3 + 14i^2 - 12i + 4)$$

Polinomul $C_i(n)$ are rădăcini reale și de semne contrare pentru $i > 3$ iar coeficientul lui n^2 este pozitiv.

Deoarece $C_i(2i) = 2(i^2 - 5i + 2) > 0$ pentru $i > 4$, rezultă că $C_i(n) > 0$ pentru $n > 2i-1$ și $i > 4$. Pentru $n = 2i-1$ avem $C_i(2i-1) = -4i(i-1) < 0$

Deci $C_i(n) < 0$ pentru $n < 2i-1$.

$$\begin{aligned} \text{Avem } P_i(n) = 6A_i(n) + 2B_i(n) + C_i(n) = (2i-5)n^2 + (-2i^2 - 4i + \\ + 17)n + (-4i^3 + 30i^2 - 52i + 22) \end{aligned}$$

Pentru $n = 2i+1$, avem $P_i(2i+1) = 8i^2 - 40i + 34 > 0$ pentru $i \geq 4$.

Prin urmare $P_i(n) > 0$ pentru $n \geq 2i+1$. De asemenea pentru $n = 2i-1$, avem $P_i(2i-1) = -4i(i-2) < 0$ și deci $P_i(n) < 0$ pentru $n < 2i-1$.

Din aceste calcule se trag următoarele concluzii:

a) Deoarece pentru $n \geq 2i+1$

$$\begin{aligned} \Delta_i''(u) < 0 \text{ pe intervalul } [0, 1] \text{ iar} \\ \Delta_i'(0) = C_i(n) > 0 \text{ și } \Delta_i'(1) = P_i(n) > 0 \end{aligned}$$

deducem că $\Delta_i'(u) > 0$ pentru $n \geq 2i+1$

b) Deoarece pentru $n < 2i-1$, avem

$$\begin{aligned} \Delta_i''(u) > 0 \text{ pe intervalul } [0, 1] \text{ și} \\ \Delta_i'(0) = C_i(n) < 0 \quad \Delta_i'(1) = P_i(n) < 0 \end{aligned}$$

deducem că $\Delta_i'(u) < 0$ pentru $n < 2i-1$

4°. *Semnul lui $\Delta_i(u)$.* a) Pentru $n \geq 2i - 1$ s-a văzut mai sus că $\Delta_i(u) > 0$ în intervalul $[0, 1]$

Deci $\Delta_i(u)$ crește în intervalul $[0, 1]$ de la $D_i(n)$ la $Q_i(n) = 2A_i(n) + B_i(n) + C_i(n) + D_i(n)$

$$\text{Avem } D_i(n) = -(i-1)(i-2)n^2 + (i-2)(2i^2 - i - 1)n - 2i(i-1)^2$$

Discriminantul acestui trinom este

$$\delta(i) = \{(i-2)(2i^2 - i + 1)^2 - 8i(i-1)^2(i-2)\} = (i-2)(4i^5 - 20i^4 + 37i^3 - 36i^2 + 13i - 2) \text{ și se constată că pentru } i \geq 3 \text{ avem } \delta(i) > 0$$

Trinomul $D_i(n)$ are deci rădăcini reale și pozitive.

Deoarece $D_i(2i-2) = 4(i-1)(i^2 - 3i + 1) > 0$ pentru $i \geq 3$, iar

$$D_i(2i+1) = -2[(i-4)i^2 + 2(2i+1)] < 0 \text{ pentru } i \geq 3$$

ducem că

$$D_i(n) < 0 \text{ pentru } n \geq 2i + 1$$

Pe de altă parte avem $Q_i(n) = -(i-2)(i-3)n^2 + (i-3)(2i^2 - i - 2)n - (i-1)(6i^2 - 20i - 12)$ se constată că $Q_i(2i+1) = -2[i^2(i-8) + 19i + 6]$ și avem $Q_i(2i+1) < 0$ pentru $i \geq 3$ și că $Q_i(2i-2) = 2(i-1)(i-4)(2i-3) \geq 0$ pentru $i \geq 4$

Deci $\Delta_i(u) < 0$ pe intervalul $[0, 1]$ pentru $n \geq 2i + 1$

b) Pentru $n \leq 2i - 2$ s-a văzut la punctul 3, b că $\Delta_i(u) < 0$ pe intervalul $[0, 1]$ deci $\Delta_i(u)$ descreește de la $D_i(n)$ la $Q_i(n)$.

$D_i(n)$ este un trinom cu rădăcini pozitive cuprinse prima între 1 și 2 și a doua între $2i - 2$ și $2i + 1$. Deducem că pentru $n \leq 2i - 2$, $D_i(n)$ este pozitiv.

De asemenea $Q_i(n)$ este un trinom cu rădăcini pozitive cuprinse prima între 3 și 4, iar a doua între $2i - 2$ și $2i + 1$. Deci $Q_i(n) > 0$ pentru $3 < n \leq 2i - 2$

Rezultă că $\Delta_i(u) > 0$ când $3 < n \leq 2i - 2$ și u cuprins între 0 și 1.

5°. *Cazul $n = 2i - 1$.* În acest caz polinomul $\Delta_i(u)$ este $\Delta_i(u) = 2i[u^2 - 2(i-1)u + i^2 - 3i + 1]$

Deoarece $\Delta_i'(u)$ este pozitiv, polinomul $\Delta_i(u)$ va crește de la $\Delta_i(0) = 4i(1-i) < 0$ la $\Delta_i(1) = 4i(2-i) < 0$ Deci $\Delta_i(u)$ este negativ pentru $u \in [0, 1]$, $i \geq 3$, ceea ce înseamnă că polinomul $\Delta_i(u)$ descreește pentru $u \in [0, 1]$ de la $2i(i^2 - 3i + 1)$ la $2i(i-4)(i-1)$, adică $\Delta_i(u)$ este pozitiv pe intervalul $[0, 1]$ pentru $i \geq 4$ și $n = 2i - 1$

6°. *Cazul $n = 2i$.* În acest caz polinomul $\Delta_i(u)$ este $\Delta_i(u) = 2(u+1)[u^2 - 2(i-1)u + i^2 - 3i]$ Polinomul $\Gamma(u) = u^2 - 2(i-1)u + i^2 - 3i > 0$ pentru $u \in (0, 1)$ deoarece $\Gamma'(u)$ este pozitiv pentru orice u , ceea ce înseamnă că $\Gamma(u)$ va crește de la $2(1-i)$ la $(2-i)$ deci este negativ pentru $u \in (0, 1)$. Polinomul $\Gamma(u)$ descreește de la $i(i-3)$ la $i^2 - 5i + 3$ Deci pentru $u \in (0, 1)$ și $i = 5, 6, \dots$ polinomul $\Delta_i(u)$ este pozitiv.

7'. Cazul $n = 2i$, $i = 4$. În acest caz din formula (18) avem

$$A_4 + A_3 = \frac{2h}{1!5!} \int_0^1 u(u-1)(u-5)(u-6)(u-7)(u^3 - 5u^2 - 2u + 4) du = \\ = \frac{2h}{1!5!} \left[50 + \frac{122}{315} \right] > 0$$

În concluzie se poate spune că *polinomul* (19) $\Delta_i(u)$ este negativ pentru $n \geq 2i + 1$, $i > 3$ și este pozitiv pentru $n \leq 2i$ și $i > 3$. Iar sumele (18) se bucură de proprietățile

$$\begin{aligned} (-1)^i (A_i - A_{i-1}) &> 0 \text{ pentru } n \leq 2i \text{ și } i = 4, 5, 6, \dots \\ (-1)^{i-1} (A_i + A_{i-1}) &> 0 \text{ pentru } n \geq 2i + 1 \text{ și } i = 4, 5, 6, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

7. Vom demonstra în cele ce urmează formulele

$$2h - (A_0 + A_1 + A_2) \geq 0 \quad (21)$$

$$2h - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \leq 0 \text{ adevărate pentru orice } n. \quad (22)$$

Folosind formula (13) găsim suma

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{h}{2!n!} I_n$$

$$\text{unde } I_n = \int_0^1 (3-u)(4-u) \dots (n-1-u) [u^3(-2n^2 + 6n - 4) + u^2(n^3 - \\ - n^2 - 8n + 12) + u(-n^3 + 7n^2 - 10n - 8) + 8n] du$$

Demonstrarea inegalității (21) revine la a demonstra că $I_n < 4n!$, inegalitate ce se demonstrează cu metoda inducției complete, și care este adevărată pentru $n = 5$.

În mod analog se demonstrează și (22)

$$\text{Se găsește suma } A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{h}{2!n!} J_n, \text{ unde}$$

$$J_n = \int_0^1 (4-u)(5-u) \dots (n-1-u) \cdot u^4(-2n^3 + 12n^2 - 22n + 12) + u^3(n^4 - \\ - 31n^2 + 90n - 72) + u^2(-3n^4 + 20n^3 - 33n^2 + 44n + 132) + u(2n^4 - \\ - 18n^3 + 76n^2 - 120n - 72) + 72n] du$$

Ca și mai sus se demonstrează că $J_n \geq 12n!$ (adevărată pentru $n = 5$)

Folosindu-ne de expresiile (16) care ne dau derivatele de ordinul n ale funcțiilor $\varphi_k(x)$, $k = 3, \dots, n$ și de relațiile (17), (21), (22) deducem că $\varphi_k^{(n)}(x) \neq 0$ pentru $k = 3, 4, \dots, n-1$, deci polinoamele $\varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$ sînt polinoame de gradul n .

8. Funcția $\varphi(x)$ este negativă în intervalul (x_0, x_n) .

Vom arăta în cele ce urmează că funcția $y = \varphi(x)$ definită pe intervalul (x_0, x_n) , are un singur extremum în intervalul (x_0, x_n) , adică un minim.

Într-adevăr să presupunem că funcția $y = \varphi(x)$ ar avea două extreme adică derivata s-ar anula în două puncte ξ_1, ξ_2 din intervalul (x_0, x_n) .

Ținând seama de condițiile la limită (3), se deduce aplicînd succesiv teorema lui Rolle, că derivata $\varphi^{(n-1)}(x)$, s-ar anula în n puncte distincte $\tau_{11}, \tau_{12}, \dots, \tau_{1n}$ din intervalul (x_0, x_n) pe care le vom presupune așezate în ordine crescătoare.

Punctul τ_{1n} nu poate aparține intervalului $[x_{n-1}, x_n)$ deoarece s-a arătat că $\varphi_n(x)$ este un polinom de gradul n . Punctul τ_{1n} poate fi situat în $[x_{n-2}, x_{n-1})$ dar atunci nu mai are loc τ_{1n-1} , deoarece dacă în intervalul $[x_{n-2}, x_{n-1})$ s-ar găsi și τ_{1n} și τ_{1n-1} , atunci aplicînd teorema lui Rolle urmează că derivata $\varphi^{(n)}(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul (τ_{1n-1}, τ_{1n}) ceea ce este imposibil deoarece s-a arătat la punctul (6) că $\varphi_{n-1}(x)$ este un polinom de gradul n efectiv.

În mod analog se arată că în fiecare din intervalele $(x_{n-3}, x_{n-2}), \dots, (x_2, x_3)$ se găsește câte un punct τ_i . În felul acesta rămîn punctele $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$ care vor trebui să se găsească în intervalele (x_0, x_1) și (x_1, x_2) .

În intervalul (x_0, x_1) nu se poate găsi nici-un punct τ_i , conform celor arătate la punctul 5.

Urmează că punctele $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$ vor trebui să se găsească în intervalul (x_1, x_2) . Aceasta însă nu este posibil, deoarece atunci ar însemna că $\varphi_2^{(n+1)}(x)$ are un zero cuprins în intervalul (τ_{11}, τ_{13}) , ceea ce este imposibil deoarece prin ipoteză $\varphi_2^{(n+1)}(x) = 1$.

Înseamnă că unul din punctele τ_i nu au loc, adică cu aceasta am demonstrat că funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul (x_0, x_n) și ținînd seama de rezultatele de la punctul 5, rezultă că acesta este un minim.

Graficul funcției $y = \varphi(x)$ va fi cel din figura 3.



Fig. 3.

9. Restul în formula de cuadratură (4) este dat de expresia

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_a^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx \quad (23)$$

unde se știe că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (x_0, x_n) iar $f(x) \in C_{n+1}$

$$\text{Avem } R_n = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^{x_n} \varphi(x) dx \text{ unde } \xi \in (x_0, x_n) \quad (24)$$

Integrala din formula (24) se calculează din formula de cuadratură (4) înlocuind pe $f(x)$ prin

$$f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)}{(n+1)!} \quad (25)$$

$$\text{Vom avea } \int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n) + (-1)^{n+1} \int_a^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx$$

$$\text{Adică } R_n = f^{(n+1)}(\xi) K_n \quad (26)$$

unde prin K_n s-a notat numărul

$$K_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0) \dots (x-x_n) dx$$

care depinde numai de nodurile x_0, x_1, \dots, x_n

Notînd prin M_{n+1} marginea superioară a lui $|f^{(n+1)}(x)|$ în intervalul (x_0, x_n) vom avea pentru rest evaluarea

$$|R_n| \leq K_n M_{n+1} \quad (27)$$

Cîteva cazuri particulare.

Pentru $n = 3$ avem formula

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \int_a^{x_3} \varphi(x) f^{IV}(x) dx \quad (28)$$

$$\text{cu restul } |R_3| \leq \frac{h^5}{90} M_4$$

Pentru $n = 4$, formula este

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{90} [29f(a) + 124f(x_1) + 24f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)] - \int_a^{x_4} \varphi(x) f^{V}(x) dx \quad (29)$$

$$\text{cu restul } |R_4| \leq \frac{h^6}{90} M_5$$

În cazul $n = 5$, formula este

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{90} [28f(a) + 129f(x_1) + 14f(x_2) + 14f(x_3) - 6f(x_4) + f(x_5)] + \int_a^{x_5} \varphi(x) f^{(6)} dx \quad (30)$$

cu restul $R_5 \leq \frac{37h^7}{3780} M_6$.

În cazul $n = 6$ formula este

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{105} \left[\frac{1139}{36} f(a) + \frac{470}{3} f(x_1) + \frac{11}{12} f(x_2) + \frac{332}{9} f(x_3) - \frac{269}{12} f(x_4) + \frac{22}{3} f(x_5) - \frac{37}{36} f(x_6) \right] - \int_a^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (31)$$

cu restul $|R_6| \leq \frac{8}{915} h^8 M_7$.

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*. „Studii și cercetări de matematică Cluj”, 1958 (1-4).
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Editura tehnică, 1957.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ КВАДРАТУРЫ

(Резюме)

В работе даны формулы квадратуры относительно интервала $[a, b]$ со внешними узлами, направо от b , в арифметической прогрессии, с разностью $h = \frac{b-a}{2}$, к которой прибавляются узлы a и b и внутренний узел $\frac{a+b}{2}$, вида

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) + R \quad (1)$$

причём x_0, x_1, \dots, x_n являются эквидистантными узлами $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$.

Формулы определяются методом, использованным в [2].

Дается также остаток формулы (1), который ставится в виде (26).

В последней части работы дано несколько частных случаев квадратурных формул типа (1) и исчисляется их остаток.

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE

(R é s u m é)

On donne dans le présent travail des formules de quadrature relatives à l'intervalle $[a, b]$ avec des noeuds extérieurs, à droite de b , en progression arithmétique de raison $h = \frac{b-a}{2}$ à laquelle on ajoute les noeuds a et b et le noeud intérieur $\frac{a+b}{2}$, de la forme

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) + R \quad (1)$$

x_0, x_1, \dots, x_n étant des noeuds équidistants $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$.

On détermine les formules par la méthode utilisée pour [2].

On donne également le reste de la formule (1), qui se met sous la forme (26).

Dans la partie finale du travail on donne quelques cas particuliers de formules de quadrature du type (1) et l'on en évalue le reste.

CEFEIDA SCURT PERIODICĂ TU COMAE BERENICES

de
VASILE URECHE

Steaua TU Comae Berenices este o cefeidă scurt periodică. Variabilitatea luminozității acestei stele a fost pusă în evidență de Malmquist [4].

Grönstrand [2,3] a întreprins prima cercetare asupra ei. El a obținut 68 de observații fotografice pe baza cărora a dedus momentele a patru maxime cu observații pe ambele ramuri ale curbei de lumină și a șapte maxime cu observații pe o singură ramură, precum și următoarele elemente ale variației de lumină

$$\text{Max. hel.} = D. J. 2428954,450 + 0;46086E. \quad (1)$$

Grönstrand a stabilit că steaua TU Comae Berenices aparține clasei cefeidelor scurt periodice de tipul RR Lyrae, gășind o variație a luminozității ei între 12,9 și 14,6 magnitudini fotografice.

Este de remarcant faptul că la determinarea elementelor variației de lumină, Grönstrand n-a luat în considerare observațiile de la data iuliană 2428965, cînd maximul s-a produs cu o întîrziere de 0;07 (neputînd explica această abatere, consideră observațiile respective „anormale”) și nici alte trei maxime obținute de el: două din anul 1928 și unul din anul 1936, justificînd aceasta prin faptul că lungimea perioadei, forma curbei de lumină și amplitudinea ei suferă, la variabilele RR Lyrae, variații în timp, de obicei oscilatorii, cunoscute sub numele de efect Blajko.

Observațiile care stau la baza elementelor (1), efectuate în anul 1938 se extind pe numai 123 de perioade. Materialul observațional, redus cantitativ și extins pe un interval mic de timp, de care a dispus Grönstrand, nu i-a permis punerea în evidență a efectului Blajko, dar a arătat că întîrzierea cu 0;07 a maximului de la data iuliană 2428965 poate servi ca o ipoteză de lucru pentru inițierea unor serii mai lungi de observații asupra variabilei.

De la lucrarea citată a lui Grönstrand nu se mai cunosc alte cercetări asupra cefeidei TU Comae Berenices.

Cefeida TU Comae Berenices a fost introdusă în programul de observații al Observatorului astronomic din Cluj pe baza planului de cola-

borare cu Observatorul astronomic din Odesa. Astfel între 26 mai 1959 și 17 iunie 1963 s-au efectuat 349 expuneri de 4 minute și 10 minute, cu ajutorul telescopului Newton ($F = 250$ cm, $D = 50$ cm) pe plăci Isopan ISS nesensibilizate, fără filtru (10 expuneri s-au efectuat pe plăci Astro Panchromatisch). Observațiile au fost efectuate de colectivul Observatorului și anume: Botez 54%, Popa 20%, Ureche 21%, alții 5%.

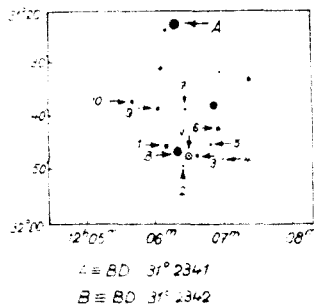


Fig. 1. Harta regiunii variabilei.

Ca stele de comparație am utilizat 9 stele din cele 13 indicate de Grönstrand [2,3] și anume, în ordinea strălucirii, stelele 6, 10, 9, 1, 7, 3, 2, 5, 4 (fig. 1). Pentru determinarea magnitudinilor lor, pe 6 plăci Isopan ISS s-a fotografiat Secvența Polară de Nord și regiunea cefeidei TU Comae Berenices. Înnegririle stelelor de comparație le-am măsurat pe plăci cu ajutorul unui microfotometru fotoelectric $M\Phi - 2$. Curbele caracteristice ale plăcilor au fost trasate cu ajutorul a 24 stele standard din Secvența Polară de Nord. Întrucât domeniul de sensibilitate al plăcilor Isopan ISS este mai apropiat de domeniul vizual decât de cel fotografic, am utilizat magnitudinile fotovizuale ale stelelor Secvenței Polare de Nord [1]. Astfel am obținut următoarele valori pentru magnitudinile stelelor de comparație, corectate de extincție:

Tabel 1

Steaua	m_p	Eroarea medie pătratică
6	12,25	$\pm 0,03$
10	12,61	$\pm 0,06$
9	12,86	$\pm 0,03$
1	13,02	$\pm 0,02$
7	13,12	$\pm 0,02$
3	13,32	$\pm 0,03$
2	13,82	$\pm 0,03$
5	13,89	$\pm 0,02$
4	14,23	$\pm 0,05$

Pentru determinarea magnitudinilor stelei variabile, înnegririle imaginilor ei pe plăci le-am măsurat cu același microfotometru fotoelectric. Citirile la microfotometru s-au efectuat astfel: să considerăm că pe o placă există n imagini ale variabilei v și ale fiecărei stele de comparație, să zicem, notate cu a, b, c, \dots, i . Fie $v_k, a_k, b_k, c_k, \dots, i_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) imaginile corespunzătoare. Pentru citire s-a utilizat o schemă de forma $a_1; b_1; c_1, c_2, \dots, c_n; v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1; d_1, d_2, \dots, d_n; e_1; \dots; i_1; a_1$. S-au făcut câte două citiri pentru fiecare imagine și câte patru pentru fondul învecinat. De obicei variabila s-a încadrat între două stele de comparație de care era mai apropiată ca strălu-

cire. Curbele caracteristice s-au trasat cu ajutorul stelelor de comparație date mai sus. Am obținut astfel 349 valori m_{pr} , ale căror momente corespunzătoare au fost reduse la centrul Soarelui cu ajutorul tabelelor lui P r a g e r [5], date în tabelul 4.

Pe baza observațiilor astfel obținute, am determinat, prin metoda lui Pogson, momentele a 8 maxime avînd observații pe ambele ramuri ale curbei de lumină, date în tabelul 2, în care prima coloană reprezintă momentul observat al maximumului, a doua numărul de observații pe ramura ascendentă, a treia numărul de observații pe ramura descendentă, a patra diferențele $O - C$ (momentul observat minus momentul calculat), calculate cu elementele lui Grönstrand, a cincea ponderea p , iar a șasea epoca E .

Tabel 2

Maxime observate

Max. hel. D. J. 243	Numărul observațiilor		O - C 0,001	p	E
	ramura ascendentă	ramura descendentă			
7043,482	12	20	-17	2	17552
7049,487	8	-	-31	0,5	17565
7051,366	-	10	+57	0,5	17569
7058,286	-	17	+74	0,5	17584
7067,523	3	1	+94	1	17604
7068,458	7	11	+107	2	17606
7079,496	7	-	+84	1	17630
7086,399	-	7	+74	0,5	17645
7380,252	-	13	101	0,5	18283
7397,294	-	12	-111	0,5	18320
7425,426	-	9	-92	0,5	18381
7443,441	6	5	-50	2	18420
8145,402	2	10	+21	1,5	19942
8149,522	6	4	-7	2	19952
8161,515	4	3	+4	1,5	19978
8163,366	6	12	-11	2	19982
8180,485	5	1	+79	1	20019
8198,471	4	4	-91	2	20058

Pentru a putea determina momentele maximelor cu observații pe o singură ramură, era nevoie mai întîi de construirea curbei medii. În acest scop fazele φ ale observațiilor s-au calculat cu ajutorul elementelor lui Grönstrand. Din aceste calcule 67% au fost efectuate de E. B o t e z (și verificate de autor), iar restul au fost efectuate de autor. De asemenea E. Botez a efectuat măsurători cu un microfotometru Hartmann pe 5 plăci pentru 6 stele de comparație și evaluări pe plăci prin metoda lui Argelander pentru determinarea magnitudinilor variabilei. Aceste măsurători și eva-

luări n-au fost utilizate, deoarece toate imaginile au fost remăsurate, cu ajutorul microfotometrului fotoelectric MΦ-2, de către autor.

Reprezentînd grafic toate observațiile în planul fază-magnitudine, se observă că în acest fel nu se poate trasa o curbă medie de lumină, deoarece observațiile sînt foarte dispersate datorită unor mari deplasări ale maximelor, în ambele sensuri, de la faza $\varphi = 0$. Maximele fiind deplasate în ambele sensuri de la faza $\varphi = 0$, nu permit determinarea unor noi elemente liniare și recalcularea fazelor. De aceea am procedat astfel: am suprapus curbele individuale ale maximelor cu observații pe ambele ramuri și am obținut astfel un fel de „curbă medie” de lumină a celor 8 maxime. Cu ajutorul acestei „curbă medii” am determinat momentele a încă 10 maxime, avînd observații pe o singură ramură, date deasemeni în tabelul 2.

În general, maximele observate prezintă diferențe 0—C mari, în ambele sensuri. Graficul 0—C (fig. 3) pare să indice o tendință de variație oscilatorie, sinusoidală a abaterilor 0—C, în funcție de numărul de perioade (epoca) E. Dar variația sinusoidală nu se reproduce identic de la un sezon de observații la altul, deplasîndu-se în ordonanță, și fiind suprapusă probabil peste o altă variație, de perioadă mai mare. Variația abaterilor 0—C este însoțită de variații în forma curbei de lumină de la un maxim la altul și de variații ale amplitudinii ei. Toate acestea conduc la ideea că variația de lumină a cefeidei TU Comae Berenices este afectată de un puternic efect Blajko. Materialul observațional redus care există pînă în prezent nu permite studiul efectului Blajko.

Totuși, grupînd observațiile de maxime după intervalele de vizibilitate a variabilei, am obținut că cea mai bună reprezentare a momentelor maximelor este dată de elementele:

$$\begin{aligned} \text{Max. hel.} = D. J. 2428954,505 + 0,46086E + 0,049 \sin(2,218E + 259^\circ) \\ \text{pentru } 17552 \leq E \leq 17645 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max. hel.} = D. J. 2428954,350 + 0,46086E + 0,049 \sin(2,218E + 259^\circ) \quad (2) \\ \text{pentru } 18283 \leq E \leq 18420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max. hel.} = D. J. 2428954,497 + 0,46086E + 0,049 \sin(2,218E + 259^\circ) \\ \text{pentru } 19943 \leq E \leq 20058 \end{aligned}$$

Corectînd fazele φ ale observațiilor pe baza elementelor de mai sus, am obținut noi valori ale fazelor: φ' . Grupînd observațiile după fazele φ' am format 33 de puncte normale, conținînd în total 322 de observații individuale. Punctele normale astfel obținute sînt date în tabelul 3, în care prima coloană reprezintă numărul de ordine al punctului normal, a doua faza φ' , a treia magnitudinea fotovizuală m_{pv} , iar a patra numărul de observații individuale incluse într-un punct normal N.

Pe baza tabelului 3 am construit curba medie de lumină, reprezentată în fig 2. În curba medie n-au fost incluse 27 de observații: 8 observații din mai—iunie 1959 și 21 observații din decembrie 1960—ianuarie 1961, care se găsesc în afara intervalelor de variabilitate a formulelor (2), adică în intervalele de timp în care nu există maxime observate.

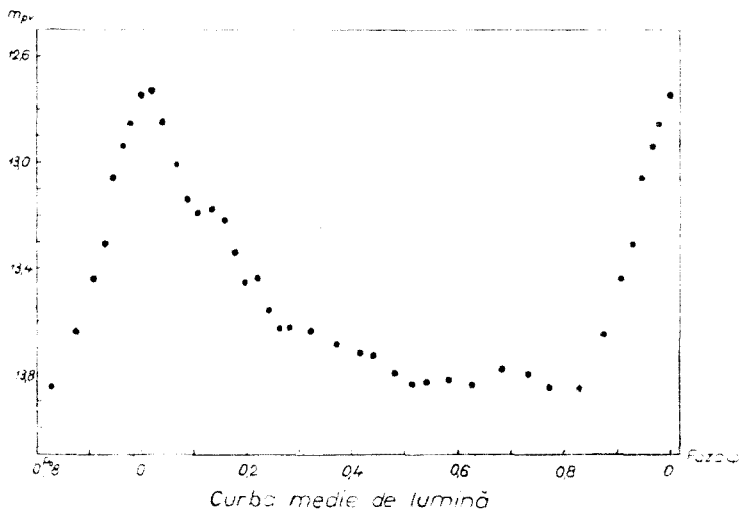


Fig. 2.

Tabel 3

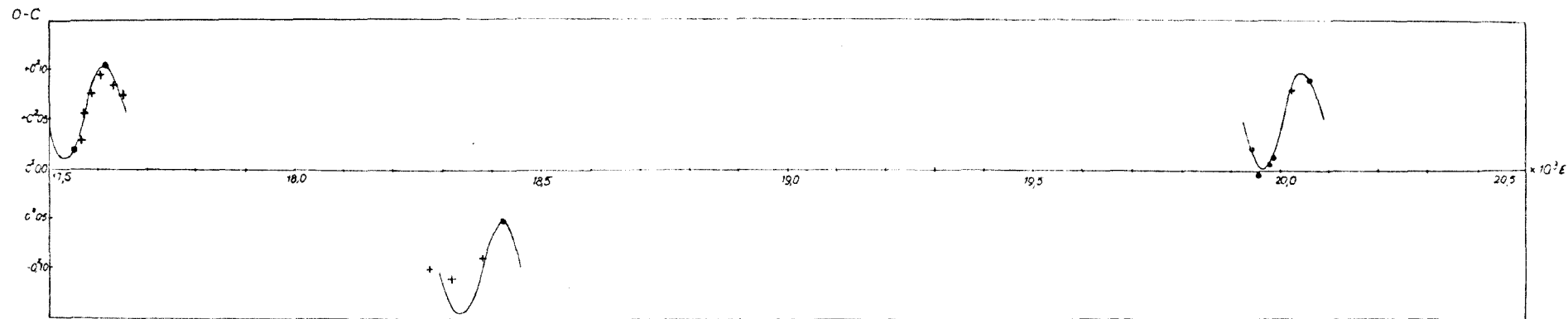
Punete normale

Nr. crt. al pct. normal	Faza	Magnitudinea m_{pv}	N	Nr. crt. al pct. normal.	Faza	Magnitudinea m_{pv}	N
1	0,0174	12,73	10	18	0,4794	13,80	10
2	0,0409	12,85	10	19	0,5107	13,84	9
3	0,0646	13,01	10	20	0,5386	13,83	9
4	0,0862	13,14	10	21	0,5812	13,82	8
5	0,1068	13,19	10	22	0,6246	13,84	9
6	0,1307	13,18	10	23	0,6800	13,78	9
7	0,1541	13,22	10	24	0,7314	13,80	9
8	0,1768	13,34	10	25	0,7711	13,85	9
9	0,1955	13,46	10	26	0,8251	13,85	10
10	0,2170	13,44	10	27	0,8763	13,65	10
11	0,2376	13,56	10	28	0,9056	13,44	10
12	0,2602	13,63	10	29	0,9285	13,31	10
13	0,2831	13,63	10	30	0,9460	13,06	10
14	0,3170	13,64	10	31	0,9636	12,94	10
15	0,3686	13,69	10	32	0,9806	12,86	10
16	0,4153	13,72	10	33	0,9995	12,75	10
17	0,4433	13,73	10				

Observații individuale

D. J. hel. 243	m _{pr}	D. J. hel. 243	m _{pr}	D. J. hel. 243	m _{pr}	D. J. hel. 243	m _{pr}
6715,3820	13,70	7046,4019	13,71	7058,3568	13,28	7072,4532	13,89
,3931	13,80	,4082	13,54	,3679	13,27	,4602	13,79
,4216	13,75	,4193	13,70	,3755	13,46	078,3480	13,89
,4306	13,82	,4297	13,66	,3866	13,32	,3619	13,74
738,4025*	13,31	,4436	13,71	,3936	13,49	,3758	13,85
,4081*	13,18	,4575	13,71	4061	13,50	,3966	13,89
,4136*	13,36	,4637	13,77	,4165	13,55	,4070	13,92
,4192*	13,32	,4783	13,84	,4276	13,65	079,4112	13,89
7043,4241	13,73	,4887	13,80	,4352	13,59	,4182	13,80
,4324	13,37	,4991	13,78	,4512	13,59	,4252	13,88
,4394	13,42	,5096	13,79	,4627	13,74	,4321	13,72
,4428	13,33	,5269	13,78	,4741	13,82	,4583	13,26
,4505	13,44	047,5373	13,92	067,3903	13,85	,4848	13,02
,4533	13,32	,3559	13,64	,3979	13,85	,4918	12,70
,4574	12,97	,3733	13,69	,4056	13,88	,4987	12,67
,4609	13,00	,3844	13,67	,4195	13,99	086,4628	13,03
,4644	12,86	,3983	13,84	,4271	13,86	,4698	13,31
,4678	12,97	,4128	13,80	,4424	14,02	,4767	13,22
,4734	13,00	,4212	13,81	,4507	13,82	,4836	13,28
,4719	12,72	04,4255	13,76	,4632	13,97	,4906	13,25
,4803	12,88	9,4195	13,71	,4771	13,82	,4975	13,33
,4838	12,65	,4243	13,84	,5188	12,68	,5135	13,52
,4873	12,70	,4285	13,46	,5327	12,70	114,3271	13,75
,4908	12,84	,4327	13,32	068,4013	13,79	,3333	13,82
,4977	12,90	,4486	13,08	,4083	13,73	,3417	13,75
,5012	12,92	,4529	13,29	,4208	13,50	,3528	13,78
,5046	12,92	,4570	13,30	,4277	13,13	289,5369	13,80
,5081	12,88	,4611	13,11	,4388	12,76	,5480	13,68
,5116	12,90	,4653	13,03	,4465	12,65	,5577	13,80
,5150	13,03	051,4018	13,25	,4569	12,55	,5723	13,78
,5219	12,92	,4101	13,12	,4645	12,57	,5807	13,86
,5254	12,98	,4185	13,19	,4750	12,86	,5841	13,69
,5323	13,03	,4289	13,38	,4826	12,94	,5876	13,60
,5393	13,33	,4372	13,38	,4937	12,97	,5914	13,59
,5427	13,23	,4456	13,49	,5020	12,99	,5947	13,52
,5532	13,50	,4518	13,42	,5125	13,08	,5980	13,54
,5601	13,27	,4629	13,43	,5201	13,02	313,4482	13,76
,5670	13,49	,4706	13,58	,5298	13,24	,4558	13,74
,5740	13,62	,4782	13,55	,5375	13,33	,4632	13,78
,5809	13,50	058,3096	13,06	,5467	13,54	,4711	13,74
,5879	13,61	,3172	13,12	,5541	13,53	,4791	13,77
046,3603	13,61	,3241	13,11	072,3643	13,80	,4867	13,81
,3742	13,51	,3311	13,12	,3744	13,90	,4959	13,76
,3880	13,71	,3492	13,19	,4449	13,91	,5024	13,82

* Observații efectuate pe plăci Astro Panchromatice.



Graficul diferențelor $O-C$.

- maxim cu observații pe ambele ramuri.
- + maxim cu observații pe o singură ramură.

Tabel 4 (continuare)

D. J. hel. 243	m_{pv}	D. J. hel. 243	m_{pv}	D. J. hel. 243	m_{pv}	D. J. hel. 242	m_{pv}
7313,5094	13,75	7397,5385	13,78	7443,4274	12,85	8161,5009	13,08
376,2635	13,83	5441	13,80	4358	12,69	5141	12,96
2683	13,81	404,3613	13,70	4455	12,66	5221	12,99
2718	13,80	3700	13,74	4524	12,76	5300	12,95
2764	13,94	3752	13,61	4767	13,24	5460	13,38
2801	13,98	3786	13,67	4892	13,20	163,3127	13,62
2829	13,66	3911	13,77	5017	13,34	3224	13,54
3459	13,74	4002	13,70	8145,3846	12,82	3346	13,27
3489	13,81	4078	13,84	3922	12,71	3432	13,21
3550	13,83	4134	14,12	4051	12,65	3516	12,89
3607	13,63	4168	13,84	4395	12,95	3599	12,86
3635	13,66	4203	13,80	4492	13,06	3689	12,81
3726	13,77	4238	13,83	4589	13,23	3772	12,85
3829	13,77	4356	13,93	4700	13,21	3891	12,95
380,3223	13,27	4418	13,98	4888	13,39	3977	12,96
3297	13,37	4467	13,57	5006	13,37	4071	13,02
3330	13,44	4515	13,69	5096	13,46	4177	13,09
3372	13,39	4564	13,73	5221	13,51	4300	13,17
3407	13,51	4599	13,73	5318	13,49	4446	13,34
3462	13,61	4696	13,94	5429	13,64	4585	13,41
3684	13,57	4745	13,87	5533	13,66	4724	13,57
3719	13,70	4793	13,73	5631	13,63	4863	13,60
3782	13,62	4842	13,61	149,3422	13,81	5002	13,76
3830	13,79	4890	13,77	3595	13,83	5127	13,71
3886	13,64	4939	13,71	3720	13,89	5255	13,76
3953	13,65	4974	13,69	3859	13,79	5398	13,74
4039	13,85	5140	13,86	3998	13,78	5512	13,87
4184	13,70	5252	13,80	4130	13,71	180,4315*	13,65
397,3901	13,47	425,4503	13,02	4290	13,86	4405*	13,51
4010	13,56	4630	12,99	4387	13,70	4509*	13,37
4101	13,49	4753	13,16	4484	13,77	4648	13,15
4191	13,54	4840	13,26	4693	13,62	4787*	12,70
4392	13,66	4899	13,11	4818	13,68	4926*	12,63
4476	13,73	4993	13,28	4915	13,41	198,3599	13,83
4559	13,78	5117	13,27	5005	13,04	3724	13,95
4635	13,58	5240	13,37	5113	12,74	4279	13,31
4712	13,62	5392	13,52	5215	12,63	4450	13,20
4788	13,73	436,4214	13,98	5318	12,69	4529	12,92
4844	13,89	4355	14,00	5422	12,76	4623	12,93
4962	13,80	443,3892	13,83	5526	12,85	4710	12,69
5052	13,93	3978	13,54	5630	12,99	4814	12,74
5129	13,76	4079	13,07	161,4829	13,28	4918	12,88
5226	13,95	4163	13,04	4932	13,04	5023	13,05
5309	13,90						

* Observații efectuate pe p.ăci Astro Panchromatic.

Din curba de lumină se observă că luminozitatea stelei TU Comae Berenices variază între $M = 12,73$ și $m = 13,85$ magnitudini fotovizuale. Maximul în curba medie este ascuțită. Asimetria în fază a curbei de lumină este

$$\xi = \varphi'(M) - \varphi'(m) = 0^{\text{h}}192$$

unde P_0 este perioada determinată de Grönstrand, iar asimetria în magnitudine

$$\xi = m \left(\frac{1}{2} P_0 \right) - \frac{1}{2} (M + m) = 0^{\text{m}}54.$$

Asimetria curbei de lumină, forma ascuțită a maximului și amplitudinea relativ mare a variației de lumină arată că variabila TU Comae Berenices este de tipul RRa.

Comparând curbele individuale de lumină cu cea medie se observă mari variații ale formei curbei de lumină cu timpul, mai ales pe ramura descendentă.

Din cele de mai sus rezultă că, variația de lumină a cefeidei TU Comae Berenices este supusă unui puternic efect Blajko, a cărui perioadă secundară, conform elementelor (2), pare să fie

$$P_1 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 218} P_0 \cong 162P_0 \cong 75^\circ.$$

Pentru confirmarea și studiul efectului Blajko, ar fi necesară observarea în continuare — cu cât mai puține întreruperi — a cefeidei TU Comae Berenices. Deosebit de utile ar fi în acest sens observațiile fotoelectrice.

BIBLIOGRAFIE

1. *Handbuch der Astrophysik*, t. II, partea II, p. 495; 1931.
2. Grönstrand, H. O. „Stockholms Observatorium Meddelande” nr. 44, 1939.
3. Grönstrand, H. O. „Arkiv för Matematik”, 26 A, nr. 17.
4. Malmquist, „Arkiv för Matematik”, 26 A, nr. 12.
5. Prager, R. „Kleinere Veröff. der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg” nr. 12

КРАТКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЦЕФЕИДА TU COMAE BERENICES

(Резюме)

В настоящей работе автор приводит 349 наблюдений цефеиды TU COMAE BERENICES, произведенных в Клузской Астрономической Обсерватории, в период 26 мая 1959 г.—17 июня 1963 г. на несенсибилизированных пластинках ISOPAN ISS без фильтра. Приводятся также звездные величины звезд сравнения. Почернения изображений измерялись при помощи фотоэлектрического микрофотометра МФ-2.

Из этих наблюдений были получены моменты 8 максимумов, с наблюдениями на обеих ветвях кривой блеска и моменты 10 максимумов, с наблюдениями на одной ветви. Моменты максимумов не удовлетворяют элементам Грёнштранда [2],

представляя разницы $O-C$ колебательного хода, а форма и амплитуда кривой блеска претерпевают изменения во времени. Всё это ведёт к предположению, что изменение блеска цефеиды TU COMAE BERENICES сопровождается сильным эффектом Блажко. По этой причине не смогли определить новых элементов для вычисления эффемериды. Наилучшее изображение моментов наблюдаемых максимумов дано элементами (2).

Применяя к фазам φ , вычисленным формулой (1), поправки, соответствующие отношениям (2), получаются новые фазы φ' , которые позволяют построить среднюю кривую блеска (рис. 2), содержащую 33 нормальные точки, включая 322 наблюдения. В среднюю кривую не было включено 27 наблюдений, которые остаются вне интервалов действительности элементов (2). Кривая блеска показывает, что TU COMAE BERENICES является цефеидой типа RR Lyrae, подтипа RRa.

Согласно элементам (2) казалось бы, что вторичный период может иметь значение близкое к $P_1 \cong 162 P_0 \cong 75^z$.

Для подтверждения эффекта Блажко были бы необходимы более длительные и, по возможности, непрерывные наблюдения.

LA CÉPHÉIDE À PÉRIODE COURTE TU COMAE BERENICES

(R é s u m é)

L'auteur présente 349 observations de la céphéide TU Comae Berenices, effectuées à l'Observatoire astronomique de Cluj entre le 26 mai 1959 et le 17 juin 1963, sur plaques Isopan ISS non sensibilisées, sans filtre; il donne aussi les magnitudes des étoiles de comparaison. Les noircissement des images ont été mesurés à l'aide d'un microphotomètre photoélectrique МФ-2.

A partir de ces observations on a obtenu les moments de 8 maxima avec des observations sur les deux branches de la courbe de lumière, et de 10 maxima avec des observations sur une seule branche. Les moments des maxima ne vérifient pas les éléments de *Grönstrad* [2] et présentent des différences $O-C$ à marche oscillante; la forme et l'amplitude de la courbe de lumière subit des variations dans le temps. Ces constatations suggèrent l'hypothèse que la variation de lumière de la céphéide TU Comae Berenices est accompagnée d'un puissant effet Blajko. C'est pourquoi l'on n'a pas pu déterminer de nouveaux éléments par le calcul de l'éphéméride. La meilleure représentation des moments des maxima observés est donnée par les éléments (2).

En appliquant aux phases φ calculées avec la formule (1) des corrections correspondant aux relations (2), on obtient de nouvelles phases φ' , qui permettent la construction d'une courbe moyenne de lumière (fig. 2) contenant 33 points normaux avec 322 observations. La courbe moyenne n'inclut pas 27 observations qui tombent en dehors des intervalles de valabilité des éléments (2). La courbe de lumière montre que TU Comae Berenices est une céphéide du type RR Lyrae, sous-type RRa.

Conformément aux éléments (2) il semble que la période secondaire doit avoir une valeur approchant $P_1 \cong 162 P_0 \cong 75^z$.

Pour confirmer l'effet Blajko, des observations plus prolongées et autant que possible ininterrompues seraient nécessaires.

SOLUȚII APROAPE-PERIODICE ALE ECUAȚIEI LUI DUFFING ÎN CAZUL REZONANȚEI

de
AUREL TURCU

În lucrare se studiază problema existenței, calculului și stabilității oscilațiilor aproape-periodice, în caz de rezonanță, ale ecuației lui Duffing [1] de forma :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu \left(\gamma x^3 - 2H \frac{dx}{dt} \right), \quad (1)$$

unde $k, \gamma > 0, a > 0, b > 0, H > 0$ sînt niște constante, μ este un parametru mic real, ω_1 și ω_2 sînt niște constante al căror raport este irațional. Folosind rezultatele cercetărilor lui Krilov — Bogoliubov [2] și Malkin [3], vom arăta că ecuația lui Duffing (1), în cazul rezonanței din vecinătatea frecvenței ω_1 , posedă cel puțin o soluție aproape-periodică, stabilă.

1. Din ecuația (1) se vede că frecvența oscilațiilor libere ale ecuației generatoare (cînd $\mu = 0$) este k , iar frecvențele forțelor excitatoare sînt egale respectiv cu ω_1 și ω_2 .

Se spune că frecvența k este o frecvență de rezonanță dacă cel puțin una din mărimile

$$mk + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

este o mărime mică de ordinul lui μ . Aici m, m_1, m_2 sînt numere întregi pozitive sau negative, pentru care

$$|m + m_1 + m_2| \leq 5; \quad (m \neq 0)$$

deoarece gradul maxim la care intră x sau \dot{x} în termenul ce depinde de μ , al ecuației (1), este trei.¹

¹ Vezi I. G. Malkin [3], cap. IV § 13.

Noi vom studia oscilațiile aproape-periodice ale ecuației lui Duffing în cazul rezonanței din vecinătatea frecvenței ω_1 . Vom presupune deci că mărimea k diferă de ω_1 cu o cantitate mică de ordinul lui μ , adică

$$a) \quad k_1^2 = \omega_1 - \mu c$$

În afară de aceasta vom presupune că amplitudinea forței excitatoare de frecvență ω_1 , este de asemenea o mărime mică de ordinul lui μ , adică :

$$b) \quad a = \mu \lambda$$

În egalitățile a) și b), mărimile c și λ sînt niște constante pozitive date, finite.

În aceste ipoteze ecuația lui Duffing (1) se scrie sub forma :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = b \cos \omega_2 t + \mu \left(\lambda \cos \omega_1 t + cx + \gamma x^3 - 2H \frac{dx}{dt} \right). \quad (2)$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x} &= -\omega_1 x_2 \end{aligned}$$

ecuația (1) se scrie sub forma următorului sistem :

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega_1 x_2 \quad (2')$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \omega_1 x_1 - \frac{b}{\omega_1} \cos \omega_2 t - \frac{\mu}{\omega_1^3} (\lambda \cos \omega_1 t + cx_1 + \gamma x_1^3 - 2H\omega_1 x_2)$$

Pentru aflarea soluțiilor aproape-periodice ale sistemului de ecuații (2') vom urma în continuare aceeași cale folosită în [3] și [5], pentru găsirea soluțiilor aproape-periodice ale ecuației lui Duffing în caz de nerezonanță.

Observăm mai întii că ecuația fundamentală a sistemului generator, liniar, omogen :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\omega_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega_1 x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

are două rădăcini simple, pur imaginare (critice) $\rho_{1,2} = \pm \omega_1 i$; $i = \sqrt{-1}$.

Sistemul fundamental de soluții, aproape-periodice ale sistemului (3) este :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos \omega_1 t & x_{12} &= \sin \omega_1 t \\ x_{21} &= \sin \omega_1 t & x_{22} &= -\cos \omega_1 t \end{aligned} \quad (4)$$

unde $x_{11}(0) = |x_{22}(0)| = 1$ $x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0$

Aceste soluții reprezintă în același timp și sistemul fundamental de soluții $\psi_{\alpha,r}(\alpha, r = 1, 2)$ al sistemului adjunct lui (3).

Dat fiind faptul că sistemul (2'), pentru $\mu = 0$, îndeplinește toate condițiile teoremei lui Malkin² de existență a soluțiilor aproape-periodice, înseamnă că și soluția generală a sistemului generator (sistemul obținut din (2') când facem $\mu = 0$) va fi aproape-periodică. Această soluție este dată de relațiile :

$$\begin{aligned} x_1 &= M_1 \cos \omega_1 t + M_2 \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \\ x_2 &= M_1 \sin \omega_1 t - M_2 \cos \omega_1 t + \frac{b\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (5)$$

unde M_1 și M_2 sînt constante arbitrare.

Nu este greu de observat că dacă, în locul variabilelor x_1, x_2 introducem în (2') variabilele M_1 și M_2 cu ajutorul substituției (5) (luînd în considerare faptul că relațiile (5) reprezintă soluția generală a sistemului generator), atunci sistemul (2') capătă forma „standart” :

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= -\frac{\mu}{\omega_1} [\gamma x_1^3 + 2H\omega_1 x_2 + cx_1 + \lambda \cos \omega_1 t] \sin \omega_1 t \\ \frac{dM_2}{dt} &= \frac{\mu}{\omega_1} [\gamma x_1^3 + 2H\omega_1 x_2 + cx_1 + \lambda \cos \omega_1 t] \cos \omega_1 t \end{aligned} \quad (6)$$

unde x_1 și x_2 trebuie înlocuiți cu expresiile lor din (5).

Efectuînd toate calculele, ecuațiile (6) se pot scrie sub următoarea formă concisă :

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \mu \left\{ P_1(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{11} [A_{1p}(M_1, M_2) \cos \nu_p t + B_{1p}(M_1, M_2) \sin \nu_p t] \right\} \equiv \\ &\equiv \mu F_1(t, M_1, M_2) \\ \frac{dM_2}{dt} &= \mu \left\{ P_2(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{11} [A_{2p}(M_1, M_2) \cos \nu_p t + B_{2p}(M_1, M_2) \sin \nu_p t] \right\} \equiv \\ &\equiv \mu F_2(t, M_1, M_2) \end{aligned} \quad (7)$$

unde

$$\begin{cases} P_1(M_1, M_2) = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} M_2(M_1^2 + M_2^2) - HM_1 - \left| \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right| M_2 \\ P_2(M_1, M_2) = \frac{3\gamma}{8\omega_1} M_1(M_1^2 + M_2^2) - HM_2 + \left| \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right| M_1 + \frac{\lambda}{2\omega_1} \end{cases} \quad (8)$$

² I. G. Malkin [3], pag. 230.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\gamma}{8\omega_1} M_2(3M_1^2 - M_2^2) & B_{11} &= \frac{\gamma}{8\omega_1} M_1(3M_2^2 - M_1^2) \\
A_{12} &= A_{13} = \frac{3\gamma}{4\omega_1} b' M_1 M_2 & B_{12} &= B_{13} = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} b'(M_1^2 - M_2^2) \\
A_{14} &= \frac{\gamma}{2\omega_1} M_2^3 H M_1 + \delta M_2 & B_{14} &= -\frac{\gamma}{4\omega_1} M_1(M_1^2 + 3M_2^2) + H M_2 - \\
& & & \quad - \delta M_1 - \lambda' \\
A_{15} &= -\frac{3\gamma}{4\omega_1} b'^2 M_2 & B_{15} &= 0 \\
A_{16} &= A_{17} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} b'^2 M_2 & B_{16} &= B_{17} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} b'^2 M_1 \\
A_{18} &= -\frac{3\gamma}{4\omega_1} b' M_1 M_2 - H' & B_{18} &= B_{19} = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} b'(M_1^2 + 3M_2^2 + \\
& & & \quad + b'^2) - c' b' \\
A_{19} &= -\frac{3\gamma}{4\omega_1} b' M_1 M_2 - H' & B_{1,10} &= B_{1,11} = -\frac{\gamma}{8\omega_1} b'^3 \\
A_{1,10} &= A_{1,11} = 0 & & \tag{9} \\
A_{21} &= \frac{\gamma}{8\omega_1} M_1(M_1^2 - 3M_2^2) & B_{21} &= \frac{\gamma}{8\omega_1} M_2(3M_1^2 - M_2^2) \\
A_{22} &= A_{23} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} (M_1^2 - M_2^2) b' & B_{22} &= B_{23} = \frac{3\gamma}{4\omega_1} b' M_1 M_2 \\
A_{24} &= \frac{\gamma}{4\omega_1} M_1^3 - H M_2 + \delta M_1 + \lambda' & B_{24} &= \frac{\gamma}{2\omega_1} M_2(3M_1^2 + M_2^2) + H M_1 + \delta M_1 \\
A_{25} &= \frac{3\gamma}{2\omega_1} b'^2 M_1 & B_{25} &= 0 \\
A_{26} &= A_{27} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} b'^2 M_1 & B_{26} &= B_{27} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} b'^2 M_2 \\
A_{28} &= A_{29} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} b'(3M_1^2 + M_2^2 + \\
& \quad + b'^2) + b' c' & B_{28} &= \frac{3\gamma}{8\omega_1} b' M_1 M_2 - H' \\
A_{2,10} &= A_{2,11} = \frac{\gamma}{8\omega_1} b'^3 & B_{29} &= \frac{3\gamma}{4\omega_1} b' M_1 M_2 - H' \\
& & B_{2,10} &= B_{2,11} = 0
\end{aligned}$$

În formulele (9) am notat pentru prescurtare

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} &= b'; \quad \frac{H b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} = H' \\
\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} &= \delta; \quad \frac{\lambda}{2\omega_1} = \lambda'; \quad \frac{c}{2\omega_1} = c'
\end{aligned} \tag{10}$$

iar în (7) :

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= 4\omega_1 & \nu_6 &= 2(\omega_1 + \omega_2) \\
 \nu_2 &= 3\omega_1 + \omega_2 & \nu_7 &= 2(\omega_1 - \omega_2) \\
 \nu_3 &= 3\omega_1 - \omega_2 & \nu_8 &= \omega_1 + \omega_2 \\
 \nu_4 &= 2\omega_1 & \nu_9 &= \omega_1 - \omega_2 \\
 \nu_5 &= 2\omega_2 & \nu_{10} &= \omega_1 + 3\omega_2 \\
 & & \nu_{11} &= \omega_1 - 3\omega_2
 \end{aligned} \tag{11}$$

În ecuațiile (7) funcțiile F_1 și F_2 sînt sume trigonometrice finite. Acest fapt ne permite să găsim soluțiile aproape-periodice ale sistemului (7) supunînd sistemul (7) unei transformări analoge cu transformarea K r i l o v — B o g o l i u b o v [2] de forma :

$$M_i = y_i + \mu u_i(t, y_1, y_2) \quad (i = 1, 2) \tag{12}$$

Sistemul obținut din (7) după transformarea (12) va avea forma :

$$\frac{dy_i}{dt} = \mu Y_i(y_1, y_2) + \mu^2 [Y_i^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu Y_i^{**}(t, y_1, y_2, \mu)] \quad (i=1, 2) \tag{13}$$

unde Y_i ($i = 1, 2$) sînt funcții care nu conțin timpul t , iar funcțiile din parantezele pătrate au aceeași structură ca și F_i , adică pot fi puse sub forma unor serii trigonometrice finite cu coeficienți care reprezintă polinoame în raport cu y_i ($i = 1, 2$) și care, în plus, sînt analitice în raport cu parametrul mic μ .

Într-adevăr, luînd

$$Y_i(y_1, y_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_i(t, y_1, y_2) dt = P_i(y_1, y_2) \tag{14}$$

$$u_i(t, y_1, y_2) = \int F_i(t, y_1, y_2) dt - P_i t = \sum_{p=1}^{11} (A_{ip} \sin \nu_p t - B_{ip} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \quad (i = 1, 2)$$

și determinînd apoi Y_i^* și Y_i^{**} din ecuațiile corespunzătoare³ obținem sistemul :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_i}{dt} &= \mu P_i(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\partial A_{ip}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{ip}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right) \frac{P_1}{\nu_p} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\partial A_{ip}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{ip}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial P_i}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\partial A_{ip}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{ip}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\frac{\sum_{p=1}^{11} A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial P_i}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\partial A_{ip}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{ip}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\frac{\sum_{p=1}^{11} A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] \right\} + \\
 &\quad + \mu^3 Y_i^{***}(t, y_1, y_2, \mu) \quad (i = 1, 2) \tag{15}
 \end{aligned}$$

³ Vezi [5, 3, 2].

Vom considera în continuare sistemul (15) în primă aproximație⁴:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \mu P_1(y_1, y_2) \equiv \mu \left[-\frac{3\gamma}{8\omega_1} y_2 (y_1^2 + y_2^2) - Hy_1 - \delta y_2 \right] \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu P_2(y_1, y_2) \equiv \mu \left[\frac{3\gamma}{8\omega_1} y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \delta y_1 - Hy_2 + \lambda' \right]\end{aligned}\quad (16)$$

Se arată ușor că sistemul (16) admite soluția particulară

$$\begin{cases} y_1 = y_1^0 \equiv -y_2^0(\alpha y_2^0 + \delta) \frac{1}{H} \\ y_2 = y_2^0 \end{cases}\quad (17)$$

unde y_2^0 este o rădăcină a ecuației cubice:

$$P(y_2^0) \equiv -\frac{\alpha^2}{H} y_2^{0^3} - \frac{2\alpha\delta}{H} y_2^{0^2} - \left(\frac{\delta^2}{H^2} + H \right) y_2^0 + \lambda' = 0 \quad (18)$$

în care s-a notat

$$\alpha = \frac{3\gamma\lambda'}{8\omega_1 H} = \frac{3\gamma\lambda}{16\omega_1^2 H} \quad (19)$$

Soluția (17) corespunde stării de echilibru al sistemului

$$P_i(y_1^0, y_2^0) = 0; \quad (i = 1, 2) \quad (20)$$

Într-adevăr, din ecuațiile

$$\begin{aligned}-\frac{3\gamma}{8\omega_1} y_2 (y_1^2 + y_2^2) - Hy_1 - \delta y_2 &= 0 \\ \frac{3\gamma}{8\omega_1} y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \delta y_1 - Hy_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} &= 0,\end{aligned}$$

înmulțind prima ecuație cu y_1 , a doua cu y_2 și adunând, găsim:

$$-H(y_1^2 + y_2^2) + \frac{\lambda}{2\omega_1} y_2 = 0$$

De unde

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2 \quad (21)$$

Înlocuind acum (21) în ecuațiile (20) obținem sistemul:

$$\begin{aligned}-\alpha y_2^2 - Hy_1 - \delta y_2 &= 0 \\ \alpha y_1 y_2 + \delta y_1 - Hy_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} &= 0\end{aligned}\quad (22)$$

⁴ În problemele practice ne putem limita numai la soluția aproape-periodică dată de ecuațiile (15) în primă aproximație.

Din prima ecuație (22) se găsește

$$y_1 = -\frac{1}{H} y_2 (\alpha y_2 + \delta) \quad (23)$$

care, înlocuit în cea de-a doua ecuație (22), conduce la ecuația cubică :

$$P(y_2) = -\frac{\alpha^2}{H} y_2^3 - \frac{2\alpha\delta}{H} y_2^2 - \left(\frac{\delta^2}{H} + H\right) y_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} = \frac{y_2}{H} [(\alpha y_2 + \delta)^2 + H^2] + \frac{\lambda}{2\omega_1} = 0 \quad (24)$$

Ecuația (24), așa cum se vede din expresia termenului liber, are cel puțin o rădăcină reală pozitivă, căci $P(0) = \frac{\lambda}{2\omega_1} > 0$ (dacă $\lambda > 0$), $P(+\infty) = -\infty$, $\rightarrow P(y_2^0) = 0$, unde

$$0 < y_2^0 < +\infty$$

Ecuațiile în variații pentru soluția (17) au forma :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 \end{aligned} \quad (25)$$

unde

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\partial P_1(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1^0} = -\frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H \\ p_{12} &= \frac{\partial P_1(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_2^0} = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} \left(\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2y_1^{02} \right) - \delta \\ p_{21} &= \frac{\partial P_2(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1^0} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} \left(\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2y_1^{02} \right) + \delta \\ p_{22} &= \frac{\partial P_2(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_2^0} = \frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H \end{aligned}$$

sînt coeficienți constanți, iar

$$y_s - y_s^0 = \xi_s; \quad (s = 1, 2)$$

reprezintă perturbațiile.

Ecuatia fundamentală a sistemului în variații este

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y_1} & \frac{\partial P_2}{\partial y_2} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

sau

$$\lambda^2 + 2H\lambda + [H^2 + (\alpha y_2^0 + \delta)^2 + 2\alpha y_2^0(\alpha y_2^0 + \delta)] = 0 \quad (26')$$

De aici vedem că rădăcinile ecuației fundamentale (26)

$$\lambda_{1,2} = -H \pm Gi, \quad (27)$$

unde

$$G^2 = (\alpha y_2^0 + \delta)(3\alpha y_2^0 + \delta); \quad i = \sqrt{-1}$$

au părțile reale nu numai diferite de zero, dar chiar negative.

În acest caz conform teoremei lui N. N. B o g o l i u b o v [2], sistemul (15) admite, pentru μ suficient de mic, o soluție aproape-periodică, care se transformă în soluția (17) pentru $\mu = 0$.

Pentru a arăta acest lucru, facem substituția :

$$y_i = y_i^0 + \mu z_i; \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

Atunci ecuațiile (15) devin

$$\frac{dz_i}{dt} = \mu(p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2) + \mu Y_i^*(t, y_1^0, y_2^0, 0) + \mu^2 Z_i(t, z_1, z_2, \mu) \quad (i = 1, 2) \quad (29)$$

unde expresiile lui $Y_i^*(t, y_1^0, y_2^0, 0)$ se obțin ușor din coeficienții lui μ^2 din ecuațiile (15) făcînd acolo $y_i = y_i^0$. Funcțiile Z_i au aceeași structură și proprietăți ca și funcțiile F_i sau ca și funcțiile din parantezele pătrate din (13).

Cu ajutorul substituției

$$\tau = \mu t, \quad Y_i^*(t, y_1^0, y_2^0, 0) = f_i(t), \quad (i = 1, 2) \quad (30)$$

(sume trigonometrice finite, aproape-periodice),

ecuațiile (29) devin :

$$\frac{dz_i}{d\tau} = p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + f_i\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_i\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \quad (i = 1, 2) \quad (31)$$

Deoarece, conform celor demonstrate mai sus, ecuația fundamentală a sistemului (25) nu are rădăcini cu părțile reale nule, atunci ecuațiile (31)

satisfac toate condițiile teoremei lui Malkin [3]⁵ și posedă în consecință o soluție aproape-periodică $z_s = z_s^*(\tau)$, care este limita șirului de soluții aproape-periodice $z_s^{(k)}(\tau)$ ale sistemelor

$$\frac{dz_i^{(k)}}{d\tau} = p_{i1} z_1^{(k)} + p_{i2} z_2^{(k)} + f_i\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_i\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(k-1)}, z_2^{(k-1)}, \mu\right) \quad (i = 1, 2), \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (32)$$

În acest caz, în calitate de primă aproximație se ia soluția particulară aproape-periodică a sistemului

$$\begin{aligned} \frac{dz_1^{(1)}}{d\tau} &= p_{11} z_1^{(1)} + p_{12} z_2^{(1)} + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \\ \frac{dz_2^{(1)}}{d\tau} &= p_{21} z_1^{(1)} + p_{22} z_2^{(1)} + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

care soluție are forma :

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &\equiv \varphi_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos G(u - \tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin G(u - \tau) \right] du \\ z_2^{(1)} &\equiv \varphi_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin G(u - \tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos G(u - \tau) \right] du \end{aligned} \quad (34)$$

Dacă ne limităm la prima aproximație dată de (34), găsim atunci că

$$\begin{cases} y_1 = y_1^0 + \mu\varphi_1(t) \\ y_2 = y_2^0 + \mu\varphi_2(t) \end{cases} \quad (35)$$

este soluția aproape-periodică a sistemului (15), care pentru $\mu = 0$ se transformă în soluția (17).

Pe baza relațiilor (12), ținînd seama de faptul că funcțiile u date de (14) sînt aproape-periodice, rezultă că soluției obținute (35) îi corespunde o oscilație aproape-periodică a sistemului (7), care pentru $\mu = 0$ se transformă în stare de echilibru pentru sistemul (16).

$$\begin{aligned} M_1(t) &= M_1^* + \mu\varphi_1(t) + \mu u_1[t, M_1^* + \mu\varphi_1(t), M_2^* + \mu\varphi_2(t)] \\ M_2(t) &= M_2^* + \mu\varphi_2(t) + \mu u_2[t, M_1^* + \mu\varphi_1(t), M_2^* + \mu\varphi_2(t)] \end{aligned} \quad (36)$$

unde

$$\begin{aligned} M_1^* &= y_1^0 \\ M_2^* &= y_2^0 \end{aligned}$$

⁵I. G. Malkin [3] pag. 236. A se vedea de asemenea N. N. Bogoliubov [2] pag. 234.

Soluția aproape-periodică a sistemului (2') va fi atunci :

$$x_1 = M_1^* \cos \omega_1 t + M_2^* \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t + \mu [\varphi_1(t) \cos \omega_1 t + \varphi_2(t) \sin \omega_1 t] + \mu \{u_1[t, M_1^* + \mu\varphi_1(t), M_1^* + \mu\varphi_2(t)] \cos \omega_1 t + u_2[t, M_1^* + \mu\varphi_1(t), M_2^* + \mu\varphi_2(t)] \sin \omega_1 t\} \quad (37)$$

$$x_2 = M_1^* \sin \omega_1 t - M_2^* \cos \omega_1 t + \frac{b\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t + \mu [\varphi_1(t) \sin \omega_1 t - \varphi_2(t) \cos \omega_1 t] + \mu \{u_1[t, M_1^* + \mu\varphi_1(t), M_2^* + \mu\varphi_2(t)] \sin \omega_1 t - u_2(t, M_1^* + \mu\varphi_1, M_2^* + \mu\varphi_2) \cos \omega_1 t\}$$

care pentru $\mu = 0$ se transformă în soluția generatoare aproape-periodică

$$x_1^0 = M_1^* \cos \omega_1 t + M_2 \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \quad (38)$$

$$x_2^0 = M_1^* \sin \omega_1 t - M_2 \cos \omega_1 t + \frac{b\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t$$

2. *Problema stabilității* soluției aproape-periodice a ecuației (2) este echivalentă, avînd în vedere schimbările făcute mai sus, cu problema stabilității soluției $z_s = z_s^*(\tau)$ a sistemului (31). Putem însă arăta că soluția $z_s = z_s^*(\tau)$ este asimptotic stabilă. În acest scop, punînd în (31)

$$z_s = z_s^* + v_s$$

primim următoarele ecuații ale mișcării perturbate

$$\frac{dv_1}{d\tau} = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + \mu V_1(\tau, v_1, v_2, \mu) \quad (39)$$

$$\frac{dv_2}{d\tau} = p_{21}v_1 + p_{22}v_2 + \mu V_2(\mu, v_1, v_2, \mu)$$

unde

$$V_i = Z_i\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^* + v_1, z_2^* + v_2, \mu\right) - Z_i\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^*, z_2^*, \mu\right) \quad (i = 1, 2) \quad (40)$$

Fie K limita superioară a mărimilor $\left| \frac{\partial Z_s}{\partial v_j} \right|$ în domeniul

$$-\infty < \tau < +\infty, \quad |v_s| \leq h \quad (s=1, 2)$$

unde h e constantă pozitivă. Atunci pe baza lui (40), în acest domeniu vor fi satisfăcute condițiile Cauchy-Lipschitz :

$$\mu |V_s(\tau, v_1', v_2', \mu) - V_s(\tau, v_1'', v_2'', \mu)| \leq L \sum_{\alpha=1}^2 |v_\alpha' - v_\alpha''|,$$

în care constanta $L = \mu K$, pentru μ suficient de mic, va fi oricît de mică.

Pe de altă parte ecuația fundamentală a primei aproximații (cînd $\mu = 0$) :

$$\frac{dv_1}{d\tau} = p_{11}v_1 + p_{12}v_2$$

$$\frac{dv_2}{d\tau} = p_{21}v_1 + p_{22}v_2$$

are toate rădăcinile cu părțile reale negative.

În consecință sînt satisfăcute toate condițiile teoremei lui Liapunov de stabilitate asimptotică⁶.

BIBLIOGRAFIE

1. Duffing G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. F. Vieweg u. Sohn Braunschweig, 1918.
2. Krilov N. M. i Bogoliubov N. N., *Vvedenie v nelineinuiu mehaniku*, Izd. AN USSR, 1937. — Bogoliubov N. N., *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoi fizike*. Izd. AN USSR, 1945.
3. Malkin I. G., *Nekotore zadaci teorii nelineinikh kolebanii*. G.I.T.T.L., Moskva, 1956.
4. Malkin I. G., *O rezonanse v kvazigarmonicheskikh sistemah*. „P.M.M.”, XVIII, 4, 1954.
5. Turcu A., *Soluții periodice ale ecuației lui Duffing în caz de nerezonanță*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai Series Mathem” fasc. 2, 1964.

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА

(Резюме)

Изучается вопрос существования, исчисления и устойчивости почти-периодических колебаний уравнения Д у ф ф и н г а [1], в случае резонанса, вида:

$$\ddot{x} + k^2x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu(\gamma x^3 - 2H\dot{x}) \quad (1)$$

где $k, \gamma > 0, a > 0, b > 0, H > 0$ — постоянные, μ — действительный малый параметр, ω_1 и ω_2 — постоянные, отношение которых $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ является иррациональным. Используя результаты исследований Крылова — Боголюбова [2] и Малкина [3] показывается, что уравнение Дuffинга [1], в случае резонанса вблизи частоты ω_1 , имеет по крайней мере одно устойчивое почти-периодическое решение.

⁶ I. G. Malkin [3] pag. 189.

SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE DUFFING
DANS LE CAS DE RÉSONANCE

(R é s u m é)

On étudie le problème de l'existence, du calcul et de la stabilité des oscillations presque-périodiques, dans le cas de résonance, de l'équation de Duffing [1] sous la forme :

$$\ddot{x} + k^2x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu(\gamma x^3 - 2H\dot{x}) \quad (1)$$

où $k, \gamma \geq 0, a > 0, b > 0, H > 0$ sont des constantes, μ un petit paramètre réel, ω_1 et ω_2 des constantes dont le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel. En utilisant les résultats des recherches de Krylov - Bogoliubov [2] et de Malkin [3], on montrera que l'équation de Duffing [1] dans le cas de résonance voisine de la fréquence ω_1 possède au moins une solution presque-périodique stable.

STUDIUL TEMPERATURII CURIE LA FERITELE MAGNEZIU-ZINC ȘI CUPRU-ZINC

de

I. MAXIM și C. BĂLINTȘI

Determinările de puncte Curie efectuate de alți autori [1, 2, 3, 4, 5] asupra unor ferite mixte cu zinc avînd formula $Me_{1-x}Zn_xFe_2O_4$, unde Me reprezintă ionul bivalent de Cu, Mg, Mn, Co, Ni, iar $0 < x < 1$, au pus în evidență o descreștere, în general liniară, a temperaturii Curie a acestor compuși o dată cu creșterea lui X din formula de mai sus. Această dependență este în concordanță cu teoria lui Néel [6], privitoare la proprietățile magnetice ale feritelor, conform căreia temperatura Curie a unei ferite cu structură mixtă (amestec de spinel normal și invers) va fi cu atît mai ridicată cu cît gradul de inversiune este mai perfect. În lucrarea de față ne-am propus să studiem temperatura Curie a feritelor magneziu-zinc și cupru-zinc în jurul compoziției stoichiometrice, menținînd constant raportul dintre MgO și ZnO, respectiv dintre CuO și ZnO și s-a variat concentrația în Fe_2O_3 .

Prepararea probelor și modul de lucru. Sinteza probelor s-a făcut din oxizi sub formă de pulberi care s-au amestecat în proporții moleculare, astfel ca să fie satisfăcute relațiile :

$$\frac{(MgO)_{0,45} (ZnO)_{0,55}}{Fe_2O_3} = \delta, \quad \text{pt. } 0,66 < \delta < 1,5 \quad (1)$$

$$\frac{(MgO)_{0,4} (ZnO)_{0,6}}{Fe_2O_3} = \delta, \quad \text{pt. } 0,54 < \delta < 1,86 \quad (2)$$

Toți oxizii folosiți au avut puritatea „pentru analiză”, fiind de următoarele proveniențe : Fe_2O_3 — „Merck” ; ZnO și MgO — „Analar” ; CuO — Riedel — de Haen A.-G.

Atît din probele care satisfac relația 1 cît și din cele care satisfac relația nr. 2 s-au pregătit cîte 13 concentrații. Din oxizii amestecați s-au presat pastile de formă cilindrică, avînd diametrul de 8 mm și lungimea de 6—7 mm la o presiune de cca 1,2 t/cm². Tratamentul termic al probelor astfel obținute, s-a făcut în cuptor electric cu rezistență. Încălzirea s-a

făcut treptat, s-a menținut la 150°C timp de o oră în vederea evaporării complete a umezelii. După aceea s-a ridicat temperatura, în cazul probelor nr. 1 la 900°C , iar pentru probele nr. 2 la 800°C și s-a menținut timp de două ore în vederea feritizării cât mai complete; apoi s-a ridicat temperatura la 1150°C pentru probele nr. 1 și 1000°C pentru probele nr. 2, menținându-se timp de 4 | 2 ore în vederea sinterizării. Răcirea s-a făcut lent, cu o viteză medie de 100°C | oră pentru probele nr. 1 și 80°C | oră pentru probele nr. 2. Atît sinterizarea cît și răcirea s-au făcut în atmosferă de oxigen.

Măsurarea punctelor Curie s-a făcut cu ajutorul unui magnetometru astatic și simetric, al cărui construcție și mod de funcționare sînt descrise într-o lucrare anterioară [7].

Rezultate experimentale. Variația temperaturii Curie atît pentru probele nr. 1 (ferite magneziu-zinc) cît și pentru probele nr. 2 (ferite cupru-zinc) în funcție de concentrația trioxidului de fier, este redată în fig. 1.

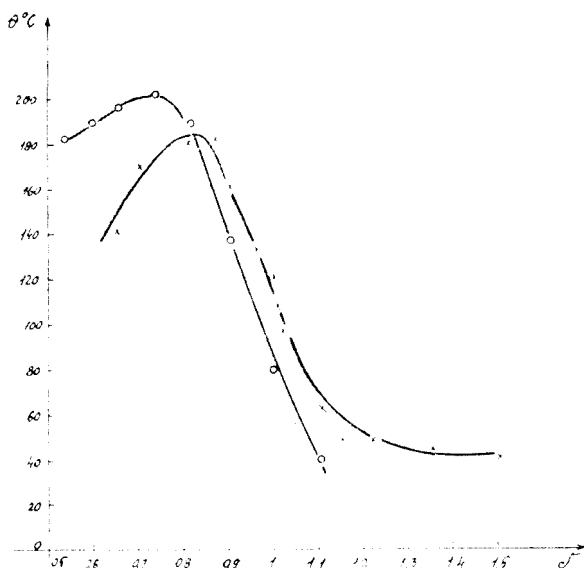


Fig. 1. Dependența temperaturii Curie Θ ($^{\circ}\text{C}$) de concentrația trioxidului de fier, pt. ferita magneziu-zinc (1) și cupru-zinc (2).

Atît în alura curbei nr. 1 cît și nr. 2 constatăm trei regiuni distincte, care corespund la trei game de concentrație a trioxidului de fier. Prima regiune corespunde pentru $1,15 \leq \delta \leq 1,5$, unde temperatura Curie pentru probele nr. 1 crește lent, iar pentru probele nr. 2 se află în domeniul paramagnetic la temperatura camerei. Credem că, în această regiune avem de a face cu trei componente: una feromagnetică $\text{Mg}_n \text{Zn}_{1-n} \text{Fe}_2\text{O}_4$, respectiv $\text{Cu}_n \text{Zn}_{1-n} \text{Fe}_2\text{O}_4$ și două componente neferomagnetice MgO și ZnO , respectiv CuO și ZnO . A doua regiune corespunde pentru $0,85 \leq \delta \leq 1,15$ (1), res-

pectiv $0,75 \leq \delta \leq 1,15$ (2). În această regiune se constată o creștere pronunțată a temperaturii Curie cu creșterea concentrației trioxidului de fier. Credem că în această regiune predomină două componente feromagnetice: $Mg_n Zn_{1-n} Fe_2 O_4$ și $Fe_3 O_4$, respectiv $Cu_n Zn_{1-n} Fe_2 O_4$ și $Fe_3 O_4$. Cu creșterea concentrației trioxidului de fier, crește concentrația magnetitei, care avînd punctul Curie ridicat ($590^\circ C$), duce la creșterea în mod intens a temperaturii Curie a amestecului.

A treia regiune corespunde pentru $0,65 \leq \delta \leq 0,85$ (1), respectiv $0,55 \leq \delta \leq 0,75$ (2), în care se constată o scădere a temperaturii Curie cu creșterea concentrației trioxidului de fier. Credem că în această regiune predomină trei componente: două feromagnetice $Mg_n Zn_{1-n} Fe_2 O_4$ respectiv $Cu_n Zn_{1-n} Fe_2 O_4$ și $Fe_3 O_4$, cea paramagnetică fiind $\alpha Fe_2 O_3$. Prin scăderea lui δ crește doar componenta paramagnetică, care de la o anumită limită nu mai este dizolvată de componenta de bază, care duce la scăderea temperaturii Curie.

Concluzii. Studiul efectuat asupra feritelor magneziu-zinc și cupru-zinc, permit obținerea din aceleași materii prime a unor materiale feritice cu o largă gamă de temperaturi de transformare magnetică. În același timp, s-a găsit o bună concordanță între rezultatele experimentale obținute și teoria lui Néel referitoare la proprietățile magnetice ale feritelor. Pe de altă parte, studiul efectuat ne-a permis tragerea unor concluzii cu privire la structura acestor compuși în funcție de concentrația trioxidului de fier.

BIBLIOGRAFIE

1. K. A. Piskariov, *Ferriți*, Izdatelstvo AN BSSR, Minsk, 1960.
2. J. G. Booth and J. Crangle, „Proc. Phys. Soc.”, **79**, 1271. (1962).
3. T. A. Smolenski, „DAN” **78**, 921 (1951).
4. J. Smit and H. P. J. Wijn, *Ferrites*, 1959.
5. C. Guillaud, „Colloques de ferromagnétisme et antiferromagnétisme”, Grenoble, 1950, p.91.
6. L. Néel, „Ann. Physique” **3**, 137 (1948).
7. V. Marian, I. Maxim și H. Țintea, „Comunicările Academiei R.P.R.” nr. 9—10, 1952.

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ КЮРИ У МАГНЕВО-ЦИНКОВЫХ И МЕДНО-ЦИНКОВЫХ ФЕРРИТОВ

(Резюме)

Изучается изменение температуры Кюри у ферритов $Mg_{0,45} Zn_{0,55} Fe_2 O_4$ и $Cu_{0,4} Zn_{0,6} Fe_2 O_3$ в зависимости от избытка или отсутствия железа в стехиометрическом составе.

У обоих ферритов обнаружено максимум температуры Кюри в зависимости от концентрации триоксида железа. Проведенное исследование позволило сделать ряд заключений, относящихся к структуре этих соединений.

ETUDE DE LA TEMPÉRATURE CURIE POUR LES FERRITES MAGNÉSIUM-
ZINC ET CUIVRE-ZINC

(R é s u m é)

On étudie la variation de la température Curie des ferrites $Mg_{0,46}Zn_{0,55}Fe_2O_4$ et $Cu_{0,4}Zn_{0,6}Fe_2O_4$ en fonction de l'excès ou du manque de fer dans leur composition stoechiométrique.

Pour les deux ferrites on constate un maximum de température Curie en fonction de la concentration en trioxyde de fer. Cette étude a permis aux auteurs de tirer des conclusions relatives à la structure de ces composés.

MĂSURĂRI DE CONSTANTĂ DIELECTRICĂ A CATALIZATORULUI PE BAZĂ DE V_2O_5 , LA FRECVENȚE ULTRAÎNALTE

de

R. BAICAN și D. POPESCU

În articolul de față sînt descrise măsurătorile de constantă dielectrică la frecvențe ultraînalte efectuate în laboratorul Catedrei de electronică, lucrare încadrată în studiul unor catalizatori, anume catalizatorul pe bază de V_2O_5 .

Pentru a pune la punct o metodă adecvată substanțelor studiate, am încercat trei metode cu ghizi de undă dintre procedeele cunoscute pentru măsurarea constantei dielectrice la frecvențe mari, repetînd măsurătorile asupra unor materiale dielectrice ca: plexiglas, ebonit, textolit, ClNa, etc., studiate în prealabil de alți cercetători. Valorile obținute de noi pentru constanta dielectrică a acestor materiale au fost în bună concordanță cu valorile date în literatură.

1. Metoda „bastonașului de dielectric” [1] a fost abandonată, probele de catalizator studiate fiind dificil prelucrabile la dimensiunile cerute de această metodă.

2. Metoda de scurt circuit și mers în gol [2], [3] a fost încercată, însă i-am preferat :

3. metoda probei așezate lângă scurtcircuit [4], [5], care necesită un număr mai redus de operații pentru o aceeași precizie a rezultatelor.

Principiul metodei utilizate. În fig. 1 este arătată poziția probei în ghidul scurtcircuitat. În aceste condiții [6], constanta dielectrică complexă a mediului studiat,

$$\epsilon_2^* = \epsilon_2' - j\epsilon_2'' \quad (1)$$

este dată de expresia

$$\epsilon_2^* = \frac{1 - \frac{\gamma_2^2 \lambda_c^2}{(2\pi)^2}}{1 + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1}\right)^2} \quad (2)$$

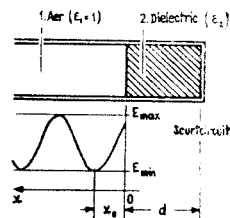


Fig. 1.

unde γ_2 este constanta de propagare în dielectric, λ_c lungimea de undă critică a modului de propagare în ghid, λ_1 este lungimea de undă în câmpul staționar din porțiunea cu aer a ghidului, iar permeabilitatea magnetică a dielectricului, μ_2 , se consideră egală cu unitatea.

Scrierea ecuațiilor de propagare și a condițiilor la limită pe suprafața aer — dielectric [4] duce la ecuația :

$$\frac{\operatorname{th} \gamma_2 d}{\gamma_2 d} = - \frac{j \cdot \lambda_1}{2\pi d} \cdot \frac{k - j \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_1}}{1 - j \cdot k \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_1}} \quad (3)$$

care permite determinarea lui γ_2 pe cale grafică [4], [7] sau prin aproximații succesive [8], din mărimi accesibile măsurătorilor :

$$k = \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \text{coeficientul de undă călătoare,}$$

$$d = \text{grosimea probei,}$$

$$x_0 = \text{distanța de la suprafața de separare la priniul minim al câmpului electric.}$$

Cunoscînd valoarea constantei de propagare γ_2 , introducerea acesteia în relația (2) permite calcularea constantei dielectrice ϵ_2^* — scop urmărit în lucrarea noastră.

În condițiile utilizării dielectricilor cu pierderi mici [9], γ_2 este determinată esențial de componenta sa de fază, adică,

$$\gamma_2 = j\beta_2 \quad (4)$$

și deoarece coeficientul de undă călătoare k este neglijabil, ecuația (3) devine :

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_2 d}{\beta_2 d} = - \frac{\lambda_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_1}}{2\pi d} \quad (5)$$

În acest caz, relația (2) se va scrie :

$$\epsilon_2' = \frac{1 + \left(\frac{\beta_2 \lambda_c}{2\pi} \right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1} \right)^2} \quad (6)$$

constanta dielectrică a substanței studiate fiind esențial componenta activă a lui ϵ_2^* .

Procedeeul experimental, măsurători. Au fost studiate trei probe: una de V_2O_5 cu procent de impurități 15% și celelalte două de catalizator industrial de V_2O_5 (7% V_2O_5 pe suport de 67% SiO_2), neutilizat și utilizat.

Pentru măsurători s-a folosit o linie de măsură TESLA QZV 222 II, reprezentată schematic în fig. 2, care lucrează la o frecvență în jurul a 9,4 GHz. Mărimile λ_1 și x_0 au fost măsurate cu ajutorul unui măsurător de undă staționară, care permite aprecierea de $\pm 0,01$ mm. Ca instrument indicator al măsurătorului de undă staționară s-a utilizat un galvanometru de tip „Multiflex”, de sensibilitate $5 \cdot 10^{-10}$ A/div.

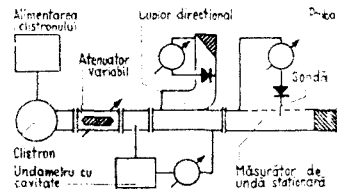


Fig. 2.

Pentru a obține probe de dimensiunile ghidului, catalizatorul pe bază de V_2O_5 (livrat industrial sub formă de bastonașe scurte, friabile) a fost întâi mojarat și apoi presat, fără adaos de apă sau alte substanțe, în forma dorită. Tot prin presare uscată s-au obținut probele din V_2O_5 85%, existent sub formă de pulbere. Am avut în vedere ca, după presare, probele obținute să-și păstreze greutatea specifică inițială, așa cum sînt utilizate în cataliza industrială. Alte precauțiuni luate la prepararea probelor au fost păstrarea granulației și evitarea adsorbției vaporilor de apă pe catalizator.

Pentru obținerea preciziei maxime la determinarea lui ϵ'_2 , este necesar să se folosească probe a căror grosime d să fie egală cu sfertul lungimii de undă a cîmpului staționar în dielectric ($\lambda_2/4$) sau cu un multiplu impar al acestuia ($3\lambda_2/4, 5\lambda_2/4, \dots$) [4], [6]. Pentru a cunoaște exact valorile λ_2 , am ridicat pentru fiecare substanță studiată caracteristicile $k = \frac{E_{\min}}{E_{\max}} =$

$= f(d)$ și $\frac{x_0}{\lambda_1} = f(d)$. Prima caracteristică prezintă maxime pentru valorile $d = \frac{\lambda_2}{4}, \frac{3\lambda_2}{4}, \dots$, etc., iar a doua, la aceleași valori ale lui d are puncte de inflexiune. În fig. 3 sînt redată caracteristicile obținute pentru proba de catalizator pe bază de V_2O_5 , utilizat.

În baza acestor măsurători s-au realizat probele cu grosimea $d = \frac{\lambda_2}{4}$ și s-au măsurat x_0 și λ_1 .

Rezultate, concluzii. Constanta dielectrică a probelor studiate a fost calculată cu relația (6), după ce în prealabil a fost cunoscută valoarea β_2 din (5), cu ajutorul unor tabele [10].

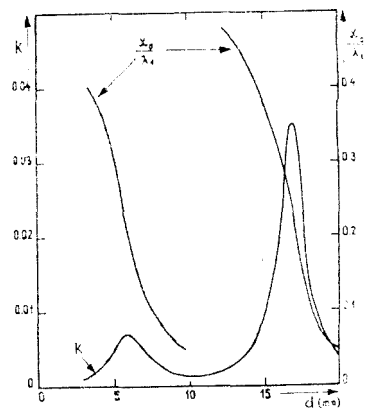


Fig. 3.

Am considerat ca justificată utilizarea relațiilor (5) și (6), valabile în cazul dielectricilor cu pierderi mici, întrucît valorile obținute prin calcul pentru tangenta unghiului de pierderi, $\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\epsilon_2''}{\epsilon_2'}$, nu depășesc $3,5 \cdot 10^{-3}$ la nici una din probele studiate, iar coeficientul de undă călătoare (la probe cu $d = \frac{\lambda_2}{4}$) nu este mai mare de 0,05.

Fără a lua în considerare erorile ce intervin prin aproximarea relațiilor (2) și (3) cu relațiile (6) respectiv (5), putem afirma, ținînd cont de precizia măsurătorilor, că rezultatele obținute pot fi afectate de erori ce nu întrec 3%. Astfel, pentru :

1. V_2O_5 85% $\epsilon_2' = 7,88 \pm 0,24$
2. Catalizator pe bază de V_2O_5 ,
neutilizat $\epsilon_2' = 2,99 \pm 0,09$
3. Catalizator pe bază de V_2O_5 ,
utilizat $\epsilon_2' = 2,79 \pm 0,08$

Se constată o diferență apreciabilă între valorile constantei dielectrice a V_2O_5 85% și ale catalizatorului pe bază de V_2O_5 . Nu ne putem pronunța însă în ceea ce privește o eventuală diferență între constantele dielectrice pentru catalizatorul utilizat și neutilizat, date fiind valorile apropiate obținute și limitarea de către erori.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Le Bot, „Ann. Physique”, 1956, 5-6, nr. 1, 463-492.
2. J. B. Birks, „Proc. Phys. Soc.”, 60 282, 1948.
3. N. Andreescu, „Studii și cercetări de fizică” XI, nr. 4, 1960, 1048-1054.
4. S. Roberts, A. Hippel, „Journ. Appl. Phys.”, 1946, 17, nr. 7, 610-616.
5. N. N. Malov, „JETP”, 1946, 16, nr. 7, 607-613.
6. G. A. Burdun, „Jurn. tehn. fiz.” XX, nr. 7, 1950, 813-821.
7. J. Ph. Pooley, „Appl. Scient. Res.”, 1954, 4 B, nr. 3, 173-176.
8. F. J. Cripwell, B. M. Sutherland, „Trans. Faraday Soc.”, 1946, 42 A, 149-152.
9. T. W. Dakin, C. N. Works, „Journ. Appl. Phys.”, 1947, 18, nr. 9, 789-796.
10. E. Jahnke, F. Emde, „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig-Berlin, 1933.

ИЗМЕРЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ КАТАЛИЗАТОРА НА ОСНОВАНИИ V_2O_5 ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

(Резюме)

Приводится метод, экспериментальный приём, а также результаты измерений диэлектрической постоянной при частоте 9,4 гц, проведенных для 85% проб V_2O_5 и для основного катализатора V_2O_5 (7% V_2O_5 , 67% SiO_2), использованного и неиспользованного.

MESURES DE CONSTANCE DIÉLECTRIQUE DU CATALYSEUR
À BASE DE V_2O_5 AUX FRÉQUENCES ULTRA-HAUTES

(R é s u m é)

On présente la méthode, le procédé expérimental et les résultats des mesures de constante diélectrique à fréquence de 9,4 GHz, effectuées pour des échantillons de V_2O_5 85% et pour un Catalyseur à base de V_2O_5 (7% V_2O_5 , 67% SiO_2) utilisé et non utilisé.

STUDIUL UNOR PROPRIETĂȚI SEMICONDUCTOARE ALE SISTEMULUI $V_2O_5 - B_2O_3$

de

SIMION GOCAN și LIVIU STĂNESCU

Oxizii considerați mai sus fac parte din grupa acelor care în anumite condiții formează sticle cu alți oxizi, cum ar fi : de cupru, plumb, bismut, arsen, molibden, etc.

Sticlele semiconductoare au început să fie studiate și se pare că prezintă mare interes atât teoretic cât și practic. Sistemele studiate pînă acum nu conțin B_2O_3 , și ne-am putea aștepta din partea anhidridei borice să mărească rezistența probelor, fără să influențeze prea mult energia de activare, ceea ce este foarte avantajos în cazul termistorilor de tip perlă.

Sistemul studiat face parte din sistemul ternar $V_2O_5 - B_2O_3 - PbO$. Am considerat că este necesar să începem mai întîi studiul sistemului binar, pentru a ne putea fixa mai bine zona valorilor din triunghiul concentrațiilor.

În ultimii ani s-a stabilit și fundamentat teoretic că, starea în care o substanță este semiconductoare, nu trebuie să fie neapărat cristalină și că la formarea proprietăților electronice ale corpului solid, un rol fundamental îl joacă ordinea locală, astfel, încît și substanțele amorfe, ca seleniul amorf, germaniul amorf, sticlele pe bază de pentoxid de vanadiu, unele topituri la temperaturi nu mult prea ridicate față de temperatura de topire, au o conductibilitate electronică nemetalică [1] [2].

Partea experimentală.

Prepararea probelor. Pentoxidul de vanadiu V_2O_5 a fost preparat, pornindu-se de la metavanadatul de amoniu NH_4VO_3 p. a. prin calcinare într-un curent de oxigen.

Anhidrida borică B_2O_3 a fost preparată prin deshidratarea completă a acidului boric BO_3H_3 p. a.

În continuare s-au efectuat topiturile sistemului $V_2O_5 - B_2O_3$ de următoarele concentrații procentuale :

Nr. probei:	1	2	3	4	5	6
V_2O_5 %	95	90	80	70	60	50
B_2O_3 % :	5	10	20	30	40	50

Probele pentru măsurători au fost obținute din topituri sub formă de perlă; ca electrozi s-a folosit sîrmă subțire de argint.

Aparatura. Schema aparatului folosit pentru măsurarea rezistențe, electrice cu temperatura la probele de tip perlă este redată în fig. 1.

Rezultatele măsurătorilor.

S-a efectuat un studiu privind variația rezistenței electrice cu temperatura și cu compoziția probelor din care s-a calculat energia de activare. Rezultatele obținute sînt redată în tabelele 1—6 și figurile 2 și 3.

Tabel 1

Variația rezistenței în funcție de temperatură a sistemului; 95% V_2O_5 —5% B_2O_3 și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T ($^{\circ}C$)	T ($^{\circ}K$)	$\frac{10^3}{T}$ $\left(\frac{1}{K}\right)$	ΔE (eV)
1	3,36 10^3	3,5263	23	296	3,38	
2	2,45 10^3	3,3892	34	307	3,26	
3	1,70 10^3	3,2304	50	323	3,10	0,172
4	9,15 10^2	2,9614	80	353	2,83	
5	7,48 10^2	2,8739	94	367	2,73	
6	6,53 10^2	2,8149	107,5	380,5	2,63	
7	5,50 10^2	2,7404	121	394	2,54	
8	4,56 10^2	2,6590	134	407	2,46	0,175
9	3,89 10^2	2,5899	147,5	420,5	2,38	0,185
10	3,40 10^2	2,5315	160	433	2,31	
11	2,94 10^2	2,4683	172,5	445,5	2,24	
12	2,54 10^2	2,4048	184	457	2,19	
13	2,23 10^2	2,3483	196	469	2,13	0,209
14	1,98 10^2	2,2967	208	481	2,08	
15	1,76 10^2	2,2455	220	493	2,03	
16	1,58 10^2	2,1987	231	504	1,98	
17	1,42 10^2	2,1523	242,5	515,5	1,94	
18	1,30 10^2	2,1139	254,5	527,5	1,90	0,191
19	1,21 10^2	2,0828	265,5	538,5	1,86	
20	1,11 10^2	2,0453	276,5	549,5	1,82	
21	1,05 10^2	2,0212	287,5	560,5	1,78	
22	8,40 10	1,9243	299	572	1,75	0,207
23	7,85 10	1,8949	310	583	1,71	

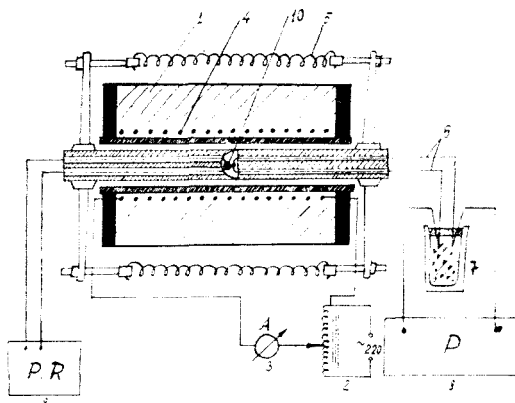


Fig. 1. 1 — cuptor electric, 2 — autotransformator reglabil, 3 — ampermetru, 4 — rezistența electrică de încălzire a cuptorului, 5 — resorturi, 6 — termocuplu de Pt — PtRh 7 — vas Dewar, 8 — potențiomtru de tip Feussner, 9 — punte electronică pentru măsurat rezistențe, 10 — proba de măsurat de tip perlă.

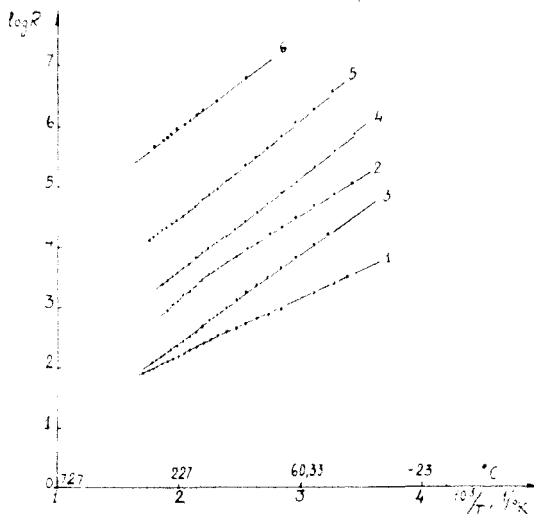


Fig. 2. Variația rezistenței electrice în funcție de temperatură și de compoziția probelor.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 — 95% V_2O_5 — 5% B_2O_3 | 4 — 70% V_2O_5 — 30% B_2O_3 |
| 2 — 90% V_2O_5 — 10% B_2O_3 | 5 — 60% V_2O_5 — 40% B_2O_3 |
| 3 — 80% V_2O_5 — 20% B_2O_3 | 6 — 50% V_2O_5 — 50% B_2O_3 |

Tabel 2

Variația rezistenței electrice în funcție de temperatură a sistemului 90% V₂O₅ - 10% B₂O₃ și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T (°C)	T (°K)	$\frac{10^8}{T}$ ($\frac{1}{^{\circ}K}$)	ΔE (eV)
1	1,26 10 ⁵	5,1004	21	294	3,40	0,250
2	8,03 10 ⁴	4,9047	34	307	3,26	
3	5,06 10 ⁴	4,7042	50	323	3,10	
4	3,34 10 ⁴	4,5237	66	339	2,95	
5	2,38 10 ⁴	4,3766	80	353	2,83	
6	1,75 10 ⁴	4,2430	94	367	2,73	0,282
7	1,26 10 ⁴	4,1004	107,5	380,5	2,63	
8	9,42 10 ³	3,9741	121	294	2,54	
9	7,30 10 ³	3,8633	134	407	2,46	
10	5,66 10 ³	3,7528	147,5	420,5	2,38	
11	4,48 10 ³	3,6513	160	433	2,31	0,277
12	3,58 10 ³	3,5539	172,5	445,5	2,24	
13	2,86 10 ³	3,4564	184	457	2,19	
14	2,33 10 ³	2,3674	196	469	2,13	
15	1,90 10 ³	3,2788	208	481	2,08	
16	1,55 10 ³	3,1931	220	493	2,03	0,319
17	1,28 10 ³	3,1072	231	504	1,98	
18	1,08 10 ³	3,0334	242,5	515,5	1,94	
19	8,70 10 ²	2,9395	254,5	527,5	1,90	

Tabel 3

Variația rezistenței electrice cu temperatura a sistemului 80% V₂O₅ - 20% B₂O₃ și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T (°C)	T (°K)	$\frac{10^2}{T}$ (1/°K)	ΔE (eV)
1	1,77 10 ⁴	4,2480	39	312	3,21	0,299
2	1,16 10 ⁴	4,0645	50	323	3,10	
3	7,20 10 ³	3,8573	66	339	2,95	
4	4,75 10 ³	3,6767	80	353	2,83	
5	3,32 10 ³	3,5211	94	367	2,73	
6	2,40 10 ³	3,3802	107,5	380,5	2,63	0,312
7	1,75 10 ³	3,2430	121	394	2,54	
8	1,31 10 ³	3,1173	134	407	2,46	
9	1,00 10 ³	3,0000	147,5	420,5	2,38	
10	6,05 10 ²	2,7818	172,5	445,5	2,24	
11	4,87 10 ²	2,6875	184	457	2,19	0,295
12	4,00 10 ²	2,6021	196	469	2,13	
13	3,32 10 ²	2,5211	208	881	2,08	
14	2,78 10 ²	2,4440	220	493	2,03	
15	2,37 10 ²	2,3747	231	504	1,98	
16	2,02 10 ²	2,3054	242,5	515,5	1,94	0,318
17	1,72 10 ²	2,2355	254,5	527,5	1,90	
18	1,48 10 ²	2,1703	265,5	538,5	1,86	
19	1,38 10 ²	2,1399	276,5	549,5	1,82	
20	1,12 10 ²	2,0492	287,5	560,5	1,78	
21	1,00 10 ²	2,0000	299	572	1,75	

Tabel 4

Variația rezistenței electrice cu temperatura a sistemului 70% V_2O_5 - 30% B_2O_3 și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T ($^{\circ}C$)	T ($^{\circ}K$)	$\frac{10^3}{T}$ ($1/^{\circ}K$)	ΔE (eV)
1	$8,40 \cdot 10^5$	5,9243	18	211	3,43	0,323
2	$4,13 \cdot 10^5$,6160	34	307	3,26	
3	$2,25 \cdot 10^5$	5,3522	50	323	3,10	
4	$1,34 \cdot 10^5$	5,1271	66	339	2,95	0,313
5	$8,75 \cdot 10^4$	4,9420	80	353	2,83	
6	$5,85 \cdot 10^4$	4,7672	94	367	2,73	
7	$4,15 \cdot 10^4$	4,6180	107,5	380,5	2,53	
8	$2,91 \cdot 10^4$	4,4639	121	394	2,54	
9	$2,15 \cdot 10^4$	4,3324	134	407	2,46	
10	$1,64 \cdot 10^4$	4,2148	147,5	420,5	2,38	0,320
11	$1,25 \cdot 10^4$	4,0969	160	433	2,31	
12	$9,84 \cdot 10^3$	3,9930	172,5	445,5	2,24	
13	$7,98 \cdot 10^3$	3,9020	184	457	2,19	
14	$6,46 \cdot 10^3$	3,8102	196	469	2,13	
15	$5,30 \cdot 10^3$	3,7243	208	481	2,08	
16	$4,50 \cdot 10^3$	3,6532	220	493	2,03	0,267
17	$3,88 \cdot 10^3$	3,5888	231	504	1,98	
18	$3,36 \cdot 10^3$	3,5263	242,5	515,5	1,94	
19	$2,95 \cdot 10^3$	3,4698	254,5	527,5	1,90	
20	$2,65 \cdot 10^3$	3,4232	265,5	538,5	1,86	

Tabel 5

Variația rezistenței electrice cu temperatura a sistemului: 60% V_2O_5 - 40% B_2O_3 și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T ($^{\circ}C$)	T ($^{\circ}K$)	$\frac{10^3}{T}$ ($1/^{\circ}K$)	ΔE (eV)
1	$4,00 \cdot 10^6$	6,6021	34	307	3,26	0,354
2	$2,00 \cdot 10^6$	6,3010	50	323	3,10	
3	$1,20 \cdot 10^6$	6,0792	66	339	2,95	
4	$7,00 \cdot 10^5$	5,8451	80	353	2,83	0,334
5	$4,50 \cdot 10^5$	5,6532	94	367	2,73	
6	$3,30 \cdot 10^5$	5,5185	107,5	380,5	2,63	
7	$2,30 \cdot 10^5$	5,3617	121	394	2,54	
8	$1,60 \cdot 10^5$	5,2041	134	407	2,46	
9	$1,25 \cdot 10^5$	5,0969	147,5	420,5	2,38	
10	$9,50 \cdot 10^4$	4,9777	160	433	2,31	0,312
11	$7,50 \cdot 10^4$	4,8751	172,5	445,5	2,24	
12	$6,10 \cdot 10^4$	4,7853	184	457	2,19	
13	$4,95 \cdot 10^4$	4,6946	196	469	2,13	
14	$4,12 \cdot 10^4$	4,6149	208	481	2,08	
15	$3,50 \cdot 10^4$	4,5441	220	493	2,03	
16	$2,93 \cdot 10^4$	4,4669	231	504	1,98	0,298
17	$2,55 \cdot 10^4$	4,4065	242,5	515,5	1,94	
18	$2,20 \cdot 10^4$	4,3424	254,5	527,5	1,90	
19	$1,95 \cdot 10^4$	4,2900	265,5	538,5	1,86	
20	$1,70 \cdot 10^4$	4,2304	276,5	449,5	1,82	
21	$1,50 \cdot 10^4$	4,1761	287,5	560,5	1,78	
22	$1,32 \cdot 10^4$	4,1206	299	572	1,65	

Tabel 6

Variația rezistenței electrice cu temperatura a sistemului: 50% B_2O_5 —50% B_2O_3
și energia de activare

Nr. crt.	R (Ω)	log R	T ($^{\circ}C$)	T ($^{\circ}K$)	$\frac{10^3}{T}$ ($1/^{\circ}K$)	ΔE (eV)
1	7,00 10^6	6,8451	121	394	2,54	0,303
2	2,50 10^6	6,3979	160	433	2,31	
3	1,90 10^6	6,2788	184	457	2,19	
4	1,65 10^6	6,2175	196	469	2,13	0,314
5	1,25 10^6	6,0969	208	481	2,08	
6	1,15 10^6	6,0607	220	493	2,03	
7	9,00 10^5	5,9542	231	504	1,98	0,427
8	7,50 10^5	5,8751	242,5	515,5	1,94	
9	6,43 10^5	5,8082	254,5	527,5	1,90	
10	5,90 10^5	5,7709	266,5	538,5	1,86	0,427
11	4,75 10^5	5,6721	287,5	560,5	1,78	
12	2,50 10^5	5,3979	310	583	1,71	

În continuare s-a trecut la dozarea V_2O_4 din probe, rezultatele obținute fiind trecute în tabelul 7 și fig. 4.

Tabel 7

Conținutul de V_2O_4 % din probă

Nr. probei	Probal		V_2O_4 %
	V_2O_5 %	B_2O_3 %	
1	95	5	0,35
2	90	10	0,33
3	80	20	0,30
4	70	30	0,26
5	60	40	0,23
6	50	50	0,19

De asemenea s-a efectuat trasarea diagramei de echilibru a sistemului $V_2O_5 - B_2O_3$ care este redată în fig. 5.

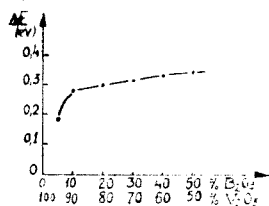


Fig. 3. Variația energiei de activare ΔE (eV) în funcție de compoziția probelor.

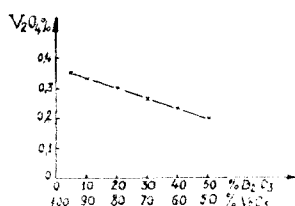


Fig. 4. Variația conținutului de V_2O_4 % în funcție de compoziția probelor.

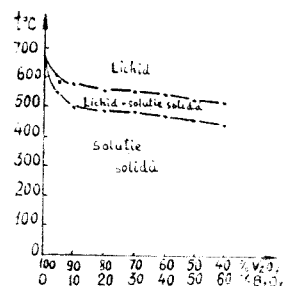


Fig. 5. Diagrama de echilibru a sistemului $V_2O_5 - B_2O_3$.

În final, am executat spectrele de absorbție în infraroșu în Nuyol pentru probele de V_2O_5 , B_2O_3 și următoarele compoziții : 90% V_2O_5 - 10% B_2O_3 și 60% V_2O_5 - 40% B_2O_3 , care sînt redată în fig. 6-9.

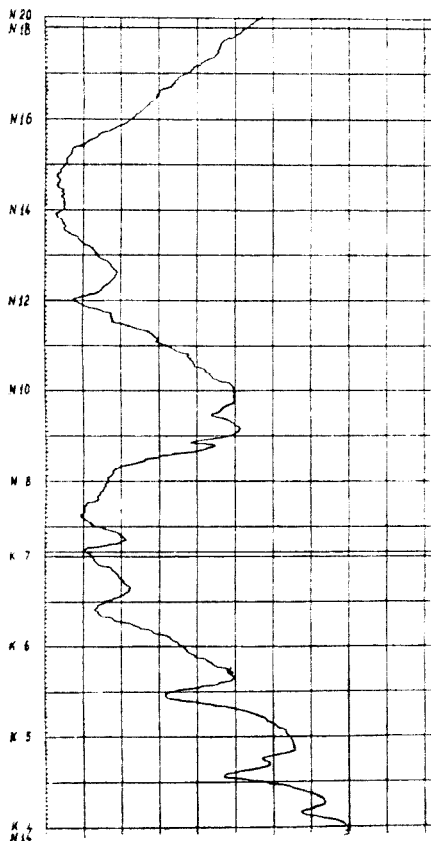


Fig. 6. Spectrul de absorbție în infraroșu a V_2O_5 .

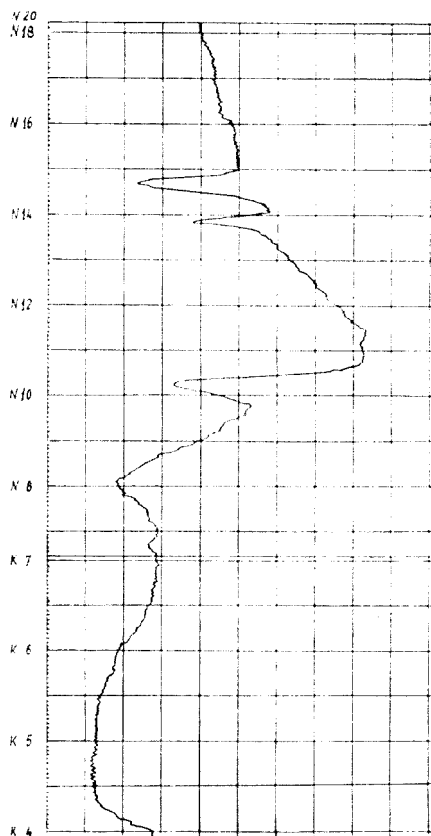


Fig. 7. Spectrul de absorbție în infraroșu a B_2O_3 .

Discutarea rezultatelor și concluzii.

Din examinarea fig. 2 și 3 se poate trage în general concluzia că, unul din scopurile urmărite prin adăusul de B_2O_3 și anume acela de creștere a rezistenței electrice a probelor, a fost atins. În același timp, energiile de activare au crescut întrucîtva, ceea ce ridică sensibilitatea la variațiile de temperatură a rezistenței electrice a acestor probe.

Prezența B_2O_3 în probe nu a schimbat sensibil conținutul de V_2O_4 raportat la V_2O_5 , corespunzător temperaturilor la care s-a făcut topirea probelor, ceea ce este în acord cu datele din literatură [3]. Dacă ne refe-

rim la întregul sistem, există o ușoară scădere a conținutului de V_2O_4 , după cum rezultă din fig. 4.

Comparînd diagrama de echilibru, fig. 5, și graficul care ne dă dependența energiei de activare de conținutul de B_2O_3 , fig. 3, constatăm un

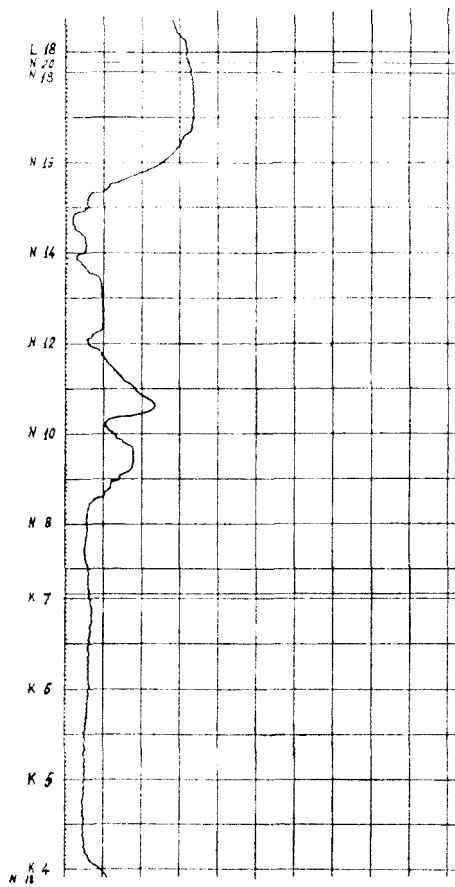


Fig. 8. Spectrul de absorbție în infraroșu a 90% V_2O_5 - 10% B_2O_3 .

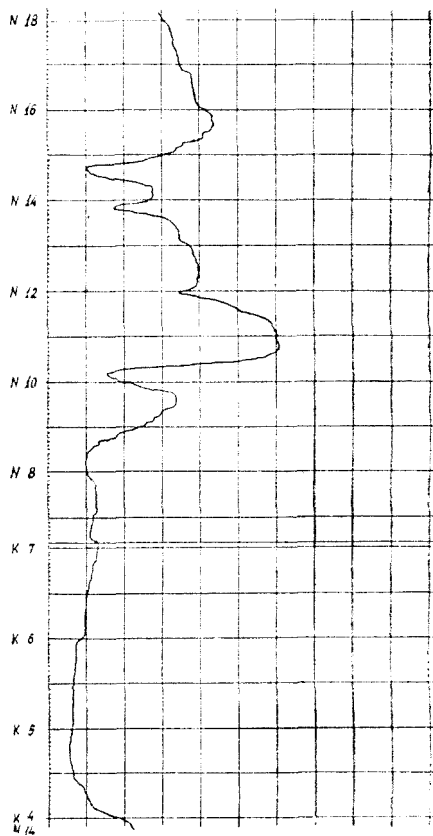


Fig. 9. Spectrul de absorbție în infraroșu a 60% V_2O_5 - 40% B_2O_3 .

mers antibat perfect. Saltul care se observă în ambele cazuri pentru un conținut de 10% B_2O_3 , ar putea fi pus pe seama începutului formării fazei sticloase propriu-zise, constatată și din proprietățile mecanice ale probelor care conțin de la 10% B_2O_3 în sus.

Din examinarea spectrelor de absorbție în infraroșu, fig. 6—9, se poate trage în general concluzia că nu există o interacțiune puternică între V_2O_5 și B_2O_3 , întrucît se păstrează, în mare, pentru sistemele mixte, maximele de absorbție corespunzătoare componentelor puri și că deci, B_2O_3 ar avea mai mult o acțiune de diluare.

B I B L I O G R A F I E

1. W. Dunlap, *An Introduction to Semiconductors*, New-York — London, 1957, 16.
2. O. A. Esin, V. L. Ziazev, J.N.H., 1957, 1998.
3. Milan J., „Phys. Chem.” 33, 498, 1929 (după P. Pascal, *Traité de Chimie Minérale*, tom. IV, 295).

 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СВОЙСТВ
 СИСТЕМЫ $V_2O_5 - B_2O_3$

(Резюме)

Изучилось изменение электрического сопротивления системы в зависимости от температуры:

$$X\% V_2O_5 - (100-X)\% B_2O_3 \text{ (где } X = 5, 10, 20, 30, 40 \text{ и } 50).$$

Пробы были получены из плавок в виде стеклянных жемчугов, а в качестве электродов была использована серебряная проволока.

Этим исследованием обнаружено, что посредством примеси B_2O_3 повышается сопротивление проб, а энергия активации $\Delta E(eV)$ имеет большее повышение до 10% примеси B_2O_3 , а затем повышение меньше.

 ÉTUDE DE PROPRIÉTÉS SEMI-CONDUCTRICES DU SYSTÈME
 $V_2O_5 - B_2O_3$

(Résumé)

On a étudié la variation de la résistance électrique en fonction de la température pour le système :

$$X\% V_2O_5 - (100 - X)\% B_2O_3 \text{ (où } X = 5, 10, 20, 30, 40 \text{ et } 50).$$

Les essais ont été obtenus par fusion sous forme de perles vitreuses ; pour les électrodes on a utilisé du fil d'argent.

Cette étude a permis de constater qu'en ajoutant du B_2O_3 , la résistance des essais augmente et que l'énergie d'activation $\Delta E(eV)$ a une croissance plus considérable jusqu'à 10% d'addition de B_2O_3 , mais qu'ensuite la croissance devient plus faible.

CONTRIBUȚIUNI LA STUDIUL RELATIVIST AL POLARIZĂRII ELECTRONULUI

de

Z. GĂBOS și EVA SIMON

În cazurile cînd se studiază polarizarea longitudinală și transversală a electronilor liberi, este avantajos, dacă se utilizează ca funcții de bază bispinorii $u_r(\vec{p})$ ai lui Darwin, care sînt funcții proprii comune ale

operatorilor $\hat{\Sigma}_c = \frac{1}{|\vec{p}|} (\vec{\Sigma}, \hat{p})$ și $\hat{H}_p = c(\vec{\alpha}, \hat{p}) + \gamma_4 m_0 c^2$.

În literatură, la studiul polarizării, se folosesc ca funcții de bază bispinorii $u_r(\vec{p})$ ai lui Dirac. În această lucrare se studiază modificările ce intervin datorită trecerii de la reprezentarea lui Dirac la reprezentarea lui Darwin.

Lucrarea cuprinde patru puncte. În primele două se dă o sinteză a rezultatelor din literatură (stabilite pentru cazul reprezentării lui Dirac). În punctul al treilea se studiază, cum se modifică rezultatele, dacă funcțiile de bază $u_r(\vec{p})$ se înlocuiesc cu funcțiile $u_r(\vec{p})$, și apoi, în punctul patru, se arată utilitatea folosirii reprezentării lui Darwin la studiul polarizării longitudinale a electronilor emiși cu ocazia dezintegrării β^- .

1. Să considerăm electronul cu impulsul \vec{p} . Bispinorul corespunzător electronului poate fi dat sub forma

$$u(\vec{p}) = c_1 u_1(\vec{p}) + c_2 u_2(\vec{p}), \quad (1)$$

unde $u_r(\vec{p})$ reprezintă un sistem de funcții ortonormate :

$$\bar{u}_r(\vec{p}) u_s(\vec{p}) = \delta_{rs}. \quad (2)$$

Pentru a caracteriza starea de polarizare a electronului, se folosește matricea de densitate [1], [4]:

$$\rho = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} + (\vec{\xi}, \vec{\sigma}) \right], \quad (3)$$

unde $\vec{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ este „vectorul“ de polarizare și σ_i sînt matricile lui Pauli. Avem [1]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 c_2^* + c_2 c_1^*, & \xi_2 &= i(c_1 c_2^* - c_2 c_1^*), \\ \xi_3 &= c_1 c_1^* - c_2 c_2^*, & \mathbf{1} &= c_1 c_1^* + c_2 c_2^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Expresiile lor, ξ_1 și ξ_2 , pot fi scrise sub forma

$$\xi_1 = c_1^{(1)} c_1^{(1)*} - c_2^{(1)} c_2^{(1)*}, \quad \xi_2 = c_1^{(2)} c_1^{(2)*} - c_2^{(2)} c_2^{(2)*},$$

unde

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 + c_2), & c_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 - c_2), \\ c_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 - ic_2), & c_2^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 + ic_2). \end{aligned}$$

Dacă se introduce noțiunea de coeficient de orientare [1]:

$$O(u_1, u_2) = |c_1|^2 - |c_2|^2,$$

atunci se ajunge la concluzia că, coeficienții lui Stokes, ξ_1, ξ_2, ξ_3 , sînt coeficienți de orientare corespunzători funcțiilor de bază $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}), (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}), (u_1, u_2)$, unde

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 + u_2), & u_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 - u_2), \\ u_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 + iu_2), & u_2^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 - iu_2). \end{aligned}$$

La descrierea covariantă a polarizației, un rol fundamental îi revine matricii [1], [4]:

$$P_{\lambda\tau} = u(\lambda) \bar{u}(\tau), \quad (5)$$

unde $u(\lambda)$ este componenta λ a bispinorului $u(\vec{p})$, iar $\bar{u}(\tau)$ este componenta τ a bispinorului $\bar{u}(\vec{p})$.

Înlocuind (1) în expresia (5), și avînd în vedere (4), obținem

$$P_{\lambda\tau}(\vec{\xi}, \vec{p}) = \frac{1}{2} \left\{ [u_1(\lambda)\bar{u}_1(\tau) + u_2(\lambda)\bar{u}_2(\tau)] + \xi_3 [u_1(\lambda)\bar{u}_1(\tau) - u_2(\lambda)\bar{u}_2(\tau)] + \right. \\ \left. + \xi_1 [u_1(\lambda)\bar{u}_2(\tau) + u_2(\lambda)\bar{u}_1(\tau)] + i\xi_2 [u_2(\lambda)\bar{u}_1(\tau) - u_1(\lambda)\bar{u}_2(\tau)] \right\} \quad (6)$$

Matricea \bar{P} poate fi scrisă întotdeauna sub forma

$$P = \frac{1}{4} (S - iP\gamma_5 - iV_\mu\gamma_\mu + is_\mu\gamma_5\gamma_\mu - im_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu), \quad (7)$$

unde S este un scalar, P un pseudoscalar, V_μ reprezintă un vector, s_μ un pseudovector, iar $m_{\mu\nu}$ un tensor antisimetric de ordinul doi. În expresia (7), μ și ν sînt indici de însumare. În legătură cu însumarea în raport cu μ și ν , facem următoarea convenție: Dacă avem o expresie de tipul $A_{\mu\nu} B_{\mu\nu}$, unde $A_{\mu\nu}$ și $B_{\mu\nu}$ sînt antisimetrice față de indicii μ și ν , atunci se consideră, fie numai termenul $\nu > \mu$, fie numai termenul $\nu < \mu$.

În legătură cu matricea \bar{P} se pun următoarele probleme de bază:

- exprimarea lui \bar{P} în funcție de \vec{p} și $\vec{\xi}$;
- stabilirea lui $\vec{\xi}$ în cazul cînd cunoaștem \bar{P} .

În acest punct abordăm problema a) în cazul reprezentării lui Dirac. Soluția generală a ecuației

$$[c(\vec{\alpha}, \vec{p}) + \gamma_4 m_0 c^2] u(\vec{p}) = E u(\vec{p}),$$

în cazul cînd energia este pozitivă ($E = \varepsilon > 0$), poate fi scrisă sub forma

$$u(\vec{p}, c_1, c_2) = N_\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ B(\vec{\sigma}, e)\varphi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

unde

$$\varphi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad N_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2m_0 c^2}}, \quad B = \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|},$$

sau sub forma

$$u(\vec{p}, c_1, c_2) = c_1 u_1(\vec{p}) + c_2 u_2(\vec{p}),$$

unde u_1 și u_2 sînt bispinorii lui Dirac:

$$u_1(\vec{p}) = u(\vec{p}, 1, 0), \quad u_2(\vec{p}) = u(\vec{p}, 0, 1).$$

Utilizând expresia (6) și expresiile concrete ale bispinorilor lui Dirac, se obțin următoarele rezultate [4], [18]:

$$S = 1, \quad P = 0, \quad V_\mu = \frac{1}{m_0 c} \hat{p}_\mu, \quad (9)$$

$$\vec{s} = \vec{\xi} + \frac{\vec{p}(\vec{p}, \vec{\xi})}{m_0(\varepsilon + m_0 c^2)}, \quad s_4 = i \frac{(\vec{p}, \vec{\xi})}{m_0 c}. \quad (10)$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \vec{\xi} - \frac{\vec{p}(\vec{p}, \vec{\xi})}{m_0(\varepsilon + m_0 c^2)}, \quad G = \frac{i}{m_0 c} (\vec{p} \times \vec{\xi}) \quad (11)$$

unde vectorii \vec{s} , \vec{F} și \vec{G} au componentele

$$\vec{s}(s_1, s_2, s_3), \quad \vec{F}(m_{23}, m_{31}, m_{12}), \quad \vec{G}(m_{14}, m_{24}, m_{34}).$$

Se poate ajunge la expresiile de mai sus și prin metoda transformărilor [4]. Considerăm sistemul de laborator K și sistemul \bar{K} legat de particula în mișcare. Axele celor două sisteme să fie paralele. Dacă în sistemul \bar{K} considerăm bispinorii

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

care sînt funcții proprii comune ale operatorilor $\hat{H}_0 = \gamma_4 m_0 c^2$ și \sum_3 , atunci pentru sistemul \bar{K} obținem

$$\bar{P}(0) = \frac{1}{4} [1 + (\vec{\Sigma}, \vec{\xi})](1 + \gamma_4) = \frac{1}{8} (1 + \gamma_4) [1 + (\vec{\Sigma}, \vec{\xi})](1 + \gamma_4) \quad (13)$$

Pentru sistemul K avem [4], [10], [16]:

$$u_r = L(-\vec{p})u_r(0), \quad r = 1, 2 \quad (14)$$

$$\bar{P} = L(-\vec{p})\bar{P}(0)L(\vec{p}), \quad (15)$$

unde

$$L(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \left[1 + \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2} (\vec{\alpha}, \vec{e}) \right]. \quad (16)$$

Relația (15) ne conduce la expresiile (9), (10), (11).

Avînd în vedere că

$$\gamma_4 \frac{1 + \gamma_4}{2} = \frac{1 + \gamma_4}{2} \text{ și } \alpha_k \gamma_4 + \gamma_4 \alpha_k = 0,$$

din (13), (15), (16) mai rezultă [13]:

$$\bar{P} = \frac{1}{\mu(1 + \mu)} C \frac{1 + \gamma_4}{2} \left[1 + \left(\vec{\Sigma}, \vec{\xi} \right) \right] \frac{1 + \gamma_4}{2} C \gamma_4,$$

unde

$$\mu = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon}, \quad C = \frac{1 + \mu \gamma_4 + \left(\vec{\alpha}, \vec{v} \right)}{2}, \quad \vec{v} = \frac{c \vec{p}}{\varepsilon}.$$

C este operatorul lui Casimir (operatorul de proiecție, care proiectează pe spațiul soluțiilor de energie pozitivă ale ecuației lui Dirac). Dacă constanta de normare se stabilește astfel, încît să avem $u_r^* u_s = \delta_{rs}$, în loc de $\frac{1}{\mu(1 + \mu)}$ intervine numai $\frac{1}{1 + \mu}$.

În punctul care urmează prezentăm rezolvarea problemei b).

2. Avînd în vedere că

$$s_4 = \frac{i}{m_0 c} \left(\vec{p}, \vec{\xi} \right) = \frac{ic}{\varepsilon} \left(\vec{p}, \vec{s} \right)$$

și faptul că expresiile lui \vec{s} , s_4 , \vec{F} și \vec{G} sînt liniare în $\vec{\xi}$, problema b) se reduce la exprimarea lui $\vec{\xi}$ printr-o expresie liniară în raport cu vectorii \vec{s} , \vec{F} , \vec{G} . Rezolvînd această problemă, l-am exprimat pe $\vec{\xi}$ cu ajutorul matricii \bar{P} , deoarece

$$\vec{s} = -i S \rho \left(\bar{P} \vec{\gamma}_5 \right),$$

$$\vec{F} = -i S \rho \left(\bar{P} \gamma_5 \gamma_4 \vec{\gamma} \right),$$

$$\vec{G} = i S \rho \left(\bar{P} \gamma_4 \vec{\gamma} \right).$$

Starea de polarizație a electronului poate fi caracterizată în mod univoc cu ajutorul celor trei mărimi ξ_i ; în consecință există șapte relații între cele zece mărimi s_μ , $m_{\mu\nu}$. Acestea pot fi

$$s_\mu \hat{p}_\mu = 0, \quad m_{\mu\nu} = \frac{i}{m_0 c} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{p}_\rho s_\sigma \quad (17)$$

sau

$$m_{\mu\nu} \hat{p}_\mu = 0, \quad s_\mu = -\frac{i}{m_0 c} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{p}_\nu m_{\rho\sigma}. \quad (18)$$

Pe baza expresiilor (10) și (11) a lui \vec{s} și a lui \vec{F} , se obține [4]

$$\vec{\xi} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon + m_0 c^2} (\vec{s} + \vec{F}). \quad (19)$$

Din relațiile [8]

$$\begin{aligned} (\vec{p} \times \vec{s}) &= (\vec{p} \times \vec{\xi}), \\ (\vec{p}, \vec{s}) &= \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} (\vec{p}, \vec{\xi}), \end{aligned}$$

rezultă

$$\vec{\xi} = \vec{s} - \frac{c^2 (\vec{p}, \vec{s})}{\varepsilon (\varepsilon + m_0 c^2)} \vec{p} \quad (20)$$

La fel, utilizând relațiile

$$(\vec{p} \times \vec{F}) = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} (\vec{p} \times \vec{\xi}), \quad (\vec{p}, \vec{F}) = (\vec{p}, \vec{\xi}),$$

obținem

$$\vec{s} = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} \left[\vec{F} + \frac{\vec{p} (\vec{p}, \vec{F})}{m_0 (\varepsilon + m_0 c^2)} \right]. \quad (21)$$

Relațiile (11) ne conduc la

$$\vec{\xi} = \vec{F} - \frac{ic}{\varepsilon + m_0 c^2} (\vec{p} \times \vec{G}).$$

Sînt încă o mulțime de posibilități pentru a ajunge la vectorul $\vec{\xi}$, considerăm, însă, că cele enumerate mai sus sînt cele mai importante. Mai menționăm următoarele relații:

$$s_\mu s_\mu = \vec{\xi}^2, \quad m_{\mu\nu} m_{\mu\nu} = \vec{\xi}^2.$$

Relațiile (17), (18) ne dau și posibilitatea de a-l exprima pe \vec{P} sub forma unui produs de doi operatori.

Pe baza relațiilor (17) putem scrie [3]:

$$\vec{P} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{i \hat{p}}{m_0 c} \right) \left(1 - i \hat{s} \gamma_5 \right), \quad (22)$$

unde $\hat{s} = \gamma_\mu s_\mu$ și $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$. Relațiile (18) ne conduc la [8]

$$\vec{P} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{i \hat{p}}{m_0 c} \right) \left(1 - i m_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \right). \quad (23)$$

Noi completăm aceste rezultate, din literatură, cu

$$\overset{\rightarrow 2}{\xi} \hat{p}_\mu = -im_0c \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s_\nu m_{\rho\sigma},$$

care în cazul $\overset{\rightarrow 2}{\xi} = 1$ (polarizare totală) ne dă posibilitatea să scriem matricea \bar{P} sub forma :

$$\bar{P} = \frac{1}{4} (1 - i \hat{s} \hat{\gamma}_5) (1 - im_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu).$$

În literatură [11], [12], [14] se folosește și o altă cale pentru a caracteriza polarizația, avînd la bază posibilitatea de a scrie termenul

$$P_s = \frac{1}{2} (1 - im_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu) \quad (24)$$

care figurează în expresia (23) a lui \bar{P} sub o altă formă. Dacă se ia în considerare relația a doua de sub (17) și se introduce mărimile w_σ prin

$$w_\sigma = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\rho\mu\nu} \hat{p}_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu$$

atunci expresia (24) a lui \bar{P}_s se poate scrie sub forma

$$\bar{P}_s = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2w_\sigma s_\sigma}{m_0c} \right).$$

Avînd în vedere că $s_\mu \hat{p}_\mu = 0$, obținem $2w_\sigma s_\sigma = \gamma_5 \hat{s} \hat{p}$, prin urmare

$$P_s = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m_0c} \gamma_5 \hat{s} \hat{p} \right) \quad (25)$$

Avem deci

$$\bar{P}_s = P^{(+)} \bar{P}_s, \text{ unde } \bar{P}^{(+)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i}{m_0c} \hat{p} \right).$$

$\bar{P}^{(+)}$ este operatorul care proiectează pe stările de energie pozitivă, și P_s este operatorul care proiectează pe starea cu spinul orientat după direcția \vec{s} .

Mărimea

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu),$$

care apare în expresia lui w_σ , este operatorul de moment cinetic unghiular. Această constatare face posibilă descrierea covariantă a polarizării bazată pe considerente de teorie a câmpului [6], [14].

w_σ satisfac următoarele relații :

$$p_\mu w_\mu = 0, \quad (26)$$

$$[w_\rho, w_\sigma] = -\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\mu w_\nu, \quad (27)$$

$$w_\mu w_\mu = m_0^2 c^2 s(s+1), \quad s = \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Avînd la bază relația (26), se poate introduce un vector cu trei componente, componentele cărora satisfac relații de comutare similare celor satisfăcute de componentele momentului cinetic. În spațiul impulsurilor se introduce un sistem de patru vectori ortonormați $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(4)} = -\frac{i}{m_0 c}$, pentru care avem $(n^{(\mu)}, n^{(\nu)}) = \delta_{\mu\nu}$. Se introduc mărimile

$$S^{(\mu)} = \frac{w_\sigma n_\sigma^{(\mu)}}{m_0 c}.$$

Este evident că $S^{(4)} = 0$. Prin calcule simple obținem :

$$\sum_{i=1}^3 S^{(i)} S^{(i)} = \vec{S}^2 = \frac{1}{m_0^2 c^2} w_\sigma w_\sigma = s(s+1),$$

Pentru comutatorul mărimilor $S^{(i)}$ avem

$$[S^{(i)} S^{(j)}] = \frac{n_\rho^{(i)} n_\sigma^{(j)}}{m_0^2 c^2} [w_\rho, w_\sigma] = -\frac{n_\rho^{(i)} n_\sigma^{(j)}}{m_0^2 c^2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\mu w_\nu = -\frac{i w_\nu}{m_0 c} \varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu} n_\rho^{(i)} n_\sigma^{(j)} n_\mu^{(4)}$$

$\varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu} n_\rho^{(i)} n_\sigma^{(j)} n_\mu^{(4)}$ este un element de hipersuprafață în spațiul definit de vectori $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(4)}$. În locul lui putem introduce cuadrivectorul dual al elementului de suprafață : $\varepsilon_{ijk} n_\nu^{(k)}$.

Avem deci

$$[S^{(i)}, S^{(j)}] = i \frac{w_\nu}{m_0 c} \varepsilon_{ijk} n_\nu^{(k)} = i \varepsilon_{ijk} \frac{w_\nu n_\nu^{(k)}}{m_0 c} = i \varepsilon_{ijk} S^{(k)}.$$

3. Să analizăm în continuare, cum se modifică rezultatele de mai sus, dacă se folosesc, ca funcții de bază, bispinorii lui Darwin

$$u_1 = N_\varepsilon N_c \begin{pmatrix} 1 + e_3 \\ e_1 + i e_2 \\ B(1 + e_3) \\ B(e_1 + i e_2) \end{pmatrix}, \quad u_2 = N_\varepsilon N_c \begin{pmatrix} -e_1 + i e_2 \\ 1 + e_3 \\ -B(-e_1 + i e_2) \\ -B(1 + e_3) \end{pmatrix},$$

unde

$$N_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e_3)}}.$$

La acești bispinori se ajunge pornind de la $u_1(0)$ și $u_3(0)$, în felul următor :

$$u'_r = L(-\vec{p}) R(\vec{e}) u'_r(0) = L(-\vec{p}) u'_r(0),$$

unde

$$R(\vec{e}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+e_3)}} [(1+e_3)\mathbf{1} + i(e_2\Sigma_1 - e_1\Sigma_2)].$$

Adică, înainte de a efectua transformarea Lorentz, se efectuează în sistemul K o rotație cu unghiul $\vartheta = \arcsin e_3$, în jurul axei perpendiculare pe vectorii \vec{e} și \vec{k} (\vec{k} este versorul de pe axa Oz' a sistemului K). Să notăm cu $\vec{\xi}$ vectorul de polarizare și cu $\vec{P}(0)$ matricea de polarizare calculată pe baza funcțiilor de bază $u'_r(0)$. Având în vedere că

$$\begin{aligned} \vec{P}(0) &= \frac{1}{4} [1 + (\vec{\Sigma}, \vec{\xi})] (1 + \gamma_4) = R(\vec{e}) \vec{P}'(0) R^{-1}(\vec{e}) = \\ &= \frac{1 + \gamma_4}{8(1 + e_3)} [(1 + e_3)\mathbf{1} + i(e_2\Sigma_1 - e_1\Sigma_2)] [1 + (\vec{\Sigma}, \vec{\xi})] [(1 + e_3)\mathbf{1} - i(e_2\Sigma_1 - e_1\Sigma_2)], \end{aligned}$$

găsim

$$\xi_i = e_{ki} \xi'_k, \quad \text{sau} \quad \xi'_i = e_{ik} \xi_k, \quad (29)$$

unde

$$(e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e_1^2}{1+e_3} & -\frac{e_1 e_2}{1+e_3} & e_1 \\ -\frac{e_1 e_2}{1+e_3} & 1 - \frac{e_2^2}{1+e_3} & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

În noua reprezentare, se obține s'_μ și $m'_{\mu\nu}$ dacă în formulele (10) și (11) ξ_i se înlocuiește cu expresiile (29). Se ajunge astfel la expresiile :

$$s' = \left(\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} - 1 \right) \xi'_3 \vec{e} + \vec{\xi}(\xi'_i), \quad (30)$$

$$\vec{F}' = \left(1 - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \right) \xi'_3 \vec{e} + \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \vec{\xi}(\xi'_i), \quad (31)$$

$$G'_1 = i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \left[-\xi'_2 + \frac{e_1}{1+e_3} (e_1 \xi'_2 - e_2 \xi'_1) \right],$$

$$G'_2 = i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \left[\xi'_1 + \frac{e_2}{1+e_3} (e_1 \xi'_2 - e_2 \xi'_1) \right],$$

$$G'_3 = i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} (e_1 \xi'_2 - e_2 \xi'_1),$$

$$s'_4 = i \frac{|\vec{p}|}{m_0 c} \xi'_3.$$

La formulele (29) putem ajunge și pe o altă cale. Avem

$$u(\vec{p}) = c_1 u_1 + c_2 u_2 = c'_1 u'_1 + c'_2 u'_2,$$

de unde rezultă

$$c_1 = \frac{1 + e_3}{\sqrt{2(1 + e_3)}} c'_1 + \frac{-e_1 + ie_2}{\sqrt{2(1 + e_3)}} c'_2$$

$$c_2 = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2(1 + e_3)}} c'_1 + \frac{1 + e_3}{\sqrt{2(1 + e_3)}} c'_2.$$

Prin urmare

$$2c_1 c_1^* = 1 + \zeta_3 = (1 + e_3) c'_1 c_1'^* + (1 - e_3) c'_2 c_2'^* - (e_1 + ie_2) c'_1 c_2'^* +$$

$$+ (-e_1 + ie_2) c'_2 c_1'^* = 1 - e_1 \zeta'_1 - e_2 \zeta'_2 + e_3 \zeta'_3 \quad (32)$$

și

$$2c_1 c_2^* = \zeta_1 - i\zeta_2 = (e_1 - ie_2) c'_1 c_1'^* + (-e_1 + ie_2) c'_2 c_2'^* - \frac{(e_1 - ie_2)^2}{1 + e_3} c'_2 c_1'^* +$$

$$+ (1 + e_3) c'_1 c_2'^* = (e_1 - ie_2) \frac{1 + \xi'_3}{2} + (-e_1 + ie_2) \frac{1 - \xi'_3}{2} -$$

$$- \frac{(e_1 - ie_2)^2}{1 + e_3} \frac{\xi'_1 + i\xi'_2}{2} + (1 + e_3) \frac{\xi'_1 - i\xi'_2}{2}.$$
(33)

Din (32) și (33) rezultă imediat relațiile (29).

În continuare vom face câteva observații privind rezolvarea problemei b), adică a problemei de a-l exprima pe ξ'_i cu ajutorul mărimilor $\vec{s}'_j, \vec{s}'_4, \vec{F}'_j, \vec{G}'_j$.

Din (30) rezultă

$$\xi'_1 = e_{1j} s'_j, \quad \xi'_2 = e_{2j} s'_j, \quad \xi'_3 = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} e_{3j} s'_j, \quad (34)$$

iar din (31) obținem

$$\xi'_1 = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} e_{1j} F'_j, \quad \xi'_2 = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon} e_{2j} F'_j, \quad \xi'_3 = e_{3j} F'_j. \quad (35)$$

Pe baza relațiilor (34) și (35) mai putem scrie

$$\xi'_i = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon + m_0 c^2} e_{ij} (s'_j + F'_j).$$

În cazul cînd $|\vec{p}| \neq 0$, avem posibilitatea de a ajunge la mărimile ξ'_i bazîndu-ne pe expresiile $\vec{s}'_4, \vec{G}'_1, \vec{G}'_2, \vec{G}'_3$:

$$\xi'_1 = -\frac{im_0 c}{|\vec{p}|} \left(G'_2 - \frac{e_2}{1 + e_3} G'_3 \right), \quad \xi'_2 = \frac{im_0 c}{|\vec{p}|} \left(G'_1 - \frac{e_1}{1 + e_3} G'_3 \right), \quad \xi'_3 = -\frac{im_0 c}{|\vec{p}|} s'_4.$$

Relațiile (17), (18) rămân valabile și în cazul reprezentării lui Darwin. În consecință, descompunerea lui \vec{P} într-un produs de doi operatori se poate face într-un mod cu totul similar, ca și în cazul reprezentării lui Dirac.

Reprezentarea lui Dirac și cea a lui Darwin sînt echivalente. Avantajul reprezentării lui Darwin este că, în aceasta intră în mod explicit și separat parametrii care caracterizează polarizarea longitudinală (ξ_3) respectiv transversală (ξ'_1 și ξ'_2), pe cînd parametrii ξ_i nu sînt în legătură directă cu caracterul transversal respectiv longitudinal al polarizării.

4. Pentru a ilustra utilitatea folosirii bispinorilor $u'_r(\vec{p})$, funcții proprii comune ale operatorilor \hat{H}_p și $\hat{\Sigma}_p$, să studiem dezintegrarea β^- a neutronilor neorientați :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}.$$

Regăsim pe o cale foarte simplă unele rezultate din literatură [9].

Deoarece bispinorul $u_{\bar{\nu}}$ corespunzător antineutrînului

$$u_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+v_3)}} \begin{pmatrix} -v_1 + i v_2 \\ 1 + v_3 \\ v_1 - i v_2 \\ -(1 + v_3) \end{pmatrix}, \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad (36)$$

satisface relația

$$\gamma_5 u_{\bar{\nu}} = u_{\bar{\nu}} \quad \text{sau} \quad \frac{1 + \gamma_5}{2} u_{\bar{\nu}} = u_{\bar{\nu}},$$

este util ca bispinorul electronului să-l scriem sub forma

$$u'_e = u'_{e^+} + u'_{e^-} = \frac{1 + \gamma_5}{2} u'_e + \frac{1 - \gamma_5}{2} u'_e.$$

Menționăm că bispinorul $u_{\bar{\nu}}$ rezultă din bispinorul $v'_1(\vec{p})$ corespunzător pozitronului, punînd $m_0 = 0$. Constanta de normare din $v'_1(\vec{p})$ se alege astfel, încît să avem $v'_1{}^* v'_1 = 1$ [7], [19]. Pentru bispinorii u'_1 și u'_2 avem

$$\begin{aligned} u'_{(+)}{}'_1 &= \frac{N}{2} (1 - B) \begin{pmatrix} \varphi \\ -\varphi \end{pmatrix}, & u'_{(-)}{}'_1 &= \frac{N}{2} (1 + B) \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \\ N &= N_e N_e, & \varphi &= \begin{pmatrix} 1 + e_3 \\ e_1 + i e_2 \end{pmatrix}; \\ u'_{(+)}{}'_2 &= \frac{N}{2} (1 + B) \begin{pmatrix} \chi \\ -\chi \end{pmatrix}, & u'_{(-)}{}'_2 &= \frac{N}{2} (1 - B) \begin{pmatrix} \chi \\ \chi \end{pmatrix}, \\ \chi &= \begin{pmatrix} -e_1 + i e_2 \\ 1 + e_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vom considera tranziții permise de tipul S, V, A, T (tranzițiile de tipul P, în cazul tranzițiilor permise, nu joacă un rol important). Dacă neglijăm energia cinetică a protonului și considerăm dezintegrarea neutronilor în repaos, avem opt termeni fundamentali de tipul

$$W_i = |g_i|^2 |(u_p^+ \Omega_i u_n)(u_e^+ \Omega_i u_{\bar{\nu}})|, \quad (37)$$

pentru a calcula probabilitatea de dezintegrare. Pentru constantele de cuplaj g_i și operatorii Ω_i , avem

i	1	2	3	4	5	6	7	8
g_i	g_S	g_V	g_A	g_A	g_A	g_T	g_T	g_T
Ω_i	γ_4	1	Σ_1	Σ_2	Σ_3	$\gamma_4 \Sigma_1$	$\gamma_4 \Sigma_2$	$\gamma_4 \Sigma_3$

În cazul dezintegrării β^- să considerăm următorul caz: impulsul electronului este \vec{p} , impulsul antineutrino este \vec{k} și momentul cinetic propriu al neutronului este $\langle \sum_n \vec{\sigma}_n \rangle = \vec{n}$. Dacă se alege axa Oz paralel cu \vec{n} , pentru neutron avem

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar pentru proton una din expresiile

$$u_{(1)p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{(2)p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avem

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{(r)p}^r = \dots$	1	1	2	2	1	2	2	i
$(u_p^+ \Omega_i u_n)$	1	1	1	i	1	1	i	1

În consecință în loc de (37) se poate scrie:

$$W_i = |g_i|^2 |(u_e^+ \Omega_i u_{\bar{\nu}})|^2.$$

Obținem o valoare diferită de zero, dacă în cazul $i = 1, 6, 7, 8$ se ia, pentru electron, bispinorul u' , iar în cazul $i = 2, 3, 4, 5$ se ia bispinorul u' . Dacă vrem să obținem probabilitatea ca să fie emis un electron cu spiralitate pozitivă respectiv negativă, se utilizează bispinorul u'_1 , respectiv u'_2 . Să notăm aceste probabilități cu W^+ , respectiv W^- .

Având în vedere că

$$(1 + B)^2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + m_0c^2} \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (1 - B)^2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + m_0c^2} \left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

în urma unor calcule simple, în cazul cuplajului scalar obținem

$$W_S^+ \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) (1 - \cos\delta),$$

$$W_S^- \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 + \cos\delta), \quad \text{cu } \cos\delta = \vec{e} \cdot \vec{\nu}.$$

\propto este semnul de proporționalitate.

Pentru cuplajul vectorial se obține

$$W_V^+ \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 - \cos\delta),$$

$$W_V^- \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) (1 + \cos\delta).$$

Probabilitatea de dezintegrare, în cazul cuplajului A , este proporțională cu $W_3 + W_4 + W_5$. Deoarece

$$\left| \langle u'_{1(+)} + \sum_i u_{\nu} \rangle \right|^2 \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 + \cos\beta - 2e_i \nu_i),$$

$$\left| \langle u'_{2(+)} + \sum_i u_{\nu} \rangle \right|^2 \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) (1 - \cos\delta + 2e_i \nu_i),$$

avem

$$W_A^+ \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \cos\delta\right),$$

$$W_A^- \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \cos\delta\right).$$

Pentru cuplajul tensorial obținem

$$\left| \langle u'_{1(-)} + \gamma_4 \sum_i u_{\nu} \rangle \right|^2 \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) (1 + \cos\delta - 2e_i \nu_i),$$

$$\left| \langle u'_{2(-)} + \gamma_4 \sum_i u_{\nu} \rangle \right|^2 \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 - \cos\delta + 2e_i \nu_i).$$

Avînd în vedere că probabilitatea de dezintegrare este proporțională cu $W_6 + W_7 + W_8$, obținem

$$W_T^+ \propto \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \cos\delta\right),$$

$$W_T^- \propto \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \cos\delta\right).$$

Introducem următoarele mărimi :

- — probabilitatea totală de dezintegrare $W = W^+ + W^-$;
- gradul de polarizare longitudinală corespunzătoare unghiului ϑ

$$P_l = \frac{W^+ - W^-}{W^+ + W^-};$$

— gradul global al polarizării longitudinale, definit cu ajutorul valorilor medii $\overline{W^+}$, $\overline{W^-}$ (media se ia în raport cu direcțiile de emisie a electronului) :

$$(P_l)_{gl} = \frac{\overline{W^+} - \overline{W^-}}{\overline{W^+} + \overline{W^-}}.$$

În diferitele cazuri (S , V , A , T) găsim :

$$W \propto 1 + \alpha_1 \frac{v}{c} \cos\delta,$$

$$P_l = \frac{\alpha_2 \frac{v}{c} + \alpha_3 \cos\delta}{\alpha_4 + \alpha_5 \frac{v}{c} \cos\delta},$$

$$(P_l)_{gl} = \alpha_6 \frac{v}{c},$$

unde constantele α_j au valorile

j	1	2	3	4	5	6
S	-1	1	-1	1	-1	1
V	1	-1	-1	1	1	-1
A	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-1
T	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1

Deoarece, conform experiențelor, $\alpha_6 = -1$, dintre cele patru cuplaje posibile se realizează cuplajele V și A .

BIBLIOGRAFIE

1. H. A. Tolhoek — S. R. de Groot, „Physica,” **22**, p. 1, 17, 81, 1951.
2. W. H. Mc Master, „Am. J. Phys.,” **22**, 351, 1954.
3. L. Michel — A. S. Wightman, „Phys. Rev.,” **90**, p. 1190, 1955.
4. H. A. Tolhoek, „Rev. Mod. Phys.,” **28**, p. 277, 1956.
5. U. Fano, „Rev. Mod. Phys.,” **29**, p. 74, 1957.
6. C. Bouchiat — L. Michel, „Nucl. Phys.,” **5**, p. 416, 1958.
7. E. Corinaidesi, „Nucl. Phys.,” **7**, p. 305, 1958.
8. A. I. Ahiezer, V. Berestecki, *Kvantovaiia elektrodinamika*, Izd. vtoroe. Moskva, 1959, p. 84—90.
9. Ia. Smorodinski, „UFN”, **67**, p. 43 (1959).
10. R. H. Good Jr. — M. E. Rose, „Nuovo Cim.,” Suppl. **14**, p. 872, 1959.
11. L. Michel, „Nuovo Cim.,” Suppl. **14**, p. 95, 1959.
12. A. S. Wightman, „Nuovo Cim.,” Suppl. **14**, p. 81, 1959.
13. W. E. Brittin — L. G. Dunham, *Lectures in Theoretical Physics*, vol. II, New-York, 1960.
14. A. S. Wightman, *Relations de dispersion et particules élémentaires*, „Université de Grenoble, Ecole d'été de physique théorique,” Les Houches, Paris, 1960, p. 156—222.
15. W. H. Mc Master, „Rev. Mod. Phys.,” **33**, p. 8, 1961.
16. D. M. Fradkin, R. H. Good Jr., „Rev. Mod. Phys.,” **33**, p. 343, 1961.
17. S. Szeber, *Vvedenie v relativistskuiu kvantovuiu teorii polia* (traducere din l. engleză), Moskva, 1963, pp. 54—56, 91—92.
18. H. A. Tolhoek, *Selected Topics in Nuclear Theory*, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963, p. 343.
19. Z. Gábor, O. Gherman, „Studia Univ. Babeş — Bolyai”, Ser. Math. Phys., fasc. 2, 1964.

К РЕЛЯТИВИСТСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНА

(Резюме)

Для исследования поляризации свободного электрона как основные функции используются вообще биспиноры Дирака. В работе изучаются преимущества использования (в качестве основных функций) биспиноров Дарвина и доказывается, что в рамках представления Дарвина непосредственно получаются величины, характеризующие продольную и поперечную поляризацию. Для иллюстрирования примерами изучается расщепление β^- неориентированных нейтронов.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE RELATIVISTE DE LA POLARISATION DE L'ÉLECTRON

(Résumé)

Pour l'étude de la polarisation de l'électron libre on emploie en général comme fonctions de base les bispineurs de Dirac. Dans leur contribution, les auteurs étudient les avantages qu'offre l'utilisation (comme fonctions de base) des bispineurs de Darwin et ils montrent que, dans le cadre de la représentation de Darwin, on obtient de façon directe les grandeurs qui caractérisent la polarisation longitudinale et transversale. A titre d'exemple on étudie la désintégration β^- des neutrons non-orientés.

CONTRIBUȚIUNI LA STUDIUL CÎMPULUI CRISTALIN CU METODA OPERATORILOR ECHIVALENȚI

de

V. GRECU, R. V. DEUTSCH, S. NISTOR

Printre substanțele paramagnetice mai mult studiate sînt și cristalele ionice. Proprietăți paramagnetice apar la cristalele ionice care conțin elemente ale grupelor de tranziție, apariția acestor proprietăți fiind legată de existența păturilor electronice incomplete. La elaborarea teoriei spectrelor de rezonanță paramagnetică a cristalelor ionice trebuie să se țină cont întii de interacțiunea electronilor cu nucleul și electronii din interiorul fiecărui ion, apoi de interacțiunile electrostatice, magnetice și de schimb între diferiții ioni și în sfîrșit de acțiunea cîmpului magnetic exterior.

Interacțiunea electrostatică între ioni poate fi aproximată prin a considera că fiecare ion se află într-un cîmp electric mediu creat de ioni înconjurători care se numește cîmp cristalin. Interacțiunea electronilor cu cîmpul cristalin este mai slabă decît cea cu nucleul și electronii ionului însuși, astfel că acțiunea se poate fi considerată ca o perturbație a stării atomului liber. Sub influența cîmpului cristalin nivelele energetice degenerate ale atomului liber suferă, în absența cîmpului magnetic, despicări, care depind esențial de simetria cristalului. Soluția calitativă a fost dată de B e t h e [1] cu ajutorul teoriei grupurilor. Pentru a obține mărimea despicărilor energetice și funcțiile de undă ale stării fundamentale perturbate, trebuie calculate elementele de matrice ale energiei suplimentare, H_c , a electronilor păturii incomplete în cîmpul cristalin. Pentru simplificarea acestui calcul s-a elaborat metoda operatorilor echivalenți [2] [3]. Articolul își propune să demonstreze printr-o cale elementară această metodă, fără se recurgă la considerații din teoria grupurilor.

Calcularea potențialului cristalin.

Energia suplimentară a electronilor de pe pătura incompletă a unui atom de tranziție în cîmpul cristalin mediu este :

$$H_c = \sum_{\alpha} eV_c(\vec{r}_\alpha) \quad (1)$$

unde V_c este potențialul câmpului cristalin, \vec{r}_α este raza vectoare a electronului α de pe pătura incompletă (însurarea se face pentru toți electronii păturii incomplete). Pentru simplitate vom trata cazul cînd pe pătura incompletă se află un singur electron, adică cînd $H_c = -eV_c(\vec{r})$

Avînd în vedere că potențialul V_c verifică ecuația lui Laplace, $\Delta V_c = 0$, și că păturile electronice ale ionului paramagnetic nu se intersectează cu ale ionilor vecini, putem scrie V_c sub forma unei dezvoltări în serie după funcții sferice.

$$V_c = \sum_l \sum_m b_{lm} r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2)$$

Pentru cele ce urmează este utilă trecerea de la coordonatele sferice la variabilele u, v, z , definite prin relațiile :

$$\begin{cases} u = x + jy = r \sin \theta e^{j\varphi} \\ v = x - jy = r \sin \theta e^{-j\varphi} \\ z = z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

Avantajul utilizării acestor variabile rezultă din legătura simplă între ele și funcțiile sferice. Din relația de definiție a funcțiilor sferice

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left| \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right|^{1/2} \sin^{|m|}\theta P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{jm\varphi}$$

unde $P_l^m(\cos \theta)$ este polinomul lui Legendre asociat cu gradul $(l - |m|)$ în $\cos \theta$, se obține, folosind, pe (3), următoarele relații între u, v și $Y_l^m(\theta, \varphi)$ respectiv $Y_l^{-m}(\theta, \varphi)$

$$\begin{cases} Y_l^{-m} = \left| \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right|^{1/2} \left(\frac{u}{r}\right)^m P_l^m\left(\frac{z}{r}\right) \\ Y_l^{+m} = \left| \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right|^{1/2} \left(\frac{v}{r}\right)^m P_l^m\left(\frac{z}{r}\right) \end{cases} \quad (4)$$

unde $m > 0$.

Cu ajutorul relațiilor (4) se pot exprima cu funcțiile sferice toate combinațiile variabilelor u, v, z . Puterile lui u și v se exprimă prin :

$$\begin{cases} u^k = \left| \frac{4\pi}{(2k+1)(2k)!} \right|^{1/2} 2^k(k)! r^k Y_k^k(\theta, \varphi) \\ v^k = \left| \frac{4\pi}{(2k+1)(2k)!} \right|^{1/2} 2^k(k)! r^k Y_k^{-k}(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (5)$$

Orice putere k a lui z se exprimă printr-o combinație liniară de funcții sferice Y_n^0 , unde $n = 0, 1, 2, \dots, k$. Produsele de forma $u^k v^k$, folosind coeficienții Wigner, se pot transforma într-o sumă de funcții sferice, și anume :

$$u^k v^n = \frac{2^{k+n+2} \pi(k)! (n)! r^{k+n}}{[(2k+1)(2n+1)(2k)!(2n)!]^{1/2}} \sum_{L=k-n}^{k+n} C_{k,k;n,-n}^{L,M} Y_L^M(0, \varphi) \quad (5_1)$$

unde $M = k - n$, iar $C_{k,k;n,-n}^{L,M}$, se exprimă cu ajutorul coeficienților Wigner. În mod analog orice produs cu z poate fi scris sub forma unei combinații liniare de funcții sferice. În tabelul 1 sînt date expresiile termenilor liniari și pătratici ai lui u, v, z .

Tabel 1

$k = 1$	$u = 2r \sqrt{\frac{2\pi}{3}} Y_1^1$	$v = 2r \sqrt{\frac{2\pi}{3}} Y_1^{-1}$	$z = 2r \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_1^0$
$k = 2$	$u^2 = 4r^2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_2^2$	$v^2 = 4r^2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_2^{-2}$	$z^2 = r^2 \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0 - 1 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} Y_0^0 \right)$
	$uz = 2r^2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_2^1$	$vz = 2r^2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_2^{-1}$	$uv = 2r^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{5}} Y_0^0 - 2 \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0 \right)$

Folosind (3) și (4) potențialul cristalin V_c se poate exprima prin variabilele u, v, z sub forma unui polinom $V_c(u, v, z)$, în care diferiții termeni pot fi grupați după gradul lor.

Calcularea elementelor de matrice a termenilor energiei cristaline.

Energia în cîmpul cristalin al unui electron al păturii incomplete, datorită ordinului de mărime, poate fi considerată ca o perturbație a stării electronului în atomul liber. Aplicînd teoria perturbațiilor se pot calcula atît despicerile energetice ale nivelelor neperturbate cît și starea perturbată a electronului. Pentru aceasta e necesar mai întîi calcularea elementelor de matrice ale energiei cristaline, calcul care se face cu funcțiile de undă ale electronilor păturii incomplete din atomul liber. În cazul unui singur electron pe pătura incompletă (ionii $Sc^{2+}, Ti^{3+}, V^{4+}, \dots$) în ionul liber electronul se mișcă într-un cîmp efectiv cu simetrie sferică, forma căruia se poate calcula prin metoda cîmpului self consistent [4]. Starea electronului neîmperechiat este descrisă de grupul de patru numere cuantice (n, l, m_l, m_s) . Degenerarea există în raport cu m_l și m_s . Deoarece pentru aceeași pătură incompletă n și l sînt constanți și nu există interacțiune între cîmpul cristalin și spinul electronului, vom nota funcția de undă a electronului liber în loc de $|nlm_l m_s\rangle$ prin :

$$|lm\rangle = R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (6)$$

unde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (funcțiile sferice) sînt funcțiile proprii ale părții unghiulare pentru un potențial cu simetrie sferică.

Trebuie să se calculeze elementele de matrice :

$$(H_c)_{ik} = \langle lm_i | H_c(uvz) | lm_k \rangle \quad (7)$$

Deoarece $H_c = -eV_c(u, v, z)$ este un polinom în u, v, z , vom calcula elementele de matrice a diferiților termeni ai polinomului V_c , enunțînd pe baza acestor calcule o metodă operativă de calcul a elementelor de matrice. Pe baza relațiilor (5), (5₁) se poate afirma că orice termen al polinomului $V_c(u, v, z)$ se exprimă printr-o combinație liniară de funcții sferice. Scrierea elementului de matrice a unui termen al polinomului V_c se reduce la calcularea cu funcțiile proprii $|lm\rangle$ a elementelor de matrice a unor funcții sferice Y_l^m . Notînd cu $A_{ik}^l(\bar{l}, \bar{m})$ elementul de matrice al acestei funcții sferice, avem :

$$A_{ik}^l(\bar{l}, \bar{m}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Y_l^{m_k})^* Y_l^m Y_l^{m_i} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (8)$$

Produsul ultimelor două funcții sferice se dezvoltă într-o sumă de funcții sferice folosind coeficienții Wigner [5], [6].

$$Y_l^{\bar{m}}(\theta, \varphi) Y_l^{m_i}(\theta, \varphi) = \sum_{L=|\bar{l}-l|}^{l+\bar{l}} \left[\frac{(2\bar{l}+1)(2l+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{1/2} \langle \bar{l}00 | L0 \rangle \langle llm_i | LM \rangle Y_L^M(\theta, \varphi) \quad (9)$$

unde $M = m_i + \bar{m}$ și $|M| \leq L$.

Folosind pe (9), (8) devine :

$$A_{ik}^l(\bar{l}, \bar{m}) = \sum_{L=|\bar{l}-l|}^{l+\bar{l}} \left[\frac{(2\bar{l}+1)(2l+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{1/2} \langle \bar{l}00 | L0 \rangle \langle llm_i | LM \rangle \delta_{Ll} \delta_{Mm_k}$$

sau pentru $l = L$

$$A_{ik}^l(\bar{l}, \bar{m}) = \left[\frac{(2\bar{l}+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \langle \bar{l}00 | l0 \rangle \langle \bar{l}m_i | lm_k \rangle \delta_{Mm_k} \quad (10)$$

Coeficientul $\langle \bar{l}00 | l0 \rangle$ este diferit de zero doar cînd $2l + \bar{l}$ este un număr par, adică cînd $\bar{l} = 2q$. În acest caz avem :

$$\langle \bar{l}00 | l0 \rangle = (-1)^q \left[\frac{(2l+1)(2l-2q)!}{(2l+2q+1)!} \right]^{1/2} \frac{(2q)!(l+q)!}{[(q!)^2(l-q)!} \quad (11)$$

Elementele de matrice diferite de zero ale unei funcții sferice sînt de forma :

$$A_{ik}^l(2q, \bar{m}) = (-1)^q \left[\frac{(4q+1)(2l+1)(2l-2q)!}{4\pi(2l+2q+1)!} \right]^{1/2} \frac{(l+q)!(2q)!}{(l-q)![(q!)^2]} \langle 2q\bar{l}m_i | lm_k \rangle \delta_{Mm_k} \quad (12)$$

unde $M = m_i + \bar{m}$, $|M| \leq l$ și $q \leq l$

Din (9) (10) și (11) se pot trage două concluzii importante :

I. Deoarece păturile incomplete sînt doar păturile d și f , adică cu $l=2$ respectiv $l=3$, pentru ca să avem $L = l$, valoarea maximă a lui \bar{l} poate fi doar $2l$, adică $\bar{l}_{\max} = 4$ respectiv $\bar{l}_{\max} = 6$. În expresia potențialului cristalin nu se vor reține termenii care corespund unor funcții sferice cu $\bar{l} > 6$, adică în polinomul $V_c(u,v,z)$ se vor neglija toți termenii cu puteri mai mari ca 6.

II. Deoarece elementele de matrice corespunzătoare lui \bar{l} impar sînt nule, în expresia lui $V_c(u,v,z)$ se vor reține doar termenii de grad par adică termenii de gradul 2,4 și 6.

Să calculăm elementele de matrice a termenilor de gradul doi în u , v și z . Vom avea :

$$(u^2)_{ik} = \langle lm_k | u^2 | lm_i \rangle$$

Înlocuind pe (6) se obține :

$$(u^2)_{ik} = \bar{r}^2 \iint (Y_l^{m_k})^* \left(\frac{u}{r}\right)^2 Y_l^{m_i} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (13)$$

Din tabelul I putem scrie imediat expresia lui $\left(\frac{u}{r}\right)^2$, și anume :

$$\left(\frac{u}{r}\right)^2 = 4 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_2^2(\theta, \varphi)$$

Expresia (13), folosind pe (8) devine :

$$(u^2)_{ik} = 4 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \bar{r}^2 A_{ik}^l(2,2)$$

După înlocuiri simple avem :

$$(u^2)_{ik} = -8r^2 \sqrt{\frac{(2l+1)(2l-2)!}{6(2l+3)!}} \frac{(l+1)!}{(l-1)!} \times \\ \langle 2l2m_i | lm_i + 2 \rangle \iint (Y_l^{m_k})^* Y_l^{m_i+2} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (14)$$

Pentru ceilalți termeni elementele de matrice se calculează în mod analog. Introducînd notația :

$$C_{2q,l}^i = (-1)^q \sqrt{\frac{(4q+1)(2l+1)(2l-2q)!}{4\pi(2l+2q+1)!}} \frac{(l+q)! (2q)!}{(l-q)! [(q)!]^2} \quad (15)$$

Se poate scrie următorul tabel pentru elementele de matrice ale tuturor combinațiilor de ordinul doi ale variabilelor u , v și z .

Tabel 2

$$\begin{aligned}
 (z^2)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{z}{r}\right)^2 Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} C_{2,l}^l \langle 2l0m_i | lm_i \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi - \frac{1}{3} \right] \\
 (z \cdot u)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{z}{r}\right) \left(\frac{u}{r}\right) Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{2,l}^l \langle 2l1m_i | lm_i + 1 \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{m_i+1} \sin\theta d\theta d\varphi \right] \\
 (z \cdot v)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{z}{r}\right) \left(\frac{v}{r}\right) Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{2,l}^l \langle 2l1m_i | lm_i - 1 \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{m_i-1} \sin\theta d\theta d\varphi \right] \\
 (v \cdot u)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{u}{r}\right) \left(\frac{v}{r}\right) Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_{2,l}^l \langle 2l0m_i | lm_i \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi \right] \\
 (u^2)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{u}{r}\right)^2 Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[4 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{2,l}^l \langle 2l2m_i | lm_i + 2 \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{m_i+2} \sin\theta d\theta d\varphi \right] \\
 (v^2)_{ik} &= \overline{r^2} \iint (Y_l^{mk})^* \left(\frac{v}{r}\right)^2 Y_l^{mi} \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \overline{r^2} \left[4 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{2,l}^l \langle 2l-2m_i | lm_i - 2 \rangle \iint (Y_l^{mk})^* Y_l^{m_i-2} \sin\theta d\theta d\varphi \right]
 \end{aligned}$$

Trecerea la operatorii echivalenți.

Din compararea formulilor tabelului II se poate trage concluzia că în calculul elementelor de matrice mărimile $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, $\frac{z}{r}$ pot fi considerate ca niște operatori care acționează asupra funcțiilor sferice după următoarele reguli :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{z}{r}\right) Y_l^m &= a_{lm}^{10} Y_l^m \\
 \left(\frac{u}{r}\right) Y_l^m &= a_{lm}^{11} Y_l^{m+1} \\
 \left(\frac{v}{r}\right) Y_l^m &= a_{lm}^{1-1} Y_l^{m-1}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Conform acestei observații relația (14) este rezultatul aplicării de două ori succesiv a operatorului $\left(\frac{\hat{u}}{r}\right)$ asupra funcției sferice Y_l^m , adică

$$\left(\frac{\hat{u}}{r}\right)^2 Y_l^m = \left(\frac{\hat{u}}{r}\right) \left[\left(\frac{\hat{u}}{r}\right) Y_l^m \right] = \left(\frac{\hat{u}}{r}\right) a_{lm}^{11} Y_l^{m+1} = a_{lm}^{11} a_{lm+1}^{11} Y_l^{m+2}$$

Să notăm cu \hat{L}_z operatorul $\left[\frac{\hat{z}}{r}\right]$, cu \hat{L}_+ pe $\left[\frac{\hat{u}}{r}\right]$ și cu \hat{L}_- pe $\left[\frac{\hat{v}}{r}\right]$. Ținând cont de (3) rezultă că operatorii $\left[\frac{\hat{x}}{r}\right] = \hat{L}_x$ și $\left[\frac{\hat{y}}{r}\right] = \hat{L}_y$ sînt dați de relațiile

$$\begin{cases} \hat{L}_x = \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} \\ \hat{L}_y = \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i} \end{cases} \quad (17)$$

adică

$$\begin{cases} \hat{L}_+ = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y) \\ \hat{L}_- = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y) \end{cases} \quad (18)$$

Deoarece x, y, z sînt componentele unui vector pentru ca să aibă aceleași reguli de transformare și \hat{L}_x, \hat{L}_y și \hat{L}_z trebuie să fie componentele unui operator vectorial care se bucură de următoarele proprietăți: componenta pe axa z a acestui operator are ca funcții proprii funcțiile sferice, iar combinațiile liniare de forma (18) conduc la niște operatori care aplicați asupra funcțiilor sferice modifică cu o unitate în plus, respectiv în minus, indicele superior. Operatorul care are aceste proprietăți este operatorul momentului cinetic.

Într-adevăr

$$\begin{cases} \hat{L}_z Y_l^m = m Y_l^m \\ \hat{L}_+ Y_l^m = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_l^{m+1} \\ \hat{L}_- Y_l^m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_l^{m-1} \end{cases} \quad (19)$$

Se poate enunța regula metodei operatorilor echivalenți: în calculul elementelor de matrice a potențialului cristalin se pot înlocui coordonatele carteziene, cu exactitatea unui factor constant multiplicativ, prin com-

ponentele operatorului momentului cinetic, calculându-se elementele de matrice a operatorilor astfel rezultați. Constanta multiplicativă este aceeași pentru termenii din potențialul cristalin de același grad în u, v, z .

Deoarece operatorii \hat{L}_+, \hat{L}_- și \hat{L}_z nu sînt comutativi, iar coordonatele carteziene sînt, orice produs al variabilelor u, v, z se înlocuiește prin media aritmetică a tuturor permutărilor variabilelor, iar în această medie se face înlocuirea lor prin operatorii echivalenți. De exemplu :

$$uvz = \frac{1}{6} (uvz + vuz + vzu + zuv + zuv + uzv)$$

$$uvz \rightarrow \frac{1}{6} (\hat{L}_+ \hat{L}_+ \hat{L}_z + \hat{L}_- \hat{L}_- \hat{L}_z + \hat{L}_+ \hat{L}_- \hat{L}_z + \hat{L}_- \hat{L}_+ \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_+ \hat{L}_+ + \hat{L}_z \hat{L}_- \hat{L}_-)$$

Ca exemplificare se dau în tabela 3 elementele de matrice ale termenilor pătratici calculați prin metoda operatorilor echivalenți

Tabela 3

Termenul cartezian	Operatorul corespunzător	Elementul de matrice
$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix}^2$	$(\hat{L}_+)^2$	$(u^2)_{ik} = \beta r^2 \sqrt{(l-m_i)(l+m_i+1)(l-m_i-1)(l+m_i+2)} \delta_{m_k m_i+2}$
$\begin{bmatrix} v \\ u \\ z \end{bmatrix}^2$	$(\hat{L}_-)^2$	$(v^2)_{ik} = \beta r^2 \sqrt{(l+m_i)(l-m_i+1)(l+m_i-1)(l-m_i+2)} \delta_{m_k m_i+2}$
$\begin{bmatrix} z \\ v \\ u \end{bmatrix}^2$	$(\hat{L}_z)^2$	$(z^2)_{ik} = \beta r^2 m_i^2 \delta_{m_k m_i}$
$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ v \\ u \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} (\hat{L}_+ \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_+)$	$(zu)_{ik} = \beta r^2 \frac{2m_i+1}{2} \sqrt{(l-m_i)(l+m_i+1)} \delta_{m_k m_i-1}$
$\begin{bmatrix} v \\ u \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ v \\ u \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} (\hat{L}_- \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_-)$	$(zv)_{ik} = \beta r^2 \frac{2m_i-1}{2} \sqrt{(l+m_i)(l-m_i+1)} \delta_{m_k m_i-1}$
$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ z \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} (\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+)$	$(uv)_{ik} = \beta r^2 \frac{1}{2} [(l+m_i)(l-m_i+1) + (l-m_i)(l+m_i-1)] \delta_{m_k m_i}$

Pentru a determina constanta trebuie să calculăm coeficienții Wigner. De exemplu din egalarea coeficientului de matrice $(u^2)_{ik}$ calculat prin două metode avem :

$$\beta = \frac{4 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{2,l}^l < 2l2m_i | lm+2 >}{\sqrt{(l-m_i)(l+m_i+1)(l-m_i-1)(l+m_i+2)}} \quad (20)$$

Folosind formula lui Racah de calcul al coeficienților Wigner se obține :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 2l2m_i | m_i + 2 \rangle = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4(2l+1)(2l-2)!}{(2l+3)!}} \sqrt{6(l+m_i+1)(l+m_i+2)(l-m_i-1)(l-m_i)} \\ C_{2,l}^l = \sqrt{\frac{5(2l+3)!}{4\pi(2l+1)(2l-2)!}} \frac{1}{4l(l+7)} \end{array} \right. \quad (21)$$

Înlocuind aceste valori în (20) avem :

$$\beta = \frac{2}{(2l+3)(2l-1)} \quad (22)$$

Pentru $l=2$, $\beta = \frac{2}{21}$, valoare care se obține și prin alte metode. Prin calcul direct se verifică că și pentru elementele de matrice a celorlalți termeni pătratici prin trecerea la operatorii echivalenți intervine aceeași constantă. Este suficientă deci determinarea constantei pentru cazul cel mai simplu. Valoarea constantei depinde numai de l , deci ea rămâne neschimbată pentru termenii cu același grad.

BIBLIOGRAFIE

1. Bethe, H. A., „Ann. Phys.” **3**, 133, 1929.
2. Stevens, K. W. H., „Proc. Phys. Soc.” **A 65**, 209, 1952.
3. Bleaney, B., Stevens, K. W. H., „Rep. Progr. Phys.” **15**, 108, 1953.
4. Condon, E. U., Shortely, G. H., *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge Univ. Press, 1953.
5. Messiah, A., *Mécanique quantique*. Dunod, Paris, 1960.
6. Gelfand, I. M., Minlos, R. A., Šapiro, Z. I., *Predstavlenia gruppi vrasčenia i gruppi Lorenta*. Gos. izd. fiz. mat. lit., Moscova, 1958.
7. Alšuler, S. A., Kozirev, B. M., *Elektronii paramagnitii rezonans*. Gos. izd. fiz. mat. lit. Moscova, 1961.

К ИЗУЧЕНИЮ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Резюме)

В работе дается элементарное и прямое доказательство метода эквивалентных операторов, использованного в нечисленном раскалывании электронных уровней в кристаллических полях. Доказательство основывается на свойствах сферических функций, используя коэффициенты Клебша — Гордона. Эквивалентные операторы вводятся на основании аналогии элементов матрицы координат и элементов матрицы операторов проекций момента количества движения.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU CHAMP CRISTALLIN PAR LA MÉTHODE
DES OPÉRATEURS ÉQUIVALENTS

(R é s u m é)

Les auteurs donnent une démonstration élémentaire et directe de la méthode des opérateurs équivalents, utilisée dans le calcul de la séparation des niveaux électroniques dans des champs cristallins. La démonstration se fonde sur les propriétés des fonctions sphériques, utilisant les coefficients Klebsch-Gordon. Les opérateurs équivalents sont introduits sur la base de l'analogie entre les éléments de matrice des coordonnées et les éléments de matrice des opérateurs des projections du moment de la quantité de mouvement.

STRUCTURA FINĂ A SPECTRULUI MASEI EFECTIVE

de

I. STAN și A. WEISSMANN

În lucrarea de față se calculează structura fină a spectrului masei efective în funcție de numărul cuantic principal al câmpului plasmonic. Stabilind ecuația masei efective pentru cazul interacțiunii electron-electron de lungă rază de acțiune, din noua regulă de însumare f , utilizând un potențial periodic parabolic, se obține deplasarea nivelului fundamental energetic, și desplicarea spectrului masei efective în funcție de variația masei efective cu temperatura și interacțiunea ecranată electron-electron. Rezultatele obținute se compară cu cele găsite de V. P. S m i r n o v [1] pentru cazul unidimensional.

Se știe că mișcarea unui electron în banda de conducție a unui semiconductor în vecinătatea unei impurități se descrie cu ajutorul ecuației masei efective deduse de W. K o h n [2]. Luând în considerare și interacțiunea de lungă rază de acțiune dintre electroni, hamiltonianul sistemului este [3]

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + U, \quad (1)$$

unde

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{P_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right], \quad (2)$$

reprezintă hamiltonianul mișcării libere a electronilor,

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} < \vec{k}_j} (P_{\vec{k}} P_{-\vec{k}} + \omega^2 Q_{\vec{k}} Q_{-\vec{k}}), \quad (3)$$

hamiltonianul câmpului plasmonic generat de interacțiunea de lungă rază de acțiune electron-electron [4], cu variabilele de câmp $Q_{\vec{k}}$, $P_{\vec{k}}$; ω este

frecvența oscilației colective a electronilor legați iar $k_D = \frac{1}{\lambda_D}$, λ_D fiind lungimea de undă Debye,

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k^2}{\varepsilon(k, \omega)} (\varphi_k^r \varphi_{-k}^r + \varphi_k^c \varphi_{-k}^c), \quad (4)$$

reprezintă hamiltonianul interacțiunii coulombiene ecranate, unde $M_k^2 = \frac{4\pi e^2}{k^2}$ și $\varepsilon(k, \omega)$ este constanta dielectrică, $\varphi_k = \sum_i e^{-ik \cdot r_i}$ fiind variabila oscilației armonice a fluctuației de densitate electronică.

Rezolvînd ecuația lui Schrödinger

$$(H - E)\psi = 0, \quad (5)$$

cu H din (1), funcția de undă

$$\psi = \sum_{n'N'} \int d\vec{k}' A_{n'N'}(\vec{k}') \Phi_{n'N'k'}, \quad (6)$$

fiind dezvoltată după sistemul complet de funcții

$$\Phi_{nNk} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi_{n0}(\vec{r}) \psi_N(Q), \quad (7)$$

unde $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi_{n0}(\vec{r})$ este funcția de undă introdusă de W. K o h n și I. M L u t t i n g e r [5], ψ este funcția de undă a lui H_1 , scrisă ca produsul unor funcții de undă ai oscilatorilor armonici de forma

$$\psi_N(Q) = \prod_k \psi_{N_k}(Q_k), \quad (8)$$

N_k fiind numărul cuantic al oscilatorului de coordonată Q_k , satisfăcînd condiția de ortonormalitate

$$(\Phi_{nNk}, \Phi_{n'N'k'}) = \delta_{nn'} \delta_{NN'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (9)$$

obținem [3] ecuația masei efective

$$E_{nN}(-i\Delta) + U_{tot}(\vec{r}) [F_{nN}(\vec{r}) - EF_{nN}(\vec{r})], \quad (10)$$

unde $F_{nN}(\vec{r})$ sînt funcțiile de undă transformate [8], U_{tot} reprezintă energia potențială totală (perturbatoare și coulombiană ecranată), iar

$$\begin{aligned} E_{nN}(-i\Delta) = & E_{00}(0) + \frac{\hbar}{2} \omega_p \sqrt{(N+1)(N'+1) + \sqrt{NN'}} \delta_{NN'} + \\ & + \frac{\hbar \alpha \hbar \beta}{2} \left\{ \frac{1}{m} + \frac{\hbar \alpha \hbar \beta}{2\omega_p} \sqrt{(N+1)(N'+1) + \sqrt{NN'}} \delta_{NN'} \right\} \delta_{\alpha\beta} \\ & + \frac{\hbar \alpha \hbar \beta}{m^2} \left[\sum_{n'} \frac{(\nabla^\alpha)_{0n'} (\nabla^\beta)_{n'0}}{\omega_{0n'}} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

iar $\omega_p = \left(\frac{4\pi \mathcal{H} e^2}{m} \right)^{1/2}$ frecvența oscilației colective a electronilor liberi [8].

Regula sumei f în interacțiunea electron-electron, de lungă rază de acțiune este

$$\delta_{zs} + \frac{2M_N}{m^2} \sum_{n' \neq n} \frac{(\nabla^z)_{nn'} (\nabla^z)_{n'n}}{E_{n'} - E_n} - M_N \frac{\partial^2 E_{nN}(k)}{\partial k_x \partial k_y} = 0, \quad (12)$$

unde

$$\frac{1}{M_N} = \frac{1}{m} + \frac{v^2}{2k\omega_p} [\sqrt{(N+1)(N'+1)} + \sqrt{NN'}] \delta_{NN'}, \quad (13)$$

Noua expresie a regulii sumei f (12) o vom aplica în studiul spectrului masei efective în cazul unei rețele cristaline unidimensionale, pentru un potențial periodic

$$V(x) = x^2, \quad (14)$$

ce satisface condițiile

$$V(x+a) = V(x), \quad V(x) = V(-x), \quad (15)$$

a fiind constanta rețelei, iar k variază în prima zonă Brillouin $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$.

Deoarece valorile extreme ale energiei se obțin pentru $k = 0$ și $k = \pm \frac{\pi}{a}$, funcția de undă (7) devine

$$\Phi_{nN0} = \varphi_{n0}(x) \psi_N(Q). \quad (16)$$

Elementele de matrice ale operatorului impuls sînt

$$(\nabla^z)_{nn'} = \frac{2\pi}{a} \int \Phi_{nN0}^* \left(\frac{k}{i} \nabla \right) \Phi_{n'N'0} dx, \quad (17)$$

iar condiția de ortonormalitate (9)

se reduce la $\sum_{n' \neq n} \frac{(V'_{n'n})^2}{(\Delta E)^2} = 1$.

Punînd

$$\frac{1}{M_N} = \frac{1}{m} + \frac{1}{\mathcal{U}_N}, \quad (18)$$

unde

$$\mathcal{U}_N = \frac{k\omega_p}{v^2 + (2N+1)}, \quad (19)$$

regula de însumare f (12) devine

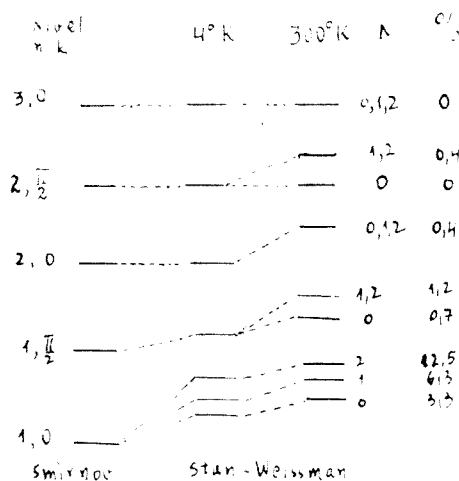
$$\frac{m}{m^*} = \frac{\mathcal{U}_N + m}{\mathcal{U}_N} + 4 \sum_{n' \neq n} \frac{(\nabla)_{nn'} (\nabla)_{n'n}}{\Delta E}. \quad (20)$$

În calculul numeric am folosit datele pentru un semi-conductor propriu zis cu $\mathcal{N}^v \gg \mathcal{N}^c$, unde \mathcal{N}^v este numărul electronilor de valență iar \mathcal{N}^c numărul electronilor de conducție, conductibilitatea fiind intrinsecă

în condiția unei excitații relativ slabe. Am studiat cazul existenței plasmonilor de valență la temperaturile de $4^{\circ}K$ și $300^{\circ}K$, pentru grupa a IV-a, unde numărul atomilor este în jur de $4,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, iar al electronilor de valență $\approx 1,78 \cdot 10^{23}$ [6]. Viteza medie a electronilor în aceste condiții este [6,7] $\langle v \rangle \approx 2,4 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ pentru $4^{\circ}K$ și de $\approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ pentru $300^{\circ}K$. Rezultatele obținute pe baza acestor valori sînt date în tabelul de mai jos.

Starea ($n; k$)	Smirnov	Nivelul N	$4^{\circ}K$	$300^{\circ}K$
1;0	1,0030	0	1,0032	1,0360
		1	1,0035	1,0600
		2	1,0040	1,1200
1; $\frac{\pi}{2}$	-0,0312	0		-0,0310
		1	-0,0310	-0,0309
		2		-0,0309
2; $\frac{\pi}{2}$	0,0294	0		0,0294
		1	0,0294	0,0295
		2		0,0295
2;0	-0,0031	0		
		1	-0,0031	-0,0030
		2		
3;0	0,0031	0		
		1	0,0031	0,0031
		2		

Despicarea nivelelor și variația masei efective datorită interacțiunii electron-electron de lungă rază de acțiune, calculate în procente, este dată în graficul de mai jos.



Din rezultatele obținute rezultă că masa efectivă este dependentă de interacțiunea ecranată electron-electron, interacțiunea ce determină o deplasare a nivelului energetic fundamental. Această deplasare cit și variația masei efective are loc și pentru $N \rightarrow 0$, datorită interacțiunii cu vidul.

Dat fiind că termenii interbandă din hamiltonian au fost eliminați, calculele se referă la o bandă determinată, unde spectrul masei efective prezintă o structură fină, datorită interacțiunii electronului cu câmpul plasmonic.

Variația masei efective crește cu temperatura, atingând valoarea maximă pentru fundul benzii $n = 1$ la temperatura de $300^\circ K$ și $N = 2$, descrescând cu creșterea nivelului energetic.

B I B L I O G R A F I E

1. V. P. Smirnov, „Vest. Leningrad. Univ.” **16**, 3, 34, 1961.
2. W. Kohn, „Phys. Rev.” **105**, 2, 509, 1957.
3. A. Weissmann, I. Stan, „Physics Letters” **12**, 3, 196, 1964.
4. D. Pines, „Rev. Mod. Phys.” **28**, 3, 184, 1956.
5. I. M. Luttinger — W. Kohn, „Phys. Rev.” **97**, 4, 869, 1955.
6. R. Smith, *Semiconductors*, Cambridge, 1959.
7. Dter : Haar, *Introduction to the Physics of Many-Body Systems*, New-York, 1958.
8. I. Stan — A. Weissmann, „Studia Univ. Babeș-Bolyai” **2**, 101, 1964.

ТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЫ

(Р е з ю м е)

Рассчитывается тонкая структура спектра эффективной массы в зависимости от главного квантового номера плазмонного поля. При установлении уравнения эффективной массы для случая электрон-электронного взаимодействия, имеющего длинный радиус действия, из нового \bar{f} коллективного правила суммирования, используя параболический периодический потенциал, получается смещение основного уровня (взаимодействие с вакуумом), расщепление спектра эффективной массы в зависимости от взаимодействия и изменения абсолютного значения эффективной массы от температуры. Полученные результаты сравниваются с результатами, найденными В. П. Смирновым [1] для одномерного случая.

LA STRUCTURE FINE DU SPECTRE DE LA MASSE EFFECTIVE

(R é s u m é)

On calcule la structure fine du spectre de la masse effective en fonction du nombre quantique principal du champ plasmonique. Si l'on établit l'équation de la masse effective pour le cas de l'interaction électron-électron à long rayon d'action, à partir de la nouvelle règle de sommation \bar{f} collective et en utilisant un potentiel périodique parabolique, on obtient le déplacement du niveau fondamental (interaction avec le vide), la division du spectre de la masse effective en fonction de l'interaction et la variation de la valeur absolue de la masse effective avec la température. On compare enfin les résultats obtenus avec ceux que V. P. Smirnov [1] a trouvés pour le cas unidimensionnel.

UNELE PROPRIETĂȚI MAGNETICE ALE CERIULUI METALIC

de

IULIE POP

Metalele pământurilor rare se referă la grupa metalelor de tranziție cu pătura $4f$ incompletă, care în general determină proprietățile lor magnetice. La începutul seriei pământurilor rare stările $6s$, $5d$ și $4f$, în atomul în stare liberă, au energii comparativ apropiate și numai cu creșterea numărului electronilor pe nivelul $4f$ și cu micșorarea razei lui, crește stabilitatea stării $4f$. În stare metalică, la lantanide, se păstrează individualitatea ionilor datorită faptului că nivelul $4f$ este puternic ecranat de către electronii nivelelor exterioare, adică electronii $4f$ suferă o localizare puternică în jurul nodurilor rețelei cristaline. În ce privește electronii $5d$ și $6s$, ei formînd banda electronilor de conductibilitate, sînt supuși efectului de colectivizare. Fiecare atom în cristal este purtător al momentului magnetic, a cărui valoare, după cum arată experiența, este foarte apropiată de cea teoretică, pentru ionul trivalent în stare liberă.

Din punct de vedere magnetic, toate aceste metale sînt paramagnetice într-un interval larg de temperatură, susceptibilitatea lor urmînd legea lui Curie-Weiss. La temperaturi înalte se produce excitarea stării fundamentale și prin urmare despicarea nivelelor energetice, care modifică alinura curbei $\chi(T)$. Temperatura Curie paramagnetică este o mărime pozitivă, cu excepția ceriului pentru care este negativă.

La temperaturi joase $T \leq \theta_p$, majoritatea metalelor din această serie prezintă fenomenul ordonării magnetice. Aproape toate metalele rare sînt antiferomagnetice cu structura de spin helicoïdală sau chiar mai complicată (conică sau cicloïdală), fapt confirmat pe cale neutronografică. Coeficientul γ , determinat din căldura specifică, are o valoare mare, mai cu seamă în cazul ceriului, fapt care indică în apropierea nivelului Fermi o ridicată densitate a stărilor electronice. În ce privește structura cristalină, majoritatea lantanidelor prezintă o rețea hexagonală compactă, care are un rol important în determinarea proprietăților magnetice la aceste metale.

Chiar din cele expuse pînă aci, rezultă că ceriul prezintă un caz aparte. În pătura electronică $4f$, ceriul are doi electroni cu mică stabilitate, unul putînd ocupa cu mare ușurință un nivel exterior, fapt care explică după Pauling polimorfizmul acestui metal la temperaturi joase.

Proprietățile magnetice ale ceriului metalic au fost destul de amănunțit studiate de către J. M. L o c k [1] și L. F. B a t e s [2], în intervalul de temperatură de la $4,5^{\circ}\text{K}$ pînă la temperatura de topire. Rezultatul experienței a arătat că proprietățile magnetice ale ceriului depind foarte mult de antecedentele probei și de regimul termic aplicat. Dependența de temperatură a curbei de susceptibilitate a arătat că în jurul temperaturilor de $12,5^{\circ}\text{K}$, 110°K și 200°K ceriul prezintă anomalii cu caracter de histerezis. Anomalia la temperatura de $12,5^{\circ}\text{K}$ a fost considerată de Lock ca fiind corespunzătoare trecerii ceriului din starea paramagnetică în starea antiferomagnetică, restul anomaliilor fiind atribuite schimbărilor rețelei cristaline. În mod analog, dependența de temperatură a căldurii specifice studiată de P a r k i n s o n și colaboratorii săi [3] prezintă în jurul temperaturilor de $12,5^{\circ}\text{K}$ și 110°K maxime caracteristice, pentru faze cristaline deosebite.

La temperaturi înalte susceptibilitatea magnetică [2, 4, 5] urmează legea lui Curie—Weiss completată cu un termen suplimentar χ_k datorit părții de înaltă frecvență de tip Van Vleck.

În prezenta lucrare am măsurat susceptibilitatea magnetică a ceriului metalic utilizînd o balanță de susceptibilități cu compensare mecanică [6, 7], măsurătorile fiind comparate și cu datele obținute la o balanță de tip Faraday—Suksmith. Măsurătorile au fost efectuate în vid de 10^{-3}mm . Hg de la temperatura azotului lichid pînă la punctul de topire. Proba cu o masă de 20 mg sub formă de sferă a fost răcită de la temperatura camerei pînă la temperatura azotului lichid, și apoi prin încălzirea treptată s-a măsurat susceptibilitatea magnetică. Puritatea metalului utilizat a fost de 99,5% Ce, conținutul de impurități fiind $\text{Fe} < 0,002\%$ și alte lantânide $\leq 0,5\%$.

În fig. 1 este reprezentată dependența de temperatură a inversului susceptibilității magnetice $1/\chi$. După cum se vede din figură în vecină-

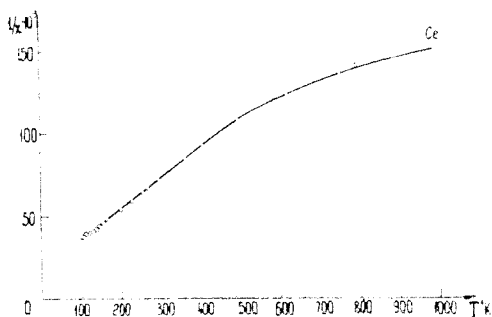


Fig. 1.

tatea temperaturii de 110°K curba $1/\chi(T)$ prezintă o anomalie, mai departe crescînd linear pînă la aproximativ 400°K , continuînd prin a se încovoia ușor spre axa temperaturilor, iar în apropiere de 1000°K suferă un salt care corespunde schimbării de fază cristalină.

Abaterea de la dependența lineară se datorește părții de înaltă frecvență a susceptibilității magnetice determinată de despicarea nivelelor energetice, precum și de contribuția la magnetizare a electronilor de conductibilitate, adică paramagnetizmului de tip Van Vleck și de tip Pauli. Dacă la rezultatul obținut se aplică legea lui Curie—Weiss sub forma $\chi = C/(T - \theta_p) + \chi_k$, atunci se pot determina constantele C , θ_p , χ_k și momentul magnetic efectiv P_p . Si astfel am găsit: $C_A = 0,724$, $\theta_p = -60^\circ\text{K}$, $\chi_k = 0,775 \cdot 10^{-6}$ și $P_p = 2,41\mu_B$. Însă din teorie lui Van Vleck pentru ionul trivalent obține $P_p = 2,54\mu_B$ și $\chi_k = 0,52 \cdot 10^{-6}$.

Comparând aceste date, rezultă că valoarea obținută pentru P_p este în bună concordanță cu cea teoretică. În ce privește valoarea χ_k , aici trebuie luată în considerare și contribuția electronilor de conductibilitate, de care nu se ține cont în teoria lui Van Vleck, adică $\chi_k = \chi_V + \chi_P$ unde χ_V reprezintă susceptibilitatea de tip Van Vleck, iar χ_P susceptibilitatea de tip Pauli. Cu o astfel de interpretare a datelor experimentale se obține o bună concordanță cu teoria.

Comportarea căldurii specifice în funcție de temperatură, precum și a izotermelor curbilor de magnetizare, fig. 2, arată că în jurul temperaturii de 110°K are loc nu numai o transformare de rețea cristalină, ci și probabil o transformare magnetică. În fig. 2 sînt reprezentate izotermele curbilor de magnetizare obținute pentru ceriul metalic în vecinătatea temperaturii de 110°K . Din figură se vede că la început intensitatea de magnetizare în funcție de cîmpul magnetic crește linear și atingînd o anu-

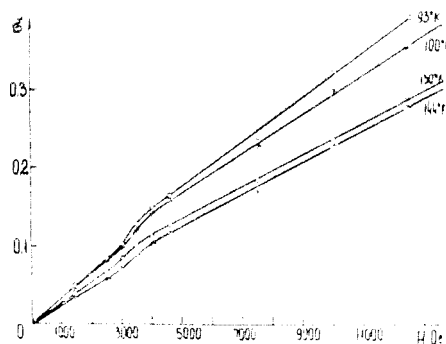


Fig. 2.

mită valoare critică a cîmpului magnetic $H_k = 3000$ Oe suferă un salt, continuînd să crească apoi linear cu cîmpul. Totul se petrece ca și cum momentele magnetice elementare la valoarea H_k se rotesc în direcția cîmpului magnetic, mărind prin aceasta intensitatea de magnetizare. Salturi analoge au fost găsite și la alte metale din seria lantanidelor care posedă ordonare magnetică (antiferomagnetism) cu structură de spin helicoidală. Este posibilă, prin urmare, și în cazul ceriului o ordonare magnetică analogă corespunzătoare unei alte faze cristaline decît faza γ , pentru care deja este stabilită existența stării antiferomagnetice cu temperatura Neel de $12,5^\circ\text{K}$. Rămîne neprecizat care anume modificare a ceriului este prezentă în cazul de față, întrucît n-am făcut un studiu al rețelei cristaline.

BIBLIOGRAFIE

1. J. M. Lock, „Proc. Phys. Soc.” **B 70**, 6, (1957), 567
2. L. F. Bates, S. T. Leach, R. G. Loasby, „Proc. Phys. Soc.” **B 68**, 11 (1955), 859.
3. D. H. Parkinson, F. E. Simon, F. H. Spedding, „Proc. Phys. Soc.” **A 207**, (1951), 137.
4. R. V. Colvin, S. Aaraj, J. M. Peck, „Phys. Rev.” **122**, (1961), 14.
5. S. Aaraj, H. Chessin, R. V. Colvin, G. R. Dunmyre, „J. Appl. Phys.” **34**, 6, (1963), 1668.
6. I. Maxim, Iuliu Pop, și A. Nicula, „Studia Univ. Babeș-Bolyai,” Ser. I, Fasc. I (1960), 260.
7. Iuliu Pop și V. I. Cecernikov, *Pribori i tehnika eksperimenta*, (1964) sub tipar.

НЕКОТОРЫЕ МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЦЕРИЯ

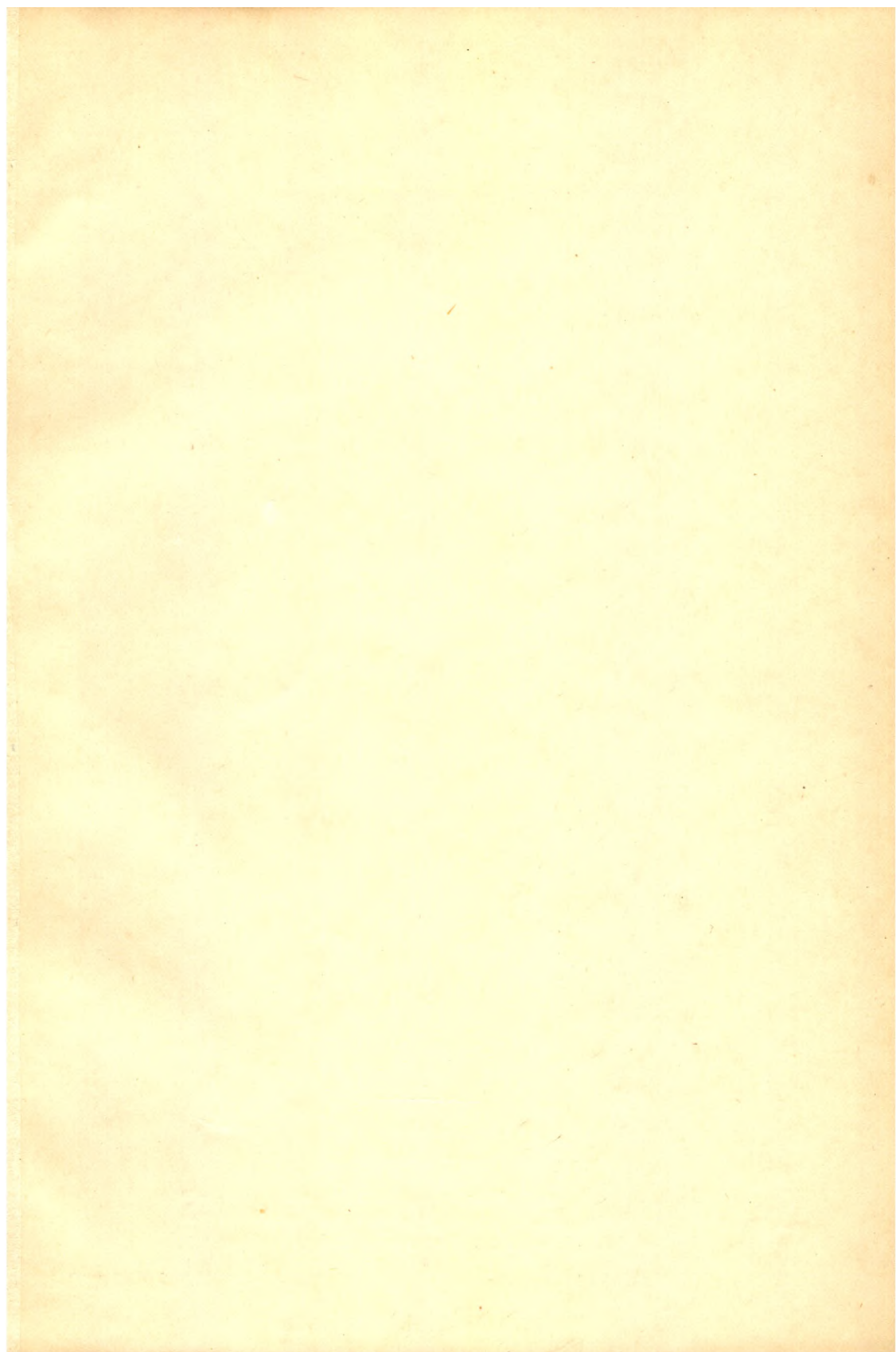
(Резюме)

Изучалась магнитная восприимчивость металлического церия в температурном интервале от температуры жидкого азота до точки плавления церия. Установилась аномалия магнитной восприимчивости около температуры 110°K, где, на основании аномалии изотерм намагничивания в зависимости от магнитного поля предполагается существование антиферромагнитного перехода с одновременным изменением кристаллической решетки. Значение эффективного магнитного момента и независимой от температуры магнитной восприимчивости находится в хорошем согласии с теоретическими данными о трехвалентном ионе церия, а также с другими экспериментальными данными.

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DU CÉRIUM MÉTALLIQUE

(Résumé)

On a étudié la susceptibilité magnétique du cérium métallique dans l'intervalle de la température de l'azote liquide jusqu'au point de fusion du cérium. On a établi l'anomalie de la susceptibilité magnétique autour de la température de 110 K, où, sur la base de l'anomalie des isothermes de l'intensité de magnétisation en fonction du champ magnétique, on suppose l'existence d'une transition antiferromagnétique, accompagnée aussi d'un changement du réseau cristallin. La valeur du moment effectif et des susceptibilités magnétiques indépendantes de la température sont d'accord avec les données théoriques pour l'ion de cérium trivalent ainsi qu'avec d'autres données expérimentales.



43875

Abonament anual : 20 lei seria, 150 lei toate seriile. Abonamentele se fac la oficiile poștale, prin factorii poștali și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Prețul 10 lei