

491307

Ex. 3

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1964



Bound I. 103/1965

C L U J

În cel de-al IX-lea an de apariție (1964) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile :

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На IX году издания (1964), *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
психология—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur IX-me année de publication (1964) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes :

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

491307

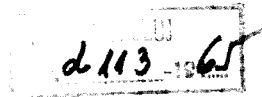
STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1964



C L U J

REDACTOR ȘEF:
Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTOR ȘEF ADJUNCT:
Acad. prof. ȘT. PÉTERFI

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:
Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU, (redactor responsabil), **Prof. GH. CHIȘ**,
Prof. D. V. IONESCU, **Prof. V. MARIAN**, **Prof. GH. PIC**, **Prof. I. URSU**,
membru coresp. Acad. R.P.R.

Redacția:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 34—50

S U M A R

Douăzeci de ani de activitate a Facultăților de matematică și fizică ale Universității „Babeș—Bolyai” din Cluj	7
I. GY. MAURER, I. PURDEA, Inele pentru care submodulele sînt subinele	13
I. TORSAN, Asupra unor teoreme ale lui A. Hirsch, A.B. Farnell și N.A. Khan	17
P. ENGHİȘ, Delimitări în problema clasei unor spații Riemann V_4 cu grup de mișcări G_4 netranzitiv	23
P. T. MOCANU, Asupra razei de convexitate a funcțiilor olomorfe	31
D. D. STANCU, Asupra momentelor unor variabile aleatoare discrete	35
Á. PÁL, Un criteriu de identificare a sateliților artificiali ai Pămîntului	49
A. TURCU, Soluții aproape-periodice ale ecuației lui Duffing, în caz de nerezonanță	61
I. STAN, S. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂȚAGĂ, Influența variației formei Pămîntului asupra mișcării sale (II)	77
Z. GÁBOS, O. GHERMAN, Observații asupra proprietăților de simetrie ale cîmpului Dirac	83
R. V. DEUTSCH, M. CRISTEA, Contribuțiuni la studiul fenomenului de polarizare eliptică a undelor magnetohidrodinamice slabe	99
I. STAN, A. WEISSMANN, Efecte colective și de deformare în semiconductori	101
A. NICULA, GH. CRISTEA, Dependența de temperatură a spectrului de RES a ionului de Cu(II) în zeoliți	111
GH. CRISTEA, Studiul spectrului de rezonanță electronică de spin a ionului de V^{+3} în corindon (Al_2O_3)	117
AL. BÓDI, Producerea tensiunii în trepte pentru ridicarea automată a curbelor caracteristice cu ajutorul oscilografului catodic	125
AL. NICULA, Rezonanța electronică de spin a ionilor de cupru (II) în diferite soluții	133

C r o n i c ă

Contribuții privind studiul și folosirea tensiunii dreptunghiulare în tehnica măsurărilor (AL. BÓDI)	139
Despre rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet la sisteme de ecuații cu derivate parțiale, de ordinul al doilea, de tip eliptic (P. SZILÁGYI)	140
Contribuții la teoria elementară a funcțiilor generalizate (F. CONSTANTINESCU)	142
Ședințe de comunicări	143
Participări la manifestări științifice internaționale	144

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Двадцать лет деятельности математического и физического факультетов Клуужского университета им. Бабеша-Большая	7
И. Д. МАУРЕР, И. ПУРДЯ, Кольца для которых подмодули являются подкольцами	13
И. ТОРСАН, О некоторых теоремах Д. Гирша, А. Б. Фарнелла и Н. А. Кана	17
П. ЕНГИШ, Разграничения по вопросу класса римановых пространств V_4 с нетранзитивной группой движений G_4	23
П. Т. МОКАНУ, О радиусе выпуклости голоморфных функций	31
Д. Д. СТАНКУ, О моментах некоторых дискретных случайных переменных	35
А. ПАЛ, Критерий идентификации искусственных спутников Земли	49
А. ТУРКУ, Почти-периодические решения уравнения Дuffинга в случае нерезонанса	61
И. СТАН, Ш. ТОТ, Т. ПЕНЧУК, Е. БЭЦАГЭ, Влияние изменения формы Земли на её движение (II).	77
З. ГАБОШ, О. ГЕРМАН, Замечания относительно свойств симметрии поля Дирака	83
Р. В. ДОЙЧ, М. КРИСТЯ, К изучению явления эллиптической поляризации слабых магнитногидродинамических волн	95
И. СТАН, А. ВЕЙСМАН, Коллективные и деформационные эффекты в полупроводниках	101
А. НИКУЛА, Г. КРИСТЯ, Зависимость от температуры спектра ЭСР иона $Sm(II)$ в цеолитах	111
Г. КРИСТЯ, Изучение спектра электронно-спинового резонанса иона V^{+3} в корунде (Al_2O_3)	117
А. БОДИ, Образование ступенчатого напряжения для автоматического повышения характеристических кривых с помощью электронно-лучевого осциллографа	125
А. НИКУЛА, Электронный спиновый резонанс ионов меди(II) в различных растворах	133
Х р о н и к а	139

S O M M A I R E — C O N T E N T S

Vingt ans d'activité des Facultés de Mathématiques et de Physique de l'Université Babeş—Bolyai de Cluj	7
I. GY. MAURER, I. PURDEA, Anneaux pour lesquels les sous-modules sont des sous-anneaux	13
I. TORSAN, Au sujet de certains théorèmes de A. Hirsch, A.B.Farnell et N.A. Khan	17
P. ENGHİŞ, Délimitations dans le problème de la classe d'espaces Riemann V_4 à groupe de mouvements G_4 non-transitif	23
P. T. MOCANU, Sur le rayon de convexité des fonctions holomorphes	31
D. D. STANCU, On the Moments of Certain Discrete Randon Variables	35
A. PÁL, Un critère d'identification des satellites artificiels de la Terre	49
A. TURCU, Solutions presque-périodiques de l'équation de Duffing en cas de non-résonance	61
I. STAN, S. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂŢAGĂ, L'influence de la variation de la forme de la Terre sur son mouvement	77
Z. GÁBOS, O. GHERMAN, Observations sur les propriétés de symétrie du champ Dirac	83
R. V. DEUTSCH, M. CRISTEA, Contributions à l'étude du phénomène de polarisation elliptique des ondes magnétohydrodynamiques faibles	95
I. STAN, A. WEISSMANN, Effets collectifs et de déformation dans des semiconducteurs	101
A. NICULA, GH. CRISTEA, La dépendance de la température du spectre de RES de l'ion de Cu (II) dans les zéolithes	111
GH. CRISTEA, Étude du spectre de résonance électronique de spin de l'ion de V^{+3} dans le corindon (Al_2O_3)	117
AL. BÓDI, Production de la tension en escalier en vue de relever automatiquement les courbes caractéristiques à l'aide de l'oscillographe cathodique	125
AL. NICULA, La résonance électronique de spin des ions de cuivre (II) dans différentes solutions	133
Chronique	139



DOUĂZECI DE ANI DE ACTIVITATE A FACULTĂȚILOR DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ ALE UNIVERSITĂȚII „BABEȘ—BOLYAI” DIN CLUJ

La Facultățile de matematică-mecanică și de fizică ale Universității „Babeș—Bolyai” din Cluj ca și în toate celelalte instituții de învățămînt superior din R.P.R., are loc în urma eliberării țării de sub jugul fascist și a instaurării regimului de democrație populară, un salt în dezvoltarea activității, printr-o amplificare importantă a numărului cadrelor didactice și al studenților, extinderea localurilor, înzestrarea laboratoarelor, precum și modernizarea substanțială a planurilor de învățămînt. În anii următori, mai cu seamă după preluarea întregii puteri politice de către clasa muncitoare, activitatea de cercetare științifică, planificată și orientată judicios, conform indicațiilor Partidului Muncitoresc Român, cunoaște un avînt deosebit.

În perioada anterioară reformei învățămîntului din 1948 vechea Facultate de științe, întoarsă din refugiu din Timișoara, se reinstalează în vechile clădiri din Cluj. Cărțile lipseau, iar activitatea științifică era aproape imposibilă. Cu ajutorul substanțial din partea P.C.R. și a guvernului s-au obținut noi localuri și s-a alocat o sumă importantă pentru refacerea instalațiilor și amenajarea laboratoarelor. S-a început multiplicarea de cursuri și editarea manualelor. S-a tipărit un curs de fizică generală, iar cadrele didactice au organizat în localul Universității conferințe pentru muncitori. În 1949 s-au susținut 4 teze de doctorat în matematică sau fizică. Revista „Mathematica” și-a reluat apariția, iar în noiembrie 1945 s-a ținut Congresul al III-lea al matematicienilor romîni.

Dintre cadrele didactice ale vechii Facultăți de științe și-au reluat activitatea profesorii A. Maior, N. Abramescu și Th. Angheluță, cărora se datoresc tratate și manuale de matematici valoroase. Prof. Th. Angheluță din 1955 a primit sarcina de a conduce Catedra de matematici a Institutului politehnic din Cluj, iar în 1963 i s-a decernat titlul de „om de știință emerit al R.P.R.”

Prin reforma învățămîntului din 1948, universitățile au fost reorganizate pe baze noi, științifice. Facultatea de științe a fost scindată, și a luat naștere Facultatea de matematică și fizică. S-au creat posibilități de predare la un nivel mai ridicat a disciplinelor. În decurs de 10 ani, numărul cadrelor didactice s-a dublat. S-a introdus organizarea pe catedre, înfiin-

ținându-se 4 catedre de matematică și 2 de fizică. Bibliotecile, organizate pe facultăți, au fost puse și la dispoziția studenților prin amenajarea unor spații adecvate. Educația profesională și ideologică a luat o nouă formă, studenții fiind repartizați în grupe de 20—30 studenți.

Odată cu îmbunătățirea planurilor de învățământ se predau cursuri de specialitate în care sînt expuse cele mai recente rezultate ale științei. Știința promovată în aceste facultăți se bazează pe concepții materialist-dialectice, corespunzînd astfel sarcinilor construirii socialismului.

Prin înființarea aspiranturii s-a dat posibilitate tinerelor cadre de a se forma științific, obținînd titlul de candidat în științe fizico-matematice.

Prin analizele de cursuri inițiate în această perioadă s-a aprofundat și ridicat conținutul științific și ideologic al tuturor cursurilor, ajutîndu-se astfel la îmbunătățirea treptată a predării.

Mai multe cadre tinere au fost trimise la studiu și specializare în universitățile din alte țări.

S-au înființat cercurile științifice studențești, al căror număr a sporit din an în an. Numeroși studenți au participat la olimpiadele ținute în cadrul S.S.M.F., obținînd și premii și plasîndu-se de mai multe ori pe primele locuri.

În scopul unui schimb de experiență cu universitățile străine, mai multe cadre didactice au vizitat țările lagărului socialist, cit și țări capitaliste, iar Facultatea a fost vizitată de numeroase personalități științifice străine. Astfel s-a primit vizita acad. A. V. Ambarțumian (Biurakan 1962), prof. A. Denjoy (Paris), prof. L. Fejes-Tóth (Budapesta), prof. B. V. Gnedenko (Moscova), acad. V. Korinek (Praka), prof. Krasnosel'ski (Voronej), prof. A. Kastler (Paris), prof. Norden (Kazan), acad. A. Rényi (Budapesta), acad. L. S. Sobolev (Moscova), prof. Sokolov (Moscova), prof. I. T. Wilson (Toronto-Canada).

Dezvoltarea Facultății de matematică și fizică se oglindește și în numărul crescînd al studenților. Astfel în 1938—39 fosta Facultate de științe din Cluj avea 324 studenți. În 1947—48 această facultate avea 1322 studenți, iar în 1948—49, după reforma învățămîntului numai Facultatea de matematică și fizică avea 101 studenți. În 1963—64, Facultățile de matematică și de fizică devenite independente între timp, au împreună 944 studenți la secțiile de zi și 167 la secția fără frecvență.

Au avut loc schimbări radicale și în compoziția socială a studenților, porțile universității fiind larg deschise pentru fiii oamenilor muncii. În urma înființării Uniunii Tineretului Muncitor majoritatea studenților s-au încadrat în această organizație revoluționară de tineret. Partidul și guvernul a asigurat studenților tot mai multe posibilități materiale și condiții de muncă, prin punerea la dispoziția lor a căminelor și cantinelor moderne ce au fost construite.

Universitatea cu limba de predare maghiară „Bolyai” înființată la 1 iunie 1945, a avut o structură similară cu a celorlalte universități din țară. Numărul cadrelor didactice de la Facultatea de matematică și fizică a acestei universități a crescut de la 26 în 1950 la 16 în 1958. Pentru promovarea activității didactice au fost organizate laboratoare bine utilizate și o biblio-

tecă de specialitate ; s-a pornit și la o activitate științifică a cadrelor didactice. Printre problemele studiate menționăm : studiul creșterii cristalelor, studii asupra axiomaticii termodinamicii și a bazelor mecanicii cuantice, probleme de balistică. Se publică revista științifică „Acta Bolyaiana” în care apar articole de matematică și fizică. Se multiplică mai multe cursuri pentru uzul studenților. Cu ocazia aniversării a 150 de ani de la nașterea lui J. Bolyai s-a publicat un volum comemorativ, cu colaborarea științifică a cadrelor mai multor universități din țară și străinătate. Între facultățile de matematică și fizică ale celor două universități clujene a existat o colaborare strinsă în domeniul didactic și cel științific. Profesori de la Universitatea „Victor Babeș” au ținut cursuri la Universitatea „Bolyai” și invers. Consiliile Facultăților, precum și ședințele de catedre au fost vizitate reciproc.

În 1959 a avut loc unificarea celor două universități, „V. Babeș” și „Bolyai”. Prin aceasta Facultatea de matematică și fizică a fost mult întărită, reorganizându-se rațional spațiul și materialul didactic al celor două universități.

În 1962 Facultatea de matematică și fizică s-a scindat în : Facultatea de matematică-mecanică și Facultatea de fizică. Numărul catedrelor a sporit, astăzi existând la Facultatea de matematică-mecanică următoarele catedre : Algebră (șef de catedră prof. Gh. Pic), Geometrie (șef de catedră conf. A. Tóth), Analiză (acad. prof. T. Popoviciu), Teoria funcțiilor (acad. prof. G. Călugăreanu), Ecuații diferențiale (prof. D. V. Ionescu), Calcul numeric și statistic (conf. D. Stancu), Astronomie și mecanică (prof. Gh. Chiș), iar la Facultatea de fizică : Mecanică și căldură (prof. V. Marian), Electricitate și magnetism (prof. I. Ursu, membru corespondent al Acad. R.P.R.), Electroradiotehnică și optică (prof. T. László), Fizică atomică și nucleară (prof. V. Mercea, membru corespondent al Acad. R.P.R.), Fizică teoretică (prof. M. Drăganu).

Facultatea de matematică-mecanică funcționează cu trei secții de specializare : Secția de analiză, Secția mașini de calcul și Secția mecanica fluidelor, iar Facultatea de fizică funcționează cu secțiile : electroradiofizică, fizica corpului solid, fizică teoretică.

Trecînd în revistă rezultatele obținute de catedrele Facultății de matematică-mecanică, menționăm următoarele :

Catedra de analiză este una dintre primele catedre înființate la Facultate. Ca urmare a orientării catedrei spre cercetări moderne de teoria aproximării funcțiilor, în jurul ei s-a format un puternic colectiv de matematicieni specialiști în acest domeniu. Astfel a luat naștere la Cluj școala de analiză numerică.

Dintre teoriile mai importante elaborate de către membrii catedrei remarcăm :

Teoria restului în procedeele de aproximare ale analizei, bazată pe noțiunea de convexitate de ordin superior; această teorie a pus în evidență structura anumitor clase funcționale liniare și și-a găsit numeroase aplicații (acad. prof. T. Popoviciu).

Ținîndu-se seamă de importanța pe care o prezintă procedeele de interpolare care conservă anumite proprietăți ale funcției approximate, s-a

elaborat o teorie asupra conservării alurii funcțiilor prin interpolare (acad. prof. T. Popoviciu).

Noțiunea de funcție convexă a fost generalizată introducându-se noțiunea de convexitate față de o mulțime interpolatoare de funcții. Elaborarea acestei teorii a condus la găsirea unor teoreme de medie pentru funcții continue, care conțin ca și cazuri particulare teoremele de medie pentru diferențe divizate. Noile teoreme au un caracter neliniar.

La Catedră funcționează un seminar special de programare liniară și cea mai bună aproximație. În cadrul acestui seminar au fost abordate pe lângă numeroase probleme teoretice și probleme propuse de întreprinderi.

Catedra de teoria funcțiilor studiază de asemenea probleme moderne. Cercetarea științifică s-a orientat asupra studiului funcțiilor și transformărilor univalente (acad. prof. G. Călugăreanu), obținându-se condiții necesare și suficiente de univalență, precum și proprietăți geometrice noi ale funcțiilor univalente. Alte rezultate s-au obținut asupra polinoamelor de cea mai bună aproximație în domeniul complex (acad. prof. G. Călugăreanu și alții). O altă direcție de cercetare este aceea a izotopiei curbilor închise (problema nodurilor) în care s-a obținut formarea unor noi invarianți de izotopie. Munca rodnică în cadrul acestei catedre a fost premiată de Ministerul Învățământului (premiul I, 1961), premiu acordat academicianului prof. G. Călugăreanu pentru lucrarea : Studiul invarianților de izotopie a nodurilor.

La Catedra de ecuații diferențiale s-au obținut rezultate importante în cele trei direcții de cercetare ale membrilor catedrei care sînt: Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale (prof. D. V. Ionescu), Teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic și teoria ecuațiilor diferențiale care depind de un parametru mic ca factor al derivatei de ordinul cel mai înalt. Rezultatele obținute prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale pot avea aplicație în practică, ele slujind la integrarea ecuațiilor diferențiale care se întîlnesc în diferite probleme practice, puse de fizică sau tehnică. Ele sînt în legătură cu cercetările similare care se fac în străinătate și fac parte din ramura nouă a matematicii, analiza numerică, care astăzi este foarte mult aprofundată datorită fenomenelor noi rapide și a mașinilor noi de calcul.

Catedra de algebră studiază problemele algebrei moderne, astfel: Probleme din domeniul teoriei grupurilor. S-a stabilit o ecuație fundamentală pentru grupurile de substituție finite de mai multe variabile. S-a stabilit proprietatea cvasicentrului de a fi nilpotent. S-a stabilit forma analitică a invarianților proiectivi ai curbilor algebrice de ordinul patru. S-au obținut rezultate interesante în topologizarea unor structuri algebrice.

În cercetările științifice ale catedrei de geometrie prof. T. Mihăilescu a contribuit la introducerea metodelor moderne ale geometriei diferențiale. Menționăm cercetările de geometrie proiectivă diferențială cu referire specială la teoria rețelilor conjugate și teoria varietăților neolome liniare din care au rezultat lucrări valoroase. Profesorul E. Gergely a studiat-probleme de geometrie hiperbolică și de geometria intrinsecă a suprafețelor convexe în sensul lui A. D. Alexandrov, precum și varietățile în spațiile lui Hilbert. În ultimii ani se desfășoară o muncă rodnică și în cadrul colectivului de omografie.

În teoria nomogramelor și a țeșturilor s-au stabilit diferite condiții de reprezentare nomografică fără ipoteza de derivabilitate a ecuațiilor scării, precum și îmbunătățirea nomogramelor cu ajutorul transformărilor proiective și neproiective. S-au obținut teoreme de închidere noi pentru țeșturi tridimensionale generalizate. În cadrul acestei catedre se studiază și probleme de istorie a matematicii, astfel manuscrisele matematice transilvănene din secolele XVII, XVIII, XIX, istoria numerelor și a calculelor și altele.

Recent a fost înființată Catedra de calcul numeric și statistic. Colectivul științific al acestei catedre se ocupă cu studiul unor algoritme și limbaje de programare automată la mașinile electronice de calcul, evaluarea erorii unor formule liniare de aproximație și studiul celei mai bune aproximații a funcțiilor continue, aplicarea calculului probabilităților la rezolvarea unor probleme concrete din analiza numerică, economie și biologie.

Cercetarea astronomică a fost polarizată în jurul Observatorului astronomic al Universității. Dintr-un laborator cu caracter mai mult didactic, în anii puterii populare, în special după reforma învățământului din 1948, Observatorul devine un institut de cercetări științifice cu preocupări mai mult în domeniul stelelor variabile. În timpul celor 10 ani de apartenență la Academia R.P.R. (1951—1961) Observatorul dobândește o tematică proprie și personalul corespunzător, cercetarea fiind apoi continuată pe aceleași linii în cadrul Universității din Cluj.

În aceste condiții favorabile s-au obținut următoarele realizări :

a) În problema stelelor variabile : în 25 lucrări publicate au fost deduse noi elemente fotometrice, elemente orbitale și observații pentru cca. 30 stele duble fotometrice, cercetându-se cauzele variației perioadei. În plus 9 lucrări recente prezintă elemente fotometrice noi pentru stele de tipul RR Lyre necesare pentru studiul scalei distanțelor cerești.

b) În problema urmării sateliților artificiali : Au fost efectuate (1957 — 63) peste 3000 de observații (poziții) comunicate telegrafic Astrosovietului pe măsura obținerii lor, fiind utilizate pentru efemerida de urmărire și deducerea factorilor geofizici și determinarea densității atmosferei din variația perigeelor orbitelor. Pentru activitatea sa, Observatorul din Cluj a fost evidențiat în rapoartele anuale ale Consiliului astronomic al U.R.S.S.

c) În domeniul mecanicii cerești a fost construită teoria mișcării micii planete Artracea și s-au determinat poziții ale citorva planete mici și comete ca și orbita definitivă a unei comete (9 lucrări).

În cadrul mecanicii teoretice s-au făcut cercetări în domeniul mecanicii fluidelor, teoriei mișcării rachetelor și teoriei oscilațiilor.

S-au obținut rezultate noi privind calculul rezistenței de frecare și a transportului de căldură în stratul limită incompresibil și compresibil, cercetarea regimurilor optime de mișcare și funcționare a rachetelor, determinarea soluțiilor periodice și aproape periodice, stabile a ecuației lui Duffing precum și stabilitatea mișcării descrise de ecuații de tip Mathieu.

Activitatea de cercetare științifică la Facultatea de fizică s-a manifestat în mai multe direcții, obținându-se rezultate frumoase.

Astfel un colectiv condus de prof. A. Ionescu a elaborat o metodă originală de obținere a acetilenei prin cracarea gazului metan într-o descărcare în înaltă frecvență. Această lucrare a fost distinsă cu premiul de stat. În perioada 1950—53 a fost elaborat de același colectiv un prototip de defectoscop, primul de acest gen în țara noastră.

O altă preocupare a fizicienilor a constat în studiul experimental al proprietăților magnetice a aliajelor binare și ternare feromagnetice, domeniu în care s-au obținut de asemenea rezultate bogate.

Un colectiv relativ tânăr a început să studieze sistematic problemele de cinetica gazelor, obținând în această direcție multe rezultate remarcabile. O parte din rezultate au și o aplicare imediată în unele ramuri ale industriei.

Cel mai tânăr colectiv este cel de rezonanță magnetică. Fiind dotat cu laboratoare moderne și cu aparate de cel mai ridicat nivel internațional, acest colectiv a obținut o serie de rezultate valoroase apreciate atât în țară cât și în străinătate. Lărgindu-și preocupările acest colectiv creează premisa unificării majorității eforturilor experimentale și a unei părți a eforturilor teoretice din Facultate în jurul studiului corpului solid. Au luat de asemenea ființă grupuri mai mici care se ocupă de aplicarea ultrasunetelor în unele probleme de biologie, de probleme de difuzie în electroliți, de probleme de spectroscopie atomică și moleculare și de unele probleme experimentale de tehnica impulsurilor.

Activitatea teoretică s-a manifestat de asemenea în mai multe direcții. Au fost obținute rezultate interesante în hidrodinamică, magnetohidrodinamică, în teoria coerenței și polarizării luminii și în unele probleme de teoria corpului solid.

În Facultatea de matematică-mecanică au susținut disertația de candidat 18 aspiranți, iar în Facultatea de fizică 5 aspiranți.

Dintre manualele și monografiile imprimare, redactate de cadrele didactice menționăm: Elemente de teoria funcțiilor complexe (acad. prof. G. Călugăreanu, 1963), Cuadraturi numerice (prof. D. V. Ionescu, 1957), Geometrie diferențială proiectivă (prof. T. Mihăilescu, 1958), Introducere matematică în fizica teoretică modernă (prof. M. Drăganu, 1958—59), Termodinamica fenomenologică (prof. Z. Găbos, 1959) și Efecte magneto-mecanice la oxigen (prof. I. Ursu, 1959).

În urma condițiilor deosebit de favorabile create de partid și guvern în ce privește mijloacele materiale, cât și griji permanente a organelor de conducere pentru promovarea muncii didactice și științifice și aprecierii pe care o acordă realizărilor efectuate, Facultățile de fizică și de matematică-mecanică ale Universității noastre privesc cu încredere în viitor depunând toate eforturile pentru a se achita de îndatoririle ce le revin, spre folosul Patriei și binele poporului muncitor.

INELE PENTRU CARE SUBMODULELE SÎNT SUBINELE

de

I. GY. MAURER și I. PURDEA

Fie R un inel. Vom nota cu R^+ modulul (grupul aditiv) său. Există inele R pentru care submodulele lui R^+ sînt în același timp și subinele ale lui R . Astfel de inel este de ex. inelul numerelor întregi. În general inelele nu au această proprietate. Se pune problema caracterizării inelelor cu această proprietate. În această notă se studiază aceste inele și se dă o caracterizare a acestora într-un caz particular.

TEOREMA 1. *Fie R un inel cu element unitate și fără divizori ai lui zero. O condiție necesară și suficientă pentru ca orice submodul al lui R^+ să fie subinel al lui R este ca R să fie un inel ciclic (adică R^+ să fie ciclic).*

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem că orice submodul al lui R^+ este subinel al lui R . Fie a un element arbitrar din R . Submodulul $\{a\}^+$ generat de a va fi deci subinel. Rezultă că $a^2 \in \{a\}^+$, deci $a^2 = na$, unde n este un număr întreg. Această egalitate se poate scrie în forma $a(a - ne) = 0$, unde e este elementul unitate al lui R . Întrucît în R nu există divizori ai lui zero, urmează că $a - ne = 0$, deci $a = ne$. Aceasta înseamnă că R^+ este ciclic și are ca generatori pe e : $R^+ = \{e\}^+$, deci R este un inel ciclic.

Condiția este suficientă. Fie R un inel ciclic și H^+ un submodul oarecare al modulului ciclic $R^+ = \{a\}^+$. Acest modul fiind ciclic și H^+ va fi ciclic: $H^+ = \{sa\}^+$, unde s este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care $sa \in H^+$. Pentru a arăta valabilitatea afirmației noastre, este suficient să se demonstreze că produsul a două elemente h_1 și h_2 din H^+ aparține lui H^+ . Deoarece $H^+ = \{sa\}^+$, avem: $h_1 = s_1(sa)$ și $h_2 = s_2(sa)$. Rezultă: $h_1h_2 = s_1(sa) \cdot s_2(sa) = s_1s_2s^2a^2$. Dar $a^2 \in R^+ = \{a\}^+$, deci $a^2 = la$, unde l este un număr întreg. Rezultă că $h_1h_2 = s_1s_2s^2la = (s_1s_2sl)(sa) = n(sa)$, unde $n = s_1s_2sl$ este un număr întreg. Deci $h_1h_2 \in H^+$, ceea ce era de demonstrat.

CONSECINȚĂ. *Fie R un inel cu element unitate și fără divizori ai lui zero. Dacă R are proprietatea că orice submodul al lui R^+ este subinel al lui R , atunci R este un domeniu de integritate în care orice subinel este ideal.*

Demonstrație. Din ipotezele făcute pentru R , rezultă conform teoremei, că R este un inel ciclic. Deci R^+ este ciclic și astfel două elemente oarecare r_1 și r_2 ale lui R se pot scrie în forma $r_1 = n_1a$ și $r_2 = n_2a$, unde a este elementul generator al lui R^+ , iar n_1 și n_2 sînt numere întregi. Rezultă: $r_1r_2 = (n_1a)(n_2a) = (n_2a)(n_1a) = r_2r_1$. Înmulțirea în R fiind comutativă, rezultă că R este un domeniu de integritate.

Fie H un subinel oarecare al lui R . Modulul H^+ al lui H este ciclic: $H^+ = \{sa\}^+$, unde s este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care $sa \in H^+$. Fie h un element oarecare al lui H și r un element oarecare al lui R . Deoarece în același timp $h \in H^+$ și $r \in R^+$, avem: $h = s_1(sa)$ și $r = ka$, unde s_1 și k sînt numere întregi. Rezultă că $rh = ka[s_1(sa)] = (ks_1s)a^2$. Dar $a^2 \in R^+$, deci $a^2 = la$, unde l este un număr întreg. Rezultă că $rh = (ks_1sl)a = n(sa)$, unde $n = ks_1l$ este un număr întreg. Deci $rh \in H^+$ și astfel $rh \in H$, de unde rezultă că H este ideal.

Observații. 1. În demonstrația suficienței condiției din teorema 1 nu s-a folosit ipoteza că R este inel cu element unitate și fără divizori ai lui zero. S-a folosit numai ipoteza că R este ciclic. Rezultă: *orice inel ciclic R are proprietatea că submodulele lui R^+ sînt subinele ale lui R .*

2. Din faptul că orice submodule al lui R^+ este subinel al lui R , în general nu rezultă că R este ciclic. Valabilitatea acestei afirmații rezultă de ex. din faptul, că într-un inel zero neciclic R , toate submodulele lui R^+ sînt și subinele ale lui R .

TEOREMA 2. *Dacă un inel R are proprietatea că orice submodule al lui R^+ este și subinel al lui R , atunci R este generat de o familie de subinele ciclice ale lui R .*

Demonstrație. Fie $a_1, a_2, \dots, a_\xi, \dots$ o familie de generatori ai lui R , unde ξ parcurge o mulțime de indici I . Este evident că inelul R este generat de subinelele sale $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_\xi\}, \dots$, generate respectiv de elementele $a_1, a_2, \dots, a_\xi, \dots$. Din ipoteza teoremei rezultă că submodulele ciclice $\{a_\xi\}^+ = H_\xi^+$ ($\xi \in I$) ale lui R^+ sînt subinele ale lui R . De aici — avînd în vedere că pentru orice $\xi \in I$, $\{a_\xi\}$ este subinelul minimal al lui R care conține pe a_ξ — rezultă că $\{a_\xi\} \subseteq H_\xi$, unde H_ξ este subinelul lui R_ξ , al cărui modul este H_ξ^+ . Pe de altă parte elementele submoduleului $H_\xi^+ = \{a_\xi\}^+$ evident aparțin subinelului $\{a_\xi\}$ pentru orice $\xi \in I$. Deci $H_\xi \subseteq \{a_\xi\}$. Rezultă că $H_\xi = \{a_\xi\}$ ($\xi \in I$). Deci subinelele $\{a_\xi\}$ ($\xi \in I$) ale lui R sînt ciclice, ceea ce demonstrează teorema.

CONSECINȚĂ. *Dacă un inel R are proprietatea că orice submodule al lui R^+ este subinel al lui R și R admite cel puțin un sistem de generatori format dintr-un singur element, atunci R este un inel ciclic.*

Într-adevăr, dacă $a \in R$ generează inelul R , atunci conform demonstrației teoremei 2, rezultă că R este egal cu subinelul său $\{a\}$, generat de a , care este ciclic.

КОЛЬЦА ДЛЯ КОТОРЫХ ПОДМОДУЛИ ЯВЛЯЮТСЯ ПОДКОЛЬЦАМИ
(Резюме)

В работе изучаются те кольца R , для которых подмодули модуля (аддитивной группы R^+ кольца R одновременно являются и подкольцами кольца R . Дается характеристика этих колец в частном случае.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R кольцо, имеющее единичный элемент и без делителей нуля. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы любой подмодуль модуля R^+ был подкольцом кольца R является то, чтобы R был циклическим кольцом (т.е. чтобы R^+ был циклическим).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть R кольцо с единичным элементом и без делителей нуля. Если любой подмодуль модуля R является подкольцом кольца R^+ , то R является областью целостности в которой любое подкольцо является идеалом.

Замечание. Из доказательства достаточности условия теоремы 1 следует, что для любого циклического кольца R подмодули модуля R^+ являются подкольцами кольца R .

ТЕОРЕМА 2. Если любой подмодуль модуля R^+ является подкольцом кольца R , то R образован семей циклических подколец кольца R .

СЛЕДСТВИЕ. Если любой подмодуль модуля R^+ является подкольцом кольца R , а R допускает по крайней мере одну образующую систему, составленную из одного элемента, то R является циклическим кольцом.

ANNEAUX POUR LESQUELS LES SOUS-MODULES SONT DES SOUS-ANNEAUX
(Résumé)

La présente note étudie les anneaux R pour lesquels les sous-modules du module (du groupe additif) R^+ de R sont en même temps des sous-anneaux de R . On donne une caractérisation de ces anneaux dans un cas particulier.

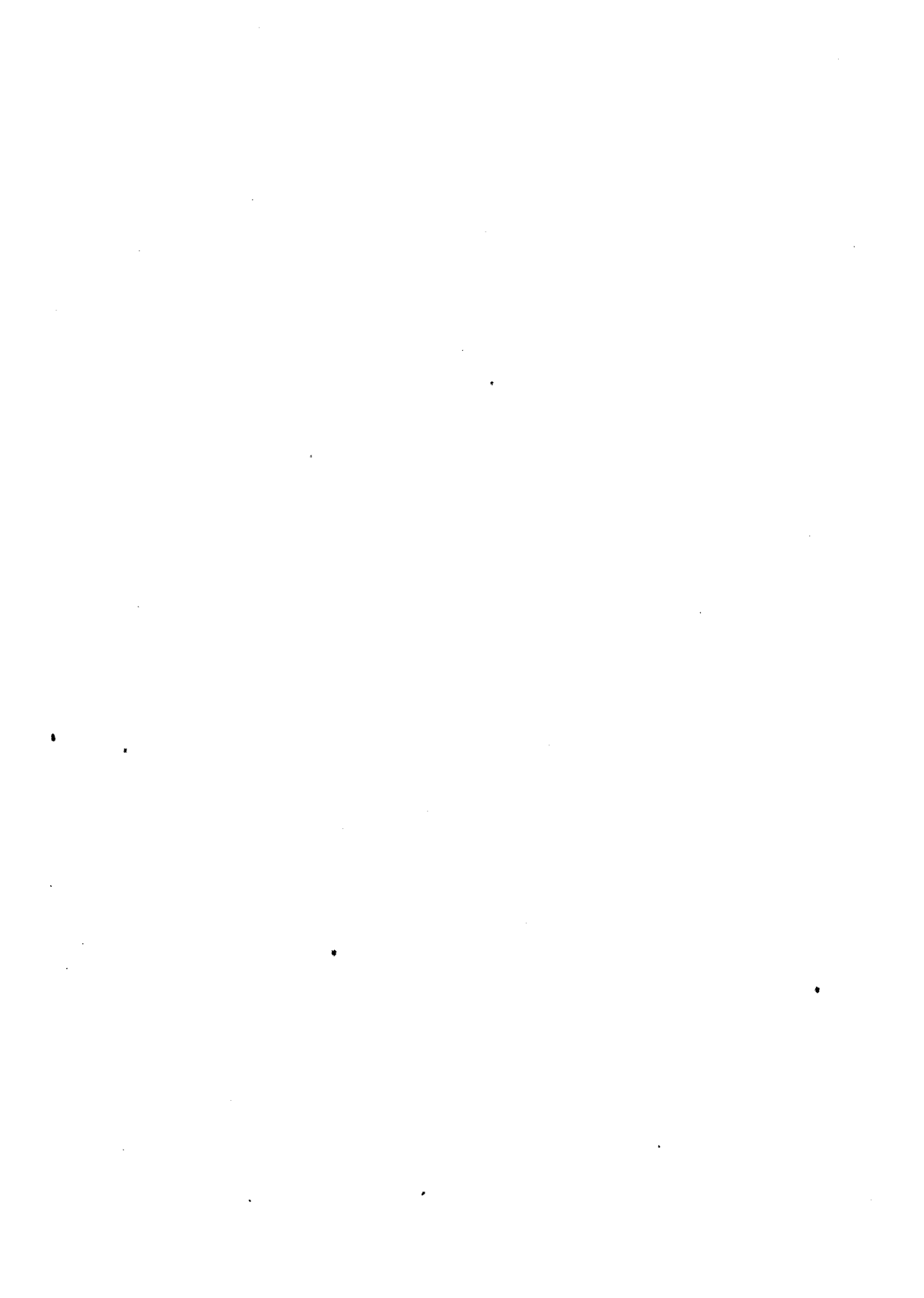
THÉORÈME 1. Soit R un anneau à élément unité et sans diviseurs de zéro. La condition nécessaire et suffisante pour que chaque sous-module de R^+ soit sous-anneau de R est que R soit un anneau cyclique (c'est à dire que R^+ soit cyclique).

COROLLAIRE. Soit R un anneau à élément unité et sans diviseurs de zéro. Si R a pour propriété que tout sous-module de R^+ est sous-anneau de R , alors R est un domaine d'intégrité où chaque sous-anneau est idéal.

Observation. De la démonstration que la condition du théorème 1 est suffisante il résulte que : tout anneau cyclique R a pour propriété que les sous-modules de R^+ sont des sous-anneaux de R .

THÉORÈME 2. Si un anneau R a pour propriété que tout sous-module de R^+ est sous-anneau de R , alors R est engendré par une famille de sous-anneaux cycliques de R .

COROLLAIRE. Si un anneau R a pour propriété que tout sous-module de R^+ est sous-anneau de R et que R admet au moins un système de générateurs formé d'un seul élément, alors R est un anneau cyclique.



ASUPRA UNOR TEOREME ALE LUI A. HIRSCH, A. B. FARNELL
ȘI N. A. KHAN

de
ILIE TORSAN

Multe probleme ale analizei matematice conduc la studiul rădăcinilor ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

unde elementele a_{ik} sînt reale sau complexe.

Referitor la limitarea în modul a rădăcinilor ecuației (1) se cunosc multe rezultate, dintre care noi amintim două.

Astfel A. Hirsch în [2] demonstrează că pentru orice λ rădăcină a ecuației (1) avem

$$|\lambda| \leq nA \quad (2)$$

unde n este ordinul matricei $A = (a_{ik})$ iar $A = \max |a_{ik}|$.

A. B. Farnell în [3] demonstrează că pentru orice rădăcină λ a ecuației (1) avem

$$|\lambda| \leq (RT)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

unde $R = \max_{(k)} \sum_{i=1}^n |a_{ki}|$ iar $T = \max_{(i)} \sum_{k=1}^n |a_{ki}|$

În cele ce urmează vom găsi limite pentru modulul rădăcinilor ecuațiilor de forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

care constituie o generalizare a ecuației (1).

Fie

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (5)$$

o formă hermitiană pozitiv definită ($b_{ik} = \bar{b}_{ki}$) și ρ cea mai mică rădăcină a ecuației

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \rho & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \rho & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

În acest caz avem

TEOREMA 1. Pentru orice rădăcină λ a ecuației (4)

$$|\lambda| \leq nA \cdot \frac{1}{\rho}$$

unde n este ordinul matricei $A = (a_{ik})$ iar $A = \max |a_{ik}|$.

Demonstrație. λ fiind o rădăcină a ecuației (4) există sistemul de valori x_1, x_2, \dots, x_n nu toate nule, astfel încât

$$\lambda \sum_{i=1}^n b_{ki} x_i = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Înmulțind egalitățile (7) cu \bar{x}_k și sumând în raport cu k obținem

$$\lambda \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} x_k \bar{x}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \bar{x}_k \quad (8)$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} x_i \bar{x}_k &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ki}| |x_i| |x_k| \leq \\ &\leq A \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |x_i| |x_k| = A \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k| \right\}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Ținând seama de inegalitatea (vezi [2])

$$[k_1 + k_2 + \dots + k_n]^2 \leq n[k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2] \quad (10)$$

unde k_1, k_2, \dots, k_n sînt numere reale oarecare, rezultă că

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |x_k| \right\}^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k \bar{x}_k \quad (11)$$

și cu aceasta inegalitatea (9) devine

$$|\lambda| \leq nA \frac{\sum_{k=1}^n x_k \bar{x}_k}{\sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i \bar{x}_k} \quad (12)$$

dar conform unei teoreme cunoscute referitoare la formele hermitiene pozitiv definite (vezi [1]) avem că

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k \bar{x}_k}{\sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i \bar{x}_k} \leq \frac{1}{\rho} \quad (13)$$

și cu aceasta inegalitatea (12) devine

$$|\lambda| \leq nA \cdot \frac{1}{\rho} \quad c. c. t. d \quad (14)$$

Observație. Dacă $b_{ik} = \delta_i^k$ atunci $\rho = 1$ și relația (14) devine

$$|\lambda| \leq nA \quad (15)$$

ceea ce constituie teorema lui A. Hirsch amintită la început.

Fie

$$R = \max_{(k)} \sum_{i=1}^n |a_{ki}| \quad \text{și} \quad T = \max_{(i)} \sum_{k=1}^n |a_{ki}|$$

atunci avem

TEOREMA 2. Pentru orice rădăcină λ a ecuației (4)

$$|\lambda| \leq (R \cdot T)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\rho}$$

R și T avînd semnificațiile din teorema 1.

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom porni de la inegalitatea (9) care ridicată la patrat ne dă

$$|\lambda|^2 \left\{ \sum_{i,k} b_{ik} x_i \bar{x}_k \right\}^2 \leq \left\{ \sum_k \left(\sum_i |a_{ki}| |x_i| |x_k| \right) \right\} \left\{ \sum_i \left(|a_{ki}| |x_i| |x_k| \right) \right\} \quad (16)$$

de unde rezultă

$$|\lambda|^2 \left\{ \sum_{i,k} b_{ik} x_i \bar{x}_k \right\}^2 \leq R \cdot T \left\{ \sum_{i,k} |x_i| |x_k| \right\}^2 = R \cdot T \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k| \right\}^4 \quad (17)$$

folosind iarăși inegalitatea (10) avem că

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |x_k| \right\}^4 \leq n^2 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} \right\}^2 \quad (18)$$

și din (17) rezultă

$$|\lambda| \leq (R.T)^{1/2} n \cdot \frac{n}{\rho} \quad c. c. t. \bar{a}.$$

Această teoremă constituie o generalizare a teoremei lui A. B. Farnell amintită la începutul lucrării.

Fie $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$ matrici patratice de ordinul n astfel încît

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} x_i \overline{x_k}$$

este o formă hermitiană pozitivă definită.

În acest caz avem

TEOREMA 3. Pentru orice rădăcină λ a ecuației

$$|A \cdot B - \lambda C| = 0$$

avem

$$|\lambda| \leq \frac{n}{\rho} \{R(A)T(A)R(B)T(B)\}^{1/2}$$

unde $R(A)$, $R(B)$, $T(A)$, $T(B)$ au semnificațiile din teoremele precedente, iar ρ este cea mai mică rădăcină a ecuației

$$|C - \rho E| = 0$$

Demonstrația acestei teoreme este analogă cu cea dată teoremei.

2. Această teoremă generalizează un rezultat obținut de N. A. Khan în [4] și din nou teorema lui A. B. Farnell.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Gantmacher, *Teoria matricilor*, vol. II, pp. 464–476.
2. A. Hirsch, „Mathematica” **25** (1902), pp. 367–370.
3. A. B. Farnell, *Limits for the Characteristic Roots of a Matrix*”, „Bull. Amer. Math. Soc.” **50** (1944) pp. 788.
4. N. A. Khan, *The Characteristic Roots of the Product „Matrices.”* „Quarterly Journal of Mathematics” **7** (1956) pp. 138–143.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ А. ГИРША, А. Б. ФАРНЕЛЛА И Н. А. КАНА

(Резюме)

В настоящей работе, исходя из того, что

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i \bar{x}_k$$

является симметричной и положительно определенной формой и ρ является наименьшим корнем уравнения

$$|B - \rho E| = 0$$

находятся пределы для модуля корней уравнений $|A - \lambda E| = 0$

$$|A - \lambda B| = 0$$

который является обобщением уравнений $|A - \lambda E| = 0$

Результаты включены в следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Для любого корня λ уравнения (4)

$$|\lambda| \leq nA \frac{1}{\rho}$$

где n — порядок матрицы, $A = \max_{ik} |a_{ik}|$, $aA = \max |a_{ik}|$

ТЕОРЕМА 2. Для любого корня λ уравнения (4)

$$|\lambda| \leq (RT)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\rho}$$

где

$$R = \max_{(k)} \sum_{i=1}^n |a_{ki}| \quad T = \max_{(i)} \sum_{k=1}^n |a_{ki}|.$$

В конце работы, рассматривая три квадратные матрицы A, B, C , порядка n так, что $\sum_{i,k} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ является симметричной и положительно определенной формой, доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3. Для любого корня λ уравнения

$$|A.B - \lambda C| = 0$$

имеем

$$|\lambda| \leq \frac{n}{\rho} \{R(A)T(A)R(B)T(B)\}^{\frac{1}{2}}$$

где $R(A), T(A), R(B), T(B)$ имеют вышеуказанные значения, а λ — наименьший корень уравнения $|C - \rho E| = 0$.

AU SUJET DE CERTAINS THÉORÈMES DE A. HIRSCH, A. B. FERNELL ET
N. A. KHAN

(R é s u m é)

Partant du fait que

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i \overline{x_k}$$

est une forme hermitienne positivement définie et que ρ est la plus petite racine de l'équation

$$|B - \rho E| = 0$$

l'auteur trouve des limites pour le module des racines des équations

$$|A - \lambda B| = 0$$

qui constituent une généralisation des équations $|A - \lambda E| = 0$.

Les résultats sont compris dans les théorèmes suivants :

THÉOREME 1. Pour toute racine λ de l'équation (4)

$$|\lambda| \leq nA \cdot \frac{1}{\rho}$$

où n est l'ordre de la matrice $A = (a_{ik})$ et $A = \max |a_{ik}|$

THÉOREME 2. Pour toute racine λ de l'équation (4)

$$|\lambda| \leq (R \cdot T)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\rho}$$

$$R = \max_{(k)} \sum_{i=1}^n |a_{ki}| \quad \text{et} \quad T = \max_{(i)} |a_{ki}|$$

A la fin du travail, considérant trois matrices A, B, C quadratiques d'ordre n telles que

$\sum_{i,k=1}^n c_{ik} x_i \overline{x_k}$ soit une forme hermitienne positivement définie, l'auteur démontre le

THÉOREME 3. Pour toute racine λ de l'équation

$$|AB - \lambda C| = 0$$

on a

$$|\lambda| \leq \frac{n}{\rho} \{R(A)T(A)R(B)T(B)\}^{\frac{1}{2}}$$

où $R(A)$, $T(A)$, $R(B)$, $T(B)$ ont les significations ci-dessus et ρ est la plus petite racine de l'équation $|C - \rho E| = 0$.

DELIMITĂRI ÎN PROBLEMA CLASEI UNOR SPAȚII RIEMANN V_4 CU GRUP DE MIȘCĂRI G_4 NETRANZITIV

de

P. ENGHİȘ

Problema clasificării tuturor spațiilor riemanniene V_4 după grupurile de mișcări, a fost rezolvată complet de către K. I. K r u c i k o v i c i [1], gășind acele spații V_4 ce admit un grup netranzitiv de mișcări cu suprafețe izotrope de tranzitivitate.

În cazul spațiilor V_4 ce admit un grup netranzitiv de mișcări G_4 cu suprafețe izotrope de tranzitivitate, K r u c i k o v i c i [1] pornind de la clasificarea grupurilor complexe G_4 dată în lucrarea fundamentală a lui S. L i e [2] asupra grupurilor continue, indică tipurile canonice ale structurilor la care se reduce orice grup real G_4 și determină spațiile admise în cazul fiecărei forme canonice.

Ne propunem studiul clasei acestor spații riemanniene.

Se știe că prin clasa unei varietăți riemanniene V_n cu elementul liniar :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

se înțelege un număr întreg pozitiv q astfel ca metrica să fie realizată pe o suprafață cu n dimensiuni dintr-un spațiu euclidian E_{n+q} ,

$$y^i = y^i(u^1 \dots u^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+q)$$

iar realizarea să nu fie posibilă într-un E_m cu $m < n+q$.

Conform teoremei lui Schläfli orice varietate riemanniană V_n poate fi scufundată în $E_{\frac{n(n+1)}{2}}$, deci pentru clasă avem :

$$q \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

După cum am arătat în [3], G a u s s, C o d a z z i și R i c c i au dat pentru determinarea scufundării, deci a clasei, un sistem mixt de ecuații cu derivate parțiale care practic prezintă mari greutateți de integrat.

Pentru a da delimitări în problema clasei unora dintre spațiile V_4 ce apar în problema clasificării după grupurile de mișcări G_4 , stabilesc

ca și în lucrarea citată mai sus, transformările care permit scrierea metricii sub forma euclidiană, fapt ce ne dă totodată și reprezentări analitice parametrice pentru varietatea ce realizează metrica.

Astfel spațiile riemanniene admise de grupul G_4 de tipul I ce nu conține subgrup abelian G_3 (după clasificarea dată de Krucikovici) cu forma canonică :

$$[X_1X_2]=0; [X_1X_3]=0; [X_2X_3]=X_1; [X_1X_4]=CX_1; [X_2X_4]=X_2 \\ [X_3X_4]=(C-1)X_3$$

și operatorii :

$$X_1 = p_1; X_2 = p_2; X_3 = x_2p_1 - x_1p_2; X_4 = 2x_1p_1 + x_2p_2 + p_3$$

au metrica :

$$ds^2 = \alpha(x_4)e^{-2x_3} (2dx_1dx_4 + dx_2^2) + \beta(x_4)dx_3^2$$

α și β fiind funcții arbitrare de x_4 .

Prin transformarea :

$$y_1 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-2x_3}}{2}} \cos(x_1 + x_4)$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-2x_3}}{2}} \sin(x_1 + x_4)$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-2x_3}}{2}} \cos i(x_1 - x_4)$$

$$y_4 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-2x_3}}{2}} \sin i(x_1 - x_4)$$

$$y_5 = i\sqrt{\alpha(x_4)e^{-2x_3}} \cos x_2$$

$$y_6 = i\sqrt{\alpha(x_4)e^{-2x_3}} \sin x_2$$

$$y_7 = \sqrt{\beta(x_4)} \cos x_3$$

$$y_8 = \sqrt{\beta(x_4)} \sin x_3$$

$$y_9 = i\sqrt{\beta(x_4)}$$

elementul liniar ia forma euclidiană :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^9 dy_i^2$$

deci scufundarea avînd loc într-un E_9 , clasa va fi :

$$q \leq 5$$

Grupul G_4 de tipul IV cu forma canonică :

$$\begin{aligned} [X_1 X_2] &= 0; & [X_1 X_3] &= 0; & [X_2 X_3] &= X_2 \\ [X_1 X_4] &= X_1; & [X_2 X_4] &= 0 & [X_3 X_4] &= 0 \end{aligned}$$

admite spațiul V_4 cu metrica :

$$ds^2 = 2dx_1 dx_4 + 2\alpha(x_4)e^{-x_1} dx_2 dx_3$$

și grupul complet de mișcări :

$$X_1 = p_2; \quad X_2 = p_3; \quad X_3 = p_1 + x_3 p_3; \quad X_4 = p_1 - x_2 p_2.$$

Transformările :

$$y_1 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-x_1}}{2}} \cos(x_2 + x_3)$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-x_1}}{2}} \sin(x_2 + x_3)$$

$$y_3 = i \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-x_1}}{2}} \cos(x_2 - x_3)$$

$$y_4 = i \sqrt{\frac{\alpha(x_4)e^{-x_1}}{2}} \sin(x_2 - x_3)$$

$$y_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4)$$

$$y_6 = \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 - x_4)$$

aduc elementul liniar la forma :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 dy_i^2$$

scufundarea avînd loc într-un E_6 , clasa acestor spații verifică relația :

$$q \leq 2$$

Grupul G_4 de tip V cu forma canonică :

$$\begin{aligned} [X_1 X_2] &= 0; & [X_1 X_3] &= X_2; & [X_2 X_3] &= -X_1 \\ [X_1 X_4] &= X_1; & [X_2 X_4] &= X_2; & [X_3 X_4] &= 0 \end{aligned}$$

admite spațiile V_4 cu metrica :

$$ds^2 = 2dx_1 dx_4 + e^{-x_1} \alpha(x_4) (dx_2^2 + dx_3^2),$$

iar grupul complet de mișcări G_4 este dat de :

$$X_1 = p_2; \quad X_2 = p_3; \quad X_3 = -x_3 p_2 + x_2 p_3; \quad X_4 = 2p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

O scufundare se poate obține prin transformările :

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{e^{-x_1} \alpha(x_4)} \cos x_2 \\ y_2 &= \sqrt{e^{-x_1} \alpha(x_4)} \sin x_2 \\ y_3 &= i \sqrt{e^{-x_1} \alpha(x_4)} \cos i x_3 \\ y_4 &= i \sqrt{e^{-x_1} \alpha(x_4)} \sin i x_3 \\ y_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4) \\ y_6 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 - x_4) \end{aligned}$$

prin care elementul liniar ia forma :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 dy_i^2$$

și deci pentru clasă vom avea :

$$q \leq 2.$$

Grupul de mișcări G_4 de tipul VI. cu subgrup abelian G_3 și cu structura :

$$[X_i, X_j] = 0; [X_1, X_4] = C X_1; [X_2, X_4] = -X_3; [X_3, X_4] = \varepsilon X_2$$

unde $i, j = 1, 2, 3$, și $\varepsilon = \pm 1$,

admite spațiile V_4 cu elementul liniar :

$$ds^2 = 2dx_1 dx_4 + \alpha(x_4)(dx_2^2 - \varepsilon dx_3^2); \quad \varepsilon = \pm 1,$$

și operatorii :

$$X_1 = p_1; \quad X_2 = p_2; \quad X_3 = p_3; \quad X_4 = \varepsilon x_3 p_2 - x_2 p_3$$

Grupul G_4 nu este grup complet de mișcări al acestor spații, ele mai admit și operatorii :

$$X_5 = x_2 p_1 - \varepsilon \int \frac{dx_4}{\alpha(x_4)} \cdot p_2; \quad X_6 = x_3 p_1 - \int \frac{dx_4}{\alpha(x_4)} \cdot p_3.$$

Aceste spații admit scufundarea într-un E_6 dată de transformările :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4) \\ y_2 &= \frac{i}{2} (x_1 - x_4) \\ y_3 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \cos x_2 \\ y_4 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \sin x_2 \\ y_5 &= i \sqrt{\alpha(x_4)} \cos \sqrt{\varepsilon} x_3 \\ y_6 &= i \sqrt{\alpha(x_4)} \sin \sqrt{\varepsilon} x_3 \end{aligned}$$

Pentru clasa acestor spații avem : $q \leq 2$.

Grupul de mișcări G_4 de tip VII nerezolvabil cu structura :

$$[X_1X_2] = X_1; [X_1X_3] = 2X_2; [X_2X_3] = X_3; [X_iX_4] = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

admite spațiul V_4 cu metrica :

$$ds^2 = 2dx_1dx_4 + \alpha(x_4)(e^{-2x_3} dx_2^2 + \varepsilon dx_3^2); \quad \varepsilon = \pm 1$$

și grupul complet de mișcări G_4 dat de :

$$X_1 = p_2; \quad X_2 = x_2p_2 + p_3; \quad X_3 = (x_2^2 + \varepsilon e^{2x_3})p_2 + 2x_2p_3; \quad X_4 = p_1$$

Prin transformările :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4) \\ y_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 - x_4) \\ y_3 &= \sqrt{\alpha(x_4)e^{-2x_3}} \cos x_2 \\ y_4 &= \sqrt{\alpha(x_4)e^{-2x_3}} \sin x_2 \\ y_5 &= i \sqrt{\alpha(x_4)e^{-2x_3}} \\ y_6 &= \sqrt{\alpha(x_4)\varepsilon} \cos x_3 \\ y_7 &= \sqrt{\varepsilon\alpha(x_4)} \sin x_3 \\ y_8 &= i \sqrt{\varepsilon\alpha(x_4)} \end{aligned}$$

obținem elementul liniar sub forma euclidiană :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^8 dy_i^2.$$

Scufundarea făcându-se într-un E_8 , pentru clasă vom avea :

$$q \leq 4.$$

Pentru grupul G_4 nerezolvabil de tip VIII cu structura :

$$[X_1X_2] = X_3; [X_3X_1] = X_2; [X_2X_3] = X_1; [X_iX_4] = 0 \quad i=1,2,3$$

spațiile admise au metrica de forma :

$$ds^2 = 2dx_1dx_4 + \alpha(x_4)(\cos^2 x_3 dx_2^2 + dx_3^2) + 2\sigma \sin x_3 dx_2 dx_4 \quad (\sigma=0 \text{ sau } 1)$$

iar grupul complet de mișcări dat de :

$$\begin{aligned} X_1 &= p_2; \quad X_2 = \sigma \sec x_3 \cos x_2 p_1 - \operatorname{tg} x_3 \cos x_2 p_2 + \sin x_2 p_3 \\ X_3 &= -\sigma \sec x_3 \sin x_2 p_1 + \operatorname{tg} x_3 \sin x_2 p_2 + \cos x_2 p_3; \quad X_4 = p_1 \end{aligned}$$

Pentru $\sigma = 0$ prin transformarea :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4) \\ y_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 - x_4) \\ y_3 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \cos x_3 \cos x_2 \\ y_4 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \cos x_3 \sin x_2 \\ y_5 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \sin x_3 \\ y_6 &= i \sqrt{\alpha(x_4)} \end{aligned}$$

elementul liniar se reduce la :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 dy_i^2$$

și deci pentru clasă avem :

$$q \leq 2.$$

Tot în cazul $\sigma = 0$, dacă funcția $\alpha(x_4)$ se reduce la x_4^2 , pentru a reduce elementul liniar la forma euclidiană, avem transformările :

$$\begin{aligned} y_1 &= i(x_1 - x_4) \\ y_2 &= x_4 \cos x_3 \sin x_2 \\ y_3 &= x_4 \cos x_3 \cos x_2 \\ y_4 &= x_1 \sin x_3 \\ y_5 &= x_1. \end{aligned}$$

care ne dau pentru clasă: $q \leq 1$. Tensorul de curbură nefiind nul, clasa este egală cu unitatea.

Dacă $\sigma = 1$, prin transformările :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_4) \\ y_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 - x_4) \\ y_3 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \cos x_3 \cos x_2 \\ y_4 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \cos x_3 \sin x_2 \\ y_5 &= \sqrt{\alpha(x_4)} \sin x_3 \\ y_6 &= i \sqrt{\alpha(x_4)} \\ y_7 &= \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \cos (x_2 + x_4) \end{aligned}$$

$$y_8 = \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \sin(x_2 + x_4)$$

$$y_9 = i \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \cos(x_2 - x_4)$$

$$y_{10} = i \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \sin(x_2 - x_4).$$

obținem pentru clasă: $q \leq 6$, fapt ce se putea deduce și direct, aplicând teorema lui Schläfli. Dacă însă pentru $\sigma = 1$, funcția $\alpha(x_4)$ se reduce la x_4^2 , transformările :

$$y_1 = i(x_1 - x_4)$$

$$y_2 = x_4 \cos x_3 \cos x_2$$

$$y_3 = x_4 \cos x_3 \sin x_2$$

$$y_4 = x_4 \sin x_3$$

$$y_5 = x_1.$$

$$y_6 = \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \cos(x_2 + x_4)$$

$$y_7 = \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \sin(x_2 + x_4)$$

$$y_8 = i \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \cos(x_2 - x_4)$$

$$y_9 = i \sqrt{\frac{\sin x_3}{2}} \sin(x_2 - x_4)$$

ne dau pentru clasă: $q \leq 5$.

BIBLIOGRAFIE

1. K. I. Krucikovici, *O dvizjeniiah v rimannovih prostranstvah V_4* , Mat. Sbornik, **41** (83) nr. 2 [1957].
2. S. Lie. F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*. Leipzig 1893.
3. P. Enghiş, *Asupra clasei spațiilor Riemann V_3 cu grup de mișcări netranzitiv*. Studia Universitatis Babeș-Bolyai, seria mat. fiz., fasc. I, 1963.
4. N. N. Ianenko, *Nekotorie voprosi iz teorii vlojenia mnogomernih rimannovih metrik v evklidovi prostranstva*. U.M.N. **VIII**, 1 [1953].

РАЗГРАНИЧЕНИЯ ПО ВОПРОСУ КЛАССА РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ V_4
С НЕТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ G_4

(Резюме)

Для нахождения разграничений по вопросу римановых пространств V_4 с нетранзитивной группой движения G_4 и с изотропными поверхностями транзитивности даются преобразования, позволяющие написать метрику в эвклидовом виде. Данные преобразования дают и параметрическое аналитическое изображение многообразия, осуществляющего метрику.

Устанавливается, что пространства V_4 , допущенные группой G_4 I-го типа (относительно классификации, данной Кручковичем (I)) имеют класс $q \leq 5$, пространства IV-го, V-го, VI-го и VIII-го типа имеют класс $q \leq 2$ для $\sigma=0$, а пространства VII-го типа имеют класс $q \leq 4$.

DÉLIMITATIONS DANS LE PROBLÈME DE LA CLASSE D'ESPACES RIEMANN
A GROUPE DE MOUVEMENTS G_4 NON-TRANSITIF

(Résumé)

En vue de trouver des délimitations dans le problème des espaces riemanniens V_4 à groupe de mouvements non-transitif G_4 et à surfaces isotropes de transitivité, l'auteur établit les transformations permettant d'écrire la métrique sous la forme euclidienne. Celles-ci nous donnent aussi la représentation analytique paramétrique pour la variété qui réalise la métrique.

On établit que les espaces V_4 admis par le groupe G_4 de type I (relatif à la classification donnée par Kroutchkovitch (I)) ont la classe $q \leq 5$, ceux de type IV, V, VI et VIII pour $\sigma = 0$ ont la classe $q \leq 2$, enfin ceux du type VII ont la classe $q \leq 4$.

ASUPRA RAZEI DE CONVEXITATE A FUNCȚIILOR OLOMORFE

de

PETRU T. MOCANU

1. Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în discul $|z| < R$. Se știe că pentru ca $f(z)$ să transforme discul $|z| < r$, $r < R$, într-un domeniu convex este necesar și suficient ca

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf''}{f'} \right) + 1 > 0 \quad \text{pentru } |z| < r.$$

În acest caz se spune că $f(z)$ este *convexă* în discul $|z| < r$.

Prin *raza de convexitate* a funcției $f(z)$ înțelegem raza discului maxim cu centrul în origine în care $f(z)$ este convexă. Într-o lucrare anterioară [1] am arătat că *raza de convexitate a funcției $f(z)$ este dată de minimumul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$ unde z și \bar{z} sînt soluțiile sistemului*

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{zf''}{f'} \right) + 1 = 0 \\ \operatorname{Im} \left[z \left(\frac{zf'''}{f'} + 3 \frac{f''}{f'} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Demonstrația se bazează pe următoarea observație :

Dacă $F(z)$ este olomorfă în $|z| < R$, atunci raza maximă r a discului $|z| < r$ în care $\operatorname{Re}[F(z)] > 0$ este dată de minimumul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z și \bar{z} sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[F(z)] = 0 \\ \operatorname{Im}[zF'(z)] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

În această scurtă notă vom înlocui sistemul (1) printr-un alt sistem echivalent, care ni se pare mai interesant.

2. Să punem

$$F = \frac{zf''}{f'} + 1$$

Atunci

$$F' = \frac{(f'' + zf''')f' - zf''^2}{f'^2}$$

Deci

$$\operatorname{Im}(zF') = \operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'} + \frac{z^2f'''}{f'} - \frac{z^2f''^2}{f'^2}\right) \quad (3)$$

Deoarece

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf''}{f'}\right) = -1$$

rezultă

$$\frac{zf''}{f'} = -1 + i \operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right)$$

Deci

$$\left(\frac{zf''}{f'}\right)^2 = 1 - 2i \operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right) + \left[\operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right)\right]^2$$

de unde deducem

$$\operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right)^2 = -2 \operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right)$$

sau

$$\operatorname{Im}\frac{zf''}{f'} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\frac{zf''}{f'}\right)^2$$

Înlocuind în (3) se obține

$$\operatorname{Im}(zF') = \operatorname{Im}\left(\frac{z^2f'''}{f'} - \frac{3}{2}z^2\frac{f''^2}{f'^2}\right) = \operatorname{Im}[z^2\{f, z\}]$$

unde am notat

$$\{f, z\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

care este derivata lui Schwarz a funcției $f(z)$.

Ținând seamă de sistemul (2) se obține următorul rezultat :

Raza de convexitate a funcției $f(z)$ este dată de minimul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$ unde z și \bar{z} sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{zf''}{f'}\right) + 1 = 0 \\ \operatorname{Im}[z^2\{f, z\}] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

unde $\{f, z\}$ este derivata lui Schwarz a funcției $f(z)$.

BIBLIOGRAFIE

1. P. T. Mocanu, *Sur le rayon d'étoilement et le rayon de convexité des fonctions holomorphes*, „Mathematica” 4(27)1, 1962, pp. 57–63.

О РАДИУСЕ ВЫПУКЛОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Р е з ю м е)

Цель настоящей работы заключается в расширении предыдущего результата [1] относительно радиуса выпуклости голоморфных функций. Показано, что радиус выпуклости голоморфной функции $f(z)$ в $|z| < R$ (т. е. радиус максимального диска с центром в начале, который превращается посредством $f(z)$ в выпуклую область) дан минимумом выражения $\sqrt{z\bar{z}}$, где z и \bar{z} удовлетворяют системе (4).

SUR LE RAYON DE CONVEXITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

(R é s u m é)

Le but de cette note est de compléter un résultat antérieur concernant le rayon de convexité des fonctions holomorphes [1]. On montre que le rayon de convexité d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans $|z| < R$, (c'est-à-dire le rayon du disque maximum centré à l'origine qui est transformé par $f(z)$ dans un domaine convexe), est donné par le minimum de l'expression $\sqrt{z\bar{z}}$ où z et \bar{z} vérifient le système (4).



ASUPRA MOMENTELOR UNOR VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

de

D. D. STANCU

1. În această lucrare prezentăm două metode pentru găsirea momentului de un ordin oarecare r al distribuției binomiale. Prima constă în exprimarea acestui moment ν_r ca un polinom ordonat după puterile probabilității p și în găsirea unei forme convenabile a coeficienților acestui polinom. A doua metodă constă în utilizarea expresiei, cu ajutorul diferențelor ordinare, găsită recent de J. Todd [12], a polinomului lui Bernstein de gradul n , relativ la o funcție $f(x)$ și intervalul $[0,1]$. Formulele găsite pentru ν_r sînt cele de la (5) și (8). Considerînd cazul limită al distribuției binomiale care conduce la distribuția lui Poisson, s-a dedus din (8) formula (13) care dă momentul de ordinul r al distribuției lui Poisson. Această formulă a fost stabilită recent de T. Gerstenkorn [5]. Se mai dau de asemenea și expresiile explicite ale momentelor centrate ale distribuțiilor lui Bernoulli și Poisson. Folosind expresiile găsite pentru ν_r , se stabilesc cu ușurință formulele (16) și (17) pentru momentele factoriale ale acestor distribuții, formule care pot fi văzute de exemplu în H. Cramér [2].

În această lucrare se mai stabilește și formula (19) pentru momentul ordinar de ordinul r al unei variabile aleatoare cu o distribuție geometrică a probabilităților. În încheiere se dă și un tabel pentru valorile diferențelor lui zero $\Delta^k 0^r$ în cazurile $k = 1(1)20$ și $r = 1(1)20$. Un asemenea tabel pentru $k = 1(1)10$ și $r = 1(1)6$ se poate vedea în lucrările [14], [15], [8].

2. Să considerăm o variabilă aleatoare discretă cu o distribuție binomială

$$X \left(\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{matrix} \right)$$

unde

$$p_s = P(X = s) = b(s; n, p) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s}, \quad (1)$$

iar $p, q \in [0,1]$ astfel ca $p + q = 1$.

După cum e bine cunoscut, momentul de ordinul r relativ la punctul a al acestei variabile aleatoare e definit de formula

$$m_r(a) = \sum_{s=0}^n p_s (s - a)^r.$$

În cazurile speciale $a = 0$ și $a = E(X) = np$ se obțin momentele ordinare, respectiv centrate, pe care le vom nota cu v_r , respectiv cu μ_r . Deci

$$v_r = \sum_{s=0}^n p_s s^r, \quad \mu_r = \sum_{s=0}^n p_s (s - np)^r. \quad (2)$$

Avînd în vedere că în cazul general momentul centrat μ_r , de ordinul r , se poate exprima prin următoarea formulă simplă

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} v_{r-j} v_1^j = \\ &= v_r - \binom{r}{1} v_1 v_{r-1} + \binom{r}{2} v_1^2 v_{r-2} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} v_1^r v_0, \quad (v_0 = 1), \end{aligned} \quad (3)$$

folosind momentele v_1, v_2, \dots, v_r , este suficient să se determine valorile acestora și apoi să se aplice această formulă pentru calculul lui μ_r .

O cale care permite să se calculeze primele momente v_1, v_2, \dots se bazează pe teorema relativă la valoarea medie a sumei a n variabile aleatoare și teorema relativă la valoarea medie a produsului a n variabile aleatoare independente.

Să considerăm urna lui Bernoulli cu două stări; de ex. să presupunem că ea conține bile albe și negre și că probabilitatea să extragem o bilă albă este p , iar probabilitatea să extragem o bilă neagră este $q = 1 - p$. Efectuînd n extracții succesive să notăm (vezi de ex. [7]) cu X numărul de bile albe care se obțin la extracția de rang i . Variabila aleatoare X ia valoarea 1 cu probabilitatea p și valoarea 0 cu probabilitatea q ($i = 0, 1, \dots, n$). Numărul de bile albe care se obțin în cele n extracții este $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare X este valoarea medie a lui X ridicat la puterea r

$$v_r = E(X^r) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^r\right).$$

Folosind acest procedeu se calculează în [10; p. 179] primele patru momente. Se mai face remarcă că în general momentul v_r este un polinom în raport cu n de forma

$$v_r = n^r p^r + A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \dots + A_{r-1} n.$$

O altă metodă, larg răspîndită, pentru calculul momentelor variabilei aleatoare X constă în aplicarea formulei

$$v_r = \frac{1}{i^r} \left. \frac{d^r \Phi(t)}{dt^r} \right|_{t=0},$$

unde $\varphi(t) = E(e^{tX}) = (pe^{tX} + q)^n$ este funcția caracteristică a lui X . Dar și această metodă s-a folosit peste tot doar pentru determinarea explicită a primelor momente.

3. În această lucrare vom stabili în primul rând o formulă generală și explicită pentru ν_r , unde r este un număr natural oarecare.

Pe baza formulelor (1) și (2) avem

$$\nu_r = \sum_{s=0}^n s^r \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}. \quad (4)$$

Dezvoltînd $(1-p)^{n-s}$ după formula binomului obținem următoarea expresie pentru ν_r

$$\nu_r = \sum_{s=0}^n s^r \binom{n}{s} p^s \left[1 - \binom{n-s}{1} p + \binom{n-s}{2} p^2 - \dots + (-1)^{n-s} \binom{n-s}{n-s} p^{n-s} \right],$$

pe care o mai scriem sub forma

$$\nu_r = \sum_{s=1}^n s^r \binom{n}{s} \sum_{i=0}^{n-s} (-1)^i \binom{n-s}{i} p^{s+i}.$$

În continuare să ordonăm acest polinom în p , care reprezintă momentul ν_r . Se observă că termenii care conțin ca factor pe p^k se obțin dînd perechii de indici (s, i) următorul șir de perechi de valori

$$(k, 0), (k-1, 1), \dots, (k-\tilde{j}, \tilde{j}), \dots, (2, k-2), (1, k-1).$$

Apoi făcînd pe k să ia valorile $1, 2, \dots, n$ obținem

$$\begin{aligned} \nu_r = \sum_{k=1}^n p^k \left[\binom{n}{k} k^r - \binom{n}{k-1} \binom{n-k+1}{1} (k-1)^r + \dots + (-1)^{k-2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} 2^r + \right. \\ \left. + (-1)^{k-1} \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} 1^r \right] \end{aligned}$$

sau mai scurt

$$\nu_r = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{k-j} \binom{n-k+j}{j} (k-j)^r \right] p^k.$$

Avînd în vedere că

$$\binom{n}{k-j} \binom{n-k+j}{j} = \binom{n}{k} \binom{k}{j},$$

se obține următoarea expresie pentru momentul de ordinul r

$$\nu_r = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^r \right] p^k. \quad (5)$$

4. Membrul drept al formulei precedente se poate exprima cu ajutorul diferențelor finite. În acest scop să considerăm o funcție $f(x)$ și nodurile echidistante $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$. Diferența de ordinul întâi a funcției $f(x)$ pe punctul x_0 și cu pasul h este operatorul linear Δ definit de relația $\Delta f(x_0) = \Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Prin iterație se definește diferența de un ordin k oarecare, pe punctul x_0 ,

$$\Delta_h^k f(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x_0)) = \Delta_h^{k-1} f(x_0 - h) - \Delta_h^{k-1} f(x_0),$$

unde $\Delta_h^1 f(x_0) = \Delta_h f(x_0)$, $\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0)$, iar k e un număr natural.

Rezultă cu ușurință următoarea formulă pentru calculul diferenței de ordinul k , cu pasul h , pe punctul x_0 , a funcției $f(x)$

$$\begin{aligned} \Delta_h^k f(x_0) &= \Delta [x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh; f(x)] = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_0 + jh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x_0 + \overline{k-j}h). \end{aligned} \quad (6)$$

Această formulă se stabilește pe o cale simplă observînd că această diferență se reprezintă în mod explicit sub forma

$$\Delta_h^k f(x_0) = \sum_{j=0}^k a_{k,j} f(x_0 + jh),$$

coeficienții $a_{k,j}$ fiind independenți de x_0 , $f(x)$ și h . Aceștia se pot afla ușor particularizînd în mod convenabil funcția $f(x)$ (de exemplu luînd $f(x) = e^x$).

În cazul particular $f(x) = x^r$, $h = 1$, $x_0 = 0$ formula (6) se reduce la următoarea

$$\begin{aligned} \Delta_1^k 0^r &= \Delta^k 0^r = \Delta[0, 1, 2, \dots, k; x^r] = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^r = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^r, \end{aligned} \quad (7)$$

adică tocmai la expresia care figurează în paranteza dreaptă a formulei (5)

Ținînd seamă de aceasta precum și de faptul că diferența de ordinul k a lui x^r e nulă în cazul cînd k e mai mare decît r , oricare este valoarea lui x_0 , adică că $\Delta^k x^r = 0$ dacă $k > r$, obținem tocmai formula pe care doream s-o stabilim

$$\nu_r = \sum_{k=1}^r \binom{n}{k} p^k \Delta^k 0^r. \quad (8)$$

Deci am stabilit următorul rezultat: *momentul de un ordin oarecare r al variabilei aleatoare X cu o distribuție binomială a probabilităților este un polinom în p de forma*

$$\nu_r = \sum_{k=1}^r A_k p^k,$$

ai cărei coeficienți se exprimă cu ajutorul coeficienților binomiali și diferențelor pe punctul 0 a funcției x^r , în felul următor

$$A_k = \binom{n}{k} \Delta^k 0^r.$$

5. Vom da acum o altă demonstrație formulei (8). În acest scop să considerăm polinomul de aproximare al lui Bernstein relativ la o funcție $f(x)$ și intervalul $[0, 1]$

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (9)$$

Conform unui rezultat recent obținut de J. Todd [12; p. 125] acest polinom mai poate fi scris sub forma

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} x^k \Delta_{\frac{1}{n}}^k f(0). \quad (10)$$

În cazul particular $f(x) = n^r x^r$ formula (9), în care înlocuim $x = p$, devine

$$B_n(n^r p^r; p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k^r = \nu_r. \quad (11)$$

Pe de altă parte în acest caz particular pe baza formulei (6) obținem

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^k f(0) = \Delta\left[0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}; n^r x^r\right] = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^r.$$

Prin comparare cu (7) conchidem că

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^k f(0) = \Delta[0, 1, 2, \dots, k; x^r] = \Delta^k 0^r.$$

Deci formula (10), în care înlocuim $x = p$, se reduce la următoarea:

$$B_n(n^r p^r; p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \Delta^k 0^r. \quad (12)$$

Din (11) și (12) rezultă tocmai formula (8).

6. Să ne ocupăm acum de cazul distribuției lui Poisson. După cum se știe, Poisson a modificat cazul distribuției binomiale (1) a lui Bernoulli, presupunând că probabilitatea $p = p_n$ depinde de numărul total al probelor în așa fel încît să avem $np = np_n \rightarrow \lambda$, unde λ este o constantă pozitivă. În felul acesta a obținut următoarea valoare asimptotică pentru probabilitatea $b(k; n, p)$ de la (1): $b(k; n, p) \cong \lambda^k e^{-\lambda} / k!$. Aceasta se poate considera ca o formulă de aproximare pentru distribuția binomială. Aproximația aceasta este uniformă cînd $n \rightarrow \infty$ și $p \rightarrow 0$ în așa fel încît $\lambda = np$

rămâne mărginit. Pentru o evaluare a erorii a se vedea [13; p. 137] și [3; p. 143, 161].

Să vedem ce devine formula (8) în cazul limită considerat de Poisson. Avem

$$\binom{n}{k} p^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}.$$

În felul acesta se ajunge la următoarea formulă explicită

$$\mu_r = \sum_{k=1}^r \frac{\lambda^k}{k!} \Delta^k 0^r \quad (13)$$

pentru momentul de ordinul r al unei variabile aleatoare de tip Poisson, adică: care ia valorile $k = 0, 1, 2, \dots$ cu probabilitățile

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \lambda > 0.$$

Formula (13) a fost stabilită pe o cale directă în anul 1960 de T. Gerstenkorn [5].

7. Ținând seama de (3), (8) și (13) se obțin respectiv următoarele formule explicite pentru momentele centrate de ordinul r ale distribuțiilor lui Bernoulli și Poisson

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{j=0}^r \sum_{k=1}^{r-j} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{n}{k} n^j p^{j+k} \Delta^k 0^{r-j}, \\ \mu_r &= \sum_{j=0}^r \sum_{k=1}^{r-j} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\lambda^k}{k!} \Delta^k 0^{r-j}. \end{aligned}$$

8. Să ne ocupăm acum de momentele factoriale [11] ale distribuțiilor lui Bernoulli și Poisson. Se știe că momentul factorial de ordinul r al unei variabile aleatoare discrete X , pentru care $P(X = x_k) = p_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), e definit de formula

$$m_{[r]} = \sum_{k=0}^n p_k x_k^{[r]},$$

unde

$$x^{[r]} = x(x-1)(x-2) \dots (x-r+1)$$

este puterea a r -a generalizată a lui x . După cum se știe, noțiunea aceasta de putere generalizată se bucură în teoria diferențelor finite de proprietăți analoge cu proprietățile pe care le are puterea obișnuită a lui x în analiza continuă. Să considerăm polinomul de interpolare al lui Newton relativ la o funcție $f(x)$ și nodurile echidistante $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + rh$. Se știe că (vezi de ex. [1]) acesta are expresia

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^r \frac{(x-x_0)(x-x_0-h) \dots (x-x_0-\overline{k-1}h)}{k! \cdot k!} \Delta^k f(x_0).$$

Luând $X_0 = 0$, $h = 1$ și $f(x) = X^r$ obținem

$$X^r = \sum_{k=1}^r X^{[k]} \frac{\Delta^k 0^r}{k!}. \quad (14)$$

deoarece se știe că dacă $f(x)$ este un polinom de grad mai mic decât numărul nodurilor atunci polinomul de interpolare coincide cu $f(x)$.

Rezultă că momentul ordinar de ordinul r al variabilei aleatoare X se poate exprima cu ajutorul momentelor factoriale $m_{[v]}$ ($v = 1, 2, \dots, r$), ale aceleiași variabile, prin formula următoare

$$\nu_r = \sum_{k=1}^r m_{[k]} \frac{\Delta^k 0^r}{k!}. \quad (15)$$

Având în vedere că în cazul distribuției binomiale are loc formula (8) rezultă că trebuie să avem

$$\sum_{k=1}^r m_{[k]} \frac{\Delta^k 0^r}{k!} = \sum_{k=1}^r \binom{n}{k} p^k \Delta^k 0^r.$$

În consecință găsim următoarea formulă explicită pentru momentul factorial de ordinul k al distribuției binomiale

$$m_{[k]} = n(n-1)\dots(n-k+1)p^k = n^{[k]} p^k. \quad (16)$$

Comparând formula (15) cu formula (13) rezultă că momentul factorial de ordinul k al distribuției lui Poisson are următoarea expresie

$$m_{[k]} = \lambda^k. \quad (17)$$

R e m a r c ă . Formulele (16) și (17) se găsesc în enunțul unei probleme din [2 ; p. 257], unde s-a cerut demonstrarea acestora plecând de la funcția generatoare a momentelor factoriale pentru o variabilă aleatoare discretă

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^n p_k t^{x_k}. \quad (18)$$

Ele au fost stabilite în [10 ; p. 185, 249] folosind tocmai funcția generatoare a momentelor factoriale.

9. Să considerăm acum cazul unei variabile aleatoare X cu o repartiție geometrică a probabilităților: $P(X = k) = pq^k$, unde $k = 0, 1, 2, \dots$. În acest caz funcția generatoare a momentelor factoriale este

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k t^k = \frac{p}{1-qt}.$$

Momentul factorial de ordinul r va fi

$$m_{[k]} = \left. \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = k! \left(\frac{q}{p} \right)^k.$$

Făcînd înlocuirea în formula (15), obținem următoarea expresie pentru momentul ordinar de ordinul r al distribuției geometrice

$$v_r = \sum_{k=1}^r \left(\frac{q}{p}\right)^k \Delta^k 0^r. \quad (19)$$

10. Să ne oprim acum asupra calculului diferențelor $[\Delta^k x^r]_{x=0}$ pe care Boole [1] le-a notat cu $\Delta^k 0^r$ și le-a denumit „diferențele lui zero”. În această lucrare a lui Boole a fost întocmit și un tabel pentru diferențele lui zero pînă la $k = r = 10$. Acest tabel poate fi văzut și în [14] și [8].

În prezenta lucrare vom da un tabel pentru valorile lui $\Delta^k 0^r$ în cazurile $k = 1(1)20$ și $r = 1(1)20$ (notația $m = a(h)b$ indică, că m ia valorile în progresie aritmetică $a, a + h, a + 2h, \dots, a + sh = b$).

Aceste diferențe se pot calcula folosind direct formula explicită (7), sau întocmind tabelele de diferențe pentru $f(x) = x^r$ și nodurile $0, 1, 2, \dots, r + 1$. Dar o cale mult mai simplă constă în folosirea formulei

$$\Delta^k 0^r = k(\Delta^k 0^{r-1} + \Delta^{k-1} 0^{r-1}). \quad (20)$$

Această formulă a fost stabilită în mod simplu de E. T. Whittaker și G. Robinson [14]. Justificarea acesteia este simplă. Luînd în formula (6) $f(x) = x^{r-1}$, $h = 1$, $x_0 = 1$, prin multiplicarea cu k a formulei obținute și compararea cu formula (7) se obține

$$\Delta^k 0^r = k \Delta^{k-1} 1^{r-1}.$$

Făcînd aceleași particularizări în formula $\Delta_h^k f(x_0) = \Delta_h^{k-1} f(x_0 + h) - \Delta_h^{k-1} f(x_0)$ se obține $\Delta^k 0^{r-1} = \Delta^{k-1} 1^{r-1} - \Delta^{k-1} 0^{r-1}$. Prin eliminarea lui $\Delta^{k-1} 1^{r-1}$ între această relație și relația precedentă se obține tocmai formula (20). Această formulă se poate obține (vezi de ex. [6]) și plecînd de la formula care dă diferența de ordinul k a unui produs $f(x) = u(x)v(x)$

$$\Delta^k f(x_0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Delta^j u(x_0) \Delta^{k-j} v(x_0 + jh).$$

Luînd aici $u = x^{r-1}$, $v = x$, $x_0 = 0$ și $h = 1$ se obține tocmai formula (20).

Ținînd cont că $\Delta 0 = 1$ și că $\Delta^k 0^r = 0$ dacă $r < k$ (deoarece diferența de ordinul k a unui polinom de grad mai mic decît k este totdeauna nulă), prin aplicarea repetată a formulei (20) se poate construi din aproape în aproape tabelul diferențelor lui zero. Mai întîi se observă că $\Delta 0^r = 1$ ($r = 1, 2, \dots$), astfel că în prima coloană a diferențelor avem mereu unu. Formula (20) ne spune că un termen oarecare al tabelului se poate obține dacă multiplicăm cu ordinul diferențelor coloanei respective suma dintre termenul aflat deasupra sa și termenul din stînga acestuia din urmă.

Tabetul diferențelor lui zero $\Delta^k 0^r$

r	$\Delta 0^r$	$\Delta^2 0^r$	$\Delta^3 0^r$	$\Delta^4 0^r$	$\Delta^5 0^r$	$\Delta^6 0^r$	$\Delta^7 0^r$
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0
6	1	62	540	1560	1800	720	0
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040
8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120
9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480
10	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200
11	1	2046	171006	3498000	29607600	129230640	322494480
12	1	4094	519156	14676024	165528000	953029440	3162075840
13	1	8190	1569750	60780720	901020120	6711344640	28805736960
14	1	16382	4733820	249401880	4809004200	45674188560	248619571200
15	1	32766	14250806	1016542800	25292030400	302899156560	2060056318320
16	1	65534	42850116	4123173624	131542866000	1969147121760	16540688324160
17	1	131070	128746950	16664094960	678330198120	12604139926560	129568848121440
18	1	262142	386634060	67171367640	3474971465400	79694820748080	995210916336000
19	1	524286	1160688806	270232006800	17710714165200	499018753280880	7524340159588560
20	1	1048574	3483638676	1085570781624	89904730860000	3100376804676480	56163512390086080

r	$\Delta^8 \sigma^r$	$\Delta^9 \sigma^r$	$\Delta^{10} \sigma^r$	$\Delta^{11} \sigma^r$	$\Delta^{12} \sigma^r$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	40320	0	0	0	0
9	1451520	362880	0	0	0
10	30240000	16329600	3628800	0	0
11	179001600	419126400	199584000	39916500	479001600
12	6411968640	8083152000	6187104000	2637143908800	37362124800
13	76592355840	130456085760	142702560000	97037740800	1612798387200
14	84318472400	1863435974400	2731586457600	2637143908800	50999300352000
15	8734434508800	24359586451200	45950224320000	59056027430400	1320063933388800
16	86355926616960	297846188640000	703098107712000	1155068769254400	29708792431718400
17	823172919528960	3457819037312640	10009442963520000	20439835646630400	601783536940185600
18	762193414203200	38528927611574400	134672620008326400	334942064711654400	11240707219822080000
19	68937160460313600	415357755774998400	1732015476199008000	5165760981919788800	196877618420902425600
20	611692004959217280	4358654246117808000	21473732319740064000	75875541039306764800	

r	$\Delta^{13}_0 r$	$\Delta^{14}_0 r$	$\Delta^{15}_0 r$	$\Delta^{16}_0 r$
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	6227020800	0	0	0
14	566658892800	87178291200	0	0
15	28332944640000	9153720576000	1307674368000	0
16	1031319184896000	524813313024000	156920924160000	20922789888000
17	30575780537702400	21785854970880000	10226013557760000	2845499424768000
18	783699448602470400	733062897120153600	480178027929600000	209144207720448000
19	18011278812054528000	21234672840116736000	18198613875746304000	11029155770400768000
20	380275818414395904000	549443323130397696000	591499300737945600000	467644314338353152000

(Continue)

r	$\Delta^{17}0^r$	$\Delta^{18}0^r$	$\Delta^{19}0^r$	$\Delta^{20}0^r$
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	0	0
17	355687428096000	0	0	0
18	54420176498688000	6402373705728000	0	0
19	4744158915944448000	1094805903679488000	121645100408832000	0
20	268146349667868672000	105101366753230848000	23112569077678080000	2432902008176640000

BIBLIOGRAFIE

1. G. Boole, *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*. London, 1860. Ediția 3-a Dover Publication, 1960.
2. H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press, 1946.
3. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, New York, 1960.
4. A. O. Gelfond, *Calculul cu diferențe finite*. Edit. tehnică, București, 1956.
5. T. Gerstenkorn, *On the Formula for the Moments of the Poisson Distribution*. „Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz”, **11**, fasc. 10, pp. 1—5.
6. Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*. Budapest, 1939, p. 169.
7. Gh. Mihoc, V. Urseanu, *Matematici aplicate în statistică*. Edit. Acad. R.P. Romine, 1962.
8. Ş. E. Mikeladze, *Cisleniie metodî matematicheskogo analiza*. Gos. Izdat. Moskova, 1953.
9. N. Nielsen, *Gammafunctionen*. Leipzig, 1906, p. 68.
10. O. Onicescu, Gh. Mihoc, *Lección de statistică matematică*. Ed. tehnică, București, 1958.
11. J. F. Steffensen, *Factorial Moments and Discontinuous Frequency Functions*. „Skand. Aktuarietidskr.”, 1923, p. 73.
12. J. Todd, *Survey of Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New-York, 1962, p.125.
13. J. V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability*, McGraw-Hill, New-York, 1937.
14. E. T. Whittaker, G. Robinson, *A Short Course in Interpolation*. Blackie, London, 1924.
15. E. T. Whittaker, G. Robinson, *The Calculus of Observations*. Blackie, London, 1929.

О МОМЕНТАХ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
(Резюме)

В настоящей работе, автор даёт два метода для нахождения явного выражения момента порядка r биномиального распределения (1). Первый метод заключается в выражении этого момента как одного многочлена в p и в нахождении удобных выражений для коэффициентов этого многочлена. Второй метод заключается в использовании нового выражения (10), недавно найденного Ж. Тоддом [12] для многочлена Бернштейна порядка n . Получаются формулы (5) и (8). Рассматривая предельный случай биномиального распределения, который ведёт к распределению Пуассона, из (8) выводится выражение (13) для момента порядка r распределения Пуассона. Эта формула была установлена в 1960 году Т. Герштейнконом [5]. При использовании этих результатов сразу же получаются известные формулы (См., напр., [2]) (16) и (17) для факториальных моментов рассматриваемых распределений. Автор устанавливает также формулу (19) для момента порядка r геометрического распределения. В заключение даётся числовая таблица со значениями разностей нуля $\Delta^k 0^r$ для $k = 1(1) 20$ и $r = 1(1) k$.

ON THE MOMENTS OF CERTAIN DISCRETE RANDOM VARIABLES

(Summary)

In this paper the author presents two methods for finding an explicit expression of the r th moment of the binomial distribution (1). The first one consists in expressing this moment as a polynomial in p and in finding suitable expressions for the coefficients of this polynomial. The second one consists in using a new expression (10), found recently by John

Todd [12], for the Bernstein polynomial of the n th degree. One obtains the formulas (5) and (8). Considering the limit case of the binomial probability law which leads to the Poisson probability law, one deduces from (8) the expression (13) for the r th moment of the Poisson's distribution. This formula has been established in 1960 by T. Gerstenkorn [5]. Using these results one finds immediately the known (see e. g. [2]) formulas (16) and (17) for the factorial moments of the considered distributions. The author also establishes formula (19) for the r th moment of the geometric distribution. Finally one presents a numerical table for the differences of zero $\Delta^k v^r$ for $k = 1(1)20$ and $r = 1(1)k$.

UN CRITERIU DE IDENTIFICARE A SATELIȚILOR ARTIFICIALI AI PĂMÎNTULUI

de
ÁRPÁD PÁL

În urma lansării unui număr din ce în ce mai mare de sateliți artificiali în jurul Pământului, se ivesc cazuri când pe bolta cerească a stației de observare, în regiunea indicată de telegramă (efemeridă) apar simultan sau aproape simultan doi sau mai mulți sateliți, fără a se putea spune uneori pe loc, în cazul obținerii numai a cîtorva poziții, care anume obiect a fost observat. Pe de altă parte pot fi observați, în perioada critică, și sateliți care nu sînt conținuți în telegramele primite de la centrele de calcul, sau pot fi observate întîmplător și avioane de reacție.

În asemenea cazuri în fața stației de observare se ridică problema identificării obiectelor artificiale observate, problemă analogă, într-o anumită măsură, cunoscutei probleme a mecanicii cerești de identificare a micilor planete sau a cometelor în vederea urmării evoluției orbitelor acestora.

După cum se știe, pentru rezolvarea problemei dacă observațiile individuale efectuate asupra micilor planete sau cometelor aparțin sau nu unui aceluiasi corp (sau corpurilor diferite), pentru care diu trecerile anterioare se cunoaște orbita (sau orbitele), au fost stabilite criterii, printre care amintim criteriul lui T i s s e r a n d (bazat pe integrala Jacobi din problema restrînsă a trei corpuri), precum și criteriul bazat pe formulele calculului de efemeride, în care observațiile individuale intră direct [1]. Pentru identificarea sateliților artificiali ai Pământului, este evident, avînd în vedere particularitățile mișcării acestora, că criteriul lui T i s s e r a n d nu este aplicabil, rămînînd ca să examinăm celălalt criteriu. Amintim, că o cerință importantă față de asemenea criterii este ca rezolvarea problemei să fie mai ușor și rapid efectuabilă, decît calculul complet de efemeride, care în cazul sateliților artificiali ai Pământului, după cum se știe, are mai multe etape [2], [3].

În cele ce urmează vom stabili formulele criteriului amintit cu aplicație la sateliții artificiali, luînd în considerare particularitățile mișcării acestora. Formulele se stabilesc pentru două cazuri de prezentare a observațiilor: 1. cînd observațiile sînt date sub formă de coordonate sferice ecuatoriale; 2. cînd se cunosc coordonatele sferice orizontale. Pe baza calculării de exemple concrete, se arată, în simplificările făcute, precizia metodei.

Principalele particularități ale mișcării sateliților artificiali ai Pământului (cel puțin aceluia care au fost lansați pînă acum), față de planete sau comete, pot fi rezumate în următoarele :

a) sateliții artificiali ai Pământului se mișcă în sfera de acțiune a Pământului, în cîmpul gravific și în atmosfera acestuia ;

b) spre deosebire de planete și comete, elementele orbitei satelitului artificial variază rapid, în primul rînd din cauza principalelor perturbații geofizice : rezistența atmosferei și necentralitatea cîmpului gravific al Pământului cauzată de turtire; aceste perturbații, cel puțin parțial, trebuie să fie luate în considerare chiar și în rezolvarea problemei calculului efemeridelor ;

c) avînd în vedere că din cauza lipsei pînă în momentul de față a unei teorii de mișcare precise a sateliților artificiali ai Pământului (datorită insuficienței cunoașterii a perturbațiilor), orbita preliminară a satelitului dată sub formă de sisteme de elemente, se cunoaște numai cu aproximația cunoscută, și în consecință și efemeridele (pozițiile) se calculează numai la zecimea de grad sau la grad.

De aceste particularități trebuie să ținem cont, atît la stabilirea formulelor criteriului, cît și în aprecierea, pe bază de exemple concrete, a eficacității criteriului.

1. **Criteriul** [1] se bazează pe aceea că raza vizuală spre obiectul ceresc trebuie să intersecteze planul orbitei în apropierea însăși a liniei orbitei.

Pentru obținerea criteriului căutat pentru o planetă mică sau cometă se pleacă de la formulele cunoscute ale calculului de efemeride (de exemplu, [1]) :

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta = X (= \Delta \cdot \cos \delta \cdot \cos z) - X_{\odot} \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta = Y (= \Delta \cdot \cos \delta \cdot \sin z) - Y_{\odot} \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta = Z (= \Delta \cdot \sin \delta) - Z_{\odot} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

unde :

(x, y, z) — coordonatele heliocentrice rectangulare ecuatoriale ale micii planete sau cometei ;

(ξ, η, θ) — coordonatele heliocentrice carteziene ale corpului față de axele așezate în planul orbitei astfel că axa $S\xi$ trece prin periheliu, axa $S\eta$ în punctul orbitei de anomalie adevărată $v = 90^\circ$, iar axa $S\zeta$ este îndreptată după normala planului orbitei ($\xi = r \cos v$, $\eta = r \sin v$, $\zeta = 0$) ;

$(P_x, P_y, P_z; Q_x, Q_y, Q_z)$ — coeficienții proiectivi, adică componentele vectorilor unitari în sistemul S_{xyz} , orientați după axele $S\xi, S\eta, S\zeta$, care depind de trei (ω, Ω, i) din cele șase elemente ecliptice obișnuite ale orbitei, precum și de ε — unghiul de înclinare a eclipticii față de ecuator;

expresiile acestor coeficienți în funcție de aceste elemente se pot găsi, de ex. în [1];

- (X, Y, Z) — coordonatele geocentrice rectangulare ecuatoriale ale corpului;
- (α, δ) — coordonatele geocentrice sferice ecuatoriale — obținute din observații — ale obiectului la un moment dat;
- Δ — distanța geocentrică a corpului pentru momentul respectiv;
- $(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot)$ — coordonatele geocentrice carteziene ecuatoriale ale Soarelui.

Menționăm că în problema urmărită elementele vectoriale (cosinușii directori), coordonatele sferice observate ale corpului și coordonatele Soarelui sînt cunoscute, respectiv din calculele bazate pe sistemul de elemente dat, din observații, din anuare astronomice, și ele trebuie să fie raportate la același echinocțiu. Necunoscutele în sistemul de ecuații de mai sus (I) care înglobează atît elementele date ce caracterizează orbita, cît și datele observaționale, sînt ζ, η și Δ , care pot fi determinate prin metodele cunoscute.

Ținînd seama de particularitățile amintite ale sateliților artificiali ai Pămîntului, vom avea de efectuat următoarele înlocuiri și schimbări în relațiile (I):

- Coordonatele Soarelui $(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot)$ se înlocuiesc cu coordonatele rectangulare ecuatoriale ale locului de observație de pe suprafața Pămîntului, care în sistemul de coordonate legat de stele fixe se determină prin relațiile:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \varphi \cdot \cos\varphi'_0 \cdot \cos s \\ Y_0 &= \varphi \cdot \cos\varphi'_0 \cdot \sin s \\ Z_0 &= \varphi \cdot \sin\varphi'_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

unde:

- φ — raza — vectoare geocentrică a stației;
- φ'_0 — latitudinea geocentrică a stației;
- s — timpul sideral local al observatorului.

Evident, coordonatele X_0, Y_0, Z_0 obținute după formulele (2) sînt raportate la ecuatorul adevărat. Dacă însă observațiile satelitelui artificial, precum și elementele de orientare ale orbitei sale sînt raportate la ecuatorul mijlociu 1950,0, atunci este necesar ca și coordonatele rectangulare ecuatoriale ale stației de observare să fie reduse la acest sistem.

După cum arată S. G. M a k o v e r [1], în limitele preciziei de calcul al elementelor, este suficient ca aceste coordonate să fie corectate numai cu influența precesiei de la epoca 1950,0 pînă la momentul observației sau chiar pînă la începutul anului de observație.

Pentru acest scop se aplică formulele obținute pe baza teoremei cunoscute a cosinusului unghiului dintre două direcții, scrise sub forma matriceală :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_{1950,0} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

unde valorile numerice ale coeficienților X_x, \dots, Z_x , fiind date de teoria precesiei, se iau din tabele speciale sau se calculează după formulele (ex. [5]) :

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 1,0000\ 0000 - 0,0002\ 9696 T^2 - 0,0000\ 0014 T^3 \\ Y_x &= -X_y = -0,0223\ 1941 T - 0,00000676 T^2 + 0,0000\ 0221 T^3 \\ Z_x &= -X_z = -0,0097\ 1691 T + 0,0000\ 0206 T^2 + 0,0000\ 0098 T^3 \\ Y_y &= 1,00000000 - 0,00024975 T^2 - 0,0000\ 0015 T^3 \\ Y_z &= Z_y = -0,0001\ 0858 T^2 \\ Z_z &= 1,0000\ 0000 - 0,00004721 T^2 + 0,0000\ 0002 T^3 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

T — timpul socotit de la 1950,0 în secole. Tot aceste formule servesc și pentru reducerea la ecuatorul și echinoctiul epocii 1950,0 de la epoca T a coeficienților proiectivi, înlocuind X_0, Y_0, Z_0 cu P_x, P_y, P_z , respectiv cu Q_x, Q_y, Q_z .

Conform indicației lui M. S. I a r o v - I a r o v o i și E. A. G r e b e n i k o v [2], pentru scopul calculării efemeridei, în limitele de precizie, este posibil să se facă abstracție de aceste transformări.

Legătura dintre latitudinea geocentrică (φ'_0) și cea astronomico-geografică ($\bar{\varphi}_0$), precum și cea dintre φ și α — semiaxa mare a elipsoidului terestru, se exprimă cu ajutorul binecunoscutelor formule :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0 - \varphi'_0 &= 692'', 62 \cdot \sin 2\bar{\varphi}_0 - 1'', 16 \sin 4\bar{\varphi}_0 \\ \frac{\rho}{a} &= 1 - 0,003324 \sin^2 \bar{\varphi}_0 - 0,000028 \sin^4 \bar{\varphi}_0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

sau pe baza relațiilor și tabelelor în care se ține cont și de înălțimea stației H (în m) date în „Astronomiceskii egeodnik” (de exemplu pentru 1964, p. 581):

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \varphi'_0 &= (S + 0,1568 \cdot 10^{-6} \cdot H) \cdot \sin \bar{\varphi}_0 \\ \rho \cos \varphi'_0 &= (C + 0,1568 \cdot 10^{-6} \cdot H) \cdot \cos \bar{\varphi}_0 \\ \operatorname{tg} \varphi'_0 &= (0,993307 + 0,0011 \cdot 10^{-6} \cdot H) \operatorname{tg} \bar{\varphi}_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

mărimile C și S fiind date în secțiunea „Elementi zemnogo sferoida F. N. Krasovskogo. Vicslenie gheofentricskih koordinat tocek zemnoi poverhnosti”.

În cele ce urmează vom folosi, așa cum se obișnuiește la calculele de efemeride ale sateliților artificiali ai Pământului [2], următorul sistem de referință de bază: mișcarea sateliților se reperează față de sistemul $Txyz$ de coordonate geocentrice rectangulare ecuatoriale, ale cărui axe sînt îndreptate astfel că axa Tx trece nu prin punctul vernal (ca în problema calculului orbitei sateliților artificiali — relațiile (2) —, ci prin punctul de intersecție a meridianului locului de observație cu ecuatorul, iar axele Ty și Tz sînt astfel orientate ca sistemul să formeze un triedru drept (fig. 1).

Față de acest triedru formulele (2) devin:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \rho \cos \varphi' \\ Y_0 &= 0 \\ Z_0 &= \rho \sin \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

— Coordonatele geocentrice rectangulare ecuatoriale (x, y, z) ale sateliților se exprimă prin elementele ecuatoriale ale orbitei pe baza relațiilor:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cdot \cos \bar{\Omega} - \sin u \cdot \sin \bar{\Omega} \cdot \cos i) \\ y &= r(\cos u \cdot \sin \bar{\Omega} + \sin u \cdot \cos \bar{\Omega} \cdot \cos i) \\ z &= r \cdot \sin u \cdot \sin i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

unde: $u = v + \omega$ și $\bar{\Omega} = \Omega - 360^\circ$, s , s fiind timpul sideral în momentul t , exprimat în zile siderale:

sau

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

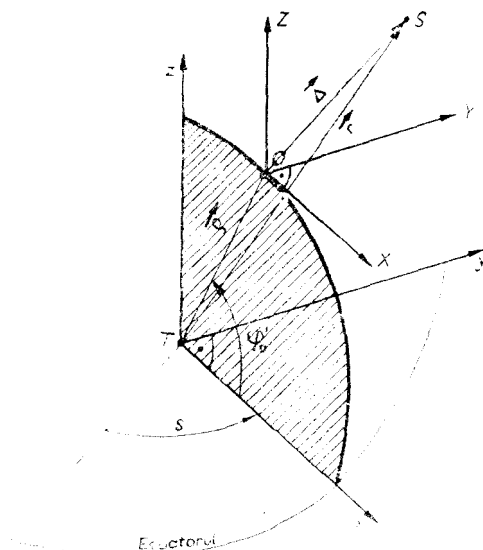


Fig. 1.

unde expresiile lui P_x, \dots, Q_z sînt :

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos\omega \cdot \cos\bar{\Omega} - \sin\omega \cdot \sin\bar{\Omega} \cdot \cos i \\ P_y &= \cos\omega \cdot \sin\bar{\Omega} + \sin\omega \cdot \cos\bar{\Omega} \cdot \cos i \\ P_z &= \sin\omega \cdot \sin i \\ Q_x &= -\sin\omega \cdot \cos\bar{\Omega} - \cos\omega \cdot \sin\bar{\Omega} \cdot \cos i \\ Q_y &= -\sin\omega \cdot \sin\bar{\Omega} + \cos\omega \cdot \cos\bar{\Omega} \cdot \cos i \\ Q_z &= \cos\omega \cdot \sin i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

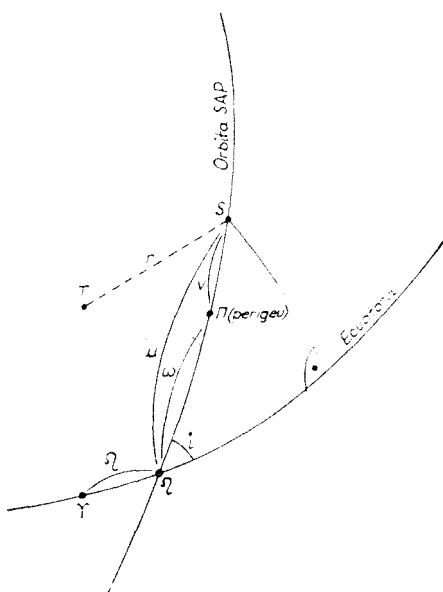


Fig. 2.

toriale (orare) topocentrice sferice, și Δ fiind distanța de la locul de observare pînă la satelit (fig. 3), relațiile dintre aceste coordonate se realizează prin formulele :

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta \cdot \cos\delta \cdot \cos\bar{t} \\ -Y &= \Delta \cdot \cos\delta \cdot \sin\bar{t} \\ Z &= \Delta \cdot \sin\delta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Întrucît avem :

$$\left. \begin{aligned} X &= x - X_0 \\ Y &= y - Y_0 \\ Z &= z - Z_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Se observă ușor că în cazul cînd axa Tx este orientată spre punctul vernal, relațiile (9) rămîn în vigoare, modificîndu-se doar longitudinea nodului de la $\bar{\Omega}$ la Ω . Se observă de asemenea, că aceste expresii ale elementelor vectoriale, în cazul sateliților artificiali ai Pămîntului sînt mai simple decît în cazul planetelor sau cometelor.

Coordonatele (ξ, η) sînt coordonatele geocentrice carteziene ale sateliților artificiali ai Pămîntului față de axele așezate în planul orbitei astfel că axa $T\xi$ trece prin perigeu, iar axa $T\eta$ prin punctul orbitei de anomalie adevărată $v = 90^\circ$.

A. Criteriul de identificare a sateliților artificiali ai Pămîntului în cazul folosirii coordonatelor ecuatoriale. Notînd prin X, Y, Z coordonatele topocentrice rectangulare ecuatoriale ale sateliților, iar prin $\alpha(t)$ cele ecua-

în sfârșit, în cazul sateliților artificiali ai Pământului, în sistemul de referință considerat, în loc de (1) avem :

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta = \Delta \cdot \cos \delta \cdot \cos \bar{t} + \varphi \cdot \cos \varphi'_0 \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta = -\Delta \cdot \cos \delta \cdot \sin \bar{t} \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta = \Delta \cdot \sin \delta + \varphi \cdot \sin \varphi'_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

și P_x, \dots, Q_z sînt date de (9).

Pentru scopul urmărit este suficient să se determine din necunoscutele ξ, η și Δ ale sistemului de ecuații algebrice (12) numai ξ și η .

Apoi folosind formulele cunoscute

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cdot \cos v = a(\cos E - e) \\ \eta &= r \cdot \sin v = a \cos \varphi \cdot \sin E \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

unde : a — semiaxa mare a orbitei geocentrice a satelitului cu focarul în centrul T al Pământului ;

e — excentricitatea orbitei, φ — unghiul excentricității,

E — anomalia excentrică,

se pot exprima $\cos E$ și $\sin E$:

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \frac{\xi}{a} + e \\ \sin E &= \frac{\eta}{a \cdot \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Criteriul apartenenței poziției observate a satelitului la o orbită cunoscută dată printr-un sistem de elemente constă în aceea că valorile obținute ale lui $\cos E$ și $\sin E$ trebuie să aparțină unuia și aceluiași unghi.

După cum observă A. D. D u b i a g o [1], nu se poate pretinde o respectare cu mare precizie a acestui criteriu și aceasta este valabil într-o măsură și mai mare pentru sateliții artificiali ai Pământului, deoarece elementele orbitale suferă variații datorită perturbațiilor.

Această observație rămîne în vigoare chiar și în cazul luării în considerare a perturbațiilor „seculare” în elementele orbitale ale satelitului ar-

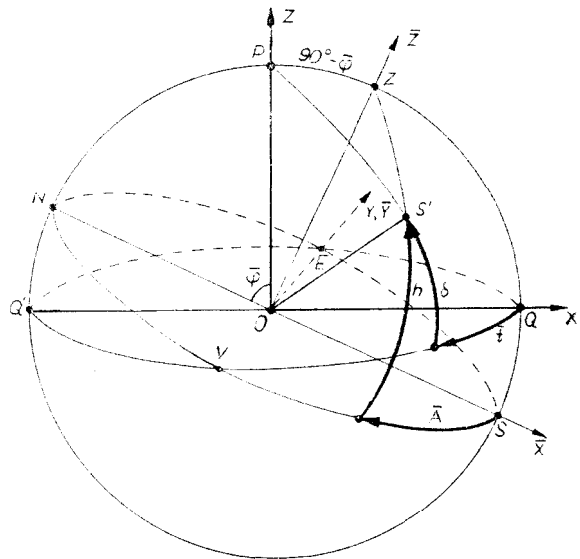


Fig. 3.

tificial al Pământului, deoarece asupra mișcării satelitului activează și perturbații periodice, iar determinarea elementelor orbitale pe baza teoriilor existente nu se face cu mare precizie.

B) *Cazul coordonatelor orizontale.* În multe cazuri în mod direct se determină coordonatele orizontale ale sateliților artificiali ai Pământului. În acest caz coordonatele rectangulare X, Y, Z trebuie să fie exprimate prin coordonatele orizontale sferice, formulele (11) rămânând întru totul valabile, modificându-se doar formulele (12).

Notînd cu (fig. 3) :

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ — coordonatele rectangulare topocentrice orizontale ale SPA, și cu \bar{A}, h — coordonatele topocentrice sferice orizontale (\bar{A} — azimutul astronomic ; h — înălțimea),

avem :

$$\left. \begin{aligned} X &= \bar{X} \cdot \sin \bar{\varphi}_0 + \bar{Z} \cdot \cos \bar{\varphi}_0 \\ Y &= \bar{Y} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$Z = -\bar{X} \cos \bar{\varphi}_0 + \bar{Z} \cdot \sin \bar{\varphi}_0,$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \Delta \cdot \cosh h \cdot \cos \bar{A} \\ -\bar{Y} &= \Delta \cdot \cosh h \cdot \sin \bar{A} \\ Z &= \Delta \cdot \sinh h \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Introducînd (16) în (15), obținem :

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta \cdot (\cosh h \cdot \cos \bar{A} \cdot \sin \bar{\varphi}_0 + \sinh h \cdot \cos \bar{\varphi}_0) \\ Y &= -\Delta \cdot \cosh h \cdot \sin \bar{A} \\ Z &= \Delta (-\cosh h \cdot \cos \bar{A} \cdot \cos \bar{\varphi}_0 + \sinh h \cdot \sin \bar{\varphi}_0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Este evident că $X/\Delta, \Delta/\Delta, Z/\Delta$ sînt cosinusi directori ai direcției OS față de axele X, Y, Z , aceștia putînd fi obținuți și direct, aplicînd formulele lui Gauss la triunghiul sferic (paralactic) PZS (v. fig. 3).

Atunci formulele de plecare (12) ale criteriului se modifică după cum urmează :

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \tau = \Delta (\sinh h \cdot \cos \bar{\varphi}_0 + \cosh h \cdot \sin \bar{\varphi}_0 \cdot \cos \bar{A}) + \rho \cos \bar{\varphi}_0 \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \tau = -\Delta \cosh h \cdot \sin \bar{A} \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \tau = \Delta (\sinh h \cdot \sin \bar{\varphi}_0 - \cosh h \cdot \cos \bar{\varphi}_0 \cdot \cos \bar{A}) + \rho \sin \bar{\varphi}_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Mai departe raționamentul este identic cu cel din A).

În cazul folosirii azimutului geodezic (în ultima vreme), semnul lui $\sin \bar{A}$ și $\cos \bar{A}$ se schimbă în aceste formule.

2. *Aplicații.* Pentru a aplica criteriul, pe lângă datele observației și coordonatele geocentrice ale stației de observare, avem nevoie de un sistem de elemente asupra orbitei satelitului (sau sateliților) de identificat.

Elementele orbitale (elemente osculatoare sau medii)* ale sateliților artificiali sovietici se publică în special, în revista „Biulleten stanții opticeskogo nabludenia iskusstvennih sputnikov Zemli”,

începînd cu nr. 24, pentru intervalele de 2—4 zile, sub formă de tabele.

Elementele medii :

$$\begin{array}{ll}
 i(t) = i_0 & \text{— înclinarea orbitei la} \\
 \omega(t) = \omega_0 + \omega'(t - t_0) & \text{— argumentul perigeului;} \\
 \Omega(t) = \Omega_0 + \Omega'(t - t_0) & \text{— longitudinea nodului as-} \\
 & \text{cendent;} \\
 M(t) = M_0 + \bar{n}(t - t_0) + n'(t - t_0)^2 + & \\
 \quad + n''(t - t_0)^3 & \text{— anomalia mijlocie;} \\
 \varphi(t) = \varphi_0 + \varphi'(t - t_0) & \text{— unghiul excentricității;} \\
 n(t) = \bar{n} + 2n'(t - t_0) + 3n''(t - t_0)^2 & \text{— mișcarea diurnă mijlocie;}
 \end{array} \quad (19)$$

(\bar{n} — conținînd și efectul perturbației „seculare” în anomalia mijlocie); unde mărimile i , ω_0 , Ω_0 , M_0 , φ_0 și \bar{n} — elementele osculatoare sau medii pentru epoca inițială t_0 , precum și mărimile ω' , Ω' , φ' , n' , n'' variațiile lor diurne — se dau în tabelele amintite sau se calculează (aproximativ) pe baza formulelor date, de exemplu în [6].

În caz că nu există asemenea elemente, elementele preliminare aproximative, pentru o epocă oarecare t_0 , pot fi obținute și direct din observații (avînd 3 sau mai mult de 3 observații asupra obiectului considerat), după una din metodele elaborate pentru calculul de orbite ale SAP.

După ce s-au calculat elementele orbitale după (19) pentru momentul observației, în vederea folosirii lor pentru compararea cu datele observaționale, la calcule mai precise, pe baza lor, trebuie să se obțină elemente osculatoare, adăugînd la elementele medii perturbațiile periodice. Despre această metodă vezi, de exemplu [7].

La aplicarea criteriului au fost folosite următoarele simplificări și date :

— avînd în vedere calculele aproximative, s-a admis că mărimile i , ω , Ω sînt raportate la ecuatorul și echinocțiul instantaneu (adică la planul ecuatorului terestru) ;

— la calculul elementelor orbitale ale SAP pentru momentul observației s-au luat în considerare variațiile „seculare” ale acestor elemente cauzate de principalele perturbații geofizice ;

— elementele orbitale folosite și observațiile care au fost luate pentru identificare sînt cuprinse în tabelele 1 și 2 :

* Prin elemente medii aici se înțeleg elementele calculate pe baza numai a perturbațiilor „seculare”.

Nr.	Epoca (t, T.U.)	Obiect	M	ω	Ω	i	φ
1	1958 mart. 17,0	Sp. II	63,56 ($\pm 1,60$)	4,91	93,05	65,23	3,50
2	1957 nov. 14,87500	Sp. II.	284,65 ($\pm 3,01$)	46,16	86,01	65,49	5,71

Obs. Variațiile elementelor \bar{n} , ω' , Ω' , φ' sînt luate pentru 10 zile solare mijlocii, iar cele ale lui n' pentru 100 zile.

Nr.	Data (t, T.U.)	Obiect	coord. ecuatoriale	
			$\alpha(s - t)$	δ
1	1958 mart. 20,17.45.15,0	Sp. II	(1950,0)	
			$10^h 25^m,91$	$+37^\circ,40$
2	1957 nov. 6, 04.54. 38,1	Sp. II	—	—

În urma calculelor efectuate după formulele criteriului, folosind datele tabelor 1 și 2, am obținut că criteriul se respectă cu o eroare de aproximativ două grade în anomalie excentrică E , ceea ce corespunde aproximativ preciziei determinării anomaliilor mijlocii M_0 . Prin urmare, pozițiile din tabelul 2, în limitele acestei precizii, se află pe orbita celui de al doilea sputnic, ele fiind deci identificate.

Printr-o determinare mai precisă a elementelor orbitale, a pozițiilor observate și prin eliminarea simplificărilor amintite, precizia respectării criteriului se va mări.

Criteriul poate servi și drept criteriu relativ pentru selectarea observațiilor greșite efectuate asupra unei treceri a satelitului deasupra stației de observare.

BIBLIOGRAFIE

1. A. D. Dubiago, *Opredelenie orbit*, GITTL, M. —L., 1949, str. 188.
2. M. S. Iarov-Iarovoi i E. A. Grebenikov, *O vlcislenii tocinoi i priblijennoi efemeridi iskusstvennih sputnikov Zemli*. „Astronomiceskii jurnal”, t. XXXVI, vip. 3, 1959.
3. A. Dinescu, *Aplicarea unei metode de calcul al efemeridelor sateliților artificiali ai Pământului în funcție de o orbită cunoscută și compararea cu observațiile efectuate la București*. „Studii și cercet. de astronomie și seismologie”. Ed. Acad. R.P.R., nr. 1, 1962.

Tabel 1

\bar{n}	ω'	Ω'	φ'	n'	Bibl.
54683,15	-4,21	-32,01	-0,11	+359,13	„Biull. st...” nr. 24
50243,97	-4,21	-25,30	+0,29	+119,09	„

Tabel 2

Coord. orizontale		Coord. st.	Instr.
\bar{A}	h	$\bar{\varphi}_0, \lambda; H$	
—	—	46° 45' 33",8N 1 ^h 34 ^m 23 ^s ,5E 412 m	AT-1
179°47'30"	23°06'20"	„	Teodolit

4. S. G. Makover, *Vicislenie orbit iskusstvennih sputnikov Zemli*, „Biulleten stanții optici. na. ISZ”, nr. 24, Moskva, 1961.
5. M. F. Subbotin, *Kurs небесной механики*, том I, Moskva-Leningrad, 1933.
6. I. D. Jongolovici, V. M. Amelin, *Sbornik tablî i nomogramm dlia obrabotki nabludenii iskusstvennih sputnikov Zemli*. Izd. AN SSSR, 1960.
7. G. A. Cebotariov, E. N. Makarova, *Prečaritelnie elementi orbiti kabini pervogo kosmiceskogo korablia (1960 ε₃)*. „Biulleten st...” nr. 27, Moskva, 1962.

КРИТЕРИЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

(Резюме)

В настоящей работе устанавливаются формулы одного критерия идентификации искусственных спутников Земли (модифицированные формулы критерия [1]), позволяющего установить принадлежность индивидуальных наблюдений известной из предыдущих появлений орбите в случае искусственных спутников Земли. Формулы даны в двух случаях представления наблюдений: 1) наблюдения даны в сферических экваториальных координатах; 2) известны сферические горизонтальные координаты. На основе вычисления конкретных примеров для второго спутника, указывается, при сделанных упрощениях, на точность соблюдения критерия (около 2° в эксцентрической аномалии, что примерно соответствует точности определения использованных средних аномалий).

UN CRITÈRE D'IDENTIFICATION DES SATELLITES ARTIFICIELS
DE LA TERRE

(R é s u m é)

L'auteur établit les formules d'un critère d'identification des satellites artificiels de la Terre (formules modifiées du critère [1]), critère qui permet de décider de l'appartenance à une orbite connue antérieurement par un système d'éléments orbitaux des positions observées dans le cas des satellites artificiels de la Terre. Les formules sont établies pour deux cas de présentation des observations : a) lorsque les observations sont données sous la forme de coordonnées sphériques équatoriales ; b) lorsqu'on connaît les coordonnées sphériques horizontales. Les calculs effectués sur des exemples concrets pour le sputnik-II montrent, dans les simplifications qui ont été faites, à quel degré de précision le critère a été respecté (approximativement 2° dans l'anomalie excentrique, ce qui correspond à peu près à la précision de a détermination des anomalies moyennes utilisées).

SOLUȚII APROAPE-PERIODICE ALE ECUAȚIEI LUI DUFFING,
ÎN CAZ DE NEREZONANȚĂ

de
AUREL TURCU

În această lucrare se studiază problema existenței, construcției și stabilității oscilațiilor aproape-periodice ale ecuației cvasiliniare a lui Duffing [1] de forma :

$$\ddot{x} + k^2x = a \cos\omega_1 t + b \cos\omega_2 t + \mu(\gamma x^3 - 2H\dot{x}), \quad (1)$$

unde $k, \gamma > 0, a > 0, b > 0, H > 0$ sînt niște constante date, μ este un parametru mic real, ω_1 și ω_2 sînt niște constante al căror raport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este irațional. Ultima supoziție însemnează că funcția $-k\bar{f}_2(t) = a \cos\omega_1 t + b \cos\omega_2 t$ este aproape-periodică.

Pe baza rezultatelor fundamentale obținute de Krilov și Bogoliubov [3,2] și prelucrate după aceea de Malkin [4], în lucrare se arată că ecuația lui Duffing (1), în caz de nerezonanță, posedă o soluție aproape-periodică, stabilă.

1. Problema găsirii soluțiilor aproape-periodice în general și în particular pentru ecuația lui Duffing (1) este una din cele mai grele probleme care se întîlnesc în teoria oscilațiilor neliniare. Greutatea constă în aceea că noi nu putem folosi aici metodele elaborate și folosite la găsirea soluțiilor periodice.

Pentru a deveni mai clară această ultimă afirmație, vom scrie ecuația (1) sub forma unui sistem. Facem în acest scop substituția :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x} &= -kx_2 \end{aligned}$$

Atunci ecuația (1) se va scrie astfel :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -kx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= kx_1 - \frac{a}{k} \cos\omega_1 t - \frac{b}{k} \cos\omega_2 t - \frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2Hkx_2). \end{aligned} \quad (1')$$

Fără greutate se observă că sistemul (1') poate fi considerat ca un caz particular al sistemului neautonom, cvasiliniar, de forma :

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n + f_s(t) + \mu F_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (A)$$

unde

- funcțiile $f_s(t)$ sînt sume trigonometrice finite,
- funcțiile F_s se descompun în serii de forma,

$$F_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} F_s^{(i)}(t, x_1, \dots, x_n) \mu^i$$

care converg pentru $\mu < \mu_0$, unde μ_0 este un număr pozitiv, care nu depinde de t, x_1, x_2, \dots, x_n ,

— funcțiile $F_s^{(i)}(t, x_1, \dots, x_n)$ în seriile precedente sînt polinoame în raport cu x_1, \dots, x_n , aproape-periodice în raport cu t , care se descompun în raport cu această variabilă în serii Fourier finite :

$$F_s^{(i)} = A_{s0}^{(i)} + \sum_p (A_{sp}^{(i)} \cos \nu_p t + B_{sp}^{(i)} \sin \nu_p t).$$

Aici sumele conțin un număr finit de termeni și coeficienții sînt polinoame în raport cu x_1, \dots, x_n .

Problema noastră constă în a găsi soluțiile aproape-periodice ale sistemului de ecuații diferențiale de forma A). Această problemă se reduce însă la problema existenței și a calculului soluțiilor aproape-periodice ale sistemului de ecuații A).

Greutatea despre care am vorbit mai sus este legată tocmai de demonstrația existenței și de calculul soluțiilor aproape-periodice, atunci cînd se încearcă aplicarea metodelor folosite pentru soluțiile periodice ale ecuațiilor cvasiliniare (vezi M a l k i n [4] cap. IV).

În consecință, pentru aflarea soluțiilor aproape-periodice ale sistemului cvasiliniar A) și deci și ale ecuației lui Duffing (1), nu vom căuta soluția sub formă de serii după puterile parametrului mic μ , ci vom folosi metoda aproximațiilor succesive luînd în calitate de primă aproximație soluția aproape-periodică a sistemului generator obținut din A) sau (1') cînd punem $\mu = 0$ și apoi vom demonstra convergența șirului obținut de aproximații succesive.

Înainte de a trece la calculul efectiv al soluțiilor aproape periodice ale ecuației lui D u f f i n g (1) facem observația că întrucît ecuația caracteristică a sistemului liniar omogen obținut din (1') are toate rădăcinile cu părțile reale nule, atunci pentru existența soluției aproape-periodice a sistemului dat (1') nu putem folosi teorema lui M a l k i n [4] decît folosind în prealabil transformarea specială introdusă în teoria oscilațiilor neliniare de N. M. K r î l o v și N. N. B o g o l i u b o v [3].

În cele ce urmează vom avea de asemenea în vedere faptul că fiind în cazul de nerezonanță, nici una din mărimile

$$mk + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

nu este o mărime mică de ordinul lui μ . Aici m , m_1 , m_2 , sînt niște numere pozitive sau negative, pentru care

$$|m| + |m_1| + |m_2| \leq 5 \text{ și } m \neq 0$$

2. Sistemul generator, obținut din sistemul lui Duffing (1') cînd facem $\mu = 0$, este un sistem liniar, neomogen de forma :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -kx_2 = -kx_2 + \bar{f}_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= kx_1 - \frac{a}{k} \cos\omega_1 t - \frac{b}{k} \cos\omega_2 t = kx_1 + \bar{f}_2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

unde

$$\bar{f}_1(t) = 0, \quad \bar{f}_2(t) = -\frac{1}{k} (a \cos\omega_1 t - b \cos\omega_2 t).$$

Sistemul liniar, omogen (auto-adjunct) :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -kx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= kx_1 \end{aligned} \quad (3)$$

a cărui ecuație fundamentală

$$\begin{vmatrix} -\rho & -k \\ k & -\rho \end{vmatrix} = \rho^2 + k^2 = 0 \quad (4)$$

are două rădăcini cu părțile reale nule $\rho_{1,2} = \pm ki$, admite următorul sistem fundamental de soluții periodice (care pot fi considerate în același timp și ca soluții aproape-periodice) :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos kt & x_{12} &= \sin kt \\ x_{21} &= \sin kt & x_{22} &= -\cos kt \end{aligned} \quad (5)$$

unde $x_{11}(0) = |x_{22}(0)| = 1$, $x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0$.

Aceste soluții reprezintă în același timp și sistemul fundamental $\psi_{\alpha r}$ ($\alpha, r = 1, 2$) de soluții al sistemului adjunct de ecuații față de (3).

Dat fiind faptul că în sistemul (2) funcțiile \bar{f}_α ($\alpha = 1, 2$) reprezintă sume trigonometrice finite, atunci conform teoremei lui Malkin [4],¹ pentru ca sistemul (2) să admită o soluție aproape-periodică, cînd ecuația (4) are rădăcinile cu părțile reale nule, e necesar și suficient ca :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^2 \bar{f}_\alpha(t) \psi_{\alpha r} dt = 0 \quad (r = 1, 2). \quad (6)$$

¹ Această teoremă e un caz particular al unei teoreme mai generale stabilită în lucrarea lui I. G. MALKIN [5].

În cazul studiat de noi se observă ușor că relațiile (6) sînt satisfăcute, deoarece expresiile de sub integrale conțin numai termeni periodici, diferiți de constante. În consecință sistemul (2) admite o soluție aproape-periodică și aceasta este chiar soluția generală a sistemului (2) :

$$\begin{cases} x_1 = M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \\ x_2 = M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \frac{a\omega_1}{k(k^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t + \frac{b\omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (7)$$

În ipotezele făcute asupra sistemului A), sistemul (1') poate fi adus la forma „standart”, adică la un sistem de forma

$$\frac{dx_s}{dt} = \mu F_s(t, x_1, x_2, \mu) \quad (s = 1, 2)$$

În acest scop transformăm sistemul (1') cu ajutorul substituției (7) (considerînd în locul funcțiilor x_1 și x_2 funcțiile M_1 și M_2).

Din (7) și (1') avînd în vedere că (7) e soluția generală a sistemului generator, obținem :

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} \cos kt + \frac{dM_2}{dt} \sin kt &= 0 \\ \frac{dM_1}{dt} \sin kt - \frac{dM_2}{dt} \cos kt &= -\frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2Hkx_2) \end{aligned}$$

unde în locul lui x_1 și x_2 trebuie puse expresiile lor din (7).

Rezolvînd sistemul astfel obținut în raport cu derivatele lui M_1 și M_2 , găsim :

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2Hkx_2) \sin kt \\ \frac{dM_2}{dt} = \frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2Hkx_2) \cos kt. \end{cases} \quad (8)$$

Vom scrie în continuare sistemul (8) sub o formă mai convenabilă în vederea ușurării aplicării transformării lui K r i l o v - B o g o l i u b o v.

Pe baza lui (7) sistemul (8) se scrie în forma :

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \frac{-\mu}{k} \left\{ \gamma [M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + a' \cos \omega_1 t + b' \cos \omega_2 t]^3 - \right. \\ &\quad \left. + 2Hk [M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \bar{a} \sin \omega_1 t + \bar{b} \sin \omega_2 t] \right\} \sin kt \\ \frac{dM_2}{dt} &= \frac{\mu}{k} \left\{ \gamma [M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + a' \cos \omega_1 t + b' \cos \omega_2 t]^3 + \right. \\ &\quad \left. + 2Hk [M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \bar{a} \sin \omega_1 t + \bar{b} \sin \omega_2 t] \right\} \cos kt \end{aligned} \quad (9)$$

unde

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} & \bar{a} &= \frac{a\omega_1}{k(k^2 - \omega_1^2)} \\ b' &= \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} & \bar{b} &= \frac{b\omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Efectuînd toate calculele, ecuațiile (8) se scriu sub forma :

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = \mu \left\{ P_1(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{1p}(M_1, M_2) \cos \nu_p t + B_{1p}(M_1, M_2) \sin \nu_p t] \right\} \equiv \\ \equiv \mu F_1(t, M_1, M_2) \\ \frac{dM_2}{dt} = \mu \left\{ P_2(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{2p}(M_1, M_2) \cos \nu_p t + B_{2p}(M_1, M_2) \sin \nu_p t] \right\} \equiv \\ \equiv \mu F_2(t, M_1, M_2) \end{cases} \quad (11)$$

unde

$$\begin{cases} P_1(M_1, M_2) = -\frac{3\gamma}{8k} M_2(M_1^2 + M_2^2) - HM_1 - \frac{3\gamma}{4k} M_2 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right] \\ P_2(M_1, M_2) = \frac{3\gamma}{8k} M_1(M_1^2 + M_2^2) - HM_2 + \frac{3\gamma}{4k} M_1 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right] \end{cases} \quad (12)$$

$$A_{11} = \frac{\gamma}{8k} M_2(3M_1^2 - M_2^2) \quad B_{11} = \frac{\gamma}{8k} M_1(3M_2^2 - M_1^2) \quad (13)$$

$$A_{12} = A_{13} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' \quad B_{12} = B_{13} = -\frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) a'$$

$$A_{14} = A_{15} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' \quad B_{14} = B_{15} = -\frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) b'$$

$$\begin{aligned} A_{16} &= \frac{\gamma}{2k} M_2^3 + HM_1 + \\ &+ \frac{3\gamma}{4k} M_2(a'^2 + b'^2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} B_{16} &= -\frac{\gamma}{4k} M_1(M_1^2 + 3M_2^2) + \\ &+ HM_2 - \frac{3\gamma}{4k} M_1(a'^2 + b'^2) \end{aligned}$$

$$A_{17} = -\frac{3\gamma}{4k} M_2 a'^2 \quad B_{17} = B_{18} = 0$$

$$A_{18} = -\frac{3\gamma}{4k} M_2 b'^2 \quad B_{19} = B_{1,10} = 0$$

$$A_{1,9} = A_{1,10} = -\frac{3\gamma}{2k} M_2 a' b' \quad B_{1,11} = B_{1,12} = -\frac{3\gamma}{8k} M_1 a'^2$$

$$A_{1,11} = A_{1,12} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 a'^2 \quad B_{1,13} = B_{1,14} = -\frac{3\gamma}{8k} M_1 b'^2$$

$$A_{1,13} = A_{1,14} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 b'^2 \quad B_{1,15} = \dots = B_{1,18} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 a' b'$$

$$\begin{aligned}
A_{1,15} &= A_{1,16} \dots A_{1,18} = \frac{3\gamma}{4k} M_2 a' b' & B_{1,19} &= B_{1,20} = -\frac{3\gamma a'}{8k} (M_1^2 + 3M_2^2 + \\
& & & + a'^2 + 2b'^2) \\
A_{1,19} &= -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' + H\bar{a} & B_{1,21} &= B_{1,22} = -\frac{3\gamma b'}{8k} (M_1^2 + 3M_2^2 + \\
& & & + 2a'^2 + b'^2) \\
A_{1,20} &= -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' - H\bar{a} & B_{1,23} &= B_{1,24} = -\frac{\gamma a'^3}{3\gamma} \\
A_{1,21} &= -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' + H\bar{b} & B_{1,25} &= B_{1,26} = -\frac{\gamma b'^3}{8k} \\
A_{1,22} &= -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' - H\bar{b} & B_{1,27} &= \dots = B_{1,30} = -\frac{3\gamma a'^2 b'}{8k} \\
A_{1,23} &= A_{1,24} = \dots A_{1,34} = 0 & B_{1,31} &= \dots = B_{1,34} = -\frac{3\gamma a' b'^2}{8k} \\
A_{21} &= \frac{\gamma}{8k} M_1 (M_1^2 - 3M_2^2) & B_{21} &= \frac{\gamma}{8k} M_2 (3M_1^2 - M_2^2) \\
A_{22} &= A_{23} = -\frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) a' & B_{22} &= B_{23} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' \\
A_{24} &= A_{25} = \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) b' & B_{24} &= B_{25} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' \\
A_{26} &= \frac{\gamma}{2k} M_1^3 - HM_2 + \frac{3\gamma}{4k} M_1 (a'^2 + b'^2) & B_{26} &= \frac{\gamma}{4k} M_2 (3M_1^2 + M_2^2) + HM_1 + \frac{3\gamma}{4k} \\
& & & M_2 (a'^2 + b'^2) \\
A_{27} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 a'^2 & B_{27} &= B_{28} = 0 \\
A_{28} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 b'^2 & B_{28} &= B_{2,10} = 0 \\
A_{29} &= A_{2,10} = \frac{3\gamma}{2k} M_1 a' b' & B_{2,11} &= B_{2,12} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 a'^2 \\
A_{2,11} &= A_{2,12} = \frac{3\gamma}{8k} M_1 a'^2 & B_{2,13} &= B_{2,14} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 b'^2 \\
A_{2,13} &= A_{2,14} = \frac{3\gamma}{8k} M_1 b'^2 & B_{2,15} &= \dots B_{2,18} = \frac{3\gamma}{4k} M_2 a' b' \\
A_{2,15} &= \dots A_{2,18} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 a' b' & B_{2,19} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' + H\bar{a} \\
A_{2,19} &= A_{2,20} = & B_{2,20} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' - H\bar{a} \\
& = \frac{3\gamma a'}{8k} (3M_1^2 + M_2^2 + a'^2 + b'^2) & & \\
A_{2,21} &= A_{2,22} = & B_{2,21} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' + H\bar{b} \\
& = \frac{3\gamma b'}{8k} (3M_1^2 + M_2^2 + 2a'^2 + b'^2) & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2,23} = A_{2,24} &= \frac{\gamma a'^3}{8k} & B_{2,22} &= \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' - H\bar{b} \\
 A_{2,25} = A_{2,26} &= \frac{\gamma b'^3}{8k} & B_{2,23} = \dots = B_{2,26} &= 0 \\
 A_{2,27} = \dots = A_{2,30} &= \frac{3\gamma a'^2 b'}{8k} & B_{2,27} = \dots = B_{2,30} &= 0 \\
 A_{2,31} = \dots = A_{2,34} &= \frac{3\gamma a' b'^2}{8k} & B_{2,31} = \dots = B_{2,34} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= 4k & \nu_{12} &= 2(k - \omega_1) & \nu_{24} &= k - 3\omega_1 & (14) \\
 \nu_2 &= 3k + \omega_1 & \nu_{13} &= 2(k + \omega_2) & \nu_{25} &= k + 3\omega_2 \\
 \nu_3 &= 3k - \omega_1 & \nu_{14} &= 2(k - \omega_2) & \nu_{26} &= k - 3\omega_2 \\
 \nu_4 &= 3k + \omega_2 & \nu_{15} &= 2k + \omega_1 + \omega_2 & \nu_{27} &= k + 2\omega_1 + \omega_2 \\
 \nu_5 &= 3k - \omega_2 & \nu_{16} &= 2k - \omega_1 - \omega_2 & \nu_{28} &= k - 2\omega_1 - \omega_2 \\
 \nu_6 &= 2k & \nu_{17} &= 2k + \omega_1 - \omega_2 & \nu_{29} &= k + 2\omega_1 - \omega_2 \\
 \nu_7 &= 2\omega_1 & \nu_{18} &= 2k - \omega_1 + \omega_2 & \nu_{30} &= k - 2\omega_1 + \omega_2 \\
 \nu_8 &= 2\omega_2 & \nu_{19} &= k + \omega_1 & \nu_{31} &= k + 2\omega_2 + \omega_1 \\
 \nu_9 &= \omega_1 + \omega_2 & \nu_{20} &= k - \omega_1 & \nu_{32} &= k - 2\omega_2 - \omega_1 \\
 \nu_{10} &= \omega_1 - \omega_2 & \nu_{21} &= k + \omega_2 & \nu_{33} &= k + 2\omega_2 - \omega_1 \\
 \nu_{11} &= 2(k + \omega_1) & \nu_{22} &= k - \omega_2 & \nu_{34} &= k - 2\omega_2 + \omega_1 \\
 & & \nu_{23} &= k + 3\omega_1 & &
 \end{aligned}$$

Din ecuațiile (11) se vede că funcțiile F_1 și F_2 sînt sume trigonometrice finite.

Vom căuta, în continuare, să găsim soluțiile aproape-periodice ale sistemului „standart“ (11). În acest scop vom face o schimbare de variabile (*transformarea Krîlov - Bogoliubov*) pentru a transforma sistemul (11) într-un sistem de forma :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= \mu Y_1(y_1, y_2) + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= \mu Y_2(y_1, y_2) + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu)
 \end{aligned} \tag{15}$$

unde Y_1 și Y_2 sînt funcții care nu conțin timpul, iar Y_1^* , Y_2^* au aceeași structură ca F_1 și F_2 , adică pot fi puse sub forma unor sume trigonometrice finite cu coeficienți care reprezintă polinoame în raport cu y_1, y_2 . Funcțiile Y_1^*, Y_2^* depind, în afară de aceasta, de parametrul μ , în raport cu care sînt analitice.

N. M. Krîlov și Bogoliubov au arătat că putem face această transformare, aplicînd în sistemul (11) transformarea :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= y_1 + \mu u_1(t, y_1, y_2) \\
 M_2 &= y_2 + \mu u_2(t, y_1, y_2).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Într-adevăr, înlocuind în (11) pe M_1 și M_2 prin expresiile lor (16) și ținând seama de (15), vom avea :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mu Y_1 + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu^3 Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial y_1} [\mu Y_1 + \\ + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu)] - \mu \frac{\partial u_1}{\partial y_2} [\mu Y_2 + \mu Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu)] + \mu F_1(t, y_1, y_2) + \\ + \mu^2 \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} u_2 \right] + \mu^3 F_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mu Y_2 + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu^3 Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\mu \frac{\partial u_2}{\partial y_1} [\mu Y_1 + \\ + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu)] - \mu \frac{\partial u_2}{\partial y_2} [\mu Y_2 + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu)] + \\ + \mu F_2(t, y_1, y_2) + \mu^2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} u_2 \right] + \mu^3 F_2^*(t, y_1, y_2, \mu). \end{aligned}$$

Pentru a obține ecuațiile care ne permit să calculăm funcțiile necunoscute $u_1, u_2, Y_1, Y_2, Y_1^*$ și Y_2^* , vom egala în (17), coeficienții aceluiași puteri ale lui μ . Făcând acest lucru avem ecuațiile :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + Y_1 = F_1(t, y_1, y_2) = P_1(y_1, y_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{1p}(y_1, y_2) \cos v_p t + \\ + B_{1p}(y_1, y_2) \sin v_p t] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + Y_2 = F_2(t, y_1, y_2) = P_2(y_1, y_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{2p}(y_1, y_2) \cos v_p t + \\ + B_{2p}(y_1, y_2) \sin v_p t] \end{aligned}$$

$$Y_1^*(t, y_1, y_2, 0) = -\frac{\partial u_1}{\partial y_1} Y_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} Y_2 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} u_2 \quad (19)$$

$$Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) = -\frac{\partial u_2}{\partial y_1} Y_1 - \frac{\partial u_2}{\partial y_2} Y_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} u_2$$

$$\begin{aligned} Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\frac{\partial u_1}{\partial y_1} Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu) + \\ + F_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\frac{\partial u_2}{\partial y_1} Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) - \frac{\partial u_2}{\partial y_2} Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu) + \\ + F_2^*(t, y_1, y_2, \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

Se observă că ecuațiile (18) sînt satisfăcute dacă luăm

$$\begin{aligned}
 u_1(t, y_1, y_2) &= \sum_{p=1}^{34} (A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \\
 u_2(t, y_1, y_2) &= \sum_{p=1}^{34} (A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \\
 Y_1(y_1, y_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_1(t, y_1, y_2) dt = P_1(y_1, y_2) \\
 Y_2(y_1, y_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_2(t, y_1, y_2) dt = P_2(y_1, y_2).
 \end{aligned} \tag{21}$$

În consecință avînd în vedere (13), din (19) obținem :

$$\begin{aligned}
 Y_1^*(t, y_1, y_2, 0) &= - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right) \frac{P_1}{\nu_p} - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \cdot \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) &= - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right) \frac{P_1}{\nu_p} - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right].
 \end{aligned}$$

Ținînd seama de (21) și (22), ecuațiile (15) se pot scrie astfel :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= \mu P_1(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right) \frac{P_1}{\nu_p} - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} (A_{1p} \sin \nu_p t - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - B_{1p} \cos \nu_p t \frac{1}{\nu_p} \left| + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} (A_{2p} \sin \nu_p t - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{2p} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \right] \right\} + \mu^3 Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu) \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dt} = & \mu P_2(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right) \frac{P_1}{\nu_p} - \right. \\
& - \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} (A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \right] + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} (A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t) \frac{1}{\nu_p} \right] \left. \right\} + \mu^3 Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu).
\end{aligned}$$

Să considerăm acum sistemul (23) în primă aproximație :

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} = & \mu P_1(y_1, y_2) = \mu \left[- \frac{3\gamma}{8k} y_2 (y_1^2 + y_2^2) - Hy_1 - \delta y_2 \right] \\
\frac{dy_2}{dt} = & \mu P_2(y_1, y_2) = \mu \left[\frac{3\gamma}{8k} y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \delta y_1 - Hy_2 \right], \quad (24)
\end{aligned}$$

unde am notat pentru prescurtare :

$$\delta = \frac{3\gamma}{4k} \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega^2)^2} \right] > 0. \quad (25)$$

Se observă că acest sistem are soluția particulară

$$\begin{aligned}
y_1^* &= 0 \\
y_2^* &= 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

care corespunde stării de echilibru a acestui sistem, adică stării pentru care

$$\begin{aligned}
P_1(0,0) &= 0 \\
P_2(0,0) &= 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

Ecuațiile în variații pentru soluția (26) au forma :

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= -H\xi_1 - \delta\xi_2 \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= \delta\xi_1 - H\xi_2 \quad (28)
\end{aligned}$$

unde am notat perturbațiile $y_s - 0 = \mu \xi_s$ ($s = 1, 2$).

Se observă că ecuația fundamentală a sistemului în variații

$$\begin{vmatrix} -H - \lambda & -\delta \\ \delta & -H - \lambda \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y_1} & \frac{\partial P_2}{\partial y_2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2H\lambda + (H^2 + \delta^2) = 0, \quad (29)$$

unde derivatele $\frac{\partial P_s}{\partial y_j}$ ($s, j = 1, 2$) trebuie calculate pentru soluția $y_s - y_s^* = 0$, are rădăcinile

$$\lambda_{1,2} = -H \pm \delta i; \quad i = \sqrt{-1} \quad (30)$$

cu părțile reale diferite de zero și în plus negative, căci $H > 0$.

În acest caz (adică, dacă sînt satisfăcute condițiile (27)², vom arăta că sistemul (23) are, pentru μ suficient de mic, o soluție aproape-periodică, care se transformă în soluția (26), pentru $\mu = 0$ ³.

Vom face în acest scop substituția :

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu z_1 \\ y_2 &= \mu z_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Atunci ecuațiile (23) devin :

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu(-Hz_1 - \delta z_2) + \mu Y_1^*(t, 0, 0, 0) + \mu^2 Z_1(t, z_1, z_2, \mu)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \mu(\delta z_1 - Hz_2) + \mu Y_2^*(t, 0, 0, 0) + \mu^2 Z_2(t, z_1, z_2, \mu)$$

sau, ținînd seama de (22) și de (18) și (13) :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= + \mu(-Hz_1 - \delta z_2) + \mu \left\{ \left[-H + H \cos 2kt - \delta \sin 2kt + \right. \right. \quad (32) \\ &+ \left. \sum_{p=11}^{18} \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right] \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} + \left[-\delta + \delta \cos 2kt + \right. \\ &+ \left. H \sin 2kt + \sum_{p=7}^{18} \frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right] \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} \left. \right\} + \mu^2 Z_1(t, z_1, z_2, \mu) \\ \frac{dz_2}{dt} &= \mu(\delta z_1 - Hz_2) + \mu \left\{ \left[\delta + \delta \cos 2kt + H \sin 2kt + \sum_{p=7}^{18} \frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t \right] \cdot \right. \\ &\cdot \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} + \left[-H - H \cos 2kt + \delta \sin 2kt + \right. \\ &+ \left. \sum_{p=11}^{18} \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right] \cdot \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} \left. \right\} + \mu^2 Z_2(t, z_1, z_2, \mu). \end{aligned}$$

² Această condiție (27) e numai suficientă, ca nu e și necesară.

³ Această afirmație rezultă ca un caz particular al unei teoreme mai generale stabilite de N. N. Bogoliubov în lucrarea [3].

unde Z_1 și Z_2 sînt funcții analitice în raport cu μ și cu aceeași structură ca și Y_1^* , Y_2^* , care converg pentru $\mu < \mu_0$, unde μ_0 e un număr pozitiv care nu depinde de t , z_1 , z_2 .

Punînd în (32) :

$\tau = \mu t$, $Y_1^*(t, 0, 0, 0) = f_1(t)$, $Y_2^*(t, 0, 0, 0) = f_2(t)$, unde $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt, după cum se vede din (32), funcții aproape periodice, vom obține ecuațiile :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= -Hz_1 - \delta z_2 + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \delta z_1 - Hz_2 + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right). \end{aligned} \quad (34)$$

După cum rezultă din (30), ecuația fundamentală a sistemului generator

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= -Hz_1 - \delta z_2 + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \delta z_1 - Hz_2 + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

are rădăcinile cu părțile reale diferite de zero (negative chiar) — necritice —.

În acest caz, conform teoremei lui *Neugebauer* și *Borh*, sistemul generator (35) admite una și numai o singură soluție $z_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = \varphi_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$ ($s = 1, 2$) aproape-periodică și această soluție satisface inegalitățile :

$$\left| \varphi_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right| < AM \quad (36)$$

unde M este limita superioară a funcțiilor $\left| f_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right|$ în intervalul $(-\infty, +\infty)$, iar A e o constantă oarecare, care depinde numai de coeficienții H și δ și nu depinde de alegerea funcțiilor f_s .

Sistemul omogen (35) are soluția generală $z_1(\tau) = e^{-H\tau} (A \cos \delta\tau + B \sin \delta\tau)$, $z_2 = e^{-H\tau} (A \sin \delta\tau - B \cos \delta\tau)$. Aplicînd metoda variației constantelor arbitrare, observăm că sistemul generator (35) are următoarea soluție particulară aproape-periodică, unică :

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) &= e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos \delta(u - \tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin \delta(u - \tau) \right] du \\ \varphi_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) &= e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin \delta(u - \tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos \delta(u - \tau) \right] du. \end{aligned} \quad (37)$$

Vom căuta, în continuare, soluția aproape-periodică a sistemului (34), care pentru $\mu = 0$ se transformă în soluția generatoare (37).

În acest scop vom folosi metoda aproximațiilor succesive. Luăm în calitate de primă aproximație soluția (37), iar în calitate de aproximație $z_s^{(k)}$ ($s = 1, 2$) a funcțiilor z_s , soluția aproape-periodică a sistemului :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1^{(k)}}{d\tau} &= -Hz_1^{(k)} - \delta z_2^{(k)} + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_1\left[\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(k-1)}, z_2^{(k-1)}, \mu\right] \\ \frac{dz_2^{(k)}}{d\tau} &= \delta z_1^{(k)} - Hz_2^{(k)} + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_2\left[\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(k-1)}, z_2^{(k-1)}, \mu\right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Ecuatiile (38) definesc în mod unic șirul de funcții aproape-periodice $z_s^{(k)}$. Inegalitățile (36) pe care le satisface soluția aproape-periodică a sistemului (38) permit să arăta cu ușurință că pentru μ suficient de mic șirul $z_s^{(k)}$ converge uniform spre anumite funcții aproape-periodice $z_s(\tau)$, care satisfac ecuațiile (34).

Demonstrația convergenței pentru cazul general se poate găsi în cap. IV § 9 a cărții lui Malkin⁴. Se arată de asemenea că pentru μ suficient de mic, soluția obținută astfel va fi unica soluție a sistemului (34), care pentru $\mu = 0$ se transformă în soluția (37)⁵.

Observații. În demonstrația convergenței aproximațiilor succesive $z_s^{(k)}$ (§ 9, cap. IV Malkin) limita superioară a valorilor lui $|\mu|$ pentru care aceste aproximații converg, nu depinde de alegerea particulară a funcțiilor f_s și Z_s , care figurează în ecuațiile (34), ci depinde de limitele superioare ale funcțiilor $|f_s|$, $|Z_s|$, $\left|\frac{\partial Z_s}{\partial z_j}\right|$ într-o vecinătate oarecare a soluției generatoare.

De aceea, faptul că în ecuațiile (34) variabila τ intră în combinația $\frac{\tau}{\mu}$ nu are nici o importanță.

Dacă ne limităm la prima aproximație dată de (37), găsim atunci că

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu\varphi_1(t) \\ y_2 &= \mu\varphi_2(t) \end{aligned}$$

este soluția aproape-periodică a sistemului (23), care pentru $\mu = 0$ se transformă în (26).

Pe baza lui (16), deoarece funcțiile u_1 și u_2 sînt aproape-periodice, rezultă că soluției obținute îi corespunde o oscilație aproape-periodică a sistemului (11), care pentru $\mu = 0$ se transformă în stare de echilibru pentru sistemul (24):

$$\begin{aligned} M_1(t) &= \mu\varphi_1(t) + \mu u_1(t, \mu\varphi_1, \mu\varphi_2) \\ M_2(t) &= \mu\varphi_2(t) + \mu u_2(t, \mu\varphi_1, \mu\varphi_2). \end{aligned}$$

⁴ Malkin I. G., *Nekotórie zadaci teorii nelineinik kolebanii*.

⁵ Această afirmație cu ajutorul transformării $z_s = \varphi(\tau) + V_s$ ($s = 1, 2$) se obține ca o consecință a unei teoreme mai generale stabilită de N.N. Bogoliubov (vezi [8, monografia [3]]).

Mai departe obținem soluția aproape-periodică a sistemului dat (31) :

$$x = \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t + \mu [\varphi_1(t) \cos kt + \varphi_2(t) \sin kt] + \\ + \mu [u_1(t, \mu\varphi_1, \mu\varphi_2) \cos kt + u_2(t, \mu\varphi_1, \mu\varphi_2) \sin kt] \quad (39)$$

care pentru $\mu = 0$ se transformă în soluția generatoare aproape-periodică :

$$x = \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \quad (40)$$

în care, după cum se vede, lipsește frecvența k .

3. Stabilitatea soluției aproape-periodice a sistemului (1'). După schimbările făcute mai sus se vede că această problemă e echivalentă cu problema stabilității soluției z_s^* (τ) a sistemului (34). Pentru rezolvarea acestei ultime probleme alcătuim ecuațiile mișcării perturbate, punînd în (34) :

$$z_s = z_s^* + v_s.$$

Vom avea atunci :

$$\frac{dv_1}{d\tau} = -Hv_1 - \delta v_2 + \mu V_1(\tau, v_1, v_2, \mu) \\ \frac{dv_2}{d\tau} = \delta v_1 - Hv_2 + \mu V_2(\tau, v_1, v_2, \mu) \quad (41)$$

unde

$$V_1 = Z_1 \left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^* + v_1, z_2^* + v_2, \mu \right) - Z_1 \left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu \right) \\ V_2 = Z_2 \left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^* + v_1, z_2^* + v_2, \mu \right) - Z_2 \left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu \right). \quad (42)$$

Fie M limita superioară a mărimilor $\left| \frac{\partial Z_s}{\partial v_j} \right|$ în domeniul

$$-\infty < \tau < +\infty, |v_s| < h \quad (s = 1, 2)$$

unde h e o constantă pozitivă. Atunci pe baza lui (42) în acest domeniu vor fi satisfăcute condițiile Cauchy-Lipshitz :

$$\mu |V_s(\tau, v_1', v_2', \mu) - V_s(\tau, v_1'', v_2'', \mu)| \leq L \sum_{\alpha=1}^2 |v_\alpha' - v_\alpha''|$$

în care constanta $L = \mu M$, pentru μ suficient de mic, va fi oricît de mică.

Observăm de asemenea că ecuația fundamentală a primei aproximații ($\mu = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{d\tau} &= -Hv_1 - \delta v_2 \\ \frac{dv_2}{d\tau} &= \delta v_1 - Hv_2\end{aligned}$$

are toate rădăcinile cu părțile reale negative.

În consecință, sînt satisfăcute toate condițiile teoremei lui Liapunov de stabilitate asimptotică⁶.

Deci mișcarea noastră z și în consecință și x e asimptotic stabilă.

B I B L I O G R A F I E

1. Duffing G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.
2. Крылов Н. М. et Боголюбов Н. Н., *Méthodes approchées de la mécanique non-linéaire dans leurs applications à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant (Monographie en français)*, Kiev, 1935. — *Vvedenie v nelineinuiu mehaniku*, Izd. AN USSR, 1937.
3. Боголюбов Н. Н., *O nekotórh statisticeskikh metodah v matematiceskoi fizike*, Izd. AN USSR, 1945.
4. Malkin I. G., *Nekotorie zadaci teorii nelineinuh kolebanii*, GITTL, Moskva, 1956.
5. Malkin I. G., *O rezonanse v kvazigarmoniceskikh sistemah*, PMM, XVIII, 4, 1954.

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА В СЛУЧАЕ НЕРЕЗОНАНСА

(Резюме)

В настоящей работе изучается вопрос существования, построения и устойчивости почти-периодических колебаний квазилинейного уравнения Д у ф ф и н г а [1], вида:

$$\ddot{x} + k^2x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu (\gamma x^3 - 2H\dot{x}), \quad (1)$$

где $k, \gamma > 0, a > 0, b > 0, H > 0$ — данные постоянные, μ — действительный малый параметр, ω_1 и ω_2 — постоянные, отношение которых $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ является иррациональным. Последнее предположение означает, что функция $-\overline{k f_2}(t) = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$ является почти-периодической.

На основании результатов, полученных Крыловым и Боголюбовым [2, 3] и разработанных впоследствии Малкиным [4], в работе показано, что уравнение Дuffинга (1) имеет, в случае нерезонанса, устойчивое почти-периодическое решение.

⁶Malkin I. G. [4], pag. 189 (cap. III 7).

SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE DUFFING
EN CAS DE NON-RÉSONANCE

(R é s u m é)

L'auteur étudie le problème de l'existence, de la construction et de la stabilité des oscillations presque-périodiques de l'équation quasi-linéaire de Duffing [1] de la forme :

$$\ddot{x} + k^2 x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + (\gamma x^3 - 2H\dot{x}), \quad (1)$$

où $k, \gamma > 0, a > 0, b > 0, H > 0$ sont des constantes données, μ un petit paramètre réel, ω_1 et ω_2 des constantes dont le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel. Cette dernière hypothèse signifie que la fonction $-\overline{hf_2}(t) = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$ est presque-périodique.

S'appuyant sur les résultats fondamentaux obtenus par Krilov et Bogoliubov [2,3] et développés ensuite par Malkin [4], l'auteur montre que l'équation de Duffing (1), en cas de non-résonance, possède une solution presque-périodique stable.

INFLUENȚA VARIAȚIEI FORMEI PĂMÎNTULUI ASUPRA MIȘCĂRII SALE (II)

de

I. STAN, S. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂȚAGA

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat influența variației formei Pământului asupra mișcării sale. Astfel, considerînd că inițial Pământul avea o formă sferică, datorită rotației apare o turtire la poli și o creștere la ecuator. Aceste variații se fac lent, într-un interval mare de timp, ceea ce ne-a permis să le considerăm adiabactice [2, 3].

Considerînd mișcarea liberă a Pământului, prin aplicarea teoriei invarianților adiabatici am găsit că modificarea formei sale atrage după sine o mai mare stabilitate a mișcării precum și faptul că traiectoria descrisă de vectorul viteză unghiulară într-un sistem de axe solidar cu el, este o spirală și nu un cerc cum ar fi dacă forma nu ar varia.

În realitate însă mișcarea Pământului nu este liberă, asupra ei exercitîndu-se forțe. Aceste forțe se datoresc atracției care există între Pământ, Soare și Lună în special, și care dau naștere unor momente ale forței \vec{L} . Valoarea acestui moment variază în raport cu poziția relativă a Pământului, Soarelui și Lunei, dar între anumite limite poate fi considerată constantă \vec{L}_0 .

Pentru a găsi influența modificării formei Pământului asupra mișcării sale, în prezența unor forțe exterioare de moment constant \vec{L}_0 , studiem mișcarea fără frecare a unui corp rigid în jurul unui punct fix O , pe care-l vom alege și ca origine a axelor de coordonate. Ca axe solidar legate de corp $Oxyz$, alegem axele principale de inerție ale elipsoidului de inerție, relative la punctul fix O .

Presupunem că în momentul inițial, elipsoidul de inerție se reduce la o sferă, adică momentele principale de inerție $A_0 = B_0 = C_0$ sînt egale. Într-un interval mare de timp, sub influența forțelor centrifuge, corpul se deformează așa fel încît elipsoidul de inerție devine de rotație $A=B, C$, axa Oz fiind axă de simetrie.

Variația momentelor principale de inerție se face lent și într-o manieră necunoscută. Astfel de mărimi se încadrează în definiția parametrilor adiabatici, iar rezolvarea ecuațiilor mișcării se face prin metode speciale.

Presupunem că forțele aplicate corpului rigid nu dau momente nici în raport cu axa de simetrie, nici în raport cu o dreaptă oarecare fixă, ce trece prin punctul O și pe care o luăm ca axa Oz a unui sistem fix de axe de coordonate. Introducând unghiurile lui Euler θ , φ , ψ , energia cinetică în raport cu axele solidar atașate de corp este [4,5]

$$T = \frac{1}{2} [A(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\psi}^2) + C \omega_z^2]$$

unde ω_z este proiecția vitezei unghiulare pe axa Oz dată de expresia :

$$\omega_z = \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\varphi}$$

Ecuațiile de mișcare ale lui Lagrange [4,5] sînt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= L_0 \end{aligned}$$

Primele două ecuații duc la următoarele integrale prime :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= C \omega_z = C \omega_{0z} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= A \sin^2 \theta \cdot \dot{\psi} + C \omega_z \cos \theta = \Gamma \end{aligned}$$

ω_{0z} și Γ fiind constante arbitrare. Din prima integrală rezultă faptul că proiecția ω_z a vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ este constantă. Mișcarea rigidului în care unghiul de nutație θ rămîne constant :

$$\theta = \theta_0 = \text{const.}$$

poartă denumirea de precesie regulată. Înrudită cu precesia regulată este precesia pseudo-regulată [6,4] caracterizată prin faptul că unghiul θ se deosebește foarte puțin de θ_0 și anume :

$$\theta = \theta_0 + \alpha$$

unde α este o mărime foarte mică de așa natură încît numai produsul $\alpha \omega_{0z}^2$ este o mărime neglijabilă.

În afară de aceasta se presupune că viteza unghiulară a precesiei $\dot{\psi}$ devine nulă pentru $\theta = \theta_0$.

Noi vom studia această mișcare întrucît forțele care acționează asupra solidului sînt mici, ele producînd numai mici perturbații ale mișcării.

Ecuția diferențială a precesiei pseudo-regulate este [4]

$$A\ddot{\alpha} + \frac{C^2\omega_{0z}^2}{A} \alpha = L_0. \quad (1)$$

Aceasta este ecuația de mișcare considerînd momentele principale de inerție A și C ca fiind constante, fapt adevărat pentru un interval scurt de timp. Pentru un interval mare de timp momentele principale de inerție variază cu timpul $A = A(t)$ și $C(t)$, ceea ce nu ne permite să rezolvăm ecuația (1) cu mijloace cunoscute din matematică. În acest scop aplicăm teoria invarianților adiabatici, care arată că în decursul mișcării (parametrii variînd lent) există anumite mărimi ce rămîn invariante, numite invarianți adiabatici și care permit un studiu calitativ al mișcării.

Pentru a găsi invarianți adiabatici ai mișcării descrise de ecuația (1), ca și în nota noastră anterioară vom aplica metoda lui **H. G e p p e r t** [7, 8] în care se rezolvă întii ecuația (1) considerîndu-se momentele de inerție A și C constante, iar apoi variabile.

Înainte de a rezolva ecuația (1), să facem substituția

$$\alpha = x + \frac{L_0 A}{C^2 \omega_{0z}^2} \quad (2)$$

ceea ce ne dă ecuația

$$\ddot{x} + \frac{C^2 \omega_{0z}^2}{A^2} x = 0$$

sau, introducînd notația

$$\Omega = \frac{C \omega_{0z}}{A} \quad (3)$$

obținem ecuația unui oscilator armonic

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0.$$

Considerînd Ω constant, avem ecuația

$$x = M \cos \Omega(t - t_0) \quad (4)$$

unde M și t_0 sînt constante de integrare.

Presupunînd acum că Ω , este variabil în timp, adică momentele de inerție A și C sînt considerați parametri adiabatici, printr-un calcul asemănător cu cel din [1], găsim invariantul adiabatic.

$$I = M^2 \Omega = \text{const.}$$

sau, înlocuind valoarea lui Ω (ω_{0z} și L_0 fiind constante), găsim :

$$M^2 \frac{C}{A} = \text{const.}$$

De aici se vede că la o variație adiabatică a momentelor de inerție A și C , amplitudinea mișcării M variază lent, și atunci raportul $\frac{C}{A}$ se micșorează (C descrește iar A crește).

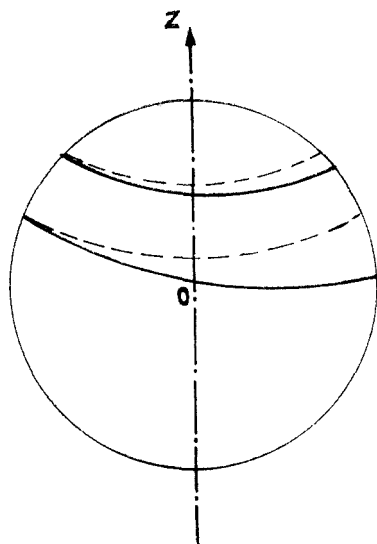


Fig. 1.

În concluzie, variația lentă (adiabatică) a formei Pământului, considerat ca un corp rigid în rotație, atrage după sine și o modificare a mișcării sale.

Astfel axa de rotație descrie pe sfera de rază-unitate o cicloidă cuprinsă între două curbe ce se îndepărtează una de alta pe măsură ce Pământul se turtește la poli.

Înlocuind expresia lui x din (4) în (2), avem :

$$x = M \cos \Omega(t - t_0) + \frac{L_0 \cdot I}{C^2 \omega_0^2}$$

iar unghiul de nutație

$$\theta = \theta_0 + M \cos \Omega(t - t_0) + \frac{L_0 \cdot I}{C^2 \omega_0^2}$$

De aici se vede că valorile maxime ale lui θ cresc pe măsură ce corpul se deformează între două valori θ_{max} și θ_{min} care sînt funcții de parametrul adiabatic A și C .

Relația găsită de noi arată că urma lăsată de axa de simetrie a corpului rigid pe o sferă cu centrul în punctul O , va fi o cicloidă sferică, care este cuprinsă între două cercuri ce sînt paralele numai pe intervale mici de timp.

Într-un interval mare de timp distanța dintre aceste cercuri se mărește.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Stan, S. Tóth, T. Penciuc, E. Bățagă, „Stud. Univ. Babeș-Bolyai” F.I, 1964, p. 105.
2. T. Levi-Civita, „Abh. Sem. Hamb. Univ.” 6, 1928, p. 323.
3. L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Moscou, 1960.
4. G. Suslov, *Mecanica rațională*, vol. 2, Ed. tehnică, 1950.
5. Z. Gabos, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele mecanicii*, Ed. Acad. R.P.R. 1962.
6. F. Klein, A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*. 1910—1921. Leipzig.
7. H. Geppert, „Acad. Naz. Lincei”, 8 (5) 1928, p. 30, 191, 294.
8. H. Geppert, „Math. Ann.” 102, 1929, p. 194.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ ЗЕМЛИ НА ЕЁ ДВИЖЕНИЕ (II)

(Резюме)

Полагая, что форма Земли изменяется медленно (адиабатически), в работе показывается, что ось вращения описывает на сфере единичного радиуса циклоиду, включенную между двумя кривыми, которые являются параллельными лишь в коротких промежутках времени. Эти кривые расходятся по мере сплюснутости Земли у полюсов.

L'INFLUENCE DE LA VARIATION DE LA FORME DE LA TERRE SUR
SON MOUVEMENT

(R é s u m é)

Les auteurs du présent travail, considérant que la forme de la Terre varie lentement (variation adiabatique), montrent que l'axe de rotation décrit sur la sphère de rayon unité une cycloïde comprise entre deux courbes qui ne sont parallèles qu'à de courts intervalles de temps et qui s'éloignent l'une de l'autre à mesure que la Terre s'aplatit aux pôles.



OBSERVAȚII ASUPRA PROPRIETĂȚILOR DE SIMETRIE ALE CÎMPULUI DIRAC

de

Z. GĂBOS și O. GHERMAN

În literatură [1], [2], [3], [5] la studiul proprietăților de simetrie ale cîmpului Dirac apar unele dificultăți. Pentru a ajunge la o interpretare similară interpretărilor obținute pentru cîmpul scalar complex, în cazul operațiilor de simetrie de bază (ogîndirea spațială, ogîndirea temporală, conjugarea de sarcină) se utilizează diferite reprezentări ale matricilor γ_μ .

După părerea noastră cauza dificultăților ivite este ca bispinorii $u_r(\vec{p})$ și $v_r(\vec{p})$ utilizați sînt funcții proprii ale operatorului $\hat{H}_p = ic\gamma_4\gamma_i\hat{p}_i + m_0c^2\gamma_4$, dar nu sînt funcții proprii ale operatorului $\hat{\Sigma}_v = \frac{1}{|\vec{p}|}(\vec{\Sigma}, \vec{p})$.

În această lucrare se arată utilitatea folosirii bispinorilor care reprezintă funcții proprii comune ale operatorilor \hat{H}_p și $\hat{\Sigma}_v$. Se ajunge astfel pe o cale naturală și directă la toate rezultatele cunoscute, rămînînd în cadrul unei singure reprezentări a matricilor γ_μ — a reprezentării lui Dirac. Se propune apoi o metodă care nu necesită cunoașterea explicită a bispinorilor u_r și v_r , și se bazează pe existența operatorilor de proiecție. Reiese astfel că rezultatele obținute în cazul reprezentării Dirac sînt valabile pentru o reprezentare arbitrară a matricilor γ_μ .

1°. Dacă impunem condițiile de normare

$$\bar{u}_r(\vec{p})u_r(\vec{p}) = 1, \quad \bar{v}_r(\vec{p})v_r(\vec{p}) = -1, \quad r = 1,2$$

unde

$$\bar{u}_r = u_r^+\gamma_4, \quad \bar{v}_r = v_r^+\gamma_4.$$

se ajunge [4] la expresiile

$$\begin{aligned}
 u_1(\vec{p}) &= N \begin{pmatrix} 1 + v_3 \\ v_1 + i v_2 \\ B(1 + v_3) \\ B(v_1 + i v_2) \end{pmatrix}, & u_2(\vec{p}) &= N \begin{pmatrix} -v_1 + i v_2 \\ 1 + v_3 \\ -B(-v_1 + i v_2) \\ -B(1 + v_3) \end{pmatrix} \\
 v_1(\vec{p}) &= N \begin{pmatrix} B(-v_1 + i v_2) \\ B(1 + v_3) \\ -(-v_1 + i v_2) \\ -(1 + v_3) \end{pmatrix}, & v_2(\vec{p}) &= N \begin{pmatrix} B(1 + v_3) \\ B(v_1 + i v_2) \\ 1 + v_3 \\ v_1 + i v_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

unde

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2}, & N &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{m_0 c^2(1 + v_3)}}, \\
 v_i &= \frac{p_i}{|\vec{p}|}, & \varepsilon &= |E|.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Aici

$u_1(\vec{p})$ corespunde unei particule (electron) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea 1,
 $u_2(\vec{p})$ corespunde unei particule (electron) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea -1 ,
 $v_1(\vec{p})$ corespunde unei antiparticule (pozitron) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea 1,
 $v_2(\vec{p})$ corespunde unei antiparticule (pozitron) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea -1 .

Expresiile (1) ale bispinorilor au fost deduse pentru valori pozitive ale componentelor vectorului \vec{p} . În cazul valorilor negative obținem din ecuația lui Dirac alți bispinori, care pot fi exprimați în funcție de primii prin relațiile

$$u_r(-\vec{p}) = \gamma_4 u_r(\vec{p}), \quad v_r(-\vec{p}) = \gamma_4 v_r(\vec{p}) \tag{3}$$

2°. Considerăm următoarele transformări: oglindirea spațială slabă (P_W), conjugarea de sarcină (C), oglindirea temporală tare (T_s), oglindirea temporală slabă (T_W), oglindirea spațio-temporală tare (R_s). Pentru aceste transformări avem [1]:

$$\begin{aligned}
 P_W: & \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_4 \psi(-\vec{r}, t), \\
 C: & \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_2 \psi^*(\vec{r}, t), \\
 T_s: & \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \psi(\vec{r}, -t), \\
 T_W: & \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_1 \gamma_3 \psi^*(\vec{r}, -t), \\
 R_s: & \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_5 \psi(-\vec{r}, -t),
 \end{aligned} \tag{4}$$

unde

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{\varepsilon}} \left[a_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} p x} + b_r(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \right] \quad (5)$$

în care $p x = \vec{p} \vec{r} - E t$.

Deoarece matricile care apar în formulele (4) acționează asupra bispinorilor, iar operatorul de conjugare complexă K acționează și asupra bispinorilor, este util să calculăm expresiile de tipul

$$w' = M \hat{K}^n w = \bar{M} w, \quad n = 0 \text{ sau } 1,$$

unde M reprezintă matricea de transformare, iar w unul din bispinorii $u_r(\vec{p})$ sau $v_r(\vec{p})$. Avem următorul tabel:

Transformarea	\bar{M}	$\bar{M} u_1(\vec{p})$	$\bar{M} u_2(\vec{p})$	$\bar{M} v_1(\vec{p})$	$\bar{M} v_2(\vec{p})$
P_W	γ_4	$u_1(-\vec{p})$	$u_2(-\vec{p})$	$v_1(-\vec{p})$	$v_2(-\vec{p})$
C	$\gamma_2 \hat{K}$	$v_1(\vec{p})$	$v_2(\vec{p})$	$u_1(\vec{p})$	$u_2(\vec{p})$ (6)
T_s	$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	$v_2(-\vec{p})$	$-v_1(-\vec{p})$	$-u_2(-\vec{p})$	$u_1(-\vec{p})$
T_W	$\gamma_1 \gamma_3 \hat{K}$	$u_2(-\vec{p})$	$-u_1(-\vec{p})$	$-v_2(-\vec{p})$	$v_1(-\vec{p})$
R_s	γ_5	$-v_2(\vec{p})$	$v_1(\vec{p})$	$u_2(\vec{p})$	$-u_1(\vec{p})$

Pentru a pune în evidență interpretarea corpusculară a transformărilor menționate, considerăm operatorul unitar τ care acționînd în spațiul numerelor de particule realizează trecerea de la ψ la ψ'

$$\psi' = \tau \psi \tau^{-1}.$$

Dacă ψ' se dă sub forma (5) avem

$$\begin{aligned} a_r'(\vec{p}) &= \tau a_r(\vec{p}) \tau^{-1}, \\ b_r^*(\vec{p}) &= \tau b_r^*(\vec{p}) \tau^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Avînd în vedere (5), (6) și că însumarea în raport cu \vec{p} se poate înlocui întotdeauna cu o însumare în raport cu $-\vec{p}$, găsim

Transformarea	$\tau a_1(\vec{p}) \tau^{-1}$	$\tau a_2(\vec{p}) \tau^{-1}$	$\tau b_1^*(\vec{p}) \tau^{-1}$	$\tau b_2^*(\vec{p}) \tau^{-1}$
P_W	$a_1(-\vec{p})$	$a_2(-\vec{p})$	$b_1^*(-\vec{p})$	$b_2^*(-\vec{p})$
C	$b_1(\vec{p})$	$b_2(\vec{p})$	$a_1^*(\vec{p})$	$a_2^*(\vec{p})$
T_s	$b_2^*(-\vec{p})$	$-b_1^*(-\vec{p})$	$-a_2(-\vec{p})$	$a_1(-\vec{p})$
T_W	$-a_2^*(-\vec{p})$	$a_1^*(-\vec{p})$	$b_2(-\vec{p})$	$-b_1(-\vec{p})$
R_s	$-b_2^*(\vec{p})$	$b_1^*(\vec{p})$	$a_2(\vec{p})$	$-a_1(\vec{p})$

Regăsim imediat următoarele rezultate cunoscute :

Transformarea P_W face să corespundă particulei (antiparticulei) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea η , o particulă (antiparticulă) cu impulsul $-\vec{p}$ și spiralitatea η .

Transformarea C face să corespundă particulei (antiparticulei) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea η , antiparticula (particula) cu aceeași \vec{p} și η .

Transformarea T_W face să corespundă particulei (antiparticulei) cu impulsul \vec{p} și spiralitatea η , particula (antiparticula) cu impulsul $-\vec{p}$ și spiralitatea $-\eta$.

Transformarea T_W transformă vectori de stare în vectori de stare duali (ket în bra și invers). Transformările P și C transformă vectorii de stare ket în ket și bra în bra.

3°. Există și o altă posibilitate pentru a ajunge la rezultatele cuprinse în tabelele (6) și (8). Să considerăm operatorii de proiecție $\hat{\Lambda}_p$ respectiv $\hat{\Sigma}_p$ care acționează asupra cuadrivectorului impuls $\left(\vec{p}, \frac{i}{c} E\right)$, respectiv asupra spiralității :

$$\hat{\Lambda}_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i A_1 c \gamma_4 \gamma_i \hat{p}_i + m_0 c^2 \gamma_4}{A_2 \varepsilon} \right) = \hat{\Lambda}_p (A_1, A_2),$$

$$\hat{\Sigma}_p = \frac{1}{2} \left(1 - i A_3 \gamma_5 \gamma_4 \gamma_i \frac{\hat{p}_i}{|\vec{p}|} \right) = \hat{\Sigma}_p (A_3), \quad \text{unde } -i \gamma_5 \gamma_4 \gamma_i = \Sigma_i.$$

A_i pot lua valorile 1 și -1 . Valorile proprii ale operatorilor de proiecție sînt 0 și 1. (Operatorii $\hat{\Lambda}_p$ și $\hat{\Sigma}_p$ comută.) Avem deci

$$\hat{O} w = w \quad (9)$$

sau

$$\hat{O}_p w = 0, \quad \text{cu} \quad \hat{O}_p = \hat{\Lambda}_p \hat{\Sigma}_p,$$

unde w reprezintă un bispinor u_r sau v_r . Dacă se consideră un bispinor, egalitatea (9) are loc pentru valori bine determinate ale lui A_i :

Bispinorul	A_1	A_2	A_3
$u_1(\vec{p})$	1	1	1
$u_2(\vec{p})$	1	1	-1
$v_1(\vec{p})$	-1	-1	-1
$v_2(\vec{p})$	-1	-1	1
$u_1(-\vec{p})$	-1	1	1
$u_2(-\vec{p})$	-1	1	-1
$v_1(-\vec{p})$	1	-1	-1
$v_2(-\vec{p})$	1	-1	1

(10)

Deoarece A_i pot lua numai valorile 1 și -1 , sînt 8 posibilități pentru a alege un sistem de trei numere $A(A_1, A_2, A_3)$ și acestea sînt tocmai cele trecute în tabelul de mai sus.

Să considerăm acum transformările P_W, C, T_S, T_W, R_S . Observăm că transformările P_W, T_S, R_S nu sînt cuplate cu operația de conjugare complexă \hat{K} , pe cînd transformările C, T_W sînt cuplate cu operația \hat{K} . În primul caz, notînd cu M matricea de transformare avem

$$\hat{O}_p w(A_i) = w(A_i)$$

și

$$w(A'_i) = Mw(A_i) \quad \text{sau} \quad w(A_i) = M^{-1}w(A'_i)$$

deci

$$\hat{O}_p M^{-1}w(A'_i) = M^{-1}w(A'_i)$$

de unde

$$M\hat{O}_p M^{-1}w(A'_i) = w(A'_i),$$

prin urmare

$$\hat{O}_p(A'_i) = M\hat{O}_p(A_i)M^{-1}. \quad (11)$$

Dacă avem o transformare cuplată cu conjugare complexă, putem scrie

$$w(A'_i) = M\hat{K}w(A_i). \quad (12)$$

Dacă în ambele părți ale relației

$$\hat{O}_p w(A_i) = w(A_i)$$

se aplică operatorul \hat{K} , obținem

$$\hat{K}\hat{O}_p w(A_i) = \hat{O}_p^* \hat{K}w(A_i) = \hat{K}w(A_i).$$

Înmulțind apoi ambele părți cu M găsim

$$M\hat{O}_p^* M^{-1} [M\hat{K}w(A_i)] = M\hat{K}(A_i),$$

prin urmare

$$\hat{O}_p(A'_i) = M\hat{O}_p^*(A_i)M^{-1}. \quad (12)$$

A'_i la fel ca și A_i pot lua valorile 1 și -1 . În consecință

$$A'_i = \chi_i A_i.$$

Valoarea numerelor χ_i se determină ușor pe baza relațiilor (11) și (12), avînd în vedere expresia concretă a operatorului $\hat{O}_p(A_i) = \hat{\Lambda}_p(A_1, A_2)\hat{\Sigma}_p(A_3)$. În urma efectuării calculelor găsim

Transformarea	\hat{K}^n n	M	χ_1	χ_2	χ_3
E	0	1	1	1	1
P_W	0	γ_4	-1	1	1
C	1	γ_2	-1	-1	-1
T_s	0	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	1	-1	1
T_W	1	$\gamma_1\gamma_3$	-1	1	-1
R_s	0	γ_5	-1	-1	1
R_W	1	$-\gamma_1\gamma_3\gamma_4$	1	1	-1
P_s	1	$\gamma_2\gamma_4$	1	-1	-1

(13)

În tabelul de mai sus E reprezintă transformarea identică, P oglindirea spațială tare ($P_s = CP_W$) și R_W oglindirea spațiotemporală slabă ($R_W = CR_s$). Transformările menționate în tabelul (13) formează un grup. Există elementul

unitate (E), inversul fiecărui element este elementul însuși, efectuând consecutiv două transformări (adică formînd produsul a două elemente) obținem un element al grupului.

Pe baza tabelelor (10) și (13) putem ajunge la datele cuprinse în tabelul (6). De exemplu să considerăm bispinorul $v_1(\vec{p})$ și să căutăm transformata acestuia pentru oglindirea temporală slabă. Avem pentru $v_1(\vec{p})$ numerele $A(-1, -1, -1)$, transformarea este caracterizată prin $\chi(-1, 1, -1)$, prin urmare transformata bispinorului $v_1(\vec{p})$ este caracterizată prin $A(1, -1, 1)$ și este $v_2(-\vec{p})$. Transformata funcției este determinată pînă la o constantă multiplicativă cu modulul 1.

Metoda operatorilor pe care am prezentat-o nu necesită cunoașterea explicită a expresiei bispinorilor $u_r(\vec{p})$ și $v_r(\vec{p})$. Reiese de aici că rezultatele obținute pe această cale sînt cu totul independente de modul în care s-a ales reprezentarea matricilor γ_μ .

4°. *Anexă.* În cele ce urmează generalizînd o metodă a lui Feynman [6] vom stabili expresia bispinorilor $u_1(\vec{p})$ și $u_2(\vec{p})$ bazîndu-ne pe proprietățile de invarianță ale ecuației lui Dirac față de transformarea Lorentz și rotațiile spațiale.

Într-un sistem de referință K'' care se mișcă împreună cu particula și are axa $O''z''$ în direcția mișcării, bispinorii $u_r(\vec{p})$ sînt funcții proprii ale operatorilor γ_4 și Σ_3 . Dacă aplicăm reprezentarea lui Dirac avem pentru sistemul K'' bispinorii

$$u_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care satisfac ecuațiile

$$\begin{aligned} \gamma_4 u_1^0 &= u_1^0, & \Sigma_3 u_1^0 &= u_1^0, \\ \gamma_4 u_2^0 &= u_2^0, & \Sigma_3 u_2^0 &= -u_2^0. \end{aligned}$$

Să considerăm transformarea

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu.$$

Ecuția lui Dirac

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0$$

este invariantă față de această transformare, dacă există matricea L , care satisface ecuațiile

$$\alpha_{\nu\mu} \gamma_\mu = L^{-1} \gamma_\nu L.$$

Referitor la transformarea funcției ψ avem

$$\psi' = L\psi.$$

Formulele de transformare Lorentz — în cazul cînd ele realizează o legătură între sistemele K și K' cu axe paralele (K' are origine comună cu K'' și se deplasează cu viteza \vec{v} față de K) sînt

$$x'_j = \left(\delta_{jk} + \frac{\beta - 1}{v^2} v_j v_k \right) x_k + i\beta \frac{v_j}{c} x_4, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$x'_j = -i\beta \frac{v_k}{c} x_k + \beta x_4, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

k este indice de insumare ($k = 1, 2, 3$). Avem în acest caz [7].

$$L = \sqrt{\frac{\beta + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\beta - 1}{2v^2}} \gamma_k \gamma_4 v_k. \quad (14)$$

În cazul unei rotații în spațiul tridimensional

$$x'_j = x_j \cos \vartheta + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (\vec{e}, \vec{r}) e_j + \epsilon_{jkl} e_k x_l \sin \vartheta$$

(ϑ este unghiul de rotație, \vec{e} versorul de pe axa de rotație, ϵ_{jkl} tensorul antisimetric față de orice pereche de indici) avem [7]:

$$L = \cos \frac{\vartheta}{2} - i (\vec{e}, \vec{\Sigma}) \sin \frac{\vartheta}{2} = \cos \frac{\vartheta}{2} - \gamma_3 \gamma_4 \gamma_k e_k \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Scopul nostru este de a da bispinorii $u_1(\vec{p})$, $u_2(\vec{p})$ pentru un sistem fix K arbitrar.

Deoarece axele sistemelor K'' și K nu sînt paralele, înainte de toate trebuiesc efectuate transformări de rotație prin care K'' se înlocuește cu sistemul K' care are axe paralele cu K . Aceasta se poate realiza prin două rotații finite. În urma unei rotații în jurul axei $O''z''$ — dacă unghiul de rotație φ este convenabil ales — printr-o rotație cu unghiul ϑ în jurul axei perpendiculare pe planul $z'O''z''$ sistemul K'' se înlocuiește cu sistemul K' , care are axe paralele cu sistemul de referințe K/ϑ este unghiul format de axele $O''z''$ și $O'z'$.

Pentru rotația în jurul axei $O''z''$ avem

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} i \frac{\varphi}{2} & & & & \\ e & 0 & 0 & 0 & \\ & -i \frac{\varphi}{2} & & & \\ 0 & e & 0 & 0 & \\ & & i \frac{\varphi}{2} & & \\ 0 & 0 & e & 0 & \\ & & & -i \frac{\varphi}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & e & \end{pmatrix}$$

În consecință

$$u_r(\varphi) = L^{-1}(\varphi)u_r^0,$$

sau

$$u_1(\varphi) = e^{-i\frac{\varphi}{2}}u_1^0, \quad u_2(\varphi) = e^{i\frac{\varphi}{2}}u_2^0.$$

Fie \vec{k} versorul de pe axa $O'z'$ a sistemului K' . Atunci

$$\vec{e} = \frac{(\vec{v} \times \vec{k})}{|(\vec{v} \times \vec{k})|}.$$

Notînd cu v_1, v_2, v_3 componentele vectorului \vec{v} în sistemul K' obținem

$$\vec{e} \left(\frac{v_3}{\sqrt{1-v_3^2}}, -\frac{v_1}{\sqrt{1-v_3^2}}, 0 \right), \quad v_3 = \cos\vartheta,$$

prin urmare

$$L(\vartheta) = \sqrt{\frac{1+v_3}{2}}1 - i\sqrt{\frac{1-v_3}{2(1+v_3)}}(v_2\Sigma_1 - v_1\Sigma_2).$$

Obținem deci

$$u_1(\varphi, \vartheta) = L^{-1}(\vartheta)u_1(\varphi), \quad u_2(\varphi, \vartheta) = L^{-1}(\vartheta)u_2(\varphi)$$

sau

$$u_1(\varphi, \vartheta) = \frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2(1+v_3)}} \begin{pmatrix} 1+v_3 \\ v_1+i v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(\varphi, \vartheta) = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2(1+v_3)}} \begin{pmatrix} -v_1+i v_2 \\ 1+v_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avem expresiile bispinorilor $u_1(\vec{p})$ și $u_2(\vec{p})$ pentru sistemul K' legat de particula în mișcare și cu axele paralele cu axele sistemului K . Urmează să aplicăm transformarea (14). Deoarece

$$\begin{aligned} L^{-1}(\vec{v}) &= \sqrt{\frac{\beta+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} \gamma_k \gamma_4 v_k = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon+m_0c^2}{2m_0c^2}} \left(1 + \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon+m_0c^2} (\alpha_k, v_k) \right), \end{aligned}$$

unde

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

obținem

$$v_1(\vec{p}) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{m_0 c^2(1 + v_3)}} \begin{pmatrix} 1 + v_3 \\ v_1 + i v_2 \\ \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2} (1 + v_3) \\ \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2} (v_1 + i v_2) \end{pmatrix}$$

$$u_2(\vec{p}) = \frac{1}{2} e^{\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{m_0 c^2(1 + v_3)}} \begin{pmatrix} -v_1 + i v_2 \\ 1 + v_3 \\ \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2} (-v_1 + i v_2) \\ \frac{c|\vec{p}|}{\varepsilon + m_0 c^2} (1 + v_3) \end{pmatrix}$$

Am regăsit astfel expresiile (1) ale bispinorilor $u_1(\vec{p})$ și $u_2(\vec{p})$.

În expresiile de mai sus figurează și factorul de fază $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$ cu modulul 1.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Roman, *Theory of Elementary Particles* (Second Edition), Amsterdam, 1961, p. 258—260, 265—270, 282—285, 290—292.
2. P. Metius, *Relativistskaia kvantovaia teoria vzaimodeistvii elementarnih ciastit* (traducere din l. engleză), Moskva, 1959, str. 54—55, 62, 73—75, 81, 92—94, 97—100.
3. R. Marșak, E. Suderșan, *Vvedenie v fiziku elementarnih ciastit* (traducere din l. engleză), Moskva, 1962, str. 54—77.
4. S. Șveber, *Vvedenie v relativistskuiu kvantovuiu teoriiu polia* (traducere din l. engleză), Moskva, 1964, str. 90—92.
5. G. Grabert, G. Lüders, G. Rolnik, *Teorema TCP i ee primeneniia*, UFN, 71 str. 289—325, 1960 (sau „Fortschritte der Physik”, 7, p. 291—328, 1959).
6. R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, New-York, 1962, p. 61—62.
A. I. Ahiezer, V. B. Berestețkii, *Kvantovaia elektrodinamika*, Izd. vtoroie, Moskva, 7. 1959, str. 75, 85.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПОЛЯ ДИРАКА

(Резюме)

В работе дается систематический анализ свойств преобразования поля Дирака. Авторы смогли найти единый способ рассмотрения всех дискретных преобразований. Для этой цели используются биспиноры, общие собственные функции оператора Гамильтона и оператора спиральности.

OBSERVATIONS SUR LES PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DU CHAMP DIRAC

(R é s u m é)

On donne dans cet article une analyse systématique des propriétés de transformation du champ Dirac, les auteurs réussissant à trouver un mode unitaire de traitement pour toutes les transformations discontinues. A cette fin, ils utilisent des bispineurs, fonctions propres communes de l'opérateur de Hamilton et de l'opérateur d'hélicité.



CONTRIBUȚIUNI LA STUDIUL FENOMENULUI DE
POLARIZARE ELIPTICĂ A UNDELOR MAGNETOHIDRO-
DINAMICE SLABE

de

R. V. DEUTSCH și M. CRISTEA

1. Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat, că undele magnetohidrodinamice sînt în general eliptic polarizate, deoarece componenta σ_{yz}^{-1} a tenzorului complex al rezistivității electrice este diferită de zero (axa Ox este considerată paralelă cu direcția cîmpului magnetic exterior). S-a obținut ecuația de dispersie

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2} - U^2 \cos^2 \theta\right) \left[\frac{\omega^4}{k^4} - (u_0^2 + U^2) \frac{\omega^2}{k^2} + u_0^2 U^2 \cos^2 \theta\right] = U^4 \left(\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2\right) \cos^2 \theta \kappa^2 \quad (1.1)$$

unde $U = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$, $\kappa = \frac{\omega c^2}{4\pi U^2} \sigma_{yz}^{-1}$, H este intensitatea cîmpului magnetic,

ρ — densitatea mediului, u_0 — viteza sunetului, θ — unghiul între \vec{k} și \vec{H} ,

ω — frecvența undei, \vec{k} — vectorul de undă și c — viteza luminii.

Ținînd cont de ecuația (1.1) din ecuațiile de bază ale magnetohidrodinamicii pentru unde slabe obținem

$$h_y = -i \kappa \frac{U^2 \left(u_0^2 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) \cos^2 \theta}{\frac{\omega^4}{k^4} - (u_0^2 + U^2) \frac{\omega^2}{k^2} + u_0^2 U^2 \cos^2 \theta} h_z \quad (1.2)$$

$$\frac{\delta'}{\delta} = -i \frac{\left[\frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{\omega^2}{k^2} - U^2 \cos^2 \theta\right) - \kappa^2 U^2 \cos^2 \theta\right] \operatorname{tg} \theta}{\kappa U^2 \left(\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 \cos^2 \theta\right)} \frac{h_z}{H} \quad (1.3)$$

unde \vec{h} este perturbația cîmpului magnetic, iar ρ' perturbația densității. În lucrarea de față vom studia amănunțit consecințele relației (1.1) pentru

valori mici ale lui θ și deasemenea pentru cîmpuri în cazul cărora $U\sqrt{1-\kappa} \ll \ll u_0 \ll U\sqrt{1+\kappa}$. Deoarece, după cum se va arăta în cazul general, și pentru undele „Alfven” eliptic polarizate $\rho' \neq 0$, se va analiza pe baza ecuațiilor (1.2) și (1.3) variația perturbației densității.

2. Deoarece undele magnetohidrodinamice corespund limitei frecvențelor joase, în toate cazurile practice $\kappa \ll 1$. De aceea se poate studia influența componentei nedigonale a tensorului $\hat{\sigma}^{-1}$ asupra proprietăților undelor magnetohidrodinamice dezvoltînd mărimile fizice caracteristice în serie în raport cu κ . Dacă $\sin\theta \gg \kappa$ proprietățile undelor prezintă numai o mică abatere de la însușirile undelor linear polarizate. [1, 2, 3].

Însă cînd $\theta \gtrsim \kappa$ situația se schimbă esențial. De aceea vom studia în primul rînd soluțiile ecuației (1.1) pentru $\theta = 0^\circ$. Acestei soluții îi va corespunde intersecția dreptei

$$y = \kappa^2(x - \lambda) \quad \left(\lambda = \frac{u_0^2}{U^2}, \quad x = \frac{\omega^2}{k^2 U^2} \right) \quad (2.1)$$

cu parabola

$$y = (x - 1)[x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda] \quad (2.2)$$

Pe fig. 1. este reprezentată această intersecție pentru diferite valori λ . Deoarece caracterul acestor intersecții variază brusc numai în domeniul $1 - \kappa < \lambda < 1 + \kappa$, pe fig. este reprezentată mai ales variația soluțiilor în interiorul acestui domeniu.

Dacă $\kappa = 0$ soluțiile ecuației (1.1) ar coincide cu intersecțiile axei Ox cu parabola (2.2). Astfel am obține trei soluții, (dintre care două coincid) corespunzătoare undelor lente, rapide și Alfven. Dacă însă $\kappa \neq 0$ soluțiile trebuie să fie obținute din intersecțiile parabolei (2.2) cu dreapta (2.1).

Cînd $U > \frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}}$ (cazul I și II), avem o soluție corespunzătoare undei lente

(A_1, A_2) care în acest caz este o undă acustică, și două soluții $x = 1 \mp \kappa$ (B_1, B_2, D_1, D_2) corespunzătoare undelor circular polarizate. Aceste ultime două soluții diferă de soluția dublă (C) pentru $\kappa = 0$. Cu cît este mai îndepărtat punctul A de $1 - \kappa$, cu atît distanța relativă a punctelor B_1 și D_1 de C este mai mică, și undele corespunzătoare intersecției $B_1 D_1$ și $B_2 D_2$ pot fi considerate ca undă Alfven și rapidă circular polarizată. Pe măsură însă ce $U \rightarrow \frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}}$ undele corespunzătoare intersecțiilor B_2 și D_2 devin tot

mai diferite de unda rapidă și Alfven. Cînd $U = \frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}}$ (cazul III.) dreapta (2.1) este tangentă la parabola (2.2) în punctul B_3 și astfel avem o soluție dublă corespunzătoare acestui punct, și o soluție simplă corespunzătoare punctului D_3 . Deci în cazul $\kappa \neq 0$ pentru $U \sim \frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}}$ apar soluții principal

diferite de cele, cu care avem de a face la $\kappa = 0$. În cazul, cînd $u_0 < U < \frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}}$ se inversează ordinea soluțiilor. Apare o soluție (intersecția B_4) deja înaintea

soluției corespunzătoare undelor lente. (A_4). Dacă $\frac{u_0}{\sqrt{1-\kappa}} < U < u_0$ unda rapidă (A_6) va avea caracterul acustic, iar la $\kappa \neq 0$ apar în loc de soluția dublă C soluțiile corespunzătoare intersecțiilor B_6 și D_6 . Deci înaintea unei unde rapide (A_6) se va propaga cu o viteză mai mare o undă circular polarizată (D_6). Astfel se vede, că din nou în domeniul de ordin de mărime $u_0^2 \kappa$ în jurul valorii u^2 (în cazul variabilei U^2) își pierde sensul denumirea întrebuințată obișnuit ($\kappa = 0$) pentru undele magnetohidrodinamice. Astfel în domeniul $\theta \lesssim \kappa$ apar unde cu caracter complet nou.

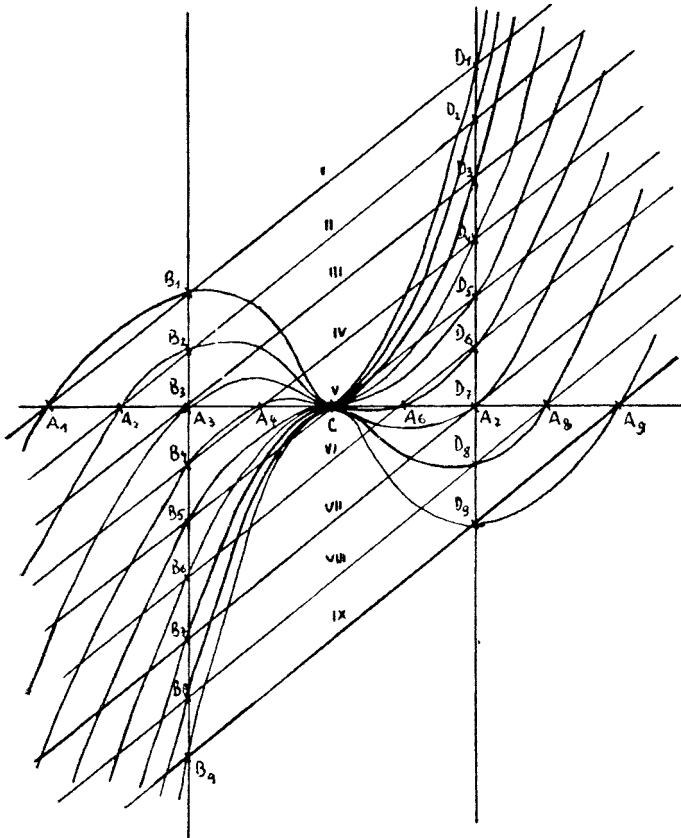


Fig. 1.

Unda corespunzătoare intersecției (A_i) parabolei cu axa Ox este totdeauna undă pur acustică, iar celelalte două, cărora le corespund intersecții aflate pe dreptele verticale $y = 1 \pm \kappa$ vor fi unde circular polarizate. Proprietățile undelor la $\kappa \neq 0$ vor fi cu atât mai apropiate de proprietățile corespunzătoare cazului $\kappa = 0$ cu cât raportul $\frac{u_0}{U}$ diferă mai mult de valoarea $(1 \pm \kappa)^{\frac{1}{2}}$.

3. Din cele precedente se poate trage concluzia, ca în cazul undelor magnetohidrodinamice în urma analizei ordinului de mărime a perturbației densității față de perturbațiile intensității cîmpului magnetic, trebuie să obținem rezultate diferite de cele pentru $\kappa = 0$. Această diferență se vede din (1.3). Conform acestei formule în cazul undelor Alfvén pentru $\sin \theta \gg \kappa$ raportul $\frac{\rho'}{h_y}$ este de ordinul doi în raport cu κ , ceea ce duce la efecte neglijabile. Avînd în vedere, că în cazul undelor magnetoacustice pentru $\sin \theta \gg \kappa$, h_y depinde linear de κ , în primă aproximație din (1.2) și (1.3) obținem

$$\frac{\rho'}{h_y} = - \frac{\frac{\omega^2}{k^2} \operatorname{tg} \theta}{\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 \cos^2 \theta} \frac{\rho}{H} \quad (3.1)$$

adică, cum era și de așteptat, o relație independentă de κ .

În domeniul $\theta \gtrsim \kappa$ pentru una dintre unde ρ' nu se anulează și limita pentru $\theta \rightarrow 0$ este independentă de κ . Această undă se propagă cu viteza de fază $\frac{\omega}{k} \sim u_0$. Dacă $\chi \rightarrow 0$ în cazul celorlalte două unde cu viteza de fază $\frac{\omega}{k} \sim u_0$, $\sqrt{1 \pm \kappa}$ perturbația ρ' se anulează independent de mărimea lui κ . Deoarece în domeniul $1 - \kappa \lesssim \lambda \lesssim 1 + \kappa$ pentru $\theta \gtrsim \kappa$ apar unde cu caracter complet deosebit de cele corespunzătoare lui $\kappa = 0$ (și tratate în literatură), nu se mai poate enunța existența în orice domeniu a undelor de tip Alfvén cu $\rho' = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. Deutsch, „Revue roumaine de physique”, 1964 (sub redacție).
2. S. I. Sirovatskii, UFN, **67**, 247 (1957).
3. V. L. Ghinzburg, *Rasprostranenie elektromagnitnih voln v plazme*, F.M., Moskva, 1960.

К ИЗУЧЕНИЮ ЯВЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СЛАБЫХ МАГНИТНОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН

(Резюме)

Изучается характер магнитногидродинамических волн в случае, когда они имеют направление очень близкое к направлению внешнего магнитного поля. В этом случае получаются (и в случае малых частот) две циркулярно поляризованные волны и одна продольная волна. Более подробно анализируется в особенности критическая область, когда скорость Алфвен очень близка к скорости акустических волн.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DU PHÉNOMÈNE DE POLARISATION ELLIPTIQUE DES ONDES MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUES FAIBLES

(R é s u m é)

Les auteurs étudient le caractère des ondes magnéto-hydrodynamiques lorsqu'elles ont une direction très rapprochée de la direction du champ magnétique extérieur. On obtient dans ce cas (comme dans le cas de fréquences faibles) deux ondes polarisées circulairement et une onde longitudinale. On analyse plus en détail surtout le domaine critique, quand la vitesse Alfvén est très rapprochée de la vitesse des ondes acoustiques.

EFACTE COLECTIVE ȘI DE DEFORMAȚIE ÎN SEMICONDUCTORI

de

IOAN STAN și ANDREI WEISSMANN

Într-o lucrare anterioară [1] am dat ecuația masei efective, în interacțiunea electron-electron, considerînd numai existența plasmonilor de valență, adică cazul unui număr relativ mic de electroni în banda de conducție, $\mathcal{N}^c \ll \mathcal{N}^v$, \mathcal{N}^c și \mathcal{N}^v fiind numărul electronilor din banda de conducție, respectiv valență. Aceasta corespunde conducției de impuritate, cînd numărul electronilor ridicați din banda de valență în cea de conducție este neglijabil.

La excitații intense, numărul electronilor din banda de conducție crește pe seama celor de valență, conductibilitatea devenind intrinsecă. Pentru lungimi de undă mai mari ca raza de ecranare, interacțiunea dintre electronii de conducție este încă bine aproximată de termenul H_{SR} dat de relația (I.6) din [1]. În cazul unor excitații de frecvențe mai mari (lungimea de undă în jurul lungimii *Debye*) interacțiunea între purtătorii de sarcină minoritari, dă naștere la efecte colective - adică la plasmoni de conducție - neglijarea cărora nu mai este justificată. Acesta este tocmai cazul semiconductorilor de tipul *Si* și *Ge*, care au o discontinuitate netă în spectrul de excitație al purtătorilor de sarcină.

Experiențele efectuate [2] arată că la *Ge* de exemplu, plasmonii de conducție sînt în domeniul undelor micro, iar cei de valență în ultravioletul îndepărtat.

Este cunoscut pe de altă parte, [3, 4] că o impuritate introdusă într-o rețea perfectă, provoacă o deformație mecanică de volum. Considerînd impuritatea ca un defect punctiform într-o rețea infinită, deformația apare ca o singularitate în centrul defectului, potențialul tensiunilor mecanice fiind de tipul funcției δ . Expresia potențialului de deformare mecanică pentru un electron în apropierea ionului de impuritate este

$$V_D = -4\pi E_c \lambda a^3 \delta(r)$$

unde E_c caracterizează mobilitatea electronului, λ coeficientul de deplasare a ionilor rețelei în jurul impurităților iar a este constanta rețelei.

Considerînd un centru de impuritate într-un semiconductor cu o bandă simplă, minimumul căreia este în centrul primei zone Brillouin ($\vec{k} = 0$), hamiltonianul sistemului de \mathcal{N} ($\mathcal{N} = \mathcal{N}^v + \mathcal{N}^c$) electroni este

$$H = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{[\vec{p}_i + \frac{e}{c} (\vec{A}^v + \vec{A}^c)]^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right\} + \int \frac{(\vec{E}^v + \vec{E}^c)^2}{8\pi} d\vec{r} + U + W_D \quad (1)$$

unde \vec{p} este operatorul impulsului electronului A , și V potențialul vector (longitudinal) și scalar, \vec{E} intensitatea cîmpului electric dintre particule, U potențialul electric produs de impuritatea punctiformă de sarcină q introdusă în origine, V_D potențialul de deformare mecanică iar m masa electronului.

Introducem cîmpul plasmonic generat de interacțiunea electron-electron, prin intermediul variabilelor de cîmp Q_k și $P_k = \dot{Q}_k$. utilizînd relațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}^v(\vec{r}_\alpha) = (4\pi c^2)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{k}^\circ Q_k^v e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} \\ \vec{A}^c(\vec{r}_\beta) = (4\pi c^2)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{k}^\circ Q_k^c e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_\beta} \\ \vec{E}^v(\vec{r}_\alpha) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^v}{\partial t} = -(4\pi)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{k}^\circ P_k^v e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} \\ \vec{E}^c(\vec{r}_\beta) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^c}{\partial t} = -(4\pi)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{k}^\circ P_k^c e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_\beta} \end{array} \right. \quad (2)$$

cu condițiile

$$Q_k^* = -Q_{-k} ; \quad P_k^* = -P_{-k}$$

În cele ce urmează vom nota prin α indicele unui electron de valență ($\alpha = 1, 2, \dots, \mathcal{N}^v$) și prin β indicele unui electron de conducție ($\beta = \mathcal{N}^{v+1}, \mathcal{N}^{v+2}, \dots, \mathcal{N}$).

Înlocuind (2) în (1) separînd termenii de scurtă rază de acțiune de cei de lungă rază de acțiune și aplicînd aproximația fazelor distribuite haotic [5] (notată prin R.P.A.) obținem hamiltonianul

$$H = H_0^v + H_0^c + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\vec{k} > k_D} \frac{2\pi e^2}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)} + U + V_D + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} < k_D} [P_k^v + P_k^c + iM_k (\rho_{-k}^v + \rho_{-k}^c)] \cdot [P_{-k}^v + P_{-k}^c - iM (\rho_k^v + \rho_k^c)]$$

unde am notat

$$H_0^v = \sum_{\alpha} \left[\frac{\hat{p}_{\alpha}^2}{2m} + V(\vec{r}_{\alpha}) \right] \quad (4)$$

$$H_0^c = \sum_{\beta} \left[\frac{\hat{p}_{\beta}^2}{2m} + V(\vec{r}_{\beta}) \right] \quad (5)$$

iar prin $\rho_k^v = \sum_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}}$ și $\rho_k^c = \sum_{\beta} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\beta}}$ fluctuațiile densității medii a electronilor de valență, respectiv conducție, iar prin M_k expresia $M_k^2 = \frac{4\pi e^2}{k^2}$.

Printr-o transformare canonică generată de funcția

$$S = e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{k < k_D} M_k (Q_k^v + Q_k^c) \rho_{-k}} \quad (6)$$

și prin neglijarea termenilor de scurtă rază de acțiune [1] obținem

$$H = H_0^v + H_0^c + H_{\text{cimp}}^v + H_{\text{cimp}}^c + H_{\text{int}}^v + H_{\text{int}}^c + H_{\text{coul}} + U + V_D \quad (7)$$

cu condițiile suplimentare

$$\begin{cases} (P_k^v - iM_k \rho_{-k}^v) \psi = 0 \\ (P_k^c - iM_k \rho_{-k}^c) \psi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} H_{\text{cimp}}^v &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} (P_k^v P_{-k}^v + \omega_p^{v2} Q_k^v Q_{-k}^v) \\ H_{\text{cimp}}^c &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} (P_k^c P_{-k}^c + \omega_p^{c2} Q_k^c Q_{-k}^c) \\ H_{\text{int}}^v &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k}{m} \sum_{\alpha} \left(\vec{p}_{\alpha} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) Q_k^v \rho_{-k}^v \\ H_{\text{int}}^c &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k}{m} \sum_{\beta} \left(\vec{p}_{\beta} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) Q_k^c \rho_{-k}^c \\ H_{\text{coul}} &= \frac{1}{2} \left\{ M_k^2 (\rho_k^v \rho_{-k}^v + \rho_{-k}^v \rho_k^v) - 2iM_k P_k^v \rho_k^c - 2iM_k P_k^c \rho_k^v \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$\omega_p^v = \left(\frac{4\pi n^v e^2}{m} \right)^{1/2}$ și $\omega_p^c = \left(\frac{4\pi n^c e^2}{m} \right)^{1/2}$ fiind frecvențele oscilațiilor colective ale cîmpului plasmonic de valență, respectiv conducție, generate de interacțiunea coulombiană de lungă rază de acțiune între electronii de valență și conducție considerați liberi.

Aproximația R.P.A impune relația

$$\omega_p^{v^2} + \omega_p^{c^2} = \frac{4\pi\mathcal{M}e^2}{m} \quad (10)$$

între frecvențele plasmonilor de valență și de conducție, relație ce exclude interacțiunea cîmpurilor de plasmoni dintr-un solid, adică oscilațiile colective de frecvențe diferite pot exista simultan într-un domeniu al rețelei cristaline dar nu pot interfera între ele. Folosind această relație (10), termenii de interacțiune foton-foton (longitudinali) dispar din hamiltonian.

Pentru a aduce hamiltonianul la o formă și mai convenabilă, eliminăm interacțiunile electron de valență-plasmon de valență, minoritar-plasmon de conducție, majoritar-minoritar și interacțiunile mixte aplicînd două transformări canonice succesive. Pentru aceasta aducem hamiltonianul (7) la forma

$$\begin{aligned} H = & H_0^v + H_0^c + \mathcal{H}_{\text{cîmp}}^v + \sum_{k < k_D} \frac{1}{2} (\omega_p^{v^2} - \omega^{v^2}) Q_k^v Q_{-k}^v + \mathcal{H}_{\text{cîmp}}^c + \\ & + \sum_{k < k_D} \frac{1}{2} (\omega_p^{c^2} - \omega^{c^2}) Q_k^c Q_{-k}^c + H_{\text{int}}^v + H_{\text{int}}^c + H_{\text{coul}} + \mathcal{U} + V_D \end{aligned} \quad (11)$$

unde am introdus notațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{cîmp}}^v &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} (P_k^v P_{-k}^v + \omega^{v^2} Q_k^v Q_{-k}^v) \\ \mathcal{H}_{\text{cîmp}}^c &= \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} (P_k^c P_{-k}^c + \omega^{c^2} Q_k^c Q_{-k}^c) \end{aligned}$$

ω^v și ω^c fiind frecvențele plasmonilor de valență și conducție în solid, adică frecvența oscilațiilor colective ale unor electroni legați, satisfăcînd relațiile [6]

$$\begin{cases} \omega^{v^2} = \omega_p^{v^2} + k^2 \langle v^{v^2} \rangle \\ \omega^{c^2} = \omega_p^{c^2} + k^2 \langle v^{c^2} \rangle \end{cases} \quad (12)$$

unde $\langle v^v \rangle$ și $\langle v^c \rangle$ sînt vitezele medii ale electronilor de valență și conducție. Condiția existenței oscilațiilor colective în benzile semiconductorului este dată de [6]

$$\begin{cases} k^2 \langle v^{v^2} \rangle \ll \omega_p^{v^2} \\ k^2 \langle v^{c^2} \rangle \ll \omega_p^{c^2} \end{cases}$$

Considerînd prima transformare dată de funcția generatoare

$$S = \sum_{k < k_D} (A_k^v P_k^v + B_k^v Q_k^v + A_k^c P_k^c + B_k^c Q_k^c)$$

unde

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_k^v)_{ll'} = M_k \left(\frac{-\omega_{ll'}^v}{\omega_{ll'}^{v2} - \omega^{v2}} \right) (\varphi_{-k}^v)_{ll'} \\ (B_k^v)_{ll'} = M_k \left(\frac{\omega_{ll'}^{v2}}{\omega_{ll'}^{v2} - \omega^{v2}} \right) (\varphi_{-k}^v)_{ll'} \\ (A_k^c)_{\lambda\lambda'} = M_k \left(\frac{-\omega_{\lambda\lambda'}^c}{\omega_{\lambda\lambda'}^{c2} - \omega^{c2}} \right) (\varphi_{-k}^c)_{\lambda\lambda'} \\ (B_k^c)_{\lambda\lambda'} = M_k \left(\frac{i\omega_{\lambda\lambda'}^{c2}}{\omega_{\lambda\lambda'}^{c2} - \omega^{c2}} \right) (\varphi_{-k}^c)_{\lambda\lambda'} \end{array} \right.$$

ll' fiind numerile cuantice ale electronilor de valență iar $\lambda\lambda'$ ale celor de conducție; și a doua de funcția generatoare

$$S = \sum_{k < k_D} [\alpha_k (P_k^v + P_k^c) + \beta_k (Q_k^v + Q_k^c) + \gamma_k^c]$$

cu

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_k)_{ll'\lambda\lambda'} = M_k \left(\frac{\omega_{ll'}^v + \omega_{\lambda\lambda'}^c}{\omega_{ll'}^{v2} + \omega_{\lambda\lambda'}^{c2} - \omega^2} \right) (\varphi_k^v + \varphi_k^c)_{ll'\lambda\lambda'} \\ (\beta_k)_{ll'\lambda\lambda'} = M_k \left(\frac{-i\omega^2}{\omega_{ll'}^{v2} + \omega_{\lambda\lambda'}^{c2} - \omega^2} \right) (\varphi_k^v + \varphi_k^c)_{ll'\lambda\lambda'} \\ (\gamma_k)_{ll'\lambda\lambda'} = M_k \left(\frac{iM_k}{\omega_{ll'}^v + \omega_{\lambda\lambda'}^c} \right) (\varphi_k^v)_{ll'} (\varphi_k^c)_{\lambda\lambda'} \end{array} \right.$$

termenii de interacțiune menționați mai sus dispar, dacă este satisfăcută relația de dispersie

$$\omega^2 - (\omega_p^2 + \omega_p'^2) = \omega_{l'0}^{v2} + \omega_{\lambda'0}^{c2} \quad (13)$$

iar constanta dielectrică statică este înlocuită cu constanta dielectrică dependentă de frecvență

$$\frac{1}{\epsilon(k, \omega)} = \frac{\omega_{ll'}^2 - \omega_{\lambda\lambda'}^2}{\omega_{ll'}^2 + \omega_{\lambda\lambda'}^2 - \omega^2} \quad (13')$$

unde $\omega^2 = \omega^{v2} + \omega^{c2}$.

Efectuînd calculele găsim

$$H = H_0^v + H_0^c + H_1^v + H_1^c + H_2 + H_3 + \mathcal{U} + V_D \quad (14)$$

unde am notat

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k^2}{\varepsilon(\hbar\omega)} (\rho_k^v \rho_{-k}^v + \rho_k^c \rho_{-k}^c) \quad (15)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k^2}{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega^2}{\omega_{ll'}^2 + \omega_{\lambda\lambda'}^2} \rho_k^v \rho_{-k}^c \quad (16)$$

iar H_1^v și H_1^c sînt $\mathcal{H}_{\text{cimp}}^v$; $\mathcal{H}_{\text{cimp}}^c$ după transformare.

Pentru a găsi masa efectivă studiem ecuația lui Schrödinger

$$(H - E)\psi = 0 \quad (17)$$

cu hamiltonianul (14).

Dezvoltînd funcția de undă ψ după un sistem complet de funcții de bază $\Phi_{n'K'N^vN^c}$

$$\psi = \sum_{n'N^vN^c} \int d\vec{K}' A(\vec{K})_{n'N^vN^c} \Phi_{n'N^vN^c\vec{K}'} \quad (18)$$

cu

$$\Phi_{n'N^vN^c} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \varphi_{n0}(\vec{r}) \psi_{N^v}(Q^v) \psi_{N^c}(Q^c)$$

unde nn' sînt numerele cuantice ale electronilor atît în banda de valență cît și în cea de conducție, $\psi_{N^v}(Q^v)$ și $\psi_{N^c}(Q^c)$ fiind funcțiile de undă ale lui H_1^v respectiv H_1^c de forma

$$\psi_{N^v}(Q^v) = \prod_K \psi_{N_K^v}(Q^v)$$

$$\psi_{N^c}(Q^c) = \prod_K \psi_{N_K^c}(Q^c)$$

N_K^v, N_K^c fiind numerele cuantice ale oscilatorilor de coordonate Q_K^v, Q_K^c iar $\psi_{N_K^v}, \psi_{N_K^c}$ funcțiile de undă corespunzătoare.

Condiția de ortonormalitate este

$$(\Phi_{n\vec{K}N^vN^c}, \Phi_{n'\vec{K}'N^vN^c}) = \delta_{nn'} \delta_{N^vN^v} \delta_{N^cN^c} \delta(\vec{K}' - \vec{K}). \quad (19)$$

Calculul lui (17) ținînd cont de (18) și (14) se face ca în [1] în, ceea ce privește termenii H_0^v, H_0^c, H_1, H_2 și \mathcal{U} , iar în ceea ce privește H_3 avem

$$\begin{aligned} & (nKN^vN^c | H_3 | n'K'N^vN^c) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k < k_D} \frac{M_k^2}{\varepsilon(\hbar, \omega)} \frac{\omega^2}{\omega_{ll'}^2 + \omega_{\lambda\lambda'}^2} \rho_k^v \rho_{-k}^c \delta_{nn'} \delta_{N^vN^v} \delta_{N^cN^c} \delta(\vec{K}' - \vec{K}) \end{aligned} \quad (20)$$

și pentru V_D după [7]

$$(nKN^vN^c | V_D | n'K'N^vN^c) = V_D (\vec{K}' - \vec{K}) \delta_{nn'} \delta_{N^vN^v} \delta_{N^cN^c} \quad (21)$$

Înlocuind aceste valori în (18) și trecînd la reprezentarea \mathbf{r} [1] obținem

$$[E_{nN^vN^c}(-i\nabla) + U_{TOT}]F_{nN^vN^c}(\vec{r}) = EF_{nN^vN^c}(\vec{r}) \quad (22)$$

unde $E_{nN^vN^c}$ este dezvoltarea în serie a lui $E_{nN^vN^c}(\vec{k})$ după puterile lui $(\vec{k}) \rightarrow -i\nabla$. Ținînd cont de (12) obținem în mod analog ca în [1]

$$\begin{aligned} E_{nN^vN^c}(-i\nabla) = & \sum_{k < k_D} \left\{ E_n + \frac{\hbar}{2} \omega_p^v \left[\sqrt{(N^v + 1)(N^{v'} + 1)} + \sqrt{N^v N^{v'}} \right] \delta_{N^v N^{v'}} + \right. \\ & + \frac{\hbar}{2} \omega_p^c \left[\sqrt{(N^c + 1)(N^{c'} + 1)} + \sqrt{N^c N^{c'}} \right] \delta_{N^c N^{c'}} + \\ & + \frac{K_\alpha K_\beta}{2} \left[\left(\frac{1}{m} + \frac{\langle v^2 \rangle}{\hbar \omega_p^v} \left(\sqrt{(N^v + 1)(N^{v'} + 1)} + \sqrt{N^v N^{v'}} \right) \delta_{N^v N^{v'}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\langle v^2 \rangle}{\hbar \omega_p^c} \left(\sqrt{(N^c + 1)(N^{c'} + 1)} + \sqrt{N^c N^{c'}} \right) \delta_{N^c N^{c'}} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{m^2} \sum_{n'} \frac{(\Delta^\alpha)_{nn'} (\Delta^\beta)_{n'n}}{\omega_{nn'}} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

U_{TOT} reprezintă energia potențială totală, coulombiană ecranată, perturbatoare de impuritate și de deformare mecanică

$$U_{TOT} = \frac{M_k^2}{2\varepsilon(\vec{k}, \omega)} (\rho_k^v \rho_{-k}^v + \rho_k^c \rho_{-k}^c) + U + V_D \quad (24)$$

ar $F_{nN^vN^c}$ este soluția ecuației masei efective (22).

Urmînd raționamentul din [1] se găsește regula sumei f

$$\delta_{\alpha\beta} + \frac{2\mathcal{M}_{N^vN^c}}{m^2} \sum_{n' \neq n} \frac{(\nabla^\alpha)_{nn'} (\nabla^\beta)_{n'n}}{E_{n'} - E_n} - \mathcal{M}_{N^vN^c} \frac{\partial^2 E(\vec{k})}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} = 0 \quad (25)$$

unde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{M}_{N^vN^c}} = & \frac{1}{m} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2\hbar \omega_p^v} \left[\sqrt{(N^v + 1)(N^{v'} + 1)} + \sqrt{N^v N^{v'}} \right] \delta_{N^v N^{v'}} + \\ & + \frac{\langle v^2 \rangle}{2\hbar \omega_p^c} \left[\sqrt{(N^c + 1)(N^{c'} + 1)} + \sqrt{N^c N^{c'}} \right] \delta_{N^c N^{c'}} \end{aligned} \quad (26)$$

iar deplasarea nivelului fundamental, din cauza interacțiunii minoritar-minoritar și majoritar-majoritar va fi

$$\begin{aligned} E'_{0N^vN^c}(0) = & E_{000}(0) - \frac{\hbar}{2\omega_p^v} \left[\sqrt{(N^v + 1)(N^{v'} + 1)} + \sqrt{N^v N^{v'}} \right] \delta_{N^v N^{v'}} - \\ & - \frac{\omega}{2\omega_p^c} \left[\sqrt{(N^{c'} + 1)(N^c + 1)} + \sqrt{N^c N^{c'}} \right] \delta_{N^c N^{c'}} \end{aligned} \quad (27)$$

Din calculele de mai sus rezultă o regulă a sumei f (25) mult mai completă decât cea cunoscută din literatură [7] întrucât ea conține efectele colective de interacțiune electron-electron reflectate în expresia masei efective (26).

Masa efectivă depinde de numerile cuantice ale plasmonilor de valență și de conducție, ceea ce arată că masa purtătorilor de sarcină (electronii efectivi) în diferitele benzi ale solidului depinde pe lângă viteza lor și de interacțiunea cu câmpul oscilațiilor colective.

Efectele colective considerate mai sus, acționează și asupra nivelului energetic fundamental deplasându-l, deplasare ce depinde deasemenea de numerile cuantice ale câmpului plasmonic și care se reduce la expresia cunoscută din literatură, neglijându-se aceste interacțiuni.

În ceea ce privește potențialul de deformare mecanică observăm că nu produce nici un efect asupra masei electronului și a nivelului fundamental, fapt ce denotă o comportare opusă potențialului electric de impuritate. Aceasta se datorește după părerea noastră, fie faptului că metodă aplicată este insuficientă punerii în evidență a acestui efect, fie faptului că plasmonii nu interacționează cu acest potențial.

Shinohara. [4] considerând potențialul de deformare ca un termen perturbator găsește că masa electronului și nivelul energetic fundamental sînt influențate dar el nu consideră efectele de interacțiune colectivă.

Considerarea pe lângă a plasmonilor de valență și a celor de conducție arată de asemenea, că într-un domeniu al rețelei cristaline pot exista simultan oscilații colective de frecvențe diferite, dar ele nu pot interfera, între frecvențele electronilor liberi și legați existînd relația de dispersie (13)

De asemenea constanta dielectrică statică se înlocuiește printr-o constantă dielectrică dependentă de frecvență (13').

BIBLIOGRAFIE

1. A. Weissman, I. Stan, „Phys. LETTERS” 1964 oct. (in press).
2. A. Dreselhaus, I. Kipp, C. Kittel, „Phys. Rev.” **100**, 1955, p. 618.
3. C. Barden, M. Shockley, „Phys. Rev.” **80**, 1954, p. 1488.
4. S. Shinohara, „Nuovo Cimento” **XXII**, 1, 1961, p. 18.
5. D. Bohm, D. Pines, „Phys. Rev.” **85**, 1952, p. 338.
6. D. ter Haar, *Introduction to the Physics of Many-Body Systems*. New-York, 1958.
7. M. Luttinger, W. Kohn, „Phys. Rev.” **97**, 1955, p. 869.

КОЛЛЕКТИВНЫЕ И ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ (Резюме)

В работе изучаются эффекты деформационного и примесного потенциала, а также действие электронов проводимости на движение эффективного электрона. Введя поле плазмонов проводимости помимо поля плазмонов валентности и деформационный потенциал, образованный благодаря механическим напряжениям, появляющимся вокруг примеси, получаются законы интерференции фотон-фотон в твердых телах, соотношение дисперсии частот коллективных колебаний, передвижение основного энергетического уровня и уравнение эффективной массы.

EFFETS COLLECTIFS ET DE DÉFORMATION DANS DES SEMI-CONDUCTEURS

(R é s u m é)

Les auteurs étudient les effets du potentiel de déformation et d'impureté, ainsi que l'action des électrons de conduction sur le mouvement de l'électron effectif. En introduisant le champ des plasmons de conduction à côté du champ des plasmons de valence et du potentiel de déformation dû aux tensions mécaniques qui apparaissent autour d'une impureté, on obtient les lois d'interférence photon-photon dans les solides, la relation de dispersion des fréquences des oscillations collectives, le déplacement du niveau énergétique de base et l'équation de la masse effective.



DEPENDENȚA DE TEMPERATURĂ A SPECTRULUI DE RES A IONULUI DE CU(II) ÎN ZEOLIȚI

de

A. NICULA, GH. CRISTEA

În studiile noastre de rezonanță electronică de spin (RES) a unor ioni paramagnetici din grupa fierului introduși în zeoliți de tip *X* și *Y* sub formă policristalină, am obținut rezultate noi cu privire la comportarea acestor ioni în câmpuri electrice cristaline de diferite simetrii [1], [2], [3]. Modificarea și controlul câmpului electric cristalin s-a făcut printr-o activare (tratare termică) a probelor la diferite temperaturi.

Avînd în vedere anizotropia pe care o prezintă constantele din hamiltonianul de spin care descrie starea energetică a ionului de Cu(II) (cu spinul electronic $S = 1/2$ și cel nuclear $I = 3/2$) în câmpuri cristaline de simetrie axială, atenția noastră a fost îndreptată, îndeosebi, asupra acestui ion. În această lucrare se cercetează dependența formei liniei de RES a ionului de Cu(II) de temperatura din cavitatea rezonatoare. Se cercetează de asemenea dependența de temperatura din cavitate a constantelor de structură din hamiltonianul de spin.

Tehnica experimentală.

Probele studiate. Ca mediu diamagnetic pentru cercetarea RES a ionului de Cu(II) sînt folosiți zeoliți de tip *Y*, care au celula elementară $\text{Na}_{56}[\text{AlO}_2]_{56}(\text{SiO}_2)_{136}$. Proprietățile structurale ale acestor zeoliți, (site moleculare) sînt bine cunoscute în literatură [4] [5]. Introducerea ionilor de Cu(II) în rețeaua zeolitului s-a făcut folosind tehnica schimbului de ioni, utilizînd o soluție de $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ de diferite concentrații. După schimb, probele au fost spălate cu apă distilată și apoi uscate la 100°C , timp de 12 ore. Concentrația ionilor de Cu(II) în zeoliți a fost de 22, 17, 16, 8, 4, și 0,3 ioni pe celula elementară. Această concentrație a fost determinată prin analize chimice și prin metode RES. Măsurătorile au fost efectuate în regim dinamic de temperatură, variîndu-se temperatura din cavitate de la 15°C pînă la 200°C .

Instalația experimentală. Măsurătorile au fost făcute în instalația JES-3B. S-a lucrat în condiții de modulare de înaltă frecvență (100 KHz) cînd sensibilitatea instalației este de $2 \cdot 10^{11}$ spini/gauss. Electromagnetul

cu un întrefier de 60 mm, are diametrul de 300 mm și omogenitatea câmpului de 10^{-6} . Intensitatea câmpului permite un baleaj maxim de ± 300 gauss într-un timp reglabil în 5 trepte de la 5 minute la 2 ore. Măsurarea câmpului magnetic a fost efectuată cu un gauss-metru protonic.

Partea de microunde are un clystron care lucrează în banda X (9,5 KMHz) și o cavitate rezonatoare TE_{102} , tip reflex, având un factor de calitate $Q = 4135$. Frecvența microundelor a fost măsurată cu o cavitate etalonată la o precizie de $2 \cdot 10^{-5}$.

Cu ajutorul instalației JES VT-2, s-a variat temperatura cavității cu o precizie de $\pm 1^\circ\text{C}$ în intervalul de temperatură de la 10 la 200°C . Temperatura a fost măsurată cu un termocuplu Cu - Constantan.

Folosind detecția de fază au fost înregistrate derivatele curbelor de absorbție. Cu același înregistrator se înregistrează și temperatura din cavitate.

Date experimentale.

Dependența de temperatură a semnalului de RES a ionului de Cu(II) s-a studiat în detaliu la probele cu zeoliți de tip Y. Când probele sînt complet hidratate (la temperatura camerei), ele dau un semnal de rezonanță simetric, (pentru toate concentrațiile) cu $g = 2,159$ și lățimea liniei cuprinsă între 153,4 și 137,8 gauss. Răcind proba care conține 4 ioni de Cu(II) pe celula elementară la temperatura de -182°C spectrul acesteia devine asimetric avînd absorbția din banda paralelă a câmpului magnetic de aproximativ trei ori mai mică decît absorbția din banda perpendiculară a câmpului magnetic. Această descreștere în amplitudinea curbei de absorbție, a fost compensată printr-o creștere a lățimii liniei de rezonanță. Totodată în banda paralelă a câmpului magnetic au apărut clar două piscuri ale structurii hiperfine separate prin constanta $A = 0,0157 \text{ cm}^{-1}$. Cu ajutorul acestor

piscuri se pot determina pozițiile celorlalte două piscuri (nerezolvate) asociate benzii paralele a câmpului magnetic. S-a calculat factorul g_{\parallel} al acestei benzi și s-a găsit valoarea 2,331.

Cele 6 probe au fost cercetate la temperaturi cuprinse între $15-200^\circ\text{C}$. În fig. 1 se arată cum depinde de temperatură lățimea liniei și intensitatea semnalului de absorbție. Din figură se vede că intensitatea de absorbție crește pînă la temperatura de aprox.

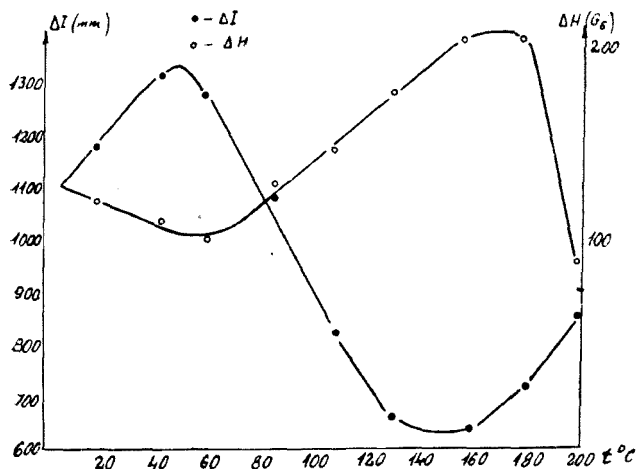


Fig. 1. ● — Dependența amplitudinii semnalului de temperatură.
○ — Dependența lățimii liniei de temperatură.

55°C după care descrește și la temperatura de 150°C începe să crească din nou. Lărgimea liniei variază cu temperatura în sens invers (vezi fig. 1) comportării intensității de absorbție. Ea descrește pînă la 55°C apoi crește și pe la 170°C începe să descrească din nou. Măsurătorile fiind făcute în aer, grupul liniilor de structură hiperfină din banda paralelă (pentru proba cu 4 ioni de Cu(II) pe celula elementară) nu apare la 100°C, ca și în cazul activării la 100°C în vid ci apare la o temperatură de 170°C (temperatură de cavitate). Chiar la temperatură de cavitate de 200°C nu s-a putut pune în evidență grupul de structură hiperfină din banda perpendiculară. Spectrul de RES a ionului de Cu(II) în zeoliți de tip Y la temperatura din cavitate de 200°C este redat în fig. 2. Din acest spectru s-au determinat

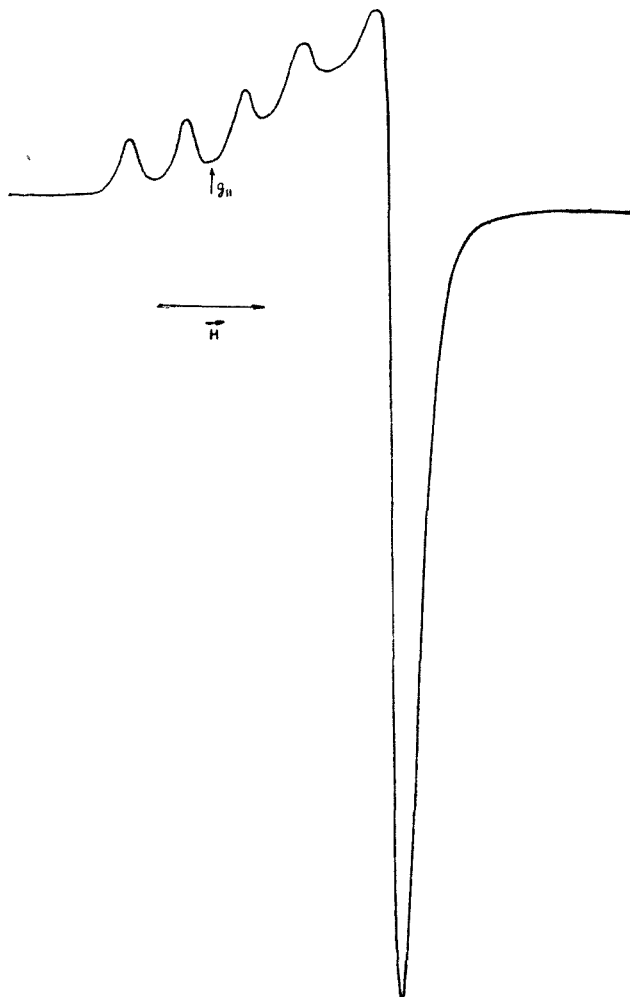


Fig. 2. Spectrul de r.e.s. al probei cu patru ioni de Cu (II) pe celula elementară la 200°C.

constantele de structură hiperfină $A = 0,0110 \text{ cm}^{-1}$ și factorii $g_{\parallel} = 2,322$ și $g_{\perp} = 2,030$.

După răcirea probei de la 200°C la 16°C semnalul de rezonanță prezintă o rezoluție foarte bună a celor patru linii de structură hiperfină din banda paralelă fig. 3. Deasemeni prin revenire la temperatura de 16°C absorbția din banda perpendiculară crește foarte mult. Constantele acestui spectru sînt $A = 0,0120 \text{ cm}^{-1}$ $g_{\parallel} = 2,335$ și $g_{\perp} = 2,019$.

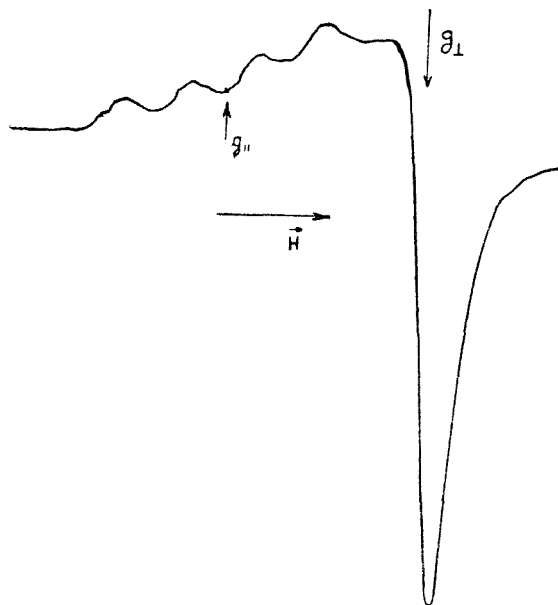


Fig. 3. Spectrul de r.e.s. al probei cu patru ioni de $\text{Cu}(\text{II})$ pe celula elementară, readus la 16°C .

În timpul cercetării dependenței de temperatură a semnalului de RES s-a observat că pe măsura creșterii temperaturii, simetria semnalului crește, (inițial semnalul prezintă o ușoară asimetrie) ca apoi la temperaturi mai ridicate simetria să scadă foarte mult fig. 4. După revenirea la temperatura camerei semnalul de RES prezintă cea mai puternică anizotropie. Dependența formei liniei de RES de temperatură pentru probele cu zeoliți de tip X, urmează aceleași legi ca și pentru cele cu zeoliți de tip Y.

Discuții și concluzii.

Din rezultatele experimentale se constată că variind temperatura în cavitatea care conține proba la presiune atmosferică semnalul de RES prezintă două aspecte extreme. Probele cu concentrații mari de ioni de $\text{Cu}(\text{II})$ (22, 18 ioni pe celula elementară) dau spectre simetrice la orice temperatură.

Lărgimea liniei și intensitatea semnalului de absorbție variază cu temperatura la fel ca și pentru probele cu concentrații mici în ioni de Cu(II) fig. 1. Pe măsură ce temperatura crește probele cu concentrații mici de ioni paramagnetici prezintă o anizotropie pronunțată a semnalului de RES. Această anizotropie apare la temperaturi de cavitare mai ridicate decât temperatura de activare a probelor respective în vid. La temperatura camerei anizotropia slabă a semnalului de RES (fig. 4) se explică prin faptul că ionii de Cu(II) se află înconjurat de apă în cavitățile zeolitului care dau un câmp de simetrie sferică cu o mică componentă axială. Pe măsură ce temperatura crește mo-

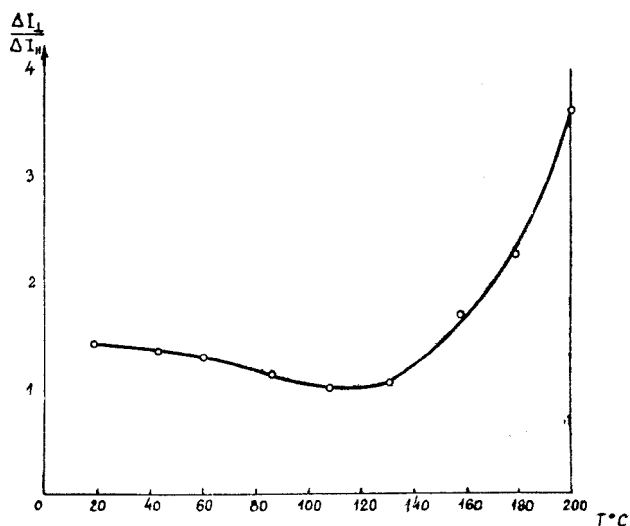


Fig. 4. Dependența de temperatură a asimetriei spectrului de r.e.s.

bilitatea ionilor de Cu(II) crește și deci și caracterul haotic al coordonării moleculelor de apă crește. Prin urmare simetria semnalului crește (110°C). La temperaturi mai ridicate moleculele de apă părăsesc cavitățile zeolitului într-un număr foarte mare și ionii de Cu(II) se apropie din ce în ce mai mult de locurile cationice din aceste cavități. Astfel anizotropia semnalului crește și în aceste condiții (200°C), apar liniile de structură hiperfină din banda paralelă a câmpului magnetic. Totuși această temperatură este insuficientă pentru a face posibilă apariția grupului de linii de structură hiperfină din banda perpendiculară. Revenind la temperatura camerei răcirea făcându-se într-un timp scurt (cîteva minute) cantitatea de apă absorbită este neglijabilă. Susceptibilitatea magnetică a ionilor paramagnetici la această temperatură (16°C) este mult mai mare decât la 200°C ceea ce duce la o creștere puternică a amplitudinii semnalului și prin aceasta la o rezolvare mai bună a structurii hiperfine din banda paralelă.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Nicula, D. Stamieres, J. Turkevich, „Report. Dep. Chem. Princeton University”, N.J., U.S.A. 1963.
2. I. Ursu, A. Nicula, „Rev. Phys.” (sub tipar), 1964.
3. A. Nicula, „Studia Univ. Babeş-Bolyai” Cluj, (sub tipar), 1964.
4. R. L. Bransard, D. P. Shoemaker, „J. Am. Chem. Soc.” **82**, 1039 (1960).
5. D. E. Freeman, D. N. Stamieres, „J. Chem. Phys.” **35**, 799 (1961).

ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ СПЕКТРА ЭСР ИОНА Cu (II) В ЦЕОЛИТАХ

(Р е з ю м е)

В работе приводятся результаты исследований относительно зависимости от температуры резонансного поглощения иона меди (II) в цеолитах и делается сравнение с предыдущими результатами, касающимися зависимости этого поглощения от температур активации.

Результаты измерений показывают поведение, подобное поглощению иона меди (II) в цеолитах, но сверхтонкая структура из параллельной полосы не проявляется при температуре 100°C (температура активации), а при 170°C (температура полости). При этой температуре смогли определить постоянные сверхтонкой структуры и факторов g_{\parallel} и g_{\perp} , получив следующие результаты: $A = 0,0110$ см, $g_{\parallel} = 2,322$ $g_{\perp} = 2,030$.

При возвращении к комнатной температуре посредством охлаждения, амплитуда сигнала гораздо больше, а решение сверхтонкой структуры на много лучше.

LA DÉPENDANCE DE LA TEMPÉRATURE DU SPECTRE DE RES DE L'ION DE CU (II) DANS LES ZÉOLITHES

(R é s u m é)

Les auteurs exposent les résultats de leurs recherches sur la dépendance de la température d'absorption par rapport à la résonance de l'ion de cuivre (II) dans les zéolithes et ils les comparent avec les résultats antérieurs relatifs à la dépendance de cette absorption par rapport aux températures d'activation.

Les résultats des mesures font ressortir un comportement similaire de l'absorption de l'ion de cuivre (II) dans les zéolithes; cependant la structure hyperfine de la bande parallèle n'apparaît pas à la température de 100°C (température d'activation) mais à celle de 170°C (température de cavité). A cette température on a pu déterminer aussi les constantes de structure hyperfine pour les facteurs g_{\parallel} et g_{\perp} ; on a obtenu les résultats suivants: $A = 0,0110$ cm⁻¹, $g_{\parallel} = 2,322$ et $g_{\perp} = 2,030$.

En revenant à la température de la pièce par refroidissement, l'amplitude du signal est bien plus considérable et la résolution de la structure hyperfine bien meilleure.

STUDIUL SPECTRULUI DE REZONANȚĂ ELECTRONICĂ DE SPIN A IONULUI DE V^{+3} ÎN CORINDON (Al_2O_3)

de
GIL. CRISTEA

După cum se știe [1], pe nivelul $3d$ ionul de V^{+3} are doi electroni neîmperechiați. Starea fundamentală a acestui ion este 3F_2 de unde rezultă că spinul electronic $S = 1$, iar momentul orbital $L = 3$. În monocristalul de Al_2O_3 ionul de V^{+3} înlocuiește izomorf ionii de Al^{+3} , astfel că fiecare ion al vanadiului este înconjurat de 6 molecule de oxigen care formează un octaedru deformat puțin după axa Z . În urma acestei deformări, peste câmpul de simetrie cubică, se suprapune un câmp slab de simetrie tetragonală.

Sub influența câmpului cristalin de simetrie cubică, degenerarea de gradul 7 după orbită este ridicată parțial, astfel, că apar doi tripleți inferiori și un singlet superior. [2] [3], așa cum este arătat în fig. 1. Componenta tri-

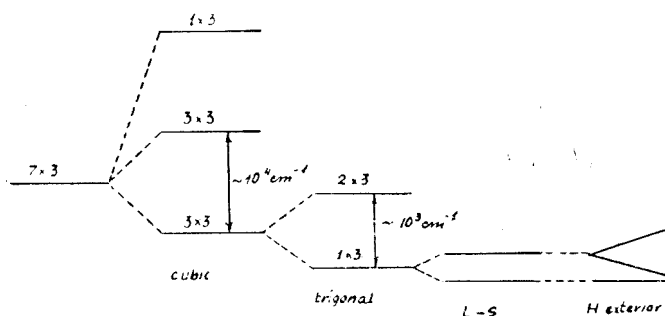


Fig. 1. Diagrama de despicare a nivelelor energetice a ionului V^{+3} în Al_2O_3 .

gonală a câmpului cristalin despică în continuare tripletul inferior într-un dublet superior și un singlet inferior. Sub influența cuplajului spin-orbită, degenerarea triplă după spin a singletului inferior este perturbată, creindu-se un dublet de spin superior și un singlet inferior, diferența de energie dintre

ele fiind de ordinul 7 cm^{-1} . Dacă mai apare o componentă rombică a câmpului cristalin, din teorie [4], rezultă că degenerarea de spin se ridică complet. De fapt, acesta este cazul real al ionului de V^{+3} în coridon. Nivelele de energie ale ionului în câmpul cristalin care are și o mică componentă rombică se pot vedea pe fig. 2.

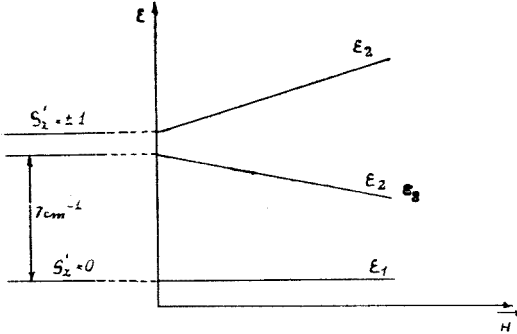


Fig. 2. Efectul de despicare a câmpului cristalin de asimetrie rombică.

deci numai tranziția $\varepsilon_2 \leftrightarrow \varepsilon_3$, între nivelele despicate proporțional cu câmpul magnetic exterior, supusă regulii de selecție ($|\Delta M| = 2$). Rezolvarea spectrului, din cauza lărgimii liniei, [2] se poate obține numai la temperatura heliului lichid, concentrația ionilor de vanadiu fiind 0,13%. În aceste condiții se rezolvă și structura hiperfină corespunzătoare ionului V^{51} compusă din opt linii, întrucât spinul nuclear este $I = 7/2$.

Pentru determinarea nivelelor de energie s-a folosit hamiltonianul corespunzător cazului simetriei axiale peste care se suprapune o perturbare a unui câmp de simetrie rombică și care are forma :

$$\hat{H} = g_{\parallel} \beta H_z S'_z + g_{\perp} \beta (H_x S'_x + H_y S'_y) + D \left[S_x'^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + AS'_x I'_x + B(S'_x I'_x + S'_y I'_y) + E(S_x'^2 - S_y'^2) \quad (1)$$

unde S'_x , S'_y , S'_z , sînt proiecțiile spinului electronic efectiv, I_x , I_y , I_z — proiecțiile spinului nuclear, $\beta = \frac{h}{2mc}$ — magnetonul Bohr, D — constanta despicării în câmp exterior nul, E — constanta câmpului rombic, iar A și B — constantele de structură hiperfină.

Deoarece în lucrare ne ocupăm numai de structura fină, ometem termenii de interacțiune cu nucleul. Deasemeni neglijăm termenul constant în D , care produce doar o deplasare în jos a tuturor nivelelor energetice cu mărimea $2D/3$. Pentru simplificarea calculului, avînd în vedere că nivelele de energie nu trebuie să depindă de orientarea sistemului de coordonate, rotim axele de coordonate pînă cînd câmpul magnetic exterior va fi conținut în planul

yOz și astfel. $H_x = 0$, $H_z = H \cos \theta$ și $H_y = H \sin \theta$. În aceste condiții hamiltonianul de spin se scrie :

$$\hat{H}_s = g_{\parallel} \beta H \cos \theta S'_x + g_{\perp} \beta H \sin \theta S'_y + DS'^2_x + E(S'^2_x - S'^2_y) \quad (2)$$

Folosind matricile de spin pentru $S = 1$.

$$S'_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S'_y = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad S'_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

scriem hamiltonianul de spin sub formă matricială. Aplicînd apoi metoda perturbațiilor și reținînd termenii de primă aproximație ajungem la ecuația seculară care are următoarea formă :

$$\begin{vmatrix} a + D - \varepsilon - \frac{i}{\sqrt{2}}b & E \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}b & -\varepsilon - \frac{i}{\sqrt{2}}b \\ E & -\frac{i}{\sqrt{2}}b - a + D - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

unde $a = g_{\parallel} \beta H \cos \theta$ și $b = g_{\perp} \beta H \sin \theta$.

Prin rezolvarea determinantului (3) primim ecuația :

$$\varepsilon[(D - \varepsilon)^2 - a^2] + b^2(D - \varepsilon + E) = 0 \quad (4)$$

de gradul trei în ε , care are trei rădăcini nebanale, reprezentînd cele trei nivele de energie ε_1 , ε_2 și ε_3 ale ionului de V^{+3} în cristalul de Al_2O_3 . Pentru ușurința rezolvării acestei ecuații considerăm $D \gg g_{\parallel} \beta H$, $g_{\perp} \beta H$ și $g_{\parallel} \beta H \gg E$, A , B , așa cum se arată în [1]. Cu aceste condiții ecuația (4) devine

$$\varepsilon(D - \varepsilon)^2 + b^2(D - \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

și are soluțiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= D \\ \varepsilon_2 &= D + \frac{g_{\perp}^2 \beta^2 H^2 \sin^2 \theta}{D} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{g_{\perp}^2 \beta^2 H^2 \sin^2 \theta}{D} \end{aligned} \quad (6)$$

Pentru o valoare constantă a unghiului θ , care este unghiul dintre direcția cîmpului magnetic exterior H și axa de simetrie a cîmpului cristalin, luată drept axă Oz ; de ex. pentru $\theta = 90^\circ$, dependența poziției nivelelor de

energie a ionului V^{+3} de câmpul magnetic exterior este cea prezentată în fig. 4e. În fig. 4 am luat drept unitate de energie valoarea constantei D , astfel că punem peste tot $D = 1$, în reprezentările grafice.

Să determinăm nivelele de energie în aproximațiile arătate pentru alte valori ale unghiului θ , constante, pentru care este posibilă rezolvarea simplă a ecuației (4) și să vedem cum depinde poziția nivelelor de energie de unghiul θ . Ecuația (4) sub formă generală se poate scrie astfel :

$$\varepsilon(D - \varepsilon)^2 - (g_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + g_{\perp}^2 \sin^2 \theta) \beta^2 H^2 \varepsilon + g_{\perp}^2 \beta^2 H^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (7)$$

a) $\theta = 0$. Ecuația (7) devine

$$\varepsilon(D - \varepsilon)^2 - g_{\parallel}^2 \beta^2 H^2 \varepsilon = 0 \quad (8)$$

și are soluțiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_2 &= D + g_{\parallel} \beta H \\ \varepsilon_3 &= D - g_{\perp} \beta H \end{aligned} \quad (9)$$

care reprezentate grafic în funcție de câmpul magnetic exterior se prezintă ca în figura 4a.

b) $\theta = 45^\circ$. Ecuația (7) devine

$$2\varepsilon(D - \varepsilon)^2 - a^2\varepsilon - b^2(D - \varepsilon) = 0 \quad (10)$$

iar rezolvarea ei se face printr-o metodă grafică. Descompunem (10) în două părți și notăm $Y_1 = 2\varepsilon(D - \varepsilon)^2$; $Y_2 = (a^2 + b^2)\varepsilon - b^2D$. Căutînd valoarea maximă a lui Y_1 , în funcție de energie avem :

$$\frac{dY_1}{d\varepsilon} = 2(D - \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(D - \varepsilon) = 0$$

de unde $Y_{1\min} = 0$ pentru $\varepsilon = D$ iar $Y_{1\max} = 8D/27$ pentru $\varepsilon = D/3$. Pentru a găsi soluțiile care satisfac ambele ecuații Y_1 și Y_2 trebuie să găsim punctele de intersecție ale dreptei Y_2 cu, curba de gradul trei Y_1 , așa cum se arată în fig. 3. Considerăm $Y_2 = 0$ și găsim punctul de intersecție al dreptei cu axa

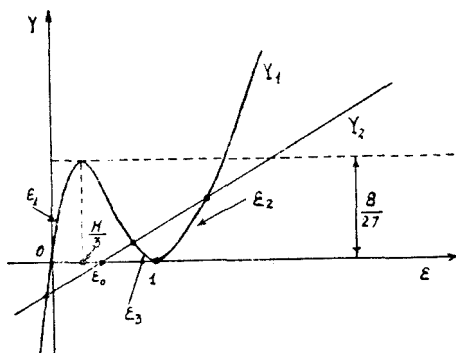


Fig. 3. Rezolvarea grafică a ecuației seculare.

energiilor. $\varepsilon_0 = \frac{b^2 D}{a^2 + b^2} = \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2 + g_{\perp}^2} \approx \frac{1}{2}$.

Se are în vedere că $g_{\parallel} \approx g_{\perp}$.

La fel, considerînd $\varepsilon = 0$, în Y_2 , primim intersecția acestei drepte cu axa ordonatelor $Y_2 = -b^2$. Avînd în vedere semnificația fizică a parametrilor a și b , observăm că panta dreptei Y_2 depinde de câmpul magnetic exterior aplicat. Variația câmpului magnetic exterior \vec{H} , duce la rotirea dreptei

Y_2 în jurul punctului ε_0 (fix pentru un θ dat), iar punctele de intersecție a ecuațiilor Y_1 și Y_2 , glisează pe ramurile parabolei determinînd astfel variația energiei nivelelor energetice ale ionului de V^{+3} , cu variația cîmpului magnetic exterior \vec{H} , așa cum este arătat în figură 4c.

Pentru descrierea cazurilor următoare procedăm ca în cazul precedent :

c) $\theta = 30^\circ$. Ecuația (7) se scrie

$$4\varepsilon(D - \varepsilon)^2 - 3a^2\varepsilon + b^2(D - \varepsilon) = 0 \quad (11)$$

care are următoarele valori de minim și maxim pentru Y_1 .

$$Y_1(D) = 0$$

$$Y_1 = \left(\frac{D}{3}\right) = \frac{8}{13},$$

iar punctele de intersecție a dreptei Y_2 cu axele de coordonate sînt :

$$Y_2(0) = -b^2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{g_{\perp}^2}{3g_{\parallel}^2 + g_{\perp}^2} \approx \frac{1}{4}.$$

Variația energiei nivelelor în funcție de cîmpul magnetic exterior este arătată în fig. 4b.

d) $\theta = 60^\circ$. Ecuația (7) devine

$$4\varepsilon(D - \varepsilon)^2 - (a^2 + 3b^2)\varepsilon + 3b^2D = 0 \quad (12)$$

din care primim în mod analog.

$$Y_1(D) = 0 \quad Y_2(D) = -3b^2$$

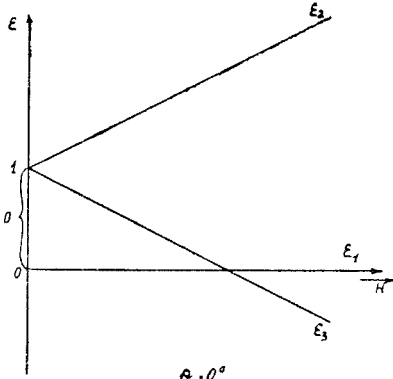
$$Y_1\left(\frac{D}{3}\right) = \frac{8}{13} \quad \text{și} \quad \varepsilon_0 = \frac{3g_{\perp}^2}{g_{\parallel} + 3g_{\perp}^2} \approx 3/4.$$

Dependența energiei nivelelor ionului de V^{+3} în funcție de cîmpul magnetic exterior este arătată în fig. 4d.

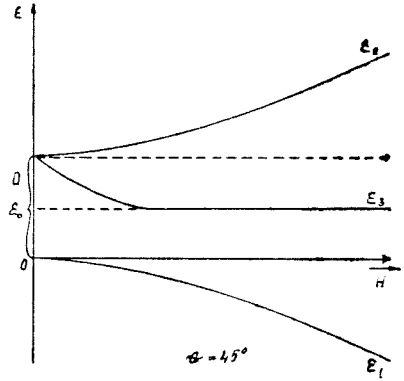
După cum reiese din cazurile discutate, comparînd diagramele energetice corespunzătoare diferitelor valori ale unghiului θ , creștătoare, nivelul energetic ε_3 se ridică odată cu creșterea unghiului de la 0° la 90° , de la $\varepsilon = 0$ pînă la $\varepsilon = 1$. Aceasta se reflectă în anizotropia factorului g care trebuie să depindă puternic de orientarea cîmpului magnetic exterior față de axa cîmpului cristalin, conform formulei.

$$g^2 = g_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + g_{\perp}^2 \sin^2 \theta \quad (13)$$

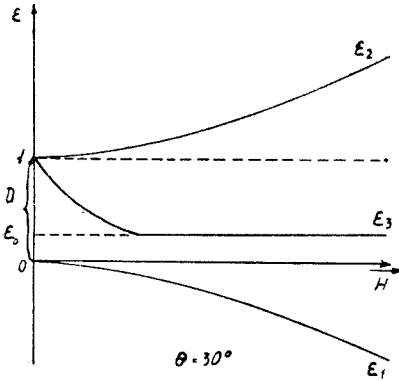
Concluzia experimentală ce rezultă de aici este, că valoarea cîmpului magnetic la care va avea loc absorbția de rezonanță, pentru tranziția permisă, va depinde de orientarea cîmpului magnetic, considerînd constantă frecvența cîmpului de microunde.



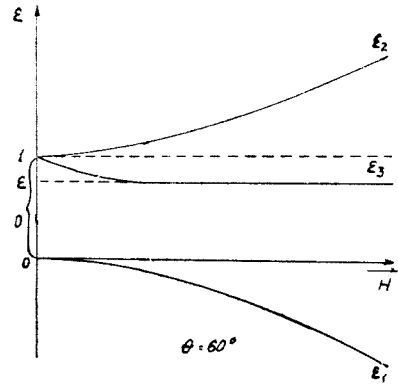
$\theta = 0^\circ$
Fig. 4. a.



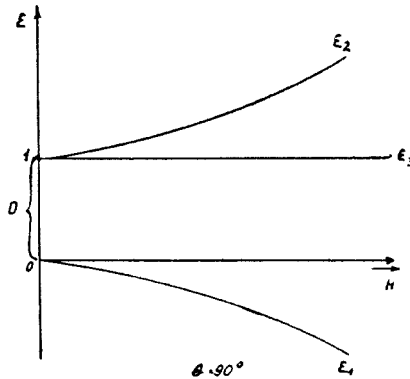
$\theta = 45^\circ$
Fig. 4. b.



$\theta = 30^\circ$
Fig. 4. c.



$\theta = 60^\circ$
Fig. 4. d.



$\theta = 90^\circ$
Fig. 4. e.

BIBLIOGRAFIE

1. A. N. Prohorov, Zverev, „J.E.T.F.” **34**, 1023 (1958).
2. A. Siegert, „Physica” **4**, 138n (1937).
3. J. Van Vleck, „J. Chem. Phys.” **7**, 61, (1939).
4. A. N. Prohorov, Zverev „J.E.T.F.” **38**, 449, (1960).

ИЗУЧЕНИЕ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОННО — СПИНОВОГО РЕЗОНАНСА ИОНА V^{+3}
В КОРУНДЕ (Al_2O_3)

(Резюме)

В работе дается новый графический метод решения векового уравнения корни которого являются энергетическими уровнями, зависящими от поля, между которыми имеют место переходы в процессе резонансного поглощения.

Решение даётся для пяти постоянных значений угла θ , между направлением внешнего магнитного поля и осью симметрии кристаллического электрического поля.

Из энергетических диаграмм видна сильная анизотропия фактора g , причём энергетический уровень ϵ_3 растёт с повышением угла от 0° до 90° , от $\epsilon = 0$ до $\epsilon = 1$.

ETUDE DU SPECTRE DE RÉSONANCE ÉLECTRONIQUE DE SPIN DE
L'ION DE V^{+3} DANS LE CORINDON (Al_2O_3)

(Résumé)

L'auteur apporte une méthode graphique nouvelle pour la résolution de l'équation séculaire dont les racines sont les niveaux énergétiques dépendant du champ, entre lesquels ont lieu les transitions dans le processus d'absorption de résonance.

La résolution est effectuée par cinq valeurs constantes de l'angle θ , que font la direction du champ magnétique extérieur et l'axe de symétrie du champ électrique cristallin.

Des diagrammes énergétiques ressort l'anisotropie puissante du facteur g , le niveau énergétique ϵ s'élevant — à mesure que l'angle croît de 0° à 90° — de $\epsilon = 0$ jusqu'à $\epsilon = 1$.

PRODUCEREA TENSIUNII ÎN TREPTE PENTRU RIDICAREA AUTOMATĂ A CURBELOR CARACTERISTICE CU AJUTORUL OSCILOGRAFULUI CATODIC

de
ALEXANDRU BÓDI

Pentru vizualizarea oscilografică a familiilor de curbe caracteristice ale elementelor neliniare, tensiunea care joacă rolul parametrului independent de obicei, este variată continuu sau în trepte. Generatoarele care produc tensiunea în trepte sînt folosite în multe domenii ale electronicii [1] [2] [3] [4].

Privind principiul de funcționare aceste generatoare pot fi încadrate în două grupe: electromecanice și electronice. Generatoarele construite pe principii electromecanice sînt realizate fie cu contacte rotative fie cu releuri. Cele electronice produc tensiunea în trepte prin însumarea semnalelor dreptunghiulare simultane (însă de diferite frecvențe) sau succesive. Însumarea semnalelor simultane se poate realiza sau cu ajutorul unui montaj aditiv unde sursele de tensiune dreptunghiulară sînt cuplate pe rezistența de sarcină prin rezistențe legate în paralele (Fig. 1), sau cu ajutorul unui alt montaj aditiv, unde sursele de curenți dreptunghiulari sînt legate pe rezistența de sarcină, prin intermediul unor rezistențe în serie (Fig. 2).

Însumarea semnalelor succesive (a impulsurilor) înseamnă o acumulare a energiei impulsurilor. Montajul cel mai frecvent utilizat folosește în acest scop două diode (D_1, D_2) ca ventile, și doi condensatori (C_1, C_2) unde C_2 joacă rolul rezervorului (Fig. 3).

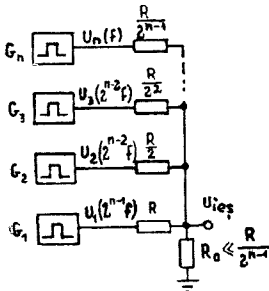


Fig. 1.

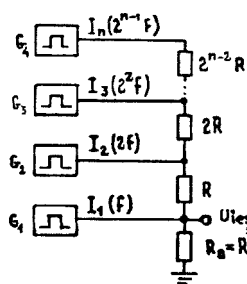


Fig. 2.

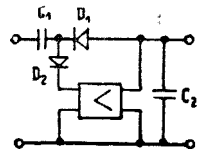


Fig. 3.

Pentru a compara cele două tipuri principale de generatoare electronice de tensiune în trepte, am construit un generator care funcționează pe baza însumării simultane și un alt generator care funcționează pe baza însumării succesive a semnalelor.

În următoarele vom arăta particularitățile celor două tipuri de generatoare pe baza rezultatelor obținute.

GENERATORUL CU ÎNSUMARE SIMULTANĂ.

În tehnica televiziunii aceste tipuri de generatoare sînt construite cu etaje care conțin multivibratoare. În construcția aparatelor electronice cu citire cifică aceste tipuri de generatoare sînt formate din etaje care conțin circuite basculante bistabile (triggere).

Pentru construirea generatoarelor de tensiune în trepte destinate ridicării oscilografice a curbelor caracteristice este mai avantajoasă combinarea celor două metode.

Dacă generatorul constă numai din etaje multivibratoare pentru păstrare sincronismului între multivibratoarele acordate la diferite frecvențe se folosește metoda sincronizării succesive. Însă acest sistem de sincronizare permite reglajul simplu al frecvenței numai într-o gamă foarte îngustă. Dacă generatorul este construit din etaje „trigger” sistemul menține constant raportul frecvențelor între etaje într-un domeniu larg de frecvențe. Pentru a porni însă generatorul este necesar un semnal special.

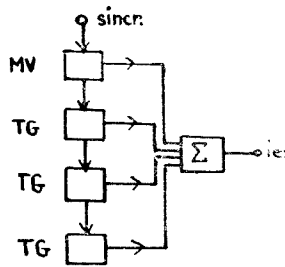


Fig. 4.

Aceste neajunsuri pot fi eliminate dacă folosim ca prim etaj multivibrator (MV) și în următoarele etaje scheme cu circuite basculante bistabile (triggere) (TG) (Fig. 4).

Deoarece acest generator are ca oscilator pilot un multivibrator, nu necesită un semnal special de pornire. Frecvența de repetiție a tensiunii în trepte se poate regla în mod simplu, modificînd frecvența multivibratorului. Deoarece funcționarea circuitelor basculante într-un domeniu larg nu depinde de frecvența semnalelor declaratoare, generatorul acoperă o bandă largă de frecvență. Folosirea multi-

vibratorului ca oscilator pilot permite în același timp și sincronizare tensiunii în trepte.

Construcție.

Am construit un generator cu $n = 4$ etaje, care furnizează o tensiune cu un număr de $2^n = 16$ trepte (Fig. 5).

Oscilatorul pilot este un multivibrator (MV) construit cu o triodă dublă (6H7C). Frecvența de repetiție a multivibratorului se poate regla cu un potențiomtru P_1 . Simetrizarea semnalului se realizează cu ajutorul potențiometrului P_2 . Semnalul multivibratorului după o derivare și redresare

declanșează triggerul TG_1 , ale cărui semnale după derivare și redresare declanșează triggerul TG_2 (identic cu TG_1) și acest proces se repetă mai departe tot așa pînă la triggerul TG_3 . Semnalele dreptunghiulare ale celor patru etaje sînt adunate și apoi amplificate cu ajutorul unui

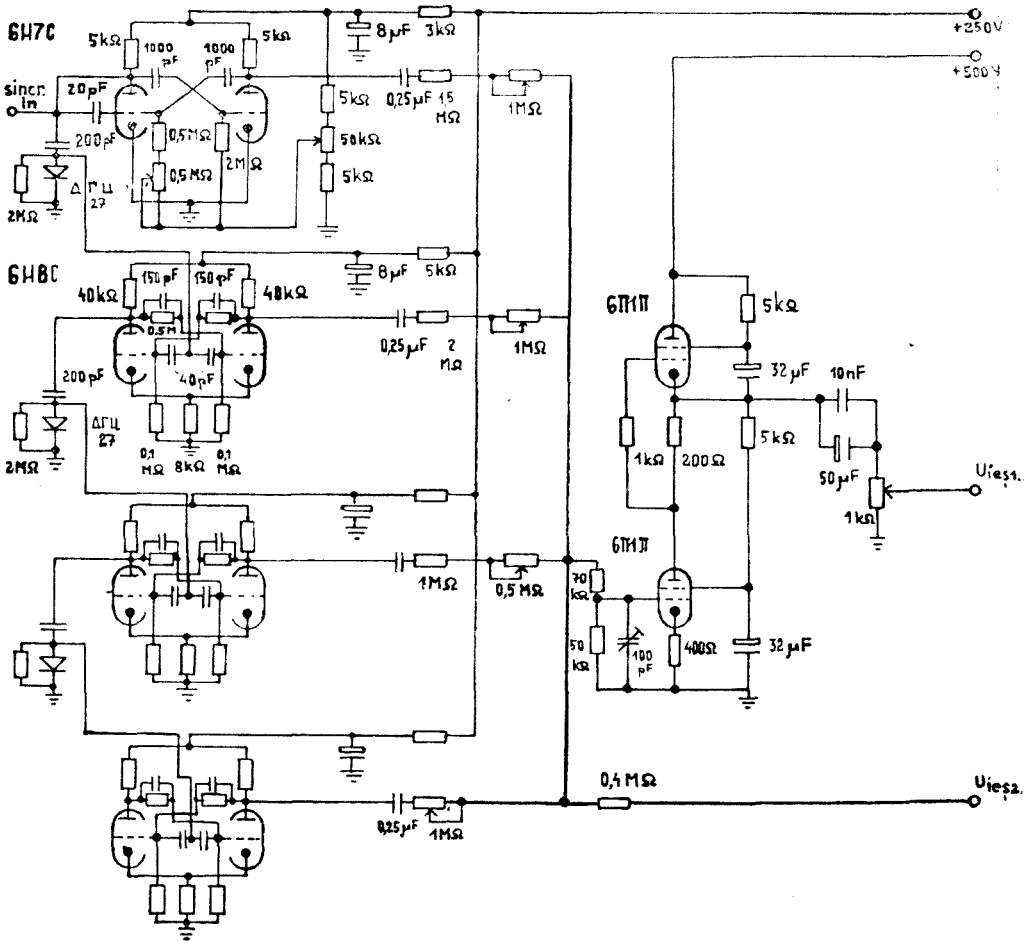
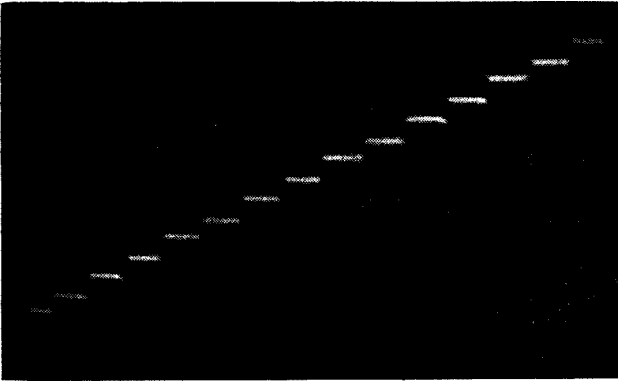


Fig. 5.

amplificator final (AF), avînd rezistența de sarcină potențiometrul P_3 , reglajul volumului. Forma semnalului de ieșire poate fi corectată cu ajutorul potențiometrelor P_4 , P_5 , P_6 , P_7 .

Performanțe.

- Semnalul de ieșire este o tensiune în trepte, lineară (fig. 6.), ceea ce înseamnă că distanța între palierele vecine este constantă.
- Tensiunea de ieșire este reglabilă între 0—28 V (de la vîrf la vîrf).



— Rezistența de ieșire fiind mai mică decât 1000Ω , la generator pot fi conectate sarcini relativ mari, rezistențe cu valori relativ scăzute, fără a distorsiona forma semnalului.

Fig. 6.

- Frecvența de repetiție a tensiunii se poate regla între 38—200 Hz.
- Generatorul funcționează normal la o variație de $\pm 30\%$ a tensiunii anodice.
- Tensiunea de sincronizare este aproximativ de 30 V.

GENERATORUL CONSTRUIT PE BAZA ÎNSUMĂRII IMPULSURILOR SUCCESIVE.

Cu acest montaj se obține o tensiune în trepte prin acumularea energiei electrice. În schema cea mai răspândită (Fig. 3), condensatorii C_1 și C_2 sînt legați în serie și sub acțiunea unui impuls ei se încarcă prin dioda D_1 . În următoarele, condensatorul C_1 se descarcă prin dioda D_2 , iar condensatorul C_2 rămîne încărcat cu o oarecare sarcină. În urma repetării periodice a acestui proces, condensatorul C_2 se încarcă treptat și tensiunea lui tinde către o valoare limită. Sistemul revine la starea lui inițială prin descărcarea condensatorului cu ajutorul unui comutator automat care-l scurtcircuitază atunci cînd tensiunea condensatorului a atins (tensiunea) nivelul necesar pornirii comutatorului. Drept comutatoare pot fi folosite tuburi cu neon tiratroane, oscilatoare de relaxare tip LC sau RC [5]. În locul diodelor pot fi folosite tuburi cu grile [6].

Tensiunea în trepte astfel obținută va avea o alură cu caracter exponențial. Pentru linearizarea tensiunii, se introduce o reacție cu ajutorul unui amplificator. Alegînd factorul de amplificare egal cu unitatea, se obține o treaptă lineară numai în cazul cînd rezistența internă a generatorului de impulsuri este egală cu zero, fapt care de obicei nu se îndeplinește în practică.

Într-o lucrare anterioară am arătat [7] că mărirea coeficientului de reacție peste unu micșorează erorile.

În realizările de pînă acum în acest domeniu cerințele față de amplificatorul din bucla de reacție au fost următoarele: factor de amplificare egal cu unitatea și defazaj introdus egal cu zero. Așa că cel mai indicat a fost folosirea unui etaj repetor catodic. În cazul nostru avem nevoie de un amplificator cu un factor de amplificare între 2—8 și un defazaj egal cu zero.

Aceste condiții pot fi îndeplinite numai cu amplificatori cu mai multe etaje. Cel mai economic este cel cu două etaje.

Construcția.

Schema generatorului este cea obișnuită (Fig. 7).

Tubul T_1 este generatorul de impulsuri, T_2 repetor catodic și amplificator. Numărul treptelor se poate regla cu potențiometrul P_1 . În locul tiratronului T_3 se poate folosi și un tub cu descărcare luminescentă.

Divizorul de tensiune format din R_1 și P_2 servește la restabilirea componentei continue a semnalului. Tubul T_6 și T_7 formează amplificatorul din bucla de reacție.

Performanțe.

Ca semnal de pornire este necesar un impuls negativ cu o valoare de 25 V. Frecvențe de repetiție a impulsurilor de pornire poate fi cuprinsă între 40—4000 Hz.

Linearitatea tensiunii în trepte este mai bună decât în montajele unde coeficientul de amplificare este mai mic sau egal cu unu (Fig. 8).

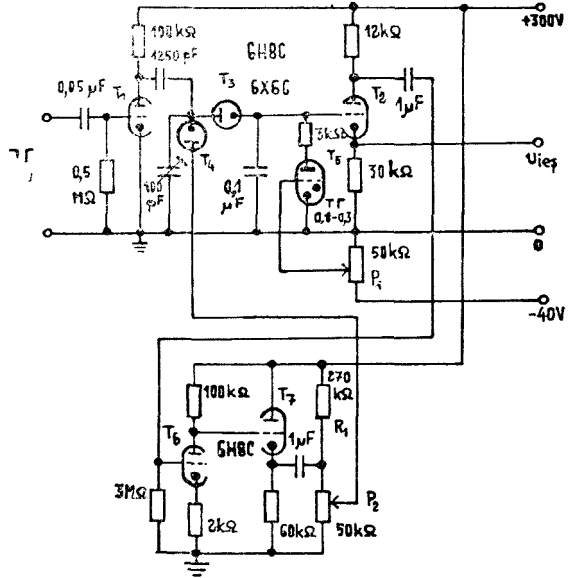


Fig. 7.

CONCLUZII.

Studiul comparativ al celor două tipuri de generatoare în vederea folosirii lor la ridicarea automată a familiilor de curbe caracteristice ne arată următoarele :

— În acest scop pot fi folosite cu succes generatoarele de ambele tipuri. În ceea ce privește construirea și exploatarea lor, au anumite particularități :

— Numărul treptelor la primul tip (semnale simultane) este dat relația $m = 2^n$ unde n este numărul etajelor divizoare de frecvență. Numărul treptelor poate fi oricât de mare. La tipul al doilea (semnale succesive) numărul treptelor este determinat în esență

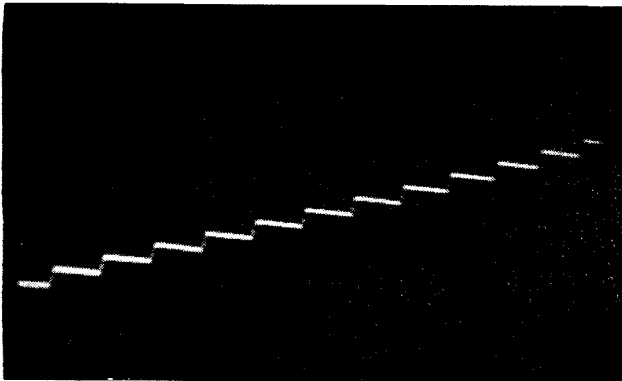


Fig. 8

de raportul capacității condensatorilor C_1 și C_2 . Practic acest raport poate fi limitat (De obicei nu poate fi mai mare decît 15) din cauza fenomenului de fluctuație ce apare în procesul de aprindere a tubului prin care se descarcă condensatorul C_2 .

— Primul tip nu este sensibil la variația tensiunii anodice, al doilea necesită o sursă stabilizată.

— Practic cu primul montaj este mai ușor de obținut o tensiune în trepte liniară decît cu al doilea.

— În timpul funcționării, primul tip prezintă — față de al doilea — o stabilitate mai mare în privința numărului treptelor, linearitate și valoarea tensiunii de ieșire.

— Cu ajutorul primului generator, în afară de tensiunea în trepte liniare (sau exponențiale), pot fi realizate și alte forme de tensiuni.

Iuînd în considerare particularitățile celor două tipuri de generatoare, după părerea noastră cu primul tip pot fi obținute performanțe superioare. Însă dacă cerințele față de linearitatea și stabilitatea tensiunii în trepte nu sînt ridicate, al doilea tip care este mai simplu (are un număr mai mic de piese) este indicat pentru a fi construit.

În concluzie, pentru cazuri simple propunem utilizarea generatorului de al doilea tip (dar fără amplificator în bucla de reacție), iar pentru măsurători cantitative recomandăm primul tip de generator.

BIBLIOGRAFIE

1. Babits V. A., Spengler S. R., Morris, R. V., „Electronics”, 27 (1954) 3, 164
2. Burr R. P., Stone W. R., Noyer R. O., „Electronics”, 24 (1951) 8, 116.
3. Ennes H. E., „Electronics”, 27(1954), 4, 138.
4. Grin G. L., „Izmeritelnaia tehnika”, 1959, 11, 54.
5. Zgut M. A., *Nagleadniie posobia po radiotekhnike*. Sviazizdat, Moscova, 1958.
6. Richter H., *Gyakorlati elektronika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1959.
7. Bódi A., „Izmeritelnaia tehnika”, 1962, 12, 33.

ПОЛУЧЕНИЕ СТУПЕНЧАТОГО НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННО — ЛУЧЕВОГО ОСЦИЛЛОГРАФА

(Резюме)

Работа занимается получением ступенчатых напряжений с целью их использования для наглядности характеристик нелинейных элементов с помощью электронно-лучевого осциллографа.

Классификация этих генераторов делается по способу которым они образуют ступенчатое напряжение посредством суммирования одновременных или последовательных прямоугольных напряжений. Для сравнения двух типов построили по одному генератору. На основании анализа характеристик смогли решить, что для упомянутой цели соответствует лучше тот тип, который использует одновременное суммирование.

PRODUCTION DE LA TENSION EN ESCALIER EN VUE DE RELEVER
AUTOMATIQUEMENT LES COURBES CARACTÉRISTIQUES A L'AIDE
DE L'OSCILLOGRAPHE CATHODIQUE

(R é s u m é)

L'auteur s'occupe de la production des tensions en escalier afin de les utiliser pour une meilleure visualisation des caractéristiques des éléments non-linéaires à l'aide de l'oscilloscope cathodique.

Il effectue une classification de ces générateurs selon la façon dont ils produisent a tension en escalier, en totalisant les tensions rectangulaires simultanées ou successives.

Afin de comparer les deux types, on a construit pour chacun un générateur. L'analyse des performances obtenues a permis d'établir que le type utilisant la sommation simultanée correspond mieux au but visé.

THE HISTORY OF THE

THE HISTORY OF THE

REZONANȚA ELECTRONICĂ DE SPIN A IONILOR DE CUPRU (II) ÎN DIFERITE SOLUȚII

de

AL. NICULA

În cercetările noastre de rezonanță electronică de spin (RES) a ionului de cupru (II) în site moleculare — zeoliți de tip X și Y — am urmărit dependența absorbției de rezonanță de conținutul de apă din rețeaua zeolitului [1]. Deoarece zeoliții complect hidratați (conținând ioni de cupru (II)) pot fi considerați ca fiind analogi cu ionii de cupru (II) sub formă de complecși în soluții apoase și sub formă de soluții cu glicerină, am studiat RES a acestor ioni în diferite soluții cu glicerină.

Soluțiile folosite în acest scop au fost următoarele: azotat de cupru în apă, perclorat de cupru în apă și cupru în soluție de acid percloric, bromură de potasiu și de cupru în soluție de bromură de potasiu, clorură de cupru și potasiu în soluție de clorură de potasiu, precum și sulfat de cupru și amoniu în soluție concentrată de amoniac.

Tehnica măsurătorilor de RES folosită pentru studiile noastre este descrisă în lucrările [2] și [3].

Rezultate experimentale.

La toți complecși amintiți mai sus, în afară de sulfatul de cupru și amoniu, s-au obținut spectre de rezonanță cu linii perfect simetrice. Valoarea factorului g pentru perclorat de cupru și pentru azotat de cupru nu variază cu concentrația. Această valoare este de 2,158 și respectiv 2,192. În cazul clorurii de cupru și de potasiu și sistemului bromură potasiu și cupru s-a observat o ușoară schimbare a factorului g de la 2,168 la 2,185 pe măsură ce diluția crește. Această schimbare nu este liniară și ea se datorește probabil, schimbării poziției chimice a ionilor de cupru în complexul halogenat.

Lărgimea liniilor RES variază cu concentrația în ionii paramagnetici. Această schimbare este pronunțată la concentrații mai înalte pe când la soluții foarte diluate lărgimea liniilor rămâne aproximativ constantă. Pentru soluțiile diluate de perclorat de cupru în acid percloric această lărgime este de 150 gauss, pentru nitrat de cupru în acid nitric, lărgimea liniei este de 143 gauss, pentru clorura de potasiu și cupru în soluție de clorură de potasiu

ea este de 153 gauss și pentru bromura de potasiu și cupru în soluție de bromura de potasiu și cupru în soluție de bromură de potasiu este de 169 gauss. Dependența lărgimii liniei de RES de concentrație în ionii de Cu^{2+} a fost cercetată amănunțit, pentru cazul azotatului de cupru în soluție de acid azotic deoarece această sare are o mare solubilitate în apă. S-a observat că de la concentrația de $2,2 \cdot 10^{21}$ ioni de Cu^{2+} pe mol la $1,1 \cdot 10^{21}$ Cu^{2+} pe mol (concentrații mari) lărgimea liniei prezintă o slabă creștere de la 97,7 la 99,8 gauss. La aceste concentrații lărgimea liniei trebuie să fie determinată de interacțiuni de schimb care micșorează această lărgime, deoarece distanța medie dintre ionii de cupru este de 7 Å și respectiv de 10 Å (pentru cele două concentrații de mai sus). Pe măsura descreșterii concentrației cu ionii paramagnetici lărgimea liniei crește linear la valoarea de 143 gauss pentru concentrația de $1,1 \cdot 10^{20}$ ioni de Cu^{2+} pe mol și o distanță dintre aceștia de 20 Å. De la această concentrație la concentrația de $1,1 \cdot 10^{19}$ lărgimea liniei, rămâne constantă.

Dependența lărgimii liniei în funcție de concentrație pentru cazul discutat mai sus este prezentată în figura 1. Cu totul alt spectru de RES s-a observat la sulfatul de cupru și amoniu în soluție de amoniac. Acest compus

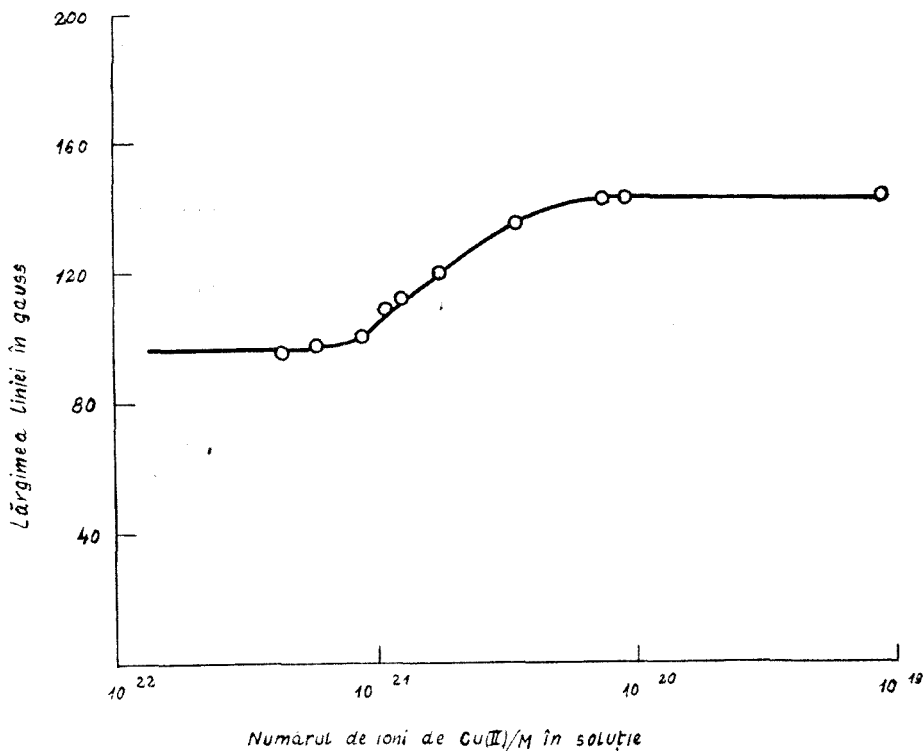


Fig. 1. Dependența lărgimii liniei de rezonanță a $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ în soluții apoase în funcție de concentrație, la temperatura camerei.

în concentrație mare a prezentat o singură linie de rezonanță cu o valoare a lui g de 2,110 și cu o lățime a liniei de 153 gauss. După o micșorare de 10 ori a concentrației spectrul arată o structură hiperfină compusă din patru linii. Constanta de interacțiune hiperfină pentru cele patru linii s-a găsit de 0,00705, 0,00615, 0,00615 cm^{-1} și nu s-a observat structura hiperfină datorită momentului magnetic nuclear, a moleculelor de azot. Aceasta este prima dovadă [1] care pune în evidență structura hiperfină pentru soluțiile apoase, ce conține cupru în complecși anorganici figura 2.

Pentru a realiza o reproducere a cavităților zeolitului în care sînt introduși ioni de cupru hidratați soluția apoasă a complexului de cupru și amoniu a fost diluat cu glicerină. Glicerina perturbă difuzia, mișcarea de translație și rotația complexului de cupru și amoniu în soluție și la ridicarea spectrului de RES apar schimbări. Spectrul de RES original simetric, cu patru linii

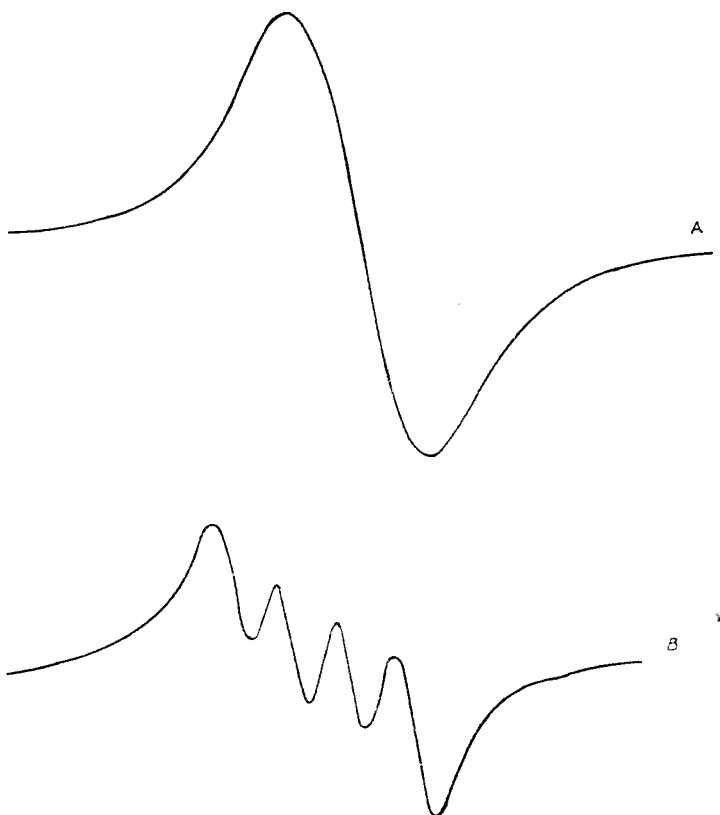


Fig. 2. A. — Spectrul de RES a complexului $\text{Cu}^{2+}(\text{NH}_3)_4$ la înaltă concentrație.
B. — Structura hiperfină a complexului $\text{Cu}^{2+}(\text{NH}_3)_4$ rezolvată după o diluare de 10 ori a soluției de la A, la temperatura camerei.

de structură hiperfină, devine asimetric și foarte asemănător cu acel al ionilor de cupru în zeoliți parțial dehidratați figura 3. Constanta de structură hiperfină A, în banda paralelă are valorile 0,0062, 0,0072, 0,0077 cm^{-1} . Când aceasta soluție care conține glicerină a fost răcită pînă la -79°C ,

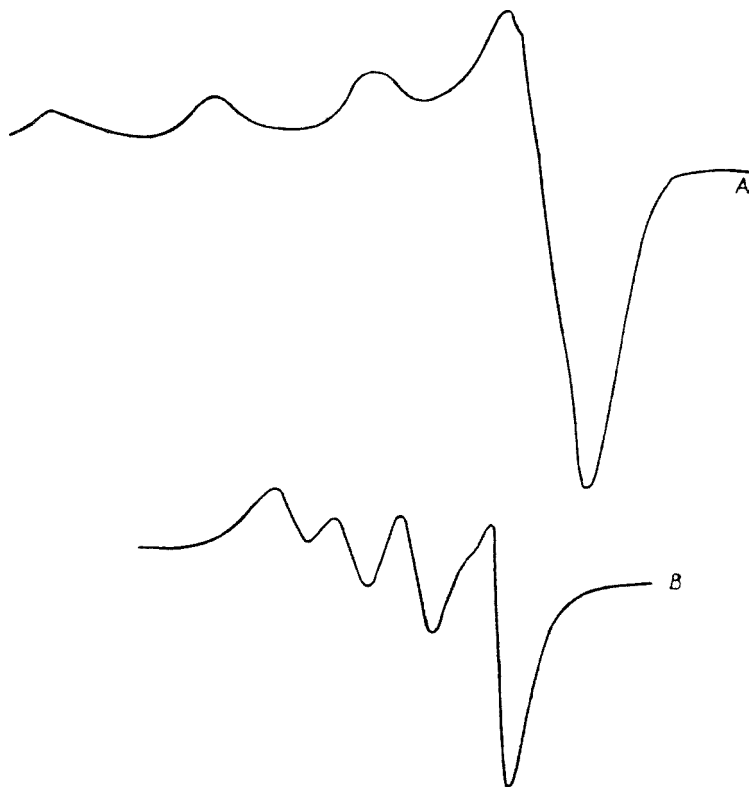


Fig. 3. B. — Efectul adaosului de glicerină asupra structurii hiperfine a complexului $\text{Cu}^{2+}(\text{NH}_3)_4$.
A. — Efectul răcirii la -90°C a soluției spectrului B.

spectrul de rezonanță are forma spectrului obținut pentru ionii de cupru în zeoliți. Constanta de structură hiperfină crește pînă la valorile 0,0176 ; 0,0172 ; 0,0142 cm^{-1} . Al patrulea pic nu s-a putu rezolva (figura 3).

Discuții.

Prin dirijarea concentrației ionilor de cupru (II) în complexul $\text{Cu}(\text{NH}_3)\text{SO}_4$ s-a obținut pentru prima oară structura hiperfină într-un complex anorganic. Aceasta a fost posibil prin micșorarea interacțiunii de dipol, (prin scăderea concentrației în ionii de cupru) interacțiune care duce la îngustarea liniei de rezonanță.

Introducerea glicerinei în soluțiile complexului $\text{Cu}^{2+}(\text{NH}_3)_4$ duce la o îndepărtare de la simetria sferică a câmpului cristalin intern și spectrul acestui complex devine asimetric cu piscurile de structură hiperfină variind în intensitate. Răcind complexul care conține glicerină la temperatura azotului lichid, apare un spectru de RES caracteristic substanțelor policristaline. Forma spectrului obținut indică existența unei componente axiale a câmpului electric cristalin în care se află ionul paramagnetic. În spectru se disting piscurile de structură hiperfină din banda paralelă a câmpului magnetic, asociate cu g_{\parallel} . Cele din banda perpendiculară n-au fost rezolvate și prin urmare factorul g_{\perp} s-a calculat numai aproximativ. Apariția spectrului caracteristic substanțelor policristaline se explică prin aceea că prin răcirea complexului care conține glicerină la temperatura azotului lichid apar cavități poroase care deranjează simetria sferică caracteristică lichidelor

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Nicula, D. Stamires and J. Turkevich „Report, Princeton University”, Princeton, N.J., S.U.A., 1963.
2. I. Ursu, Al. Nicula, „Rev. de Phys.” (sub tipar) 1964.
3. Al. Nicula, Disertație, 1963.

ЭЛЕКТРОННЫЙ СПИНОВЫЙ РЕЗОНАНС ИОНОВ МЕДИ (II) В РАЗЛИЧНЫХ РАСТВОРАХ

(Резюме)

После подробного исследования ЭСР в цеолитах, автор провел исследования ЭСР иона меди (II) в различных растворах. Помимо интересных результатов, полученных относительно сверхтонкой структуры, ширины линии и фактора g , получилось положение, когда сигнал ЭСР является подобным иону меди (II) в поликристаллических растворах. Это положение получилось посредством введения глицерина в растворы, содержащие ионы меди (II) и их охлаждением при температуре жидкого азота.

LA RÉSONANCE ÉLECTRONIQUE DE SPIN DES IONS DE CUIVRE (II) DANS DIFFÉRENTES SOLUTIONS

(Résumé)

Après une étude minutieuse de la RES dans les zéolithes, l'auteur a effectué des recherches sur la RES de l'ion de cuivre (II) dans diverses solutions. Outre les résultats intéressants relatifs à la structure hyperfine, à la largeur de la ligne et au facteur g , il a obtenu une situation où le signal de RES est similaire à celui de l'ion de cuivre (II) dans les substances polycristallines. Cette situation a été obtenue par l'introduction de glycérine dans les solutions contenant des ions de cuivre (II) et par le refroidissement de ces derniers à la température de l'azote liquide.

**CONTRIBUȚII PRIVIND STUDIUL ȘI FOLOSIREA TENSIUNII DREPTUNGHIIULARE
ÎN TEHNICA MĂSURĂTORILOR**

Rezumatul disertației, prezentată de ALEXANDRU BÓDI pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice și susținută la Universitatea „Babeș—Bolyai” Cluj în 27 iunie 1962

Tema disertației atacă problema studiului și a folosirii tensiunii dreptunghiulare în măsurările fizice și electronice, mai ales la procese tranzitorii rapide.

Disertația cuprinde două capitole. Primul capitol avind 46 pagini alcătuiește un studiu legat la producerea și aplicarea tensiunii dreptunghiulare în diferite domenii ale științelor, accentuând fizica și tehnica măsurătorilor electronice. Textul acestui capitol este însoțit de 92 figuri și 204 trimiteri bibliografice.

În al doilea capitol, pe 72 pagini, se prezintă contribuția personală a autorului privind producerea și aplicarea tensiunilor dreptunghiulare, precum și unele rezultate experimentale obținute prin aplicarea metodei. Textul este însoțit de 45 figuri, 11 grafice, 5 tabele, 21 fotografii de pe oscilograme și de 127 citate bibliografice.

În primul subcapitol (II. 1) se analizează din punct de vedere matematic legătura dintre tensiunea sinusoidală și dreptunghiulară. Se arată că orice funcție periodică care poate fi exprimată printr-o serie Fourier a funcțiilor trigonometrice, poate fi exprimată tot așa de bine și cu o serie Fourier a unor funcții dreptunghiulare. În paragraful II. 2.1 sînt prezentate rezultatele obținute în legătură cu formarea descărcării luminescente în gaze nobile, aplicînd impulsurile de înaltă frecvență. S-a constatat că apare un timp de întârziere a descărcării luminoase față de impulsul de radiofrecvență. Timpul de întârziere pentru tuburi fără adaos a rămas sub 10μ s. La tuburi umplute cu He sau Ne și cu mici adaosuri de alte gaze (cripton), s-a constatat — pentru orice distanță între electrozi - o întârziere considerabilă (pînă la 900 ms) care depinde de tensiune aplicată. Interpretarea rezultatelor a fost făcută pe baza unui mecanism în două trepte.

Paragraful II. 2.2 și II. 2.3 se ocupă cu folosirea tensiunii dreptunghiulare la oscilografie. Diferitelor fenomene. Între altele se descrie un principiu de proiectare și după aceasta construcția unui comutator electronic multicanal.

Sub capitolul II. 4 se ocupă cu producerea și folosirea tensiunii în trepte, obținută prin însumarea tensiunilor dreptunghiulare. Se descrie două generatoare de tensiune în trepte cu diferite principii de funcționare și se face analiza matematică a funcționării lor. Pentru îmbunătățirea funcționării lor disertantul prezintă cîteva modalități.

În paragraful II 4.7 se dă o metodă pentru reprezentarea tridimensională a curbilor de rezonanță a circuitelor cuplate, pe ecranul oscilografului. La metoda aceasta se folosește un cuplaj reglabil electronic, luînd drept element de cuplaj capacitatea joncțiunii p-n a unui tranzistor sau diodă semiconductoare.

În lucrare s-a adâncit legătura între unele probleme de cercetare ale fizicii care aparțin însă și domeniului electronicii, datorită metodelor de investigație folosite. Această tendință se explică prin faptul că cercetările experimentale actuale ale fizicii nu se pot efectua în general fără ajutorul metodelor de măsurare electronice moderne.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: Prof. dr. T. László (Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj)

REFERENȚI—: Prof. dr. T. V. Ionescu, membru coresp. Acad. R.P.R. (București),
 prof. dr. A. Cișman, membru coresp. Acad. R.P.R. (Timișoara),
 prof. dr. D. Petrescu (Iași).

DESPRE REZOLVABILITATEA PROBLEMEI LUI DIRICHLET LA SISTEME DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE, DE ORDINUL AL DOILEA, DE TIP ELIPTIC

Rezumatul disertației, prezentată de P. SZILÁGYI pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice și susținută la Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj, în 28 iunie 1963

Lucrarea aduce unele contribuții la studiul rezolvabilității problemei lui Dirichlet în cazul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic.

Se consideră problema lui Dirichlet

$$L_i u = \sum_{j,k,l=1}^2 a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{j,k=1}^2 b_{ij}^k(x_1, x_2) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^2 c_{ij}(x_1, x_2) u_j = f_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

$$u_1|_{\Gamma} = 0, \quad u_2|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

unde $Lu = (L_1 u, L_2 u)$ este un operator diferențial cu coeficienți reali, definiți într-un domeniu Ω al planului $x_1 O x_2$ cu frontieră Γ .

Se introduc normele

$$\|u\|^2 = \iint_{\Omega} \{ |u_1|^2 + |u_2|^2 \} dx_1 dx_2 \quad (3)$$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{j,k,l=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right\|^2 + \sum_{j,k=1}^2 \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|^2 + \sum_{j=1}^2 \|u_j\|^2 \quad (4)$$

și notația

$$P_{ij}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_{k,l=1}^2 a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) \xi_1^k \xi_2^l \quad (i, j) = 1, 2 \quad (5)$$

În primul capitol al lucrării se tratează rezultatele cunoscute în legătură cu rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet relativă la sisteme eliptice, precum și noțiunile de bază, notații și teoreme cunoscute, care sînt folosite în lucrare.

În capitolul doi este demonstrată, că condiție necesară și suficientă pentru ca inegalitatea

$$\|u\|_2^2 \leq C (\|L_1' u\|^2 + \|L_2' u\|^2 + \|u\|^2) \quad (6)$$

să fie adevărată pentru orice $u \in \mathring{C}_2(\Omega)$ este ca Lu să fie eliptic în punctul (x_1°, x_2°) . Aici (x_1°, x_2°) este un punct arbitrar fixat în Ω ,

$$L_i' u = \sum_{j,k,l=1}^2 a_{ij}^{kl}(x_1^\circ, x_2^\circ) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \quad (7)$$

și $\overset{\circ}{C}_2(\Omega)$ mulțimea funcțiilor continue și de două ori continuu derivabile în Ω , care au suport compact în Ω .

În capitolul III se extinde inegalitatea (6) la sisteme de forma (1) pe clasa funcțiilor din $C_2(\overline{\Omega})$ care satisfac condițiile (2). $C_2(\overline{\Omega})$ este mulțimea funcțiilor definite și de două ori continuu derivabile în $\overline{\Omega}$. Se arată, că pentru valabilitatea inegalității (6) nu mai este suficientă elipticitatea sistemului (1). Se indică o clasă de sisteme eliptice de forma (1), în cadrul căreia se dă condiție necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (6) să fie adevărată pentru orice $u \in C_2(\overline{\Omega})$, care satisface condiția la limită (2). Această clasă de sisteme, introdusă în prezentă lucrare este caracterizată de identitatea

$$P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} = 0 \quad (\mathcal{A})$$

unde P_{ij} sînt polinoamele definite cu formula (5). În continuare vom nota această clasă prin \mathcal{A} .

În primul paragraf al capitolului III se consideră un domeniu plan Ω^* de formă particulară, mărginit de un segment de dreaptă Γ_1 așezat pe axa Ox_1 și de crdula curbă Γ_2 așezat în semiplanul $x_2 > 0$. Prin $\overline{C}_1(\overline{\Omega}^*)$ s-a notat mulțimea funcțiilor din $C_2(\overline{\Omega}^*)$ care se anulează pe Γ_1 și într-o fișie de frontieră a lui Γ_2 . Se demonstrează următoarea teoremă:

TEOREMA 1. Condiția necesară și suficientă, ca să existe o constantă $C > 0$ astfel încît inegalitatea (6) pentru sistemul L din clasa \mathcal{A} să fie adevărată pentru orice $u \in \overline{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ este ca ecuația

$$P_{11}(x_1^\circ, x_1^\circ; \xi_1^\circ, z) + i P_{21}(x_1^\circ, x_2^\circ; \xi_1^\circ, z) = 0 \quad (8)$$

pentru un $\xi_1^\circ \neq 0$ arbitrar fixat să aibă o rădăcină cu parte imaginară pozitivă și o rădăcină cu parte imaginară negativă.

Paragraful doi al capitolului III conține extinderea rezultatelor obținute în paragraful 1 la sisteme de forma (1) și la domenii arbitrare cu frontieră suficient de netedă. Rezultatul de bază al acestui paragraf este:

TEOREMA 2. Condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea

$$\|u\|_2^2 \leq C (\|L_1 u\|^2 + \|L_2 u\|^2 + \|u\|^2) \quad (9)$$

să aibă loc în cazul unui operator L din clasa \mathcal{A} de forma (1) pentru orice $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ care satisface condițiile (2), este ca în punctele de frontieră ecuația (8) să aibă o rădăcină cu parte imaginară pozitivă și o rădăcină cu parte imaginară negativă.

Aici $W_2^{(2)}(\Omega)$ notează spațiul Sobolev al funcțiilor cu derivate generalizate la pătrat integrabile pînă la ordinul doi inclusiv.

În capitolul IV al lucrării pe baza inegalității (9) se demonstrează o teoremă de alternativă și încă două teoreme care se referă la rezolvabilitatea problemei (1), (2) și la spectrul acestei probleme. Teorema de alternativă este următoarea:

TEOREMA 3. Dacă sistemul cliptic (1) aparține clasei \mathcal{A} și ecuația (8) în punctele frontierei Γ are o rădăcină cu parte imaginară pozitivă și o rădăcină cu parte imaginară negativă, atunci

I. Sau problema

$$L_1 u = f_1, \quad L_2 u = f_2; \quad u_1|_\Gamma = 0, \quad u_2|_\Gamma = 0 \quad (10)$$

are soluție unică pentru orice $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, sau problema omogenă

$$L_1 u = 0, \quad L_2 u = 0; \quad u_1|_\Gamma = 0, \quad u_2|_\Gamma = 0 \quad (11)$$

are soluție nebanală.

II. Mulțimea soluțiilor problemei (11) (N) este un subspațiu cu dimensiuni finite. De asemenea mulțimea (N^*) soluțiilor problemei

$$M_1 v = 0, M_2 v = 0; \quad v_1|_{\Gamma} = 0, \quad v_2|_{\Gamma} = 0 \quad (12)$$

este un subspațiu cu dimensiuni finite. Aici Mv este operatorul conjugat al lui Lu .

III. În cazul cînd problema (11) are soluție nebanală, atunci problema (10) pentru o funcție $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ are soluție atunci și numai atunci, dacă ea este ortogonală pe orice soluție a problemei (12)

În continuare se demonstrează, că teorema 3 este adevărată atunci și numai atunci dacă ecuația (8) are o rădăcină cu parte imaginară pozitivă și una cu parte imaginară negativă.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: Prof. dr. D. V. Ionescu (Univ. „Babeș—Bolyai” Cluj)

REFERENȚI: Acad. prof. C. Iacob (Univ. București), acad. prof. M. Haimovici (Univ. „A. I. Cuza” Iași), acad. prof. G. Călugăreanu (Univ. „Babeș—Bolyai” Cluj).

CONTRIBUȚII LA TEORIA ELEMENTARĂ A FUNCȚIILOR GENERALIZATE

Rezumatul disertației prezentată de F. CONSTANTINESCU pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice la Universitatea „Babeș—Bolyai” Cluj în 28 dec. 1963

Urmărind apariția și dezvoltarea teoriei funcțiilor generalizate, sau altfel zis, a teoriei distribuțiilor sîntem conduși încă odată la concluzia că nici capitolele ale matematicii apar astăzi ca urmare a unor necesități de primă importanță ale practicii. Prima distribuție a fost introdusă de Dirac sub forma „funcției” care îi poartă numele, găsindu-și o largă aplicație în fizica cuantică.

În lucrare se dă o metodă elementară de a construi distribuțiile de una sau mai multe variabile folosind noțiunea de diferență divizată a unei funcții continue, urmată de aplicații în domenii clasice ale analizei matematice (ecuații funcționale). Metoda noastră are avantajul de a prezenta simultan distribuțiile ca clase de echivalență în mulțimea șirurilor fundamentale, derivate locale generalizate ale funcțiilor continue și ca funcționale liniare peste un spațiu de bază. Astfel avem reunite cele trei proprietăți care servesc diversilor autori pentru construirea lor.

Distribuțiile apar în cadrul lucrării ca și clase de echivalență în mulțimea diferențelor divizate

$$(2.1) \quad h! [x_1, x_1, x_2, \dots, x_h; F(x)]$$

$F(x)$ fiind o funcție continuă pe intervalul (A, B) .

Elementele $h! [x_1, x_1, \dots, x_h; F(x)]$ și $l! [x, x_1', \dots, x_l'; G(x)]$ sînt echivalente dacă și numai dacă

$$O^h(O^{l-h} G(x) - F(x)) = 0$$

Deci în măsura în care diferențele divizate generalizează noțiunea de derivată, distribuțiile sînt derivate generalizate ale funcțiilor continue.

În continuare se demonstrează că în clasele de echivalență sînt conținute și anumite șiruri fundamentale după Mikusinski. De asemenea folosind diferențe divizate pe necuri echidistante putem prezenta imediat și forma funcțională a distribuțiilor. Aceste rezultate sînt extinse în cazul distribuțiilor de mai multe variabile.

Un rezultat important al lucrării este obținut în capitolul V intitulat „Valoarea într-un punct a unei distribuții” arătându-se că această problemă este de fapt echivalentă cu problema mai veche a existenței unei derivate directe pentru o funcție continuă.

TEOREMA. Condiția necesară și suficientă pentru ca distribuția $f(x)$ să admită o valoare în punctul x_1 este ca în fiecare clasă de echivalență care definește pe $f(x)$ să existe un element (2. 1.) astfel ca funcția $f(x)$ să admită o derivată directă de ordinul k în x_1 .

Ultimul capitol al lucrării este consacrat ecuațiilor funcționale. Se indică posibilitatea aplicării teoriei distribuțiilor la rezolvarea unor ecuații funcționale obișnuite. Se știe că o largă clasă de ecuații funcționale se rezolvă relativ ușor în ipoteza funcției necunoscute indefinit derivabilă, însă prezintă greutăți deosebite în cazul în care funcția necunoscută este presupusă numai continuă sau sumabilă. Urmind o idee a lui Feenyő noi considerăm ecuația funcțională în cadrul distribuțiilor. Dacă rezolvarea ei în acest cadru mai larg conduce la funcții indefinit derivabile în sens obișnuit, înseamnă că acestea vor fi soluțiile ecuației funcționale obișnuite în care funcția necunoscută a fost presupusă continuă sau numai sumabilă. Cu această metodă se rezolvă anumite ecuații funcționale pentru care metoda lui Feenyő nu este direct aplicabilă.

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: acad. prof. G. Călugăreanu (Univ. „Babeș — Bolyai”)

REFERENȚI: acad. prof. A. Ghika (Univ. București) prof. dr. Th. Anghelcuță (Inst. politehnic Cluj), prof. dr. I. Climescu (Inst. politehnic Iași)

ȘEDINȚE DE COMUNICĂRI

În anul 1963 Facultățile de Matematică-Mecanică și Fizică au ținut următoarele ședințe de comunicări:

11 ianuarie

A. Ney, Despre rapiditatea convergenței a produselor infinite și îmbunătățirea ei.

I. Gy. Maurer — J. Vincze, Despre inele ciclice.

14 martie

F. Koch, Rezonanță electronică în câmpuri slabe neomogene.

V. Hitter, Magnetizarea prin impulsuri la efectul Procopiu.

12 aprilie

C. Kalik — P. Szilágyi, Despre rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet în cazul sistemelor eiptice.

A. Turcu, Oscilații subarmonice ale ecuației lui Duffing.

M. Țarină, Conexiuni subproiective și echiafine.

10 mai

P. Sandovici, Asupra unor varietăți dintr-un spațiu E_n .

G. h. Pic, Despre o teoremă a lui Hadamard.

I. K o l u m b á n, Despre comportarea asimptotică a aproximației funcțiilor cu operatori liniari pozitivi.

4 iunie

I. U r s u, Fenomene de suprafață gaz-solid.

V. M i n c u, Informare asupra cercetărilor facultății de chimie, secția Fizică-Chimie-București.

A. N i c u l a, Absorbția E.S.R. a ionului de cupru în cristalele poroase.

12 noiembrie

V. G r e c u, Studiul cărbunilor prin metoda rezonanței electronice de spin.

F. C o n s t a n t i n e s c u, Entropia sistemelor de spini în rezonanța magnetică.

25 noiembrie

A. N i c u l a, Rezonanța electronică de spin a ionului de Mn^{++} în zeoliți.

A. B ó d i, P. C i o a r ă, Determinarea-absolută a concentrației electronilor neimperecheți cu metoda R.E.S.

6 decembrie

M. Schechter, Ordonarea unor clase de echivalență.

V. Groze, Gh. Coman, O nomogramă optimă dintr-o clasă de nomograme cu puncte aliniată de ordinul 5.

A. I. Rus, Liniarizarea ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul n .

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI
ȘTIINȚIFICE INTERNAȚIONALE

26–29 august, Weimar. Sesiunea anuală a Societății Matematice din R. D. Germană.

Acad. prof. T. Popovici, Asupra unor funcții caracterizate prin inegalități funcționale liniare

Conf. E. Moldovan, Asupra aplicării teoriei grafelor la probleme de transport

Lect. A. Ney, Studiul convergenței, a accelerării ei și a evaluării restului seriilor cu termeni pozitivi cu ajutorul unor operatori.

4–13 octombrie, Sofia (R.P.Bulgaria). Prima ședință de lucru a comisiei țărilor socialiste de programare automată la mașinile electronice de calcul (G.A.M.S.) Conf. D. Stancu.

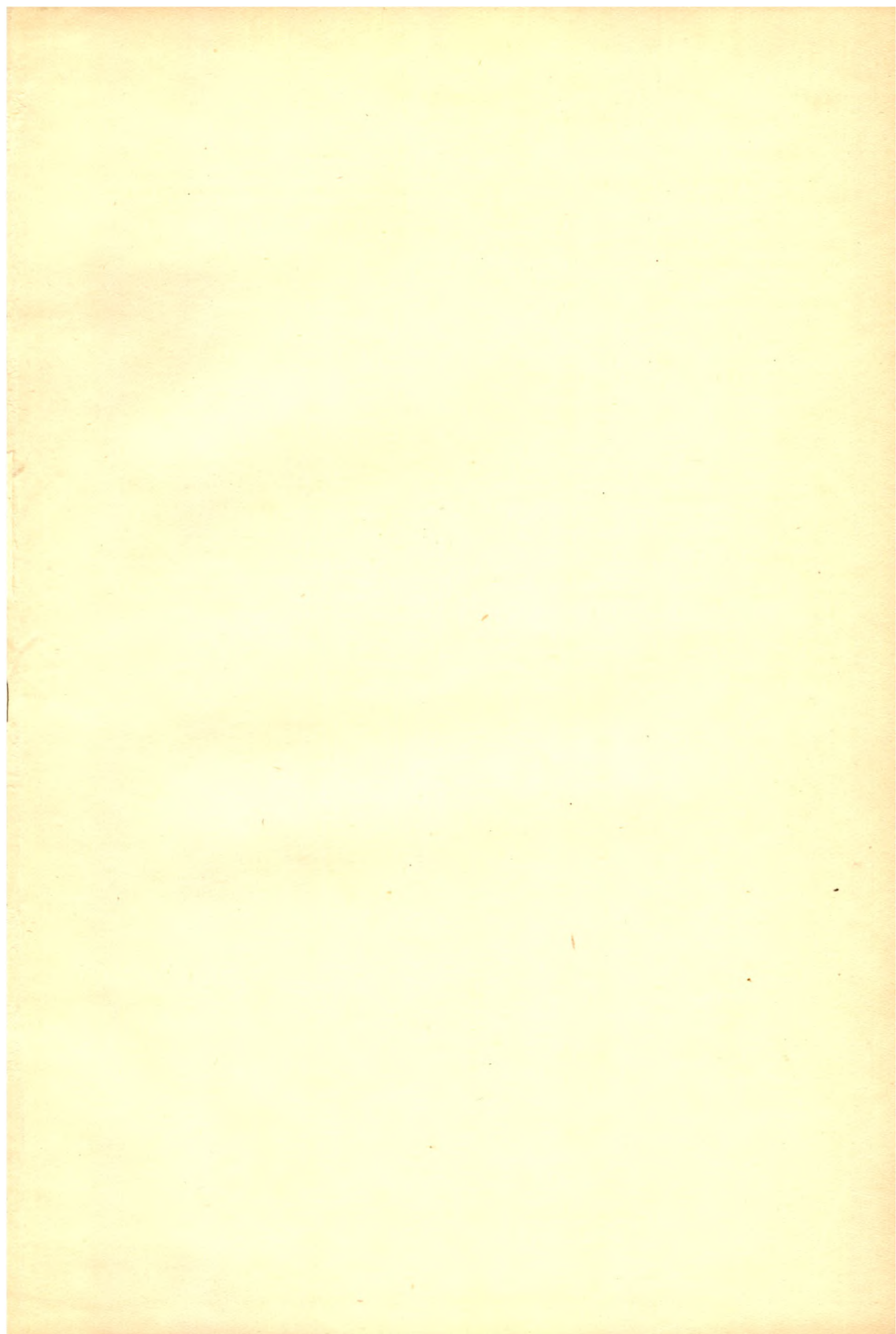
20–26 octombrie, Gatlinburg (Tennessee, S.U.A.). Conferința internațională de teoria aproximației organizată de „Society for Industrial and Applied Mathematics”

Conf. D. Stancu, Asupra restului unor formule liniare de aproximație în două al variabile.

7–21 noiembrie, Budapesta și Miskolc (R.P.Ungară). Vizite la Institutul de Matematică al Acad. de Științe al R.P. Ungare, Inst. politehnic din Budapesta și Miskolc Prof. D. V. Ionescu, Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale; Formule de tip Adams; Formule de cubatură.

19–23 decembrie, Moscova (U.R.S.S.). Consfătuirea reprezentanților țărilor socialiste în problema cercetării spațiului cosmic cu ajutorul sateliților artificiali ai Pământului.

Prof. Gh. Chiș, Dare de seamă asupra activității pe 1963.



43875