

491307

Ex. 3

STUDIA  
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1964

de 3100 - 1964

C L U J

527

În cel de al IX-lea an de apariție (1964) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);  
chimie (2 fascicule);  
geologie—geografie (2 fascicule);  
biologie (2 fascicule);  
filozofie—economie politică;  
psihologie—pedagogie;  
științe juridice;  
istorie (2 fascicule);  
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На IX году издания (1964), *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);  
химия (2 выпуска);  
геология—география (2 выпуска);  
биология (2 выпуска);  
психология—политэкономия;  
психология—педагогика;  
юридические науки;  
история (2 выпуска)  
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur IX-me année de publication (1964) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);  
chimie (2 fascicules);  
géologie—géographie (2 fascicules);  
biologie (2 fascicules);  
philosophie—économie politique;  
psychologie—pédagogie;  
sciences juridiques;  
histoire (2 fascicules);  
linguistique—littérature (2 fascicules).

491307

STUDIA  
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1964

*d 340 -1964*

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI  
Anul IX 1964

REDACTOR ŞEF:

Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTOR ŞEF ADJUNCT:

Acad. prof. ŞT. PÉTERFI



COMITETUL DE REDACŢIE AL SERIEI MATEMATICĂ-FIZICĂ:

Acad. prof. G. CALUGĂREANU (redactor responsabil), Prof. GH. CHIŞ,  
Prof. D. V. IONESCU, Prof. V. MARIAN, Prof. GH. PIC, Prof. I. URSU,  
membru coresp. Acad. R.P.R.

Redacţia.

CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1  
Telefon 34—50

## S U M A R

M. BALÁZS, D. BORȘAN, P. HAMBURG, Compatibilitatea relațiilor . . . . .	7
I. GY. MAURER, I. PURDEA, Despre o topologie în mulțimea relațiilor binare . . . . .	21
I. GY. MAURER, J. VINCZE, Despre inele ciclice . . . . .	25
B. ORBÁN, Aplicațiile curbelor polare generalizate . . . . .	29
F. RADÓ, Țesuturi ternare regulate . . . . .	39
M. ȚARINĂ, Spații subproiective echiafine . . . . .	61
A. NEY, Despre rapiditatea de convergență a produselor infinite și îmbunătățirea ei	67
GII. CHIȘ, Asupra variației perioadei binarei [fotometrice SZ. HERCULIS . . . . .	77
V. URECHE, Orbăta preliminară a binarei fotometrice V. Trianguli . . . . .	89
I. TODORAN, DP Aquarii . . . . .	99
I. STAN, S. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂȚAGĂ, Influența variației formei Pământului asupra mișcării sale . . . . .	105
A. NICULA, Determinarea timpurilor de relaxare $T_1$ și $T_2$ a ionului de Cu(II) în zeoliți de tip Y . . . . .	111
E. TĂȚARU, Comportarea circuitului oscilant conținând capacitatea neliniară a unei joncțiuni $p - n$ în regim de oscilații forțate . . . . .	117
M. VASIU, Asupra criteriului de instabilitate magnetogravitațională a unui mediu fluid viscos, cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație uniformă	123
F. KOCH, Cîteva aspecte ale rezonanței DPPH, $Cu^{2+}$ , $Mn^{2+}$ în cîmpuri slabe . . . . .	139

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

М. БАЛАЖ, Д. БОРШАН, П. ГАМБУРГ, Совместимость соотношений . . . . .	7
И. Д. МАУРЕР, И. ПУРДЯ, Об одной топологии в множестве бинарных соотношений. . . . .	21
И. Д. МАУРЕР, И. ВИНЦЕ, О циклических кольцах . . . . .	25
Б. ОРБАН, Применения обобщённых полярных кривых. . . . .	29
Ф. РАДО, Регулярные тернарные ткани . . . . .	39
М.ЦАРИНЭ, Эквивалентные подпроективные пространства . . . . .	61
А. НЕЙ, О скорости сходимости бесконечных произведений и об её улучшении	67
Г. КИШ, Об изменении периода фотометрической двойной звезды SZ. <i>Herculis</i>	77
В. УРЕКЕ, Предварительная орбита фотометрической бинарной V <i>Trianguli</i>	89
И. ТОДОРАН, DR <i>Aquarii</i> . . . . .	99
И. СТАН, Ш. ТОТ, Т. ПЕНЧУК, Е. БЭЦАГЭ, Влияние изменения формы Земли на её движение . . . . .	105
А. НИКУЛА, Определение времени релаксации $T_1$ и $T_2$ иона Cu (II) в цеолитах типа Y . . . . .	111
Е. ТЭТАРУ, Поведение колебательной цепи, содержащей нелинейную ёмкость перехода типа $p-n$ в режиме вынужденных колебаний . . . . .	117
М. ВАСИУ, О признаке магнитногравитационной неустойчивости вязкой жидкой среды с конечной удельной проводимостью в равномерном вращательном движении . . . . .	123
Ф. КОХ, О некоторых видах резонанса DРРН, $Su^{2+}$ , $Mu^{2+}$ в слабых полях. . .	139

## S O M M A I R E

M. BALÁZS, D. BORŞAN, P. HAMBURG, La compatibilité des relations . . . . .	7
I. GY. MAURER, I. PURDEA, Sur une topologie dans l'ensemble des relations binaires . . . . .	21
I. GY. MAURER, J. VINCZE, Sur les anneaux cycliques . . . . .	25
B. ORBÁN, Applications des courbes polaires généralisées . . . . .	29
F. RADÓ, Tissus ternaires réguliers . . . . .	39
M. ŢARINĂ, Espaces sous-projectifs équi-affines . . . . .	61
A. NEY, Sur la rapidité de convergence des produits infinis et son amélioration . . . . .	67
GH. CHIŞ, Sur la variation de la période de la binaire photométrique SZ Herculis . . . . .	77
V. URECHE, L'orbite préliminaire de la binaire photométrique V Trianguli . . . . .	89
I. TODORAN, DP Aquarii . . . . .	99
I. STAN, A. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂŢAGĂ, Influence de la variation de la forme de la Terre sur son mouvement . . . . .	105
A. NICULA, Détermination des temps de relaxation $T_1$ et $T_2$ de l'ion de Cu(II) dans les zéolithes de type Y . . . . .	111
E. TĂŢARU, Comportement du circuit oscillant contenant la capacité non-linéaire d'une jonction $p - n$ en régime d'oscillations forcées . . . . .	117
M. VASIU, Sur le critère d'instabilité magnéto-gravitationnelle d'un milieu fluide vis- queux, à conductivité électrique finie et en mouvement de rotation uniforme . . . . .	123
F. KOCH, Quelques aspects de la résonance de DPPH, $Cu^{2+}$ , $Mn^{2+}$ dans les champs faibles . . . . .	139





## COMPATIBILITATEA RELAȚIILOR

de

M. BALÁZS, D. BORŞAN, P. HAMBURG

§ 1. *Introducere.* În matematica modernă aplicațiile biunivoce ale unei mulțimi pe altă mulțime joacă un rol fundamental. Orice izomorfism, orice omeomorfism este o astfel de aplicație.

Fie  $E$  o mulțime dotată cu o relație de ordonare  $\sigma \subset E \times E$ . Printr-o aplicație biunivocă a mulțimii  $E$ , se definește o relație de ordonare într-o nouă mulțime  $F$ . Mai precis, dându-se o aplicație biunivocă  $f$  a mulțimii  $E$  pe mulțimea  $F$ , relația  $\tau = (f, f)\sigma$  va defini o ordonare în  $E$ .

Fie acum o relație  $\sigma \subset E \times E$ . Vom spune că această relație este semi-proiectivă dacă ea verifică condiția

$$x_1, x_2 \in \text{pr}_1\sigma \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sigma(x_1) \text{ și } \sigma(x_2) \text{ au în comun exact un element.}$$

Vom spune că  $\sigma$  este o relație proiectivă dacă atât  $\sigma$  cât și  $\sigma^{-1}$  sînt semi-proiective, și în acest caz cuplul  $(E, \sigma)$  se va numi plan proiectiv. Definiția aceasta este echivalentă cu axiomele (1), (2), (16), (17) din [5].

Fiind dat un plan proiectiv  $(E, \sigma)$  și o aplicație biunivocă  $f$  a mulțimii  $E$ , pe mulțimea  $F$ , relația  $\tau = (f, f)\sigma$  va defini o structură de plan proiectiv pe  $F$ .

Ne-am propus să studiem o problemă mai generală: fiind dată o relație  $\sigma \subset E \times E$ , care sînt acele corespondențe  $\pi: E \rightarrow F$  uni- sau multivoce, adică  $\pi \subset E \times F$ , care permit să definim în  $F \times F$  o relație  $\tau$  în felul următor:

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) \in \sigma; (e_1, f_1) \in \pi; (e_2, f_2) \in \pi &\Rightarrow (f_1, f_2) \in \tau \\ (e_1, e_2) \notin \sigma; (e_1, f_1) \in \pi, (e_2, f_2) \in \pi &\Rightarrow (f_1, f_2) \notin \tau. \end{aligned}$$

Pentru aceasta este evident necesar și suficient să nu avem simultan  $(f_1, f_2) \in \tau$  și  $(f_1, f_2) \notin \tau$  și cel puțin una dintre ele să aibă loc pentru un element oarecare  $(f_1, f_2) \in F \times F$ .

Condiția a doua este echivalentă cu  $\text{pr}_2 \pi = F$ . Prima în schimb, pretinde ca, oricare ar fi  $(f_1, f_2) \in F \times F$ , elementele  $e_1 \in E_1 = \pi^{-1}(f_1)$  și

<sup>1</sup> Pentru notații a se vedea de exemplu [6].

$e_2 \in E_2 = \pi^{-1}(f_2)$ , să fie sau toate în relația  $\sigma$  sau nici unele. Dacă această condiție este verificată, vom spune că relațiile  $\sigma$  și  $\pi$  sînt *compatibile*.

$\sigma$  și  $\pi$  fiind două relații oarecare în  $E \times E$ , respectiv  $E \times F$ , putem defini în  $F \times F$  6 relații în modul următor :

$$\tau_{ik} = \{ (f_1, f_2) \in F \times F : (\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \sigma_{ik} \}$$

Condiția de compatibilitate este echivalentă cu condiția  $\tau_{00} = \tau_{11}^2$ . Din acest motiv dăm explicit definiția celor două relații :

$$\tau_{11} = \{ (f_1, f_2) \in F \times F : \exists_{(e_1, e_2) \in \sigma} (e_1, f_1) \in \pi \wedge (e_2, f_2) \in \pi \}$$

$$\tau_{00} = \{ (f_1, f_2) \in F \times F : (e_1, f_1) \in \pi \wedge (e_2, f_2) \in \pi \rightarrow (e_1, e_2) \in \sigma \}$$

Dacă  $\sigma$  și  $\pi$  sînt compatibile, vom nota  $\tau_{00} = \tau_{11} = \tau$ .

**Exemplu.**

1. Fie  $E$  mulțimea numerelor reale,  $F$  mulțimea numerelor întregi, iar  $\sigma \subset E \times E$  relația de ordonare, deci  $(e_1, e_2) \in \sigma \Leftrightarrow e_1 < e_2$ . Definim relația  $\pi \subset E \times F$  în modul următor :  $(e, f) \in \pi \Leftrightarrow f < e$ . Relațiile  $\sigma$  și  $\pi$  astfel definite nu sînt compatibile. În adevăr, pentru orice  $f_1$  și  $f_2$  numere întregi avem  $(f_1, f_2) \in \tau_{11}$  și  $(f_1, f_2) \notin \tau_{00}$ .

2. Fie  $E$  și  $\sigma$  cele din exemplul precedent, iar  $F$  mulțimea numerelor complexe. Definim relația  $\pi$  astfel :  $(e, f) \in \pi \Leftrightarrow \text{Re}(f) = e$ . În acest caz  $\tau_{00} = \tau_{11}$  deci relațiile  $\sigma$  și  $\tau$  sînt compatibile.

§ 2. Pentru relația  $\tau_{11}$  este valabilă formula :

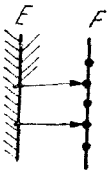


Fig. 1.

$$\tau_{11} = \pi \sigma \pi^{-1} \tag{2,1}$$

care, în caz de compatibilitate a relațiilor  $\sigma$  și  $\pi$ , permite exprimarea relației  $\tau \subset F \times F$  cu ajutorul primelor două <sup>3</sup>.

**Demonstrație.**

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) \in \pi \sigma \pi^{-1} &\Leftrightarrow \exists_{e_1 \in E} \exists_{e_2 \in E} (f_1, e_1) \in \pi^{-1} \wedge (e_1, e_2) \in \sigma \wedge (e_2, f_2) \in \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists_{(e_1, e_2) \in \sigma} (e_1, f_1) \in \pi^{-1} \wedge (e_2, f_2) \in \pi \Leftrightarrow (\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \tau_{11} \end{aligned}$$

Să urmărim acum în ce măsură relația  $\pi$  transmite anumite proprietăți ale relației  $\sigma$  relațiilor  $\tau_{ik}$ , fără și cu ipoteza compatibilității lui  $\sigma$  și  $\pi$ .

Dacă  $\sigma$  e reflexiv ( $\Delta \subset \sigma$ )  $\tau_{11}, \tau'_{11}, \tau''_{01}$  sînt reflexive. (2,2)

<sup>2</sup> D u b r e i l amintește această condiție în [4] exercițiul 6 cap. I, însă numai pentru cazul  $\pi_2 \pi = F$ .

<sup>3</sup> Vezi [1].

Într-o altă lucrare [1], am arătat că proprietatea de reflexivitate a relației  $\sigma$  este moștenită de relațiile  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma''_{01}$ . În acest caz oricare ar fi  $f \in F$ , are loc

$$\left( \overset{-1}{\pi}(f), \overset{-1}{\pi}(f) \right) \in \sigma_{11}, \sigma'_{01}, \sigma''_{01} \Rightarrow (f, f) \in \tau_{11}, \tau'_{01}, \tau''_{01}$$

Dacă  $\sigma$  este o relație simetrică ( $\sigma = \overset{-1}{\sigma}$ ), sînt simetrice  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{00}$  (2,3)

În adevăr :

$(f_1, f_2) \in \tau_{11} \Leftrightarrow \left( \overset{-1}{\pi}(f_1), \overset{-1}{\pi}(f_2) \right) \in \sigma_{11}$  însă după [1]  $\sigma = \overset{-1}{\sigma}$  implică  $\sigma_{11} = \overset{-1}{(\sigma_{11})}$  și  $\sigma_{00} = \overset{-1}{(\sigma_{00})}$  urmează deci

$$\left( \overset{-1}{\pi}(f_2), \overset{-1}{\pi}(f_1) \right) \in \sigma_{11} \Leftrightarrow (f_2, f_1) \in \tau_{11}.$$

În mod analog se stabilește simetria relației  $\tau_{00}$ .

Proprietatea de antisimetrie a relației  $\sigma$  ( $\sigma \cap \sigma \subset \Delta$ ) nu se transmite în general nici uneia dintre relațiile  $\tau_{ik}$ , deși relația  $\sigma_{00}$  păstrează această proprietate, vezi [1].

Dacă  $\sigma$  este tranzitiv ( $\sigma^2 \subset \sigma$ ), sînt tranzitive toate relațiile  $\tau_{ik}$  (2,4) cu excepția lui  $\tau_{11}$ <sup>4</sup>.

Să demonstrăm de exemplu tranzitivitatea relației  $\tau_{00}$  pentru celelalte  $\tau_{ik}$  procedîndu-se în mod analog.

Presupunem deci  $\sigma^2 \subset \sigma$  și fie  $(f_1, f_2) \in \tau_{00}$ .

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) \in \tau_{00} &\Leftrightarrow \exists_{f_3 \in F} (f_1, f_3) \in \tau_{00} \wedge (f_3, f_2) \in \tau_{00} \Leftrightarrow \exists_{f_3 \in F} \left( \overset{-1}{\pi}(f_1), \overset{-1}{\pi}(f_3) \right) \in \sigma_{00} \\ &\wedge \left( \overset{-1}{\pi}(f_3), \overset{-1}{\pi}(f_2) \right) \in \sigma_{00} \Rightarrow \left( \overset{-1}{\pi}(f_1), \overset{-1}{\pi}(f_2) \right) \in \sigma_{00}^2 \end{aligned}$$

Cum  $\sigma_{00}$  este prin ereditate tranzitiv — vezi [1] —  $\left( \overset{-1}{\pi}(f_1), \overset{-1}{\pi}(f_2) \right) \in \sigma_{00}$  adică  $(f_1, f_2) \in \tau_{00}$ .

Rezultatele de mai sus pot fi rezumate în următorul tabel, în care „nu” are semnificația că proprietatea lui  $\sigma$  corespunzătoare coloanei respective, nu se menține în general pentru relația  $\tau_{ik}$  corespunzătoare liniei în care figurează.

$\sigma$	reflexiv	simetric	antisimetric	tranzitiv
$\tau_{11}$	da	da	nu	nu
$\tau'_{01}$	da	nu	nu	da
$\tau''_{01}$	da	nu	nu	da
$\tau'_{10}$	nu	nu	nu	da
$\tau''_{10}$	nu	nu	nu	da
$\tau_{00}$	nu	da	nu	da

<sup>4</sup> Ereditatea reflexivității, simetriei și tranzitivității pentru  $\tau_{00}$  resp.  $\tau_{11}$  a fost găsită și de D u b r e i l în locul citat.

Observăm că dacă relațiile  $\sigma$  și  $\pi$  sînt compatibile, atunci  $\pi$  transmite proprietățile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate de la  $\sigma$  la  $\tau$ , în particular dacă  $\sigma$  este o echivalență compatibilă cu  $\pi$ ,  $\tau = \tau_{ik}$  este o echivalență. Proprietatea de semi-proiectivitate nu este ereditară de la  $\sigma$  la  $\tau$ , vezi exemplul final.

Enunțăm acum un criteriu de compatibilitate :

Pentru ca relațiile  $\sigma \subset E \times E$  și  $\pi \subset E \times F$  să fie compatibile, (2,4) este necesar și suficient  $\pi \pi \sigma \pi \pi \subset \sigma^5$

Presupunînd relațiile  $\sigma$  și  $\pi$  compatibile, deci  $\tau_{11} = \tau_{00}$  să arătăm că are loc incluziunea din enunț.

$$\begin{aligned} (e^*, e^{**}) \in \pi \pi \sigma \pi \pi &\Leftrightarrow \exists_{f_1 \in F} \exists_{e_1 \in E} \exists_{e_2 \in E} \exists_{f_2 \in F} (e^*, f_1) \in \pi \wedge (f_1, e_1) \in \pi \wedge \\ (e_1, e_2) \in \sigma \wedge (e_2, f_2) \in \pi \wedge (f_2, e^{**}) \in \pi &\Rightarrow \exists_{e_1 \in \pi(f_1)} \exists_{e_2 \in \pi(f_2)} (e_1, e_2) \in \sigma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \sigma_{11} &\Leftrightarrow (f_1, f_2) \in \tau_{11} = \tau_{00} \Leftrightarrow (\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \sigma_{00} \\ \text{Însă } e^* \in \pi^{-1}(f_1) \text{ și } e^{**} \in \pi^{-1}(f_2), \text{ deci } (e^*, e^{**}) \in \sigma. \end{aligned}$$

Reciproc, să presupunem acum  $\pi \pi \sigma \pi \pi \subset \sigma$  și să arătăm că  $\tau_{00} = \tau_{11}$ . Cum  $\tau_{00} \subset \tau_{11}$  — vezi [1] — rămîne de stabilit doar incluziunea contrară.

$$(f_1, f_2) \in \tau_{11} \Leftrightarrow (\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \sigma_{11} \Leftrightarrow \exists_{e_1 \in \pi^{-1}(f_1)} \exists_{e_2 \in \pi^{-1}(f_2)} (e_1, e_2) \in \sigma$$

Fie acum  $e^*, e^{**}$  două elemente arbitrare din  $\pi^{-1}(f_1)$  respectiv  $\pi^{-1}(f_2)$  :  
Avem :

$$\left. \begin{aligned} (e^*, f_1) \in \pi \\ (f_1, e_1) \in \pi \\ (e_1, e_2) \in \sigma \\ (e_2, f_2) \in \pi \\ (f_2, e^{**}) \in \pi \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (e^*, e^{**}) \in \pi \pi \sigma \pi \pi$$

și avînd în vedere ipoteza făcută, urmează  $(e^*, e^{**}) \in \sigma$  deci  $(\pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2)) \in \tau_{00}$ . Propoziția a fost demonstrată.

Pentru o mai bună înțelegere, considerăm util să dăm o ilustrare grafică acestei condiții. În acest scop concepem mulțimile  $E$  și  $F$  ca segmente și indicăm  $(e, f) \in \pi$  sau  $(e', e'') \in \sigma$  prin cîte o săgeată de la  $e$  la  $f$ , respectiv de la  $e'$  la  $e''$ .

<sup>5</sup> Rezultatul e mai general decît formulele date de D u b r e i l.

Condiția de compatibilitate enunțată mai sus, revine la implicația :

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, e_2) \in \sigma \\ (e_1, f_1) \in \pi \\ (e_2, f_2) \in \pi \\ (f_1, e^*) \in \pi^{-1} \\ (f_2, e^{**}) \in \pi^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow (e^*, e^{**}) \in \sigma$$

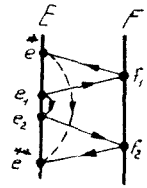


Fig. 2.

§ 3. Pentru unele cazuri particulare dăm următoarele rezultate :

Să considerăm o relație  $\sigma \subset E \times E$ , reflexivă ( $\Delta \subset \sigma$ ) și antisimetrică ( $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset \Delta$ ). În acest caz particular

O condiție necesară și suficientă de compatibilitate a relațiilor  $\sigma$  (3.1) și  $\pi \subset E \times F$ , este ca  $\pi$  să fie univalentă, adică

$$\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset \Rightarrow e_1 = e_2 \Leftrightarrow (e_1, e_2) \in \Delta.$$

În adevăr, să presupunem  $\sigma$  și  $\pi$  compatibile și fie  $e_1, e_2$  două elemente din  $E$ , pentru care  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset$ ; există deci  $f \in \pi(e_1) \cap \pi(e_2)$  și ( $\sigma$  fiind reflexiv) au loc apartenențele

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_1) \in \pi^{-1} \\ (e_1, e_1) \in \sigma \\ (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_2) \in \pi^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow (e_1, e_2) \in \pi \pi \sigma \pi \pi^{-1}$$

Însă relațiile  $\pi$  și  $\sigma$  fiind compatibile, conform criteriului de compatibilitate  $\pi \pi \sigma \pi \pi^{-1} \subset \sigma$ ; urmează deci  $(e_1, e_2) \in \sigma$  (fig. 3). În mod cu totul analog se stabilește  $(e_2, e_1) \in \sigma$ .  $\sigma$  fiind prin ipoteză antisimetrică, urmează  $(e_1, e_2) \in \Delta$ .

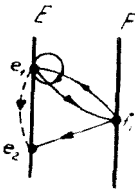


Fig. 3.

Reciproc fie  $\pi$  univalentă și  $(e_1, e_2) \in \pi \pi \sigma \pi \pi^{-1}$ ; există deci  $f_1, f_2 \in F$   $e^*, e^{**} \in E$  astfel încît

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, f_1) \in \pi \\ (f_1, e^*) \in \pi^{-1} \\ (e^*, e^{**}) \in \sigma \\ (e^{**}, f_2) \in \pi \\ (f_2, e_2) \in \pi^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e_1 = e^* \\ e_2 = e^{**} \end{array}$$

Cum  $(e^*, e^{**}) \in \sigma$  urmează că  $(e_1, e_2) \in \sigma$ .

**O b s e r v a ție.** În demonstrarea suficienței n-a intervenit reflexivitatea și antisimetria relației  $\sigma$ . Putem afirma deci că, o relație univalentă  $\pi \subset F \times F$ , este compatibilă cu orice relație  $\sigma \subset E \times E$ .

Fie  $\Delta \subset E \times E$  relația de egalitate; cum trebuie să fie relația  $\pi \subset E \times E$ , pentru ca  $\Delta$  și  $\pi$  să fie compatibile?

Răspunsul este dat de teorema :

*Necesar și suficient pentru ca  $\Delta$  și  $\pi$  să fie compatibile este ca  $\pi$  să (3,2) fie o relație univalentă.*

În adevăr, fie  $\Delta$  și  $\pi$  compatibile, deci conform criteriului (2,4)  $\pi^{-1} \pi \Delta \pi^{-1} \pi = (\pi^{-1} \pi)^2 \subset \Delta$  și  $e_1$  și  $e_2$  două elemente din  $\text{pr}_1 \pi$ , pentru care  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset$ , urmează că există  $f \in \pi(e_1) \cap \pi(e_2)$ , deci există  $f$  care dă loc apartenențelor

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_2) \in \pi \\ (e_2, f) \in \pi \\ (f, e_2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (e_1, e_2) \in (\pi^{-1} \pi)^2$$

și deci după ipoteza făcută  $(e_1, e_2) \in \Delta$ . (fig. 4).

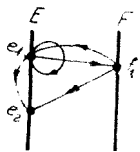


Fig. 4.

Reciproc, s-a văzut la cazul particular anterior că o relație univalentă e compatibilă cu orice relație  $\sigma$ .

Să presupunem acum că relația  $\sigma \subset E \times E$  este o echivalență. În acest caz:

*Condiția necesară și suficientă pentru compatibilitatea (3,3) relațiilor  $\sigma$  și  $\pi$  este ca*

$$\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset \Rightarrow (e_1, e_2) \in \sigma$$

condiție care se exprimă prin incluziunea  $\pi^{-1} \pi \subset \sigma$ .

Pentru demonstrarea necesității condiției observăm că  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset \Rightarrow (e_1, e_2) \in \sigma$ , utilizînd numai reflexivitatea relației (vezi (3,4)).

Reciproc, presupunînd  $\pi^{-1} \pi \subset \sigma$ , urmează  $\sigma \pi^{-1} \pi \subset \sigma^2$ ; relația  $\sigma$  fiind tranzitivă ( $\sigma^2 \subset \sigma$ ) avem  $\sigma \pi^{-1} \pi \subset \sigma$ , din care, prin compunere la stînga cu  $\pi^{-1} \pi$  obținem  $\pi^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \pi \subset \pi^{-1} \pi \sigma \subset \sigma$  i.e.t.d.

$\pi$  fiind o relație arbitrară din  $E \times F$ ,  $\pi^{-1} \pi$  este o relație din  $E \times E$ .

*Condiția necesară și suficientă pentru ca  $\pi^{-1} \pi$  și  $\pi$  să fie compatibile (3,4) este ca  $\pi^{-1} \pi$  să fie o relație tranzitivă.*

Condiția de compatibilitate devine în acest caz  $(\pi \pi)^3 \subset \pi \pi$ . Presupunând această condiție realizată, să arătăm că  $\pi \pi$  este o relație tranzitivă. Avînd în vedere că  $\Delta_{pr_1 \pi} \subset \pi \pi$  și  $\pi \Delta_{pr_1 \pi} = \pi$  (unde  $\Delta_{pr_1 \pi} = \Delta \cap (pr_1 \pi \times pr_1 \pi)$ ) putem scrie  $\pi \pi \cdot \pi \pi = \pi \pi \pi \Delta_{pr_1 \pi} \subset (\pi \pi)^3$ ; însă prin ipoteză  $(\pi \pi)^3 \subset \pi \pi$ ; urmează  $(\pi \pi)^2 \subset \pi \pi$ , incluziune care exprimă tranzitivitatea relației  $\pi \pi$ .

Reciproc, fie  $\pi \pi$  tranzitiv, deci  $(\pi \pi)^2 \subset \pi \pi$ . Avem  $(\pi \pi)^2 \subset \pi \pi \Rightarrow (\pi \pi)^3 \subset (\pi \pi)^2 \subset \pi \pi$  adică  $(\pi \pi)^3 \subset \pi \pi$ , deci  $\pi \pi$  și  $\pi$  sînt compatibile.

Tranzitivitatea relației  $\pi \pi$  revine la implicația

$$\left. \begin{aligned} (e_1, e_2) \in \pi \pi \\ (e_2, e_3) \in \pi \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow (e_1, e_3) \in \pi \pi$$

(vezi schema din fig. 5.)

COROLAR 1.  $\pi \pi$  este compatibil cu  $\pi$  atunci și numai atunci cînd  $\pi \pi$  este cvasi-echivalență.

În adevăr,  $\pi \pi$  este cvasi-reflexivă și simetrică, iar după teorema precedentă, pentru a fi compatibil cu  $\pi$  este necesar și suficient să fie o relație tranzitivă.

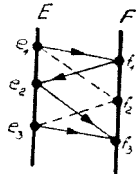


Fig. 5.

Fie  $\pi$  o relație semiunivocă adică  $\pi \pi \pi \subset \pi$ , ceea ce revine la implicația

$$\left. \begin{aligned} (e_1, f_1) \in \pi \\ (f_1, e_2) \in \pi \\ (e_2, f_2) \in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow (e_1, f_2) \in \pi$$

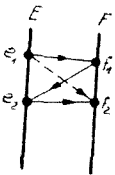


Fig. 6.

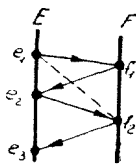


Fig. 7.

COROLAR 2. În acest caz  $\pi \pi$  și  $\pi$  sînt compatibile, adică semiunivocitatea relației  $\pi$  implică tranzitivitatea relației  $\pi \pi$  (vezi. fig. 6 și 7)

În adevăr  $\pi \pi \pi \subset \pi \Rightarrow (\pi \pi)^2 \subset \pi \pi$

OBSERVAȚII.  $\pi$  fiind compatibil cu  $\pi \pi$ ,  $\pi$  în general nu este compatibil cu  $\pi \pi$ ; chiar dacă ar fi, nu este în mod necesar semiunivocă.

Cum s-a văzut mai sus (corolar 1), în caz de compatibilitate a relațiilor  $\pi \pi$  și  $\pi$ ,  $\pi \pi$  este o cvasi-echivalență, deci definește o împărțire în

clase a mulțimii  $E_1 = \text{pr}_1 \pi$ . Ne propunem să studiem legătura dintre aceste clase și contraimaginile elementelor din  $F$ .

În cele ce urmează vom utiliza următoarele notații :

$\mathcal{P}(E)$  fiind mulțimea părților mulțimii  $E$  iar  $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  (deci o familie de părți ale lui  $E$ ), introducem notația  $|\mathcal{L}| = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ .

De asemenea  $\rho$  fiind o relație arbitrară, notăm prin  $\hat{\rho}$  închiderea ei tranzitivă, deci  $\hat{\rho} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \dots$ .

Revenind la problema propusă, să presupunem că  $\pi^{-1} \pi$  este o cvasi-echivalență și fie  $C_j$  clasele definite de această relație pe  $E_1 = \text{pr}_1 \pi$ .

Să considerăm familia de părți ale lui  $E$   $\mathcal{L} = \{ \pi^{-1}(f) \}_{f \in \text{pr}_1 \pi}$  și să considerăm relația  $R_1 \subset \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  definită în modul următor :

$$R_1 = \{ (L_1, L_2) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} : L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \} \text{ (vezi [2]) deci}$$

$$\left( \pi^{-1}(f_1), \pi^{-1}(f_2) \right) \in R_1 \Leftrightarrow \pi^{-1}(f_1) \cap \pi^{-1}(f_2) \neq \emptyset.$$

$R_1$  fiind o relație cvasi-reflexivă și simetrică,  $\hat{R}_1$  este o cvasi-echivalență, și anume o echivalență peste  $\mathcal{L}$ , și definește o împărțire în clase a mulțimii  $\mathcal{L}$ ; fie  $\mathcal{L}_i$  aceste clase.

Între mulțimile  $\{C_j\}_{j \in J}$  și  $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$  există o corespondență biunivocă, mai precis :  $\forall_{j \in J} \exists_{i \in I} C_j = |\mathcal{L}_i|$  și reciproc.

Demonstrație.

Fie  $e \in C_j \Rightarrow e \in \text{pr}_1 \pi = E_1 \Rightarrow \exists_{f \in F} e \in \pi^{-1}(f)$  însă  $\pi^{-1}(f) \in \mathcal{L}_i$  deci  $e \in |\mathcal{L}_i|$ . Deci un element arbitrar din  $C_j$  ne-a condus la o anumită clasă  $\mathcal{L}_i$ . Să arătăm acum că  $C_j = |\mathcal{L}_i|$ .

Pentru această fie  $e^* \in C_j$  și  $e^* \neq e$ ; avem  $(e, e^*) \in \pi^{-1} \pi \Rightarrow \exists_{f^* \in F} \{e, e^*\} \subset \pi^{-1}(f^*)$ . Cum însă  $e \in \pi^{-1}(f)$  urmează că  $\pi^{-1}(f^*) \cap \pi^{-1}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \left( \pi^{-1}(f), \pi^{-1}(f^*) \right) \in R_1 \subset \hat{R}_1$  deci  $\pi^{-1}(f^*) \in \mathcal{L}_i$ , ceea ce implică  $e^* \in |\mathcal{L}_i|$ . Are așadar loc incluziunea  $C_j \subset |\mathcal{L}_i|$ . Pentru a demonstra egaliitatea vom raționa prin contradicție. Presupunem deci că mulțimea  $|\mathcal{L}_i|$  posedă elemente care nu aparțin clasei  $C_j$ . Fie deci  $e' \in |\mathcal{L}_i|$  și  $e' \notin C_j$ .

$$e' \in |\mathcal{L}_i| \Rightarrow \exists_{f' \in F} e' \in \pi^{-1}(f').$$



Cum însă s-a stabilit că  $C_j \subset |\mathcal{L}_i|$  rezultă că

$$\begin{aligned} \forall_{e \in C_j} \exists_{f \in F} e \in \pi^{-1}(f) \wedge \pi^{-1}(f) \in \mathcal{L}_i; \text{ cum } \{\pi^{-1}(f'), \pi^{-1}(f)\} \subset \mathcal{L}_i \Rightarrow \\ \Rightarrow (\pi^{-1}(f'), \pi^{-1}(f)) \in \hat{R}_1 \Leftrightarrow \exists_{n \in N} (\pi^{-1}(f'), \pi^{-1}(f)) \in R_1 \text{ există} \end{aligned}$$

deci în mulțimea  $F$  elementele  $f_0 = f, f_1, f_2, \dots, f_n = f$ , astfel încît  $(\pi^{-1}(f_i), \pi^{-1}(f_{i+1})) \in R_1 \ i=0, 1, \dots, n-1$ , adică  $\pi^{-1}(f_i) \cap \pi^{-1}(f_{i+1}) \neq \emptyset \ i=0, \dots, n-1$ . Însă relațiile  $\pi^{-1} \pi$  și  $\pi$  s-au presupus compatibile, deci conform corolarului 1,  $\pi^{-1} \pi$  este tranzitivă; urmează atunci  $(e, e') \in \pi^{-1} \pi$  ceea ce este contradictoriu întrucît  $e \in C_j$  iar  $e' \notin C_j$ ;

Să arătăm acum că și reciproc pentru orice  $i$  există un indice  $j$  astfel încît  $|\mathcal{L}_i| = C_j$ .

$$\text{Fie } e \in |\mathcal{L}_i| \Rightarrow \exists_{f \in F} e \in \pi^{-1}(f) \Leftrightarrow e \in p_{r_1} \pi \Leftrightarrow \exists_{j \in J} e \in C_j;$$

urmează atunci, conform celor stabilite mai sus, că există  $i' \in I$  astfel încît

$$C_j = |\mathcal{L}_{i'}|; \text{ rezultă că } e \in |\mathcal{L}_{i'}| \text{ deci } \exists_{f' \in F} e \in \pi^{-1}(f'). \text{ Avem așadar } \pi^{-1}(f) \in \mathcal{L}_i, \pi^{-1}(f') \in \mathcal{L}_{i'} \text{ și } \pi^{-1}(f) \cap \pi^{-1}(f') \ni e \Rightarrow (\pi^{-1}(f), \pi^{-1}(f')) \in R_1 \text{ deci } \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i'}.$$

§. 4. Fie  $\Sigma(\pi)$  totalitatea relațiilor  $\sigma \subset E \times E$  compatibile cu o relație dată  $\pi \subset E \times F$ , iar  $\Pi(\sigma)$  mulțimea relațiilor  $\pi$  compatibile cu o relație  $\sigma$  dată.

După cazurile particulare din paragraful precedent să studiem acum mai general mulțimile  $\Sigma(\pi)$  și  $\Pi(\sigma)$ .

*Mulțimea  $\Sigma(\pi)$  este o sublatice complementară a mulțimii  $\mathcal{P}(E \times E)$ .* (4,1)

În adevăr, se demonstrează cu ușurință că reuniunea și intersecția a două relații compatibile cu  $\pi$  sînt compatibile cu  $\pi$ .

Fie  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  compatibile cu  $\pi$ , deci  $\pi^{-1} \pi \sigma_1 \pi^{-1} \pi \subset \sigma_1$  și  $\pi^{-1} \pi \sigma_2 \pi^{-1} \pi \subset \sigma_2$  -conform criteriului (2,5). Avînd în vedere comportarea operației de compunere față de reuniune, intersecție, incluziune (vezi R i g u e t [6] formulele 25, 26, 27), precum și incluziunile de mai sus, rezultă imediat

$$\pi^{-1} \pi (\sigma_1 \cup \sigma_2) \pi^{-1} \pi \subset \sigma_1 \cup \sigma_2 \text{ și } \pi^{-1} \pi (\sigma_1 \cap \sigma_2) \pi^{-1} \pi \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$$

care exprimă compatibilitatea relațiilor  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  și  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  cu  $\pi$ . Rezultatul se extinde imediat la reuniunea și intersecția unui număr oarecare de relații.

Fie acum  $\sigma$  o relație compatibilă cu  $\pi$  deci  $\pi^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \pi \subset \sigma$ ; să arătăm că relațiile  $C \sigma$  și  $\pi$  sînt de asemenea compatibile.

Pentru a stabili incluziunea  $\pi^{-1} \pi C \sigma \pi^{-1} \pi C \sigma$  raționăm prin contradicție. Presupunem deci că există  $(e_1, e_2) \in \pi^{-1} \pi C \sigma \pi^{-1} \pi$  și  $(e_1, e_2) \notin C \sigma$ . Există elementele  $f_1, f_2 \in F, e^*, e^{**} \in E$  astfel încît să avem

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, f_1) \in \pi \\ (f_1, e^*) \in \pi \\ (e^*, e^{**}) \in C \sigma \\ (e^{**}, f_2) \in \pi \\ (f_2, e_2) \in \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (e^*, f_1) \in \pi \\ (f_1, e_1) \in \pi \\ (e_1, e_2) \in \sigma \\ (e_2, f_2) \in \pi \\ (f_2, e^{**}) \in \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow (e^*, e^{**}) \in \pi^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \pi$$

$\sigma$  și  $\pi$  fiind compatibile, urmează că  $(e^*, e^{**}) \in \sigma$ , ceea ce este contradictoriu, cu  $(e^*, e^{**}) \in C \sigma$ .

Mai mult chiar,  $\sigma$  fiind o relație compatibilă cu  $\pi$ ,  $\sigma$  este de asemenea.

În adevăr, fie  $(e_1, e_2) \in \pi^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \pi$ ; există deci elementele  $f_1, f_2 \in F$  și  $e^*, e^{**} \in E$  astfel încît

$$\left. \begin{array}{l} (e_1, f_1) \in \pi \\ (f_1, e^*) \in \pi \\ (e^*, e^{**}) \in \sigma \\ (e^{**}, f_2) \in \pi \\ (f_2, e_2) \in \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (e_2, f_2) \in \pi \\ (f_2, e^{**}) \in \pi \\ (e^{**}, e^*) \in \sigma \\ (e^*, f_1) \in \pi \\ (f_1, e_1) \in \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow (e_2, e_1) \in \pi^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \pi$$

Cum  $\sigma$  și  $\pi$  sînt compatibile, urmează  $(e_2, e_1) \in \sigma$ , adică  $(e_1, e_2) \in \sigma$  c.e.t.d.

Evident  $\Sigma(\pi) \subset \mathcal{P}(E \times E)$ . Ne punem problema oare, în ce condiții are loc egalitatea acestor două mulțimi? Răspunsul este dat de teorema :

*Condiția necesară și suficientă pentru ca  $\Sigma(\pi) = \mathcal{P}(E \times E)$  adică (4,2) pentru ca orice relație din  $E \times E$  să fie compatibilă cu  $\pi$ , este ca relația  $\pi$  să fie univalentă.*

Condiția este suficientă conform observației făcută în §. 3., iar necesitatea ei este imediată dacă avem în vedere că pentru anumite relații  $\sigma \subset E \times E$ , particulare (de exemplu cazurile (3, 1) și (3, 2) din §. 3.), univalența relației  $\pi$  este o condiție necesară de compatibilitate.

Dacă  $I$  este mulțimea relațiilor univalente din  $E \times F$ , atunci pentru orice relație  $\sigma$  are loc  $I \subset \Pi(\sigma)$ , cum s-a văzut în § 3. Ne întrebăm acum, în ce condiții  $I = \Pi(\sigma)$ , deci cum trebuie să fie  $\sigma$  pentru ca numai relațiile univalente să fie compatibile cu  $\sigma$ ?

$$I = \Pi(\sigma) \Leftrightarrow |\mathcal{D}(\sigma) \cup \mathcal{D}(C\sigma)| = \Delta \tag{4,3}$$

unde  $\mathcal{D}(\sigma)$  reprezintă totalitatea subrelațiilor patratice ale lui  $\sigma$ . Condiția admite și următoarea formulare : oricare ar fi elementele distincte  $e_1, e_2$

din  $E$  dintre perechile  $(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_1), (e_2, e_2)$  cel puțin una să facă parte din  $\sigma$ , dar nu toate.

**Demonstrație.**

Pentru demonstrarea suficienței presupunem că pentru relația  $\sigma$  este verificată condiția din enunț, și fie  $\pi$  o relație arbitrară compatibilă cu  $\sigma$ . Să arătăm că  $\pi$  este o relație univalentă.

Pentru aceasta fie  $e_1, e_2$  două elemente din  $E$  pentru care  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) \neq \emptyset$ ; există deci în mulțimea  $F$  un element  $f$  pentru care

$$(e_1, f) \in \pi \text{ și } (e_2, f) \in \pi.$$

Există două posibilități :

$$a) (e_1, e_2) \in \sigma, \quad b) (e_1, e_2) \in C\sigma.$$

Examinăm numai cazul a), pentru cazul b) raționamentele făcându-se într-un totu analog.

Admitem deci că  $(e_1, e_2) \in \sigma$ ; atunci folosind compatibilitatea relațiilor  $\sigma$  și  $\pi$  se poate stabili cu ușurință că și  $(e_1, e_1) \in \sigma, (e_1, e_1) \in \sigma, (e_2, e_2) \in \sigma$ .

În adevăr,

$$\left. \begin{array}{l} (e_2, f) \in \pi \\ (f, e_1) \in \pi \\ (e_1, e_2) \in \sigma \\ (e_2, f) \in \pi \\ (f, e_1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (e_2, e_1) \in \sigma \quad \left. \begin{array}{l} (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_2) \in \pi \\ (e_2, e_1) \in \sigma \\ (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (e_1, e_1) \in \sigma \quad \left. \begin{array}{l} (e_2, f) \in \pi \\ (f, e_1) \in \pi \\ (e_1, e_2) \in \sigma \\ (e_1, f) \in \pi \\ (f, e_2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (e_2, e_2) \in \sigma$$

Notînd cu  $E^* = \{e_1, e_2\}$  urmează  $E^* \times E^* \subset \sigma$  deci că  $E^* \times E^* \in \mathcal{D}(\sigma)$  și avînd în vedere ipoteza făcută obținem  $\{(e_1, e_2)\} \subset \Delta$  deci  $e_1 = e_2$ , ceea ce dovedește univalența relației  $\pi$ .

Reciproc, să presupunem acum  $\Pi(\sigma) = I$  și să arătăm că este verificată condiția din enunț.

Observăm că incluziunea  $\Delta \subset |\mathcal{D}(\sigma) \cup \mathcal{D}(C\sigma)|$  are loc întotdeauna, întrucît pentru  $(e, e) \in \Delta$  avem

$$[(e, e) \in \sigma \vee (e, e) \in C\sigma] \Rightarrow [\{(e, e)\} \in \mathcal{D}(\sigma) \vee \{(e, e)\} \in \mathcal{D}(C\sigma)] \Rightarrow \\ \Rightarrow (e, e) \in |\mathcal{D}(\sigma) \cup \mathcal{D}(C\sigma)|$$

Să presupunem acum că  $(e_1, e_2) \in |\mathcal{D}(\sigma) \cup \mathcal{D}(C\sigma)|$  și  $(e_1, e_2) \notin \Delta$ . Fie  $\pi = \{(e_1, f), (e_2, f)\} \subset E \times F$ .

Însă atunci  $\pi$  și  $\sigma$  sînt compatibile, deși  $\pi \notin I$ , ceea ce contrazice ipoteza. Urmează că  $(e_1, e_2) \in \Delta$ , ceea ce demonstrează că  $|\mathcal{D}(\sigma) \cup \mathcal{D}(C\sigma)| \subset \Delta$ .

**Cazuri particulare.**

a) Dacă  $\Delta \subset \sigma$ , deci  $\sigma$  este o relație reflexivă, condiția e verificată atunci și numai atunci cînd  $\sigma \cap \sigma^{-1} = \Delta$ , deci cînd  $\sigma$  este o relație antisimetrică.

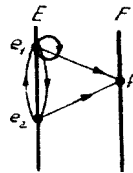


Fig. 8.

b) Dacă  $\sigma \subset C\Delta$  (antireflexivă), condiția e verificată dacă și numai dacă  $\sigma \cup \overset{-1}{\sigma} \subset \Delta$ .

§. 5. **Aplicații.** Ca aplicație, dăm un exemplu de relație neunivalentă compatibilă cu o structură de plan proiectiv.

Fie  $E$  planul proiectiv clasic, adică totalitatea punctelor și dreptelor din plan,  $d_1, d_2, d_3$  trei drepte paralele în plan. Mulțimea  $F$  să fie formată din punctele dreptelor  $d_2, d_3$ . Relația  $\sigma$  o definim așa :

$$(P, d) \in \sigma \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} P \text{ se găsește pe } d.$$

Să notăm cu  $\pi$  următoarea corespondență ( $\pi \subset E \times F$ ): O pereche de puncte  $(P_1, P_2) \in \pi \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (P_1, d_1) \in \sigma, (P_2, d_2) \in \sigma$  și dreapta  $P_1 P_2$  e perpendiculară pe  $d_1$ .

O dreaptă și un punct  $(d, P) \in \pi \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (P, d_3) \in \sigma, d$  neparalel cu  $d_1$ , iar  $P_0$  fiind intersecția lui  $d$  cu  $d_1$ , dreapta  $P_0 P$  e perpendiculară pe  $d_1$ .

Relația  $\pi$  este compatibilă cu  $\sigma$ ; ea nu este univalentă. Aceasta se datorește faptului că  $\text{pr}_1 \pi \neq E$ . Se poate arăta că dacă  $\text{pr}_1 \pi = E$ , atunci numai corespondențele univalente sînt compatibile cu  $\sigma$  (cel puțin în cazul cînd  $\text{pr}_1 \sigma \cap \text{pr}_2 \sigma = 0$ )

Avînd în vedere că relația  $\tau \subset F \times F$  nu e proiectivă, rezultă că proprietatea de semi-proiectivă, respectiv proiectivă, nu este ereditară de la  $\sigma$  la  $\tau_{ik}$ , nici chiar în cazul de compatibilitate.

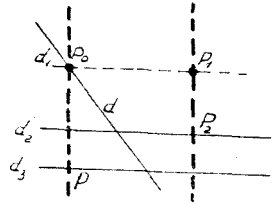


Fig. 9.

#### BIBLIOGRAFIE

1. M. Balázs, D. Borşan, P. Hamburg, M. Schechter, *Relations entre parties d'ensembles*. „Rev. Math. Pures et Appl.” II, 1962. Bucuresti.
2. Balázs, D. Borşan, P. Hamburg, M. Schechter, *Operatori în mulțimi de părți*. „Studii și cercetări de mat.” București, 1962. v. I
3. C. Berge, *Espaces topologiques — Fonctions multivoques*. Paris 1959.
4. Dubreil, *Algèbre*. Paris, 1954.
5. G. Pickert, *Projektive Ebenen*, „Die Grundlehren der math. Wiss.” tom. LXXX. Berlin, 1955.
6. T. Riguet, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*. „Bull. Soc. Math. de France”, LXXXVI, 1—4, 1958.

#### СОВМЕСТИМОСТЬ СООТНОШЕНИЙ

(Резюме)

В данной работе изучается связь, которая должна существовать между соотношением  $\sigma \subset E \times E$  и многозначным отображением  $\pi: E \rightarrow F$ , чтобы соотношение  $\sigma$  перешло однозначно через  $\pi$  на множество  $F$ , то есть  $C\pi\sigma\pi = \pi(C\sigma)\pi$ . Изучаются общие свойства, а также ряд частных случаев ( $\sigma$  возвратное, антисимметричное, симметричное, транзитивное и случай  $\sigma = \pi\pi$ ).

## LA COMPATIBILITÉ DES RELATIONS

(R é s u m é)

On étudie dans cette note le rapport qui doit exister entre une relation  $\sigma \subset E \times F$  et une application multivoque  $\pi : E \rightarrow F$  pour que la relation  $\sigma$  soit transposée de façon univoque par  $\pi$  sur l'ensemble  $F$ , c'est à dire pour que  $C \pi \sigma \pi = \pi (C \sigma) \pi$ . On étudie les propriétés générales ainsi qu'une série de cas particuliers ( $\sigma$  réflexif, antisymétrique, symétrique, transitif, de même que le cas où  $\sigma = \pi \pi$ ).



## DESPRE O TOPOLOGIE ÎN MULȚIMEA RELAȚIILOR BINARE

de

I. GY. MAURER și I. PURDEA

Fie  $\mathcal{R}$  mulțimea relațiilor binare definite în  $E \times F$ , unde  $E$  și  $F$  sînt două mulțimi oarecare. Dacă  $R \in \mathcal{R}$ , atunci se va nota cu  $S_R$  mulțimea reprezentativă a lui  $R$ , deci mulțimea perechilor oordonate de elemente  $(x, y) \in E \times F$ , pentru care avem  $xRy$ . Două relații  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  se zic egale atunci și numai atunci dacă  $S_{R_1} = S_{R_2}$ . Prin tăietura  $R(x)$  a lui  $R$  în raport cu elementul  $x \in E$  se înțelege mulțimea elementelor  $y \in F$  pentru care avem  $xRy$ . Reuniunea  $R_1 \cup R_2$  a relațiilor  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  este relația a cărei mulțime reprezentativă  $S_{R_1 \cup R_2} = S_{R_1} \cup S_{R_2}$ , deci  $x(R_1 R_2)y$  atunci și numai atunci dacă  $xR_1y$  sau  $xR_2y$ . Intersecția  $R_1 \cap R_2$  a relațiilor  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  este relația a cărei mulțime reprezentativă  $S_{R_1 \cap R_2} = S_{R_1} \cap S_{R_2}$ , deci  $x(R_1 \cap R_2)y$  atunci și numai atunci dacă  $xR_1y$  și  $xR_2y$ . În caz dacă  $F = E$ , atunci se definește produsul  $R_1 R_2$  al relațiilor  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  în felul următor :  $xR_1 R_2 y$  dacă și numai dacă există un  $z \in E$  astfel ca să avem  $xR_1 z$  și  $zR_2 y$ . Ne vom folosi de următoarele proprietăți : 1<sup>o</sup>.  $(R_1 \cup R_2)(x) = R_1(x) \cup R_2(x)$  ; 2<sup>o</sup>.  $(R_1 \cap R_2)(x) = R_1(x) \cap R_2(x)$  ; 3<sup>o</sup>. dacă  $F = E$ , atunci  $R_1 R_2(x) = R_1(R_2(x))$ , unde  $R_1(R_2(x)) = \bigcup_{x' \in R_2(x)} R_1(x')$  ; 4<sup>o</sup>.  $\mathcal{R}$  este un reticol (lattice) în raport cu operațiile „ $\cup$ ” și „ $\cap$ ” ; 5<sup>o</sup>. dacă  $F = E$ , atunci  $R$  este un semigrup cu element unitate în raport cu operația de înmulțire. Detalii asupra noțiunilor și proprietăților enumerate pot fi găsite de ex. în [1].

În cele ce urmează vom introduce o topologie în  $\mathcal{R}$  pe baza unei noțiuni de convergență, definită în felul următor :

**DEFINIȚIA 1.** Șirul de relații  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$  are ca limită relația  $R$ , atunci și numai atunci, dacă pentru orice  $x \in E$  există un număr natural  $N_x$  astfel ca să avem  $R(x) = R_n(x)$  pentru  $n > N_x$ .

Dacă șirul  $\{R_n\}$  are ca limită pe  $R$ , atunci vom scrie :  $R_n \rightarrow R$ .

Vom da și o altă definiție pentru noțiunea de convergență în  $\mathcal{R}$ , echivalentă cu definiția de mai sus. Considerăm mulțimea  $\mathcal{F}$  a aplicațiilor univoce ale mulțimii  $E$  în mulțimea  $\mathcal{D}(F)$  a părților lui  $F$ . Definim o corespondență univocă de la  $\mathcal{R}$  la  $\mathcal{F}$  în felul următor : dacă  $R \in \mathcal{R}$ , atunci facem să-i corespundă un  $f \in \mathcal{F}$ , definit de egalitatea  $f(x) = R(x)$  pentru orice  $x \in E$ . Această corespondență aplică mulțimea  $\mathcal{R}$  pe  $\mathcal{F}$ . Într-adevăr

fi  $f$  un element oarecare al lui  $\mathcal{F}$ . Definim o relație binară  $R \in \mathcal{R}$  în felul următor:  $xRy$  atunci și numai atunci, dacă  $y \in f(x) \in \mathcal{P}(F)$ . Atunci  $f$  va fi tocmai imaginea lui  $R$ , deoarece avem evident  $f(x) = R(x)$ . Vom arăta despre corespondența de mai sus că este și biunivocă: dacă  $R \rightarrow f$ ,  $R_1 \rightarrow f_1$  și  $R \neq R_1$  atunci și  $f \neq f_1$ . Presupunem prin absurd că  $f = f_1$  deci că  $f(x) = f_1(x)$  pentru orice  $x \in E$ . Rezultă că pentru orice  $x \in E$  avem  $R(x) = R_1(x)$ . De aici însă rezultă că  $R = R_1$ . Într-adevăr fie  $(x, y) \in S_R$ . Aceasta înseamnă că  $xRy$ . Rezultă că  $y \in R(x) = R_1(x)$ , deci  $xR_1y$  și de aici urmează că  $(x, y) \in R_1(x)$ , adică  $(x, y) \in S_{R_1}$ . Deci  $S_R \subseteq S_{R_1}$ . La fel se arată că  $S_{R_1} \subseteq S_R$ , deci  $S_R = S_{R_1}$ , ceea ce înseamnă că  $R = R_1$ , în contradicție cu ipoteza.

În  $\mathcal{F}$  se poate defini noțiunea de convergență ca și în cazul general al mulțimii aplicațiilor univoce ale unei mulțimi  $M$  într-o mulțime  $M'$  [2]: șirul  $\{f_n\}$  cu  $f_n \in \mathcal{F}$  are ca limită pe  $f \in \mathcal{F}$  atunci și numai atunci dacă pentru orice  $x \in E$  există un  $N_x$  astfel ca să avem  $f_n(x) = f(x)$  pentru  $n > N_x$ . Ținând seamă de corespondența biunivocă între mulțimile  $\mathcal{R}$  și  $\mathcal{F}$  definită de egalitatea  $f(x) = R(x)$  pentru orice  $x \in E$ , putem da următoarea definiție:

DEFINIȚIA 1'.  $R_n \rightarrow R$  atunci și numai atunci dacă  $f_n \rightarrow f$ , unde  $f_n (n = 1, 2, \dots)$  și  $f$  sînt imaginile lui  $R_n (n = 1, 2, \dots)$  și  $R$ .

Definițiile 1 și 1' fiind echivalente și ținînd seama de faptul că pe baza rezultatelor obținute în [2]  $\mathcal{F}$  este un spațiu topologic în raport cu noțiunea de convergență  $f_n \rightarrow f$  definită mai sus, putem formula următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 1.  $\mathcal{R}$  este un spațiu topologic complet în raport cu noțiunea de convergență introdusă prin definiția 1.

În cele ce urmează vom arăta continuitatea operațiilor în  $\mathcal{R}$ , definite în introducere.

PROPOZIȚIA 2. Operațiile de „ $\cup$ ” și „ $\cap$ ” sînt continue: din  $R_n \rightarrow R$ ,  $R'_n \rightarrow R'$  rezultă că  $R_n \cup R'_n \rightarrow R \cup R'$  și  $R_n \cap R'_n \rightarrow R \cap R'$ .

Într-adevăr, din  $R_n \rightarrow R$  și  $R'_n \rightarrow R'$  rezultă pentru orice  $x \in E$  existența a două numere naturale  $N_x$  și  $N'_x$  astfel ca să avem  $R_n(x) = R(x)$  pentru  $n > N_x$  și  $R'_n(x) = R'(x)$  pentru  $n > N'_x$ . Atunci pentru  $n > \max(N_x, N'_x)$  avem:  $(R_n \cup R'_n)(x) = R_n(x) \cup R'_n(x) = R(x) \cup R'(x) = (R \cup R')(x)$  și  $(R_n \cap R'_n)(x) = R_n(x) \cap R'_n(x) = R(x) \cap R'(x) = (R \cap R')(x)$ , ceea ce demonstrează propoziția.

PROPOZIȚIA 3. Dacă  $F = E$ , atunci operația de înmulțire este continuă: din  $R_n \rightarrow R$ ,  $R'_n \rightarrow R'$  rezultă că  $R_n R'_n \rightarrow RR'$ .

Pentru a demonstra această propoziție, trebuie să arătăm că pentru orice  $x \in E$  există un număr natural  $N_x$ , astfel ca să avem  $R_n R'_n(x) = RR'(x)$  pentru  $n > N_x$ .

Din  $R_n \rightarrow R$  și  $R'_n \rightarrow R'$  rezultă pentru orice  $x \in E$  existența a două numere naturale  $N_x$  și  $N'_x$ , astfel ca să avem  $R_n(x) = R(x)$  și  $R'_n(x) =$



$= R'(x)$ . Pentru  $n > \max(N_x, N'_x) = N_x$ , avem simultan:  $R_n(x) = R(x)$  și  $R'_n(x) = R'(x)$ .

Fie  $R_n R'_n$  un termen oarecare al șirului  $\{R_n R'_n\}$  de rang  $n > \bar{N}_x$  și  $y \in R_n R'_n(x)$ . Avem:  $R_n R'_n(x) = R_n(R'_n(x)) = R_n(R'(x)) = R_n R'(x)$ . Deci  $y \in R_n R'(x)$  ceea ce înseamnă că există un  $z \in E$ , astfel ca să avem  $xR_n y$  și  $zR'y$ . Din prima relație rezultă că  $z \in R_n(x) = R(x)$ , deci  $xRz$ . Avînd în vedere și relația  $zR'R'y$ , rezultă  $xR'R'y$ , de unde urmează că  $y \in RR'(x)$ . Deci pentru orice  $x \in E$  există un  $\bar{N}_x$  astfel ca să avem  $R_n R'_n(x) \leq RR'(x)$  pentru  $n > \bar{N}_x$ .

Fie acum  $y_1 \in RR'(x)$ . Avem:  $RR'(x) = R(R'(x)) = R(R'_n(x)) = RR'_n(x)$ . Deci  $y_1 \in RR'_n(x)$ , ceea ce înseamnă că există un  $z_1 \in E$ , astfel ca să avem  $xRz_1$  și  $z_1R'_n y_1$ . Din prima relație rezultă că  $z_1 \in R(x) = R_n(x)$ , deci  $xR_n z_1$ . Avînd în vedere și relația  $z_1R'_n y_1$ , rezultă  $xR_n R'_n y_1$ , de unde urmează că  $y_1 \in R_n R'_n(x)$ . Deci pentru orice  $x \in E$  există un  $\bar{N}_x$  astfel ca să avem  $RR'(x) \leq R_n R'_n(x)$  pentru  $n > \bar{N}_x$ .

Din compararea celor două incluziuni, rezultă egalitatea pe care ne-am propus s-o demonstrăm.

Folosind propozițiile 1 și 2 și proprietatea 4<sup>o</sup>, respectiv propozițiile 1 și 3 și proprietatea 5<sup>o</sup>, putem enunța următoarea teoremă:

**TEOREMĂ.** *Mulțimea  $\mathcal{R}$  a relațiilor binare definite în  $E \times F$  este un reticol topologic complet în raport cu operațiile „ $\cup$ ” și „ $\cap$ ”, și topologia introdusă prin definiția 1. Dacă  $F = E$ , atunci  $\mathcal{R}$  este un semigrup topologic complet în raport cu operația de înmulțire și cu topologia introdusă prin definiția 1.*

#### BIBLIOGRAFIE

1. J. Rignuet, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, „Bull. Soc. Math. de France”, LXXVI (1948), f. 1–6, p. 114–155.
2. I. Gy. Maurer, I. Purdea, I. Virág, *O topologie în spațiul aplicațiilor univoce ale unei mulțimi* (în curs de apariție).

#### ОБ ОДНОЙ ТОПОЛОГИИ В МНОЖЕСТВЕ БИНАРНЫХ СООТНОШЕНИЙ

(Резюме)

Пусть  $\mathcal{R}$  множество бинарных соотношений определенных в  $E \times F$ , где  $E$  и  $F$  — два каких-нибудь множества. Если  $R \in \mathcal{R}$ , тогда обозначается через  $S_R$  представительное множество множества  $R$ , то есть множество упорядоченных пар элементов  $(x, y) \in E \times F$ , для которых имеем  $xRy$ . Два соотношения  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  называются равными тогда, и только тогда, когда  $S_{R_1} = S_{R_2}$ . Срезом  $R(x)$  множества  $R$  по от-

по отношению к элементу  $x \in E$  понимается множество элементов  $y \in F$  для которых имеем  $x R y$ . Объединение  $R_1 \cup R_2$ , соответственно пересечение  $R_1 \cap R_2$  соотношений  $R_1, R_2$ ,  $\mathcal{R}$  являются соотношениями представительные множества которых суть  $S_{R_1 \cup R_2} = S_{R_1} \cup S_{R_2}$ , соответственно  $S_{R_1 \cap R_2} = S_{R_1} \cap S_{R_2}$ . Если  $F = E$ , тогда произведение  $R_1 R_2$  определяется следующим образом:  $x R_1 R_2 y$  тогда и только тогда, когда существует одно  $z \in E$ , так, чтобы иметь  $x R_1 z$  и  $z R_2 y$ .

В данной работе вводится одна топология в  $\mathcal{R}$  на основе одного понятия сходимости, данное

*Определением 1.* Последовательность соотношений  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$  имеет пределом соотношение  $R$  тогда, и только тогда, когда для любого  $x \in E$  существует натуральное число  $N_x$ , так, чтобы иметь  $R_n(x) = R(x)$  для  $n > N_x$ .

Доказывается следующая

*Теорема.* Множество  $\mathcal{R}$  бинарных соотношений, определённых в  $E \times F$ , является полной топологической сеткой по отношению к операциям „ $\cup$ “ и „ $\cap$ “ и к топологии, введённой определением  $N^\circ 1$ . Если  $F = E$ , тогда  $\mathcal{R}$  является полной топологической полугруппой по отношению к операции умножения и к топологии введённой определением  $N^\circ 1$ .

## SUR UNE TOPOLOGIE DANS L'ENSEMBLE DES RELATIONS BINAIRES

(R é s u m é)

Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des relations binaires définies en  $E \times F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux ensembles quelconques. Si  $R \in \mathcal{R}$ , on note alors par  $S_R$  l'ensemble représentatif de  $R$ , donc l'ensemble des paires ordonnées d'éléments  $(x, y) \in E \times F$ , pour lesquels nous avons  $x R y$ . Deux relations  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  sont dites égales lorsque  $S_{R_1} = S_{R_2}$  et seulement alors. Par la coupure  $R(x)$  de  $R$  par rapport à l'élément  $x \in E$  on entend l'ensemble des éléments  $y \in F$  pour lesquels on a  $x R y$ . La réunion  $R_1 \cup R_2$  et, respectivement, l'intersection  $R_1 \cap R_2$  des relations  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  sont les relations dont les ensembles représentatifs sont:  $S_{R_1 \cup R_2} = S_{R_1} \cup S_{R_2}$  et, respectivement  $S_{R_1 \cap R_2} = S_{R_1} \cap S_{R_2}$ . Si  $F = E$ , le produit  $R_1 R_2$  se définit ainsi:  $x R_1 R_2 y$ , alors et alors seulement s'il existe un  $z \in E$  de sorte qu'on ait  $x R_1 z$  et  $z R_2 y$ .

Dans le présent article on introduit une topologie  $\mathcal{R}$  sur la base d'une notion de convergence donnée par:

*Définition 1:* La suite de relations  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$  a comme limite la relation  $R$  dans le cas et seulement dans le cas où pour tout  $x \in E$  il existe un nombre naturel  $N_x$  tel que nous ayons  $R_n(x) = R(x)$  pour  $n > N_x$ .

On démontre le théorème suivant:

*THÉOREME.* L'ensemble  $\mathcal{R}$  des relations binaires définies en  $E \times F$  est un treillis topologique complet par rapport aux opérations  $\cup$  et  $\cap$  et à la topologie introduite par la définition 1. Si  $F = E$  alors  $\mathcal{R}$  est un demi-groupe topologique complet par rapport à l'opération de multiplication et à la topologie introduite par la définition 1.

## DESPRE INELE CICLICE

de

I. GY. MAURER și J. VINCZE

Un inel  $R$  se numește *ciclic*, dacă și numai dacă modulul (grupul aditiv)  $R^+$  al lui  $R$  este un grup ciclic.

F. Szász a stabilit următoarea proprietate caracteristică a grupurilor ciclice [1]: un grup  $G$  este atunci și numai atunci ciclic, dacă pentru orice subgrup  $H$  al lui  $G$  se poate găsi un număr întreg  $k$  astfel ca să avem  $H = G^k$ , unde  $G^k$  reprezintă subgrupul lui  $G$ , generat de puterile  $g^k$  ale elementelor lui  $G$ .

Folosind această proprietate, tot F. Szász a caracterizat inelele ciclice în felul următor [2]: Un inel  $R$  este ciclic atunci și numai atunci, dacă pentru orice subinel  $S$  al lui  $R$ , există un număr întreg  $k$ , astfel ca să avem  $S = kR$ , unde  $kR$  reprezintă totalitatea elementelor de forma  $kr$  ( $r \in R$ ).

G. Pic a reușit să caracterizeze grupurile ciclice finite printr-o altă proprietate mai slabă și anume [3]: un grup finit  $G$  este atunci și numai atunci ciclic, dacă pentru orice subgrup  $H$  al lui  $G$  există un număr întreg  $k$ , astfel ca să avem  $H = G_k$ , unde  $G_k$  reprezintă subgrupul lui  $G$ , generat de elementele  $g \in G$  pentru care avem  $g^k = e$ . Aici s-a notat cu  $e$  elementul unitate al lui  $G$ .

**Observație.** Un studiu mai atent al lucrării [3], ne arată că la demonstrația teoremei din această lucrare nu este necesar să presupunem că grupul  $G$  este finit, ci este suficient a presupune că elementele lui  $G$  au ordin finit. Deci caracterizarea de mai sus a grupurilor ciclice, datorită lui G. Pic, este valabilă pentru orice grup  $G$ , a cărui elemente sînt de ordin finit.

Pornind de la acest rezultat, vom da în această notă o caracterizare a unei clase de inele ciclice. Acest rezultat este în aceeași relație cu rezultatul lui F. Szász din lucrarea [2], ca și teoremele asupra grupurilor din lucrările [3] și [1]. Observăm, că pentru teoremele enunțate mai jos, vom da o demonstrație elementară. Ar fi interesant să se studieze posibilitatea unei demonstrații elementare pentru teorema lui F. Szász din lucrarea [2]. În continuare se studiază structura inelelor ciclice considerate.

Prealabil vom enunța cîteva leme, care prezintă interes și în sine.

Fie  $R$  un inel oarecare,  $R^+$  modulul lui  $R$  și  $k$  un număr întreg.

LEMA 1. Totalitatea  $T_k$  a elementelor  $r$  ale inelului  $R$  care satisfac condiția  $kr=0$ , formează un subgrup  $[T_k]_{R^+}$  în modulul  $R^+$  și un ideal  $[T_k]_R$  în inelul  $R$ .

Într-adevăr, fie  $r_1$  și  $r_2$  două elemente arbitrare, pentru care avem :  $kr_1=0$  și  $kr_2=0$ . Atunci și diferența acestor două elemente satisface această condiție :  $k(r_1-r_2)=kr_1-kr_2=0-0=0$ . Deci prima afirmație a lemei este adevărată. Pentru a demonstra și a doua parte a lemei, trebuie să mai arătăm, că dacă elementul  $r_1$  are proprietatea  $kr_1=0$ , iar  $r$  este un element oarecare al lui  $R$ , atunci  $k(r_1r)=0$  și  $k(rr_1)=0$ . Într-adevăr :  $k(r_1r)=(kr_1)r=0 \cdot r=0$  și  $k(rr_1)=r(kr_1)=r \cdot 0=0$ .

COROLAR. Subgrupul  $(R^+)_k$  al modulului  $R^+$ , respectiv subinelul  $R_k$  al inelului  $R$ , generat de elementele  $r \in R$  pentru care avem proprietatea  $kr=0$ , coincide cu totalitatea acestor elemente :

$$(R^+)_k = [T_k]_{R^+} \text{ și } R_k = [T_k]_R.$$

Pe baza lemei 1 rezultă și faptul, că subinelul  $R_k$  este un ideal al inelului  $R$ .

Din a doua egalitate de mai sus rezultă că  $(R_k)^+ = [T_k]_{R^+}$ , unde  $(R_k)^+$  reprezintă modulul inelului  $R_k$ . Comparînd această egalitate cu prima egalitate de mai sus, deducem următoarea leamnă :

LEMA 2.  $(R^+)_k = (R_k)^+$ .

În sfîrșit pe baza teoremei lui G. PIC [3], avînd în vedere și observația noastră din introducere, se poate formula următoarea leamnă :

LEMA 3. Fie modulul  $R^+$  al inelului  $R$  un grup cu torsiune\*. Modulul  $R^+$  este atunci și numai atunci un grup ciclic, dacă pentru orice subgrup  $S^+$  al lui  $R^+$  există un număr întreg  $k$  astfel ca să avem  $S^+ = (R^+)_k$ .

Pe baza considerațiilor de mai sus, deducem o caracterizare a acelor inele ciclice  $R$ , pentru care modulul  $R^+$  este un grup cu torsiune :

TEOREMA 1. Fie  $R$  un inel pentru care modulul  $R^+$  este un grup cu torsiune. Inelul  $R$  este atunci și numai atunci ciclic, dacă pentru orice subinel  $S$  al lui  $R$  există un număr întreg  $k$  astfel ca să avem  $S = R_k$ .

DEMONSTRAȚIE. Fie  $R$  un inel ciclic și  $S$  un subinel oarecare al lui  $R$ . Din definiția inelelor ciclice, rezultă că  $R^+$  este un grup ciclic. Aplicînd lema 3 și lema 2, deducem :  $S^+ = (R^+)_k = (R_k)^+$ . De aici rezultă că  $S = R_k$ , deci condiția este necesară.

Condiția este și suficientă. Într-adevăr, să presupunem, că orice subinel  $S$  al inelului  $R$  este de forma  $S = R_k$ . Fie  $S^+$  un subgrup oarecare al lui  $R^+$ . Considerăm subinelul  $S$  al lui  $R$ , generat de elementele lui  $S^+$ . Folosindu-ne de ipoteza  $S = R_k$  și de lema 2, deducem :  $S^+ = (R_k)^+ = (R^+)_k$ . Rezultă conform lemei 3, că  $R^+$  este un grup ciclic. Deci  $R$  este un inel ciclic.

Folosind rezultatele formulate în lema 1, în corolarul lemei 1, precum și în lema 2, deducem pe baza teoremei de mai sus următoarea teoremă :

\* Are numai elemente de ordin finit.

**TEOREMA 2.** Dacă  $R$  este un inel ciclic pentru care modulul  $R^+$  este un grup cu torsionă, atunci: a) orice subinel al lui  $R$  este un ideal în  $R$ , b) un ideal oarecare al lui  $R$  este format de totalitatea elementelor  $r \in R$ , care au proprietatea  $kr = 0$  ( $k$  — număr întreg) și c) între mulțimea idealelor lui  $R$  și mulțimea subgrupurilor modulului  $R^+$  există o corespondență biunivocă.

În sfârșit considerăm exemplul inelului (ciclic) al claselor de resturi de întregi în raport cu modulul 6:  $R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ . Subinelele (în același timp și idealele) lui  $R$  sînt următoarele:  $\{\overline{0}\} = R_0$ ,  $\{\overline{0}, \overline{3}\} = R_2$ ,  $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = R_3$ ,  $R = R_6$ . Se constată ușor, că aceste ideale sînt formate de totalitatea elementelor  $\overline{x} \in R$ , care satisfac condiția  $k\overline{x} = \overline{0}$  ( $k = 0$ ,  $k = 2$ ,  $k = 3$ ,  $k = 6$ ) și că subgrupurile lui  $R^+$  sînt tocmai  $\{\overline{0}\}$ ,  $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ ,  $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$  și  $(R_6)^+$ .

#### BIBLIOGRAFIE

1. F. Szász, *Characterization of the Cyclic Groups*, „Revue de Mathématiques Pures et Appliquées, Acad. R.P.R.”, **1**, 1956, nr. 2, 13—16.
2. F. Szász, *Két gyűrűelméleti problémáról*, „Magyar Tud. Akadémia Mat. és Fiz. Tudományok Közleményei”, **VI**, 1956, nr. 2, 213—218.
3. G. Pic, *Despre caracterizarea grupurilor ciclice*, „Comunicările Acad. R.P.R.”, **VI**, 1956, nr. 2, 235—238.

#### О ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЬЦАХ

(Резюме)

Кольцо  $R$  называется *циклическим*, тогда и только тогда, когда модуль (группа сложения)  $R^+$  кольца  $R$  является циклической группой. В данной работе приводятся характеристика тех циклических колец  $R$ , для которых  $R^+$  является группой кручения, (то есть имеющей лишь элементы конечного порядка) и изучается структура этих колец.

Устанавливаются следующие предложения:

**Лемма 1.** Совокупность  $T_k$  элементов  $r \in R$ , удовлетворяющих условию  $kr = 0$  ( $k$  — целое число) составляет подгруппу  $[T_k]_{R^+}$  в модуле  $R^+$  и идеал  $[T_k]_R$  в кольце  $R$ . Подгруппа  $(R^+)_k$  модуля  $R^+$ , соответственно подкольцо  $R_k$  кольца  $R$ , производимый элементами, имеющими свойство  $kr = 0$  совпадает с совокупностью этих элементов:  $(R^+)_k = [T_k]_{R^+}$  и  $R_k = [T_k]_R$ .

Если обозначать через  $(R_k)^+$  модуль кольца  $R_k$ , тогда имеем:

**Лемма 2.**  $(R^+)_k = (R_k)^+$

**Лемма 3.** Пусть модуль  $R^+$  кольца  $R$  — группа кручения. Модуль  $R^+$  является циклической группой тогда, и только тогда, если для всякой подгруппы  $S^+$  группы  $R^+$  существует целое число  $k$ , так, чтобы имели  $S^+ = (R^+)_k$ .

Используя эти леммы, доказываются следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $R$  — кольцо для которого модуль  $R^+$  является группой кручения. Кольцо  $R$  является тогда и только тогда циклическим, если для всякого подкольца  $S$  кольца  $R$  существует целое число  $k$ , так, чтобы имели  $S = R_k$ .

*Теорема 2. Если  $R$  — циклическое кольцо для которого модуль  $R^+$  является группой кручения, тогда а) всякое подкольцо кольца  $R$  есть идеал в  $R$ , б) некоторый идеал кольца  $R$  образован совокупностью элементов  $r \in R$ , имеющих свойство  $kr = 0$  ( $k$  — целое число) и в) между множеством идеалов кольца  $R$  и множеством подгрупп модуля  $R^+$  существует взаимно однозначное соответствие.*

## SUR LES ANNEAUX CYCLIQUES

(R é s u m é)

Un anneau  $R$  se nomme *cyclique* dans le cas et dans le cas seulement où le module (le groupe additif)  $R^+$  de  $R$  est un groupe cyclique. Dans leur article les auteurs donnent une caractérisation des anneaux cycliques  $R$  pour lesquels  $R^+$  est un groupe à torsion (donc n'a que des éléments d'ordre fini) et ils étudient la structure de ces anneaux.

On établit les propositions suivantes :

**LEMME 1.** *La totalité  $T_k$  des éléments  $r \in R$  qui satisfont à la condition  $kr = 0$  ( $k$  nombre entier) forment un sous-groupe  $[T_k]_{R^+}$  dans le module  $R^+$  et un idéal  $[T_k]_R$  dans l'anneau  $R$ .*

**COROLLAIRE.** Le sous-groupe  $(R^+)_k$  du module  $R^+$ , respectivement le sous-anneau  $R^+_k$  de l'anneau  $R$ , engendré par les éléments  $r \in R$  pour lesquels nous avons la propriété  $kr = 0$ , coïncide avec la totalité de ces éléments :  $[R^+]_k = [T_k]_{R^+}$  et  $R_k = [T_k]_R$ .

Si l'on note par  $(R_k)^+$  le module de l'anneau  $R_k$ , on a alors :

**LEMME 2.**  $(R^+)_k = (R_k)^+$

**LEMME 3.** *Soit le module  $R^+$  de l'anneau  $R$  un groupe à torsion. Le module  $R^+$  est alors et alors seulement un groupe cyclique si, pour tout sous-groupe  $S^+$  de  $R^+$ , il existe un nombre entier  $k$  tel que nous avons  $S^+ = (R^+)_k$ .*

En s'appuyant sur les lemmes précédents on démontre les théorèmes suivants :

**THÉOREME 1.** *Soit  $R$  un anneau par lequel le module  $R^+$  est un groupe à torsion. L'anneau  $R$  est cyclique au cas et au cas seulement où, pour tout sous-anneau  $S$  de  $R$ , il existe un nombre entier  $k$  tel qu'on ait  $S = R_k$ .*

**THÉOREME 2.** *Si  $R$  est un anneau cyclique pour lequel le module  $R^+$  est un groupe à torsion, alors : a) tout sous-anneau de  $R$  est un idéal en  $R$ ; b) un idéal quelconque de  $R$  est formé de la totalité des éléments  $r \in R$  qui ont la propriété  $kr = 0$  ( $k$ , nombre entier); c) entre l'ensemble des idéaux de  $R$  et l'ensemble des sous-groupes du module  $R^+$  il existe une correspondance biunivoque.*

## APLICAȚIILE CURBELOR POLARE GENERALIZATE

de

B. ORBĂN

În lucrarea autorului „Despre curbele polare generalizate” [1] s-au definit curbele polare generalizate ale unei curbe algebrice  $(C)$  în raport cu o altă curbă algebrică  $(K)$  și s-au studiat proprietățile generale ale acestor curbe. În lucrarea de față vom da câteva aplicații ale acestor curbe la studiul cuartecelor și cubicelor. Considerând cuartecile și cubicele ca niște curbe polare generalizate, vom stabili metode de generare, proprietăți și relații noi pentru aceste curbe.

I. TEOREMA 1. În planul proiectiv complex fie  $(C)$  și  $(K)$  două conice care nu sînt tangente și dintre care  $(C)$  este o conică proprie. Curba polară generalizată a conicei  $(C)$  în raport cu conica  $(K)$  este o cuartică  $(\Gamma)$  care

- este tangentă la  $(C)$  în punctele de intersecție ale ei cu conica  $(K)$  ;
- trece prin punctele de contact ale tangentelor comune la curbele  $(C)$  și  $(K)$  așezate pe  $(K)$  ;
- admite vîrfurile triunghiului polar comun al conicelor  $(C)$  și  $(K)$  ca noduri de inflexiune ;
- rămîne invariantă dacă în locul lui  $(K)$  considerăm o conică arbitrară din fascicolul de conice determinate de  $(C)$  și  $(K)$ .

DEMONSTRAȚIE. Conform definiției curbei polare generalizate date în lucrarea amintită, punctele curbei  $(\Gamma)$  se obțin intersectînd tangentele la conică  $(C)$  cu polarele punctelor de contact față de conica  $(K)$ . Din teoremele 1, 2 și 6 ale lucrării [1] rezultă direct că curba  $(\Gamma)$  este o cuartică și că enunțurile *a*) și *b*) sînt adevărate.

Să demonstrăm acum că vîrfurile triunghiului polar comun al conicelor  $(C)$  și  $(K)$  sînt noduri pentru  $(\Gamma)$ . Fie  $A_1$  un vîrf al acestui triunghi polar comun și să notăm cu  $T_1'$  și  $T_2''$  punctele de contact ale tangentelor duse din  $A_1$  la  $(C)$ . Conform definiției curbei  $(\Gamma)$  și a tringhiului polar, tangentelor de mai sus le corespunde același punct al curbei  $(\Gamma)$ , deci acest punct este un nod.

Ca să demonstrăm restul enunțului *c*) și enunțul *d*) vom arăta că curba  $(\Gamma)$  este transformata curbei  $(C)$  într-o transformare quadratică. Vom considera transformarea la care fiecărui punct  $P$  din plan îi cores-

punde punctul de intersecție al polarelor punctului  $P$  față de conicele date  $(C)$  și  $(K)$ . Această transformare quadratică și involutorie a fost introdusă de J. Steiner [2]. Conform definiției, curba  $(\Gamma)$  este chiar transformata conicei  $(C)$  în această transformare. Fiindcă polarele unui punct față de conicele unui fascicul de conice trec printr-un punct fix, transformarea de mai sus nu se schimbă înlocuind conica  $(K)$  cu o conică arbitrară  $(K')$  din fasciculul determinat de conicele  $(C)$  și  $(K)$ . Aceasta înseamnă că enunțul  $d)$  al teoremei 1 este demonstrat. Transformarea astfel introdusă (după cum se vede ușor) este quadratică și admite ca triunghi fundamental triunghiul polar comun al conicelor  $(C)$  și  $(K)$ . Ne vom referi acum la următoarea proprietate cunoscută a transformărilor cuadractice: Dacă tangenta la o curbă într-un punct de intersecție al ei cu o latură fundamentală a transformării trece prin vârful fundamental opus, atunci transformata curbei prin transformarea quadratică va admite acest vîrf fundamental ca punct de inflexiune [3]. În cazul nostru căutăm transformata curbei  $(C)$ . Fiindcă tangentele la  $(C)$  în punctele unde ele intersectează o latură a triunghiului polar comun al  $(C)$  și  $(K)$  trec prin vârful opus, rezultă că vîrfurile triunghiului polar comun vor fi noduri de inflexiune pentru curba  $(\Gamma)$ . Astfel teorema 1 este demonstrată.

CONSECINȚA 1. Tangentele inflexionale ale curbei  $(\Gamma)$  vor fi conjugatele armonice ale tangentelor duse din vîrfurile triunghiului polar comun la conica  $(C)$  față de perechile de laturi opuse ale patruunghiului complet, determinat de punctele comune ale conicelor  $(C)$  și  $(K)$ .

CONSECINȚA 2. Conform enunțului  $d)$  al teoremei 1, putem considera pentru generarea curbei  $(\Gamma)$  în locul conicei  $(K)$  două drepte din plan. Astfel generarea curbei  $(\Gamma)$  va deveni mai simplă.

TEOREMA 2. Orice cuartică cu trei noduri de inflexiune se poate considera ca fiind curba polară generalizată a unei conice față de altă conică.

DEMONSTRAȚIE. Se știe că ecuația generală a cuadricelelor cu trei noduri de inflexiune într-un reper proiectiv avînd ca puncte de bază chiar nodurile cuarticei este

$$\alpha_1 x_2^2 x_3^2 + \alpha_2 x_3^2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^2 x_2^2 = 0 \quad (1)$$

Alegînd punctul unitate al reperului proiectiv pe curbă, găsim relația

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (2)$$

Se consideră conica  $(C)$  de ecuație

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + d_3 x_3^2 = 0$$

precum și o altă conică  $(K)$  definită prin ecuația

$$\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_3^2 = 0 \text{ unde } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \quad (3)$$

Evident că  $(C)$  și  $(K)$  au ca triunghi polar comun triunghiul de bază a reperului și că ele trec prin punctul unitate. Vom considera curba polară



generalizată a conicei (C) față de conica (K). Fie  $P(y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) un punct arbitrar al conicei (C) și scriem ecuația tangentei la (C) în punctul P și cea a polarei punctului P față de conica (K):

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 x_1 + \alpha_2 y_2 x_2 + \alpha_3 y_3 x_3 &= 0 \\ \beta_1 y_1 x_1 + \beta_2 y_2 x_2 + \beta_3 y_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Curba polară generalizată este locul geometric al punctului de intersecție al acestor două drepte când P descrie curba (C) adică dacă

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i y_i = 0 \quad (5)$$

Eliminînd  $y_i$  din ecuațiile (4) și (5) și folosind relațiile

$$\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

care sînt consecințele relațiilor (2) și (3), vom regăsi ecuația (1), deci am demonstrat teorema 2.

Astfel am găsit pentru cuarticele cu trei noduri de inflexiune o metodă de generare nouă. Pe baza acestei metode de generare, proprietățile acestor curbe se pot studia ușor.

Cuarticele remarcabile cu trei noduri de inflexiune le putem considera ca fiind curbe polare generalizate și le definim în felul următor:

a) Curba polară generalizată a unei hiperbole echilaterale (C) în raport cu conica singulară (K) formată din cele două axe ale hiperbolei este *lemniscata lui Bernoulli*.

b) Curba polară generalizată a unei elipse (C) în raport cu conica singulară (K) formată din două drepte simetrice față de centrul conicei este *curba „cruciiformă”* [4] avînd ecuația carteziană  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ . Tot această curbă o găsim luînd în locul lui (K) două drepte conjugate armonice față de doi diametri conjugăți ai conicei (C).

c) Dacă în punctul b) (C) este o hiperbolă iar (K) rămîne aceeași, curba polară generalizată va fi așa-numita *curba „arcului voltaic”* [5], avînd ecuația carteziană  $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ .

d) Curba polară generalizată a unei hiperbole (C) în raport cu conica singulară (K) formată din dreapta de la infinit a planului și axa reală a lui (C) este așa-numita *curba „ceasului de nisip”* [6].

II. *Cazuri particulare.* Se pune întrebarea în ce caz degenerază curba polară generalizată a unei conice în raport cu o altă conică. Răspunsul este dat de următoarele teoreme.

**TEOREMA 3.** Dacă conicele (C) și (K) sînt bitangente, curba polară generalizată este o cuartică singulară, conținînd tangentele comune ale conicelor (C) și (K) duse în cele două puncte de contact.

Demonstrația este imediată, folosind teorema 7 a lucrării [1] și definiția curbelor polare generalizate.

TEOREMA 4. Dacă conicele  $(C)$  și  $(K)$  sînt tangente într-un punct  $V$ , curba polară generalizată a conicei  $(C)$  în raport cu  $(K)$  se compune din tangenta comună  $(t)$  la  $(C)$  și  $(K)$  dusă în punctul  $V$  și dintr-o cubică  $(\Gamma')$ . Notînd cu  $(d)$  dreapta care unește punctele de intersecție neconfundate ale conicelor  $(C)$  și  $(K)$  și cu  $I$  punctul comun al dreptelor  $(t)$  și  $(d)$ , putem enunța că  $V$  este punct cuspidal,  $I$  punct de inflexiune al cubicei  $(\Gamma')$  iar polara punctului  $I$  față de  $(C)$  este tangenta cuspidală. Tangenta inflexională va fi dreapta conjugată armonic a tangentei duse din  $I$  la  $(C)$  diferite de  $(t)$  față de dreptele  $(d)$  și  $(t)$ . Cubica  $(\Gamma')$  este tangenta la  $(C)$  în punctele comune ale conicelor  $(C)$  și  $(K)$  diferite de  $V$ .

DEMONSTRAȚIE. În acest caz dintre cele trei puncte fundamentale ale transformării cuadractice amintite la demonstrația teoremei 1, două se confundă cu  $V$ , iar al treilea punct fundamental va coincide cu  $I$ . Dintre dreptele fundamentale două se confundă cu  $(t)$ , iar a treia va fi polara  $(v)$  a punctului  $I$  față de conica  $(C)$ . Conform unei proprietăți cunoscute a transformărilor cuadractice, în acest caz particular transformata unei curbe algebrice de ordinul  $n$  este o curbă de ordinul  $2n$  pentru care punctele fundamentale  $I$  și  $V$  sînt puncte multiple de ordinul  $n$ , iar cele  $n$  tangente duse în  $V$  la curbă coincid cu dreapta  $(v)$  [3], pag. 32.

Transformata curbei  $(C)$  adică curba polară generalizată  $(\Gamma)$ , este formată în mod evident din dreapta  $(t)$  și dintr-o cubică  $(\Gamma')$ . Aplicînd proprietatea precedentă rezultă că, în punctul  $V$  două tangente la curbă  $(\Gamma')$  coincid cu dreapta  $(v)$ . Aceasta poate să aibă loc numai dacă  $V$  este un punct cuspidal pentru cubică  $(\Gamma)$ , iar  $(v)$  tangenta cuspidală.

Conica  $(C)$  intersectează a doua oară tangenta fundamentală  $(v)$  în punctul  $D$ . Fiindcă tangenta în  $D$  la conica  $(C)$  trece prin  $I$  (după cum am văzut la demonstrația teoremei 1),  $I$  este punctul de inflexiune al curbei  $(\Gamma')$ , tangenta inflexională fiind dreapta conjugată armonic a dreptei  $ID$  față de dreptele  $(t)$  și  $(d)$ . Ultimul enunț al teoremei 4 rezultă imediat din proprietățile curbelor polare generalizate înșirate în lucrarea [1].

TEOREMA 5. Orice cubică cuspidală se poate considera ca fiind o curbă polară generalizată a unei conice în raport cu o altă conică tangență la prima.

DEMONSTRAȚIE. Se știe că o cubică cuspidală este determinată cunoscînd punctul cuspidal  $V$ , punctul de inflexiune  $I$ , punctul  $D'$  de intersecție al tangentei cuspidale  $(v)$  cu tangenta inflexională  $(i)$  și un punct  $A$  al curbei nesituat pe laturile triunghiului  $VID'$ .

Fie  $D$  punctul de intersecție al tangentei  $(v)$  cu dreapta conjugată armonic a dreptei  $ID'$  față de dreptele  $(IA) = (d)$  și  $(IV) = (t)$ . Considerăm conica  $(C)$  care trece prin punctul  $A$  și este tangență la dreptele  $(t)$  și  $(ID)$  în punctul  $V$ , respectiv în  $D$ . Dreapta  $(IA) = (d)$  intersectează pe  $(C)$  a doua oară în punctul  $B$ . Alegem o conică arbitrară  $(K)$  din fascicolul de conice tangente în punctul  $V$  la conica  $(C)$  și care trec prin punctele  $A$  și  $B$ . Conform teoremei 4, curba polară generalizată a conicei  $(C)$  în raport cu  $K$  — abstracție făcînd de dreapta  $(VI)$  — este chiar cubica dată, deci am demonstrat teorema.

III. Pe baza teoremelor 4 și 5 pentru cubicele cuspidale putem da mai multe metode de generare.

a) Se consideră o conică  $(C)$  și tangenta  $(f)$  dusă la ea într-un punct  $V$  (figura 1). Dintr-un punct  $I$  al tangentei  $(f)$  se duce o dreaptă  $(d)$  care intersectează conica  $(C)$  în punctele  $A$  și  $B$ . Notăm cu  $D$  punctul de contact al celei de a doua tangente duse din  $I$  la  $(C)$ .

O dreaptă variabilă  $(g)$  care trece prin  $V$  intersectează pe  $(d)$  în punctul  $N$ . Fie  $T$  al doilea punct de intersecție al dreptei  $(DN)$  cu conica  $(C)$ , iar  $M$  punctul în care tangenta dusă la  $(C)$  în punctul  $T$  taie dreapta  $(g)$ . Locul geometric al punctului  $M$  este o cubică avînd pe  $V$  ca punct cuspidal, pe  $I$  ca punct de inflexiune; dreapta conjugată armonic a dreptei  $(ID)$  față de dreptele  $(d)$  și  $(IV)$  este tangenta inflexională, iar dreapta  $(VD)$  este tangenta cuspidală pentru această cubică. Cubica este tangentă la conica  $(C)$  în punctele  $A$  și  $B$ .

DEMONSTRAȚIE. Considerînd dreptele  $(IV)$  și  $(d)$  ca o conică improprie  $(K)$ , luăm curba polară generalizată a conicei  $(C)$  în raport cu  $(K)$ . Ca să demonstrăm că această curbă și locul geometric de mai sus se confundă, trebuie să arătăm numai că polara punctului  $T$  față de  $(K)$  trece prin punctul  $M$ , adică că biraportul  $(M, T, Q, R)$  este armonic, unde  $Q$  și  $R$  sînt punctele de intersecție ale tangentei duse în  $T$  la  $(C)$  cu dreapta  $IV$  respectiv cu  $(d)$ .

Notînd cu  $P$  polul dreptei  $(d)$  față de conica  $(C)$  vom demonstra mai întîi coliniaritatea punctelor  $Q, N$ , și  $P$ . Fie  $U, W$ , și  $S$  punctele de intersecție ale dreptei  $(VD)$  cu dreptele  $(TM)$ ,  $(IT)$  și  $(d)$ . Unui punct arbitrar al dreptei  $(MT)$  îi facem să-i corespundă conjugatul său față de conica  $(C)$  situat pe dreapta  $(VD)$ . Această corespondență fiind o proiectivitate între punctualele  $(MT)$  și  $(VD)$  putem scrie că:  $(V, Q, T, R) = (W, V, U, P)$  sau fiindcă  $(W, V, U, P) = (U, P, W, V)$  rezultă că  $(U, Q, T, R) = (U, P, W, V)$ . Conform ipotezelor sînt valabile și următoarele egalități  $(U, W, V, D) = -1$  și  $(P, S, D, V) = -1$  (fiindcă polarele punctelor  $U$  și  $P$  față de conica  $(C)$  sînt dreptele  $IW$  și  $IS$ ). Folosind ultimele două relații se poate arăta ușor că  $(U, P, W, V) = (U, P, D, S)$ , de unde rezultă că  $(U, Q, T, R) = (U, P, D, S)$ . Deci între punctualele  $MT$  și  $VD$  există o perspectivitate în care perechile de puncte  $Q$  și  $P, T$  și  $D, R$  și  $S$  sînt corespondente, deci dreptele  $QP, TD$  și  $RS$  sînt concurente. Punctul de intersecție al dreptelor  $TD$  și  $RS$  fiind  $N$ , rezultă că punctele  $Q, P$  și  $N$  sînt coliniare. Proiectînd acum punctele  $M, T, Q, R$  din  $N$  pe dreapta  $(VD)$  putem scrie că  $(M, T, Q, R) = (V, D, P, S)$  și ultimul biraport fiind armonic, rezultă că  $(M, T, Q, R) = -1$  ceea ce am vrut să demonstrăm. Proprietățile ulterioare ale locului geometric al punctului  $M$  rezultă direct din teorema 4.

OBSERVAȚIE. Folosind proprietățile verificate în decursul demonstrării, pentru cubicele cuspidale mai putem da și alte metode de generare:

b) O dreaptă variabilă  $(g)$  care trece prin  $V$  intersectează dreapta  $(d)$  în punctul  $N$ . Dreapta  $DN$  taie conica  $(C)$  în afară de  $D$  și în punctul

$T$ , iar dreapta  $PN$  intersectează pe  $IV$  în  $Q$ . Locul geometric al punctului de intersecție  $M$  al dreptelor  $(g)$  și  $(TQ)$  este o cubică cuspidală.

c) O dreaptă variabilă  $(g)$  prin  $V$  taie pe  $(d)$  în  $N$ ;  $PN$  intersectează pe  $IV$  în  $Q$ . Tangenta dusă din  $Q$  la  $(C)$  (diferită de  $IV$ ) intersectează pe  $(g)$  în punctul  $M$ , care descrie cubică cuspidală.

Evident că metodele de generare  $a)$ ,  $b)$  și  $c)$  admit câte un procedeu dual și fiindcă cubică cuspidală este o figură autoduală, aceste procedee conduc tot la cubice cuspidale. În cele ce urmează vom folosi numai duala metodei  $c)$ .

$c')$  Se dă o conică  $(C')$  (fig. 1), o tangentă  $(i)$  la  $(C')$ , o dreaptă  $(v)$  care trece prin punctul de contact  $D'$  al tangentei  $(i)$  și un punct  $P$  pe dreapta  $(v)$  din care se pot duce tangentele  $PA$  și  $PB$  la conica  $(C')$ .

Fie  $Z$  un punct variabil al dreptei  $(i)$ . Dreapta  $ZP$  intersectează pe  $(AB)$  în  $N$ . Fie  $T'$  cel de al doilea punct de intersecție al dreptei  $(ND')$

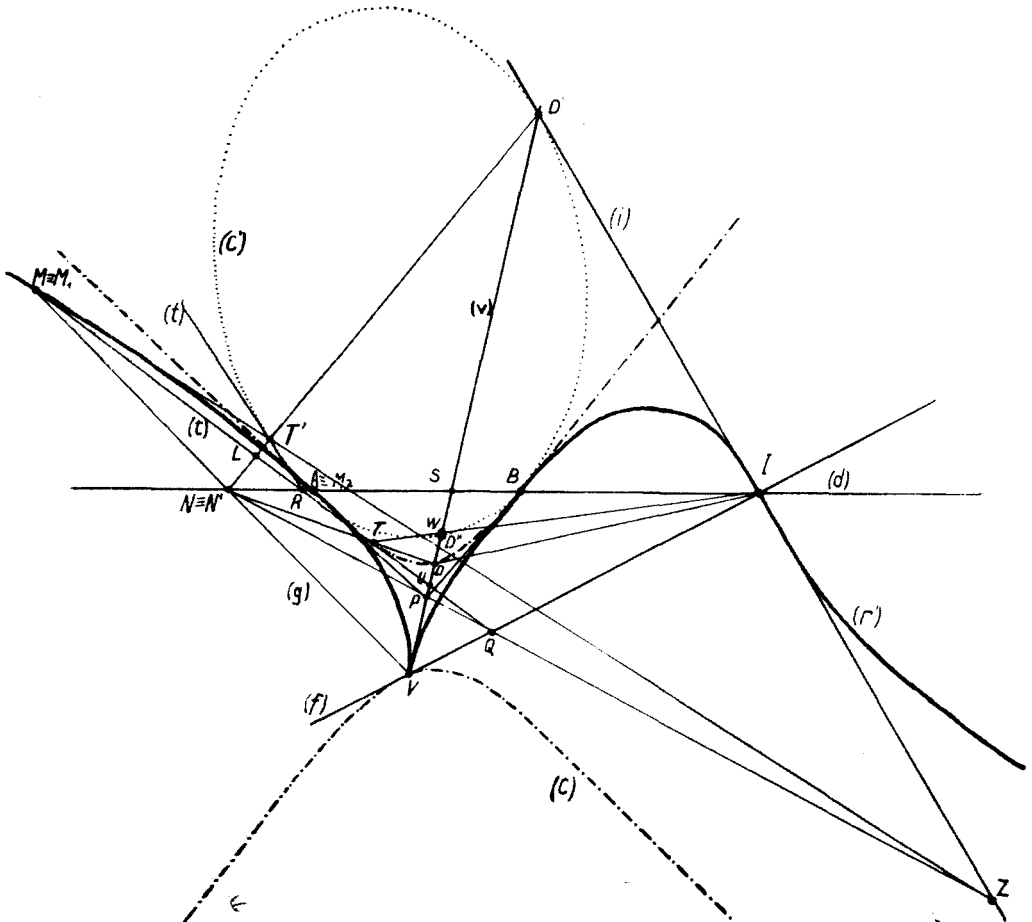


Fig. 1.

cu conica ( $C'$ ). Dreapta variabilă  $TZ$  rămîne tangentă la o cubică, avînd pe ( $i$ ) ca tangentă inflexională, pe ( $v$ ) ca tangentă cuspidală; punctul  $V$ , conjugat armonic al celui de al doilea punct de intersecție  $D''$  al dreptei ( $v$ ) cu conica ( $C'$ ) în raport cu punctele  $P$  și  $D'$ , este punctul cuspidal, iar polul dreptei ( $v$ ) față de ( $C'$ ) este punctul de inflexiune. Cubica rămîne tangentă la ( $C'$ ) în punctele  $A$  și  $B$ .

Fiindcă metodele de generare  $c$ ) și  $c'$ ) se referă amîndouă la cubice cuspidale, se pune întrebarea cum trebuie să alegem conicele ( $C$ ) și ( $C'$ ) ca cele două cubice, generate cu ajutorul lor, să fie confundate? Răspunsul îl dă următoarea teoremă :

**TEOREMA 6.** Fie ( $C$ ) o conică tangentă la o cubică cuspidală în două puncte  $A$  și  $B$ , iar ( $C'$ ) transformata conicei ( $C$ ) printr-o omologie cu axul  $AB$ , cu centrul în polul dreptei  $AB$  față de ( $C$ ), avînd caracteristica egală cu  $-\frac{1}{3}$ . Luînd conicele ( $C$ ) și ( $C'$ ), prin metodele de generare  $c$ ) și  $c'$ ) vom găsi punctele respectiv tangentele aceleiași cubice cuspidale.

**DEMONSTRAȚIE.** Păstrînd notațiile fig. 1, considerăm transformata ( $C'$ ) a conicei ( $C$ ) printr-o omologie avînd axul dreapta ( $d$ )  $\equiv (AB)$ , centrul în punctul  $P$  și la care punctele  $D$  și  $D'$  sînt corespondente. Folosînd relațiile  $(D, D', V, S) = -1$  și  $(D, V, P, S) = -1$  se poate calcula că  $(P, S, D, D') = -\frac{1}{3}$ , deci omologia are caracteristica egală cu  $-\frac{1}{3}$ .

La metoda de generare  $c'$ ) vom considera ca elemente constitutive conica ( $C'$ ), ( $i$ )  $\equiv (ID')$ , ( $v$ )  $\equiv (VP)$  și punctul  $P, Z$  fiind punctul variabil al dreptei ( $i$ ), dreapta  $PZ$  taie pe  $(AB)$  în  $N'$ . Fie  $T'$  cel de al doilea punct de intersecție al dreptei ( $D'N'$ ) și conicei ( $C'$ ). Conform proprietăților metodei  $c'$ ), dreapta  $T'Z$  rămîne tangentă la o cubică pentru care ( $i$ ) este tangentă inflexională, ( $v$ ) tangentă cuspidală,  $V$  punct cuspidal,  $I$  punct de inflexiune și care este tangentă la ( $C'$ ) în punctele  $A$  și  $B$ . Conicele ( $C$ ) și ( $C'$ ) fiind tangente în punctele  $A$  și  $B$ , cele două cubice generate prin metodele  $c$ ) și  $c'$ ) coincid.

În continuare vom arăta cum trebuie să fie alese elementele variabile ( $g$ ) și  $Z$  în  $c$ ) și  $c'$ ) astfel ca punctul  $M$  al cubicei construit prin metoda  $c$ ) să fie incident cu tangenta la cubica obținută prin procedeul  $c'$ ), adică cum putem construi tangenta într-un punct  $M$  la cubica cuspidală sau punctul de contact pe tangenta  $ZT'$  la această curbă.

Alegem punctul  $Z$  în punctul de intersecție al dreptelor  $PN$  și  $ID'$  (figura 1). Vom demonstra că tangenta  $TZ'$  trece prin punctul  $M$ . La demonstrarea metodei de generare  $a$ ) am văzut că  $(Q, R, T, M) = -1$ . În procedeul dual acestei proprietăți îi corespunde  $(T'D', T'P, t', T'M) = -1$  unde cu  $t'$  am notat tangenta dusă în  $T'$  la conica ( $C'$ ). Deci dacă demonstrăm că  $(T'D', T'P, t', T'M) = -1$  enunțul de mai sus este adevărat,  $T'Z$  trece prin punctul  $M$ . Punctele  $T, T'$  și  $P$  sînt coliniare, fiindcă în omologia care transformă conica ( $C$ ) în ( $C'$ ), dreptele  $ND$  și  $ND'$  sînt corespondente, iar punctele  $D$  și  $D'$  sînt omologe deci și cea de-a doua pereche de puncte de intersecție  $T, T'$  a dreptelor  $ND$  și  $ND'$  cu conicele ( $C$ ) și ( $C'$ ) trebuie să fie omologe și pentru aceasta ele sînt coliniare cu

centrul de omologie  $P$ . De aici rezultă că tangentele duse în  $T$  și  $T'$  la  $(C)$  respectiv la  $(C')$  se intersectează pe axul de omologie  $(d)$ , adică în punctul  $R$ . Conform ipotezei avem  $(V, S, D, D') = -1$ , din care rezultă :  $(NV, NS, ND, ND') = -1$ . Intersectând aceste patru drepte cu tangenta  $(t)$  dusă în  $T$  la  $(C)$  putem scrie că :  $(M, R, T, L) = -1$ , unde cu  $L$  am notat punctul comun al dreptelor  $(t)$  și  $(ND')$ . Proiectând punctele  $M, R, T, L$  din  $T'$  vom avea :  $(T'M, T'R, T'L, T'T) = (T'M, t', T'D', T'P) = (T'D', T'P, t', T'M) = -1$  ceea ce am vrut să demonstrăm.

Prin aceasta în cele din urmă am demonstrat numai că  $T'Z$  este tangentă la cubica cuspidală și trece printr-un punct  $M$  al ei. Este posibil însă ca  $M$  să nu fie punctul de contact ci să fie cel de al treilea punct de intersecție al tangentei cu cubica. Presupunând că așa este, în fiecare punct ar trebui să avem situație analogă. Considerăm cazul  $M = A$ . Atunci dreapta  $T'Z$  coincide cu  $PA$ , despre care știm că este tangentă în  $A$  la cubică. Deci și în poziția generală  $M$  va fi punct de contact al tangentei  $T'Z$ .

Pe baza legăturii dintre metoda de generare punctuală și cea tangențială a cubicelor cuspidale putem da încă o metodă de generare cu ajutorul căreia concomitent putem găsi punctele unei cubice cuspidale și tangentele corespunzătoare.

$d$ ) Se consideră (fig. 1) o conică  $(C')$  și o dreaptă  $(v)$  care intersectează pe  $(C')$  în punctele  $D'$  și  $D''$ . Fie  $V$  un punct pe dreapta  $(v)$ , iar  $P$  conjugatul armonic al punctului  $D'$  în raport cu punctele  $V$  și  $D''$ . Polara punctului  $P$  față de  $(C')$  intersectează pe  $(C')$  în  $A$  și  $B$ . Notăm cu  $I$  punctul de intersecție al dreptei  $(AB)$  cu tangenta dusă în  $D'$  la conica  $(C')$ .

O dreaptă variabilă prin  $V$  taie pe  $AB$  în  $N$ , dreapta  $ND'$  intersectează pe  $(C')$  în  $T'$  și fie  $Z$  punctul comun al dreptelor  $(NP)$  și  $(D'I)$ . Punctul de intersecție  $M$  al dreptelor  $(T'Z)$  și  $(g)$  descrie o cubică, la care  $T'Z$  este chiar tangenta în  $M$ . Cubica admite punctul  $V$  ca punct cuspidal, punctul  $I$  ca punct de inflexiune, dreapta  $(v)$  ca tangentă cuspidală iar dreapta  $(ID')$  ca tangentă inflexională. Cubica este tangentă la  $(C')$  în punctele  $A$  și  $B$ .

Demonstrarea acestei metode de generare rezultă ușor din teorema 6.

Modul de generare  $d$ ) al cubicelor cuspidale care contopește generarea punctuală și cea tangențială se poate folosi în afară de rezolvarea multor probleme de construcții referitoare la cubica și la studiul proprietăților acestor curbe. O astfel de proprietate ușor demonstrabilă este următoarea :

**TEOREMA 7.** Dacă o conică  $(C')$  bitangentă la o cubică cuspidală în punctele  $A$  și  $B$  coliniare cu punctul de inflexiune  $I$  al cubicei este tangentă și la tangenta inflexională, atunci punctul de contact  $D'$  al acestei drepte se găsește pe tangenta cuspidală  $(v)$ . Notînd cu  $D''$  cel de al doilea punct de intersecție al dreptei  $(v)$  cu  $(C')$ , cu  $P$  polul dreptei  $(AB)$  față de  $(C')$  și cu  $V$  punctul cuspidal, avem următoarea relație  $(V, D'', D', P) = -1$ .

În încheiere vom demonstra o proprietate generală — după cîte știm noi, încă necunoscută — a cubicelor cuspidale.

**TEOREMA 8.** Notăm cu  $V$  și  $I$  punctul cuspidal, respectiv cel de inflexiune al unei cubice cuspidale ( $\Gamma'$ ) cu  $(v)$  și  $(i)$  tangenta cuspidală respectiv cea inflexională. Fie  $M_1, M_2$  două puncte arbitrare pe cubică și  $t_1, t_2$  tangentele corespunzătoare. Punctul de intersecție al dreptelor  $M_1V$  și  $M_2I$  este incident cu dreapta ce unește punctele  $(t_2, v)$  și  $(t_1, i)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Folosind notația  $M_2 = A$ , dreapta  $IA$  intersectează cubica ( $\Gamma'$ ) încă într-un punct  $B$ . Se consideră conica ( $C'$ ) tangentă la dreapta  $(i)$  și bitangentă la cubica ( $\Gamma$ ) în  $A$  și  $B$ . Conform teoremei 7, punctul de contact  $D'$  al conicii ( $C'$ ) cu dreapta  $(i)$  se găsește pe tangenta cuspidală  $(v)$  și avem relația  $(I, D'', D', P) = -1$ , unde  $D''$  este cel de al doilea punct de intersecție al dreptei  $(v)$  cu ( $C'$ ), iar  $P$  polul dreptei  $(AB)$  față de ( $C'$ ). Dar atunci ( $C'$ ) satisface condițiilor conicei de la metoda de generare  $d$ ). Fie  $M_1 = M$  un punct arbitrar al cubicei ( $\Gamma'$ ). Din metoda de generare  $d$ ) rezultă că notînd cu  $N$  punctul de intersecție al dreptei  $(M_1V)$  cu  $(AB)$ , cu  $T'$  cel de al doilea punct de intersecție al dreptei  $(ND')$  cu conica ( $C'$ ) și cu  $Z$  punctul comun al dreptelor  $(NP)$  și  $(i)$ , dreapta  $T'Z$  va fi tangenta  $t_1$  dusă în  $M_1$  la ( $\Gamma'$ ). Dar punctele  $P, N, Z$  sînt coliniare și  $N$  fiind punctul de intersecție al dreptelor  $(M_1V)$  și  $(M_2V)$ , iar  $P = (t_2, v)$  și  $Z = (t_1, i)$  teorema este demonstrată.

#### BIBLIOGRAFIE

1. B. Orbán, *Despre cubele polare generalizate*. Studia Univ. Babeș-Bolyai. Series Mat. Phys. Fasc. 1 1962
2. J. Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*. 2. Teil. 3. Aufl. Leipzig, 1898.
3. K. Doehlemann, *Geometrische Transformationen*. II. Teil Leipzig, 1908.
4. Terquem, *Nouv. Ann. Mathem.* VI. Question 165.
5. P. H. Schoute *Über Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten*. Arch. Math. Phys. 2. Serie II, III, VI și V. 1885 - 87.
6. H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven*. Leipzig, 1908.
7. Dedo Modesto; *Proprietà fondamentali delle quartiche piane dotati di punti doppi con tangenti iflessionali*. *Periodico di Matematiche*, IV Sec. 29 [1951].

#### ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛЯРНЫХ КРИВЫХ

(Резюме)

В данной работе изучаются применения обобщенных полярных кривых, определенных в предыдущей работе автора [1], к изучению плоских кривых третьего и четвертого порядка. Доказываются следующие свойства: обобщенная полярная кривая одной коники по отношению к другой является квадратикой с 3 узлами перегиба, и любая квадратика с 3 узлами перегиба может образоваться таким образом. Обобщенная полярная кривая одной коники по отношению к другой касательной к ней конике, является кривой третьего порядка с точкой возврата, и можно найти таким образом любую кривую третьего порядка с точкой возврата. Используя эти свойства, в работе даются несколько способов образования кривых третьего порядка с точкой возврата, из которых один даёт, одновременно, точки и касательные кривых третьего порядка с точкой возврата. На основе вышеуказанных свойств доказываются также несколько

новых свойств кривых третьего порядка, среди которых и следующее самодвойственное свойство: обозначаем через  $V$  и  $I$  точку возврата и точку перегиба кривой третьего порядка с точкой возврата, а через  $(v)$  и  $(i)$  касательную в точке возврата и касательную в точке перегиба, а также через  $M_1, M_2$  две произвольных точки на кривой третьего порядка и через  $t_1, t_2$  соответствующие касательные. Точка пересечения прямых  $M_1V, M_2I$  и прямая, соединяющая точки  $(t_1, i), (t_2, v)$  являются инцидентными.

## APPLICATIONS DES COURBES POLAIRES GÉNÉRALISÉES

(R é s u m é)

Ces courbes polaires généralisées ont été définies dans une étude antérieure de l'auteur [1]; on traite ici de leurs applications à l'étude des cubiques et des quadriques planes. Il démontre les propriétés suivantes: La courbe polaire généralisée d'une conique par rapport à une autre conique est une quadrique à 3 noeuds d'inflexion, et toute quadrique à 3 noeuds d'inflexion peut être engendrée de cette manière. La courbe polaire généralisée d'une conique par rapport à une autre conique tangente avec elle est une cubique cuspidale, et toute cubique cuspidale peut être trouvée de cette manière.

Utilisant ces propriétés, l'étude traite de plusieurs modes de génération des cubiques cuspidales, modes dont l'un donne concomitamment les points et les tangentes des cubiques cuspidales. A partir de ces résultats, l'étude démontre quelques propriétés nouvelles de ces cubiques dont la propriété autoduale suivante: En notant respectivement par  $V$  et  $I$  le point cuspidal et le point d'inflexion d'une cubique cuspidale, par  $(v)$  et  $(i)$  les tangentes cuspidale et inflexionnelle, d'autre part par  $M_1$  et  $M_2$  deux points arbitraires sur la cubique, et par  $t_1$  et  $t_2$  les tangentes correspondantes- le point d'intersection des droites  $M_1V$  et  $M_2I$  et la droite qui unit les points  $(t_1, i)$  et  $(t_2, v)$  sont incidents.



## ȚESUTURI TERNARE REGULATE

de  
F. RADÓ

1. Ne propunem să determinăm o clasă de țesuturi, formate din patru familii de suprafețe care verifică generalizarea pentru spațiu a condiției de închidere Reidemeister; apoi să punem în evidență câteva proprietăți ale lor și să le clasificăm din punct de vedere topologic. În cursul determinării acestei clase de țesuturi va trebui să rezolvăm ecuația funcțională care exprimă că un izotop al sumei este de forma  $f(x + y) + f_1(x)$ . Pentru aplicațiile avute în vedere, vom căuta soluții continuu diferentiabile, iar în ultima parte a lucrării vom extinde soluția aflată pentru funcții absolut continue.

În lucrarea [7] am introdus noțiunea de țesut spațial abstract (sau țesut ternar) prin generalizarea proprietăților geometrice ale unui țesut obișnuit, format din 4 familii de suprafețe [3] și am arătat că aceste țesuturi sînt echivalente cu clasele de izotopie ale cvasigrupurilor ternare.

Reamintim, că un *cvasi-grup ternar*  $(Q, F)$  (sau o  $N$ -algebră) este o mulțime  $Q$ , pe care s-a definit operația ternară

$$t = F(x, y, z) \quad (1)$$

(notația prescurtată:  $t = xyz$ ), inversabilă în raport cu  $x, y$  și  $z$ , adică pentru  $a, b, c, d \in Q$  ecuațiile

$$F(x, b, c) = d, F(a, y, c) = d, F(a, b, z) = d \quad (2)$$

au câte o soluție unică în  $Q$ . Dacă există elementul neutru  $e \in Q$ , astfel ca

$$F(x, e, e) = F(e, x, e) = F(e, e, x) = x, \quad (3)$$

$(Q, F)$  se numește un *loop ternar*.

Cvasigrupurile ternare  $(Q, F)$  și  $(R, G)$  se zic *izotope*, dacă există transformările biunivoce  $j, g, h, k$  ale mulțimii  $Q$  pe  $R$ , astfel ca

$$G[j(x), g(y), h(z)] = k[F(x, y, z)], \quad x, y, z \in Q. \quad (4)$$

$(R, G)$  este un *izotop* al lui  $(Q, F)$ , iar sistemul de transformări  $j, g, h, k$  o *izotopie*. Dacă mulțimile  $G$  și  $F$  coincid și  $k$  este transformarea identică,  $(Q, G)$  este un *izotop principal* al lui  $(Q, F)$ .

Mulțimea cvasigrupurilor ternare izotope cu cvasigrupul dat  $(Q, F)$  formează, prin definiție, un *țesut ternar*. Oricare cvasigrup din această mulțime este un *reprezentant* al țesutului ternar. Dacă un reprezentant este un loop ternar, el se numește un *L-reprezentant*. Un țesut ternar are totdeauna *L-reprezentanți* [7].

Studiul țesuturilor revine la studiul proprietăților cvasigrupurilor, invariante la izotopii. Pentru scopurile lucrării de față, ajunge această caracterizare algebrică a țesuturilor și nu vom insista la caracterizarea geometrică, amintită la început și care se găsește în lucrarea [7].

Dacă  $Q$  este un interval al axei reale și  $F$  o funcție continuă,  $(Q, F)$  poartă numele de *cvasigrup ternar real continuu*, iar dacă, afară de aceasta,  $F$  admite derivatele parțiale de ordinul  $m$  continue,  $(Q, F)$  este un *cvasigrup ternar diferențiabil de ordinul  $m$* . Țesuturile corespunzătoare reprezintă cazurile clasice și se numesc *țesuturi ternare reale continue* (sau *țesuturi de suprafețe*) respectiv *țesuturi ternare diferențiabile de ordinul  $m$* . (Studiul lor clasic se găsește în [3].)

Alături de cvasigrupurile ternare continue vom considera și *cvasigrupurile locale*, care se definesc în felul următor: fie  $V_1, V_2, V_3$  trei vecinătăți ale axei reale; se cere ca funcția continuă (1) să fie definită pentru  $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$  și ca să existe vecinătățile  $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2, V'_3 \subset V_3, V'_4 \ni F(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0 \in V_1, y_0 \in V_2, z_0 \in V_3$ ), astfel ca pentru  $a \in V'_1, b \in V'_2, c \in V'_3, d \in V'_4$ , ecuațiile (2) să aibă câte o soluție unică în  $V_1, V_2$  respectiv  $V_3$ . Un cvasigrup local se va nota tot cu  $(Q, F)$ . În conformitate cu aceasta, avem un *loop ternar local*, dacă în particular  $V_1 = V_2 = V_3 = V, x_0 = y_0 = z_0 = e$  și condiția (3) este satisfăcută pentru  $x \in V$ . Dacă  $f, g, h, k$  din (4) sînt transformări topologice și (4) este verificat pentru orice  $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$ , avem o *izotopie locală*. Un *țesut local* se definește ca mulțimea cvasigrupurilor ternare locale, local izotope cu un cvasigrup ternar local.

Definițiile date pîră aici, sînt generalizări directe din teoria cvasigrupurilor binare (obișnuite) [2], [5], [6], în care în locul operației (1) avem o operație binară. Un cvasigrup binar se zice *regulat*, dacă este izotop cu un grup, un țesut binar este *regulat*, dacă printre reprezentanții lui se află un grup. Condiția de închidere a lui Reidemeister

$$\left. \begin{array}{l} x_1 y_1 = x_2 y_3 \\ x_2 y_1 = x_4 y_3 \\ x_1 y_2 = x_3 y_4 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 y_2 = x_4 y_4 \quad (\text{R})$$

este necesară și suficientă pentru ca cvasigrupul binar  $(Q, F)$  cu operația  $F(x, y) = xy$ , să fie regulat. Condiția (R) este invariantă la izotopii.

În conformitate cu o teoremă celebră a lui L. E. J. Brouwer, orice grup continuu, definit pe un interval real, este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale [4]. Rezultă, că orice cvasigrup real continuu regulat are o operație de forma

$$xy = h^{-1}[f(x) + g(y)], \quad (5)$$

unde  $f, g, h$  transformă biunivoc și continuu (adică topologic) intervalul  $Q$  pe axa reală. Teorema lui B r o u w e r poate fi extinsă pentru grupuri locale, definite pe un interval real (a se vedea ecuația funcțională a asociativității în [1]); deci orice cvasigrup local regulat are de asemenea o operație de forma (5). De aici se deduce ușor că țesuturile obișnuite regulate coincid cu imaginile topologice ale țesutului format din trei fascicule de drepte paralele. Așadar pe această cale se obține în mod simplu rezultatul clasic al lui Reidemeister.

Fie  $(Q, F)$  un cvasigrup ternar și  $z_0$  un element fix din  $Q$ . Operația binară  $(x, y) \rightarrow F(x, y, z_0)$  definește un cvasigrup binar pe  $Q$ , numit o secțiune  $z$  a cvasigrupului ternar  $(Q, F)$ . Analog putem defini secțiunile  $x$  și secțiunile  $y$ .

În teoria clasică, un țesut de suprafață se zice regulat, dacă este imaginea topologică a patru fascicule de plane; această definiție revine la faptul că operația unui reprezentant oarecare este de forma

$$xyz = k^{-1}[f(x) + g(y) + h(z)], \quad (6)$$

unde  $f, g, h, k$  sînt funcții strict monotone și continue. Condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut de suprafață să fie regulat este

$$x_2y_1z_1 = x_1y_2z_1 = x_1y_1z_2 \rightarrow x_1y_2z_2 = x_2y_1z_2 = x_2y_2z_1 \quad (O)$$

(condiția octaedrelor). Aceste țesuturi se mai numesc și țesuturi octaedrale. Noi vom folosi această terminologie, termenul de regularitate fiind păstrat pentru o noțiune mai largă. În lucrarea [7] am studiat regularități de diferite tipuri (regularitate 1, 2, 3 și regularitate tare), iar în conformitate cu lucrarea [8] un cvasigrup ternar se zice regulat, dacă satisface următoarea condiție de închidere, numită condiția lui Reidemeister generalizată:

$$\left. \begin{array}{l} x_1y_1z_1 = x_3y_3z_3 \\ x_2y_1z_1 = x_4y_3z_3 \\ x_1y_2z_1 = x_3y_4z_3 \\ x_1y_1z_2 = x_3y_3z_4 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2y_2z_2 = x_4y_4z_4. \quad (RG)$$

Se vede că această condiție este invariantă la izotopii, deci putem defini țesutul ternar ca regulat, dacă un reprezentant al său este regulat. S-a demonstrat în [8] că fiecare din următoarele condiții este necesară și suficientă pentru regularitatea unui țesut ternar:

a) Toate secțiunile  $x$  ale unui reprezentant sînt izotopi principali ai unui și aceluiași grup, la fel secțiunile  $y$  și  $z$  (cele trei grupuri putînd fi diferite).

b) Un  $L$ -reprezentant verifică implicația

$$abc = e \Rightarrow xyz = (xbc)(ayc)(abz), \quad a, b, x, y, z \in Q.$$

(Cînd utilizăm condiția a) ca suficientă ajunge să o cerem pentru un singur reprezentant, așa cum s-a enunțat, iar cînd ea apare ca o condiție necesară, putem s-o aplicăm pentru fiecare reprezentant. O observație analogă e valabilă pentru  $L$ -reprezentanții din condiția b).)

În lucrarea [10] s-a mai dat o a treia condiție necesară și suficientă :

c) Operația ternară a unui L-representant se poate scrie în trei moduri cu ajutorul unor operații de grup  $x \circ y$ ,  $x * y$ ,  $x \nabla y$  ( $x^\circ$ ,  $x^*$ ,  $x^\nabla$  notează elementele inverse ale lui  $x$  în cele 3 grupuri, definite pe aceeași mulțime ca și L-representantul) :

$$xyz = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z) = (x \nabla y) * x^* * (x \circ z) = (x \circ z) \nabla z^\nabla \nabla (y * z). \quad (7)$$

În lucrarea [10] s-a studiat mai amănunțit cazul particular al țesuturilor regulate continuu diferențiabile de ordinul întâi. În acest caz L-reprezentanții sînt de forma

$$xyz = \varphi^{-1} [\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z)], \quad (8)$$

unde  $\varphi$  este o funcție strict monotonă, care admite derivată continuă. Un loop ternar cu operația (8) este un *grup ternar*. În aceeași lucrare s-a arătat că țesuturile locale regulate, continuu diferențiabile de ordinul întâi, au operația L-reprezentanților de forma

$$xyz = \varphi^{-1} \left[ \frac{\varphi(y) + k \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}}{1 - \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}} \cdot \frac{\varphi(z)}{\varphi(x) - k} \right], \quad (9)$$

unde  $\varphi$  are semnificația de mai sus, iar  $k$  este o constantă diferită de  $-1$ . Invers, pentru orice astfel de  $\varphi$  și  $k$ , formulele (8) și (9) definesc cvasigrupuri ternare (locale) regulate. Acest rezultat s-a obținut prin rezolvarea sistemului de ecuații funcționale (7), funcțiile necunoscute fiind  $\circ$ ,  $*$  și  $\nabla$ .

În lucrarea de față vom arăta că țesuturile locale, continuu diferențiabile de ordinul întâi au aceeași structură (8) și (9) în condiții mai largi decît regularitatea. Și anume vom admite că secțiunile  $x$  și  $y$  ale unui L-representant sînt izotopi principali cu cîte un grup. Va rezulta ca o consecință că secțiunile  $z$  sînt și ele izotopi principali cu un grup.

Pentru a ajunge la acest rezultat vom rezolva pe parcurs ecuația funcțională

$$f(x + y) + f_1(x) = \Phi [p(x) + q(y)], \quad (10)$$

provenită din primii termeni ai relației (7), unde  $\circ$  și  $*$  sînt operații de grup, iar  $\nabla$  o operație de loop. Cele cinci funcții din ecuația (10) sînt funcții necunoscute, presupuse continuu diferențiabile și strict monotone (cu excepția lui  $f_1$ ). Ecuația (10) fiind interesantă și în sine, vom da în ultima parte a lucrării soluția ei în ipoteza de continuitate absolută. Soluția astfel extinsă nu o vom aplica la teoria țesuturilor din următoarele motive : 1. s-ar obține o clasă de țesuturi, care se situează între cele continue și cele diferențiabile, greu de precizat și fără interes deosebit, 2. generalizarea făcută o considerăm provizorie, căci avem impresia că soluția obținută se extinde la cazul continuu.

Din structurile (8) și (9) ale țesuturilor regulate (globale respectiv locale) decurg, în ipoteza de derivabilitate continuă, o serie de proprietăți :

Pentru un țesut global condițiile (RG) și (O) sînt echivalente. Țesutul fiind local, condiția (O) atrage (RG), dar invers nu.

Să considerăm în spațiul euclidian tridimensional 4 fascicule de plane și să ne restrîngem la un domeniu care nu conține niciun punct din suporturile acestor fascicule. Imaginile topologice ale acestor țesuturi coincid cu țesuturile cu proprietatea (RG).

Toate țesuturile octogonale sînt topologic echivalente. Țesuturile locale regulate se împart în 5 clase de țesuturi topologic echivalente.

2. Fie  $(Q, F)$  un  $L$ -reprezentant al unui țesut ternar. Notăm prescurtat

$$t = F(x, y, z) = xyz, \quad (11)$$

și fie  $e$  elementul neutru. Presupunem că are loc următoarea proprietate

$$\left. \begin{array}{l} \text{Toate secțiunile } x \text{ sînt izotopi principale ai unui și aceluiași} \\ \text{grup, de asemenea secțiunile } y. \end{array} \right\} \quad (P)$$

Proprietatea  $P$  nu depinde de  $L$ -reprezentantul ales, deci aparține țesutului. Avem

$$\begin{aligned} xyz &= \varphi(x, y) * \psi(x, z) \\ xyz &= \varphi_1(x, y) \circ \psi_1(y, z), \end{aligned} \quad (12)$$

unde  $*$  și  $\circ$  notează cele două operații de grup,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, z)$  funcții inversabile de  $y$  respectiv  $z$ , cînd  $x$  este fixat, iar  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\psi_1(y, z)$  funcții inversabile de  $x$  respectiv  $z$ , cînd  $y$  este fixat. Putem admite că elementul neutru al grupului  $(Q, *)$  este  $e$ , căci dacă acest element neutru ar fi  $\varepsilon \neq e$ , n-avem decît să trecem la un grup izomorf prin transformarea  $Tx = x * \varepsilon^{-1}$ ,  $x \in Q$ . La fel admitem că grupul  $(Q, \circ)$  are elementul neutru  $e$ .

Arătăm întîi

$$eyz = y * z, \quad xez = x \circ z. \quad (13)$$

Din (12<sub>1</sub>) se obține

$$\begin{aligned} z &= eez = \varphi(e, e) * \psi(e, z) \\ y &= eye = \varphi(e, y) * \psi(e, e), \end{aligned}$$

de unde

$$\varphi(e, y) = y * \psi(e, e)^*, \quad \psi(e, z) = \varphi(e, e)^* * z$$

( $x^*$  notează elementul invers al lui  $x$  în grupul  $(Q, *)$ , iar  $x^\circ$  în grupul  $(Q, \circ)$ ); deci (12<sub>1</sub>) devine pentru  $x = e$

$$eyz = y * \psi(e, e)^* * \varphi(e, e)^* * z.$$

Înlocuind aici  $y = e$ ,  $z = e$ , se determină  $\psi(e, e)^* * \varphi(e, e)^* = e$ ; așadar prima formulă (13) este stabilită; la fel se obține formula a doua.

Înlocuim în (12<sub>1</sub>)  $y = e$  și ținem seama de (13)

$$x \circ z = \varphi(x, e) * \psi(x, z),$$

deci

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \varphi(x, e)^* * (x \circ z) \\ xyz &= \varphi(x, y) * \varphi(x, e)^* * (x \circ z). \end{aligned} \quad (14)$$

Relația (14) devine pentru  $z = e$

$$\varphi(x, y) * \varphi(x, e)^* * x = xye. \quad (15)$$

Notăm operația binară

$$xye = x \nabla y, \quad (16)$$

care definește un loop pe  $Q$ . Din (14), (15) și (16) se obține

$$xyz = (x \nabla y) * x^* * (x \circ z). \quad (17)$$

În mod analog obținem

$$xyz = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z). \quad (18)$$

Reciproc, dacă un loop ternar  $(Q, F)$  admite descompunerile (17) și (18), secțiunile  $x$  și  $y$  sînt izotopi principali ai grupurilor  $(Q, *)$  și  $(Q, \circ)$ , deci  $(Q, F)$  admite proprietatea  $P$ . Astfel am demonstrat

LEMA 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un loop ternar  $(Q, F)$  să aibă proprietatea  $P$ , constă în existența simultană a descompunerilor (17) și (18) cu două operații de grup  $*$ ,  $\circ$  și o operație de loop  $\nabla$ .*

Pentru a cunoaște mulțimea loop-urilor ternare cu proprietatea  $P$  va trebui deci să determinăm operațiile de grup  $*$  și  $\circ$  și operația de loop binar  $\nabla$ , astfel ca să verifice ecuația funcțională

$$(x \nabla y) * x^* * (x \circ z) = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z) \quad (19)$$

pentru  $x, y, z \in Q$ .

Să considerăm, pentru un moment, cazul particular

$$x \nabla y = x \circ y. \quad (20)$$

Ecuația (19) devine

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * x^* * (x \circ z)$$

sau

$$x^* * [x \circ (y * z)] = x^* * (x \circ y) * x^* * (x \circ z).$$

Folosind notația

$$T_x(y) = x^* * (x \circ y), \quad (21)$$

ecuația funcțională devine

$$T_x(y * z) = T_x(y) * T_x(z),$$

deci  $T_x$  este un automorfism al grupului  $(Q, *)$ . Ținînd seama de formula (21), avem

$$x \circ y = x * T_x(y) \quad (22)$$

și putem enunța

**LEMA 2.** *Dacă grupurile  $(Q, *)$  și  $(Q, \circ)$  sînt legate cu relațiile (19) și (20), atunci operația de grup  $\circ$  se deduce din operația de grup  $*$  prin intermediul formulei (22), unde  $T$  este un automorfism al grupului  $(Q, *)$ , care depinde de  $x$ .*

**3.** Să particularizăm mulțimea  $Q$  la un interval al axei reale, iar  $(Q, F)$  la un loop ternar continuu. Pentru a plasa însă acest studiu într-un cadru mai general, nu vom mai presupune că  $(Q, F)$  este un loop global, ci unul local.

Observăm întii că demonstrațiile celor două leme stabilite sînt valabile și pentru un loop ternar local. În definiția proprietății  $P$  urmează să considerăm secțiunile  $x$  și  $y$  pentru  $x$  respectiv  $y$  luați arbitrar dintr-o vecinătate a elementului  $e$ . Sînt valabile deci următoarele leme:

**LEMA 1'.** *Condiția necesară și suficientă pentru ca un loop ternar local  $(Q, F)$  să aibă proprietatea  $P$ , constă în existența simultană a descompunerilor (17) și (18) cu două operații de grup binar local  $*$  și  $\circ$  și o operație de loop binar local  $\nabla$ .*

**LEMA 2'.** *Dacă grupurile locale  $(Q, *)$  și  $(Q, \circ)$  sînt legate cu relațiile (19) și (20), presupuse valabile pentru o vecinătate a elementului neutru atunci operația  $\circ$  se deduce din operația  $*$  prin intermediul formulei (22), unde  $T_x$  este un automorfism local al grupului local  $(Q, *)$ , care depinde de  $x$ .*

Fie  $(Q, F)$  un loop ternar local cu proprietatea  $P$ . Putem aplica lema 1', iar pentru cele două operații  $\circ$  și  $*$  avem

$$\begin{aligned} x \circ y &= g^{-1}[g(x) + g(y)] \\ x * y &= h^{-1}[h(x) + h(y)], \end{aligned} \quad (23)$$

$x$  și  $y$  fiind arbitrare într-o vecinătate  $V$  a elementului  $e$ . Funcțiile  $f$  și  $g$  îl transformă topologic pe  $V$  într-o vecinătate a lui 0. Avem

$$g(e) = 0, \quad h(e) = 0 \quad (24)$$

și

$$g(x^\circ) = -g(x), \quad h(x^*) = -h(x).$$

Ținînd seama că

$$\begin{aligned} g(x_1 \circ x_2^\circ \circ x_3) &= g(x_1) - g(x_2) + g(x_3) \\ h(x_1 * x_2^* * x_3) &= h(x_1) - h(x_2) + h(x_3), \end{aligned}$$

ecuația funcțională (19) devine

$$g^{-1}\{g(x \nabla y) - g(y) + gh^{-1}[h(y) + h(z)]\} = h^{-1}\{h(x \nabla y) - h(x) + h(x \circ z)\}. \quad (25)$$

Deosebim două cazuri :

a)  $g(x\nabla y) = g(y)$  nu depinde de  $y$ , oricare ar fi  $x \in V$ .

Avem

$$g(x\nabla y) - g(y) = \psi(x);$$

înlocuind  $y = e$ , deducem  $\psi(x) = g(x\nabla e) - g(e) = g(x)$ , deci

$$x\nabla y = g^{-1}[g(x) + g(y)] = x \circ y$$

Din lema 2' obținem

$$x \circ y = x * T_x(y),$$

unde  $T_x = T$  este un automorfism local al grupului local  $(Q, *)$ , adică

$$T(y * z) = T(y) * T(z), \quad y, z \in V$$

sau

$$Th^{-1}[h(y) + h(z)] = h^{-1}[hT(y) + hT(z)].$$

Scriind  $h(y) = u$ ,  $h(z) = v$ ,  $u$  și  $v$  sînt numere reale oarecare, suficient de mici și

$$hTh^{-1}(u + v) = hTh^{-1}(u) + hTh^{-1}(v).$$

Deci

$$\begin{aligned} hTh^{-1}(u) &= C(x) \cdot u \\ T = T_x(y) &= h^{-1}[C(x) \cdot h(y)] \\ x \circ y &= h^{-1}[h(x) + C(x) \cdot h(y)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Dar  $x \circ y = y \circ x$ , deci

$$h(x) + C(x)h(y) = h(y) + C(y)h(x);$$

punînd aici  $y = y_0$ , obținem

$$C(x) = ah(x) + 1, \tag{27}$$

unde constanta  $a = C(y_0) - 1$ .

Dacă  $a = 0$ , obținem  $C(x) = 1$ ,  $x \circ y = x * y = x\nabla y$  și

$$F(x, y, z) = x \circ y \circ z = h^{-1}[h(x) + h(y) + h(z)], \tag{28}$$

deci în acest caz  $(Q, F)$  este un grup ternar.

Dacă  $a \neq 0$ , formula (26) devine

$$x \circ y = h^{-1}[ah(x)h(y) + h(x) + h(y)],$$

iar operația loop-ului ternar local  $(Q, F)$

$$F(x, y, z) = x \circ (y * z) = h^{-1}\{a \cdot h(x)[h(y) + h(z)] + h(x) + h(y) + h(z)\}.$$



Putem scrie

$$hF(x, y, z) = [a \cdot h(x) + 1] [h(y) + h(z)] + h(x)$$

sau

$$a \cdot hF(x, y, z) + 1 = [a \cdot h(x) + 1] \{ [a \cdot h(y) + 1] + [ah(z) + 1] - 1 \}.$$

Notînd

$$\varphi(x) = a \cdot h(x) + 1, \quad (29)$$

$\varphi$  este o transformare topologică a unei vecinătăți a lui  $e$  în axa reală, ca și  $h$ , și avem

$$\varphi(e) = ah(e) + 1 = 1$$

și

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1} \{ \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) - 1 \}. \quad (30)$$

Rezumînd acest caz a), enunțăm

LEMMA 3. *Un loop ternar local  $(Q, F)$ , care admite descompunerile (17) și (18) cu trei operații de grup local  $*, \circ, \nabla$ , dintre care ultimele două coincid, are o structură determinată de formulele (28) sau (30), unde  $h$  respectiv  $\varphi$  sînt funcții continue și strict monotone. Reciproca este evident adevărată.*

Formula (28) atunci și numai atunci este valabilă, dacă cele trei operații  $*, \circ, \nabla$  coincid.

Loop-ul ternar local cu structura (28) poate fi considerat cu restrîngerea unui loop ternar global. Dimpotrivă, un loop ternar local cu structura (30) nu poate fi extins la un loop ternar global. Într-adevăr, se vede din (30), că dacă  $\varphi(x) > 1$ ,  $\varphi F(x, x, x) > [\varphi(x)]^2$  și astfel în cazul loop-ului ternar global definit de (30),  $\varphi(x)$  trebuie să ia valori oricît de mari, de asemenea valori oricît de mici. Iar, dacă  $\varphi(y_0) = \varphi(z_0) = \frac{1}{2}$ ,  $F(x, y_0, z_0)$  ia aceeași valoare  $\varphi^{-1}(0)$ , oricare ar fi  $x$ , ceea ce e în contradicție cu condiția (2). Deci are loc

LEMMA 4. *Un loop ternar global continuu  $(Q, F)$ , care admite descompunerile (17) și (18) cu trei operații de grup  $*, \circ, \nabla$ , dintre care ultimele două coincid, are o structură determinată de formula (28), deci este un grup ternar și toate cele trei operații  $*, \circ, \nabla$  coincid.*

b) Există  $x_0 \in V$  astfel ca  $g(x_0 \nabla y) - g(y) \neq \text{const}$ . Înlocuim în relația (25)  $x = x_0$

$$g(x_0 \nabla y) - g(y) + gh^{-1}[h(y) + h(z)] = gh^{-1} \{ h(x_0 \nabla y) - h(x_0) + h(x_0 \circ z) \}. \quad (31)$$

Notăm

$$j = gh^{-1} \quad (32)$$

$$h(y) = u, \quad h(z) = v;$$

$u$  și  $v$  sînt valori arbitrare dintr-o vecinătate suficient de mică a originii. Ecuația (31) devine

$$f(u + v) + j_1(u) = f[p(u) + q(v)], \quad (33)$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} f_1(u) &= g[x_0 \nabla h^{-1}(u)] - gh^{-1}(u) \neq \text{const.} \\ p(u) &= h[x_0 \nabla h^{-1}(u)], \quad q(v) = h[x_0 \circ h^{-1}(v)] - h(x_0). \end{aligned}$$

LEMMA 5. *Un loop ternar local cu proprietatea P are sau structura (28) sau (30) sau se bucură de proprietatea următoare: operația lui poate fi scrisă sub formele (17) și (18) cu grupurile locale  $\circ$  și  $*$  furnizate de (23), iar funcția  $f$ , definită prin (32), satisface, pentru  $u$  și  $v$  suficient de mici în valoare absolută, ecuația funcțională (33), unde  $f$ ,  $p$ ,  $q$  sînt funcții continue și strict monotone și  $f_1$  o funcție continuă, care nu se reduce la o constantă.*

4. Vom rezolva în punctul 5. ecuația funcțională (33) în condiții mai restrictive: vom căuta funcțiile necunoscute  $f$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $f_1$  în clasa funcțiilor care admit derivată continuă. Pentru a putea apoi aplica această soluție la loop-urile ternare locale diferentiabile, vom avea nevoie de

LEMMA 6. *Fie*

$$g(x \circ y) = g(x) + g(y) \quad (34)$$

și să presupunem că funcția  $g$  este continuă și strict monotonă pe intervalul  $I$ , valorile lui  $g$  îl conțin pe  $0$  și funcția  $G(x, y) = x \circ y$  admite derivata parțială  $G'_x(x, y)$  continuă pentru  $x \in I$ ,  $y \in I$ . Atunci există o vecinătate a lui  $e = g^{-1}(0)$ , conținută în  $I$ , pe care  $g$  admite o derivată continuă.

Demonstratie. Avem

$$\begin{aligned} G(x, e) &= x \circ e = x \\ G'_x(x, e) &= 1, \end{aligned}$$

deci există o vecinătate a lui  $e$   $V_e \subset I$ , astfel ca

$$G'_x(x, y) > 0, \text{ dacă } x, y \in V_e.$$

Formula

$$g'[G(x, y)] \cdot G'_x(x, y) = g'(x) \quad (35)$$

este valabilă dacă  $x, y \in V_e$  și  $g'(x)$  există. Ori  $g'(x)$  există în punctele lui  $V_e$ , dacă facem abstracție de o mulțime de puncte de măsură nulă. Ținînd seamă că  $G(x, y)$  este un grup local, există  $V'_e \subset V_e$  astfel ca pentru  $a \in V'_e$ ,  $c \in V'_e$  ecuația

$$G(a, y) = c \quad (36)$$

are o soluție  $y$  în  $V_e$ . Fie acum  $a \in V'_e$  astfel ca  $g'(a)$  să existe,  $c$  element oarecare în  $V'_e$  și  $y_0$  soluția ecuației (36). Pentru  $x = a$ ,  $y = y_0$ , relația (35) devine

$$g'(c) \cdot G'_x(a, y_0) = g'(a), \quad (37)$$

de unde rezultă că  $g'(c)$  există pentru  $c \in V'_e$ . Păstrînd pe  $a$  fix în (37) și făcînd pe  $y_0$  și  $c$  să varieze, astfel ca să avem mereu  $G(a, y_0) = c$ , se deduce din continuitatea funcțiilor  $G$  și  $G'_x$  că  $g'$  este o funcție continuă în  $V'_e$ .

CONSECINȚĂ. Dacă  $(Q, F)$  este un loop ternar local, continuu diferentiabil, atunci funcția  $f$ , dată de formula (32) admite o derivată continuă în vecinătatea originii.

### 5. Vom rezolva acum ecuația funcțională

$$f(x+y) + f_1(x) = \Phi[p(x) + q(y)], \quad x, y \in I \quad (38)$$

care conține ecuația (33), ca un caz particular. În ecuația (38) figurează cinci funcții necunoscute. Am trecut de la ecuația (33) la (38), pentru că această din urmă prezintă interes și în sine, membrul al doilea fiind un izotop oarecare al sumei și astfel prin ecuația (38) se determină izotopii sumei de forma  $f(x+y) + f_1(x)$ .

Căutăm soluția  $(f, \Phi, p, q, f_1)$  astfel ca primele patru funcții să fie strict monotone și cu prima derivată continuă în intervalul  $I$ , care conține originea, iar a cincea funcție  $f_1$  (a cărei derivabilitate continuă rezultă imediat) să nu fie o constantă. Prin această ipoteză ultimă excludem soluția trivială  $f_1 = \text{const}$ ,  $f$  oarecare,  $\Phi = f$ ,  $p(x) = q(x) = x$ . Se presupune de asemenea că domeniul de definiție al funcției  $\Phi$  conține valorile  $p(x) + q(y)$ ,  $x, y \in I$ .

Derivând ecuația (38) în raport cu  $x$  și  $y$  obținem

$$\begin{aligned} f'(x+y) + f_1'(x) &= \Phi'[p(x) + q(y)]p'(x) \\ f'(x+y) &= \Phi'[p(x) + q(y)]q'(y). \end{aligned} \quad (39)$$

Funcțiile  $f'$  și  $q'$  nu se anulează în  $I$ . Într-adevăr, dacă am avea  $y_0 \in I$ ,  $q'(y_0) = 0$ , atunci  $f'(x+y_0) = 0$  pentru orice  $x \in I$ , în contradicție cu monotonia strictă a funcției  $f(x)$ . Din  $f'(c) = 0$  rezultă  $\Phi'[p(x) + q(c-x)] = 0$ , ceea ce înseamnă că  $\Phi'$  se anulează pe un interval, adică o contradicție.

Prin împărțire obținem din (39)

$$\frac{1}{f'(x+y)} = \frac{p'(x)}{f_1'(x)} \cdot \frac{1}{q'(y)} - \frac{1}{f_1(x)}$$

sau notînd  $G = 1/f'$ ,  $P = p'/f_1'$ ,  $Q = 1/q'$ ,  $R = -1/f_1$ ,

$$G(x+y) = P(x)Q(y) + R(x), \quad (40)$$

unde  $G$  și  $Q$  sînt funcții continue pe  $I$ ,  $P$  și  $R$  funcții continue pe un interval  $I' \subset I$ . În aceste condiții funcțiile  $P, Q, R, G$  sînt indefinit derivabile [9]. Obținem, prin derivare în raport cu  $y$ , ecuația funcțională

$$G'(x+y) = P(x) \cdot Q'(y)$$

și se cunoaște că soluția generală a acesteia este

$$G'(x) = a_1 e^{cx},$$

unde  $a_1$  și  $c_1 > 0$  sînt constante. Deci

$$G(x) = a_2 e^{cx} + b_1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{a_2 e^{cx} + b_1}$$

$$f(x) = k \ln(ac^x + b) \quad (41)$$

( $a_2, b_1, a \neq 0, b, k \neq 0$  și  $c > 0$  sînt constante).

Așadar, o funcție  $f$ , care verifică ecuația funcțională (38) împreună cu patru funcții din clasa de funcții specificată, este de forma (41). Pentru aplicațiile în teoria țesuturilor ne ajunge funcția  $f(x)$ . Dar ecuația (38) este interesantă și independent de această aplicație, precum am observat, de aceea trecem acum la determinarea celorlalte patru funcții necunoscute.

Scriind  $p(x) = u$ ,  $q(y) = v$  ecuația (38) devine

$$\Phi(u + v) - f_1 p^{-1}(u) = f[p^{-1}(u) + q^{-1}(v)],$$

care are exact aceeași structură ca și ecuația (38), iar condițiile impuse pentru  $p$  și  $q$  atrag aceleași condiții pentru  $p^{-1}$  și  $q^{-1}$ . Rolul lui  $f$  fiind preluat de  $\Phi$ , avem

$$\Phi(x) = k' \ln(a'c'^x + b'), \quad (42)$$

unde  $a' \neq 0$ ,  $k' \neq 0$ ,  $c' > 0$  sînt constante. Cele 8 constante, care figurează în expresiile (41) și (42) nu sînt independente. Notînd

$$k = k'\alpha, \quad c' = c^\beta, \quad \beta p(x) = p_1(x), \quad \beta q(y) = q_1(y), \quad f_2(x) = e^{\frac{1}{k}f_1(x)} \quad (43)$$

și înlocuind expresiile (41) și (42) în ecuația (38), obținem

$$[(ac^{x+y} + b)f_2(x)]^\alpha = a'c^{\beta p_1(x) + q_1(y)} + b'. \quad (44)$$

Ecuația (44) furnizează pentru  $x = 0$

$$a'c^{\beta q_1(y)} = A(ac^y + b)^\alpha + B;$$

astfel (44) devine

$$[(ac^{x+y} + b)f_2(x)]^\alpha = [A(ac^y + b)^\alpha + B]c^{\beta p_1(x)} + b'.$$

Considerăm aceeași ecuație pentru  $y = 0$  și le împărțim

$$\frac{(ac^{x+y} + b)^\alpha}{(ac^x + b)^\alpha} = \frac{[A(ac^y + b)^\alpha + B]c^{\beta p_1(x)} + b'}{[A(a + b)^\alpha + B]c^{\beta p_1(x)} + b'};$$

după un calcul simplu rezultă că

$$\frac{(ac^{x+y} + b)^\alpha - (ac^x + b)^\alpha}{(ac^y + b)^\alpha - (a + b)^\alpha} = \text{funcție de } x.$$

Notînd  $\psi(x) = (ac^x + b)^\alpha$ , avem

$$\frac{\psi(x+y) - \psi(x)}{\psi(y) - \psi(0)} = \chi(x)$$

$$\psi(x+y) = \chi(x)[\psi(y) - \psi(0)] + \psi(x).$$

Această ecuație este de tipul ecuației (40), deci

$$\psi(x) = A_1 \gamma^x + B_1 = (ac^x + b)^\alpha;$$

rezultă (după derivare)

$$\alpha = 1.$$

Relația (44) se scrie

$$(ac^{x+y} + b)f_2(x) = a'c^{f_1(x) + g_1(y)} + b'; \quad (45)$$

înlocuind  $x = 0$ , obținem

$$c^{g_1(y)} = \frac{a}{a_1} c^y + b'b_1, \quad (46)$$

unde  $a_1$  și  $b_1$  sînt constante. Dacă  $b_1 = 0$ , rezultă ușor că toate funcțiile necunoscute sînt liniare. Să presupunem acum că  $b_1 \neq 0$ . Scădem din (45) aceeași ecuație pentru  $y = 0$ ; ținînd seamă de (46) și simplificînd se obține

$$f_2(x) = \frac{a'}{a_1} c^{f_1(x) - x};$$

ecuația (45) devine

$$c^{f_1(x)} = \frac{a'b}{a_1b'}, c^{-x} = a'b_1.$$

Așadar

$$\begin{cases} f(x) = k \ln(ac^x + b) \\ \Phi(x) = k \ln(a'c^{kx} + b') \\ p(x) = \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{a'b}{a_1b'} c^{-x} - a'b_1 \right) \\ q(x) = \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{a}{a_1} c^x + b'b_1 \right) \\ f_1(x) = -k \ln \left( \frac{b}{b'} - a_1b_1c^x \right). \end{cases} \quad (47)$$

Se constată prin înlocuire că funcțiile (47) verifică ecuația funcțională (38).

**TEOREMA 1.** *Soluția generală a ecuației funcționale (38) în clasa funcțiilor strict monotone și continuu diferențiabile pentru  $f, \Phi, p, q$  și pentru  $f_1 \neq \text{const.}$ , este dată de formulele (47), unde  $a \neq 0, a' \neq 0, a_1 \neq 0, b, b' \neq 0, b_1, k, \beta \neq 0$  și  $c > 0$  sînt constante arbitrare sau toate funcțiile soluției sînt liniare.*

Soluția generală a ecuației (33) se obține din soluția (47) a ecuației (38) punînd  $a' = a, b' = b, \beta = 1$ .

6. Fie iarăși  $(Q, F)$  un loop ternar local, continuu diferențiabil, cu proprietatea P. Să presupunem că structura lui nu se exprimă cu formulele (28) și (30), adică ne plasăm în cazul b) al punctului 3. În conformitate cu lema 5., operația acestui loop admite descompunerile (17) și (18), unde operațiile  $\circ$  și  $*$  sînt date de (23), iar funcția (32)  $f = gh^{-1}$  are forma (41) (s-a ținut seama de consecința lemei 6 și teorema 1).

Acuma sîntem în măsură de a determina operațiile binare  $\circ, *$  și  $\nabla$  și apoi operația ternară  $F(x, y, z)$ .

Să notăm

$$\varphi(x) = c^{h(x)}; \quad (48)$$

atunci  $\varphi(e) = c^{h(e)} = 1$  și (23<sub>2</sub>) devine

$$x * y = \varphi^{-1}[\varphi(x) \cdot \varphi(y)]. \quad (49)$$

Mai departe,

$$g(x) = fh(x) = k \ln(ac^{h(x)} + b) = k \ln[a\varphi(x) + b];$$

punem condiția  $g(e) = 0$ , ceea ce conduce la

$$b = 1 - a.$$

Operația  $\circ$  se exprimă după formula (23<sub>1</sub>) în felul următor:

$$\begin{aligned} k \ln [a\varphi(x \circ y) + 1 - a] &= k \ln [a\varphi(x) + 1 - a] + k \ln [a\varphi(y) + 1 - a] \\ x \circ y &= \varphi^{-1}\{a\varphi(x)\varphi(y) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(y) - 1]\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Înlocuim expresiile (49) și (50) ale operațiilor  $*$  și  $\circ$  în ecuația (19)

$$\begin{aligned} \frac{a\varphi(x \nabla y) \varphi(y) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x \nabla y) - \varphi(y) + \varphi(y) \varphi(z)]}{a\varphi(y) + 1 - a} &= \\ = \frac{\varphi(x \nabla y) \{a\varphi(x) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(z) - 1]\}}{\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Această relație determină operația  $\nabla$ :

$$x \nabla y = \varphi^{-1} \left[ \frac{\varphi(x) \varphi(y)}{a\varphi(x) \varphi(y) - a\varphi(x) - a\varphi(y) + a - 1} \right]. \quad (52)$$

Formula (52) poate fi pusă sub forma

$$\frac{1 - a}{\varphi(x \nabla y)} + a = \left[ \frac{1 - a}{\varphi(x)} + a \right] \cdot \left[ \frac{1 - a}{\varphi(y)} + a \right],$$

sau punând

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1 - a}{\varphi(x)} + a \right],$$

avem

$$\psi(x \nabla y) = \psi(x) + \psi(y), \quad (53)$$

deci  $(Q, \nabla)$  este local izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Formula (17), sau cei doi membri ai egalității (51), furnizează expresia

$$\varphi F(x, y, z) = -\varphi(y) \cdot \frac{a\varphi(x) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(z) - 1]}{a\varphi(x) \varphi(y) - a\varphi(x) - a\varphi(y) + a - 1}$$

sau notînd  $(1 - a)/a = k$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1} \left[ \frac{\varphi(z) + k \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}}{\frac{1}{\varphi(y)} - \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}} \right]. \quad (54)$$

**TEOREMA 2.** *Un loop ternar local  $(Q, F)$  continuu diferențiable, cu proprietatea P are sau structura (28) sau (54), unde  $k$  este o constantă diferită de  $-1$  și  $\varphi$  (respectiv  $h$ ) o funcție strict monotonă și continuu diferențiable, care transformă o vecinătate a lui  $e$  într-o vecinătate a axei reale, care conține punctul unitate (respectiv originea).*

Trebuie să arătăm numai că structura (30) este conținută în (54), ca un caz particular.

Să observăm întâi că în formula (54) variabilele  $x, y, z$  au un rol simetric [10]. Într-adevăr, scriind

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} \text{ și } k = \frac{1}{k_1}$$

obținem

$$F(x, y, z) = \varphi_1^{-1} \left[ \frac{\varphi_1(y) + k_1 \frac{\varphi_1(x) - 1}{\varphi_1(x) + k_1}}{\frac{1}{\varphi_1(z)} - \frac{\varphi_1(x) - 1}{\varphi_1(x) + k_1}} \right] \quad (54')$$

și scriind

$$\varphi_1(x) = (k_1 + 1)\varphi_2(x) - k_1 \text{ și } k_1 = -\frac{k_2}{k_2 + 1},$$

obținem

$$F(x, y, z) = \varphi_2^{-1} \left[ \frac{\varphi_2(y) + k_2 \frac{\varphi_2(z) - 1}{\varphi_2(z) + k_2}}{\frac{1}{\varphi_2(x)} - \frac{\varphi_2(z) - 1}{\varphi_2(z) + k_2}} \right]. \quad (54'')$$

Valorile  $k = 0, -1, \infty$  se transformă în  $k_1 = \infty, -1, 0$  și  $k_2 = -1, \infty, 0$ . Valoarea  $k = -1$  este excepțională, ea corespunde la  $a = \infty$  și formula (54) nu dă un loop ternar. Dar  $k = 0$  sau  $\infty$  pot fi considerate.

Punând în formula (54) și în cele deduse prin schimbarea rolurilor variabilelor  $k = 0$  sau  $\infty$ , se obțin structurile analoge cu (30).

Din teorema 2 deducem imediat

**TEOREMA 3.** *Dacă secțiunile  $x$  și  $y$  ale unui loop ternar local, continuu diferențiable, sînt local izotope cu cite un grup, atunci și secțiunile  $z$  au această proprietate.*

7. În acest punct vom aplica teorema 2 la teoria țesuturilor locale, continuu diferențiable, pe care le vom numi *țesuturi*  $T$ . Țesuturile  $T$  sînt formate din patru familii de suprafețe, continuu diferențiable, așezate într-un domeniu  $D$  al spațiului euclidian tridimensional. Dacă domeniul  $D$  cuprinde întregul spațiu, avem un țesut global  $T$ , în caz contrar un țesut local  $T$ .

După cum am arătat în punctul 1, un țesut  $T$  este octogonal, dacă verifică condiția (O); el este regulat, dacă verifică condiția (RG). Țesuturile  $T$  octogonale sînt topologic echivalente cu un țesut format din 4 fascicole de plane paralele.

$L$ -reprezentății Țesuturilor locale  $T$  regulate au proprietatea  $P$ , deci li se pot aplica teorema 2, așadar au operația de forma (28) sau (54).  
Rezultă

TEOREMA 4. *Un Țesut local  $T$  regulat are un reprezentant de forma*

$$t = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}, \quad (55)$$

unde  $A_i, B_i, C_i, D_i, i = 1, 2$  sînt constante. Invers, orice Țesut local definit prin formula (55) este un Țesut local  $T$  regulat.

Într-adevăr, dacă formula (28) este valabilă, aplicăm izomorfismul  $h(x) \rightarrow x$  și obținem formula (55) cu  $A_1 = B_1 = C_1 = D_2 = 1$  și  $D_1 = A_2 = B_2 = C_2 = 0$ . Dacă formula (54) este valabilă, aplicăm izotopia

$$\frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k} \rightarrow x, \quad \frac{1}{\varphi(y)} \rightarrow y, \quad \varphi(z) \rightarrow z, \quad \varphi(t) \rightarrow t$$

și se obține o expresie de forma (55).

Reciproc, dacă se dă (55) și  $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ , (55) este izotop cu

$$t = x + y + z, \quad (56)$$

care este tocmai (28) cu  $h(x) = x$ .

Dacă  $A_2 = B_1 = C_1 = 0$  (atunci în mod necesar  $A_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0$ , căci altfel (51) n-ar defini un Țesut) sau  $A_1 = B_2 = C_2 = 0$ , (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + z}{x}, \quad (57)$$

Dacă  $A_1 = B_2 = C_1 = 0$  sau  $A_2 = B_1 = C_2 = 0$ , (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + z}{y}; \quad (57')$$

dacă  $A_1 = B_1 = C_2 = 0$  sau  $A_2 = B_2 = C_1$ , (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + y}{z}. \quad (57'')$$

Dacă  $A_1A_2 \neq 0$  sau  $B_1B_2 \neq 0$  sau  $C_1C_2 \neq 0$ , (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + y}{x + z} \quad (58)$$

(în același timp este izotop cu  $y + x/y + z$  și cu  $z + x/z + y$ ). Formulele (57), (57'), (57'') și (58) sînt conținute în (54).

Astfel am demonstrat teorema 4 și totodată am stabilit

TEOREMA 5. *Un Țesut local  $T$  regulat este topologic echivalent cu unul din cele 5 Țesuturi (56), (57), (57'), (57''), (58), topologic neechivalente între ele. Fiecare dintre aceste Țesuturi este format din 4 fascicule de plane (dintre care 3 sînt fascicule de plane paralele cu planele de coordonate).*



La tipul (56) suportele celui de al patrulea fascicol este la infinit, la tipurile (57), (57'), (57'') acest suport este paralel cu unul din planele de coordonate, iar la tipul (58) el nu este paralel cu niciunul din planele de coordonate.

Ținând seamă că dintre cele cinci tipuri de țesut local, numai primul este un țesut global și acesta este un țesut octogonal, putem enunța

TEOREMA 6. *Tesuturile globale  $T$  regulate coincid cu țesuturile  $T$  octogonale.*

Cazurile (57), (57') și (57'') corespund structurii (30) care este un caz particular al structurii (54).

### 8. Reluăm ecuația funcțională

$$f(x + y) + f_1(x) = \Phi[p(x) + q(y)], \quad (38)$$

considerată pe toată axa reală, căutînd soluțiile din clase de funcții mai vaste decît în punctul 5. Presupunem că funcțiile  $p$ ,  $q$ ,  $\Phi$  sînt strict monotone și absolut continue și  $f_1(x) \neq \text{const}$ .

Vom arăta că în aceste izotope soluția este dată de asemenea de formulele (47) sau funcțiile soluției sînt liniare.

Fixînd pe  $x$  în (38), rezultă că  $f$  este și ea o funcție strict monotună și absolut continuă, iar  $f_1$  este o funcție cu variație mărginită.

Să considerăm întîi cazul particular  $q(y) = ay + b$ . Notînd  $\frac{1}{a}p(x) - x = r(x)$ ,  $\Phi(ax + b) = \psi(x)$ ,  $x + y = t$ ,

$$f(t) + f_1(x) = \psi[t + r(x)].$$

Fie  $I'$  domeniul valorilor funcției  $r(x)$ , cînd  $x \in (-\infty, \infty)$ . Avem pentru  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $t' \in I'$

$$f(t) + f_2(t') = \psi(t + t'), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad t' \in I'.$$

Am obținut ecuația lui Pexider, a cărei soluție, în condițiile noastre, este formată din funcții liniare.

În continuare presupunem că funcția  $q(y)$  nu se reduce la o funcție liniară. Arătăm succesiv:

a) Mulțimea  $E_k$  de puncte  $x$  pentru care  $f_1(x) = k$  este o submulțime (eventual vidă sau de un singur element) a unei mulțimi de puncte  $\{x_0 + n\theta\}$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , unde  $\theta$  nu depinde de  $k$ .

Fie într-adevăr  $f_1(x_0) = f_1(x_1)$ . Atunci

$$\begin{aligned} f(x_0 + y) + f_1(x_0) &= \Phi[p(x_0) + q(y)] \\ f(x_1 + y + x_0 - x_1) + f_1(x_1) &= \Phi[p(x_1) + q(y + x_0 - x_1)]; \end{aligned}$$

membrii I fiind egali și  $\Phi$  fiind o funcție strict monotună

$$p(x_0) + q(y) = p(x_1) + q(y + x_0 - x_1).$$

Ținînd seamă de această egalitate se deduce că funcția

$$Q(y) = q(y) - \frac{p(x_0) - p(x_1)}{x_0 - x_1} y$$

verifică relația

$$Q(y + x_1 - x_0) = Q(y). \quad (59)$$

$Q$  nu se reduce la o constantă, căci  $q$  nu este o funcție liniară, deci  $Q$  este o funcție periodică. Perioada ei  $\theta$  nu depinde de  $x_0$  și  $x_1$ , ea fiind determinată de funcția  $q$ . Într-adevăr, notînd  $A = [\phi(x_0) - \phi(x_1)]/(x_0 - x_1)$

$$q(y) = Q(y) + Ay;$$

dacă am avea în același timp

$$q(y) = Q_1(y) + A_1y,$$

$A_1 \neq A$ , ar rezulta

$$(A - A_1)y + Q(y) = Q_1(y)$$

și  $Q$  n-ar putea fi o funcție periodică. Rezultă  $A_1 = A$ ,  $Q_1 = Q$ . Din relația (59) rezultă

$$x_1 - x_0 = n\theta,$$

unde  $n$  este un întreg.

b) Derivatele funcțiilor  $\phi, q, \Phi, f, f_1$  există și sînt finite aproape peste tot. Fie  $M_1, M_2, M_3$  mulțimile de puncte în care  $\phi, q$  respectiv  $\Phi$  admit derivate finite. Formulele

$$\begin{cases} f'(x+y) + f_1'(x) = \Phi'[\phi(x) + q(y)]\phi'(x) \\ f'(x+y) = \Phi'[\phi(x) + q(y)]q'(y) \end{cases} \quad (60)$$

sînt valabile pentru sistemele de valori  $x, y$  astfel ca

$$x \in M_1, y \in M_2, \phi(x) + q(y) \in M_3. \quad (61)$$

c) Funcția  $f$  admite derivată finită în fiecare punct.

E suficient să arătăm că pentru orice  $z \in (-\infty, \infty)$ , există  $x, y$  astfel ca  $z = x + y$  și  $x, y$  să satisfacă condiția (61). Să considerăm transformarea

$$t = \psi(x) = \phi(x) + q(z - x) \quad (62)$$

a mulțimii numerelor reale în ea însăși. Dacă  $x_1$  și  $x_2$  au aceeași imagine prin (62)

$$\phi(x_1) + q(z - x_1) = \phi(x_2) + q(z - x_2),$$

atunci din (38) rezultă

$$f_1(x_1) = f_1(x_2)$$

și deci în baza punctului a),  $|x_1 - x_2| > \theta$ . Fie  $I$  un interval de lungime mai mică decît  $\theta$ . Transformarea (62) este biunivocă pe  $I$  și deoarece  $\psi(x)$  este o funcție absolut continuă, această transformare îndeplinește pe  $I$  condiția  $N$  de a transforma orice mulțime de măsură nulă într-o mulțime de măsură nulă. Așadar mulțimea  $M_1 \cap I$  se transformă într-un interval din care se scoate o mulțime de măsură nulă, de asemenea mulțimea punctelor  $x$ , pentru care  $x \in M_1 \cap I$  și  $z - x \in M_2$ . Deci se poate alege  $x_0$

astfel ca  $x_0 \in M_1 \cap I$ ,  $z - x_0 \in M_2$ ,  $t_0 = \psi(x_0) = p(x_0) + q(z - x_0) \in M_3$ . Perechea  $x_0, z - x_0$  satisface condiția (61) și astfel am demonstrat că funcția  $f$  admite derivată finită în orice punct.

d) Funcțiile  $d$ ,  $\Phi$  și  $q$  admit derivate finite și diferite de zero în orice punct. Într-adevăr, ecuația (38) se poate scrie sub forma (42), în care  $\Phi$  joacă rolul lui  $f$ , deci rezultatul c) se poate aplica lui  $\Phi$ . Rezultă că formula (60<sub>2</sub>) este valabilă fără excepție. Dacă  $\Phi'$  s-ar anula într-un punct,  $f'$  ar fi egal cu zero într-un interval, contrar ipotezei că această funcție este strict monotonă. Rezultă existența lui  $q'$  și că nici  $f'$  și nici  $q'$  nu se pot anula.

e) Funcțiile  $f'$ ,  $\Phi'$ ,  $q'$  sînt punctual discontinue (pe orice interval aceste funcții au puncte de continuitate), căci, fiind derivate finite peste tot, sînt de clasa I Baire. Rezultă că  $\frac{1}{f'}$ , și  $\frac{1}{q'}$ , sînt funcții punctual discontinue.

f) Formula (60<sub>2</sub>) este valabilă peste tot, iar (60<sub>1</sub>) pentru  $x \in M_1$ ,  $y$  oarecare. Prin împărțire deducem ecuația funcțională (40), valabilă pentru  $x \in M_1$ ,  $y$  oarecare, în care  $G$  și  $Q$  sînt funcții punctual discontinue.

g) Funcțiile  $G$  și  $Q$  sînt continue peste tot. Fie într-adevăr  $y_0$  un punct de continuitate pentru  $Q$ . Atunci toate punctele  $x + y_0$ , unde  $x \in M_1$ , sînt puncte de continuitate pentru  $G$ , căci avem pentru  $x$  fixat în  $M_1$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x + y_0} G(\xi) &= \lim_{y \rightarrow y_0} G(x + y) = \lim_{y \rightarrow y_0} [P(x)Q(y) + R(x)] = \\ &= P(x)Q(y_0) + R(x) = G(x + y_0). \end{aligned}$$

Așadar aproape orice punct de pe axa reală este un punct de continuitate pentru  $G$ . Deci,  $y_1$  fiind un punct oarecare, putem alege  $x_1 \in M_1$  astfel ca  $x_1 + y_1$  să fie un punct de continuitate pentru  $G$ . Avem

$$G(x_1 + y) = P(x_1)Q(y) + R(x_1).$$

Ținînd seama că  $P_1(x) \neq 0$ , rezultă că  $Q$  este o funcție continuă în  $y_1$ . Așadar funcția  $Q$  și împreună cu ea funcția  $R$  sînt continue peste tot.

Dar atunci funcțiile  $P, Q, R, G$  sînt indefinit derivabile [9] și putem aplica rezultatul de la punctul 5.

#### BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Deutscher Verl. der Wiss., Berlin, 1961.
2. J. Aczél — G. Pickert — F. Radó, *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. „Mathematica” **2(25)**, 5—24 (1960).
3. W. Blaschke — G. Bol, *Geometrie der Gewebe*. „Grundl. d. math. Wiss.”, **49**, Berlin, 1938.
4. L. E. J. Brouwer, *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie*. „Math. Ann.”, **67**, 246—267 (1909).
5. R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*. „Ergebnisse d. Math.”, Neue Folge, **20**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

6. G. Pickert, *Projektive Ebenen*. „Grundl. d. math. Wiss.“, **80**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
7. F. Radó, *Generalizarea Țesurilor spațiale pentru structuri algebrice*. „Studia Universitatis Babeș-Bolyai“, ser. I, fasc. 1, Math.-Phys., **41**—**55** (1960).
8. F. Radó, *Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe*. „Mathematica“ **2** (25), 325—334 (1960).
9. F. Radó, *Caractérisation de l'ensemble des intégrales des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre donné*. „Mathematica“ **4** (27) 131—143 (1962).
10. F. Radó — M. Hosszú, *Über eine Klasse von ternären Quasigruppen*. „Acta Mathematica Acad. Hung.“ (Sub tipar).

## РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ТКАНИ

(Резюме)

Тернарная квазигруппа  $(Q, F)$  (или  $N$  алгебра) является множеством  $Q$ , на котором определена тернарная операция:

$$F(x, y, z) = xyz \quad (1)$$

так, чтобы уравнения (2) имели по одному единственному решению в  $Q$ , для  $a, b, c, d$ , произвольно фиксированных в  $Q$  (7). Если имеется нейтральный элемент  $e \in Q$  со свойством (3),  $(Q, F)$  называется *тернарным луном*. Соотношение (4) определяет *изотопию* между двумя квазигруппами. Если  $k$  является тождественным преобразованием, имеем *главную изотопию*. В работе *тернарная ткань* понимается множеством тернарных квазигрупп, изотопных с одной данной тернарной квазигруппой.

Рядом с тернарными непрерывными квазигруппами (когда  $Q$  является действительным интервалом и  $F$  непрерывной функцией), рассматриваются и *локальные тернарные квазигруппы*, определенные следующим способом: пусть  $V_1, V_2, V_3$  три окрестности действительной оси; *требуется, чтобы непрерывная функция* (1) *была определена для*  $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$  *и чтобы имелись окрестности*  $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2, V'_3 \subset V_3, V'_4 \ni F(x_0, y_0, z_0), (x_0 \in V_1, y_0 \in V_2, z_0 \in V_3)$ , *так, чтобы для*  $a \in V'_1, b \in V'_2, c \in V'_3, d \in V'_4$ , *уравнения* (2) *имели по одному единственному решению в*  $V_1, V_2, V_3$ , *соответственно. Если в частности*  $V_1 = V_2 = V_3, x_0 = y_0 = z_0 = e$ , *имеется локальный тернарный лун. Если формула* (4) *удовлетворена только для одной какой-либо окрестности, она определяет локальную изотопию. Локальная ткань является множеством локальных тернарных квазигрупп, локально изотопных с локальной тернарной квазигруппой.*

Пусть  $(Q, F)$  тернарная квазигруппа и  $e_0$  постоянный элемент из  $Q$ . Бинарная операция  $(x, y) \rightarrow F(x, y, e_0)$  определяет бинарную квазигруппу на  $Q$ , названную *разрезом  $z$  тернарной квазигруппы  $(Q, F)$* . Аналогично определяются разрезы  $x$  и  $y$ .

Тернарная квазигруппа называется *регулярной*, если удовлетворяет *обычному условию закрытия Рейдемейстера*  $(R, G)$ . Это условие является инвариантным у изотопий, следовательно можно определить ткань регулярной, если один представитель является регулярным. Доказалось в [8] что, необходимое и достаточное условие для того, чтобы тернарный лун был регулярным, следующее: все разрезы  $x, y, z$  должны быть главными изотопами, каждый с одной группой.

В данной работе показано, что, *если разрезы  $x$  и  $y$  непрерывно дифференцируемого локального тернарного луна являются главными изотопами, каждый с одной группой, тогда операция этого луна выражается либо формулой (28), либо формулой (54), где  $k$  — постоянная  $\neq -1$ , и  $\varphi$  (соответственно  $\tilde{k}$ ) — строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция. Следует, что разрезы  $z$  являются также главными изотопами с одной группой.*

Формулы (28) и (54) были найдены и в работе [10], но в допущении, что три системы разрезов  $x, y, z$  являются главными изотопами, каждый с одной группой. Чтобы прийти к вышеуказанному результату, решается функциональное уравнение (38) в классе строго монотонных и непрерывно дифференцируемых функций для  $f, \Phi, \rho, q$  и для  $f_1 \neq \text{const}$ . *Решение дано формулами (47) или составлено из линейных функций.*

То же самое решение находится в более общих условиях абсолютной непрерывности, вместо дифференцируемости.

Из вышеуказанного результата вытекает ряд свойств для регулярных тканей. в допущении непрерывной дифференцируемости:

Для глобальной ткани условия (RG) и (O) являются эквивалентными. Ткань, будучи локальной, условие (O) влечёт за собой условие (RG), но не и обратно.

Рассмотрим в эвклидовом трёхмерном пространстве 4 лучка плоскостей и ограничимся областью не содержащей ни одной точки из носителей этих пучков.

Топологические образы этих тканей совпадают с тканями со свойством (RG).

Локальные регулярные ткани делятся на 5 классов топологически эквивалентных тканей.

## TISSUS TERNAIRES RÉGULIERS

### (R é s u m é)

Un quasi-groupe ternaire  $(Q, F)$  (ou une  $N$ -algèbre) est un ensemble  $Q$  pour lequel on a défini l'opération ternaire

$$t = F(x, y, z) = xyz \quad (1)$$

telle que les équations (2) aient chacune une solution unique en  $Q$ , pour  $a, b, c, d$  fixés de façon quelconque en  $Q$  [7]. Si l'élément neutre  $e \in Q$  avec la propriété (3) existe,  $(Q, F)$  s'appelle *loop ternaire*. La relation (4) définit l'*isotopie* entre les deux quasi-groupes. Si  $h$  est la transformation identique, nous avons une *isotopie principale*. Un *tissu ternaire* est conçu dans notre travail comme l'ensemble des quasi-groupes ternaires isotopes à un quasi-groupe ternaire donné.

A côté des quasi-groupes ternaires continus (dorsque  $Q$  est un intervalle réel et  $F$  une fonction continue), on considère aussi les *quasi-groupes ternaires locaux*, qui se définissent comme suit: soit  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  trois voisinages de l'axe réel: on demande que la fonction continue (1) soit définie pour  $x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2, z \in \Gamma_3$  et qu'il existe les voisinages  $\Gamma'_1 \subset \Gamma_1, \Gamma'_2 \subset \Gamma_2, \Gamma'_3 \subset \Gamma_3, \Gamma'_4 \ni F(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0 \in \Gamma_1, y_0 \in \Gamma_2, z_0 \in \Gamma_3$ ), tels que, pour  $a \in \Gamma'_1, b \in \Gamma'_2, c \in \Gamma'_3, d \in \Gamma'_4$  les équations (2) aient chacune une solution unique en  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  respectivement. Si en particulier  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3, x_0 = y_0 = z_0 = e$ , nous avons un *loop ternaire local*. Si la formule (4) n'est vérifiée que pour un voisinage, elle définit une isotopie locale. Un *tissu local* est l'ensemble des quasi-groupes ternaires locaux, localement isotopes à un quasi-groupe ternaire local.

Soit  $(Q, F)$  un quasi-groupe ternaire et  $z_0$  un élément fixe de  $Q$ . L'opération binaire  $(x, y) \rightarrow F(x, y, z_0)$  définit un quasi-groupe binaire sur  $Q$ , nommé une *section  $z$*  de  $(Q, F)$ . On définit de façon analogue les sections  $x$  et  $y$ .

Un quasi-groupe ternaire se nomme *régulier* s'il satisfait à la condition de fermeture de Reidelmeister généralisée (RG). Cette condition est invariante pour les isotopes; on peut donc définir un *tissu* comme régulier si un représentant est régulier.

On a démontré [8] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un loop ternaire soit régulier est que toutes les sections  $x, y, z$  soient des isotopes principaux, chacun à un groupe.

L'auteur démontre que, si les sections  $x$  et  $y$  d'un groupe ternaire local, continûment différentiable, sont des isotopes principaux chacun avec un groupe, alors l'opération de ce loop s'exprime soit par la formule (28), soit par la formule (54), où  $k$  est une constante différente de  $-1$  et  $\varphi$  (respectivement  $h$ ) une fonction strictement monotone et continûment différentiable. Il résulte que les sections  $z$  sont de même des isotopes principaux avec un groupe.

Les formules (28) et (54) ont été trouvées aussi dans l'article [10], mais dans l'hypothèse que les trois systèmes de sections  $x, y, z$  sont des isotopes principaux avec un groupe chacun. Pour obtenir le résultat ci-dessus on résout l'équation fonctionnelle (38) dans la classe des fonctions strictement monotones et continûment différentiables pour  $f, \varphi, g$  et pour  $f_1 \neq$

const. La solution est donnée par les formules (47) ou elle est composée de fonctions linéaires. La même solution peut être trouvée dans des conditions plus générales, de continuité absolue, au lieu de dérivabilité.

Du résultat obtenu plus haut découlent une série de propriétés pour les tissus réguliers, dans l'hypothèse de dérivabilité continue :

*Pour un tissu global les conditions (RG) et (O) sont équivalentes. Le tissu étant local, la condition O entraîne la condition (R, G), mais non inversement.*

Considérons dans l'espace euclidien tridimensionnel 4 faisceaux de plans et restreignons-nous à un domaine qui ne contient aucun point des supports de ces faisceaux. Les images topologiques de ces tissus coïncident avec les tissus à propriété (RG).

*Les tissus locaux réguliers se répartissent en 5 classes de tissus topologiquement équivalents.*

## SPAȚII SUBPROIECTIVE ECHIAFINE

de

MARIAN ȚARINĂ

Un spațiu  $A_n$  cu conexiune afină se numește de  $k$  ori proiectiv, dacă există un sistem de coordonate în care curbele autoparalele ale spațiului, definite prin sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \quad (1)$$

sînt situate în varietăți liniare cu  $n-k$  dimensiuni. Aceasta revine la faptul că dintre cele  $n-1$  ecuații finite

$$F^\alpha(x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^{2n-2}) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

care reprezintă integrala generală a sistemului (1), un număr de  $k$  sînt lineare în variabilele considerate.

Spațiile de mai sus, introduse de F. Kagan [1] au fost studiate mai ales din punctul de vedere metric diferențial de școala de geometrie de la Moscova [2], [3]. Ele reprezintă o generalizare directă a spațiilor proiectiv euclidiene, care se obțin în cazul cînd  $k = n-1$ .

Kagan a considerat numai cazul spațiilor de  $n-2$  ori proiective, în care varietățile liniare ce conțin curbele autoparalele trec printr-un punct fix, polul spațiului, considerat ca origine a sistemului de coordonate. După terminologia introdusă de Kagan, în literatura de specialitate astfel de spații se numesc subproiective. Vom considera și noi acest caz deși se cunosc spații parțial proiective mai generale [5].

Într-un sistem de coordonate în care se pune în evidență caracterul subproiectiv al spațiului, coeficienții de conexiune sînt de forma

$$\Gamma_{jk}^i = -\delta_j^i p_k - \delta_k^i p_j + f_{jk} x^i \quad (3)$$

Aceste relații se numesc formulele lui Kagan, iar coordonatele respective sînt denumite coordonate proiective. De aici rezultă că spațiul subproiectiv considerat este echivalent printr-o transformare proiectivă de conexiune, cu spațiul ce are conexiunea

$$\Gamma_{jk}^i = f_{jk} x^i \quad (4)$$

De altfel P. Rașevski [2] a arătat că într-un spațiu subproiectiv există în general un sistem de coordonate în care se anulează vectorul  $\hat{p}_k$ , deci pentru care conexiunea se exprimă prin formulele (4). Astfel de coordonate se numesc coordonate canonice.

Să considerăm tensorul de curbură al spațiului

$$\Gamma_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^i - \Gamma_{sl}^s \Gamma_{jk}^i$$

pe care îl calculăm cu ajutorul formulelor (3). Obținem astfel

$$\Gamma_{jkl}^i = -\delta_j^i (p_{kl} - p_{lk}) - \delta_k^i [p_{jl} + (P+1)f_{jl}] + \delta_l^i [p_{jk} + (P+1)f_{jk}] + x^i F_{jkl} \quad (5)$$

expresii în care am folosit următoarele notații

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{kl} &= \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial x^l} - \hat{p}_k \hat{p}_l \quad P = 1 + \hat{p}_s x^s \\ f_k &= f_{ks} x^s \\ F_{jkl} &= \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial f_{jl}}{\partial x^k} + f_k f_{jl} - f_l f_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Din formulele (5) se obțin tensorii de curbură contractați, în coordonate proiective și anume

$$\begin{aligned} R_{kl} &= -(n+1)(p_{kl} - p_{lk}) + x^i F_{ikl} \\ \Gamma_{jl} &= -n\hat{p}_{jl} + \hat{p}_{jl} + (1-n)(P+1)f_{jl} + x^i F_{jil} \end{aligned} \quad (7)$$

Cu ajutorul acestora se formează tensorul de curbură proiectivă al lui Weyl

$$K_{jkl}^i = \Gamma_{jkl}^i - \delta_l^i \frac{R_{kl}}{n-1} - \delta_k^i \left( \frac{\Gamma_{jl}}{n-1} - \frac{R_{jl}}{n^2-1} \right) + \delta_l^i \left( \frac{\Gamma_{jk}}{n-1} - \frac{R_{jk}}{n^2-1} \right) \quad (8)$$

Anularea acestui tensor caracterizează spațiile proiectiv euclidiene. În cazul nostru avem

$$K_{jkl}^i = x^i F_{jkl} - \delta_k^i \left( \frac{F_{jkl}}{n-1} - \frac{F_{sjl}}{n^2-1} \right) x^s + \delta_l^i \left( \frac{F_{jks}}{n-1} - \frac{F_{sjk}}{n^2-1} \right) x^s \quad (9)$$

Dacă pentru orice indici  $i, j, k$  sînt valabile relațiile

$$F_{ijk} = 0 \quad (10)$$

atunci rezultă

$$K_{jkl}^i = 0 \quad (11)$$

iar spațiul este proiectiv euclidian. Reciproc, din relațiile (11) rezultă (10) prin urmare condițiile (10) sînt necesare și suficiente pentru ca spațiul să fie proiectiv euclidian [4].



Să arătăm pe o cale directă că dacă spațiul (3) este proiectiv euclidian, atunci vectorul  $f_k$  este un gradient.

Într-adevăr, din relația

$$\frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial f_{jl}}{\partial x^k} + f_k f_{jl} - f_l f_{jk} = 0$$

înmulțind cu  $x^j$  și însumînd obținem

$$\left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial f_{jl}}{\partial x^k} \right) x^j = 0$$

și mai departe

$$\frac{\partial f_k}{\partial x^l} - \delta_l^j f_{jk} - \frac{\partial f_l}{\partial x^k} + \delta_k^j f_{jl} = 0$$

Din cauza simetriei lui  $f_{jk}$  obținem în sfîrșit relația

$$\text{rot } f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x^l} - \frac{\partial f_l}{\partial x^k} = 0$$

de unde rezultă

$$f_k = \text{grad } f$$

Reciproca propoziției de mai sus nu este valabilă, în sensul că dacă vectorul  $f_k$  al unui spațiu subproiectiv (3) derivă dintr-un potențial, spațiul nu este în mod necesar proiectiv euclidian.

2. În ceea ce urmează ne propunem studiul spațiilor subproiective care sînt în același timp spații echiafine.

Un spațiu  $A_n$  cu conexiune afină se numește echiafin dacă posedă un  $n$ -vector covariant  $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$  în raport cu care volumul asociat vectorilor contravarianți arbitrari  $v^1, v^2, \dots, v^n$

$$\Gamma = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v^1 \dots v^n$$

este invariant prin transportul paralel. Caracteristica tensorială a acestor spații, constă în proprietatea de simetrie a tensorului  $\Gamma_{jk}$  adică

$$\Gamma_{jk} - \Gamma_{kj} = 0$$

Ținînd seama de formulele (7) în relațiile de mai sus, obținem după unele calcule

$$\text{rot } [f_k - (n+1)p_k] = 0 \quad (12)$$

Această relație mai exprimă și faptul că conexiunea contractată

$$\Gamma_{ks}^s = f_k - (n+1)p_k$$

este un gradient. Deci

O condiție necesară și suficientă ca spațiul subproiectiv să fie echiafin este dată de relația (12)

Dacă vectorul  $\hat{p}_k$  este un gradient  $\hat{p}_k = \text{grad } p$ , condiția (12) se reduce la  $\text{rot } f_k = 0$  deci  $f_k = \text{grad } f$ . În acest caz se poate determina densitatea spațiului echiafin, (componenta esențială  $E = e_{12\dots n}$  a  $n$ -vectorului de bază) prin formula

$$\Gamma_{ks}^s = \frac{\partial}{\partial x^k} (\ln E) \quad (13)$$

Se obține

$$E = ce^{f-(n+1)p} \quad (14)$$

În particular dacă spațiul subproiectiv este raportat la coordonate canonice, avem  $\hat{p}_k = 0$ , deci  $p = \text{const.}$ , iar densitatea spațiului este de forma

$$E = ce^f$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară.

Un spațiu subproiectiv mai poate fi definit prin coeficienții  $\Gamma_{jk}^1$  și prin vectorul  $\varphi_k$  astfel ca să avem

$$\Gamma_{jk}^{\alpha} = -\delta_j^{\alpha} \varphi_k - \delta_k^{\alpha} \varphi_j, \quad \alpha = 2, \dots, n \quad \} \quad (15)$$

Variabilele corespunzătoare  $x'^i$  ale spațiului subproiectiv se numesc coordonate afine.

În cazul în care conexiunea subproiectivă definită de (15) este echiafină, prin contracția ei se obține un vector gradient și reciproc. Deci:

O condiție necesară și suficientă pentru ca spațiul (15) să fie echiafin este dată de relația

$$\text{rot} [\Gamma_{ii}^1 - (n - \delta_i^1) \varphi_i] = 0 \quad (16)$$

În particular, dacă  $\varphi_i$  și  $\Gamma_{ii}^1$  reprezintă fiecare câte un vector gradient, din condiția de mai sus rezultă  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'^{\alpha}} = 0$ , adică componenta  $\varphi_1$  depinde numai de variabila  $x'^1$ . Atunci densitatea spațiului se calculează simplu din formula (13).

Ca un exemplu să considerăm spațiul care în sistemul de coordonate ( $x'^i$ ) are toate componentele conexiunii nule afară de

$$\Gamma_{22}^1 = x'^3 \quad (17)$$

Acest spațiu considerat de acad. G. Vranceanu este subproiectiv și admite un grup maxim de mișcări cu  $n^2 - 2n + 5$  parametri. Evident el este un spațiu echiafin, deoarece fiind raportat la coordonate afine avem  $\Gamma_{ii}^1 = 0$ ,  $\varphi_i = 0$  iar relațiile (16) sînt identic verificate. Acest lucru mai

rezultă din faptul că singura componentă nenulă a tensorului de curbură fiind  $\Gamma'_{223} = 1$ , avem  $\Gamma'_{jk} = 0$ . După cum se vede, densitatea spațiului (17) calculată în coordonatele afine  $x'^i$  este constantă.

Să calculăm coeficienții de conexiune ai spațiului (17) într-un sistem de coordonate proiective  $x^i$ . Legătura dintre coordonatele afine și cele proiective este dată de relațiile

$$x'^1 = x^1 \quad x'^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^1} \quad \alpha = 2, \dots, n \quad (18)$$

iar expresiile coeficienților se obțin din formulele

$$\Gamma'_{jk}{}^i = \left( \Gamma'_{ks}{}^i \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \right) \frac{\partial x'^i}{\partial x'^i}$$

Astfel aflăm

$$\begin{aligned} \Gamma'_{jk}{}^1 &= \delta_j^1 \left( \frac{\delta_k^1}{x^1} \right) + \delta_k^1 \left( \frac{\delta_j^1}{x^1} \right) + \left[ \frac{h_{jk} x^3}{(x^1)^6} - \frac{2\delta_j^1 \delta_k^1}{(x^1)^2} \right] x^1 \\ \Gamma'_{jk}{}^\alpha &= \delta_j^\alpha \left( \frac{\delta_k^1}{x^1} \right) + \delta_k^\alpha \left( \frac{\delta_j^1}{x^1} \right) + \left[ \frac{h_{jk} x^3}{(x^1)^6} - \frac{2\delta_j^1 \delta_k^1}{(x^1)^2} \right] x^\alpha \end{aligned} \quad (19)$$

care sînt expresii de forma (3) cu

$$p_k = -\frac{\delta_k^1}{x^1} \quad f_{jk} = \frac{h_{jk} x^3}{(x^1)^6} - \frac{2\delta_j^1 \delta_k^1}{(x^1)^2}$$

în care am notat

$$h_{jk} = \delta_j^1 \delta_k^1 (x^2)^2 - (\delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_k^1 \delta_j^2) x^1 x^2 + \delta_j^2 \delta_k^2 (x^1)^2$$

Se observă că vectorul  $p_k$  este un gradient ( $p = -\ln x_1$ ) și deoarece avem relația

$$h_{jk} x^k = 0$$

rezultă că și vectorul  $f_k$  este un gradient, anume

$$f_k = f_{kj} x^j = -\frac{2\delta_k^1}{x^1}$$

deci  $f = -2\ln x^1$ .

După cum rezultă din formula (14) densitatea spațiului echiafin (17) în coordonate proiective este

$$E = c (x^1)^{n-1} \quad (20)$$

c fiind o constantă arbitrară.

Această formulă o putem obține pe o altă cale considerînd legea după care se schimbă conexiunea contractată  $\Gamma_k = \Gamma_{ks}^s$  față de o transformare de variabile, anume

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^k} = \Gamma_s' \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma_k$$

unde  $\Delta = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right|$  este determinantul funcțional al transformării considerate.

Pentru spațiul (17) avem  $\Gamma_s' = 0$  deci  $\Gamma_k = -\frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^k}$  iar determinantul transformării (18) este  $\Delta = (x^1)^{1-n}$ . Astfel rezultă  $E = c\Delta^{-1}$  adică obținem formula (20).

#### BIBLIOGRAFIE

1. V. F. Kagan, *Über eine Erweiterung des Begriffes von projektiven Räumen und dem zugehörigen Absolut*. „Trudi seminara po vekt. i tenz. analizu”. Moskva, 1, 1933, p. 12—101.
2. P. Rachevski, *Caractères tensoriels de l'espace sousprojectif*, Ibidem, p. 126—142.
3. H. Schapiro, *Über die Metrik des subprojektiven Raumes*. Ibidem, p. 102—129.
4. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*. Springer, Berlin, 1954.
5. G. Vrăncianu, *Leçons de géométrie différentielle*, II. Éd. de l'Acad. de la R.P.R. Bucarest, 1957.
6. A. P. Norden, *Prostranstva affinnoi sviaznosti*, Moskva, 1950.

#### ЭКВИАФФИННЫЕ ПОДПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(Резюме)

В работе рассматриваются  $n-2$  раза подпроективные пространства, отнесенные к проективным координатам, имеющим соединение, определенное формулами Кагана [3]. Используя тензор проективной кривизны доказывается, что, если пространство является проективным эвклидовым, то вектор  $f_k = f_{ks} x^s$  является градиентом. Потом показывается, что, для того, чтобы пространство, определенное соединением [3], было эквиаффинным, необходимо и достаточно соотношение (12). Определяется плотность, сочетаемая с эквиаффинным соединением [3], в случае когда  $p_k$  является градиентом. В качестве примера приводится случай пространства [17], переписав его коэффициенты соединения в проективных координатах.

#### ESPACES SOUS-PROJECTIFS ÉQUIAFFINES

(Résumé)

L'auteur considère les espaces  $n-2$  fois sous-projectifs rapportés à des coordonnées projectives et ayant la connexion définie par les formules de Kagan [3]. En employant le tenseur de courbure projective, on démontre que l'espace est projectivement euclidien, le vecteur  $f_k = f_{ks} x^s$  est un gradient. On montre ensuite que, pour qu'un espace défini par la connexion (3) soit équiaffine, la relation (12) est nécessaire et suffisante. On détermine la densité associée à la connexion équiaffine (3) dans le cas où  $p_k$  est un gradient. A titre d'exemple on traite le cas de l'espace (17) en transcrivant ses coefficients de connexion en coordonnées projectives.

# DESPRE RAPIDITATEA DE CONVERGENȚĂ A PRODUSELOR INFINITE ȘI ÎMBUNĂTĂȚIREA EI

de  
ANDREI NEY

§ 1.

Considerăm produsul infinit de factori reali, convergent

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \quad (1)$$

și notăm produsul parțial de rangul  $n$  prin

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \quad (2)$$

iar factorul complementar de rangul  $n$  (analogul restului la serii) prin

$$Q_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + u_k), \quad (3)$$

astfel încît să avem

$$P = P_n Q_n. \quad (4)$$

$Q_n$  are următoarele proprietăți:\*

$$\begin{cases} 1^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1 \\ 2^\circ. \frac{Q_n}{Q_{n+1}} = 1 + u_{n+1} \end{cases} \quad (5)$$

(proprietatea  $1^\circ$  rezultă din condiția necesară și suficientă a convergenței, iar proprietatea  $2^\circ$  rezultă din definiția lui  $Q_n$ ):

TEOREMA 1. Funcția  $q_n$  definită pe valorile întregi și pozitive ale lui  $n$  este factorul complementar de rangul  $n$  al produsului infinit, convergent (1), dacă și numai dacă îndeplinește relațiile :

$$\begin{cases} 1'. \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1 \\ 2'. \frac{q_n}{q_{n+1}} = 1 + u_{n+1} \end{cases} \quad (5')$$

\*Se urmează metoda care stă la baza lucrărilor [2] și [3].

Demonstrație. Aplicând egalității 2' operația  $\prod_n^{n+N-1}$ , obținem

$$\frac{q_n}{q_{n+N}} = (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \dots (1 + u_{n+N}). \quad (6)$$

Deoarece  $\lim_{N \rightarrow \infty} q_{n+N} = 1$ , din (6) rezultă

$$q_n = (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \dots$$

adică  $q_n$  este factorul complementar de rangul  $n$ . Pe de altă parte, din convergența produsului infinit rezultă că factorul complementar  $q_n$  îndeplinește condițiile (5'), — identice cu (5).

DEFINIȚIA 1. O funcție  $q_n$ , definită pe valorile întregi și pozitive ale lui  $n$  este o expresie asimptotică a factorului complementar  $Q_n$  al produsului infinit (1), dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{Q_n} = 1, \text{ ceea ce se mai scrie } q_n \cong Q_n.$$

TEOREMA 2. Fie produsul infinit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ , cu proprietatea  $u_n u_{n+1} > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Dacă există o funcție  $q_n$  definită pe mulțimea numerelor întregi și pozitive astfel, încît relațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a. } q_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \text{b. } \frac{q_n - 1}{q_{n+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{array} \right. \quad (7)$$

să fie îndeplinite, atunci produsul infinit considerat este convergent și  $q_n$  este o expresie asimptotică a factorului complementar de rangul  $n$ .

Demonstrație. Din *a* și *b* rezultă imediat că  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0$ . Relația *b* se mai pune sub forma

$$1 - \varepsilon < \frac{q_n - 1}{q_{n+1}} < 1 + \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon)$$

unde  $\varepsilon$  este un număr pozitiv arbitrar, iar  $N_\varepsilon$  un număr suficient de mare atașat lui  $\varepsilon$ .

Considerînd cazul cînd  $u_n > 0$ , putem scrie

$$(1 - \varepsilon)u_{n+1} < \frac{q_n}{q_{n+1}} - 1 < (1 + \varepsilon)u_{n+1} \quad (n > N_\varepsilon),$$

de unde

$$1 + (1 - \varepsilon)u_{n+1} < \frac{q_n}{q_{n+1}} < 1 + (1 + \varepsilon)u_{n+1}. \quad (8)$$

Luăm  $0 < \varepsilon < 1$ , și aplicăm primei inegalități din (8) operația  $\prod_n^{n+N-1}$

$$\prod_{k=n}^{n+N-1} [1 + (1 - \varepsilon)u_{k-1}] < \prod_{k=n}^{n+N-1} \frac{q_k}{q_{k+1}} = \frac{q_n}{q_{n+N}}.$$

Produsul din membrul stîng al inegalității precedente avînd toți factorii mai mari decît unitatea, crește odată cu  $N$ , dar rămîne inferior unei margini finite, deoarece  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_n}{q_{n+N}} = q_n$ ; prin urmare produsul infinit  $\prod_{k=n}^{\infty} [1 + (1 - \varepsilon)u_{k+1}]$

este convergent. Astfel și seria  $\sum_{k=n}^{\infty} u_{k+1}$  converge, deci și produsul infinit  $\prod_{k=n}^{\infty} (1 + u_{k+1})$  este convergent și este chiar factorul complementar  $Q_n$  — cu proprietățile (5) — al produsului infinit  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$ . Din (7) și (5) rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{Q_n} = 1$ , adică  $q_n \cong Q_n$ .

Dacă se consideră cazul  $u_n < 0$ , în loc de (8) vom obține

$$1 + (1 - \varepsilon)u_{n+1} > \frac{q_n}{q_{n+1}} > 1 + (1 + \varepsilon)u_{n+1}, \quad (9)$$

iar în condițiile inegalităților  $0 < \varepsilon < 1$  se trag concluzii pe o cale cu totul analogă celei urmate mai sus. Astfel teorema este demonstrată.

**Aplicația 1.** În baza teoremei 1, se construiesc produse infinite cu valoare dată în formă finită. Aceste produse vor servi în § 3 drept „produse aproximante” în procedeele de accelerare a convergenței.

Punem

$$q_n = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p) + k}$$

unde  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ;  $p$  este un număr întreg nenegativ, iar  $k$  un parametru real. Formăm  $u_{n+1} = \frac{q_n}{q_{n+1}} - 1$ , după cum urmează:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)(n+2)(n+3) \cdots (n+p-1) + k}{[(n+1)(n+2) \cdots (n+p) + k](n+2)(n+3) \cdots (n+p-1)} - 1,$$

de unde

$$u_n = \frac{-pk}{[n(n+1) \cdots (n+p-1) + k](n+p)} \quad (n = n_0, n_0 + 1, \dots). \quad (10)$$

Valoarea produsului infinit se calculează conform formulei

$$P = P_{n_0} q_{n_0} = (1 + u_{n_0}) q_{n_0}.$$

Efectuînd calculele, se obține

$$P = \frac{n_0(n_0+1) \cdots (n_0+p-1)}{n_0(n_0+1) \cdots (n_0+p-1) + k} \quad (11)$$

În particular, dacă formula lui  $u_n$  este valabilă începînd cu  $n_0 = 1$ , se obține  $P = \frac{p!}{p! + k}$ .

## § 2.

DEFINIȚIA 2. Rapiditatea de convergență a produsului infinit (1) se va caracteriza prin ordinul infinitezimal al diferenței  $Q_n - 1$  cînd  $n \rightarrow \infty$ .

DEFINIȚIA 3. Produsele infinite, convergente,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  și  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u'_n)$  converg la fel de repede (sau de încet), dacă pentru factorii lor complementari de rangul  $n$ ,  $Q_n$  respectiv  $Q'_n$ , au loc începînd cu un indice suficient de mare inegalitățile

$$a < \left| \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} \right| < b,$$

$a$  și  $b$  fiind numere pozitive.

DEFINIȚIA 4. Produsul infinit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  converge mai repede decît  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u'_n)$ , dacă pentru factorii lor complementari de rangul  $n$ ,  $Q_n$  respectiv  $Q'_n$  are loc relația  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} = 0$ .

OBSERVAȚIA 1. Se pot introduce și noțiuni care indică stări intermediare privind rapiditatea de convergență relativă la două produse infinite, în analogie cu noțiunile corespunzătoare pentru serii [5], dar pentru scopul urmărit în prezenta lucrare sînt suficiente definițiile 3 și 4.

TEOREMA 3. Considerînd două produse infinite, convergente,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  și  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u'_n)$ , pentru care termenii  $u_n$  și  $u'_n$  sînt fie toți deodată pozitivi, fie toți deodată negativi (cel puțin începînd cu un indice  $n$  suficient de mare), atunci condiția  $a < \frac{u_n}{u'_n} < b$ ,  $a$  și  $b$  fiind numere pozitive, este suficientă pentru ca produsele infinite să convergă la fel de repede.

DEMONSTRAȚIE. Utilizînd notațiile din definiția 3, considerăm cele două cazuri posibile :

A)  $u_n > 0$  și totodată  $u'_n > 0$ . Factorii  $1 + u_k$  și  $1 + u'_k$  fiind pozitivi, se va putea scrie

$$\left| \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} \right| = \left| \frac{e^{\ln \prod_{k=1}^n (1 + u_k)} - e^0}{e^{\ln \prod_{k=1}^n (1 + u'_k)} - e^0} \right|$$



Aplicîndu-se teorema creșterilor finite (cu  $0 < \theta_n < 1$ ,  $0 < \theta'_n < 1$ ) se obține

$$\left| \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} \right| = \left| \frac{\ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u_k)}{\ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u'_k)} \right| \cdot \frac{e^{\theta_n \ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u_k)}}{e^{\theta'_n \ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u'_k)}}.$$

adică

$$\left| \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} \right| = \left| \frac{\sum_{n+1}^{\infty} \ln(1 + u_k)}{\sum_{n+1}^{\infty} \ln(1 + u'_k)} \right| \cdot e^{\theta_n \ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u_k) - \theta'_n \ln \prod_{n+1}^{\infty} (1 + u'_k)} \quad (12)$$

Din cauza convergenței produselor infinite, expresia exponențială din (12) are infimumul și supremumul pozitiv. Termenii seriilor de logaritmi din (12) fiind asimptotic egale cu termenii seriilor  $\sum_{n+1}^{\infty} u_k$  respectiv  $\sum_{n+1}^{\infty} u'_k$ , din inegalitățile  $a < \frac{u_n}{u'_n} < b$  urmează inegalitățile

$$0 < a' < \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u'_k)} \right| < b'$$

și în consecință rezultă și enunțul corespunzător din teoremă.

B)  $u_n < 0$  și totodată  $u'_n < 0$ . De la un indice suficient de mare factorii  $1 + u_n$  și  $1 + u'_n$  sînt pozitivi și raționamentul de mai sus se aplică corespunzător. Astfel teorema este demonstrată.

**TEOREMA 4.** Considerînd două produse infinite convergente  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$  și  $\prod_1^{\infty} (1 + u'_n)$  pentru care termenii  $u_n$  și  $u'_n$  sînt fie toți deodată pozitivi, fie toți deodată negativi cel puțin de la un indice  $n$  suficient de mare, atunci condiția  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u'_n} = 0$  este suficientă pentru ca primul produs infinit să convergă mai repede decît cel de-al doilea.

**Demonstratie.** Procedînd ca și la demonstrația teoremei 3, în cazul de față va rezulta evident

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n+1}^{\infty} \ln(1 + u_k)}{\sum_{n+1}^{\infty} \ln(1 + u'_k)} = 0.$$

iar expresia exponențială fiind și de astă dată mărginită, urmează nemijlocit afirmația din teoremă.

DEFINIȚIA 5. Produsului infinit, convergent,  $P = \prod_1^{\infty} (1 + u_n)$ , unde  $u_n > 0$ , i se atașează produsul infinit  $\bar{P} = \prod_1^{\infty} (1 - u_n)$ , — evident convergent. Cele două produse infinite se zic prin definiție produse infinite conjugate.

OBSERVAȚIA 2. Produsele infinite conjugate  $P$  și  $\bar{P}$  fiind convergente, sînt și absolut convergente și în consecință este valabilă egalitatea  $P \cdot \bar{P} = \prod_1^{\infty} (1 - u_n^2)$ .

TEOREMA 5. Două produse infinite convergente și conjugate converg la fel de repede.

DEMONSTRAȚIE. Introducînd în (12) notația  $u'_k = -u_k$  și utilizînd relațiile

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + u_k)}{u_k} = 1 \quad \text{și} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - u_k)}{-u_k} = 1,$$

obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + u_k)}{\ln(1 - u_k)} = 1$ , de unde  $0 < a < \left| \frac{Q_n - 1}{Q'_n - 1} \right| < b$ , ceea ce trebuia demonstrat.

CONSECINȚA 1. Considerînd două produse infinite convergente  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$  și  $\prod_1^{\infty} (1 + u'_n)$  pentru care au loc inegalitățile  $u_n > 0$  și  $u'_n < 0$ , condiția  $\beta < \frac{u'_n}{u_n} < \alpha < 0$  ( $\alpha$  și  $\beta$  fiind constante negative) este suficientă pentru ca ele să convergă la fel de repede.

Într-adevăr, produsul infinit cu termenul  $u'_n$  converge la fel de repede ca și conjugatul său cu termenul  $-u'_n$ , iar inegalitățile  $\beta < \frac{u'_n}{u_n} < \alpha < 0$  se mai scriu  $0 < -\alpha < \frac{u'_n}{u_n} < -\beta$  unde  $-u'_n$  este evident pozitiv și astfel ne aflăm în condițiile teoremei 3.

### § 3.

Procedeul de a trece de la un produs infinit la o serie de logaritmi în scopul îmbunătățirii convergenței acesteia din urmă și apoi retransformarea rezultatului la formă de produs infinit prezintă inconveniente care pot fi ușor eliminate dacă se introduce o metodă de accelerare a convergenței unui produs infinit adecvat notației de produs.

Fie un produs infinit convergent  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$ ,  $u_n$  conservîndu-și semnul începînd cu un indice  $n$  suficient de mare. Acestui produs i se atașează produsul  $P' = \prod_1^{\infty} (1 + u'_n)$  cu valoarea cunoscută și satisfăcînd relația  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n}{u_n} = 1$ . Notăm

$$P_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n) \quad \text{și} \quad P'_N = \prod_{n=1}^N (1 + u'_n),$$

de unde

$$P_N = P'_N \cdot \prod_{n=1}^N \frac{1 + u_n}{1 + u'_n}. \quad (13)$$

Egalitatea (13) se mai scrie

$$P_N = P'_N \cdot \prod_{n=1}^N \left( 1 + \frac{u_n - u'_n}{1 + u'_n} \right). \quad (14)$$

Punînd  $v_n = \frac{u_n - u'_n}{1 + u'_n}$ , considerăm cazul  $u_n > 0$ . Produsul infinit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |v_n|)$  converge mai repede decît produsul infinit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ , deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - \frac{u'_n}{u_n}}{1 + \frac{u'_n}{u_n}} \right| = 0.$$

În baza inegalității  $|1 + v_n| \leq 1 + |v_n|$  rezultă că și  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + v_n)$  converge mai repede decît  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ . La fel se tratează și cazul  $u'_n < 0$ .

Din (14) se obține prin trecere la limită

$$P = P' \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{u_n - u'_n}{1 + u'_n} \right). \quad (15)$$

Egalitatea (15) reprezintă o transformare analogă transformării lui K u m e r, cunoscută din teoria seriilor [1].

**O b s e r v a Ț i a 3.** Dacă termenul  $u_n$  al produsului infinit  $P$  este o fracție rațională de  $n$ , atunci se poate considera drept produs aproximant  $P'$  cu valoarea cunoscută produsul infinit cu termenul general  $u'_n$  construit în conformitate cu formula (10) și pentru care se potrivesc constantele  $p$  și  $k$  astfel, încît să aibă loc relația la limită  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n}{u_n} = 1$ .

Aplicația 2. Pornind de la formula lui Wallis pentru calculul lui  $\pi$ ,

$$\pi = \frac{2}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)},$$

putem îmbunătăți convergența produsului infinit din numitorul fracției precedente considerând în (10) respectiv în (11) valorile  $p = 1$ ,  $k = \frac{1}{4}$  și  $n_0 = 1$ . Astfel se obține  $u'_n = \frac{1}{(4n-1)(n+1)}$  și  $P' = \frac{4}{5}$  ceea ce introdus în (15) ne dă

$$\pi = \frac{5}{2 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{5n+1}{4n^3(4n+5)}\right]}$$

Observația 4. Îmbunătățirea convergenței în baza transformării (15) se poate continua prin iterarea metodei. Dacă însă procedăm la determinarea termenului  $u'_n$ , al produsului aproximant  $P'$ , în conformitate cu metoda indicată în lucrarea [4], atunci un număr finit de iterări se poate înlocui printr-o singură transformare acceleratoare, care va duce la aceeași îmbunătățire a convergenței.

Observația 5. Proprietatea produselor infinite conjugate, amintită în cadrul observației 2 poate servi la îmbunătățirea convergenței uneia dintre ele, dacă valoarea celeilalte este cunoscută. Astfel

$$\bar{P} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} [1 - u_n^2]}{P}$$

ceea ce înlocuiește două aplicări succesive ale transformării (15). Vom denumi metoda aceasta — îmbunătățirea convergenței prin conjugare.

Astfel, știind că  $\prod_2^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ , se obține

$$\prod_2^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \prod_2^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^4}\right).$$

#### § 1.

Dacă privitor la produsul infinit (1) — cu  $u_n$  neschimbându-și semnul de la un indice suficient de mare — se cunoaște o expresie asimptotică pentru factorul complementar (3), putem indica o metodă de îmbunătățire

a convergenței produsului. Relația  $b$  din sistemul (7) se poate transcrie după cum urmează

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = 1 + \omega_{n+1} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n+1} = 0 \right),$$

de unde

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = (1 + u_{n+1}) \left( 1 + \frac{\omega_{n+1} u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} \right). \quad (16)$$

Aplicînd egalității (16) operația de înmulțire  $\prod_n^{n+N-1}$ , se obține

$$\frac{q_n}{q_{n+N}} = \prod_{k=n+1}^{n+N} (1 + u_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{n+N} \left( 1 + \frac{\omega_k u_k}{1 + u_k} \right).$$

Deoarece  $\lim_{N \rightarrow \infty} q_{n+N} = 1$ , rezultă prin trecere la limită

$$q_n = Q_n \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\omega_k u_k}{1 + u_k} \right).$$

Cu ajutorul relației (16) se ajunge la

$$Q_n = \frac{q_n}{\prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{q_{k-1}}{(1 + u_k) q_k}}. \quad (17)$$

Dacă formula (17) are sens începînd cu  $n = 1$ , atunci în baza egalității  $P = P_1 \cdot Q_1$ , are loc egalitatea

$$\prod_1^{\infty} (1 + u_n) = (1 + u_1) q_1 \prod_1^{\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} (1 + u_{n+1}), \quad (18)$$

care reprezintă o transformare analogă formei date în [6] pentru transformarea lui K u m m e r referitoare la serii. (A se vedea și [2]).

#### BIBLIOGRAFIE

1. Knopp K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. J. Springer, Berlin, 1931.
2. Ney A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi*. „Studii și cercetări de matematică”, Cluj, XII, nr. 2, 1961.
3. Ney A., *Contribuție la studiul rapidității de convergență a seriilor cu termeni pozitivi*. „Studii și cercetări de matematică”, Cluj, XIII, nr. 1, 1962.
4. Ney A., *Un procedeu de îmbunătățire a convergenței seriilor și a convergenței integralelor improprii*. „Studii și cercetări de matematică”, Cluj, XIII, nr. 2, 1962.
5. Nicolescu M., *Analiză matematică*, vol. I E<sup>2</sup>. Tehnică. București, 1957.
6. Romanovski V. I., *Vvedenie v analiz*. „Izbraunnie trudî” I. Izdatelstvo Akad. Nauk Uzbekskoi SSR, Taškent, 1959.

## О БЫСТРОТЕ СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ОБ ЕЁ УЛУЧШЕНИИ

(Резюме)

Определяя понятие о быстроте сходимости бесконечных произведений и делая об этом соображения теоретического порядка, автор выводит для сходящегося бесконечного произведения,  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$ , ( $u_n u_{n+1} > 0$ ), преобразование с помощью которого можно улучшить сходимость бесконечного произведения. Это преобразование, аналогичное преобразованию Куммера для рядов, представляется равенством

$$\prod_1^{\infty} (1 + u_n) = P' \prod_1^{\infty} \left( 1 + \frac{u_n - u'_n}{1 + u_n} \right),$$

где  $P'$  есть известное значение „аппроксимирующего“ бесконечного произведения, член  $u'_n$  которого удовлетворяет граничному условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n}{u_n} = 1$ . Автор указывает на метод построения аппроксимирующих бесконечных произведений. Работа содержит и различные формы преобразований, приводящих к увеличению быстроты сходимости, а также числовые применения.

## SUR LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES PRODUITS INFINIS ET SON AMÉLIORATION

(Résumé)

Définissant la notion de rapidité de convergence d'un produit infini et faisant des considérations théoriques à ce sujet, l'auteur déduit pour un produit infini convergent  $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$ , ( $u_n u_{n+1} > 0$ ) une transformation à l'aide de laquelle on peut améliorer sa convergence. Cette transformation — analogue à celle de Kummer pour les séries — se présente sous la forme de l'égalité

$$\prod_1^{\infty} (1 + u_n) = P' \prod_1^{\infty} \left( 1 + \frac{u_n - u'_n}{1 + u_n} \right),$$

où  $P'$  est la valeur connue du produit infini „аппроксимирующий“, dont le terme  $u'_n$  satisfait la condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n}{u_n} = 1$ .

L'auteur indique aussi une méthode pour construire des produits infinis approximatifs. Le présent travail contient différentes transformations qui servent à l'amélioration de la convergence, ainsi que des applications numériques.

## ASUPRA VARIAȚIEI PERIOADEI BINAREI FOTOMETRICE SZ HERCULIS

de  
GHEORGHE CHIȘ

Binara fotometrică SZ Herculis a fost semnalată de S. P i o t r o v s k i [8], D u g a n—W r i g h t [4] și T e s e v i c i [9], ca avînd o variație neregulată a perioadei. F. B. W o o d [13] atribuie variația perioadei pierderii de masă din partea uneia dintre componente. Lista de stele variabile a lui L. N. P i e r c e [7] indică necesitatea urmării momentelor minimelor la această binară.

La Observatorul astronomic din Cluj, această variabilă este urmărită din vara anului 1948. Între anii 1948—1951 a fost urmărită vizual cu ajutorul unei lunete ecuatoriale ( $D = 20$  cm.,  $F = 300$  cm), evaluările de strălucire fiind făcute direct prin metoda lui Argelander și Nijland-Blajko, obținîndu-se din 416 evaluări 24 momente ale minimelor principale, 22 din acestea fiind publicate în anul 1952 [3].

În 1954 a fost reluată urmărirea acestei stele pe cale fotografică cu un telescop Newton ( $D = 50$  cm,  $F = 250$  cm.), ea fiind urmărită și în prezent. În cursul anilor 1954—1962, s-au obținut pe plăci Agfa-Astro, circa 560 poze de către membrii colectivului Observatorului, poze ale căror magnitudini au fost determinate cu evaluări pe plăci prin metoda lui Argelander și Nijland-Blajko. Din acestea au rezultat momentele a 53 minime principale, cuprinse în tabloul minimelor (tabelul nr. 1). El indică: momentul minimului principal exprimat în zile juliene și fracțiuni de zi, limitele erorii de determinarea momentelor minimelor, numărul de observații și ponderea.

Din totalitatea minimelor accesibile, aranjate în ordinea producerii lor a fost întocmit tabloul minimelor individuale (tabelul nr. 2). Cuprinde 234 minime, dintre care 157 sînt date în tabloul similar al lui T e s e v i c i [10], la care au fost adăugate 14 minime din tabloul minimelor normale al lui Broglia—Masani—Pestarinno [1], 10 minime ale lui L a u s e [6] și 55 minime proprii. Diferențele  $O-C_1$  (observație-calcul) sînt date față de elementele

Min. hel. = J.D.D.2423523,4335 + 0,81809444  $E$   
calculate de T e s e v i c i [9].

Din minimele individuale grupate pe intervale de observație, s-au dedus minimele normale în număr de 74, cuprinse în tabloul pozițiilor medii (tabelul nr. 3). Ultimele coloane cuprind diferențele  $O-C$  calculate pe baza diferitelor elemente date de Țesevici și anume:

Reprezentînd numărul  $E$  de perioade în abscisă și diferențele  $O-C$  în ordonată, obținem curba de variație a perioadei pe un interval de 60 de ani, cu întreruperi între anii 1902—1906, 1912—1914, 1918—1921 și 1940—1943 unde nu sînt observații. Forma curbei — indicată în fig. 1 — bazată pe diferențele  $O-C_1$  calculate cu elementele de mai sus ale lui Țesevici, arată că în prima parte ( $-10\ 000 < E < +4\ 000$ ), perioada de mai sus este prea scurtă, iar în partea doua ( $+4\ 000 < E < +17\ 000$ ) perioada este prea lungă.

În consecință, Țesevici [10] determină două formule liniare și anume:

— pentru  $-10\ 000 < E < +4\ 000$

$$\text{Min. hel} = \text{J.D.}2423523,4295 + 0,81809679 \cdot E$$

— pentru  $+4\ 000 < E < +17\ 000$ .

$$\text{Min. hel} = \text{J.D.}2423523,4417 + 0,81809330 \cdot E$$

Cu aceste elemente au fost calculate diferențele  $O-C_2$ , respectiv  $O-C_3$  din tabelul nr. 3.

Reprezentînd grafic și aceste diferențe, cu  $E$  în abscisă, se constată:

- pentru  $-10\ 000 < E < +4\ 000$  perioada de  $0,81809679$  e corectă,
- pentru  $+4\ 000 < E < +13\ 000$  perioada de  $0,81809330$  corespunde,
- pentru  $+13\ 000 < E < +17\ 000$  perioada precedentă este prea scurtă, diferențele  $O-C_3$  fiind numai pozitive și ușor crescătoare.

Din acest motiv, pe baza ultimelor 46 minime normale din tabelul nr. 3, prin metoda celor mai mici pătrate, s-au dedus noile elemente liniare

$$\text{Min. hel.} = \text{J.D.}2423523,4398 + 0,81809363 \cdot E$$

$$\qquad \qquad \qquad \pm 73 \qquad \qquad \qquad \pm 76$$

cu ajutorul cărora au fost calculate diferențele  $O-C_4$  din tabelul nr. 3. Noile elemente, în limita erorilor de observație, verifică minimele normale din intervalul  $4\ 000 < E < +17\ 000$ . Ultimele două minime normale indică o creștere a perioadei, fapt de verificat prin observații ulterioare.

Neavînd caracterul unei sinusoide, curba variației perioadei se pare că exclude ipoteza deplasării liniei apszilor, ipoteza prezenței unui al treilea corp, sau a regresiei nodurilor.

Ipoteza pierderii de masă pare mai verosimilă pentru a explica variația neregulată a perioadei. Astfel Wood [13] arată, pe baza elementelor calculate de Dugan [4], că variabila SZ Herculis, și anume componenta ei mai slabă este instabilă, deci pierderea de masă este justificată. Eliminarea de materie se face cu preferință prin extremitățile axei mici ( $b$ ) a componentei nestabile, ca fiind punctele cele mai apropiate de suprafața lui Jacobi. Dacă  $b_f \ll b_{f_{\text{lim}}}$ , eliminarea de masă este asigurată.



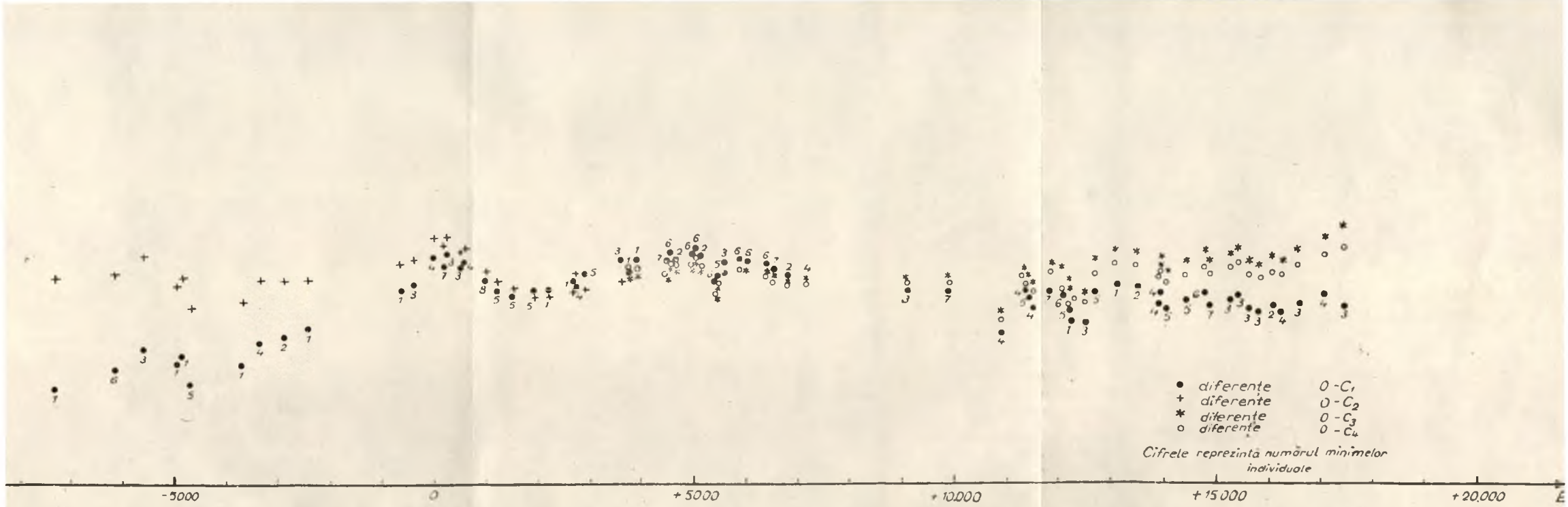


Fig. 1. Variația perioadei binare fotometrice SZ Herculis.



În cazul de față, după Broglia—Masani—Pestarinò [2] avem pentru componenta mai slabă elementele

în albastru :  $a_f = 0,310$ ,  $z = 0,126$ ,  $i = 87^\circ,83$  de unde  $b_f = 0,290$

în galben  $a_f = 0,315$ ,  $z = 0,108$ ,  $i = 87^\circ,99$  de unde  $b_f = 0,297$

$b_{f\text{lim}}$  se deduce în funcție de raportul maselor  $m_1/m_2$  din tabloul dat de Wood [12]. Raportul maselor s-a calculat din relația masă-luminozitate dată de Parenago-Masevici pentru stelele seriei principale de tipul spectral O — G4,

$$L = 1,12 \cdot M^{3,92}$$

Cu ajutorul luminozităților componentelor date de Broglia—Masani—Pestarinò s-au obținut valorile aproximative

în albastru :  $m_1/m_2 = 1,834$  de unde  $b_{f\text{lim}} = 0,317$

în galben  $m_1/m_2 = 1,519$  de unde  $b_{f\text{lim}} = 0,332$

care arată că componenta mai slabă a variabilei SZ Herculis este aproape de limita stabilității, deci explicația de mai sus este posibilă. Dar necunoscînd caracterele spectrale ale acestei componente, relația masă-luminozitate utilizată mai sus trebuie considerată cu toată rezerva.

**Tabelul minimelor**

*Tabelul nr. 1*

Nr. crt.	Minime DJ 243....	Limitele erorii $\pm 0,0001$	Nr. observațiilor			Pondere
			ramura descend.	ramura ascend.	Total	
1	4919,4864	±12	4	4	8	2
2	4942,3910	18	6	5	11	2
3	951,3896	19	4	6	10	3
4	964,4825	22	4	4	8	2
5	991,4780	—	6	0	6	1
6	5005,3855	25	2	3	5	1
7	5010,2840	—	0	7	7	1/2
8	5019,2883	10	7	12	19	3
9	5033,2045	—	—	5	5	1/2
10	5229,5430	±12	11	6	17	2
11	5328,5292	8	2	3	5	2
12	5338,3420	—	0	5	5	1/2
13	5360,4400	—	5	0	5	1/2
14	5625,5030	±12	7	4	11	3
15	5630,4088	10	2	2	4	1
16	5652,5010	—	5	0	5	1/2
17	5657,4060	10	2	7	9	3
18	5661,4920	—	8	0	8	1/2
19	5666,4035	—	0	6	6	1
20	5684,4009	17	5	7	12	2
21	5688,4905	10	9	3	12	2
22	5702,4005	25	6	8	14	1
23	5720,3963	10	7	6	13	2
24	5743,3138	—	6	0	6	1/2
25	5770,3011	8	2	2	4	2
26	6021,4583	±10	6	7	13	2
27	6039,4568	19	7	2	9	2
28	6062,3610	13	4	4	8	2
29	6121,2610	10	4	1	5	1/2

Tab. nr. 1 (continuare)

Nr. crt.	Minime D.J. 243....	Limitele erorii $\pm \frac{\%}{1000}$	Nr. observațiilor			Pondere
			ramura descend.	ramura ascend.	Total	
30	6125,3572	—	8	0	8	1
31	6130,2657	10	4	3	7	2
32	6354,4195	—	1	2	3	$\frac{1}{2}$
33	6372,4215	$\pm 13$	8	3	11	1
34	6381,4157	10	6	7	13	3
35	6476,3150	9	6	4	10	2
36	6499,2234	5	3	2	5	$\frac{1}{2}$
37	6526,2201	10	5	2	7	$\frac{1}{2}$
38	6672,4780	8	4	4	8	$\frac{1}{2}$
39	6686,5660	—	3	1	4	1
40	6773,2762	—	0	7	7	1
41	6804,3680	—	0	10	10	$\frac{1}{2}$
42	6809,2845	—	0	9	9	2
43	6845,2780	—	0	7	7	1
44	7105,4320	—	0	7	7	1
45	7141,4305	—	0	4	4	1
46	7155,3300	—	2	5	7	1
47	7478,4876	$\pm 5$	6	6	12	2
48	7492,3930	13	7	7	14	2
49	7514,4800	13	5	8	13	3
50	7519,3890	—	1	4	5	1
51	7779,5453	15	1	8	9	1
52	7816,8210	—	—	9	9	$\frac{1}{2}$
53	7924,3420	—	1	5	6	1

Tabelul nr. 2

Tabelul minimelor individuale

Nr. crt.	Minime heliocentrice D.J. 24....	Epoca	$0 - C_1$ 0,001	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații
1	16041,116	-9146	-26	1	Dugan-Wright [10]	
2	7513,690	7346	-22	2	" "	
3	8459,414	6190	-15	3	Blajko [10]	
4	8486,412	6157	-14	3	" "	
5	8491,314	6151	-21	3	" "	
6	8495,406	6146	-19	3	" "	
7	8495,407	6146	-18	4	" "	[1]
8	8504,405	6135	-19	3	Blajko [10]	
9	8927,365	5618	-14	5	Yost [10]	min.normal (n=3)
10	9477,121	4946	-17	6	" "	[1]
11	9525,390	4887	-16	7	Lehnert [10]	
12	9663,643	4718	-21	8	Shapley [10]	min.normal (n=5)
13	20499,739	3696	-17	9	— [1]	
14	0770,533	3365	-13	10	Dugan [10]	min.normal (n=4)
15	1137,040	2917	-12	11	— [1]	min.normal (n=2)
16	1522,374	2446	-10	12	— [1]	
17	2994,941	646	-3	13	— [1]	

Tab. nr. 2 (continuare)

Nr. crt.	Minime heliocentrice D. J. 24 . . . ,	Epoca	$0 - C_1$ $0 \pm 001$	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații	
18	23193,7395	403	- 5	14	Țesevici [1]	min.normal (n=3)	
19	3518,523	6	- 2	15	" [10]		
20	3519,347	5	+ 4	15	"		
21	3523,440	0	+ 6	15	"		
22	3532,439	+ 11	+ 6	15	"		
23	3640,426	143	+ 5	16	"		
24	3653,514	159	+ 3	16	"		
25	3654,329	160	+ 0	16	"		
26	3658,420	165	+ 1	16	"		
27	3676,414	187	+ 3	16	"		
28	3681,328	193	+ 2	16	"		
29	3694,417	209	+ 2	16	"		
30	3705,0545	222	+ 4	17	- [1]		
31	3810,585	351	0	18	Țesevici [10]		min.normal (n=12)
32	3973,387	550	+ 2	18	"		
33	3978,2158	556	+ 2	19	" [1]		min.normal (n=4)
34	3982,388	561	+ 4	18	Țesevici [10]		min.normal (n=8)
35	4355,435	1017	- 1	20	Kordylewski [10]		
36	4382,432	1050	- 1	21	Țesevici [10]		
37	4467,517	1154	+ 3	21	"		
38	4525,595	1225	- 4	21	" [10]		
39	4552,593	1258	- 3	21	"		
40	4710,486	1451	- 3	22	"		
41	4724,393	1468	- 3	22	"		
42	4760,385	1512	- 7	22	"		
43	4765,294	1518	- 7	22	"		
44	4787,386	1545	- 2	22	"		
45	5084,258	1908	0	23	"		
46	5093,355	1918	+ 2	23	"		
47	5098,259	1925	- 6	23	"		
48	5102,351	1920	- 5	23	"		
49	5107,260	1936	- 4	23	"		
50	5331,419	2210	- 3	24	"		
51	5721,6526	2687	- 1	25	- [1]	min.normal (n=4)	
52	5776,468	2754	+ 2	26	- [1]	min.normal (n=5)	
53	5886,9085	2889	0	27	- [1]		
54	6462,0320	3592	+ 3	28	- [1]	min.normal (n=3)	
55	6541,388	3689	+ 4	29	Țesevici [10]	min.normal (n=5)	
56	6717,278	3904	+ 4	30	- [1]		
57	7157,413	4442	+ 4	31	Piotrowski [10]		
58	7161,502	4447	+ 2	31	"		
59	7175,409	4464	+ 2	31	Piotrowski [10]		
60	7188,500	4480	+ 3	31	"		
61	7189,320	4481	+ 5	31	"		
62	7197,497	4491	+ 1	31	"		
63	7198,314	4492	0	31	"		
64	7197,500	4491	+ 4	32	Mergentaler	min.normal (n=6)	
65	7247,403	4552	+ 4	33	Piotrowski [10]		
66	7342,302	4668	+ 4	33	"		
67	7557,462	4931	+ 5	34	"		
68	7571,367	4948	+ 2	34	Lause [6]		
69	7579,548	4958	+ 2	34	"		
70	7589,368	4970	+ 5	34	"		

Tab. nr. 2 (continuare)

Nr. crt.	Minime heliocentrice D.J. 24....,	Epoca	$0 - C_1$ 0,001	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații
71	27607,367	4992	+ 6	34	..	
72	7611,465	4997	+ 4	34	..	
73	7625,364	5014	+ 5	35	..	
74	7629,452	5019	+ 3	35	..	
75	7629,451	5019	+ 2	35	Himpel	10
76	7652,256	5047	+ 0	35	Lause	6
77	7656,453	5052	+ 6	35	..	
78	7670,367	5069	+ 3	35	Piotrowski	10
79	7697,356	5102	+ 5	36	Lause	6
80	7711,261	5119	+ 2	36	Piotrowski	10
81	7890,419	5338	+ 3	37	Lause	10
82	7903,500	5354	-11	37	..	
83	7926,417	5382	- 1	37	..	
84	7930,511	5387	+ 3	37	Piotrowski	10
85	7944,420	5404	+ 4	37	Lause	10
86	7948,509	5409	+ 3	37	..	
87	7966,507	5431	+ 3	38	..	
88	7980,413	5448	+ 1	38	..	
89	7984,503	5453	+ 1	38	..	
90	7989,409	5459	- 2	38	..	
91	7994,342	5465	+22	-	..	
92	8016,406	5492	- 2	38	..	
93	8038,463	5519	-34	39	..	
94	8066,314	5553	- 2	39	..	
95	8075,315	5564	+ 4	39	..	
96	8286,380	5822	+ 1	40	Piotrowski	10
97	8299,472	5838	+ 3	40	Lause	10
98	8313,376	5855	+ 0	40	..	
99	8331,381	5877	+ 6	40	..	
100	8366,560	5920	+ 7	40	..	
101	8367,373	5921	+ 2	40	..	
102	8390,285	5949	+ 8	41	..	
103	8398,460	5959	+ 2	41	..	
104	8399,280	5960	+ 4	41	..	
105	8430,366	5998	+ 2	41	..	
106	8457,365	6031	+ 4	41	..	
107	8466,362	6042	+ 2	41	..	
108	8664,330	6284	- 9	42	..	
109	8695,431	6322	+ 4	42	..	
110	8713,427	6344	+ 2	42	Piotrowski	10
111	8717,516	6349	+ 1	42	Lause	10
112	8718,339	6350	+ 6	42	..	
113	8754,331	6394	+ 2	42	..	
114	8790,326	6438	+ 0	43	..	
115	8803,420	6454	+ 5	43	..	
116	8808,323	6460	- 1	43	..	
117	8825,320	6493	- 1	43	Lause	10
118	8844,320	6504	0	43	..	
119	8858,230	6521	+ 3	43	..	
120	8887,225	6532	- 1	43	..	
121	9077,477	6789	0	44	Piotrowski	10
122	9086,475	6800	- 1	44	..	
123	9379,353	7158	- 1	45	..	

Tab. nr. 2 (continuare)

Nr. crt.	Minime heliocentrice D. J. 24 . . . ,	Epoca	$0 - C_2$ 07001	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații
124	30962,364	9093	-- 2	46	Tesevici [10]	
125	0967,274	9099	-- 1	46	..	
126	0976,269	9110	-- 5	46	..	
127	1596,386	9879	-- 3	47	Piotrowski [10]	
128	1605,385	9890	-- 2	47	..	
129	1627,473	9906	-- 4	47	..	
130	1654,473	9939	-- 1	47	..	
131	1681,464	9972	-- 7	47	..	
132	1704,375	10000	-- 3	47	..	
133	1713,372	0011	-- 5	47	..	
134	2478,284	0946	-- 11	48	Szczepanowska [10]	
135	2747,440	11275	-- 8	49	Chiș [10]	
136	2752,353	1281	-- 4	49	..	
137	2765,448	1297	-- 2	49	..	
138	2788,346	1325	-- 7	49	Szczepanowska [10]	
139	2806,349	1347	-- 2	50	Chiș	
140	2820,255	1364	-- 4	50	..	
141	2824,344	1369	-- 5	50	..	
142	2829,253	1375	-- 5	50	..	
143	2847,250	1397	-- 6	50	..	
144	3003,501	1588	-- 11	51	Szczepanowska [10]	
145	3030,502	1621	-- 7	51	..	
146	3039,502	1632	-- 6	51	Chiș [10]	
147	3066,504	1665	-- 1	51	Szczepanowska [10]	
148	3116,406	1726	-- 3	52	Chiș [10]	
149	3125,407	1737	-- 1	52	..	
150	3152,400	1770	-- 5	52	..	
151	3184,310	1809	-- 1	52	..	
152	3184,308	1809	-- 3	52	Szczepanowska [10]	
153	3188,397	1814	-- 4	52	Chiș [10]	
154	3211,304	1842	-- 4	52	Szczepanowska [10]	
155	3358,561	12022	-- 4	53	Chiș [10]	
156	3390,475	2061	+ 4	53	Szczepanowska [10]	
157	3394,558	2066	-- 3	53	Chiș [10]	
158	3399,461	2072	-- 9	53	Szczepanowska [10]	
159	3413,370	2089	-- 7	53	Chiș [10]	
160	3435,458	2116	-- 8	53	Szczepanowska [10]	
161	3453,457	2138	-- 7	54	Chiș [10]	
162	3476,363	2166	-- 7	54	Vasilieva [10]	
163	3489,453	2182	-- 7	54	Chiș [10]	
164	3501,723	2197	-- 8	55	Nason-Moore(pe) [10]	
165	3530,359	2232	-- 6	54	Chiș [10]	
166	3539,357	2243	-- 7	54	Szczepanowska [10]	
167	3750,423	2501	-- 9	56	..	
168	3890,319	2672	-- 7	57	Chiș [10]	
169	3894,414	2677	-- 5	57	..	
170	3903,414	2688	-- 2	57	..	
171	3904,238	2689	-- 5	57	..	
172	3931,226	2722	-- 5	57	..	
173	4248,650	13110	-- 2	58	Ashbrook [10]	
174	4488,351	3403	-- 2	59	Szczepanowska [10]	
175	4605,340	3546	-- 1	59	..	

Tab. nr. 2 (continuare)

Nr. crt.	Minime heliocentrice D.J. 24...	Epoca	$0 - C_1$ 0,001	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații
176	34901,486	3908	-- 5	60	Broglia, Masani, Pestarino (pe) [1]	
177	4905,5761	3913	-- 5	60	..	
178	4919,486	3930	-- 3	61	Chiș	
179	4923,5732	3935	-- 6	60	Broglia, Masani, Pestarino (pe) [1]	
180	4942,3910	3958	-- 5	61	Chiș	
181	4951,390	3969	-- 5	61	..	
182	4964,483	3985	-- 2	61	..	
183	4987,3854	14013	-- 6	60	Broglia, Masani, Pestarino (pe) [1]	
184	4991,478	4018	-- 3	62	Chiș	
185	5005,386	4035	-- 3	62	..	
186	5010,284	4041	-- 14	62	..	
187	5019,288	4052	-- 8	62	..	
188	5033,205	4069	+ 1	62	..	
189	5229,543	4309	-- 4	63	..	
190	5328,529	4430	-- 7	63	..	
191	5338,342	4442	-- 11	63	..	
192	5347,349	4453	-- 3	63	Teșevici [10]	
193	5360,440	4469	-- 2	63	Chiș	
194	5625,503	4793	-- 2	64	..	
195	5630,409	4799	-- 4	64	..	
196	5652,501	4826	-- 1	64	..	
197	5657,406	4832	-- 4	64	..	
198	5661,492	4837	-- 9	64	..	
199	5666,404	4843	-- 5	64	..	
200	5684,401	4865	-- 6	65	..	
201	5688,491	4870	-- 4	65	..	
202	5702,401	4887	-- 4	65	..	
203	5720,396	4909	-- 8	65	..	
204	5720,399	4909	-- 5	65	Teșevici [10]	
205	5743,313	4937	-- 3	65	Chiș	
206	5770,301	4970	-- 6	65	..	
207	6021,468	15277	-- 4	66	..	
208	6039,457	5299	-- 3	66	..	
209	6062,361	5327	-- 6	66	..	
210	6121,261	5399	-- 9	67	..	
211	6125,357	5404	-- 3	67	..	
212	6130,266	5410	-- 3	67	..	
213	6354,420	5684	-- 7	68	..	
214	6372,422	5706	-- 3	68	..	
215	6381,416	5717	-- 8	68	..	
216	6476,315	5833	-- 8	69	..	
217	6499,283	5861	-- 6	69	..	
218	6526,220	5894	-- 7	69	..	
219	6672,478	16074	-- 6	70	..	
220	6686,566	6090	-- 7	70	..	
221	6773,276	6196	-- 15	71	..	
222	6804,368	6234	-- 10	71	..	
223	6809,285	6240	-- 2	71	..	
224	6845,278	6284	-- 5	71	..	
225	7105,432	6622	-- 5	72	..	



Tab. nr. 2 (continuare)

Nr. crt.	Minime helio-centrice D. J. 24.....	Epoca	O - C <sub>1</sub> 0,001	N-rul minim normal	Observatorul și sursa	Observații
226	37141,4315	6646	- 3	72	Chiș	
227	7155,330	6663	-11	72	..	
228	7478,4867	17058	- 2	73	..	
229	7492,3930	7075	- 3	74	..	
230	7514,4800	7102	- 5	73	..	
231	7519,3890	7108	- 4	73	..	
232	7779,5453	17426	- 2	74	..	
233	7820,4410	7476	-11	74	..	
234	7924,3420	7603	- 8	74	..	

Tabelul nr. 3

Tabelul pozițiilor medii

Nr. crt.	Epoca E	Minim hel. D. J. 24.....	Eroarea E in 0,0001	N. min. ind. %	Pon- dere	0 - C <sub>1</sub>	0 - C <sub>2</sub>	0 - C <sub>3</sub>	0 - C <sub>4</sub>	Interval de epoci
						in 0,0001 zile				
1	-9146	16041,116		1		- 260	- 02			
2	7346	7513,690		1		- 220	- 05			
3	6156	8487,226	± 13	5		- 181	+ 03			- 6190 - - 6135
4	6146	8495,407		1		- 180	00			
5	5618	8927,365		3		- 139	+ 37			
6	4946	9477,121		1		- 017	- 18			
7	4887	9525,390		1		- 160	- 05			
8	4718	9663,643		5		- 210	- 58			
9	3696	20499,739		1		017	- 48			
10	3365	0770,553		4		- 130	- 08			
11	2917	1137,040	± 10	2		- 120	- 12			
12	2446	1522,364		1		- 010	- 08			
13	646	2994,941		1		- 003	+ 20			
14	- 403	3193,7395	± 16	3		- 019	+ 30			
15	0	3523,437	± 20	4		+ 035	+ 75			- 6 - + 11
16	+ 174	3665,784	± 10	7		+ 021	+ 57			+ 143 - + 209
17	222	3705,0545	± 08	3		+ 040	+ 75			+ 351 - + 561
18	507	3933,209	± 09	3		+ 016	+ 44			
19	556	3978,2958	± 02	4		+ 018	+ 48			
20	1017	4355,435		8		- 010	+ 11			
21	1178	4487,146	± 11	3		- 028	- 15			+ 1050 - + 1258
22	1499	4749,753	± 10	5		- 041	- 33			1451 - 1545
23	1924	5097,444	± 12	5		- 032	- 37			1908 - 1936
24	2210	5331,419		1		- 030	- 44			
25	2687	5721,6526	± 04	4		- 007	- 30			
26	2754	5776,468		1		- 024	- 01			
27	2889	5886,9085	± 03	5		+ 002	- 26			
28	3592	6462,0320	± 02	3		+ 033	- 12			
29	3689	6541,388		1		+ 004		+ 01	+ 08	
30	3904	6717,278		1		+ 038		+ 01	+ 07	
31	4471	7181,1365	± 07	7	14	+ 028		- 03	- 01	4442 - 4492
32	4491	7197,5005	± 20	6		+ 045		+ 18	+ 23	
33	4610	7294,8525	± 00	2	4	+ 036		+ 07	+ 11	4552 - 4668

Tab. nr. 3 (continuare)

Nr. crt.	Epoca E	Minim hel. D. J. 24.....	Eroarea E în 0,0001	Nr. min. ind.	Pondere	$\theta - C_1$	$\theta - C_2$	$\theta - C_3$	$\theta - C_4$	Interval de epoci
						in 0,0001 zile				
34	4966	27586,0945	$\pm 06$	6	13	+040		+15	+17	4931 - 4997
35	5037	7644,1802	$\pm 16$	6	12	+050		+25	+28	5014 - 5069
36	5111	7704,7175	$\pm 13$	2	2	+033		+09	+12	5102 - 5119
37	5379	7923,9623	$\pm 22$	6	11	-012		-33	-31	5338 - 5409
38	5458	7988,5929	$\pm 09$	5	11	-001		-20	-19	5431 - 5492
39	5545	8059,7702	$\pm 10$	3	5	+030		+12	+12	5519 - 5564
40	5872	8327,2871	$\pm 13$	6	13	+030		+15	+15	5822 - 5921
41	5990	8423,8220	$\pm 08$	6	12	+028		+14	+14	5949 - 6042
42	6341	8710,9721	$\pm 16$	6	12	+018		+08	+06	6284 - 6394
43	6486	8829,5947	$\pm 08$	7	23	+007		-01	-04	6438 - 6532
44	6794	9081,5671	$\pm 05$	2	5	+000		-05	-08	6789 - 6800
45	7158	9379,353		1		-005		-05	-10	
46	9101	30968,9084	$\pm 12$	3	6	-026		-04	-6	9093 - 9110
47	9942	1656,9254	$\pm 6$	7	15	-030		-01	-13	9879 - 10011
48	10946	2478,284		1	3	-112		-70	-86	
49	11295	2763,8070	$\pm 24$	4	5	-032		+15	-04	11275 - 11325
50	11369	2824,3447	$\pm 7$	5	11	-045		+03	-16	11347 - 11397
51	11627	3035,4114	$\pm 3$	4	6	-062		-11	-30	11588 - 11665
52	11787	3166,3098	$\pm 6$	7	16	-029		+24	+04	11726 - 11842
53	12071	3398,6476	$\pm 20$	6	11	-039		+17	-30	12022 - 12116
54	12192	3497,6343	$\pm 3$	5	10	-066		-09	-52	12198 - 12243
55	12197	3501,723		1	4	-084		-27	-48	
56	12501	3750,423		3		-091		-30	-52	
57	12689	3904,2309	$\pm 10$	5	9	-029		+33	+08	12672 - 12722
58	13110	4248,650		1	3	-016		+51	+27	
59	13474	4546,4355	$\pm 02$	2	2	-025		+47	+21	13403 - 13546
60	13942	4929,3007	$\pm 03$	4	16	-055		+22	-05	13904 - 14013
61	13961	4944,8464	$\pm 36$	4	9	-036		+41	+14	13930 - 13985
62	14043	5011,9273	$\pm 19$	5	6	-063		+14	-13	14018 - 14069
63	14421	5321,1683	$\pm 12$	5	7	-051		+31	-03	14309 - 14469
64	14822	5649,2258	$\pm 09$	6	9	-035		+52	+22	14793 - 14843
65	14909	5720,3978	$\pm 09$	7	11	-057		+31	+01	14865 - 14970
66	15301	6041,0920	$\pm 08$	3	6	-045		+47	+16	15277 - 15327
67	15404	6125,3565	$\pm 05$	3	3,5	-038		+56	+24	15399 - 15410
68	15702	6369,1458	$\pm 14$	3	4,5	-066		+31	-02	15684 - 15717
69	15836	6500,8583	$\pm 05$	3	3	-073		+26	-08	15833 - 15894
70	16074	6673,4775	$\pm 05$	2	3	-060		+41	+07	16074 - 16090
71	16240	6809,2805	$\pm 09$	4	4,5	-068		+36	+01	16196 - 16284
72	16602	7105,4320	$\pm 16$	3	3	-054		+53	+18	16602 - 16663
73	17102	7514,4809	$\pm 07$	4	8	-037		+76	+38	17058 - 17108
74	17426	7779,5453	$\pm 19$	3	2,5	-061		+98	+59	17426 - 17603

## BIBLIOGRAFIE

1. Broglia P., Masani A., Pestarino E., „Contributi dell'Osservatorio Astronomico di Milano-Merate”. 1955, **63**, p. 17.
2. Broglia P., Masani A., Pestarino E., *op. cit.* p. 24.
3. Chiș Gh., „Studii și cercetări științifice Acad. R.P.R., filiala Cluj”, 1952, III, nr. 3 - 4 p. 31.
4. Dugan R. S., „Contributions Princeton University Observatory” 1924, nr. 6, p. 66.

5. Dugan R. S., Wright F. W., „Contributions Princeton University Observatory” 1939, nr. 19.
6. Lause F., „Astronomische Nachrichten”, 1935, **251**, p. 373.
7. Pierce N. L., „Contributions Princeton University Observatory” 1947, nr. 22, p. 38.
8. Piotrowski S., „Acta Astronomica” serie C, vol. **2**, p. 77, 1934.
9. Tesevici V. P., „Izvestia Astronomiceskoi Observatorii”, 1954, **IV**, nr. 2, p. 58.
10. Tesevici V. P., „Peremenie zviozdi”, 1958, **11**, nr. 6, p. 406–408.
11. Tesevici V. P., „Peremenie zviozdi”, 1958, **11**, nr. 6, p. 409.
12. Wood F. B., „Astrophysical Journal”, 1950, **112**, p. 197.
13. Wood F. B., *op. cit.*, p. 200.

## ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПЕРИОДА ФОТОМЕТРИЧЕСКОЙ ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ SZ HERCULIS

(Резюме)

На основе наблюдения фотометрической двойной звезды SZ HERCULIS в 1954—1962 гг. из 560 фотометрических наблюдений, произведенных в Клужской обсерватории, было получено 53 главных минимума. Из совокупности 234 доступных минимумов был составлен график изменения периода на 60 лет. Из последних 46 нормальных минимумов были выведены новые элементы:

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2423523.4398 \pm 0.81809363.E \\ \pm 73 \qquad \qquad \qquad \pm 76$$

действительные для интервала  $4000 < E < 17.000$ . Установлено, согласно Цесевичу, нерегулярное изменение периода и, на основе элементов Бролла-Мазани-Пестарино, показывается приближение поверхности более слабой составляющей к предельной поверхности Якоби, откуда представляется возможным допущение изменения периода благодаря потере массы.

## SUR LA VARIATION DE LA PÉRIODE DE LA BINAIRE PHOTOMÉTRIQUE SZ HERCULIS

(Résumé)

L'étude de la binaire photométrique SZ Herculis entre les années 1954–1962, grâce aux 560 observations faites à l'Observatoire de Cluj, a permis d'obtenir 53 minima principaux. Avec la totalité de 234 minima accessibles on a établi le graphique de la variation de la période pour 60 ans. Des 46 derniers minima normaux ont été déduits les éléments nouveaux :

$$\text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2423523.4398 \pm 0.81809363.E \\ \pm 73 \qquad \qquad \qquad \pm 76$$

valides pour l'intervalle  $4000 < E < 17.000$ . On constate, en accord avec Tesevitch, la variation irrégulière de la période et, sur la base des éléments de Broglie–Masani–Pestarino, on montre le rapprochement de la surface de la composante plus faible vers la surface limite de Jacobi, ce qui rend possible l'hypothèse de la variation de la période due à la perte de masse.



## ORBITA PRELIMINARĂ A BINAREI FOTOMETRICE V TRIANGULI

de

VASILE URECHE

Binara fotometrică V Trianguli a fost observată la Observatorul astronomic din Cluj, în intervalul 31 august 1953—25 februarie 1959, obținându-se 437 poze fotovizuale. Primele rezultate ale acestor observații și anume magnitudinile fotovizuale ale stelelor de comparație, momentele a 25 minime principale și a 5 minime secundare, elementele noi ale variației de lumină și curba de lumină, au fost deja publicate [1], pentru obținerea lor s-a utilizat atunci metoda evaluărilor pe plăci.

Pentru a obține o curbă de lumină mai precisă, care să permită determinarea orbitei, magnitudinile variabilei V Trianguli au fost redeterminate prin măsurări pe plăci cu ajutorul unui Schnellphotometer M2 Zeiss al Laboratorului de spectroscopie al Universității „Babeș—Bolyai” din Cluj. Ca stele de comparație s-au utilizat stelele publicate în lucrarea citată [1].

Din cele 437 de poze, 3 poze n-au putut fi măsurate din cauza unor defecte de placă. Cu ajutorul celor 434 observații individuale obținute (date în tabelul nr. 2), s-au format 44 puncte normale, care sînt date în tabelul nr. 1, în care, prima coloană reprezintă numărul de ordine al punctului normal, a doua fază, a treia magnitudinea fotovizuală  $m_{pv}$ , a patra numărul de observații individuale  $N$  ce intră în formarea punctului normal respectiv, iar a cincea ponderea  $p$ . Fazele au fost calculate cu elementele date de N i j l a n d [5]. Momentul minimului principal corespunde fazei 0<sup>p</sup>9960; de aceea fazele date în tabelul nr. 1 sînt mărite cu 0<sup>p</sup>0040 față de cele obținute prin calcul. Ponderea  $p$  s-a stabilit în felul următor: s-a atribuit ponderea 1 observațiilor individuale obișnuite și ponderea 1/2 observațiilor individuale obținute din poze necorespunzătoare (imagini extrafocale, condiții slabe de vizibilitate), ponderea  $p$  fiind suma ponderilor observațiilor individuale. Eroarea medie pătratică a unui punct normal este de  $\pm 0^m03$ .

Pe baza tabelului nr. 1 s-a construit curba medie de lumină reprezentată în fig. 1. Din curba medie rezultă :

- magnitudinea în maxim  $M = 10,^m74$
- magnitudinea în minimul principal  $m_1 = 11,^m78$
- magnitudinea în minimul secundar  $m_2 = 11,^m05$ .

Curba de lumină arată că steaua V Trianguli aparține tipului  $\beta$  Lyrae, luminozitatea sistemului variind și între eclipse.

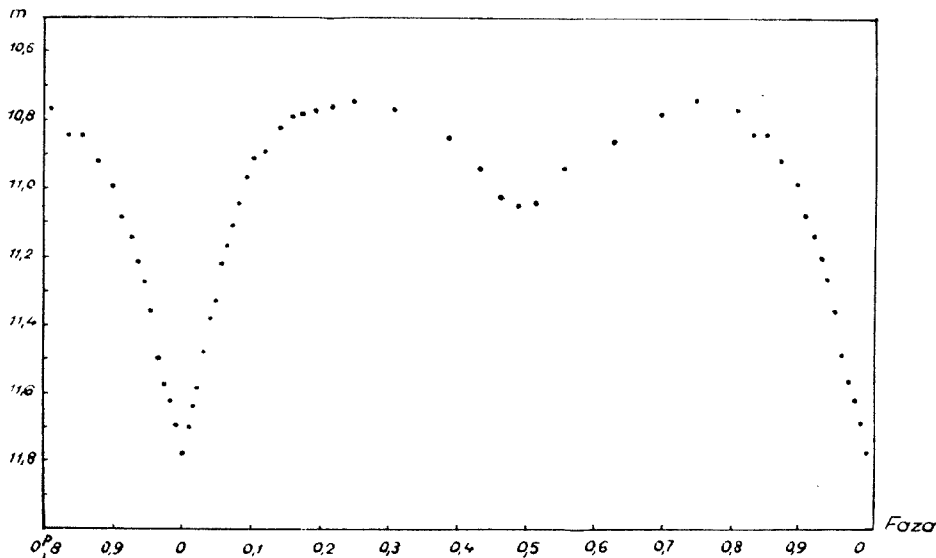


Fig. 1.

Pentru determinarea elementelor sistemului, curba de lumină se rectifică, eliminând variația de lumină datorată elipticității componentelor și reflexiei. Rectificarea curbei de lumină s-a efectuat cu formula dată de Martînov [4]

$$l_{rect} = \frac{l_{obs} + Aa + b \cos \theta + Ca \sin^2 \theta}{a + A + C} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{c}{a} + C \right) \cos^2 \theta \right] \quad (1)$$

unde :

- $l_{rect}$  — luminozitatea rectificată a sistemului,
- $l_{obs}$  — luminozitatea observată,
- $\theta$  — unghiul de fază
- $a, b, c$  — coeficienții de rectificare, iar
- $A$  și  $C$  — constantele de reflexie.

Coeficienții de rectificare  $a, b, c$  se determină prin metoda celor mai mici pătrate, din ecuații de condiție de forma :

$$l_{obs} = a - b \cos \theta - c \cos^2 \theta \quad (2)$$

scrise pentru fiecare punct normal situat în afara eclipselor. Determinarea constantelor  $A$  și  $C$ , cere cunoașterea aproximativă a elementelor sistemului. Valorile lor definitive, ca și ale elementelor sistemului se obțin prin aproximații succesive.

Pentru obținerea primei aproximații s-a aplicat metoda lui *Schneller* [6], utilizându-se pentru rectificarea formulele date în lucrarea citată [6], care nu conțin constantele  $A$  și  $C$ . Această metodă permite determinarea elementelor sistemului în ipoteza  $U$ . Prin această metodă, valorile  $k$  și  $\alpha_0$  ale raportului semiaxelor și respectiv fazei fotometrice maxime a eclipsei, se obțin prin intersecția a două curbe care reprezintă grafic dependențele dintre  $k$  și  $\alpha_0$ : una obținută din fazele parțiale ale eclipsei, așa cum se explică în lucrarea citată [6],  $k = k_q(\alpha_0)$ , a doua corespunzând uneia din ecuațiile

$$\alpha_0 = 1 - \lambda_1 + \frac{1 - \lambda_2}{k^2} \quad (3)$$

$$\alpha_0 = 1 - \lambda_2 + \frac{1 - \lambda_1}{k^2} \quad (4)$$

unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  reprezintă respectiv luminozitatea sistemului în minimumul principal și în cel secundar. Dacă curba  $k_q(\alpha_0)$  se intersectează cu curba (3), înseamnă că în minimumul principal avem o ocultație, dacă se intersectează cu curba (4) avem un tranzit.

Aplicarea metodei lui *Schneller* arată că în minimumul principal are loc un tranzit, obținându-se soluția aproximativă  $k = 0,8$ ;  $\alpha_0 = 1,0$ . Cu ajutorul acestor valori s-au găsit elementele:

$$a_1 = 0,481 \text{ — semiaxa mare a stelei mari}$$

$$a_2 = 0,381 \text{ — semiaxa mare a stelei mici}$$

$$L_1 = 0,948 \text{ — luminozitatea stelei mari}$$

$$L_2 = 0,052 \text{ — luminozitatea stelei mici.}$$

$$i = 83^\circ,2 \text{ — înclinarea planului orbitei.}$$

Având elementele aproximative ale orbitei, constantele de reflexie se determină cu formulele următoare:

$$A = 0,354 \sin i (L_1^* + L_2^*); \quad C = 0,13 \sin i (L_1^* + L_2^*)$$

$$\text{unde } \left. \begin{aligned} L_1^* &= L_2 \left( a_2^2 + \frac{3}{4} a_1^3 \right); & L_2^* &= L_1 \left( a_1^2 + \frac{3}{4} a_2^3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Astfel s-au găsit  $A = 0,070$ ;  $C = 0,026$ .

În continuare s-a trecut la rectificarea curbei de lumină cu ajutorul formulei (1). Aplicarea acestei formule este dificilă în cazul stelei *V Trianguli* din două motive:

1<sup>o</sup> Elementele aproximative ale orbitei arată că duratele eclipselor acoperă o fracțiune mare de perioadă, rămânând un număr mic de puncte normale în afara eclipselor, pentru care să se scrie ecuații de condiție de forma (2). Astfel determinarea coeficienților  $a$ ,  $b$ ,  $c$  devine nesigură prin metoda celor mai mici pătrate.

2<sup>o</sup> Coeficientul  $b$  se obține negativ, contrar teoriei. Totuși valoarea sa absolută este mică, fiind în limita erorilor de observație. Anume  $b = -0,015 \pm 0,016$ .

În asemenea cazuri *Martínov* [4] propune să se ia  $b = 0$  iar  $c$  să se determine grafic. Determinarea pe cale grafică a lui  $c$  este nesigură din cauza dispersiei mari a punctelor normale în curba de lumină.

În această situație s-a luat  $b = 0$ , ecuația (2) reducându-se la

$$l_{obs} = a - c \cos^2 \theta \quad (6)$$

Pentru 11 puncte normale situate înafara eclipselor s-au scris 11 ecuații de condiție de forma (6), care, rezolvându-se prin metoda celor mai mici pătrate au dat :

$$a = 0,994 \pm \frac{4}{4} ; \quad c = 0,178 \pm \frac{19}{19}$$

Cu ajutorul acestor valori și cu valorile  $A$ ,  $C$  date înainte s-a efectuat rectificarea curbei de lumină cu formula (1).

S-a trecut apoi la determinarea elementelor sistemului în ipoteza  $U$ . Factorul de elipticitate  $z$  s-a determinat cu formula

$$z = 2 \left( \frac{c}{a} + C \right)$$

Aplicarea metodei lui Russell [4] pentru determinarea elementelor sistemului n-a dat rezultate, neobținându-se intersecția curbelor care determină pe  $k$  și  $\alpha_0$ . De aceea s-a aplicat în continuare tot metoda lui Scheller [6], pentru curba rectificată cu ajutorul formulei (1).

Prin aproximații succesive, s-au obținut pentru constantele  $A$ ,  $C$  și  $z$ , după a treia aproximație, valorile :

$$A = 0,074 ; \quad C = 0,027 ; \quad z = 0,413.$$

Cu ajutorul acestor valori s-a efectuat ultima rectificare, curba rectificată corespunzătoare fiind reprezentată grafic în fig. 2.

Din curba de lumină rectificată, luând ca unitate luminozitatea sistemului în maxim, se obține :

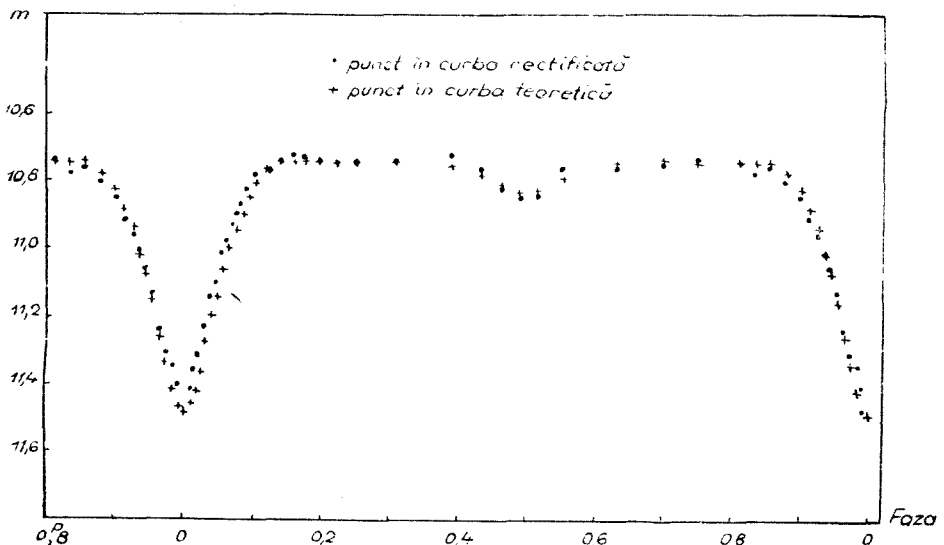


Fig. 2.



$\lambda_1 = 0,5058$  — luminozitatea sistemului în minimul principal,  
 $\lambda_2 = 0,9120$  — luminozitatea sistemului în minimul secundar. Aplicînd metoda lui Scheller, s-au obținut, după ultima rectificare, următoarele valori pentru elementele sistemului :

Semiaxa mare a stelei mari	$a_1 = 0,491$
Semiaxa mare a stelei mici	$a_2 = 0,393$
Semiaxa mică a stelei mari	$b_1 = 0,373$
Semiaxa mică a stelei mici	$b_2 = 0,298$
Semiaxa polară a stelei mari	$c_1 = 0,294$
Semiaxa polară a stelei mici	$c_2 = 0,235$
Raportul semiaxelor celor două stele	$k = 0,80$
Înclinarea planului orbitei	$i = 80^\circ,8$
Faza fotometrică maximă (tranzit)	$\alpha_0 = 0,86$
Excentricitatea secțiunii ecuatoriale	$\varepsilon = 0,651$
Luminozitatea stelei mari	$L_1 = 0,898$
Luminozitatea stelei mici	$L_2 = 0,102$
Raportul strălucirilor superficiale	$J_1/J_2 = 5,63$

Pentru determinarea elementelor sistemului s-a aplicat deasemeni și metoda lui Feltar [4]. Intersecția curbelor care determină pe  $k$  și  $\alpha_0$  conduce prin această metodă deasemeni la soluția :  $k = 0,80$  ;  $\alpha_0 = 0,86$  — în concordanță cu metoda lui Scheller.

Cu ajutorul elementelor date mai sus, s-a calculat curba teoretică de lumină, reprezentată grafic în fig. 2. Curba teoretică concordă satisfăcător cu observațiile în limita erorilor de observație. O concordanță mai bună, prin variația elementelor, nu s-a putut obține, din cauza asimetriei curbei de lumină observate.

Elementele sistemului V Trianguli au fost calculate deasemeni de Gaposchkin [2], pe baza curbei de lumină obținute de Hoffmeister [3] prin evaluări vizuale.

Valoarea lui  $k$  obținută în lucrarea de față concordă cu valoarea obținută de Gaposchkin, de asemeni tipul eclipsei. Dimensiunile relative ale componentelor nu concordă însă, valorile obținute în lucrarea de față fiind mai mari decît cele obținute de Gaposchkin. De asemeni există o mică diferență și între luminozitățile corespunzătoare ale componentelor. Toate acestea se datoresc probabil metodelor diferite de rectificare a curbelor de lumină observate ca și unor mici diferențe în înseși aceste curbe, obținute prin metode diferite.

Pentru explicarea asimetriei curbei de lumină și stabilirea cauzei ei sînt necesare metode mai precise de observare a variației de lumină a sistemului (metode fotoelectrice).

Încercarea de a determina elementele sistemului în ipoteza  $D$  sau pentru o valoare intermediară a coeficientului de întunecare spre margine nu a dat rezultat, deoarece curbele care determină soluția  $k$ ,  $\alpha_0$  nu se intersectează în interiorul domeniului de definiție al acestor mărimi, ci în afara lui.

Nu s-a încercat determinarea unei orbite eliptice, întrucît observațiile nu sînt suficient de precise pentru a permite aceasta.

În încheiere exprim, pe această cale, sincere mulțumiri prof. Gheorghe Chiș pentru ajutorul acordat în efectuarea acestei lucrări.

Tabel 1

## Puncte normale

Nr. pct. norm.	Faza	$m_{pv}$	N	p	Nr. pct. norm.	Faza	$m_{pv}$	N	p
1	p	m				p	m		
1	0,0012	11,78	10	8	23	0,4335	10,94	10	10
2	0,0089	11,70	10	7,5	24	0,4647	11,02	8	8
3	0,0156	11,64	10	9	25	0,4902	11,05	8	8
4	0,0214	11,59	10	8,5	26	0,5147	11,04	8	7,5
5	0,0312	11,48	10	8,5	27	0,5562	10,94	10	9,5
6	0,0398	11,38	10	10	28	0,6310	10,86	10	10
7	0,0472	11,33	10	8,5	29	0,7016	10,78	10	9
8	0,0559	11,22	10	8,5	30	0,7491	10,74	10	7,5
9	0,0659	11,17	10	9	31	0,8093	10,77	10	9
10	0,0737	11,11	10	9	32	0,8364	10,84	10	9
11	0,0829	11,04	10	9,5	33	0,8563	10,84	10	9
12	0,0941	10,97	10	9	34	0,8776	10,92	10	9,5
13	0,1063	10,91	10	9,5	35	0,8985	10,99	10	10
14	0,1212	10,89	10	10	36	0,9130	11,08	10	10
15	0,1424	10,82	10	10	37	0,9253	11,14	10	9
16	0,1602	10,79	10	9,5	38	0,9369	11,21	10	9,5
17	0,1756	10,78	10	9	39	0,9458	11,27	10	8,5
18	0,1950	10,77	10	9	40	0,9557	11,36	10	8,5
19	0,2206	10,76	10	9	41	0,9667	11,49	10	9,5
20	0,2507	10,74	10	9	42	0,9752	11,57	10	9,5
21	0,3077	10,77	10	9	43	0,9843	11,62	10	8,5
22	0,3880	10,85	10	10	44	0,9931	11,69	10	8,5

Tabel 2

## Observații individuale

D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$
4621,4076	m 10,78	5749,4191	m 11,18	6093,4836	m 10,95	6137,5273	m 10,76
623,4415	10,99	4316	11,38	4907	10,87	5339	10,89
4592	11,00	4441	11,60	4975	10,92	5451	10,81
4974	11,29	4643	11,52	5044	11,06	5513	10,81
624,5126	10,59	4781	11,41	5114	11,13	5583	10,82
5307	10,60	4920	11,15	107,4696	10,79	5643	10,75
5460	10,64	5059	11,02	4765	10,82	5756	10,75
5599	10,51	5198	10,91	4835	10,75	143,2293	10,95
5724	10,52	5338	10,88	4904	10,74	2348	11,00
5862	10,73	759,3113	10,84	4973	10,81	2418	10,98
6001	10,71	3252	10,96	5043	10,86	2487	11,16
6105	10,74	3565	11,20	5114	10,78	2557	11,19
625,3988	10,71	3676	11,26	5217	11,11	2619	11,20
4127	10,65	3780	11,35	119,2651	11,23	2675	11,25
4266	10,75	3912	11,69	2699	11,31	2730	11,37
4453	10,65	4016	11,75	2748	11,35	2786	11,46
5037	10,75	4127	11,57	2797	11,44	2841	11,57

Tabel 2 (continuare)

D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243.....	$m_{pv}$
	m		m		m		m
4625,5183	10,96	5759,4224	11,41	6119,2845	11,65	6143,2911	11,86
5041,4463	10,77	4419	11,44	2922	11,63	2953	11,78
4518	10,68	763,3007	10,87	2970	11,83	2994	11,93
4574	10,82	3146	10,79	3019	11,76	3036	11,83
4643	10,70	3264	10,75	3067	11,68	3078	11,66
4713	10,71	3389	10,75	3116	11,52	3147	11,48
4782	10,59	4681	11,14	3192	11,52	3189	11,48
4907	10,73	4820	11,37	3244	11,31	3234	11,31
4990	10,69	4952	11,66	3298	11,29	3286	11,28
5060	10,64	5091	11,52	3394	11,16	3334	11,27
5129	10,66	5223	11,28	3491	11,02	157,3299	11,45
5199	10,61	773,4025	11,03	3581	10,85	3341	11,64
048,3393	11,41	4150	11,15	3678	10,68	3381	11,59
3463	11,57	4218	11,25	3873	10,66	3424	11,63
3532	11,70	4288	11,33	3970	10,52	3464	11,66
3602	11,78	4357	11,42	4067	10,58	3507	11,61
3671	11,90	4448	11,79	137,3860	11,05	3549	11,41
3740	11,94	4503	11,76	3916	11,02	3591	11,45
3810	11,76	4635	11,45	3985	11,07	3799	11,04
3879	11,74	4718	11,25	4055	11,09	3911	11,05
3949	11,52	4774	11,23	4131	11,32	4036	10,90
4018	11,48	4847	11,18	4193	11,43	4105	10,86
4088	11,33	4914	10,97	4277	11,57	4209	10,87
4157	11,25	4983	10,85	4333	11,59	4279	10,96
054,2753	10,98	5115	10,82	4409	11,57	4348	10,92
742,4198	11,53	5191	10,69	4471	11,71	4417	10,71
4275	11,58	5250	10,74	4542	11,46	4494	10,84
4344	11,73	5420	10,57	4612	11,51	4556	10,67
4414	11,61	790,3491	10,80	4683	11,37	4685	10,77
4490	11,31	3634	11,03	4763	11,19	4786	10,70
4552	11,26	3700	11,09	4819	11,05	4855	10,69
4622	11,04	3784	11,19	4888	11,10	4924	10,75
4705	11,13	3838	11,22	4958	10,93	158,4028	10,71
4761	11,14	6093,4503	10,78	5027	11,01	4111	10,81
4830	11,05	4558	10,76	5098	10,82	4233	10,91
4900	11,01	4628	10,81	5168	10,99	4320	10,88
749,4018	10,98	4704	10,89				
6158,4410	10,88	6220,2708	11,01	6490,4691	10,85	6540,3961	10,98
4500	10,94	2806	10,91	494,2577	10,90	4127	10,94
4611	11,20	2924	10,91	2770	10,87	4301	10,94
4695	11,30	3014	10,83	2930	10,88	4482	10,85
4765	11,03	3125	10,79	500,3005	11,30	4586	10,82
4848	11,52	3222	10,76	3186	11,02	541,4515	10,91
4967	11,75	232,2271	11,45	3311	10,95	4654	10,84
5046	11,61	2521	11,47	3471	10,82	4793	10,94
5129	11,94	2729	11,32	3603	10,72	4932	11,01
5188	11,66	2889	11,10	501,4400	11,77	5070	10,97
5250	11,73	3028	10,92	4519	11,80	5209	11,06
5323	11,47	234,2572	10,96	4684	11,32	549,3856	10,98
5410	11,38	2801	11,11	4816	11,09	3974	11,15
5479	11,30	2878	11,10	4900	10,99	589,2076	11,49
5542	11,15	2954	10,86	4997	11,06	2166	11,67
5603	11,02	3030	10,99	5108	10,92	2257	11,86

Tabel 2 (continuare)

D. J. hel. 243 .....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243 .....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243 .....	$m_{pv}$	D. J. hel. 243 .....	$m_{pv}$
6158,5674	10,98	6234,3107	11,04	6501,5288	10,85	6589,2347	11,74
,5743	11,01	,3197	10,82	,5386	10,94	,2437	11,47
165,4249	10,81	484,2731	10,79	,5545	10,83	,2541	11,28
,4332	10,89	,2912	10,69	504,3739	11,54	,2653	11,08
,4409	11,11	,3011	10,78	507,2920	11,70	,2778	11,03
,4478	10,96	,3120	10,73	,3101	11,56	,2916	10,96
,4584	10,93	,3792	10,87	,3247	11,29	,3062	10,74
,4658	10,98	,3889	10,81	,3413	10,99	,3208	10,93
,4756	11,09	,3983	10,82	,3524	10,85	,3333	10,81
,4832	11,19	,4108	10,98	,3656	10,95	595,3255	11,04
,4910	11,16	,4184	11,04	,3767	10,89	,3369	10,96
,5124	11,60	,4255	11,21	513,3376	10,88	,3480	11,10
182,3184	10,88	,4323	11,21	,3515	10,82	,3591	11,04
,3253	10,83	,4399	11,45	,3654	10,87	,3696	11,18
,3323	10,78	,4531	11,53	,3793	10,92	,3890	11,20
,3392	10,79	,4594	11,75	,3932	10,95	605,2905	10,94
,3462	10,75	,4698	11,70	,4085	11,08	,3169	11,01
,3531	10,74	,4781	11,65	,4210	10,94	610,2562	11,13
183,3466	10,91	,4948	11,38	,4349	11,17	,2707	11,79
,3758	10,98	,5010	11,29	,4501	11,10	,2798	11,76
208,3174	10,87	,5087	11,12	,4640	11,00	,2903	11,85
,3389	10,79	,5156	11,05	,4779	10,94	,3006	11,36
,3486	10,88	,5260	10,96	,4904	10,92	,3110	11,12
,3590	10,80	490,2691	11,12	,5043	10,94	,3214	11,00
,3694	10,64	,2837	11,41	527,3566	10,80	,3318	10,96
,3798	10,90	,2955	11,37	,3705	10,77	620,2214	11,51
,3903	10,69	,3073	11,55	,3844	10,86	,2308	11,65
219,2835	10,74	,3191	11,74	,4011	10,81	,2388	11,80
,3037	10,83	,3316	11,69	,4122	10,75	,2513	11,53
,3162	11,11	,3441	11,53	528,2369	10,82	,2634	11,49
,3259	11,21	,3580	11,23	,2487	10,80	,2756	11,22
,3363	11,30	,3684	11,15	,2626	10,75	,2874	11,12
,3467	11,37	,3788	11,06	,2765	10,82	623,2623	10,76
220,2089	10,83	,3906	10,96	530,3442	10,90	,2765	10,79
,2181	10,87	,4024	10,91	,3630	10,88	,2907	10,78
,2292	11,03	,4163	10,84	540,3364	11,02	,3046	10,72
,2389	11,02	,4274	10,90	,3530	11,00	,3185	10,86
,2493	11,01	,4413	10,86	,3669	10,96	,3324	10,70
,2604	11,06	,4552	10,81	,3822	10,94	,3463	10,84

## B I B L I O G R A F I E

- 1 Chiş Gh. şi Ureche V., „Studia Universitatis Babeş-Bolyai” Cluj, seria Math. Phys nr. 1 din 1962.
- 2 Gaposchkin S., „Veröffentlichungen” Berlin-Babelsberg, 1931, IX, fasc. 5.
- 3 Hoffmeister C., „Astronomische Nachrichten”, 1919, 208, p. 251
- 4 Martinov D. J., Fesevici V. P., ş.a. „Peremenie zvezdi”, III OGJZ Goztehizdat, 1947.
- 5 Nijland A. A., „Bull. Astr. Inst. Netherlands”, 1930, 217 p. 117.
- 6 Schneller H., „Veröff. der Sternwarte in Sonneberg, 1949, 1, nr. 4.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОРБИТА ФОТОМЕТРИЧЕСКОЙ БИНАРНОЙ  
V TRIANGULI

( Р е з ю м е )

В данной работе автор приводит кривую блеска фотометрической бинарной V Trianguli, полученную из 434 фотовизуальных снимков, произведенных в Клужской Астрономической Обсерватории, в период 31 августа 1953г.—23 февраля 1959 г., измеренных с помощью шнеллфотометра M2 Zeiss. (Было получено 44 нормальных точки).

Кривая, имея незначительную асимметрию, имеет предельные звездные величины  $M = 10^m, 74$ ;  $m_1 = 11^m, 78$ ;  $m_2 = 11^m, 05$ .

Из кривой блеска были определены элементы системы в гипотезе U, посредством применения методов Шнеллера и Фетлаара, получив

$$z = 0,413; k = 0,80; \alpha_0 = 0,86 \quad (\text{транзит}); \quad a_1 = 0,491; \quad i = 80^\circ,8$$

$$L_1 = 0,898; L_2 = 0,102; J_1/J_2 = 5,63$$

L'ORBITE PRÉLIMINAIRE DE LA BINAIRE PHOTOMÉTRIQUE V TRIANGULI

(R é s u m é)

L'auteur présente la courbe de lumière de la binaire photométrique V Trianguli, obtenue grâce à 434 poses photovisuelles, effectuées à l'Observatoire Astronomique de Cluj, entre le 31 août 1953 et le 23 février 1959, et mesurées à l'aide d'un Schnellphotometer M2 Zeiss; elles contiennent 44 points normaux. La courbe qui présente une légère asymétrie, a les magnitudes extrêmes  $M = 10^m,74$ ;  $m_1 = 11^m,78$ ;  $m_2 = 11^m,05$ .

A partir de la courbe de lumière on a déterminé les éléments du système dans l'hypothèse U, par application des méthodes de Schneller et Petlaar; on a obtenu

$$z = 0,413; \quad k = 0,80; \quad \alpha_0 = 0,86 \quad (\text{transit}); \quad a_1 = 0,491; \quad i = 80^\circ,8$$

$$L_1 = 0,898; \quad L_2 = 0,102; \quad J_1/J_2 = 5,63.$$



## DP AQUARII

de

IOAN TODORAN

Steaua variabilă *DP Aquarii* este una dintre stelele puțin studiate. În Catalogul General de stele variabile [1], pe baza observațiilor lui S. Thordyke, sînt date limitele variației luminozității acestei stele. Max. = 13,8, Min. = 15,1 și tipul *RR Lyrae*. Din literatura existentă pînă în prezent, se constată că elementele variației luminozității nu au fost determinate pînă acum.

În urma indicațiilor primite din partea profesorului V. P. Teșevici (Odesa), steaua variabilă *DP Aquarii* a fost inclusă în planul de observații al Observatorului astronomic din Cluj. Astfel, în intervalul de la 5.VIII pînă la 26. IX a anului 1962, s-au obținut 247 observații fotografice. Aceste observații au fost efectuate cu ajutorul reflectorului de tip Newton ( $D = 50$  cm,  $F = 250$  cm) pe plăci *Guilleminot* (superfulgur).

Strălucirea variabilei a fost evaluată pe plăci prin metoda lui Argelande. Magnitudinile stelelor de comparație au fost determinate prin fotografierea regiunii stelei variabile și a Secvenței Polare pe același clișeu (în total am obținut 8 clișee), iar pentru trecerea de la magnitudinile stelelor din Secvență la magnitudinile stelelor de comparație, am utilizat microfotometrul „Hartmann”.

Stelele de comparație utilizate sînt indicate pe fig. 1 (coordonatele  $\alpha$  și  $\delta$  fiind raportate la epoca 1855,0), iar magnitudinile acestora sînt date în tabelul 1, unde  $\varepsilon$  este eroarea medie pătratică cu care a fost determinată magnitudinea respectivă, iar  $s$  reprezintă numărul gradelor de luminozitate obținute prin utilizarea metodei lui Argelander.

Tabel 1

*	$m_{pg}$	$\varepsilon$	s	*	$m_{pg}$	$\varepsilon$	s
a	13,55	$\pm 0,088$	19,5	e	14,61	$\pm 0,046$	6,9
b	13,69	.103	17,0	f	14,80	.023	3,0
c	14,00	.057	13,5	g	15,00	.028	0,0
d	14,41	.068	9,2				

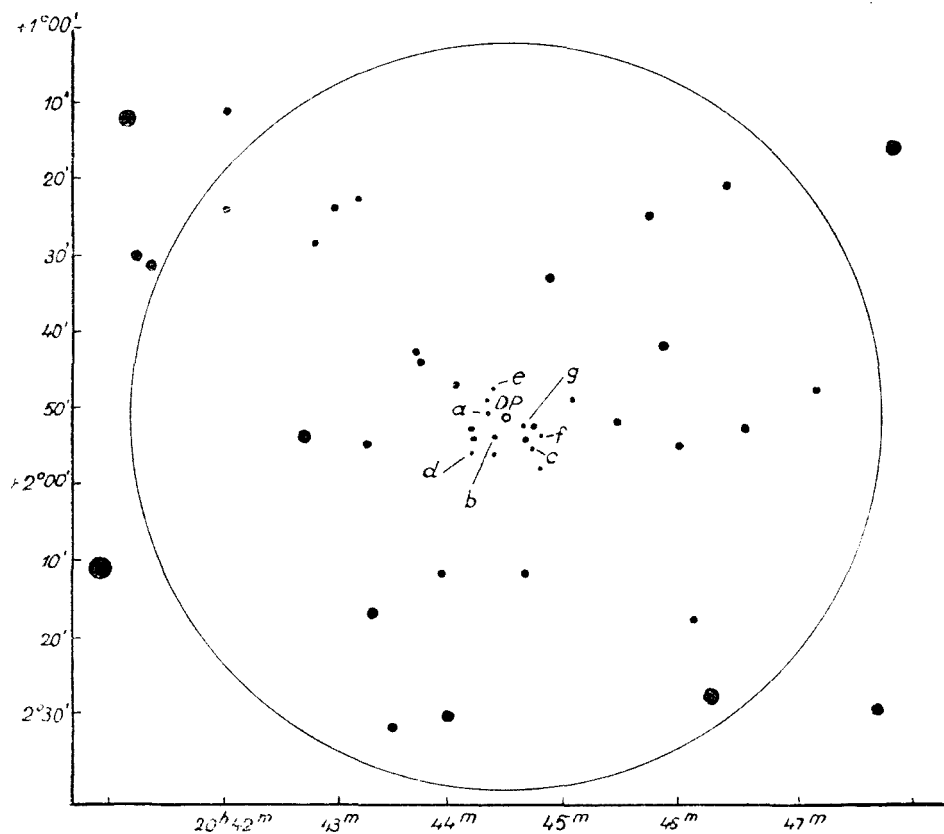


Fig. 1.

Tabel 2

Max. hel. D.J. 2437. . . .	Număr de observații		Pondere	0 - C	E
	ramura ascend.	ramura descend.			
884,451	2	6	1	+0,003	0
885,339	—	4	$\frac{1}{2}$	+0,001	2
888,454	5	2	1	0,000	9
896,465	6	—	$\frac{1}{2}$	-0,001	27
901,362	3	7	$\frac{1}{2}$	0,000	38
902,253	—	6	$\frac{1}{2}$	+0,001	40
904,478	4	5	$\frac{1}{2}$	0,000	45
905,369	4	11	2	+0,001	47
906,255	—	4	$\frac{1}{2}$	-0,003	49
909,374	4	8	$\frac{1}{2}$	0,000	56
910,264	1	8	1	0,000	58
926,288	—	7	$\frac{1}{2}$	+0,001	94
934,299	5	8	$\frac{1}{3}$	0,000	112



Pentru trecerea de la grade de luminozitate s la magnitudini stelare fotografice  $m_{pg}$  am obținut următoarea relație

$$m_{pg} = 15,07 - 0,078 \cdot s$$

Observațiile individuale sînt date în tabelul nr. 4, iar pentru construirea curbei medii a fost necesară determinarea primelor elemente ale variației luminozității. În acest scop, din observațiile date în tabelul nr. 4, am determinat momentele a 13 maxime care sînt date în tabelul nr. 2.

Din analiza momentelor maximelor din prima coloană a tabelului nr. 2 am determinat primele elemente ale steii *DP Aquarii*:

$$\text{Max. hel.} = \text{D. J. 2437884,448} + 0^s,4451 \cdot E$$

Cu ajutorul acestor elemente am calculat diferențele O — C din penultima coloană a tabelului 2.

Tabel 3

Faza medie	$m_{pg}$	n	Faza medie	$m_{pg}$	n	Faza medie	$m_{pg}$	n
0,0065	13,70	6	0,1597	14,71	6	0,3333	14,79	6
,0146	13,76	6	,1846	14,82	7	,3415	14,76	6
,0228	13,83	6	,2026	14,83	7	,3521	14,77	6
,0338	13,94	6	,2156	14,76	6	,3621	14,76	6
,0407	14,06	6	,2256	14,80	6	,3714	14,80	6
,0518	14,09	6	,2365	14,80	6	,3812	14,78	6
,0632	14,15	6	,2511	14,76	6	,3849	14,81	6
,0697	14,15	6	,2602	14,84	6	,3947	14,73	6
,0735	14,20	6	,2689	14,79	5	,4042	14,49	6
,0862	14,25	6	,2792	14,83	6	,4136	14,19	6
,0985	14,40	6	,2895	14,82	6	,4280	13,86	6
,1124	14,48	6	,3027	14,85	6	,4385	13,74	6
,1293	14,69	6	,3123	14,80	6	0,0019	13,76	6
0,1450	14,68	6	0,3232	14,85	6			

Pentru construirea curbei medii, cu ajutorul elementelor obținute mai sus, am calculat fazele corespunzătoare fiecărei observații. Astfel, cele 247 observații din tabelul nr. 4, au fost grupate în 41 puncte normale, obținînd, în modul acesta, curba medie de variație a luminozității, care este dată numeric în tabelul 3 și grafic în fig. 2.

Din curba de lumină se obțin următoarele limite între care variază luminozitatea:

$$\text{Max.} = 13^m,72, \quad \text{Min.} = 14^m,82.$$



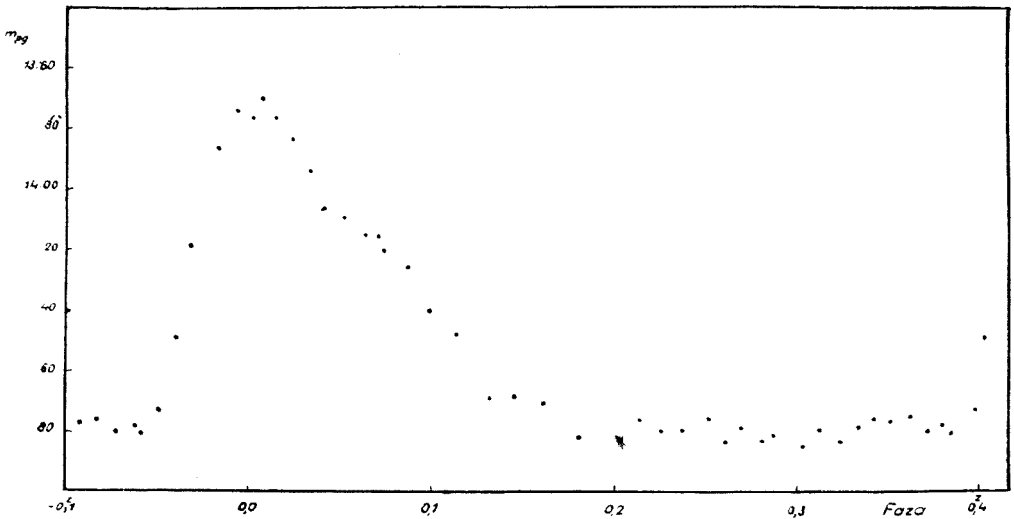


Fig. 2.

Curba de lumină a stelei *DP Aquarii* este asimetrică, ramura ascendentă avînd o pantă mai mare decît ramura descendentă. Utilizînd expresia asimetriei în magnitudine

$$\xi = m_{1/2}P - \frac{1}{2}(m_{\max} + m_{\min}),$$

obținem  $\xi = 0,5$ .

Din examinarea curbei de lumină și asimetria ei, rezultă că steaua variabilă *DP Aquarii* poate fi încadrată între stelele de tipul RR Lyrae, subclasa RRa.

Tabel 4

D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$
882,4112	14,84	883,3853	14,76	884,4887	13,94	888,3843	14,84
,4254	14,80	,4089	14,84	,4985	14,02	,3947	14,84
,4467	14,84	,4200	14,84	,5124	14,13	,4030	14,84
,4533	14,84	,4380	14,80	,5249	14,20	,4204	14,40
,4963	14,84	,4519	14,80	884,5347	14,28	,4308	14,27
882,5081	14,80	,4617	14,80	885,4031	14,02	,4447	13,90
883,3207	14,76	883,4714	14,80	,4145	14,09	,4551	13,78
,3311	14,76	884,3621	14,64	,4258	14,20	,4759	13,78
,3436	14,76	,3884	14,80	,4358	14,45	888,4912	13,90
,3547	14,84	,4554	13,78	885,4718	14,76	894,4568	14,76
,3755	14,84	,4804	13,98	888,3489	14,68	,4755	14,80

Tabel 4 (continue)

D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$	D. J. hel. 2437....	$m_{pg}$
894,4940	14,76	902,3650	14,48	905,5305	14,76	910,2770	13,78
896,3201	14,84	,4278	14,80	906,2942	14,04	,2861	13,86
,3345	14,76	,4400	14,80	,3081	14,13	,3083	13,98
,3437	14,84	,4532	14,84	,3254	14,12	,3179	14,02
,3527	14,72	,4588	14,76	,3459	14,20	,3277	14,17
,3602	14,76	,4817	14,84	906,4928	14,68	,3628	14,52
,3868	14,76	,4924	14,84	907,2788	14,76	910,4111	14,68
,3951	14,84	,5136	14,84	,3052	14,68	911,3069	14,72
,4048	14,74	,5303	14,84	,3149	14,68	,3394	14,99
4208	14,28	902,5560	14,84	,3295	14,76	911,3547	14,99
4611	13,73	903,4060	14,99	,3476	14,84	912,2980	14,76
4699	13,57	,4390	14,99	,3670	14,84	,3080	14,76
896,4798	13,47	903,4613	14,90	,3840	14,87	,3188	14,80
898,3549	14,35	904,2879	14,80	,4503	14,76	,3285	14,84
,3660	14,37	,3060	14,80	,4587	14,91	,3375	14,91
,3744	14,52	,3160	14,84	907,4737	14,84	,3528	14,84
,3889	14,68	,3389	14,84	908,2784	14,76	,3632	14,91
,3994	14,76	,3463	14,76	,2895	14,84	912,3775	14,84
4107	14,80	,3636	14,80	,3013	14,91	913,2618	14,84
4280	14,84	,3741	14,80	,3124	14,84	,2723	14,76
4375	14,76	,3834	14,84	,3215	14,84	,2813	14,76
4480	14,84	,3931	14,74	,3305	14,76	,2896	14,76
4607	14,84	,4109	14,84	,3472	14,80	,2963	14,84
4737	14,76	,4292	14,72	,3555	14,72	,3091	14,91
4913	14,76	,4386	14,68	,3652	14,80	,3178	14,76
4989	14,76	,4484	14,80	,3742	14,76	,3266	14,76
5104	14,76	,4653	13,98	,3837	14,76	,3379	14,51
5180	14,84	,4737	13,74	,3923	14,72	913,3433	14,52
5307	14,84	,4869	13,69	,4041	14,76	925,3219	14,76
898,5412	14,80	,4980	13,77	,4131	14,80	,3357	14,84
899,3444	14,68	,5188	14,13	908,4305	14,76	925,3489	14,56
,3541	14,68	,5302	14,20	909,2731	14,80	926,2886	13,82
,3624	14,76	904,5459	14,24	,2847	14,76	,2977	13,90
,3847	14,68	905,2909	14,76	,2986	14,72	,3088	13,82
899,3944	14,68	,3083	14,84	,3124	14,76	,3192	13,94
901,3309	14,03	,3180	14,76	,3216	14,76	,3296	14,06
,3420	13,98	,3281	14,24	,3424	14,24	,3400	14,06
,3545	13,57	,3448	13,90	,3556	13,94	926,3496	14,21
,3677	13,57	,3559	13,69	,3695	13,86	934,2364	14,81
4333	14,32	,3673	13,77	,4112	14,13	,2545	14,68
4451	14,32	,3749	13,82	,4242	14,13	,2635	14,13
4534	14,45	,3826	13,82	,4388	14,20	,2712	13,78
4659	14,52	,3909	13,90	,4489	14,20	,2823	13,69
4746	14,76	,3993	14,02	,4583	14,28	,2899	13,65
4909	14,72	,4152	14,06	,4757	14,28	,2982	13,69
901,5013	14,76	,4290	14,17	,4896	14,36	,3052	13,78
902,2747	13,69	,4385	14,13	,5028	14,40	,3135	13,82
,2847	13,78	,4552	14,24	,5173	14,51	,3246	13,94
,3227	14,13	,4722	14,56	909,5278	14,59	,3371	14,13
3338	14,20	,4930	14,76	910,2658	13,82	,3594	14,13
3497	14,20	,5023	14,76			934,3725	14,29

## BIBLIOGRAPHIE

1. В. В. Кукаркин, Р. Р. Парчаго, И. И. Ефремов, Р. Н. Нолопов, *Obscii katalog peremennih zvezd*. Moskva, 1958.

## DP AQUARI

(Резюме)

В промежутке между 5. VIII.—26. IX/1962 г. было произведено 247 фотографических наблюдений, из которых получилось 13 максимумов, с помощью которых были выведены следующие элементы:

$$\text{Max. hel.} = \text{D. J. } 2437884,448 \div 0,4451\text{E}$$

Индивидуальные наблюдения были сгруппированы в 41 нормальную точку, с помощью которых была построена средняя кривая изменения светимости. Отсюда установлены:

$$\text{Max.} = 13^{\text{m}}72, \quad \text{Min} = 14^{\text{m}}82$$

По исследованию кривой блеска и её асимметрии, автор приходит к выводу, что звезда *DP AQUARI* является типа *RR Lyrae*, подкласса *RRa*.

## DP AQUARI

(R é s u m é)

Dans l'intervalle du 5. VIII au 26. IX. 1962, on a effectué 247 observations photographiques, obtenant ainsi 13 maxima à l'aide desquels on a établi les éléments suivants

$$\text{Max. hel.} = \text{D. J. } 2437884,448 \div 0,4451\text{E}$$

Les observations individuelles ont été groupées en 41 points normaux, qui ont permis de tracer la courbe moyenne de la variation de luminosité. D'où il résulte

$$\text{Max.} = 13^{\text{m}}72, \quad \text{Min.} = 14^{\text{m}}82.$$

L'examen de la courbe de lumière et l'asymétrie de celle-ci mènent à la conclusion que l'étoile *DP Aquarii* est du type *RR Lyrae*, sous-classe *RRa*.

# INFLUENȚA VARIAȚIEI FORMEI PĂMÎNTULUI ASUPRA MIȘCĂRII SALE

de

I. STAN, S. TÓTH, T. PENCIUC, E. BĂTAGĂ

Conform concepției actuale asupra evoluției formei Pământului putem considera că inițial avea o formă sferică, iar datorită rotației apare o turtire la poli. Această variație se face lent, într-un interval de timp mare  $T$ , atrăgînd după sine și unele modificări ale mișcării.

În această lucrare studiem unele modificări în mișcarea Pământului, legate de variația formei sale.

Vom considera în acest scop mișcarea fără frecare a unui corp solid în jurul unui punct fix  $O$ , pe care-l vom alege și ca originea axelor de coordonate.

Ca axe legate de corp  $Oxyz$ , alegem axele principale de inerție ale elipsoidului relative la punctul fix  $O$ . Presupunem că în momentul inițial, elipsoidul de inerție se reduce la o sferă, adică momentele principale de inerție sînt egale,  $A_0 = B_0 = C_0$ ; apoi că sub influența forțelor centrifuge, corpul se deformează așa fel că elipsoidul de inerție devine de rotație, adică  $A = B, C$ .

Variația momentelor principale de inerție se face lent și în o manieră necunoscută. Astfel de mărimi se încadrează în definiția parametrilor adiabatici [1—7], iar rezolvarea ecuațiilor mișcării nu se poate face cu metodele obișnuite.

Ecuațiile mișcării ale unui corp solid în jurul unui punct sînt date în cazul general de ecuațiile lui Euler [8—10].

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= L_x \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= L_y \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= L_z \end{aligned} \quad (1)$$

unde  $L_x, L_y, L_z$ , sînt proiecțiile momentului forței, iar  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , proiecțiile vitezei unghiulare pe axele legate de corp.

În cele ce urmează vom presupune corpul de simetrie dinamică ( $A = B, C$ ) și că mișcarea sa este liberă,  $\vec{L} = 0$ .

Sistemul de ecuații (1) se reduce atunci la

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z &= 0 \\ A\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= 0 \\ C\dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Aceste ecuații sînt valabile pentru un interval de timp scurt, căci pentru un interval de timp mare, momentele principale de inerție variază în timp,  $A = A(t)$  și  $C = C(t)$ , ceea ce nu ne permite rezolvarea lor pentru un timp mare cu metodele cunoscute.

Teoria invarianților adiabatici arată însă că în decursul unor astfel de mișcări (variația lentă a parametrilor), există anumite mărimi care rămîn invariante și care permit un studiu calitativ al mișcării.

Pentru a găsi invarianții adiabatici ai sistemului și deci comportarea într-un interval de timp mare a mișcării vom urma metoda lui H. Geppert [11, 12], în care se rezolvă sistemul de ecuații (2), considerîndu-se întîi momentele de inerție constante (ceea ce ne permite să studiem caracterul mișcării într-un interval scurt de timp) iar apoi considerîndu-le variabile, găsim invarianții adiabatici ai mișcării (ceea ce permite urmărirea mișcării într-un interval mare de timp).

I. Considerînd momentele principale de inerție constante, din a treia ecuație din (2) se găsește

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const.} \quad (3)$$

Derivînd prima ecuație în raport cu timpul și înlocuind pe  $\omega_z$  din a doua ecuație, obținem:

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2\omega_x = 0, \quad (4)$$

unde

$$\Omega = \frac{A - C}{A}\omega_0. \quad (5)$$

Soluția acestei ecuații este

$$\omega_x = M \cos \Omega(t - t_0), \quad (6)$$

unde  $M$  este o constantă. Din prima ecuație găsim

$$\omega_y = M \sin \Omega(t - t_0). \quad (7)$$

Ecuațiile (3), (6) și (7) arată că viteza unghiulară  $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , execută o mișcare de rotație în jurul axei  $Oz$  cu viteza unghiulară  $\Omega$ , mai precis, că vectorul viteză unghiulară, care în decursul mișcării are o valoare absolută constantă ( $\omega^2 = M^2 + \omega_0^2$ ), descrie un con în jurul axei  $Oz$  (axa de simetrie a corpului rigid). Trebuie subliniat că mișcarea descrisă mai sus, numită precesie liberă\* (în lipsa forțelor), este relativă la axele solidar legate de corp, care la rîndul lor se rotește în spațiu împreună cu corpul.

\* Precesia liberă a axei de rotație a Pămîntului nu trebuie confundată cu precesia în jurul normalei la ecliptică (perioada 25 800 ani), numită precesie astronomică și care e datorită acțiunii Soarelui și a Lunii, neglijată de noi.

Raza cercului descrisă de viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ , este egală cu  $M$ , ea nedepășind la Polul Nord mai mult de 5 m, perioada de rotație fiind aproximativ 427 zile [13].

II. Treceam acum la studierea efectului variației formei Pământului asupra acestei mișcări, adică vom considera  $A$  și  $C$ , respectiv  $\Omega$ , ca fiind variabili în timp, mai precis, studiem influența variației formei Pământului asupra precesiei libere.

Precesia axei de rotație este dată de aceleași ecuații, cu singura deosebire că  $\Omega$  este funcție de timp, adică

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2(t)\omega_x = 0. \quad (8)$$

Pentru a găsi invariantul adiabatic al acestei ecuații, introducem notațiile,

$$x_1 = \omega_x, \quad x_2 = \omega_x$$

sau

$$\begin{aligned} x_1 &= M \cos \Omega(t - t_0), \\ x_2 &= -M \sin \Omega(t - t_0). \end{aligned}$$

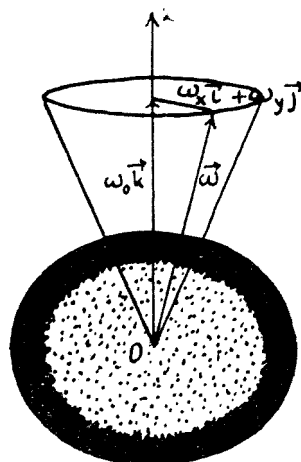


Fig. 1.

Ecuația de ordinul doi (8) se scrie cu ajutorul acestor notații sub forma unui sistem de ecuații de ordinul întâi,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\Omega^2(t)x_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Soluția acestui sistem o considerăm cea pentru  $\Omega$  constant,

$$\begin{aligned} x_1 &= M(t) \cos \Omega(t) \cdot (t - t_0) \\ x_2 &= -M(t)\Omega(t) \sin \Omega(t)(t - t_0), \end{aligned} \quad (10)$$

în care considerăm  $M$  și  $\Omega$  ca fiind funcții de  $t$ .

Din (10) găsim

$$\begin{aligned} f_1[x_1, x_2, \Omega(t)] &= M(t) = \sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{\Omega^2(t)}} \\ f_2[x_1, x_2, \Omega(t)] &= t - t_0 = \frac{-1}{\Omega(t)} \operatorname{arctg} \left( \frac{x_2}{x_1 \Omega(t)} \right). \end{aligned}$$

Invariantul adiabatic  $I$ , al sistemului (9) este dat de ecuația [11, 12]

$$\frac{\partial I}{\partial M} \overline{\varphi_{11}} + \frac{\partial I}{\partial \Omega} = 0$$

unde

$$\overline{\varphi_{11}} = \overline{\frac{\partial f_1}{\partial \Omega}} = -\frac{M}{\Omega}$$

bara înseamnă valoarea medie în raport cu intervalul de timp  $T$ .

Ținând cont de această valoare, găsim ecuația

$$-\frac{M}{2\Omega} \frac{\partial I}{\partial M} + \frac{\partial I}{\partial \Omega} = 0.$$

care admite invariantul adiabatic,

$$I = M^2\Omega = \text{const.} \quad (11)$$

Pentru a pune în evidență dependența care există între variația formei corpului considerat și mișcarea sa de rotație în jurul axei  $Oz$ , presupunem că într-un interval de timp dat, momentul de inerție  $A$  a crescut cu aceeași valoare cu care s-a micșorat  $C$ , față de valoarea inițială comună  $D_0$ .

Avem deci

$$A = D_0 + |\Delta|$$

$$C = D_0 - |\Delta|$$

$|\Delta|$  fiind mărimea variației suferite de momentul de inerție într-un interval de timp mare.

Înlocuind în (11) avem după simplificări simple

$$M^2 |\Delta| = \text{const.} \quad (12)$$

expresie obținută prin neglijarea termenului  $\frac{|\Delta|}{D_0^2}$ .

Din (12) se vede că la creșterea lui  $|\Delta|$  corespunde o micșorare a razei cercului  $M$  pe care-l descrie viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ .

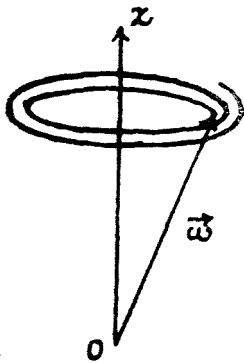


Fig. 2.

Aceasta atrage după sine faptul că traiectoria descrisă de  $\vec{\omega}$  este un cerc numai într-un interval de timp scurt, însă într-un interval de timp mare curba descrisă este o spirală. De asemenea turtirea la poli atrage după sine o mai mare stabilitate a mișcării, cunoscut fiind din teoria giroscopului, că mișcarea este cu atât mai stabilă, cu cât raza cercului descris de axa de rotație este mai mică.

În concluzie variația lentă (adiabatică) a formei Pământului, atrage după sine o mai mare stabilitate a mișcării sale și în același timp faptul că traiectoria descrisă de vectorul vitezei unghiulara este o spirală și nu un cerc, cum ar fi, dacă forma nu ar varia.



## B I B L I O G R A F I E

1. P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 36, 91, 1911, și 51, 327, 1916.
2. I. M. Burgers, Ann. d. Phys. 52, 195, 1917.
3. T. Levi-Civita, Abh. Sem. Hamb. Univ. 6, 323, 1928.
4. F. Hertweck, A. Schlüter, Zeit. f. Naturfor. 12, 844, 1957.
5. P. O. Wanderwoort, Ann. of Phys. 12(3) 436, 1960.
6. A. M. Дыхне ЖЕрф 38 (2) 570, 1960.
7. I. Stan, Stud. Univ. Babeș-Bolyai 1 (1) 287, 1961.
8. L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Moscou, 1960.
9. I. I. Plăcinteanu, *Mecanică analitică și vectorială*, ed. II, Ed. Tehnică, București 1958.
10. Z. Gábos, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele mecanicii*, Ed. Acad. R.P.R., București 1962.
11. H. Geppert, Atti Acad. Naz. Lincei 8 (5) 30, 191, 294, 1928.
12. H. Geppert, Math. Ann. 102, 194, 1929.
13. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Ed. Addison-Wesley, Massachusetts, 1957.

## ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ ЗЕМЛИ НА ЕЁ ДВИЖЕНИЕ

( Р е з ю м е )

В данной работе авторы изучают влияние изменения формы Земли. Так как данное изменение имеет место в очень большом промежутке времени, применяется теория адиабатических инвариантов. Полученный результат состоит в том, что ось вращения описывает спираль и изменение формы влечёт за собой большую устойчивость движения.

## INFLUENCE DE LA VARIATION DE LA FORME DE LA TERRE SUR SON MOUVEMENT

( R é s u m é )

Les auteurs ont étudié l'influence de la modification de la forme de la Terre. Comme cette modification se produit dans un intervalle de temps considérable, on applique la théorie des invariants adiabatiques. Le résultat obtenu est que l'axe de rotation décrit une spirale et que la variation de la forme entraîne une plus grande stabilité de mouvement.



# DETERMINAREA TIMPURILOR DE RELAXARE $T_1$ ȘI $T_2$ A IONULUI DE Cu(II) ÎN ZEOLIȚI DE TIP Y

de

A. NICULA

Rezonanța electronică de spin (R.E.S.) a ionului de Cu(II) în zeoliți de tip Y a fost studiată de către noi [1], [2] în scopul de a elucidă unele probleme cu privire la forma liniei și la structura hiperfină în substanțe policristaline. Cu această ocazie s-au clarificat care sînt condițiile cele mai bune pentru a putea fi pus în evidență un spectru cît mai complet în substanțe policristaline. S-a obținut un astfel de spectru care are o anizotropie foarte mare în factorul  $g$  dînd un  $g_{11} \neq g_{\perp}$ . Datorită acestei anizotropii apar două grupuri de structură hiperfină unul în banda lui  $g_{\parallel}$  cu constanta  $A$  și celălalt în banda lui  $g_{\perp}$  cu constanta  $B$  (fig. 1).

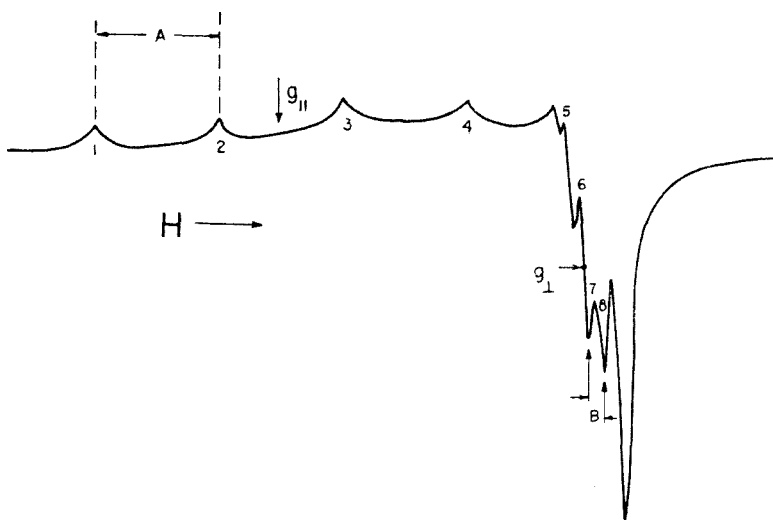


Fig. 1. Spectrul de R.E.S. a ionului de Cu(II) în zeoliți conținând concentrații mici de ioni de cupru, pe celula elementară.

Deoarece zeoliții sînt substanțe policristaline care absorb în canalele lor structurale, foarte multă apă, am considerat important studiul și determinarea timpurilor de relaxare  $T_1$  și  $T_2$  a ionului de Cu(II) în aceste substanțe. În această lucrare dăm rezultatele măsurătorilor timpurilor de relaxare  $T_1$  și  $T_2$  a ionului de Cu(II) în zeoliți de tip Y, precum și un calcul al acestor timpuri de relaxare din teoria lui McConuell [3].

TEHNICA EXPERIMENTALĂ. Zeoliții de tip Y folosiți ca mediu diamagnetic pentru cercetarea R.E.S. a ionului de Cu(II) sînt zeoliți sintetici de tip Linde (formula celulei elementare este următoarea:  $Na_{56}[(AlO_2)_{56}(SiO_2)_{136}]$ ). Proprietățile fizico-chimice și structurale ale acestor zeoliți sînt bine cunoscute și descrise în literatură [4]. Introducerea ionilor de Cu(II) în rețeaua zeolitelui s-a făcut folosind tehnica schimbului de ioni utilizînd o soluție de  $Cu(NH_4)$ . S-au preparat probe de diferite concentrații. Fenomenul de saturație cel mai pronunțat a fost observat la proba cu 0,3 ioni de Cu(II) pe celula elementară.

Spectrometrul cu care s-au făcut măsurătorile de saturație în R.E.S. a fost un spectrometru de tip Varian-4500 care are o frecvență de lucru de 9500 Mc/s, (Frick Chemical Laboratory de la Univ. Princeton, S.U.A.) Cîmpul magnetic exterior a fost modulat cu un cîmp de 100 kc/s și s-a ridicat la recorder derivata curbei de absorbție. Pentru a obține fenomenul de saturație s-au folosit puteri de la sursa de microunde pînă la ordinul a 15 mW.

MĂSURAREA TIMPURILOR DE RELAXARE  $T_1$  ȘI  $T_2$ . Pentru determinarea timpului de relaxare spin-rețea  $T_1$  s-a folosit metoda saturației progresive (B.P.P.) [5] iar determinarea lui  $T_2$  s-a făcut din lărgimea liniei. Relația dintre  $T_2$  și lărgimea liniei se găsește formînd din a doua ecuație a lui Bloch, pentru  $x''$ , pe  $d^2x''/d\Delta\omega^2 = 0$ . Ținînd cont de condiția  $(\gamma H_1)^2 T_1 T_2 \ll 1$  se găsește  $T_2 = 1/(3\Delta\omega = 2) \cdot 3\gamma\Delta H$ . Calculul timpului de relaxare  $T_1$  se determină ținînd cont de factorul de saturație

$$z = \frac{x''(\omega\Phi, H_1)}{x''(\omega_0, 0)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\gamma^2 H^2 T_1 T_2} \quad (1)$$

după logaritmare aceasta expresie devine

$$\log\left(\frac{1}{z} - 1\right) = 2 \log H_1 + \log\left(\mu^2 \frac{T_1 T_2}{k}\right) \quad (2)$$

În aceste relații  $\mu$  este momentul magnetic al ionului de Cu(II)  $H_1$  — cîmpul microundei,  $\omega_0$  — frecvența de rezonanță și  $\chi_0$  este susceptibilitatea statică. S-a definit factorul de saturație  $Z$  în ideea unei saturații omogene. În figura 2 s-a reprezentat grafic  $\log(1/Z - 1)$  în funcție de  $H_1$ . Intersecția cu axa  $H_1$  ne dă  $\log(\mu^2 T_1 T_2)$ . Deoarece din lărgimea liniei s-a găsit  $T_2$  egal cu  $3 \cdot 10^{-1}$  sec. timpul de relaxare  $T_1$ , s-a calculat din graficul figurei 2 și s-a găsit  $T_1 = 4 \cdot 10^{-1}$  sec. valoarea relativ mare a lui  $T_1$  reflectă o slabă interacțiune a ionilor de Cu(II) cu locurile cationice

ale zeolitului. Această slabă interacțiune este determinată probabil, de hidratare atât a ionilor de Cu(II) cât și a locurilor cationice din rețeaua cristalină a zeolitului.

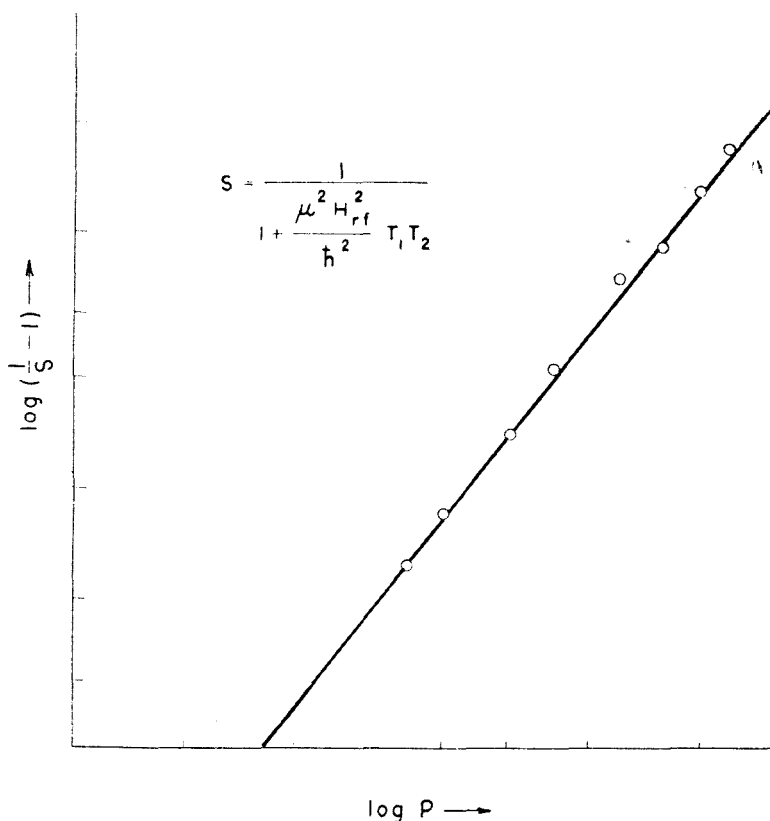


Fig. 2. Comportarea la saturatie a ionilor de Cu(II) hidratați în zeoliți conținând un număr mic de ioni de cupru pe celula elementară.

#### DETERMINAREA TIMPURILOR $T_1$ ȘI $T_2$ DIN TEORIA LUI McCONNELL.

Deoarece zeoliții conțin foarte multă apă absorbită s-a făcut o comparație între timpurile de relaxare spin-rețea  $T_1$  și spin-spin  $T_2$  determinați experimental și aceleași timpuri de relaxare calculați din teoria lui McConnell [3].

Teoria lui McConnell dă efectul mișcării moleculelor dintr-un lichid asupra relaxării paramagnetice a ionilor sau moleculelor cu spin electronic de 1/2 și spin nuclear de 3/2. Această teorie corelează timpurile de relaxare  $T_1$  și  $T_2$  cu anizotropia factorului  $g$ ,  $\Delta g = g_{\parallel} - g_{\perp}$  cu anizotropia interacțiunii hiperfine  $A - B$  și cu timpul de corelație care descrie mișcarea dezordonată Browniană a microcristalelor în stare lichidă. Contribuția anizotropiei structurii hiperfine la relaxația paramagnetică indică că aceasta depinde de numărul cuantic de spin  $I$  așa că diferiții multipleți de structură hiperfină dintr-un spectru de R.F.S. pot să aibă lărgimea liniei diferită:

Prin anumite aproximații (considerînd numai termenii de ordinul întii), cu ajutorul hamiltonianului de spin, McConnell a dat următoarele expresii pentru timpurile de relaxare  $T_1$  și  $T_2$ .

$$\frac{1}{T_1} \geq \frac{8\pi^2}{15} \frac{Mq_c}{1 + 4\pi^2\nu\rho\tau_c^2}$$

$$\left(\frac{1}{T_1}\right)^2 \geq \frac{32\pi}{45} M \log^{-1} \left(\frac{2\tau_c}{T_2}\right) \quad (3)$$

unde s-a notat

$$M = (\Delta g \beta_0 H_0 + bI)^2 h^{-2}$$

$$b = A - B \quad (4)$$

și în plus mai există relația

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_2'} + \frac{1}{T_1} \quad (5)$$

În ecuațiile (3) s-a pus semnul inegalității deoarece pot să existe și alți termeni de relaxare spin-rețea care pot să cauzeze o micșorare a lui  $T_1$  din prima ecuație. La fel se întîmplă și pentru timpul de relaxare transversal  $T_2$ .

Timpul de corelație  $\tau$  care intră în relațiile de sus este dat de relația

$$\tau_c = \frac{4\pi\eta a^3}{3KT}$$

unde  $\eta$  este vîscozitatea lichidului,  $a$  este raza efectivă a microcristalului în cazul nostru complexul Cu(II) cu moleculele de apă care-l înconjoară în soluție. Zeoliții complet hidratați prezentîndu-se ca o soluție masivă, vîscozitatea acestora s-a luat aproximativ de  $\eta = 0,01$  ca și în cazul soluțiilor apoase. Constanta  $a$  pentru zeoliții de tip Y este luată de aproximativ 10 Å (aici  $a$  s-a luat puțin mai mare) în așa fel ca să aproximeze dimensiunile cavităților zeolitului. Valorile celorlalte constante necesare în teoria lui McConnell sînt  $g_{||} = 2,34$ ,  $g_{\perp} = 2,07$ ,  $|A| = 0,0160$ ,  $|B| = 0,00164$ .  $\text{cm}^{-1}$

Timpul de relaxare  $T_1$  din prima ecuație a sistemului (3) are valorile 10, 1,8, 0,76,  $0,41^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-6}$  sec. corespunzător lui  $M_1 = 3$  [2, 1/2, -1/2, -3/2]. Valorile lui  $T_2$  pentru  $M = 1/2$  este  $1,7 \cdot 10^{-10}$  sec. Aceste valori calculate teoretic sînt comparabile cu cele găsite experimental cu metoda B.P.P.

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. Nicula, D. Stamires, J. Turkevich, Report Princeton University N. J., U.S.A.
2. A. Nicula, D. Stamires, J. Turkevich, Studii și cerc. (sub tipar)

3. H. M. McConnell, J. Chem. Phys., 25, 709 (1956).
4. A. Nicula (Teza de disertație) 1963.
5. N. Bloembergen, E. M. Purcell and R. V. Pound, Phys. Rev. 73, 679 (1948).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ T<sub>1</sub> И T<sub>2</sub> ИОНА Cu (II) В ЦЕОЛИТАХ ТИПА Y

(Резюме)

В данной статье содержатся исследования ЭСР парамагнитных ионов в цеолитах. Автор проводил измерения времени спин-решеточной и спин-спиновой релаксации. Экспериментальное определение времени релаксации T<sub>1</sub> и T<sub>2</sub> проводилось методом прогрессивного насыщения (БПП) и были найдены значения T<sub>1</sub> = 4 · 10<sup>-6</sup> сек. и T<sub>2</sub> = 3 · 10<sup>-10</sup> сек. С полученными из спектра данными автор вычислил T<sub>1</sub> и T<sub>2</sub>, используя теорию Мак-Коннелла. Полученные значения находятся в соответствии с экспериментально полученными значениями.

## DÉTERMINATION DES TEMPS DE RELAXATION T<sub>1</sub> ET T<sub>2</sub> DE L'ION DE Cu(II) DANS LES ZÉOLITHES DE TYPE Y

(Résumé)

Poursuivant des recherches de R.E.S. des ions paramagnétiques dans les zéolithes, l'auteur a effectué des mesures sur les temps de relaxation spin-réseau et spin-spin. La détermination expérimentale des temps de relaxation T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> a été effectuée selon la méthode de saturation progressive (B.P.P.) et l'on a trouvé les valeurs T<sub>1</sub> = 4 · 10<sup>-6</sup> sec. et T<sub>2</sub> = 3 · 10<sup>-10</sup> sec. À l'aide des données fournies par le spectre de la fig. 1 l'auteur a calculé T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> en utilisant la théorie de Mc Connell. Les valeurs obtenues ainsi sont en concordance satisfaisante avec les valeurs obtenues expérimentalement.





COMPORTAREA CIRCUITULUI OSCILANT CONȚINÎND  
CAPACITATEA NELINIARĂ A UNEI JONȚIUNI  $p - n$   
ÎN REGIM DE OSCILAȚII FORȚATE

de  
EMIL TĂTARU

În studiul actual al radiotehnicii se constată o utilizare tot mai accentuată a elementelor reactive neliniare. Prin numeroasele cerințe practice se impune necesitatea cercetărilor în această direcție. În [1] este studiată rezonanța circuitului oscilant cu ferită nepolarizată iar în [2] rezonanța circuitului oscilant în care dependența capacității  $\mathcal{C}$  în raport cu sarcina  $Q$  este de forma

$$\mathcal{C} = C_0(1 + \lambda Q^2)^{-1} \quad (1)$$

unde

$\lambda$  — parametru

$C_0$  — capacitatea corespunzătoare sarcinii  $Q = 0$

Lucrarea de față are drept scop studiul rezonanței circuitului oscilant conținând capacitatea neliniară a unei joncțiuni  $p - n$  a cărei neliniaritate diferă de (1) avînd forma

$$\mathcal{C} = k(\varphi + v)^{-n} \quad (2)$$

unde

$\varphi$  — diferența de potențial de contact joncțiunii  $p - n$

$v$  — tensiunea aplicată joncțiunii

$k$  — o constantă

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Fie montajul din fig. 1 în care un generator de curent constant  $i(t) = I \sin \omega t$  alimentează un circuit derivație  $RL\mathcal{C}$ . Capacitatea  $\mathcal{C}$  este de tip joncțiune  $p - n$  și este polarizată de la o sursă de curent con-

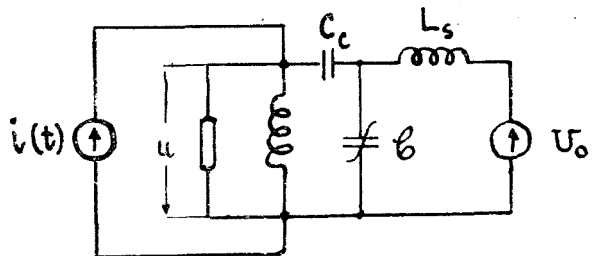


Fig. 1.

tinuu la tensiunea  $U_0$  prin intermediul bobinei de șoc  $L_s$ . Capacitatea de blocare  $C_c$  are valoarea mult mai ridicată decât  $\mathcal{C}$  astfel încît influența sa este neglijabilă.

Tensiunea aplicată joncțiunii  $p - n$  este  $V = U_0 + U$  și se poate scrie că

$$\mathcal{C} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int U dt = I \sin \omega t \quad (3)$$

Aproximez capacitatea joncțiunii  $p - n$  prin primii trei termeni ai dezvoltării în serie a relației (2)

$$\mathcal{C} = k(\varphi + U_0)^{-n} \left[ 1 - n \left( \frac{U}{\varphi + U_0} \right) + \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{U}{\varphi + U_0} \right)^2 \right]$$

Notez

$C_0 = k(\varphi + U_0)^{-n}$  — capacitatea joncțiunii  $p - n$  corespunzătoare tensiunii de polarizare  $U_0$

$$y = \frac{U}{\varphi + U_0}; \quad f(y) = 1 - ny + \frac{n(n+1)}{2} y^2; \quad \tau = \omega t$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}; \quad Q_0 = \frac{R}{L\omega_0}; \quad \rho = \frac{\omega_0}{\omega}; \quad \alpha = \frac{L\omega_0 I}{\varphi + U_0}$$

și ținînd seama că

$$\frac{dy}{dt} = \omega \frac{dy}{d\tau}; \quad \int y dt = \frac{1}{\omega} \int y d\tau$$

ecuația (3) se scrie sub forma

$$f(y) \frac{dy}{d\tau} + \frac{\rho}{Q_0} y + \rho^2 \int y d\tau = \rho \alpha \sin \tau \quad (4)$$

Pentru ecuația integro-diferențială (4) voi căuta o soluție de forma

$$y = a \sin \tau + b \cos \tau$$

deoarece experiența arată că pentru explicarea fenomenelor, în primă aproximație, armonicile superioare pot fi neglijate. Prin înlocuire se găsește

$$f(y) = 1 + \frac{n(n+1)}{4} (a^2 + b^2) - na \sin \tau - nb \cos \tau +$$

$$+ \frac{n(n+1)}{4} ab \sin 2\tau - \frac{n(n+1)}{4} (a^2 + b^2) \cos 2\tau$$

$$\frac{dy}{d\tau} = a \cos \tau - b \sin \tau$$

$$f(y) \frac{dy}{d\tau} = -b \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] \sin \tau + a \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] \cos \tau - \\ - \frac{1}{2} n (a^2 - b^2) \sin 2\tau - nab \cos 2\tau + \frac{n(n+1)}{8} b(3a^2 - b^2) \sin 3\tau + \\ + \frac{n(n+1)}{8} a(3b^2 - a^2) \cos 3\tau$$

$$p \frac{y}{Q_0} = \frac{pa}{Q_0} \sin \tau + \frac{pb}{Q_0} \cos \tau; \quad p^2 \int y d\tau = -p^2 a \cos \tau + p^2 b \sin \tau$$

Introducînd expresiile de mai sus în (4) și identificînd termenii corespunzătorii lui  $\sin \tau$  și  $\cos \tau$  se găsește

$$-b \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] + \frac{p}{Q_0} a + p^2 b = p\alpha \quad (5)$$

$$a \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] + \frac{p}{Q_0} b - p^2 a = 0 \quad (6)$$

Determinarea amplitudinii normale a tensiunii  $y = \sqrt{a^2 + b^2}$  este mai dificilă în cazul circuitelor cu pierderi, de aceea voi considera mai întîi circuitul fără pierderi adică  $Q_0 = \infty$ . Apoi pe baza concluziilor deduse în acest caz și a datelor experimentale voi arăta comportarea circuitelor cu pierderi. Dacă  $Q_0 = \infty$  atunci

$$-b \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] + p^2 b = p\alpha \quad (5')$$

$$a \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8}(a^2 + b^2) \right] - p^2 a = 0 \quad (6')$$

Din (6') rezultă  $a = 0$  adică tensiunea este defazată cu  $\pi/2$  față de curentul aplicat circuitului. În acest caz (5') devine

$$-b \left[ 1 + \frac{n(n+1)}{8} b^2 \right] + p^2 b = p\alpha$$

sau

$$\frac{n(n+1)}{8} b^3 - (p^2 - 1)b + p\alpha = 0 \quad (7)$$

Este comodă și sugestivă rezolvarea grafică a ecuației (7) (fig. 2). Soluțiile sînt date de punctele de intersecție ale curbelor

$$z_1 = \frac{n(n+1)}{8} b^3$$

și

$$z_2 = (p^2 - 1)b - p\alpha$$

După cum se vede în fig. 2. pentru  $p > 1$  se obțin trei soluții reale iar dacă  $p < 1$  se obține o singură soluție reală. Dacă soluțiilor  $b > 0$  le corespunde faza zero atunci soluțiilor  $b < 0$  le corespunde faza  $\pi$ . Reprezentând grafic modulul soluțiilor reale ale ecuației (7) în funcție de parametrul  $1/p$  se obține curba din fig. 3 (desenată prin linie continuă).

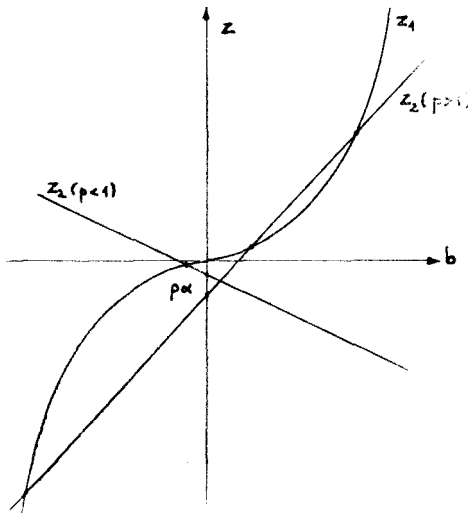


Fig. 2.

Spre deosebire de circuitele fără pierderi, în circuitele cu pierderi amplitudinea tensiunii la bornele capacității nu poate crește la infinit ci are o valoare finită a cărei maxim este cu atât mai mare cu cât  $Q_0$  este mai mare (curbele din fig. 3 desenate prin linie întreruptă). Deasemenea pentru  $Q_0 \neq \infty$  se poate aștepta un defazaj între curentul aplicat și tensiunea la bornele circuitului diferit de  $\pi/2$ .

Din fig. 2. rezultă că, cu cât  $\alpha$  este mai mare cu atât efectul va fi mai pronunțat. Pentru același  $\alpha$  curbele de rezonanță vor fi identice. În cazul circuitului cu pierderi, maximul tensiunii și frecvența la care apare acest maxim depind de tensiunea de polarizare a capacității neliniare, curentul de excitație, pierderile circuitului și neliniaritatea capacității. Desigur, experimental nu poate fi obținută porțiunea BD (fig. 3). Mărind pulsația semnalului de excitație  $\omega$  se ajunge în B de unde are loc saltul în C, apoi micșorând pulsația  $\omega$  se ajunge în D de unde are loc saltul în A.

Rezultate asemănătoare se obțin și în cazul circuitului oscilant serie. Pe baza notațiilor din fig. 4. se poate scrie

$$L \frac{di}{dt} + Ri + U = e(t)$$

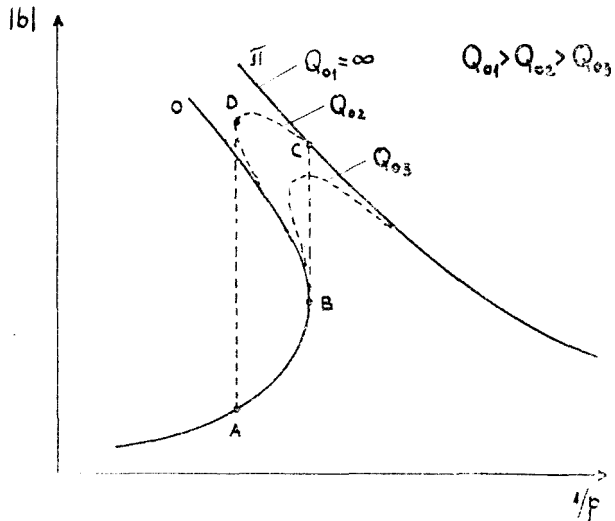


Fig. 3.

$$L \frac{d}{dt} \left( Q \frac{dV}{dt} \right) + l Q \frac{dV}{dt} + \dots = E \cos \omega t$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ f(y) \frac{dy}{d\tau} \right] + \frac{p}{Q_0} f(y) \frac{dy}{d\tau} + p^2 y = p x' \cos \tau$$

unde

$$x' = \frac{E}{\varphi \cdot U_0}$$

Prin integrare se obține

$$f(y) \frac{dy}{d\tau} + \frac{p}{Q_0} \int f(y) dy + p^2 \int y d\tau = p x' \sin \tau \quad (8)$$

Din (4) și (8) rezultă că pentru valori mari ale parametrului  $Q_0$  soluțiile celor două ecuații vor fi similare

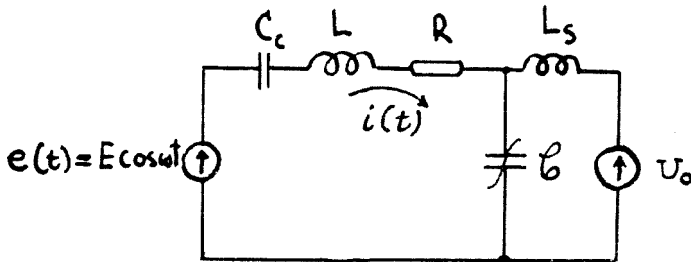


Fig. 4.

În fig. 5 se arată curbele ridicate experimental cu ajutorul montajului din fig. 4, în care s-a folosit ca generator de tensiune electromotoare constantă, generatorul de semnal al unui  $Q$ -metru iar drept capacitate neliniară — capacitatea colector — bază a unui tranzistor.

Se observă că rezultatele experimentale verifică concluziile teoretice obținute mai sus.

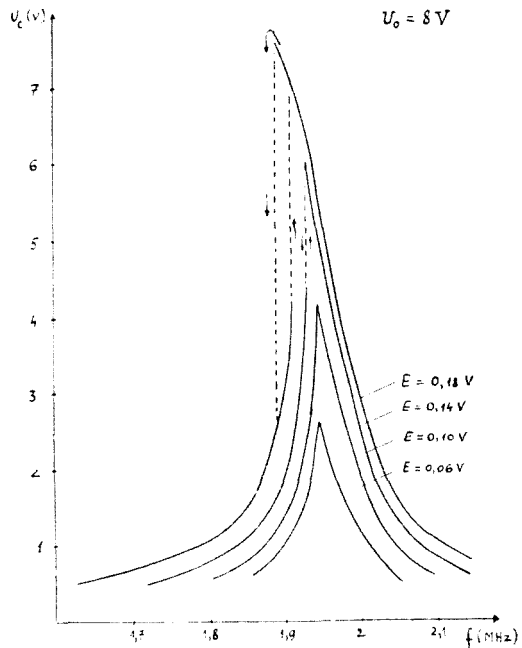


Fig. 5.

## BIBLIOGRAFIE

1. E. Nicolau, *Asupra măsurării feritelor pentru miezuri de înaltă frecvență*. „Electrotehnică”, 1956, nr. 6, p.p. 272–276.
2. A. A. Harkevići, *Nelineinîe i parametriceskîe iavlenia v radiotehnike*. Moskva, 1956, p.p. 134–138.

ПОВЕДЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕЛИНЕЙНУЮ  
ЁМКОСТЬ ПЕРЕХОДА ТИПА  $p-n$  В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
(Резюме)

В статье подробно изучается поведение колебательной цепи, содержащей нелинейную ёмкость перехода типа  $p-n$  в режиме вынужденных колебаний. Для проверки теоретических выводов даны экспериментальные результаты.

COMPORTEMENT DU CIRCUIT OSCILLANT CONTENANT LA CAPACITÉ  
NON-LINÉAIRE D'UNE JONCTION  $p-n$  EN RÉGIME D'OSCILLATIONS FORCÉES  
(Résumé)

L'auteur de l'article étudie en détail le comportement du circuit oscillant contenant la capacité non-linéaire d'une jonction  $p-n$  en régime d'oscillations forcées. Les résultats expérimentaux sont exposés pour permettre la vérification des conclusions théoriques.

ASUPRA CRITERIULUI DE INSTABILITATE  
MAGNETOGRAVITAȚIONALĂ A UNUI MEDIU FLUID  
VÎSCOS CU CONDUCTIVITATE ELECTRICĂ FINITĂ,  
ÎN MIȘCARE DE rotație UNIFORMĂ

de  
MIRCEA VASIU

*Lucrare comunicată la Colocviul de mecanica fluidelor ținut la Brașov  
în zilele de 23. X. 1961—28. X. 1961*

INTRODUCERE. Problema stabilirii criteriului de instabilitate magnetogravitatională a unui mediu fluid, infinit și omogen, a fost analizată de mai mulți autori, dintre care menționăm pe: Chandrasekhar și Fermi [1], Chandrasekhar [2], [3], Severnii [4], și Pacholczyk și Stodólkiewicz [5], [6].

În cazul unui fluid, neionizat, infinit și omogen, în absența unui câmp magnetic și a mișcării de rotație, problema instabilității magnetogravitationale trece în problema instabilității gravitaționale, problemă care a fost studiată pentru prima oară de către Jeans [7].

În lucrarea de față ne vom ocupa de problema stabilirii criteriului de instabilitate magnetogravitatională a unui mediu fluid vîscos compresibil, total ionizat, infinit și omogen, cu conductivitate electrică finită, mediul respectiv fiind animat de o mișcare de rotație uniformă. Pentru simplificarea problemei vom neglija atât curentul de deplasare electrică din interiorul fluidului, cât și procesele de conductibilitate termică și de transfer de radiație din interiorul mediului respectiv.

În stabilirea criteriului de instabilitate magnetogravitatională a unui astfel de mediu, vom pleca de la ecuațiile stabilite în lucrarea noastră [8]:

$$\omega^2 - i(\Omega_R^2 + \Omega_L^2)\omega - (\Omega_A^2 + \Omega_R^2 \Omega_L^2) = 0 \quad (1)$$

---

*Notă:* În intervalul de timp în care lucrarea noastră a fost dată spre publicare am constatat că a apărut, ulterior comunicării făcute de noi, o lucrare elaborată de K. Kossacki (publicată în revista Acta Astr., 1961, t. 11), care tratează o problemă similară.

și

$$\begin{aligned} & \zeta^4 + \zeta^3 \left( \Omega_R^2 + \frac{7}{3} \omega_L^2 \right) + \zeta^2 \left[ \Omega_A^2 + \Omega_J^2 + \Omega_B^2 + \right. \\ & \left. + 4\Omega^2 + \Omega_L^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_L^2 + \frac{7}{3} \Omega_R^2 \right) \right] + \zeta \left[ \Omega_R^2 (\Omega_J^2 + \right. \\ & \left. + 4\Omega^2) + \Omega_L^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_L^2 \Omega_R^2 + \frac{4}{3} \Omega_A^2 + \Omega_J^2 + \Omega_B^2 \right) \right] + \\ & \left. + \Omega_J^2 (\Omega_A^2 + \Omega_R^2 \Omega_L^2) = 0 \right. \end{aligned} \quad (2)$$

unde

$$\zeta = i\omega; \quad i = \sqrt{-1} \quad (3)$$

Dacă introducem notațiile :

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha^2 &= \Omega_R^2 + \Omega_L^2 \\ \Omega_\beta^2 &= \Omega_R^2 - \Omega_L^2 \\ \Omega_\gamma^2 &= \Omega_R^2 \Omega_L^2 \\ \Omega_A'^2 &= \Omega_A^2 + \Omega_R^2 \Omega_L^2 \end{aligned} \quad (4)$$

ecuațiile (1) și (2) devin :

$$\omega^2 - i\Omega_\alpha^2 \omega - \Omega_A'^2 = 0 \quad (5)$$

și

$$\begin{aligned} & \zeta^4 + \zeta^3 \left( \frac{7}{3} \Omega_x^2 - \frac{4}{3} \Omega_R^2 \right) + \zeta^2 \left[ \Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \right. \\ & \left. + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \Omega_L^2 \left( \frac{7}{3} \Omega_x^2 - \Omega_L^2 \right) \right] + \zeta \left[ \Omega_R^2 (\Omega_J^2 + \right. \\ & \left. + 4\Omega^2) + \Omega_L^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_A'^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 \right) \right] + \Omega_J^2 \Omega_A'^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

CRITERIUL DE INSTABILITATE MAGNETOGRAVITAȚIONALĂ. a) În cele ce urmează ne vom ocupa de ecuația (5). Rădăcinile acestei ecuații sînt de forma :

$$\omega_{1,2} = \frac{i\Omega_\alpha^2 \pm \sqrt{4\Omega_A'^2 - (\Omega_\alpha^2)^2}}{2} \quad (7)$$

Să analizăm cîteva cazuri particulare.

<sup>10</sup> *Fluidul în prezența unui cîmp magnetic puțin intens, paralel cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz vom avea satisfăcută inegalitatea :

$$4\Omega_A'^2 < \Omega_\alpha^2 \quad (8)$$

sau

$$4\Omega_A'^2 < \Omega_B^2 \quad (9)$$



Rădăcinile (7) ale ecuației (5) pot fi scrise sub forma :

$$\omega_{1,2} = \frac{i}{2} (\Omega_x^2 \pm \theta) \quad (10)$$

unde

$$\theta = \sqrt{(\Omega_x^2)^2 - 4\Omega_A'^2} \quad (11)$$

Perturbațiile sînt exprimate prin unde plane monocromatice, de tipul :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 e^{i(\omega t + kz)} \quad (12)$$

și

$$\chi = \chi_0 e^{i(\omega t + kz)} \quad (13)$$

unde  $\vec{\varphi}$  și  $\vec{\varphi}_0$  reprezintă perturbația și respectiv amplitudinea perturbației vitezei și a cîmpului magnetic, iar  $\chi$  și  $\chi_0$  reprezintă perturbația și respectiv amplitudinea perturbației: presiunii, densității și potențialului gravitațional.

Avînd în vedere expresia (10), soluțiile (12) și (13) devin :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 e^{\left\{ -\frac{1}{2} \Omega_x^2 \pm \left[ \frac{1}{4} (\Omega_x^2)^2 - \Omega_A'^2 \right]^{1/2} \right\} t + ikz} \quad (14)$$

și

$$\chi = \chi_0 e^{\left\{ -\frac{1}{2} \Omega_x^2 \pm \left[ \frac{1}{4} (\Omega_x^2)^2 - \Omega_A'^2 \right]^{1/2} \right\} t + ikz} \quad (15)$$

*20 Fluidul în prezența unui cîmp magnetic intens paralel cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz vom avea satisfăcută inegalitatea :

$$4\Omega_A'^2 > \Omega_x^2 \quad (16)$$

sau

$$4\Omega_A^2 > \Omega_g^2 \quad (17)$$

astfel că rădăcinile ecuației (5) sînt de forma :

$$\omega_{1,2} = \frac{i}{2} \Omega_x^2 \pm \frac{1}{2} \theta' \quad (18)$$

unde

$$\theta' = \sqrt{4\Omega_A'^2 - (\Omega_x^2)^2} \quad (18')$$

În acest caz, după înlocuirea expresiei (18) în (12) și (13), perturbațiile se pot scrie sub forma :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 e^{\left\{ -\frac{1}{2} \Omega_x^2 \pm i \left[ \Omega_A'^2 - \left( \frac{1}{2} \Omega_x^2 \right)^2 \right]^{1/2} \right\} t + ikz} \quad (19)$$

și

$$\chi = \chi_0 e^{\left\{ -\frac{1}{2} \alpha_a^2 \pm i \left[ \alpha_A'^2 - \left( \frac{1}{2} \alpha_a^2 \right)^2 \right]^{1/2} \right\} t + ikz} \quad (20)$$

3<sup>o</sup> Fluidul nevîscos, cu conductivitate electrică înfinită, în prezența unui câmp magnetic paralel cu direcția de propagare a micilor perturbații.

În acest caz vom avea îndeplinite condițiile :

$$\begin{aligned} \Omega_L^2 &= 0 \\ \Omega_R^2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

astfel că ecuația (5) devine :

$$\omega^2 = \Omega_A^2 \quad (22)$$

și

$$\omega_{1,2} = \pm \Omega_A = \pm \frac{kHoz}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (23)$$

de unde obținem :

$$V_A = \pm \frac{Hoz}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (24)$$

care reprezintă viteza de propagare a două unde Alfvén ce se propagă de-a lungul axei Oz în sensuri opuse.

Avînd în vedere criteriul de instabilitate gravitațională al unui mediu fluid, omogen și infinit, stabilit de J e a n s [7] cît și criteriul de instabilitate în cazul unei plasmă [9] se poate vedea că ecuația (5) nu poate exprima criteriul de instabilitate magnetogravitatională a unui mediu fluid conductor.

b) Pentru stabilirea criteriului de instabilitate magnetogravitatională a unui fluid vîscos, cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație uniformă, vom utiliza ecuația de dispersie (6).

În cele ce urmează vom studia cîteva cazuri particulare.

4<sup>o</sup> Fluidul vîscos, cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație uniformă, în prezența componentei cîmpului magnetic paralelă cu direcția de propagare a micilor perturbații.

În acest caz avem îndeplinite următoarele condiții :

$$\begin{aligned} \Omega_L^2 &\neq 0; \quad \Omega_R^2 \neq 0; \quad \Omega \neq 0 \\ \Omega_A^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

respectiv

$$\Omega_A^2 \neq 0 \quad (26)$$

Ecuația (6) admite următoarele rădăcini :

a) patru rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$

b) două rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2$

și

două rădăcini complexe :  $\zeta_3^*, \zeta_4^*$

c) patru rădăcini complexe :  $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*, \zeta_4^*$

Vom utiliza una din relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației (6) și anume :

$$\prod_{k=1}^4 \zeta_k = D \quad (27)$$

unde  $D$  este termenul liber al ecuației (6).

Ținând seama de rădăcinile ecuației (6) și de relația (27), obținem :

$$a) \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_4 = \Omega_J^2 \Omega_A'^2$$

$$b) \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot |\zeta_3|^2 = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot |\zeta_4|^2 = \Omega_J^2 \Omega_A'^2 \quad (28)$$

$$c) |\zeta_1|^2 |\zeta_3|^2 = |\zeta_2|^2 \cdot |\zeta_4|^2 = \Omega_J^2 \Omega_A'^2$$

În caz că presupunem

$$\Omega_A'^2 > 0 \quad (29)$$

și

$$\Omega_J^2 < 0 \quad (30)$$

adică

$$\Omega_J = i\Omega_J' \quad (30')$$

unde

$$\Omega_J' = \sqrt{4\pi G\rho_0 - V_i^2 k^2} \quad (31)$$

cel puțin una din rădăcinile  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) trebuie să fie pozitivă și mediul respectiv devine nestabil.

Din inegalitatea (30), rezultă :

$$V_i^2 k^2 < 4\pi G\rho_0 \quad (32)$$

respectiv

$$\sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G\rho_0}} < \lambda \quad (33)$$

deoarece  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , unde  $\lambda$  reprezintă lungimea de undă a perturbațiilor.

În formula (33),  $V_i$  reprezintă viteza de propagare a sunetului în cazul proceselor izoterme,  $G$  — constantă gravitațională, iar  $\rho_0$  — densitatea fluidului. Formula (33) coincide cu formula lui Jeans pentru cazul insta-

bilității gravitaționale, cu deosebirea că în locul mărimii  $V_i$  apare viteza sunetului în cazul proceselor adiabatice.

Să introducem lungimea de undă critică  $\lambda_c$ , de forma :

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G \rho_0}} \quad (34)$$

astfel că inegalitatea (33) devine :

$$\lambda_c < \lambda \quad (35)$$

rezultat care exprimă tocmai condiția de instabilitate magnetogravitatională a fluidului în cazul particular studiat.

Rezultă că, criteriul de instabilitate gravitațională al lui Jeans nu este afectat de prezența viscozității și a conductivității electrice a fluidului conductor decît în sensul înlocuirii vitezei sunetului pentru procese adiabatice cu viteza sunetului pentru procese izoterme.

5<sup>o</sup> *Fluidul viscos cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație uniformă, în absența componentei cîmpului magnetic paralelă cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz avem îndeplinite următoarele condiții :

$$\Omega_L^2 \neq 0; \Omega_R^2 \neq 0; \Omega^2 \neq 0 \quad (36)$$

și

$$\Omega_A^2 = 0 \quad (37)$$

Ecuția (6) devine :

$$\begin{aligned} & \zeta^4 + \zeta^3 \left( \frac{7}{3} \Omega_a^2 - \frac{4}{3} \Omega_R^2 \right) + \zeta^2 \left[ \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + \right. \\ & + 4\Omega^2 + \left. \Omega_L^2 \left( \frac{7}{3} \Omega_a^2 - \Omega_L^2 \right) \right] + \zeta \left[ \Omega_R^2 (\Omega_J^2 + 4\Omega^2) + \right. \\ & \left. + \Omega_L^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_V^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 \right) \right] + \Omega_J^2 \Omega_V^2 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Ecuția (38) admite următoarele rădăcini :

a) patru rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$

b) două rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2$

și

două rădăcini complexe :  $\zeta_3^*, \zeta_4^*$

c) patru rădăcini complexe :  $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*, \zeta_4^*$

Vom utiliza una din relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației (38) și anume :

$$\prod_{k=1}^4 \zeta_k = D' \quad (39)$$

unde  $D'$  este termenul liber al ecuației (38).

Ținând seama de rădăcinile ecuației (38) și de relația (39), obținem :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_4 = \Omega_J^2 \Omega_V^2 \\ \text{b) } & \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot |\zeta_3|^2 = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot |\zeta_4|^2 = \Omega_J^2 \Omega_V^2 \\ \text{c) } & |\zeta_1|^2 \cdot |\zeta_3|^2 = |\zeta_2|^2 \cdot |\zeta_4|^2 = \Omega_J^2 \Omega_V^2 \end{aligned} \quad (40)$$

În caz că presupunem

$$\Omega_V^2 > 0 \quad (41)$$

și

$$\Omega_J^2 < 0 \quad (42)$$

mediul considerat devine instabil și regăsim același rezultat ca și cel studiat la cazul întâi.

Dacă vom utiliza una din relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației (38) și anume

$$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_1 \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = -C \quad (43)$$

unde

$$C = \Omega_R^2 (\Omega_J^2 + 4\Omega^2) + \Omega_L^2 \left( \Omega_J^2 + \Omega_B^2 + \frac{4}{3} \Omega_V^2 \right) \quad (44)$$

și considerăm

$$\Omega_K^2 > 0; \quad \Omega_L^2 > 0 \quad (45)$$

și

$$\Omega_J^2 + 4\Omega^2 < 0; \quad \Omega_J^2 + \Omega_B^2 + \frac{4}{3} \Omega_V^2 < 0 \quad (46)$$

mediul considerat devine instabil. În acest caz criteriul lui Jeans asupra instabilității gravitaționale este afectat pe de-o parte de prezența vitezei unghiulare  $\Omega$ , iar pe de altă parte de prezența viscozității  $\Omega_L$  și a conductivității electrice  $\Omega_R$  a fluidului. Din inegalitățile (46) vom obține :

$$V_i^2 k^2 < 4\pi G \rho_0 - 4\Omega^2 \quad (47)$$

și

$$V_i^2 k^2 < 4\pi G \rho_0 - \Omega_B^2 - \frac{4}{3} \Omega_V^2 \quad (48)$$

Deoarece numărul de unde  $k$  este dat de expresia :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (49)$$

iar

$$\Omega_B = \frac{kH_0 y}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (50)$$

inegalitățile (47) și (48) se pot scrie și sub forma puțin modificată :

$$\sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G\rho_0 - \frac{\Omega^2}{\pi}}} < \lambda \quad (51)$$

și

$$\sqrt{\frac{(V_i^2 + V_A^2) \pi}{G\rho_0 - \frac{1}{3\pi} \Omega_\gamma^2}} < \lambda \quad (52)$$

unde  $V_A^2$  reprezintă viteza undelor Alfvén :

$$V_A^2 = \frac{H^2 \sigma_V}{4\pi\rho_0} \quad (53)$$

Vom introduce lungimile de undă critică de forma :

$$\lambda_c^* = \sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G\rho_0 - \frac{\Omega^2}{\pi}}} \quad (54)$$

și

$$\lambda_c^{**} = \sqrt{\frac{(V_i^2 + V_A^2) \pi}{G\rho_0 - \frac{1}{3\pi} \Omega_\gamma^2}} \quad (55)$$

astfel că inegalitățile (51) și (52) devin

$$\lambda_c^* < \lambda \quad (56)$$

și

$$\lambda_c^{**} < \lambda \quad (57)$$

care exprimă criteriile de instabilitate magnetogravitațională a fluidului considerat.

*Observație.* Formula (54) coincide cu formula stabilită de Chandrasekhar [3] pentru cazul unui mediu fluid infinit și omogen, a cărui viteză unghiulară este perpendiculară pe direcția de propagare a perturbațiilor. În formula (54) apare viteza sunetului  $V_i$  pentru cazul proceselor izoterme.

Formula (55) generalizează formula obținută de Severnii [4] în cazul unui fluid, infinit și omogen, în absența componentei câmpului magnetic paralelă cu direcția de propagare a micilor perturbații. În cazul  $\Omega_\gamma = 0$ , formula (55) coincide cu formula stabilită de Severnii.

6<sup>o</sup> *Fluidul neviscos, cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație uniformă, în prezența componentei câmpului magnetic paralelă cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz avem îndeplinite următoarele condiții :

$$\nu = 0, \quad \Omega_L^2 = 0 \quad (58)$$

$$\Omega_R^2 \neq 0$$

și

$$\Omega_A^2 \neq 0 \quad (59)$$

Avînd în vedere aceste condiții, ecuațiile de dispersie (5) și (6) devin :

$$\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \Omega_A^2 = 0 \quad (60)$$

și

$$\begin{aligned} \zeta^4 + \zeta^3\Omega_R^2 + \zeta^2(\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2) + \\ + \zeta(\Omega_R^2\Omega_J^2 + 4\Omega^2\Omega_R^2) + \Omega_J^2\Omega_A^2 = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Ecuațiile de dispersie (60) și (61) coincid cu ecuațiile de dispersie obținute de Pacholczyk și Stodólkiewicz, iar criteriul de instabilitate magnetogravitațională se reduce, pentru acest caz, la cel stabilit de către acești autori.

7<sup>o</sup> *Fluidul neviscos, cu conductivitate electrică finită, în mișcare de rotație în absența componentei câmpului magnetic paralelă cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz avem îndeplinite următoarele condiții :

$$\nu = 0; \quad \Omega_L^2 = 0 \quad (62)$$

$$\Omega_R^2 \neq 0$$

și

$$\Omega_A^2 = 0 \quad (63)$$

Avînd în vedere aceste relații, ecuațiile de dispersie (5) și (6) devin :

$$\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 = 0 \quad (64)$$

și

$$\zeta^4 + \zeta^3\Omega_R^2 + \zeta^2(\Omega_B^2 + \Omega_I^2 + 4\Omega^2) + \zeta(\Omega_R^2\Omega_I^2 + 4\Omega^2\Omega_R^2) = 0 \quad (65)$$

Atît ecuațiile de dispersie (64) și (65) cît și criteriul de instabilitate magnetogravitațională se reduc la cele stabilite de către Pacholczyk și Stodólkiewicz.

Pentru cazul 3., criteriul lui Jeans asupra instabilității gravitaționale a unui fluid omogen și infinit nu este afectat de prezența conductivității

electrice a fluidului considerat. Pentru cazul 4., existența unei conductivități finite a fluidului conductor, conduce la un criteriu de instabilitate gravitațională care să nu fie afectat de cîmpul magnetic și care să depindă de viteza unghiulară de rotație a fluidului, considerată perpendiculară pe planul de propagare a micilor perturbații.

8<sup>o</sup> *Fluidul viscos, cu conductivitate electrică înfinită în mișcare de rotație uniformă, în prezența componentei cîmpului magnetic paralelă de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz avem satisfăcute condițiile :

$$\begin{aligned} v_m &= 0, \quad \Omega_R^2 = 0 \\ \Omega_L^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (66)$$

și

$$\Omega_A^2 \neq 0 \quad (67)$$

Cu aceste condiții, ecuațiile de dispersie (5) și (6) devin :

$$\omega^2 - i\omega\Omega_L^2 - \Omega_A^2 = 0 \quad (68)$$

și

$$\begin{aligned} \zeta^4 + \frac{7}{3}\Omega_L^2\zeta^3 + \left(\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^4\right)\zeta^2 + \\ + \Omega_L^2\left(\Omega_B^2 + \Omega_J^2 + \frac{4}{3}\Omega_A^2\right)\zeta + \Omega_J^2\Omega_A^2 = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Ecuațiile de dispersie (68) și (69) coincid cu ecuațiile de disepisie obținute de Pacholczyk și Stodólkiewicz, iar criteriul de instabilitate magnetogravitatională a fluidului se reduce la cel stabilit de către acești autori

9<sup>o</sup> *Fluidul viscos, cu conductivitate electrică înfinită, în mișcare de rotație uniformă, în absența componentei cîmpului magnetic paralelă, cu direcția de propagare a micilor perturbații.*

În acest caz avem îndeplinite următoarele condiții :

$$\begin{aligned} v_m &= 0; \quad \Omega_R^2 = 0 \\ \Omega_L^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (70)$$

și

$$\Omega_A^2 = 0 \quad (71)$$

Cu aceste condiții, ecuațiile de dispersie (5) și (6), devin :

$$\omega^3 - i\omega\Omega_L^2 = 0 \quad (72)$$

și

$$\begin{aligned} \zeta^4 + \frac{7}{3}\Omega_L^2\zeta^3 + \left(\Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^4\right)\zeta^2 + \\ + \Omega_L^2(\Omega_B^2 + \Omega_J^2)\zeta = 0 \end{aligned} \quad (73)$$



Ecuțiile de dispersie (72) și (73) coincid cu ecuațiile de dispersie obținute de Pacholezyk și Stodólkiewicz pentru acest caz particular.

Pentru cazul 5., criteriul de instabilitate magnetogravitațională se reduce la cel stabilit de Jeans și vîscozitatea fluidului nu afectează acest criteriu decît în sensul că viteza sunetului pentru procese adiabactice se înlocuiește, în acest caz, cu viteza sunetului pentru procese izoterme.

Pentru cazul 6., criteriul de instabilitate magnetogravitațională a fluidului conductor considerat nu depinde de viteza unghiulară a mediului, ci doar de cîmpul magnetic.

Problema instabilității magnetogravitaționale a unui fluid conductor are însemnătate pentru unele probleme ale astrofizicii (instabilitatea protogalaxiei, formarea brațelor spirale și instabilitatea magnetogravitațională a acestora).

Țin să mulțumesc prof. Mircea Drăganu pentru prețioasele observații făcute.

#### A N E X A

#### ASUPRA CRITERIULUI DE INSTABILITATE MAGNETOGRAVITAȚIONALĂ A UNUI FLUID VÎSCOS COMPRESIBIL, CU CONDUCTIVITATE ELECTRICĂ INFINITĂ, ÎN MIȘCARE DE rotație UNIFORMĂ, ÎN PREZENȚA CURENTULUI DE DEPLASARE ELECTRICĂ.

*Introducere.* În Anexa la lucrarea noastră [8] ne-am ocupat de problema stabilirii ecuației de dispersie pentru un fluid vîscos, greu, compresibil, infinit și omogen, total ionizat, cu conductivitate electrică infinită, în mișcare de rotație uniformă, în prezența curentului de deplasare electrică, fluidul fiind supus la acțiunea unui cîmp magnetic uniform. În cele ce urmează ne vom ocupa de stabilirea criteriului de instabilitate magnetogravitațională pentru cazul aceluiăș fluid.

*Criteriul de instabilitate magnetogravitațională.* Pentru stabilirea criteriului de instabilitate magnetogravitațională vom utiliza ecuația de dispersie (22') (vezi Anexa de la lucrarea noastră [8]):

$$\begin{aligned} \zeta^4 + \Omega_L^2 \Omega_D^{-2} \left[ \Omega_C^{-2} \left( \frac{4}{3} \Omega_A^2 + \Omega_B^2 \right) + \frac{7}{3} \right] \zeta^3 + \Omega_D^{-2} \left( \Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + \right. \\ \left. + 4\Omega^2 + \frac{4}{3} \Omega_L^4 + \Omega_C^{-2} \Omega_A^2 \Omega_J^2 \right) \zeta^2 + \Omega_L^2 \Omega_D^{-2} \left( \frac{4}{3} \Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \right. \\ \left. + \Omega_J^2 \right) \zeta + \Omega_A^2 \Omega_J^2 \Omega_D^{-2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Introducînd notațiile

$$\begin{aligned} \Omega_E^2 &= \Omega_L^2 \Omega_D^{-2} \\ \Omega_F^2 &= \Omega_L^2 \Omega_D^{-2} \Omega_C^{-2} \\ \Omega_G^2 &= \Omega_J^2 \Omega_D^{-2} \end{aligned} \quad (2)$$

ecuația de dispersie (1) devine

$$\begin{aligned} \zeta^4 + \left[ \Omega_F^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_A^2 + \Omega_B^2 \right) + \frac{7}{3} \Omega_E^2 \right] \zeta^3 + \Omega_D^{-2} \left( \Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + \right. \\ \left. + 4\Omega^2 + \frac{4}{3} \Omega_L^4 + \Omega_C^{-2} \Omega_A^2 \Omega_J^2 \right) \zeta^2 + \Omega_E^2 \left( \frac{4}{3} \Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 \right) \zeta + \\ \left. + \Omega_A^2 \Omega_G^2 = 0 \right. \end{aligned} \quad (3)$$

*Cazuri particulare.* În cele ce urmează ne vom ocupa de câteva cazuri particulare.

1. Componenta cîmpului magnetic paralelă cu axa  $Oz$  este diferită de zero, adică

$$\Omega_A^2 \neq 0 \quad (4)$$

Ecuația (3) admite următoarele rădăcini :

a) patru rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$

b) două rădăcini reale :  $\zeta_1, \zeta_2$

și

două rădăcini complexe :  $\zeta_3^*, \zeta_4^*$

c) patru rădăcini complexe :  $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*, \zeta_4^*$

Utilizînd una din relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației (3) și anume

$$\prod_{k=1}^4 \zeta_k = D \quad (5)$$

unde  $D$  este termenul liber al ecuației (3), obținem :

$$\begin{aligned} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 &= \Omega_A^2 \Omega_G^2 \\ \zeta_1 \zeta_2 |\zeta_3|^2 &= \zeta_1 \zeta_2 |\zeta_4|^2 = \Omega_A^2 \Omega_G^2 \\ |\zeta_1|^2 |\zeta_3|^2 &= |\zeta_2|^2 |\zeta_4|^2 = \Omega_A^2 \Omega_G^2 \end{aligned} \quad (6)$$

În caz că presupunem

$$\Omega_A^2 > 0 \quad (7)$$

și

$$\Omega_G^2 < 0 \quad (8)$$

cel puțin una din rădăcinile  $\zeta_k$  trebuie să fie pozitive și fluidul conductor respectiv devine instabil din punct de vedere magnetogravitațional.

Înlocuind valoarea lui  $\Omega_G^2$  din (2) în inegalitatea (8), obținem :

$$\Omega_J^2 \Omega_D^{-2} < 0 \quad (9)$$

Dacă ținem seama de notațiile (17<sub>d</sub>) și (20) din Anexa lucrării [8], inegalitatea (9) se poate scrie și sub forma

$$\frac{\Omega_C^2 (V_i^2 k^2 - 4\pi G \rho_0)}{\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_C^2} < 0 \quad (10)$$

Să introducem notația

$$\Omega_8^2 = \frac{\Omega_C^2}{\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_C^2} \quad (11)$$

astfel că inegalitatea (10) devine

$$\Omega_8^2 (V_i^2 k^2 - 4\pi G \rho_0) < 0 \quad (12)$$

Deoarece

$$\Omega_8^2 > 0 \quad (13)$$

și

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \quad (14)$$

obținem

$$\sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G \rho_0}} < \lambda \quad (15)$$

Introducînd lungimea de undă critică

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{V_i^2 \pi}{G \rho_0}} \quad (16)$$

rezultă

$$\lambda_c < \lambda \quad (17)$$

rezultat care exprimă condiția de instabilitate magnetogravitațională a fluidului considerat.

Rezultă că criteriul de instabilitate magnetogravitațională nu este afectat de prezența curentului de deplasare electrică și coincide cu cel analizat de Pacholczyk și Stodólkiewicz [6].

2. Componenta cîmpului magnetic paralelă cu axa  $Oz$  este egală cu zero, adică

$$\Omega_A^2 = 0 \quad (18)$$

În acest caz ecuația de dispersie (3) se reduce la o ecuație algebrică de gradul trei, de forma :

$$\begin{aligned} P(\zeta) = & \zeta^3 + \left[ \Omega_F^2 \Omega_B^2 + \frac{7}{3} \Omega_L^2 \Omega_C^2 (\Omega_B^2 + \Omega_C^2)^{-1} \right] \zeta^2 + \\ & + \Omega_C^2 (\Omega_B^2 + \Omega_C^2)^{-1} \cdot \left( \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3} \Omega_L^2 \right) \zeta + \\ & + \Omega_L^2 \Omega_C^2 (\Omega_B^2 + \Omega_C^2)^{-1} \cdot (\Omega_B^2 + \Omega_J^2) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

unde  $P(\zeta)$  reprezintă polinomul respectiv.

Dacă

$$\left. \begin{aligned} \Omega_L^2 \Omega_c^2 (\Omega_B^2 + \Omega_c^2)^{-1} > 0 \\ \Omega_B^2 + \Omega_c^2 < 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{a.} \\ \text{b.} \end{array} \quad (20)$$

astfel că

$$P(0) < 1 \quad (21)$$

și

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} P(\zeta) \rightarrow +\infty \quad (22)$$

ecuația admite cel puțin o rădăcină reală pozitivă și mediul respectiv devine instabil din punct de vedere magnetogravitational.

Din inegalitatea (20<sub>b</sub>), ținând seama de notațiile (17<sub>a</sub>) și (17<sub>d</sub>) din Anexa lucrării [8], rezultă

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{H_{0y}^2}{4\pi\rho_0} + V_i^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G \rho_0 \quad (23)$$

Să introducem viteza Alfvén

$$V_A^2 = \frac{H_{0y}^2}{4\pi\rho_0} \quad (23)$$

și lungimea de undă critică

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi(V_i^2 - V_A^2)}{G\rho_0}} \quad (25)$$

Cu aceste notații inegalitatea (23) devine

$$\lambda_c < \lambda \quad (26)$$

care reprezintă criteriul de instabilitate magnetogravitatională a fluidului conductor considerat.

Rezultă că acest criteriu, în cazul particular analizat, coincide cu cel studiat de Pacholczyk și Stodólkiewicz [6].

*Concluzii.* Din cazurile particulare studiate mai sus rezultă că prezența curenților de deplasare electrică nu afectează criteriul de instabilitate magnetogravitatională a unui fluid compresibil și viscos, total ionizat, cu conductivitate electrică infinită, în mișcare de rotație uniformă, fluidul fiind supus la acțiunea unui câmp magnetic uniform și la acțiunea propriului său câmp gravitațional.

## BIBLIOGRAFIE

1. S. Chandrasekhar și E. Fermi, Ap. J. 1953, **118**, p. 116.
2. S. Chandrasekhar, Ap. J., 1954, **119**, p. 7.
3. S. Chandrasekhar, *Vistas in Astronomy*, Ed. Pergamon Press, 1955.
4. A. Severnii, Izv. K.A.O. 1954, **11**, p. 129.
5. A. Pacholczyk și J. Stodółkiewicz, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. math.-astr. phys., 1959, **VII**, 11, p. 681.
6. A. Pacholczyk și J. Stodółkiewicz, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci.math., astr. et phys. 1959, **VII**, 7, p. 429.
7. J. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge Univ. Press, 1928, p. 337.
8. M. Vasîu, *Studia Univ. Babeș-Bolyai, Cluj, Ser. Math. Phys.* 2/1963.
9. I. Dungey, *Cosmic Electrodynamics*, Oxford, 1958, p. 78.

О ПРИЗНАКЕ МАГНИТНОГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОЙ СРЕДЫ С КОНЕЧНОЙ УДЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В РАВНОМЕРНОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

(Резюме)

В данной работе, автор изучает случай магнитногравитационной неустойчивости сжимаемой вязкой жидкости, бесконечной и однородной, полностью ионизированной, с конечной удельной проводимостью. Предполагается, что жидкость находится в равномерном вращательном движении. Для упрощения задачи пренебрегается процессами теплопроводности и переноса излучения, а также током смещения внутри жидкости.

Полученные результаты обобщают результаты, полученные А. Пахолчком и И. Стодолькиевичем, которые изучали магнитногравитационную неустойчивость невязкой жидкости с конечной удельной проводимостью и магнитногравитационную неустойчивость вязкой жидкости с бесконечной удельной проводимостью, соответственно.

В „Приложении” автор занимается установлением признака магнитногравитационной неустойчивости сжимаемой вязкой проводящей жидкости, полностью ионизированной, с бесконечной удельной проводимостью, в присутствии тока смещения. Снова предполагается, что жидкость имеет равномерное вращательное движение. Соответствующая среда считается бесконечной и однородной и подвергается действию равномерного магнитного поля, а также действию своего собственного гравитационного поля. Автор показывает, что присутствие тока смещения не затрагивает признака магнитногравитационной неустойчивости, полученного для такой жидкости, в случае отсутствия тока.

SUR LE CRITÈRE D'INSTABILITÉ MAGNÉTOGRAVITATIONNELLE D'UN MILIEU FLUIDE VISQUEUX, A CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE FINIE ET EN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME

(Résumé)

L'auteur étudie le cas d'instabilité magnétogravitationnelle d'un fluide visqueux, compressible, totalement ionisé, infini et homogène, à conductivité électrique finie, ce fluide étant animé d'un mouvement de rotation uniforme. Pour simplifier le problème on néglige les processus de conductibilité thermique et de transfert de radiation, ainsi que le courant de déplacement électrique à l'intérieur du fluide.

Les résultats obtenus généralisent ceux de A. Pacholczyk et J. Stodólkiewicz, qui ont étudié l'instabilité magnéto-gravitationnelle d'un fluide non visqueux à conductivité électrique finie et, d'autre part, l'instabilité magnéto-gravitationnelle d'un fluide visqueux à conductivité électrique infinie.

Dans l'Annexe l'auteur s'occupe de la détermination du critère d'instabilité magnéto-gravitationnelle d'un fluide conducteur visqueux, compressible, totalement ionisé, à conductivité électrique infinie en présence du courant de déplacement électrique, le fluide étant animé d'un mouvement de rotation uniforme. Le milieu respectif est considéré comme infini et homogène, soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme et à celle de son propre champ gravitationnel. L'auteur montre que la présence du courant de déplacement électrique n'affecte pas le critère d'instabilité magnéto-gravitationnelle obtenu pour un tel fluide, dans le cas d'absence de ce courant.

# CÎTEVA ASPECTE ALE REZONANȚEI DPPH, $\text{Cu}^{2+}$ , $\text{Mn}^{2+}$ ÎN CÎMPURI SLABE

de

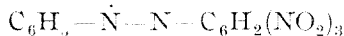
F. KOCH

I. **Introducere.** Relația  $\omega_0 = \gamma H_0$  care leagă pulsația cîmpului electromagnetic  $\omega_0$  de cîmpul magnetic  $H_0$  este valabilă și în cîmpuri slabe, avem rezonanța în cîmpuri slabe.

Rezonanța paramagnetică electronică în cîmpuri slabe a fost studiată de mai mulți autori: de A. K. Cirkov și A. A. Kokin [1] în intervalul 2—220 Oe, de Garstens și colaboratori [2] [3], de Beeler în intervalul 5—0,27 Oe [4]. Desigur la început studiul în cîmpuri slabe a avut mai mult o curiozitate academică, astăzi însă se poate considera că este o completare importantă în studiul la cîmpuri magnetice mai puternice. Studiul în cîmpuri slabe are o serie de avantaje tehnice și fizice dintre care notăm în primul rînd construcția simplă a bobinelor pentru realizarea cîmpului magnetic. Dezavantajul experiențelor în cîmpuri slabe constă în faptul că mărimea semnalelor este proporțională cu  $H_0^2$  și în consecință în cîmpuri slabe avem semnale mici, amplificarea semnalelor trebuie să fie mai mare.

Semnalele de rezonanță în cîmpuri slabe au fost studiate teoretic de Garstens [2]; prin modificarea ecuațiilor lui Bloch a găsit teoretic și experimental că în cîmpuri slabe micșorînd frecvența cîmpului radioelectric aplicat, semnalul trece de la curba Lorentz la o curba intermediară între curbele Lorentz și cea de relaxare Debye.

Nu toate substanțele paramagnetice sînt adecvate pentru studiul rezonanței în cîmpuri slabe. Lărgimea liniilor trebuie să fie suficient de mică (1—40 Oe) și numărul de electroni necompensați în probă suficient de mare (aprox.  $10^{18}$  electroni/cm<sup>3</sup>). Cel mai frecvent este studiat radicalul liber din difenilpicrilhidrazil (DPPH) cu formula



Este de notat faptul că în cîmpuri slabe frecvența de rezonanță se schimbă puțin ( $\gamma$  nu este constant), se schimbă și lățimea liniei [5].

S-a studiat foarte mult și rezonanța electronică la soluții de electroliți [6]. Teoretic și experimental s-a stabilit că lățimea liniei  $\Delta H$  a rezo-

nanței electronice în soluțiile sărurilor se compune din: 1. interacțiunea dipol magnetică între ioni  $\Delta H_{\text{magn}}$  2. interacțiunea electrică a ionilor cu mediul  $\Delta H_{\text{el}}$  3. interacțiunea hiperfină a electronilor cu nucleul  $\Delta H_{\text{h}}$  4. îngustarea liniei cauzată de interacțiunea de schimb  $\Delta H_{\text{sch}}$  între ionii paramagnetici. În câmpuri slabe în soluțiile sărurilor de mangan se observă un singur vîrf cu factorul giromagnetic  $g = 1,00$ .

Într-o lucrare anterioară [7] s-a stabilit cu ajutorul modelelor proprietățile aparatelor de detecție, în continuare în lucrarea de față cu ajutorul aparatului construite se cercetează rezonanța electronică în câmpuri slabe. Cercetări de rezonanță electronică în câmpuri tari, mult mai complexe se fac la Universitatea noastră de către prof. Ioan Ursu.

**I. Aparatura.** Pentru detectarea semnalelor de rezonanță electronică s-a folosit o instalație a cărei schemă se poate vedea în fig. 1. Să descriem fiecare parte a instalației în detaliu:

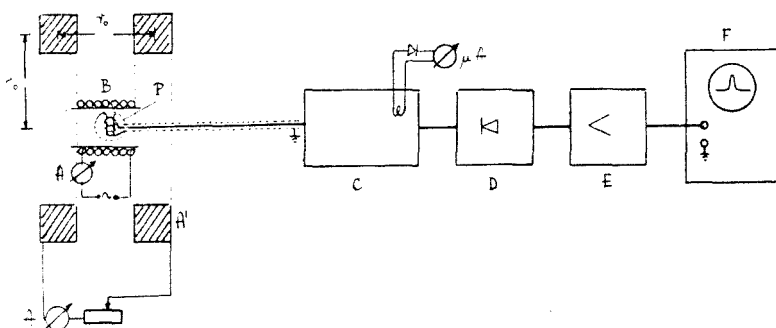


Fig. 1. Schema instalației: A - bobinele Helmholtz, B - bobine de modulație, C - generatorul autodyn, D - detector audion, E - preamplificator, F - oscilograf catodic,  $\mu A$  - microampermetru pentru detectarea oscilațiilor de înaltă frecvență, P - proba.

1. *Sistemul de bobine Helmholtz.* Trebuie să observăm de la început că în majoritatea cazurilor liniile de absorbție paramagnetică electronică sînt largi și astfel pentru observarea semnalelor nu se impun condiții deosebite în privința omogeneității și stabilității cîmpului. Pentru studiul radicalilor liberi s-au folosit bobine Helmholtz. Frecvența oscilatorului nostru a fost de 13,15 MHz, deci bobinele Helmholtz au fost astfel dimensionate ca să producă cîmpul de 4,7 Oe corespunzător frecvenței de mai sus.

Cîmpul magnetic pentru bobina Helmholtz se poate calcula după formula dată de Ruark și Peters [8]. Dacă luăm în considerare numai primul termen formula se serie

$$H_x = \frac{n i}{5 r_0} \frac{16\pi}{5\sqrt{5}} = 0,899 \frac{n i}{r_0}$$

unde

$H$  = cîmpul magnetic în centru în Oe  
 $n$  = numărul de spire într-o bobină/224 în cazul nostru, cu rezistența celor două bobine de 19,9 ohmi/  
 $r_0$  = distanța medie între bobine egală cu raza lor medie (30 cm).



Cu aceste bobine se obține un câmp maxim de 26 Oe. Pentru modulație s-a folosit un solenoid cu  $H_{\text{max}} = 16,7 I_{\text{eff}}$ .

La soluții de electroliți  $\Delta H$  fiind mare s-a folosit un mic electromagnet cu  $H_{\text{max}} = 282 I_{\text{eff}}$

Bobinele s-au așezat perpendicular pe câmpul magnetic terestru.

2. *Detecția semnalului.* Pentru generarea câmpului magnetic de înaltă frecvență și detecția semnalului s-a folosit un detector autodyn [9] în care bobina din circuitul de rezonanță al oscilatorului conține proba. Semnalele obținute se demodulează cu un detector audion. Într-o lucrare anterioară [7] s-a arătat că sensibilitatea aparaturii este invers proporțională cu amplitudinea oscilațiilor, deci este bine să se lucreze la amplitudini mici. În cazul nostru tensiunea de înaltă frecvență pe bobina a fost de 1,5 V. Bobina de recepție a fost introdusă într-un cap de recepție ecranat și oscilațiile de înaltă frecvență de la cap circulă printr-o linie coaxială de 30 cm lungime. Modulația câmpului magnetic s-a realizat cu ajutorul curentului alternativ de la rețea. Proba a fost introdusă într-o fiolă de sticlă de 0,9 cm diametru 2 cm lung cu pereții cât se poate de subțiri pentru a avea factorul de umplere bun. După demodulare și filtrare semnalul a avut mărimea de 600  $\mu\text{V}$ . Semnalele demodulate sînt preamplificate de un amplificator Křižik Z 562 și apoi înregistrate la oscilografu catodic KO 221 VEB Rafena.

După introducerea probei și conectarea circuitelor se impune un control al semnalelor, dacă nu provin din surse exterioare. Acest control s-a făcut prin: deconectarea câmpului magnetic principal, oprirea oscilațiilor, scoaterea capului din câmp. În toate aceste cazuri semnalul trebuie să dispară.

III. **Rezultate experimentale.** Experiențele efectuate cu aparatura descrisă mai sus au permis să se găsească o privire în ansamblu asupra rezonanței electronice. În aceste experiențe nu s-au făcut măsurări absolute, s-au admis pentru  $g$  valorile din literatură.

În literatură [10] se arată că se pot obține semnale și în magnetizare alternativă, fără câmp constant. În experiențele noastre pe lângă încercarea aparaturii de detecție, noi am avut ca scop să vedem comportarea probei de DPPH la modulații mari și la neomogenitățile câmpului magnetic.

Dacă notăm cu  $\Omega$  pulsația modulației și cu  $\omega_0$  pulsația derezonanță, atunci vom avea variația frecvenței Larmor la modulație

$$\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega \sin \Omega t$$

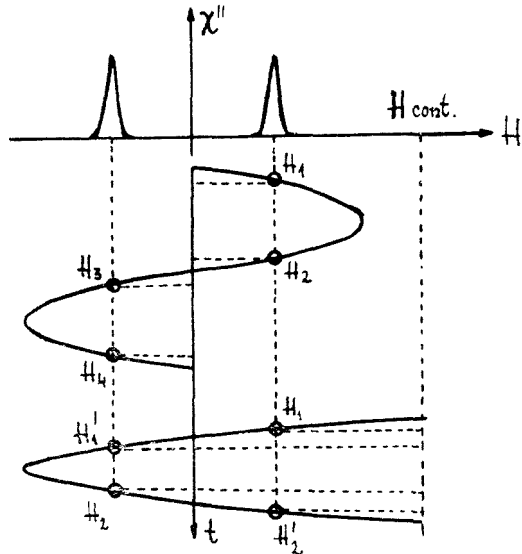


Fig. 2. Obținerea semnalelor la modulații mari.

sau pentru semnalul de absorbție

$$\chi''(\omega) = \chi''(\omega_0 + \Delta\omega \sin \Omega t)$$

Dacă  $\omega_0 = 0$  se pot obține semnale numai cu câmpul de modulație. Apariția semnalelor la modulația cu curent alternativ se poate urmări în fig. 2. Se vede de aici că la modulația în curent alternativ avem patru valori ale câmpului la care se obține rezonanța ( $H_1$ ;  $H_2$ ;  $H_3$ ;  $H_4$ ). Se obține rezonanța și la valori negative ale câmpului deoarece, după cum a arătat Bloch — Siegert [11], câmpul de radiofrecvență linear se descompune în două componente circulare în sens contrar, dintre care una totdeauna este în rezonanță. Din fotografii (fig. 3 și fig. 4) se vede că alegând conve-

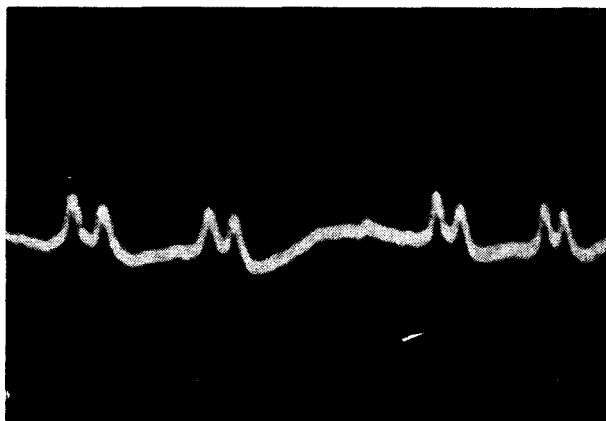


Fig. 3. Semnale de rezonanță la DPPH,  $H_{\text{cont}} = 6,7$   
Oe,  $H_{\text{mod}} = \pm 25$  Oe

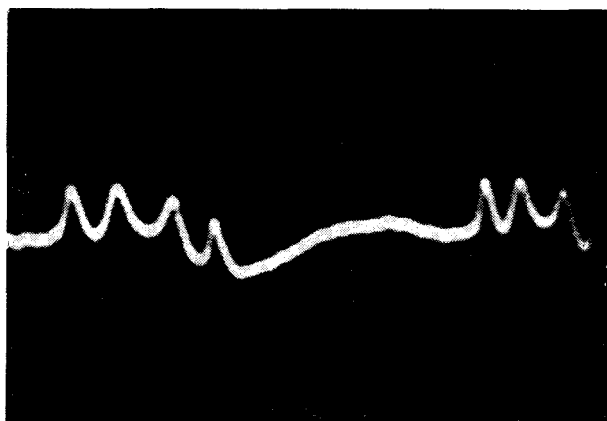


Fig. 4. Semnale de rezonanță la DPPH,  $H_{\text{cont}} = 16,5$   
Oe,  $H_{\text{mod}} = \pm 25$  Oe

nabil valoarea cîmpului constant și a modulației, se pot obține puncte de rezonanță foarte apropiate.

Prin apropierea unui magnet permanent de probă, cîmpul devine neomogen și se observă o contopire a punctelor de rezonanță (fig. 5) sau la variația neomogeneității o deplasare a unui vîrf, de exemplu la rotirea magnetului permanent lîngă probă (fig. 6).

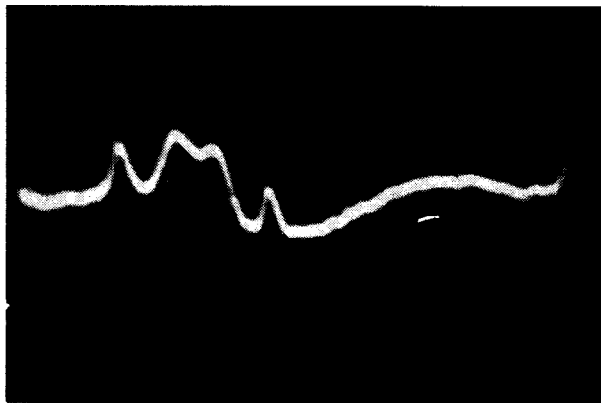


Fig. 5. Semnale de rezonanță la DPPH, cîmp neomogen.  $H_{\text{cont}} = 16,5$  Oe  $H_{\text{mod}} = 25$  Oe

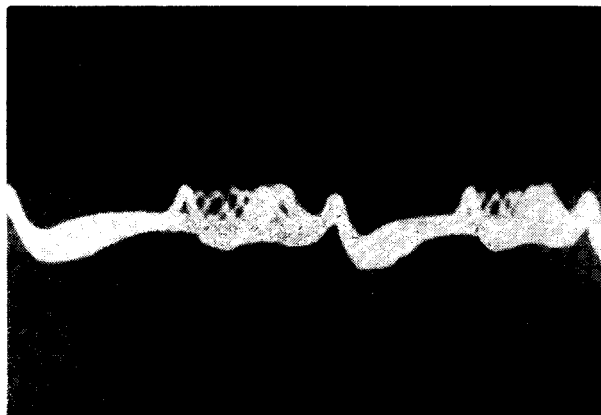


Fig. 6. Semnale de rezonanță la DPPH,  $H_{\text{cont}} = 6,7$  Oe,  $H_{\text{mod}} = 6,7$  Oe cîmp magnetic neomogen variabil în timp.

Dacă examinăm aceste rezultate prin aspectul modelării, găsim rezonanța în domeniul negativ dacă luăm în considerare cele două valori ale lui  $\frac{1}{\omega} = \pm\sqrt{LC}$  interpretînd și valoarea negativă. Două rezonanțe succesive în modelare se pot interpreta prin rezonanța circuitelor cuplate.

La cercetarea rezonanței electronice în electroliți cele două puncte (cîmpuri) de rezonanță dau un semnal unic deoarece lărgimea liniilor este mult mai mare ca și valcarea cîmpului de rezonanță  $\Delta H > H_0$  (fig. 7).

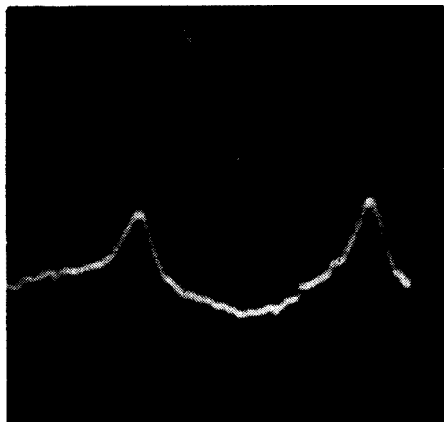


Fig. 7. Semnale la soluția de  $MnCl_2$ , concentrația  $1 \frac{mol}{l}$ ,  $H_{mod} = 400$  Oe. Cîmpul magnetic se realizează cu un electromagnet.

Comparînd aceste linii cu cele obținute la DPPH se vede că în acest caz abaterea de la curba Lorentz este mai mare (în concordanță cu teoria lui Garstens).

Lărgimea liniei de rezonanță este mai mare la  $Cu(NO_3)_2$ :  $\Delta H = 140$  Oe și cam tot de această valoare la  $CuCl_2$  în soluții apoase.

Experiențele noastre la soluții de electroliți în comparație cu teoria lărgimii de linie, au arătat că pentru explicarea lărgimii liniilor trebuie să luăm în considerare în cazul cîmpurilor slabe lărgirea aditivă  $\Delta H$  cauzată de contopirea celor două semnale la valori pozitive și negative.

#### BIBLIOGRAFIE

1. A. K. Cirkov și A. A. Kokin, „Jurn. Exp. T. Phys”, 1958, **35**, 50–55.
2. M. A. Garstens și Kaplan, „Phys. Rev.”, 1955, **99**, 459.
3. Becker, „Phys. Rev.”, 1955, **99**, 1681.
4. R. Beeler, „Arch. des Sciences”, 1957, **10**, 185–221.
5. You Hing Tshao, „C. r. Acad. sci.” 1960, **251**, 668–670.
6. S. A. Altschuler, B. M. Kozirev, *Elektronii paramagnetinii rezonans*, 1961 p. 233–237.
7. F. Koch, „Studia” 1961, Fasc. 1, 251–259.
8. Ruark, Peters, „Rev. Sc. Instr.” 1926, **13**, 205.
9. N. J. Hopkins, „Rev. Sc. Instr.”, 1949, **20**, 401–402.
10. Ingram D. J., E. Tapley J. G., „Phil. Mag.” 1954, **45**, 1221.
11. F. Bloch și A. Siegert, „Phys. Rev.” 1940, **57**, 522–427.
12. P. Jung și J. Van Cakenberghe, „Colocviul AMPERE”, 1961, com. 226.
13. A. B. Grossberg „Am. J. Phys.” 1962, **12**, 927.

#### О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ РЕЗОНАНСА ДРПН. $Sr^{2+}$ , $Mn^{2+}$ В СЛАБЫХ ПОЛЯХ

(Резюме)

Простой аппаратурой, сделанной частично в университете, исследуется парамагнитный электронный резонанс в слабых полях, при 4,7 эрстедах. Был изучен сигнал, выпущенный ДРПН.  $Mn^{2+}$  и  $Sr^{2+}$ , при больших модуляциях (Рис. 2, 3, 4).

Расширяется модуляция и на отрицательные значения поля. Большая модуляция статического поля обуславливает дополнительное расширение резонансных линий: когда резонанс осуществляется в слабых полях, ширина их линии большая.

QUELQUES ASPECTS DE LA RÉSONANCE DE DPPH,  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Mn}^{2+}$   
DANS LES CHAMPS FAIBLES

(Résumé)

Avec un appareillage simple, construit en partie à l'Université, l'auteur étudie la résonance paramagnétique électronique dans des champs faibles, à 4,7 Oe. On a étudié le signal donné par DPPH,  $\text{Mn}^{2+}$  et  $\text{Cu}^{2+}$  aux grandes modulations (Fig. 2; 3; 4). La modulation est étendue aussi aux valeurs négatives du champ. La grande modulation du champ statique conduit à un élargissement supplémentaire des lignes de résonance lorsque la résonance se réalise dans des champs faibles et que la largeur de la ligne est grande.



E R A T Ă

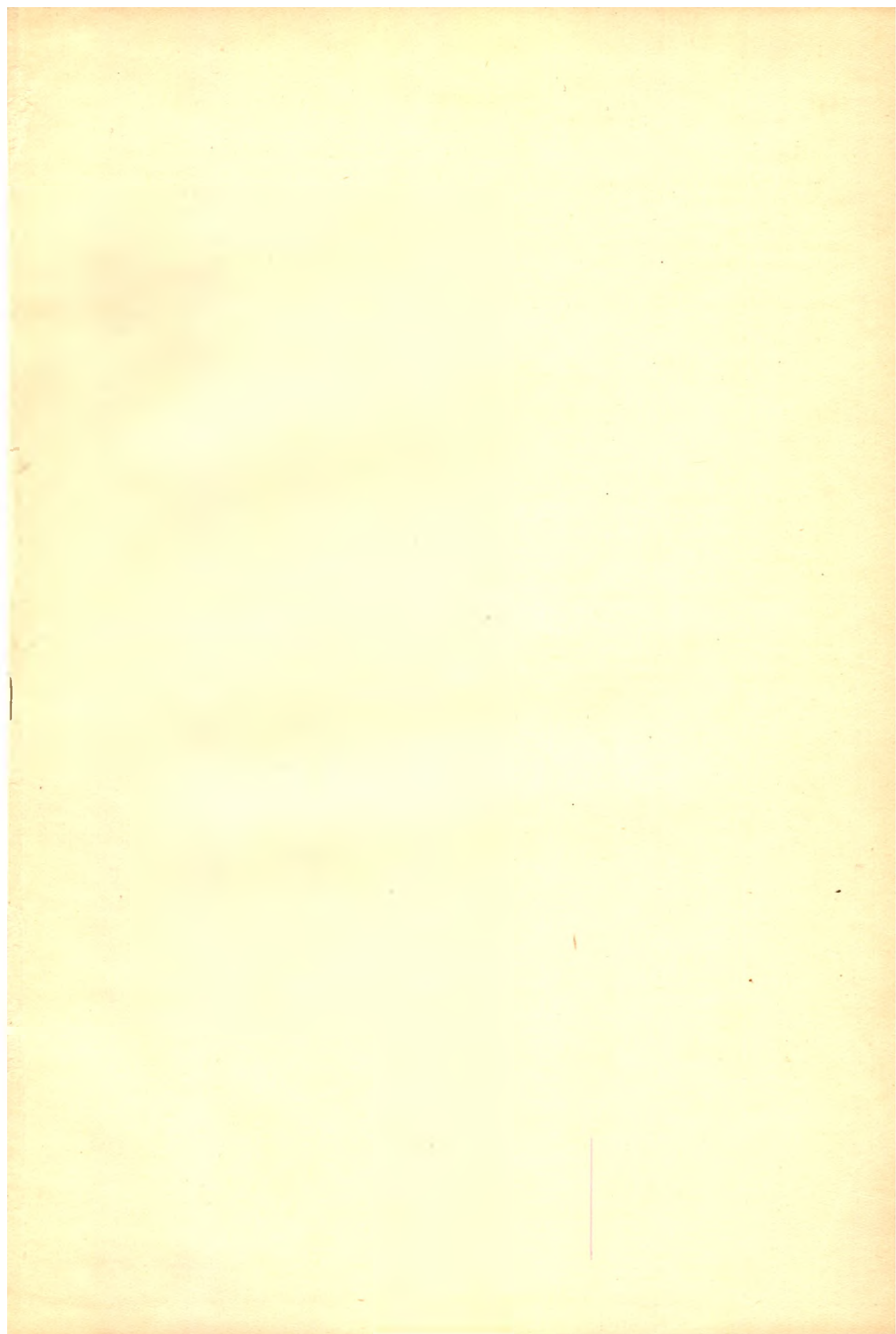
---

<i>pag.</i>	<i>Rindul</i>	<i>In loc de:</i>	<i>Se va citi:</i>
12	7 de jos	$(3,4)$	$(3,1)$
17	15 de sus	$(e_1, e_2)$	$(e_2, e_1)$
	19 de sus	$(e_1, e_2)$	$(e_1, e_1)$
21	8 de jos	$R(x) =$	$R_n(x)$
23	7 de sus	$zRR'y$	$zR'y$
28	16 de sus	$R^+$	$R_k$
67	11 de sus	$u_n$	$u_k$
11	11 de sus	$g_1$	$g_{\perp}$
12	ecuația (1)	$\omega_{\varphi}$	$\omega_{\circ}$
27	19 de sus	$\Omega_I$	$\Omega_J$

---







43875