STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1963

CLUJ

În cel de al VIII-lea an de apariție (1963) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На VIII году издания (1963), *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur VIII-me année de publication (1963) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie-pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1 9 6 3

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
ANUL VIII 1963

Redacţia:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 34-50

SUMAR — TARTALOM

Cronică

СОДЕРЖАНИЕ

SOMMAIRE

O GEOMETRIE DE TIP CAYLEY

de

ALEX. NICOLESCU (**București**)

Omagiu profesorului Dr. TH. ANGHELUȚĂ cu ocazia împlinirii a 80 ani

1. Transformări legendriene.

Transformarea lui Legendre în plan:

$$x = Y'$$
$$y = XY' - Y$$

este polaritatea față de parabolă

$$x^2 - 2y = 0$$

Numim transformări legendriene, corelațiile care fac parte din familia de transformări:

$$\begin{aligned} x &= (\bar{a}X + \bar{a}'Y + \bar{a}'') + (aX + a'Y + a'')Y' \\ y &= (\bar{b}X + \bar{b}'Y + \bar{b}'') + (bX + b'Y + b'')Y' \end{aligned} \tag{1}$$

Pentru a desprinde din această familie corelațiile, vom exprima că unei drepte oarecare:

$$Y = mX + n, \qquad Y' = m$$

i corespunde un punct, adică faptul că ecuațiile:

$$x = (\bar{a}X + \bar{a}'mX + \bar{a}'n + a'') + (aX + a'mX + a'n + a'')m$$
$$y = (\bar{b}Y + \bar{b}'mX + bn + \bar{b}'') + (bX + b'mX + b'n + b'')m$$

nu depind de X, orcare ar fi m. Avem atunci:

$$a' = 0, \quad \bar{a}' + a = 0, \quad \bar{a} = 0$$
$$b' = 0, \quad \bar{b}' + b = 0, \quad b = 0,$$

și deducem formulele transformărilor legendriene:

$$\begin{aligned} x &= h(XY' - Y) + aY' + a' \\ y &= k(XY' - Y) + bY' + b' \end{aligned} \tag{2}$$

Pentru a obține transformatul unui punct $M(X, Y)$ printr-o transformare legendriană, eliminăm pe Y' între ecuațiile (2), ceea ce din punct de vedere geometric, revine a exprima că : punctul M avînd un element de contact comun cu toate curbele ce-l conțin, transformatele acestor curbe vor avea un element de contact comun cu transformatul punctului M ; obținem prin eliminare ecuația :

$$(kX + b)x - (hX + a)y + \{(b'h - a'k)X + (bh - ka)Y + (ab' - a'b)\} = 0.$$

Transformările legendriene sînt polarități dacă :

$$h = 0, \quad k = 1, \quad a' + b = 0,$$

conicele directoare fiind parabole :

$$X^2 + 2bX - 2aY + (ab' - a'b) = 0.$$

În cazul general, locul punctelor ce sînt conținute în transformatele lor, este o conică — *conica pol*-de ecuație :

$$kX^2 - hXY + (b - a'k + b'h)X + (a - ak + bh)Y + ab' - a'b = 0.$$

Conica polară este înfășuratoarea dreptelor care-și conțin punctele ce le corespund, deci este transformata conicei pol.

Asupra conicelor pol și polară vom reveni în capitolul următor, în cadrul studiului corelațiilor generale.

Vom lua ca exemplu, transformarea legendriană particulară

$$\begin{aligned} x &= -AY' \\ y &= -(XY' - Y) \quad A = \text{const.} \\ y' &= \frac{X}{A} \end{aligned}$$

cu transformarea inversă :

$$\begin{aligned} X &= Ay' \\ Y &= -(xy' - y) \\ Y' &= -\frac{X}{A}. \end{aligned}$$

Norma corelației fundamentale este $-A^2$. Corelația fundamentală nu poate fi niciodată polaritate ; ea are drept conică axa $X = 0$ considerată de două ori și drept conică polară punctul de la infinit al axei $Y = 0$, deoarece unui punct de pe axa $X = 0$ îi corespunde paralela dusă prin acel punct la axa $Y = 0$.

II. Reducerea corelațiilor la forma canonică. Grupul G.

O corelație în planul proiectiv se exprimă analitic :

$$\begin{aligned} \rho u_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ \rho u_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \quad a_{ij} \neq 0. \\ \rho u_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

sau simbolic :

$$(u) = C(x),$$

(x) fiind coordonatele proiective punctuale, iar (u) coordonatele proiective tangențiale. Vom nota cu C' corelația care face să corespundă dreptei :

$$(u)' = C'(x)$$

punctul (x) ; corelația C' are formulele de transformare :

$$\begin{aligned}\rho u_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \rho u_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ \rho u_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.\end{aligned}$$

Numim pol orice punct (x_0) situat pe dreapta $(u_0) = C(x_0)$; locul polurilor este conica (C) de ecuație :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \ldots = 0.$$

Conica (C) este conica pol a corelației C ; se vede imediat că (C) este conica pol și pentru corelația C', deci corelațiile C, C' au aceleași poluri.

În mod corelativ, numim polară orice dreaptă (u_0) ce trece prin punctul $(x_0) = C(u_0)$

Polarele înfășoară o conică $(\bar{C})$, conica polară care este tocmai corelativă conicei pol față de corelația C sau C'. Conicele pol și polară sînt bitangente ; fie A_2 și A_3 punctele lor de contact și A_1 intersecția tangentelor în A_2 și A_3 la cele două conice. Prin oricare din corelațiile C, C', punctului A_1 îi corespunde dreapta A_2A_3, iar polurilor A_2 și A_3 le corespund dreptele A_2A_1, respectiv A_3A_1.

Alegînd drept sistem de referință triunghiul $A_1A_2A_3$, obținem cu ușurință forma canonică a corelației C :

$$\begin{aligned}\rho u_1 &= a_{11}x_1\\ \rho u_2 &= a_{32}x_3\\ \rho u_3 &= a_{23}x_2\end{aligned}$$

sau a corelației C' :

$$\begin{aligned}\rho u_1' &= a_{11}x_1\\ \rho u_2' &= a_{23}x_3\\ \rho u_3' &= a_{32}x_2.\end{aligned}$$

Ecuația conicei pol va fi :

$$(C) = a_{11}x_1^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 = 0,$$

iar a conicei polare :

$$(C') = a_{11}(a_{23} + a_{32})x_1^2 + 4a_{23}a_{32}x_2x_3 = 0,$$

sau în coordonate tangențiale :

$$(C') = \frac{1}{a_{11}}u_1^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right)u_2u_3 = 0.$$

Presupunînd că cele două corelații C, C' transformă elemente reale în elemente reale, a_{11} din forma canonică este neapărat real, dar a_{23} și a_{32} pot fi reali sau imaginari conjugați. În cele ce urmează, noi nu vom distinge aceste două cazuri.

Fie (x_0) un pol, adică un punct situat pe conica pol; prin corelația C îi corespunde dreapta (u_0), care trecînd prin punctul (x_0), retaie conica pol într-un punct (y_0). Între punctele (x_0), (y_0) există evident o corespondență homografică H, care generează o homografie în întreg planul, căci orice homografie este determinată, cînd se cunosc trei perechi de puncte omoloage necoliniare, ceea ce se realizează oricînd în cazul nostru. Aplicăm punctului (y_0) corelația C', obținem dreapta (x_0), (y_0), deci avem

$$C'H_0 = H_0C' = C.$$

Homografiile care păstrează conicele (C), $(\bar{C})$ păstrează și triunghiul autoconjugat comun $A_1A_2A_3$; ele se vor exprima atunci:

$$(H)\begin{cases} \rho y_1 = p_1 x_1 \\ \rho y_2 = p_2 x_2 \\ \rho y_3 = p_3 x_3. \end{cases}$$

între parametrii p_1, p_2, p_3 trebuind însă să există relația:

$$p_1^2 = p_2 p_3;$$

așa dar, homografiile care păstrează conicele (C) și $(\bar{C})$ formează un grup cu un parametru. Homografia H_0 face parte din acest grup. Toate conicele fascicolului determinat de conicele (C) și $(\bar{C})$ sînt invariante față de transformările acestui grup.

Să considerăm o corelație $K = HC$, H fiind o homografie oarecare a grupului menționat; corelația K va transforma conicele (C) și $(\bar{C})$ una într-alta, dar aceste conice nu mai sînt pol și polară pentru K. Conicele pol și polară ale corelației K fac însă parte din fascicolul conicelor (C) și $(\bar{C})$, de unde deducem că și corelația C păstrează, cîte două, conicele fascicolului de conice bitangente determinat de (C)

În rezumat:

Homografiile H care păstrează conicele (C) și $(\bar{C})$, și corelațiile K care schimbă cele două conice una într-alta formează un grup G; conicele (C) și $(\bar{C})$ determină un fascicol de conice bitangente, invariant față de grupul G.

Se arată ușor că în grupul G există o polaritate, ceea ce înseamnă că grupul G este un subgrup al unui grup proiectiv format de un grup cayleyan și de o polaritate (conice directoare fiind conica absolută a grupului cayleyan). Geometria grupului G este geometria quasi-cayleyană.

III. Metrica quasi-cayleyană.

Definim *distanța quasi-cayleyană* dintre două puncte (x), (x') ca fiind logaritmul natural al biraportului punctelor (x), (x'), (x_0), $x'_0)$ ultimele două fiind polurile ce se află pe dreapta (x), (x'):

$$\overline{xx'} = h\log(x, x', x_0, x'_0) \qquad (h = \text{const.})$$

În mod corelativ, *unghiul quasi-cayleyan* a două drepte (u), (u') va fi definit prin :

$$\widehat{uu'} = k\log(u, u', u_0, u'_0) \qquad (k = \text{const.})$$

(u_0) şi (u'_0) fiind polarele trecînd prin intersecţia dreptelor (u), (u')

Pe noi ne interesează însă cazul în care punctele (x) şi (x') sau dreptele (u) şi (u') sînt infinit vecine :

$$x'_1 = x_1 + dx_1, \quad x'_2 = x_2 + dx_2, \quad x'_3 = x_3 + dx_3$$
$$u'_1 = u_1 + du_1, \quad u'_2 = u_2 + du_2, \quad u'_3 = u_3 + du_3.$$

Atunci, $\overline{xx'}$ va deveni elementul de *arc quasi-cayleyan ds*, iar uu' va deveni elementul corelativ $d\bar{s}$, pe care-l vom numi *co-arc* elementar.

Arcul şi co-arcul quasi-cayleyan capătă expresii simple, dacă normalizăm coordonatele proiective punctuale prin ecuaţia :

$$a_{11}x_1^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 = 1,$$

pentru toate punctele care nu sînt poluri, iar coordonatele tangenţiale, prin ecuaţia :

$$\frac{1}{a_{11}}u_1^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right)u_2u_3 = 1,$$

pentru toate dreptele, care nu sînt polare. Obţinem într-adevăr :

$$ds^2 = -4h^2\left[a_{11}dx_1^2 + (a_{23} + a_{32})dx_2dx_3\right].$$
$$d\bar{s}^2 = -4k^2\left[\frac{1}{a_{11}}du_1^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right)du_2du_3\right].$$

Vom determina constantele h şi k astfel încît arcul şi co-arcul să fie reali. În acest scop, vom distinge două cazuri :

1. Conica pol are numai puncte imaginare şi deci conica polară va avea numai tangente imaginare. Vom presupune atunci că forma :

$$a_{11}x_1^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 = C(x)$$

este pozitiv definită, şi forma :

$$\frac{1}{a_{11}}u_1^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right)u_2u_3 = \bar{C}(u)$$

va fi de asemenea pozitiv definită ; vom lua în acest caz :

$$2h = iH, \quad 2k = iK,$$

şi vom avea :

$$ds^2 = H^2\left[a_{11}dx_1^2 + (a_{23} + a_{32})dx_2\,dx_3\right]$$
$$d\bar{s}^2 = K^2\left[\frac{1}{a_{11}}du_1^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right)du_2\,du_3\right].$$

2. Conica pol are puncte reale, conica polară avînd tangente reale. În acest caz, trebuie să ne fixăm regiunile planului în care au loc conside-

rațiile noastre. Vom alege punctele planului care fac forma $C(x)$ negativă, ceea ce ar atrage :

$$C(x) \cdot C(x') - C^2(x, x') = 0$$

și :

$$C(dx) = 0.$$

Determinarea constantei h făcută pentru cazul precedent este valabilă și aici. Iar în ceea ce privește planul riglat, vom considera numai acele drepte care fac forma $\overline{C}(u)$ negativă, astfel încît corelativa unui punct al geometriei să fie o dreaptă a geometriei.

Cu acestea precizate, formulele scrise mai sus sînt valabile pentru ambele cazuri. Trebuie însă să observăm că în ceea ce privește al doilea caz, nu orice curbă cu puncte în domeniul ales are tangente în domeniul dreptelor alese. Noi vom considera numai curbele aparținînd geometriei quasi-cayleyene atît din punct de vedere punctual, cît și din punct de vedere tangențial.

Privind coordonatele (x) drept coordonate carteziene într-un spațiu euclidian E_3, iar coordonatele (u) drept coordonate tangențiale în același spațiu, ecuațiile :

$$C(x) = 1$$
$$\overline{C}(u) = 1$$

reprezintă două cuadrici ; dacă alegem pe aceste cuadrici drept sistem de coordonate cele două sisteme de generatoare rectilinii, vom avea următoarele reprezentări parametrice :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \cdot \frac{a-b}{a+b}, \qquad dx_1 = \frac{2}{\sqrt{a_{11}}} \frac{bda - adb}{(a+b)^2}$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \cdot \frac{ab}{a+b}, \qquad dx_2 = \frac{2}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \cdot \frac{b^2da + a^2db}{(a+b)^2}$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \frac{1}{a+b}, \qquad dx_3 = \frac{-2}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \frac{da + db}{(a+b)^2}$$

$$u_1 = \sqrt{a_{11}} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \qquad du_1 = 2\sqrt{a_{11}} \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

$$u_2 = \frac{2\sqrt{a_{23}\,a_{32}}}{\sqrt{a_{32} + a_{23}}} \frac{1}{\alpha + \beta}, \qquad du_2 = \frac{-2\sqrt{a_{23}\,a_{32}}}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \frac{d\alpha + d\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

$$u_3 = \frac{2\sqrt{a_{23}\,a_{32}}}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \qquad du_3 = \frac{2\sqrt{a_{23}\,a_{32}}}{\sqrt{a_{23} + a_{32}}} \frac{\beta^2 d\alpha + \alpha^2 d\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

Folosind aceste reprezentări, care ne conduc la un sistem de coordonate u, v în planul nostru, obținem :

$$ds^2 = H^2 \frac{da \cdot db}{(a+b)^2}, \qquad ds^2 = K^2 \cdot \frac{d\alpha \cdot d\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

Parametrii (a, b) și (α, β) sînt reali sau imaginar conjugați după cum ne plasăm în primul sau al doilea caz, dar membrii din dreapta ai acestor relații sînt oricînd pozitivi.

Din expresia elementului de arc se observă că $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$ sînt liniile de lungime nulă ale planului. Revenind la coordonatele proiective, se deduce că aceste linii sînt tocmai tangentele conicei C, ceea ce era evident a priori, din punct de vedere geometric.

În sistemul de coordonate (a, b), conica C are ecuaţia :

$$a + b = 0,$$

iar o conică oarecare din fascicolul $(C, \bar{C})$ are ecuaţia :

$$ma + nb = 0.$$

IV. Deplasări quasi-cayleyene, finite şi infinitezimale.

Numim deplasări quasi-cayleyene omografiile care păstrează unghiurile şi distanţele quasi-cayleyene, deci omografiile H :

$$(H) : \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = p_1 x_1 \\ \bar{x}_2 = p_2 x_2 \\ \bar{x}_3 = p_3 x_3 \end{cases} \qquad (p_1^2 = p_2 p_3)$$

Eliminînd p_1, p_2, p_3 între cele patru relaţii precedente, obţinem traiectoria punctului $(\bar{x})$, cînd acesta este deplasat în mod continuu :

$$x_2 x_3 \bar{x}_1^2 - x_1^2 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = 0\ ;$$

această traiectorie este conica fascicolului determinat de conicele (C), $(\bar{C})$, care trece prin punctul (x)

Rezultă atunci că printr-o deplasare infinitezimală, un punct oarecare se deplasează pe tangenta dusă prin el la conica fascicolului $(C, \bar{C})$ trecînd prin acel punct.

O deplasare în planul nostru corespunde pe cuadrica :

$$C(x) = 1$$

unei proiectivităţi a acesteia, care este dată, după cum se ştie, de formule de forma :

$$\bar{a} = \frac{ma + n}{m'a + n'}$$

$$\bar{b} = \frac{pb + q}{p'b + q'}\ ;$$

în plus această proiectivitate trebuie să păstreze invariante ecuaţiile : $a=0$, $b=0$ şi $a-b$, $a+b=0$; exprimînd aceste condiţii, obţinem pînă la urmă că grupul deplasărilor quasi-cayleyene este în coordonatele a, b :

$$\bar{a} = ka$$

$$\bar{b} = kb.$$

Congruența atașată acestui grup este :

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = dt,$$

care este tocmai congruența de conice bitangente deja întîlnite.

Deplasările infinitezimale vor fi date de formulele :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (1 + dt)a \\ \bar{b} &= (1 + dt)b, \end{aligned}$$

t fiind parametrul ales pe conica fascicolului $(C, \bar{C})$ trecînd prin punctul (a, b).

Corelația determinată de conicele (C), (C) fiind :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 \\ u_2 &= a_{32}x_3 \\ u_3 &= a_{23}x_2, \end{aligned}$$

ea se va scrie în coordonatele normalizate :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{a_{23}} \cdot a}{\sqrt{a_{32}}} \\ \beta &= \frac{\sqrt{a_{23}} \cdot b}{\sqrt{a_{32}}}, \end{aligned}$$

de unde rezultă corelațiile grupului G exprimate prin formulele :

$$\begin{aligned} \alpha &= ha \\ \beta &= hb. \end{aligned}$$

V. Geometria curbelor plane. Invarianți diferențiali. Elemente de arc, co-arc și curbură.

Geometria quasi-cayleyană a curbelor plane este mai interesantă în cazul cînd conica pol, deci și conica polară, sînt imaginare, deoarece atunci, după cum am văzut, toate punctele planului proiectiv pot fi considerate în această geometrie, odată cu dreptele determinate de aceste puncte.

În cazul cînd conicele-pol și polară sînt reale, am văzut că sîntem nevoiți să împărțim spațiul punctelor și cel al dreptelor din plan în cîte două clase, și anume : puncte exterioare sau interioare conicei pol; drepte care taie conica polară în puncte reale sau imaginare. Dacă alegem, pentru fixarea ideilor, punctele exterioare conicei pol și dreptele care taie conica polară în puncte reale, atunci nu oricînd două puncte ale geometriei determină o dreaptă a geometriei. Aceasta înseamnă că nu orice curbă punctuală a geometriei aparține acesteia și din punct de vedere tangențial.

Ca urmare, în timp ce în primul caz vom considera orice curbă continuă cu tangentă continuă din plan, în cel de al doilea caz ne vom referi numai la curbele, sau arcele de curbe, analitice, care au atît punctele cît și tangentele în regiunile alese.

O curbă K, presupusă analitică, se reprezintă parametric prin :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) & & & u_1 &= u_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) & &\text{sau} & u_2 &= u_2(t) \\ x_3 &= x_3(t) & & & u_3 &= u_3(t) \end{aligned}$$

coordonatele punctuale (x) sau tangențiale (u) fiind funcții olomorfe în intervalele în care au loc considerațiile noastre, în raport cu parametrul t. Trecînd la coordonatele normalizate, acestea vor fi de asemenea funcții olomorfe de parametrul t :

$$\begin{aligned} a &= a(t) & &\text{sau} & \alpha &= \alpha(t) \\ b &= b(t) & & & \beta &= \beta(t). \end{aligned}$$

Elementele de arc ds și co-arc $d\bar{s}$ ale curbei K, care sînt invarianți față de deplasările quasi-cayleyene, vor fi

$$ds = H \frac{a' \cdot b'}{a + b} dt$$

$$d\bar{s} = K \frac{\alpha'\beta'}{\alpha + \beta} dt,$$

accentele indicînd derivarea în raport cu variabila t.

Prin definiție, curbura quasi-cayleyană a curbei K este :

$$R(t) = \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{a + b}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\alpha' \cdot \beta'}{a' \cdot b'}.$$

Vom exprima funcțiile și în raport cu funcțiile a, b. Coordonatele unui punct curent pe curba K și coordonatele tangentei la curbă în acel punct sînt legate prin relațiile :

$$x_1(t) \cdot u_1(t) + x_2(t) \cdot u_2(t) + x_3(t) \cdot u_3(t) = 0.$$

$$x_1'(t) \cdot u_1(t) + x_2'(t) \cdot u_2(t) + x_3'(t) \cdot u_3(t) = 0\,;$$

înlocuind în aceste relații coordonatele proiective prin cele normalizate, obținem după simplificări :

$$(a - b)(\alpha - \beta) + 4 \frac{\sqrt{a_{23}a_{32}}}{a_{23} + a_{32}} \alpha\beta + 4 \frac{\sqrt{a_{23}a_{32}}}{a_{23} + a_{32}} ab = 0,$$

$$2(a'b - ab')(\alpha - \beta) - 4 \frac{\sqrt{a_{23}a_{32}}}{a_{23} + a_{32}} (a' + b')\alpha\beta + 4 \frac{\sqrt{a_{23}a_{32}}}{a_{23} + a_{32}} (a'b^2 + a^2b') = 0.$$

Din aceste relații scoatem pe $(\alpha - \beta)$ și pe $\alpha\beta$:

$$\alpha - \beta = -A \frac{a'b + ab'}{a' - b'} = \frac{\dfrac{d}{dt}(ab)}{\dfrac{d}{dt}(a-b)}, \quad \left(A = 4 \cdot \frac{\sqrt{a_{23}a_{32}}}{a_{23} + a_{32}}\right)$$

$$\alpha\beta = \frac{-a'b^2 + a^2 b'}{a' - b'} = \frac{-ab\dfrac{d}{dt}(a-b) + (a-b)\dfrac{d}{dt}(ab).}{\dfrac{d}{dt}(a-b)}$$

Efectuăm transformarea de coordonate exprimată prin relațiile :

$$x = a - b$$

$$y = ab,$$

care constituie o trecere la coordonate carteziene în planul euclidian ; în ceea ce privește coordonatele tangențiale, vom face transformarea :

$$\xi = \alpha - \beta$$

$$\zeta = \alpha\beta.$$

Vom obține astfel următoarele relații între coordonatele unui punct și cele ale tangentei la curbă în acel punct :

$$\xi = -A \frac{y'}{x'}$$

$$\zeta = \frac{xy' - x'y}{x'},$$

accentele indicînd derivarea în raport cu parametrul t. Membrii din dreapta relațiilor precedente sînt tocmai aceia care intervin în formulele de transformare ale corelației fundamentale studiate în primul capitol. Rezultă atunci că studiul elementelor diferențiale tangențiale ale unei curbe K se reduce la studiul elementelor diferențiale punctuale ale transformatei curbei K prin corelația fundamentală. Ținînd seama de acest lucru, obținem prin calculele simple, expresiile finale ale elementelor de arc și co--arc quasi-cayleyane :

$$ds^2 = H^2 \frac{y'^2 - x'(x'y - xy')}{x^2 + 4y} \cdot dt^2$$

$$ds^2 = K^2 \frac{\varsigma'^2 - \xi'(\xi'\varsigma - \xi\varsigma')}{\xi^2 + 4\varsigma} dt^2 = K^2 \frac{(x^2 - A^2y)(x''y' - x'y'')}{A^2y'^2 + 4x'(x'y - xy')} dt^2.$$

Aceste formule ne conduc imediat la expresia efectivă a curburii :

$$\pm R(t) = \frac{(x^2 + 4y)(x^2 - A^2y(x''y' - x'y'')}{A^2y'^2 + 4x'(x'y - xy')y'^2 - x'(x'y - xy')} \cdot \frac{K}{H}$$

sau dacă alegem pe x ca variabilă independentă,

$$\pm R(t) = \frac{(x^2 - A^2 y) y'' (x^2 - 4y)}{A^2 y'^2 + 4(y - xy') y'^2 - (y - xy')} \cdot \frac{K}{H}$$

$$\left(y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

Rezultă din această formulă că fiind dată curbura unei curbe ca funcție de parametrul pe curbă, aceasta este determinată de o ecuație diferențială de al doilea ordin :

$$y'' = \frac{A^2 y'^2 + 4(y - xy') y'^2 - (y - xy')}{x^2 - A^2 y (x^2 - 4y)} R(t),$$

și deci, există o singură curbă de curbură dată care să fie tangentă într-un punct (x_0, y_0) la o direcție y_0' — tot așa cum se întîmplă în geometria euclidiană plană ; spre deosebire de aceasta însă, în geometria quasi cayleyană nu toate curbele cu aceeași curbură se pot deduce una din alta prin deplasări quasi-cayleyene.

Să ne oprim la curbele cu curbură quasi-cayleyană constantă : ele satisfac unei ecuații diferențiale ce se deduce luînd derivatele logaritmice ai ambilor membri din ecuația precedentă și neglijînd pe $R(t)$:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{2A^2 y' y'' - 4xy''}{A^2 y'^2 + (y - xy')^4} + \frac{2y'y'' + xy''}{2(y'^2 + (xy' - y)} - \frac{2x - A^2 y}{2x^2(x^2 - Ay)} - \frac{2x + 4y'}{x^2 + 4y}$$

Rezultă atunci că există o singură curbă cu curbură constantă, osculatoare într-un punct al unei curbe analitice ; cele două curbe au dealtfel aceiași curbură in punctul de osculație.

Curbele cu curbură nulă sînt acelea pentru care $y'' = 0$, deci dreptele planului. Conicele pol și polară au curburile nedeterminate ; celelalte conice ale fascicolului determinat de aceste conice au curburile constante.

VI. Cercurile quasi-Cayleyene.

Locul geometric al punctelor ale căror distanțe la un punct fix sînt egale, este o conică bitangentă conicei pol, dreapta punctelor de contact fiind polara punctului M față de conica pol. Enunțăm și propoziția corelativă : înfășurătoarea dreptelor care fac un unghi-constant cu o dreaptă fixă, este o conică bitangentă conicei polare — dreapta punctelor de tangență fiind chiar dreaptă fixă.

Demonstrăm că : dacă numim normală într-un punct P la o curbă K conjugata tangentei în P la curbă față de conica polară, atunci curbele cu normalele concurente într-un punct M, sînt conice bitangente conicei polare, M fiind polul dreptei punctelor de contact.

Fie (x) un punct de curbă și (a) punctul de concurență al normalelor; avem următoarea ecuație, ținînd seama de forma polară a conicei polare:

$$2a_{23}a_{32}(a_2x_3 - a_3x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{11}(a_{23} + a_{32})(a_3x_1 - a_1x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} +$$

$$+ a_{11}(a_{23} + a_{32})(a_1x_2 - a_2x_1)\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

unde $f(x) = 0$ este ecuația curbei pe care vrem s-o determinăm. Sistemul caracteristic al acestei ecuații cu derivate parțiale este:

$$\frac{dx_1}{2a_{23}a_{32}(a_2x_3 - a_3x_2)} = \frac{dx_2}{a_{11}(a_{23} + a_{32})(a_3x_1 - a_1x_3)} = \frac{dx_3}{a_{11}(a_{23} + a_{32})(a_1x_2 - a_2x_1)}$$

cu integralele prime:

$$u = a_{11}(a_{23} + a_{32})x_1^2 + 2a_{23}a_{32}x_2^2 + 2a_2a_{32}x_3^2 = C_1$$

$$v = a_{11}(a_{23} + a_{32})a_1x_1 + 2a_{23}a_{32}a_2x_2 + 2a_{23}a_{32}a_3x_3 = C_2$$

Integrala generală a ecuației cu derivate parțiale va fi:

$$f(x) = F(u, v) = 0,$$

F fiind o funcție arbitrară. Putem normaliza coordonatele omogene (x) prin ecuația $u = 1$ (ecuația $u = 0$ reprezintă o integrală a ecuației, o conică bitangentă conicei polare cu axa de bitangență: $x_2 = x_3$). Integrala generală devine atunci:

$$F(v) = 0$$

sau:

$$v = \text{const.},$$

ecuație care reprezintă familia cu trei parametri a conicelor bitangente conicei polare, ceea ce demonstrează teorema enunțată.

În concluzie: curbele cu normele concurente au tangentele făcînd un unghi constant cu polara punctului de concurență al normalelor față de conica polară. Iar curbele ale căror puncte sînt echidistante de un punct și ale căror tangente fac un unghi constant cu polara lui M față de conica polară, au normalele concurente și curbura constantă (sînt tocmai conicele fasciculului determinat de conicele pol și polară). Iată dar legăturile dintre cele trei feluri în care se pot extinde cercurile din planul euclidian; observăm că în cazul cercurilor euclidiene, tangentele acestora fac un unghi constant cu dreapta de la infinit.

Revenim la curbura unei curbe analitice oarecare. Curbura este un invariant față de deplasările quasi-cayleyene, dar curbura transformatei unei curbe K, de curbură R, printr-o corelație a grupului G este:

$$R' = \frac{K^2}{H^2} \cdot \frac{1}{R}.$$

Rezultă atunci că orice funcție

$$F\left[\frac{H}{K}R, \frac{K}{H}\frac{1}{R}\right]$$

simetrică în cele două argumente figurate, este un invariant absolut al grupului G.

Revenind la coordonatele a, b, și α, β expresiile

$$t = \frac{a}{b} \quad \text{și} \quad \tau = \frac{\alpha}{\beta}$$

sînt invariante față de deplasările grupului G. Pe o curbă K, vom spune că t este parametrul punctual al curbei, iar τ parametrul tangențial; este ușor de văzut că printr-o corelație a grupului G, parametrul punctual devine parametru tangențial și invers. Rezultă că dacă considerăm expresiile:

$$E_1 = K\frac{ds}{dt} = \frac{HK}{4} \cdot \frac{(x + x^2 + 4y)\, dy^2(ydx - xdy)}{xdy - 2ydx}$$

$$E_2 = K\frac{ds}{d\tau} = \frac{HK}{4} \cdot \frac{dy^2 - dx(ydx - xdy)\, A^2y'^2 + 4(x'y - xy')/x'\,(x + A^2y'^2 + 4)^2}{(xdy - 2ydx) \cdot x^2 + 4y}$$

$$\bar{E}_1 = H\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{HK}{4} \cdot \frac{(d^2xdy - dxd^2y)(x^2 - A^2y)(x^2 + 4y)(x + x^2 + 4y)^2}{(xdy - 2ydx)A^2dy^2 + 4dx(ydx - xdy)}$$

$$\bar{E}_2 = H\frac{d\bar{s}}{d\tau} = \frac{HK}{4} \cdot \frac{(d^2xdy - dxd^2y)(x^2 - A^2y)(A^2y'^2 + 4(x'y - xy')/x)}{(xdy - 2ydx)A^2dy^2 + 4dx(ydx - xdy)}$$

cu:

$$x = x(u), \quad x' = \frac{dx}{du}; \quad y = y(u), \quad y' = \frac{dy}{du}$$

și unde parametrii t și τ au fost înlocuiți cu valorile:

$$t = \frac{a}{b} = \frac{x^2 + 4y - x}{x^2 + 4y - x}, \quad \tau = \frac{\alpha}{\beta} = \ldots,$$

atunci orice funcție

$$J(E_1, E_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2)$$

simetrică în E_1 și E_2 deoparte, și $\bar{E}_2$ și $\bar{E}_1$ de alta, este un invariant absolut al grupului G.

Vom arăta acum că:

„Studiul invarianților grupului G se reduce la studiul invarianților metrici ai curbelor strîmbe din spațiul euclidian tridimensional".

Într-adevăr să exprimăm elementul de contact al unei curbe K cu ajutorul variabilelor:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + A^2y'^2 \\ v &= y \\ w &= y - xy', \end{aligned} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ceea ce este posibil dacă determinantul funcțional

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, y')} = 2(A^2y'^2 - x^2) \neq 0,$$

deci dacă curba K nu este o conică a familiei :

$$x^2 \pm 2Ay + C = 0.$$

Dacă privim variabilele u, v, w drept coordonate carteziene ortogonale în spațiu, cînd elementul de contact (x,y,y') al curbei K înfășoară această curbă, punctul (u,v,w) descrie o curbă strîmbă. Aplicarea corelației fundamentale

$$\begin{aligned} X &= Ay' \\ Y &= y - xy' \\ Y' &= x/A \end{aligned} \qquad \left(y'' = \frac{dy}{dx}, \quad Y' = \frac{dY}{dX}\right)$$

curbei K echivalează, în spațiul coordonatelor u, v, w, cu simetria în raport cu planul $v = w$:

$$\begin{aligned} U &= u \\ V &= w \\ W &= v, \end{aligned}$$

care este determinată de 5 invarianți :

$$I_1 = u, \quad I_2 = v + w, \quad I_3 = vw$$

$$J_1 = \frac{(du^2 + dv^2 + dw^2)^3}{P^2 + Q^2 + R^2}$$

$$J_2 = -\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{D},$$

unde D este determinantul

$$D = \begin{vmatrix} du & dv & dw \\ d^2u & d^2v & d^2w \\ d^3u & d^3v & d^3w \end{vmatrix}$$

iar P, Q, R, sînt minorii primei linii ai acestui determinant ; invarianții J_1, J_2 sînt respectiv curbura și torsiunea curbei din spațiu corespunzînd curbei K. Rezultă atunci că orice invariant al curbei K față de corelația fundamentală, se exprimă cu ajutorul invarianților :

$$I_1 = x^2 + A^2y'^2, \qquad I_2 = 2y - xy', \qquad I_3 = y(y - xy')$$

$$J_1 = \frac{[4(x + A^2y'y'')^2 + y'^2 + x^2y''^2]^3}{P^2 + Q^2 + R^2}$$

$$J_2 = -\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{D}$$

D fiind determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} 2x + A^2y'y'' & y' & -xy'' \\ 2 + A^2y''^2 + A^2y'y''' & y'' & -y'' - xy''' \\ 3A^2y''y''' + A^2y'y^{IV} & y''' & -2y''' - xy^{IV} \end{vmatrix}$$

iar P, Q, R fiind minorii primelor două linii ale acestui determinant sau derivatele acestor invarianţi.

Rămîne acuma să alegem dintre aceşti invarianţi pe aceia care sînt invarianţi faţă de toate transformările grupului G ; este suficient pentru aceasta, să-i alegem pe aceia care sînt invarianţi şi faţă de deplasările quasi-cayleyene.

O deplasare quasi-cayleyană se exprimă prin formulele :

$$(\text{k}) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= k^2x \\ \bar{y} &= k^2y \end{aligned}$$

şi deci :

$$\bar{y}' = y',\ \bar{y}'' = y'',\ \bar{y}''' = y''',\ \text{etc.}$$

Putem acuma uşor să dăm forma generală a invarianţilor grupului G. Întradevăr, alegînd pe curba K, drept parametru, un invariant al grupului G, de exemplu invariantul :

$$I = \frac{I_1}{I_2} = \frac{x^2 + A^2y'^2}{2y - xy'},$$

expresiile I_1 şi I_2, împreună cu derivatele lor $\frac{dI_1}{dI}$, $\frac{dI_2}{dI}$, $\frac{d^2I_1}{dI^2}$, $\frac{d^2I_2}{dI^2}$; ... etc. se multiplică, prin deplasarea (k), cu $4k^2$. Iar I_3, J_1, J_2 se multiplică, împreună cu derivatele lor, cu k^4, respectiv k^5, k ; şi atunci rezultă *că orice expresie*

$$J\left| I_1, \frac{dI_1}{dI}, \frac{d^2I_1}{dI^2}, \ldots ; I_2, \ldots ; I_3, \ldots ; J_1, \ldots ; J_2 \ldots \right|$$

omogenă de gradul zero în :

$$\begin{aligned} &(I_1)^{1/2}, \ldots\ldots\ldots \\ &(I_2)^{1/2}, \ldots\ldots\ldots \\ &(I_3)^{1/4}, \ldots\ldots\ldots \\ &(J_1)^{1/5}, \ldots\ldots\ldots \\ &(J_2)\ \ \ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

este un invariant al grupului G.

**

—. Să considerăm un cîmp de direcţii :

$$y' = f(x, y),$$

adică o multiplicitate unidimensională de elemente de contact, definind o congruenţă de curbe, curbele integrale ale ecuaţiei diferenţiale. Aplicînd aceiaşi metodă utilizată mai sus, putem defini invarianţii acestui cîmp cu ajutorul invarianţilor metrici ai suprafeţei :

$$u = x^2 + A^2 f^2$$
$$v = y$$
$$w = y - xf,$$

raportată la sistemul de coordonate curbilinii x, y.

Ne oprim aici cu studiul invarianţilor absoluţi ai grupului G, dar vom face cîteva consideraţii asupra invarianţilor relativi, anume la ecuaţiile diferenţiale de primul ordin, care rămîn neschimbate printr-o transformarea grupului G.

VII. Ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

Exceptînd ecuaţia

$$A^2 y'^2 - x^2 = 0,$$

pe care am rezolvat-o mai sus, orice ecuaţie diferenţială de primul ordin se poate pune sub forma :

$$x^2 + A^2 y'^2 = F(y, y - xy').$$

Se observă atunci imediat că această ecuaţie este invariantă faţă cu transformările grupului G, dacă F este o funcţie simetrică şi omogenă de gradul II în cei doi argumenţi y şi $y - xy'$.

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТИПА КЕЛЛИ

(Резюме)

Рассматриваем семейство преобразований

$$\tau \begin{cases} x = h(XY' - Y) + a\,Y' + a' \\ y = k(XY' - Y) + b\,Y' + b' \end{cases}$$

которое даёт расширение преобразования Лежандра и включено в группу преобразований соприкосновения Софус Ли

$$x = F(XY' - Y,\ Y'), \quad y = G(XY' - Y,\ Y').$$

Автор показывает, что прямым, проходящим через одну точку, соответствуют через (τ) множество точек лежащих на прямой; в случае когда прямая содержит точку мы получим как геометрическое место одну линию второго порядка (коника): ,,конику-полюс''.

Соотносительная кривая этой коники —завёртывание соответствующих прямых— есть ,,полярная коника''.

Эти коники двухкасательные и не совпадают только в случае преобразования Лежандра.

Взяв эти две коники как основные фигуры определяется одна плоская проэктивная геометрия типа Кэли, относя меру углов к ,,полярной конике'', а меру расстояний к ,,конике-полюс''.

Затем изучаем дифференциальный вид этой геометрии и с особенностью дифференциальные инварианты плоских кривых, которые можно вывести из метрических инвариантов кривых пространства E_3.

UNE GÉOMÉTRIE DU TYPE CAYLEY

(Résumé)

On considère la famille de transformations

$$\tau \begin{cases} x = h(XY' - Y) + aY' + a' \\ y = k(XY' - Y) + bY' + b', \end{cases}$$

qui étend la transformation de Legendre et fait partie du groupe de transformations de contact de Sophus Lie

$$x = F\,(XY' - Y\,;\,Y')\,; \qquad y = G(XY' - Y\,;\,Y')$$

On montre qu'aux droites passant par un point correspondent, par τ, des points situés sur une droite ; dans le cas où la droite contient le point, nous obtenons comme lieu géométrique une conique : la *„conique-pôle"*.

La corrélative de cette conique — l'enveloppante des droites correspondantes — est la *„conique polaire"*. Ces coniques sont bitangentes et ne coïncident que dans le cas de la transformation de Legendre.

Si l'on prend les deux coniques comme figures fondamentales, on définit une géométrie *plane* projective de type cayleyen, en rapportant la mesure des angles à la conique polaire et celle des distances à la conique-pôle.

On étudie ensuite l'aspect différentiel de cette géométrie, en particulier les invariants différentiels des courbes planes, qui peuvent être déduits des invariants métriques des courbes de l'espace E_3, ainsi qu'on l'expose dans l'article.

TRANSFORMĂRI PEDALE PLANE ŞI APLICAŢIILE LOR ÎN GEOMETRIA NEEUCLIDIANĂ

de

B. ORBÁN şi M. ŢARINĂ

În prima parte a acestei lucrări introducem o transformare în planul proiectiv, cu ajutorul unei conice C şi a unui punct O, pe care o vom numi transformare pedală a planului. Studiem transformata unei curbe algebrice Γ prin această transformare, enumerînd mai multe proprietăţi ale acesteia.

În partea a doua a lucrării aplicăm aceste consideraţii la studiul pedalei unei curbe faţă de un punct în planul neeuclidian, folosind modelul lui Klein. Într-adevăr, definiţia pedalei unei curbe se poate introduce şi în geometria neeuclidiană fiind bazată pe noţiunea de perpendicularitate. Totuşi astfel de curbe în planul neeuclidian nu au fost încă studiate din cauza dificultăţilor pe care le implică tratarea lor analitică.

I

Introducem mai întîi noţiunea de transformare pedală în planul proiectiv.

DEFINIŢIE. Fie o conică C şi un punct O în planul proiectiv. Dacă d este o dreaptă arbitrară în plan, dreapta conjugată ei în raport cu conica C, şi care trece prin punctul O, intersectează pe d în punctul P. Transformarea Π prin care dreptei d îi corespunde punctul P o numim transformare pedală a planului în raport cu conica C şi faţă de punctul O. Inversa acestei transformări, prin care punctului P îi corespunde dreapta d incidentă cu el în modul definit mai sus, o numim transformare antipedală.

Considerăm triunghiul format de punctul $O = F_3$ şi de punctele de intersecţie F_1 , F_2 ale polarei lui O faţă de conica C cu această conică. Din definiţia precedentă rezultă că transformarea pedală introdusă este biunivocă, cu excepţia laturilor şi vîrfurilor triunghiului $F_1F_2F_3$. Unei laturi F_iF_k a triunghiului $F_1F_2F_3$ (i, k = 1,2,3 şi diferite) îi corespund toate punctele acestei laturi, iar unui vîrf F_i, prin transformarea inversă, îi corespund toate dreptele ce trec prin F_i.

Construcţia dată prin definiţia de mai sus se poate adapta şi în cazul în care conica tangenţială C este degenerată în fasciculele de drepte cu centrele în punctele F_1, F_2. Rezultă însă în mod simplu că transformarea Π rămîne aceeaşi dacă se înlocuieşte conica C printr-o altă conică C' bitangentă lui C în punctele F_1 şi F_2. Într-adevăr, fie d o dreaptă oarecare a planului care are polul P' faţă de conica C'. Dreapta d intersectează $F_1 F_2$ în punctul M care are aceeaşi polară p faţă de conicele C şi C'. Dreapta p trece prin punctul O iar P' se află pe OP.

Dacă notăm cu R polaritatea în plan faţă de conica C (presupusă proprie) şi cu K transformarea patratică involutivă de tip Cremona cu punctele fundamentale $F_1F_2F_3$, rezultă direct că transformarea pedală Π definită mai sus este produsul transformărilor R şi K în această ordine, deci

$$\Pi = KR \tag{1}$$

Fie Γ o curbă oarecare în plan. Aplicînd transformarea Π tangentelor curbei Γ se obţine o curbă (punctuală) P pe care o vom numi pedala proiectivă a curbei Γ. Dacă aplicăm această transformare punctelor curbei Γ se obţine o curbă $\mathcal{P}^{-1}$ pe care o numim antipedala proiectivă a curbei Γ.

Se vede uşor că în planul euclidian, cînd conica C este un cerc iar punctul O este centrul său, curba $\mathcal{P}$ coincide cu pedala (podara) obişnuită a curbei Γ în raport cu punctul O. Din formula (1) rezultă că în acest caz pedala curbei Γ este transformata acestei curbe prin produsul dintre polaritatea în raport cu cercul C şi inversiunea determinată de acest cerc, fapt stabilit anterior de S. L i e şi S c h e f f e r s [3].

Dacă curba Γ este o curbă algebrică de ordinul n şi de clasa m, din formula (1) rezultă următoarele proprietăţi ale pedalei proiective $\mathcal{P}$ a curbei Γ.

Proprietatea 1. Ordinul curbei este $n' = 2m$

Într-adevăr, curba $R(\Gamma)$ are ordinul m, iar K fiind o transformare patratică, curba $\mathcal{P} = KR(\Gamma)$ are ordinul $n' = 2m$.

Proprietatea 2. Dacă curba Γ nu este tangentă la nici una din laturile triunghiului fundamental $F_1F_2F_3$ $(O = F_3)$ al transformării K, atunci curba $\mathcal{P}$ admite punctele fundamentale ca puncte multiple de ordinul m.

Această proprietate rezultă direct din proprietatea cunoscută a transformării biraţionale patratice K.

Proprietatea 3. Clasa m' a curbei $\mathcal{P}$ satisface relaţia $m' = n + 2m$.

Pentru demonstraţie să presupunem că poziţia curbei Γ faţă de triunghiul fundamental este cea mai generală, anume că Γ nu trece prin punctele fundamentale. Rezultă atunci că R (Γ) nu este tangentă laturilor triunghiului fundamental, deci punctele fundamentale sînt puncte multiple de ordinul m ale curbei $\mathcal{P}$ cu tangente distincte. Pentru curba $\mathcal{P}$ avem formula lui Plücker

$$m' = n'(n' - 1) - 2d' - 3k' \tag{2}$$

unde d' şi k' sînt respectiv numărul punctelor duble nodale şi cuspidale ale curbei $\mathcal{P}$. În baza formulei (1) punctele duble d' ale curbei $\mathcal{P}$ provin din cele t tangente duble ale curbei Γ, iar în afară de acestea, un punct fundamental ca punct multiplu de ordinul m (Proprietatea 2) este echivalent cu $\frac{m(m-1)}{2}$ puncte duble, deci $d' = \frac{3m(m-1)}{2} + t$. Punctele cuspidale ale lui $\mathcal{P}$ provin numai din cele i tangente inflexionale ale lui Γ deci $k' = i$. Înlocuind în formula (2) avem

$$m' = 2m(2m-1) - 3m(m-1) - 2t - 3i \qquad \text{sau}$$

$$m' = m(m+1) - 2t - 3i$$

Din formula $n = m(m-1) - 2t - 3i$ corespunzătoare curbei Γ rezultă

$$m' = n + 2m$$

Cazul cînd curba Γ are în punctele fundamentale puncte multiple de ordin de multiplicitate respectiv p_1, p_2, p_3 se poate trata analog, proprietatea fiind de asemenea valabilă.

Proprietatea 4. Curbele Γ și $\mathcal{P}$ au același gen.

Proprietatea este evidentă, avînd în vedere că genul unei curbe este invariant atît printr-o polaritate cît și printr-o transformare patratică cremoniană.

Proprietatea 5. Curba $\mathcal{P}$ este tangentă la Γ în mn puncte.

Într-adevăr, transformarea KR fiind biunivocă (cu excepția punctelor situate pe laturile triunghiului fundamental) există în general o corespondență biunivocă între punctele lui $\mathcal{P}$ și tangentele lui Γ. Fie P un punct al curbei $\mathcal{P}$. Prin acest punct se pot duce la Γ m tangente. Una dintre acestea τ^* este tangenta corespondentă punctului P, iar pe celelalte tangente τ_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ notăm respectiv cu P_i punctele corespondente lor, situate pe curba $\mathcal{P}$. Dacă punctul P se află pe Γ, atunci una din tangentele τ_i, de exemplu τ_1 coincide cu τ^* deci P_1 coincide cu P, adică τ^* este tangentă comună curbelor P și Γ în punctul P. Curbele $\mathcal{P}$ și Γ avînd $2mn$ puncte comune rezultă că sînt tangente în mn puncte.

Proprietatea 6. Curba $\mathcal{P}$ conține punctele de contact situate pe C ale tangentelor comune lui C și Γ.

Proprietatea rezultă direct din definiția pedalei proiective.

Din această proprietate precum și din cele stabilite mai sus rezultă încă și următoarele consecințe:

Consecința 1. Dintre cele 4 m puncte comune curbelor $\mathcal{C}$ și $\mathcal{P}$, un număr de $2m$ sînt punctele de contact ale tangentelor comune lui C și Γ iar celelalte $2m$ sînt confundate în punctele F_1, F_2 de ordin de multiplicitate m.

Consecința 2. Dacă curbele C și Γ sînt tangente în punctul P, curba $\mathcal{P}$ va fi de asemenea tangentă curbelor C și Γ în acest punct.

Următoarele proprietăți ale pedalei proiective $\mathcal{P}$ se referă la situații particulare ale curbei Γ față de triunghiul fundamental.

Proprietatea 7. Dacă laturile F_2F_3, F_3F_1, F_1F_2, ale triunghiului fundamental sînt respectiv tangente multiple de ordinul t_1, t_2, t_3, la curba Γ, atunci curba $\mathcal{P}$ este degenerată într-o curbă de ordinul $2m - t_1 - t_2 - t_3$ și în laturile triunghiului fundamental considerate respectiv de cîte t_1, t_2, t_3 ori.

Într-adevăr, în acest caz $R(\Gamma)$ are în punctele fundamentale F_1, F_2, F_3 puncte multiple de ordin respectiv t_1, t_2, t_3 şi deoarece prin transformarea K punctului F îi corespund toate punctele dreptei $F_i\,F_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3$ şi diferite) proprietatea rezultă în mod simplu.

Proprietatea 8. Dacă curba Γ admite punctele fundamentale F_i $(i = 1, 2, 3)$ ca puncte multiple de ordin respectiv p_i $(i = 1, 2, 3)$, atunci curba $\wp$ va avea în punctele fundamentale F_i, respectiv p_i ramuri cu tangente confundate.

Într-adevăr, în acest caz curba $R(\Gamma)$ admite laturile triunghiului fundamental F_2F_3, F_3F_1, F_1F_2, ca tangente multiple de ordin respectiv p_1, p_2, p_3. Ţinînd seama că prin transformarea K toate punctele laturii $F_i\,F_j$ se transformă în punctul F_k $(i, j, k = 1, 2, 3$ şi diferite) rezultă proprietatea enunţată.

Proprietatea 9. Dacă curba Γ este tangentă dreptei $F_i\,F_k$ în punctul F_i, atunci o ramură a curbei $\wp$ va fi de asemenea tangentă acestei drepte în punctul F_i.

Proprietatea se verifică în toate cazurile care se prezintă, ţinînd seama de formula (1) şi de proprietăţile transformării K.

În sfîrşit, o proprietate care se referă la poziţia particulară a punctului O faţă de conica C este următoarea:

Proprietatea 10. Dacă punctul O este situat pe conica C, atunci cele m ramuri ale curbei $\wp$ sînt osculatoare în punctul O unei conice C^*, care este transformata lui C printr-o omologie armonică de centru O şi de axă arbitrară.

Într-adevăr, în acest caz transformarea K are punctele fundamentale coincidente $(F_1 = F_2 = F_3)$ şi din aceasta rezultă în baza proprietăţilor acestei transformări [1] că cele m ramuri ale curbei $\wp$ care trec prin punctul O vor fi osculatoare între ele în acest punct. Transformata unei drepte d oarecare din plan va fi o conică C^* care trece prin punctele F_1, F_2, F_3, deci osculatoare fiecăreia din ramurile curbei $\wp$ în punctul O. Conica C^* este transformata lui C printr-o omologie armonică de centru O şi de axă d şi astfel proprietatea este demonstrată.

II

Transformarea pedală introdusă în plan, permite studiul curbelor pedale (podare) într-o geometrie cayleyană în general, în care conica C are rolul de absolut al geometriei.

Unele proprietăţi ale curbelor pedale în planul euclidian se explică simplu pe această cale, avînd în vedere că în acest caz, absolutul este format de conica tangenţială degenerată în fasciculele de drepte cu centrele în punctele ciclice ale planului, iar laturile triunghiului fundamental al transformării K sînt dreptele izotrope ce trec prin punctul O, şi dreapta de la infinit. Astfel pedalele conicelor sînt în general cuartice bicirculare. Pedala unei parabole, însă este o cubică circulară, şi aceasta rezultă din faptul că parabolele sînt tangente dreptei de la infinit F_1F_2, iar cuartica degenerează în cubica respectivă şi dreapta de la infinit.

Dar noţiunea de pedală-proiectivă introdusă mai sus se poate aplica la studiul curbelor pedale în geometriile neeuclidiene, folosind modelul lui Klein. Într-adevăr, pedala unei curbei Γ în raport cu punctul O în planul neeuclidian, va fi tocmai pedala proiectivă $\mathcal{P}$ a curbei Γ în raport cu acest punct, faţă de conica C care este absolutul planului.

În geometria hiperbolică mai ales, unde absolutul este o conică reală, pe lîngă cazul cînd punctul O este un punct propriu (interior absolutului C) se mai pot trata cu ajutorul generalizării date şi cazurile în care punctul O este un punct de la infinit (situat pe absolutul C), sau este un punct ideal (exterior absolutului C), cînd fasciculul de drepte cu centrul în punctul O reprezintă o familie de drepte asimptotic paralele sau superparalele.

Pentru o curbă algebrică oarecare Γ situată în planul neeuclidian, proprietăţile curbei $\mathcal{P}$ deduse în prima parte a lucrării, sînt în acelaşi timp proprietăţi ale curbei pedale asociate ei în acest plan.

În cele ce urmează vom studia curbele pedale ale conicelor în planul hiperbolic.

În acest caz, curba Γ fiind o conică, din proprietăţile 1, 2, 6 rezultă că pedala ei $\mathcal{P}$ este o cuartică raţională cu trei puncte duble F_1, F_2, F_3 dintre care F_1, F_2 sînt situate pe absolutul planului şi în afară de aceste puncte, curba pedală mai intersectează absolutul în cele patru puncte de contact ale tangentelor comune absolutului C şi curbei Γ. Conform proprietăţii 5 mai rezultă că pedala $\mathcal{P}$ a conicei Γ este tangentă la aceasta în patru puncte reale sau imaginare.

După aceste proprietăţi generale, tratăm în continuare acele proprietăţi ale pedalei unei conice Γ care depind de natura acestei conice faţă de absolutul C.

Conicele din planul hiperbolic se clasifică după numărul punctelor ş tangentelor comune cu absolutul C precum şi după natura acestor elemente, în următoarele tipuri de conice: hiperbolă concavă, hiperbolă convexă, semihiperbolă, elipsă, parabolă hiperbolică concavă, parabolă hiperbolică convexă, parabolă eliptică, parabolă osculatoare, linie echidistantă (hiperciclu), cerc, oriciclu.

Vom caracteriza curbele pedale ale conicelor, după poziţia reciprocă a acestora faţă de absolutul C. Astfel dacă punctul O este ideal atunci punctele F_1 şi F_2 sînt puncte situate la infinit care vor fi noduri sau puncte izolate ale curbei $\mathcal{P}$ după cum din aceste puncte se pot duce tangente reale sau imaginare la curba Γ.

Vom folosi această observaţie la studiul curbei pedale.

Să considerăm de exemplu o hiperbolă concavă, deci o conică Γ care are patru puncte şi patru tangente comune reale cu absolutul C. Considerăm tangentele la C în punctele de intersecţie cu conica Γ. Aceste tangente împreună cu C şi Γ determină în plan anumite regiuni (fig. 1). După cum punctul O este situat în interiorul uneia sau alteia din aceste regiuni, proprietățile curbei pedale $\mathcal{P}$ față de absolutul C vor fi diferite și le rezumăm în următorul tablou :

Regiunea la care aparține punctul O	Natura punctelor			Numărul de ramuri ale lui P situate în interiorul absolutului C
	F_1	F_2	F_3	
I	izolat	izolat	nod ideal	2
II	nod	nod	nod ideal	4
III	nod	izolat	nod ideal	3
IV	nod	nod	nod ideal	4
V	nod	nod	izolat	4
VI	izolat	izolat	izolat ideal	2
VII	nod	izolat	izolat ideal	3
VIII	imaginar	imaginar	nod propriu	2
IX	imaginar	imaginar	izolat propriu	2

În fig. 1 este reprezentată curba pedală a hiperbolei convexe în cazul cînd punctul O aparține regiunii VIII.

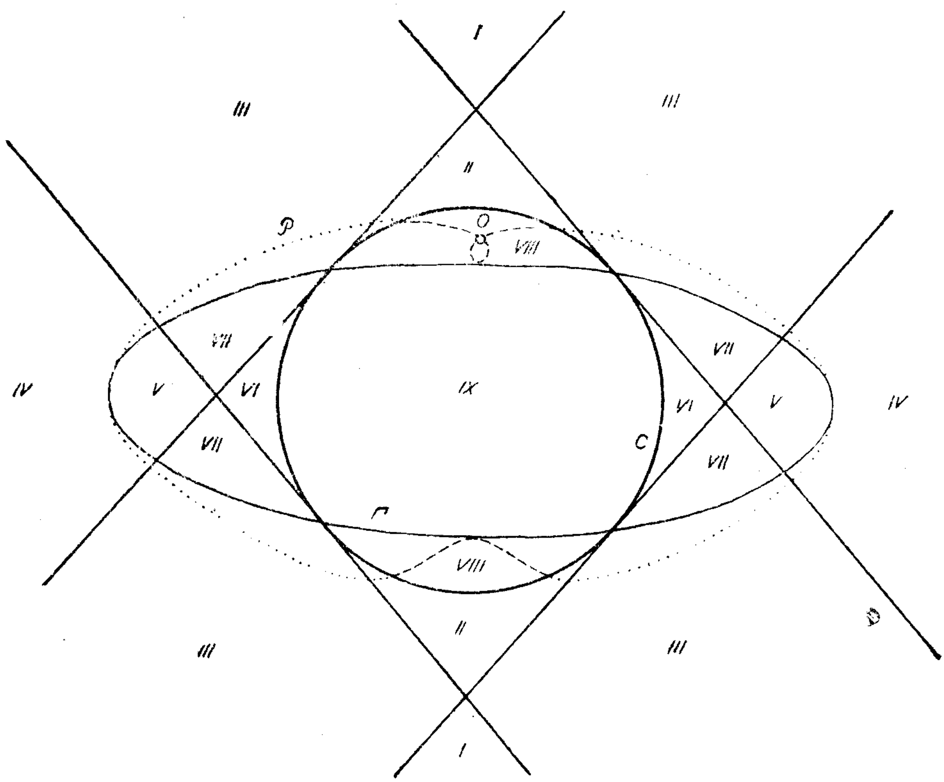


Fig. 1.

Dacă punctul O este situat pe C, deci este un punct de la infinit al planului hiperbolic, atunci conform proprietății 10, cele două ramuri ale pedalei P ce trec prin punctul O sînt tangente absolutului C și osculatoare unei parabole neeuclidiene în acest punct.

Dacă O aparține unui arc al lui C situat în interiorul lui Γ cele două ramuri de mai sus sînt imaginare.

Dacă O este situat pe Γ, conform proprietății 8 rezultă că punctul O este un punct cuspidal al lui P. Dacă O este un punct ideal, F_1 și F_2 sînt puncte izolate, iar dacă O este un punct propriu, atunci F_1 și F_2 sînt imaginare.

Dacă O este un punct comun lui Γ și C atunci din cele de mai sus rezultă că O este un punct cuspidal de speța a doua pentru curba $\mathcal{P}$.

Dacă punctul O este situat pe curba $R(\Gamma)$ atunci conform proprietății 7 pedala P degenerează în latura F_1F_2 și o cubică avînd în O un punct dublu.

Dacă punctul O este situat pe o tangentă a curbei Γ dusă într-un punct A comun acesteia cu absolutul C, atunci unul din punctele fundamentale anume $F_1=A$ va fi punct cuspidal al pedalei $\mathcal{P}$. În cazul în care punctul O este un punct de intersecție a două astfel de tangente, atunci F_1 și F_2 vor fi ambele cuspidale.

Dacă punctul O aparține unei tangente comune absolutului C și conicei Γ atunci conform proprietății 7 pedala P este degenerată în această tangentă comună și o cubică avînd un punct dublu.

Dacă O este punctul de intersecție a două tangente comune curbelor C și Γ deci dacă este un focar (neeuclidian) al conicii Γ, atunci pedala P este degenerată în aceste tangente comune și într-o conică ce trece prin punctele de contact T_1, T_2, T_3 T_4, ale tangentelor comune care este o hiperbolă neeuclidiană.

Cu aceeași metodă se pot studia într-un mod analog și curbele pedale ale celorlalte tipuri de conice din planul hiperbolic. Printre acestea un deosebit interes îl prezintă ciclurile, ale căror curbe pedale le studiem în cele ce urmează.

Considerăm o linie echidistantă, reprezentată în modelul lui Klein printr-o conică Γ bitangentă absolutului C în punctele T_1 și T_2. Fie S polul dreptei T_1T_2 în raport cu C. Din consecința 2 a proprietății 6, rezultă că pedala $\mathcal{P}$ a conicei Γ va fi tangentă la C și Γ în punctele T_1 și T_2. Celelalte puncte de contact ale curbelor $\mathcal{P}$ și Γ sînt punctele de intersecție M și N ale dreptei OS cu conica Γ. Într-adevăr, polul tangentei în M(și N) la Γ este situat pe dreapta SM, deci punctele M și N sînt puncte comune curbelor P și Γ și atunci, după proprietatea 5 rezultă că sînt puncte de contact ale acestor curbe.

În cele ce urmează studiem proprietățile pedalei echidistantei Γ după poziția punctului O față de C și Γ.

Dacă O este un punct ideal, atunci punctele F_1 și F_2 sînt noduri iar pedala $\mathcal{P}$ are 4 ramuri situate în interiorul absolutului C (fig. 3).

Dacă O este un punct propriu, dar exterior lui Γ, punctele F_1 și F_2 sînt imaginare și întreaga pedală P este situată în interiorul absolutului C, avînd un nod în punctul O.

Dacă O este un punct propriu, dar situat în interiorul lui Γ, atunci curba P va fi de asemenea conținută în interiorul absolutului C, avînd în O un punct izolat.

Dacă punctul O se află pe absolutul C, atunci conform proprietății 10 rezultă că cele două ramuri ale pedalei P sînt tangente la C în O fiind osculatoare între ele.

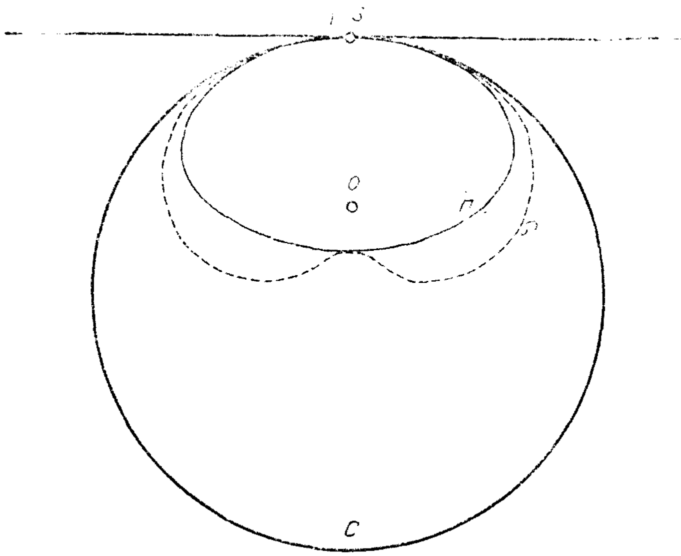


Fig. 2.

Dacă punctul O este situat pe Γ, după proprietatea 8 rezultă că el este un punct cuspidal al pedalei $\mathcal{P}$.

Dacă punctul O este situat pe curba $R(\Gamma)$, atunci $\mathcal{P}$ degenerează în dreapta F_1F_2 și o cubică avînd un punct dublu în O. (proprietatea 7).

În cazul în care punctul O este situat pe tangenta ST_1 ($T_1 = F_1$) dar este diferit de punctele S și T_1, atunci după proprietatea 7 rezultă de asemenea că pedala $\mathcal{P}$ degenerează în dreapta ST_1 și o cubică avînd un nod punctul F_2.

Dacă punctul O coincide cu T_1, atunci conform proprietăților 7, 9, 10 rezultă că pedala $\mathcal{P}$ degenerează în tangenta ST_1 considerată de două ori și o conică bitangentă la C în punctele T_1, T_2 situată în interiorul lui C. Cu alte cuvinte, pedala unei echidistante în raport cu unul din punctele de la infinit ale dreptei de bază este de asemenea o echidistantă avînd aceeași bază.

Dacă punctul O coincide cu S, atunci curba pedală $\mathcal{P}$ degenerează în dreptele ST_1 și ST_2 și însăși conica Γ ceea ce corespunde proprietății cunoscute că normalele la echidistantă sînt perpendiculare pe dreapta de bază.

Să considerăm acum o conică Γ osculatoare lui C în punctul S avînd patru puncte comune cu C în acest punct. (fig. 2). Ea reprezintă în modelul considerat un oriciclu. Proprietățile pedalei lui Γ se deduc în acest caz din proprietățile pedalei unei echidistante, avînd în vedere că punctele T_1 și T_2 sînt confundate în S. De exemplu curba pedală $\mathcal{P}$ este osculatoare lui C în punctul S (fig. 2).

Cazurile corespunzătoare poziției punctului O în plan față de C și Γ se studiază analog. În figura 3 este reprezentat cazul în care punctul O este punct propriu situat în exteriorul oriciclului.

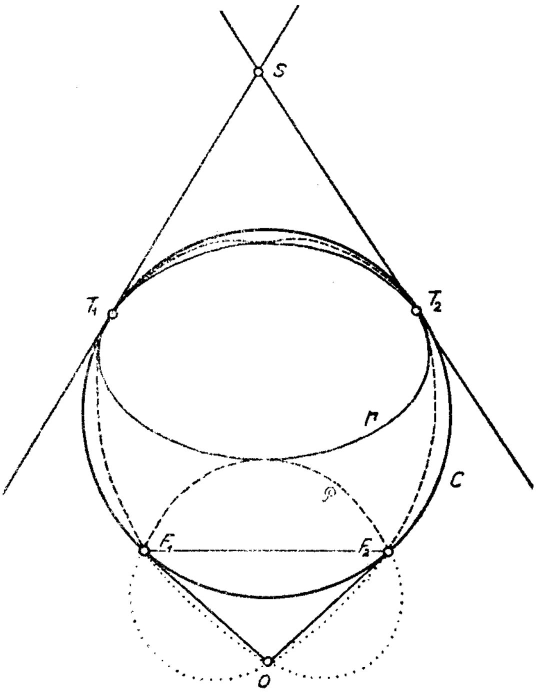


Fig. 3.

Ca o ultimă aplicație să tratăm următoarea problemă elementară în geometria hiperbolică.

Să se afle locul geometric al punctelor de intersecție a dreptelor perpendiculare din două fascicule date cu centrele în punctele O și P.

Aceasta revine la a afla pedala punctului P (Curba Γ se reduce la fasciculul de drepte cu centrul în punctul P, $m=1$). Rolul punctelor O și P este în acest caz simetric.

Din proprietățile 1 și 2 rezultă că acest loc geometric este o conică C care trece prin punctele O și P și prin punctele de contact ale tangentelor duse din aceste puncte la absolutul C.

Folosind proprietățile pedalei generalizate $\mathcal{P}$, putem stabili natura acestei conice după poziția punctelor O și P față de absolutul C.

Distingem următoarele cazuri:

Dacă punctele O și P sînt ideale, conica C are 4 puncte reale cu absolutul, deci este o hiperbolă.

Dacă punctele O și P sînt ambele proprii, atunci C are 4 puncte imaginare cu absolutul C, deci este o elipsă.

Dacă punctul P este ideal iar P este propriu (sau invers), atunci C are două puncte comune cu absolutul C, deci este o semihiperbolă.

Dacă punctul O este un punct de la infinit iar punctul P este ideal, atunci conica C intersectează absolutul C în două puncte reale și este tangentă la C în O, deci este o parabolă hiperbolică. În particular, dacă punctul P este situat pe tangenta în O, atunci C va fi o parabolă osculatoare. În cazul cînd punctul O este la infinit iar P este propriu, rezultă în mod asemănător că C este o parabolă eliptică.

În sfîrşit, dacă punctele O şi P sînt amîndouă puncte la infinit, atunci C va fi bitangentă absolutului C în punctele O şi P, deci este o linie echidistantă.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Doehlemann, *Geometrische Transformationen* (*II. Teil. Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen.*) Leipzig, 1908.
2. F. Klein, *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie.* Berlin, 1928.
3. G. Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven.* Leipzig, 1902.
4. N. N. Mihăileanu, *Geometrii neeuclidiene.* Bucureşti, 1952.

ПЛОСКИЕ ПОДАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В НЕЭВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Резюме)

В первой части работы вводится понятие плоских подарных преобразований следующим образом: пусть С коника (кривая второго порядка) и точка О в проэктивной плоскости. Произвольная прямая этой плоскости пересекает прямую, сопряженную с ней по отношению к конике С, проходящую через точку О — в точке Р.

Преобразование П, при котором прямой соответствует точка Р, называем подарным преобразованием плоскости, по отношению к конике С и точке О. Применяя преобразование П к тангенсам одной кривой Г, получим кривую Р (точечную), называемую проэктивной подарной кривой Г. Кривая Р в эвклидовой плоскости совпадает с обыкновенной подарной кривой Г, по отношению к точке О.

Из определения вытекает, что плоское подарное преобразование является произведением одной полярной с инволютивным квадратным преобразованием, типа Кремона, и на этой основе приводятся несколько свойств этих преобразований.

Во второй части работы, как применение исследуется проблема подарных кривых неэвклидовой плоскости в которой С играет роль абсолюта геометрии. Особенно изучаются подарные кривые коник в гиперболической плоскости. Показывается, также, что ортогональные радиусы в двух данных пучках прямых пересекаются в точках одной коники, природа которой устанавливается по положению центров пучков по отношению к области.

LES TRANSFORMATIONS PÉDALES PLANES ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

(Résumé)

Dans la première partie de leur étude les auteurs introduisent comme suit la notion de transformation pédale plane : on considère une conique C et un point O dans le plan projectif. Une droite arbitraire du plan coupe au point P sa droite conjuguée par rapport à la conique C et passant par le point O. La transformation Π par laquelle à la droite d correspond le point P reçoit la dénomination de transformation pédale du plan par rapport à la conique C et à l'égard du point O. En appliquant la transformation Π aux tangentes d'une courbe Γ on

obtient une courbe $\mathcal{P}$ (ponctuelle) nommée pédale projéctive de Γ. Dans le plan euclidien la courbe $\mathcal{P}$ coïncide avec la pédale habituelle de la courbe Γ à l'égard du point O. Il résulte de la définition qu'une transformation pédale dans le plan est le produit d'une polarité par une transformation quadratique involutive de type Cremona, proposition qui permet d'énoncer plusieurs de ses propriétés.

La seconde partie de l'étude traite à titre d'application, le problème des courbes pédales dans le plan non-euclidien où C joue le rôle de l'absolu de la géométrie. On étudie en particulier les courbes pédales des coniques du plan hyperbolique. On montre également que les rayons orthogonaux en deux faisceaux de droites données dans le plan hyperbolique ont leur intersection aux points d'une conique dont la nature peut être précisée d'après la position des centres des faisceaux par rapport à l'absolu.

ASUPRA UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE

de

IOSIF HITZIG (Bucureşti)

Omagiu profesorului Dr. Th. ANGHELUŢĂ cu ocazia împlinirii a 80 de ani

Aprofundarea studiului unor oscilatori conduce la ecuaţii diferenţiale de forma:

$$F(n) \equiv \ddot{x} - 2\varepsilon(sgn\dot{x})(1-\mu^2x^2)\dot{x}^{2n} + P(x) = E \sin rt \qquad (1)$$

unde :

$$P(x) = \text{polinom impar, astfel ca } P(x) \geqslant 0, \text{ pentru } x > 0,$$
$$P(x) < 0, \text{ pentru } x < 0,$$

E, r, ε, μ, n sînt constante.

În legătură cu această ecuaţie diferenţială arătăm următoarele :

I. *Ecuaţia (1) admite pentru n întreg* $\geqslant 1$ *ca soluţie, în primă aproximaţie* :

$$x = c \cos (t + \theta) + g \sin r\, t,$$
c, g şi θ fiind constante.

Pentru demonstrarea teoremei, observăm că datorită imparităţii lui $P(x)$ este suficient, să se studieze ecuaţia :

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(1 - \mu^2x^2)\dot{x}^{2n} + P(x) = E \sin rt, \qquad \dot{x} < 0. \qquad (2)$$

Reducem ecuaţia (2) la o formă mai simplă, punînd :

$$x = X + g \sin rt,\ g = \frac{E}{1-r^2},\ P(x) = x + \varepsilon Q_{2q+1}(x). \qquad (3)$$

Avem :

$$\ddot{X} + X = \varepsilon \{ [2\mu^2(X + g \sin rt)^2 - 2] \cdot [X + gr \cos rt]^{2n} - - Q_{2q+1} (X + g\sin rt)\} \qquad (4)$$

Pentru $\varepsilon = 0$, avem ecuaţia generatoare :

$$\ddot{X} + X = 0 \qquad (5)$$

a cărei soluţie generală este :

$$X = a \cos (t + \theta). \qquad (6)$$

După metoda lui Poincaré — Bogoliubov [1] avem:

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{[2\mu^2(a\cos\psi + g\sin\theta)^2 - 2]\cdot$$

$$\cdot[-a\cos\psi + gr\cos\theta]^{2n} - Q_{2q+1}(a\cos\psi + g\sin\theta)\}\sin\psi\, d\psi.$$

Calculul lui $A_1(a)$ fiind destul de complicat, pentru înlesnire, organizăm evaluările necesare în modul următor:

1. Pentru un moment facem abstracţie de factorii constanţi şi de coeficienţii polinomului $Q_{2q+1}(x)$.

2. Reducem expresia de sub semnul integralei la o formă cît mai concisă.

Considerăm, în consecinţă, expresia:

$$A_1^* = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{[(\cos\psi + \sin\theta)^2 + 1]\cdot[\sin\psi + \sin\theta]^{2n} +$$

$$+ Q^*_{2q+1}(\cos\psi + \sin\theta)\}\sin\psi\, d\psi,$$

unde:

$$Q^*_{2q+1}(x) = \sum_{m=1}^{q} x^{2m-1}.$$

Şi în dezvoltările următoare facem abstracţie de noi coeficienţi numerici. Avem aşa dar expresia:

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{[\cos^2\psi + 2\cos\psi\sin\theta + \sin^2\theta + 1]\sum_{p=0}^{2n}\sin^{2n-p}\psi\cos^p\theta +$$

$$+ \sum_{r=0}^{2m+1}\cos^{2m+1-r}\psi\sin^r\theta\}\sin\psi\, d\psi.$$

Avem mai departe:

$A = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V}$, unde:

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\psi\sin\psi\sum_{p=0}^{2n}\sin^{2n-p}\psi\cos^p\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{II} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \cos\psi\sin\psi\sin\theta\sum_{p=0}^{2n}\sin^{2n-p}\psi\cos^p\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{III} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin\psi\sin^2\theta\sum_{p=0}^{2n}\sin^{2n-p}\psi\cos^p\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{IV} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin\psi\sum_{p=0}^{2n}\sin^{2n-p}\psi\cos^p\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{V} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin\psi\sum_{r=0}^{2m-1}\cos^{2m+1-r}\psi\sin^2\theta\, d\psi$$

Este uşor de văzut că integralele I, II, III, IV şi V sînt nule.

Ca urmare avem $A_1(a) = 0$.

Rezultă $\dot{a} = 0$ şi deci $a =$ constant $= c$.

Astfel, soluţia în primă aproximaţie, a ecuaţiei (2) este :

$$x = c\cos(t + \theta) + g\sin rt.$$

Asupra construcţiei soluţiilor în aproximaţiile superioare vom reveni într-o altă lucrare, în care vom semnala noi proprietăţi. Cu acest prilej se va studia ecuaţia (1) în planul fazelor, în vederea determinării ciclelor-limită.

II. Un caz important, întîlnit adeseori în tehnica oscilatorilor este cazul $n = 1$, $E = 0$.

În legătură cu această ecuaţie, semnalăm următoarele :

Punînd $\dot{x}^2 = z$ şi deci $\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$, ecuaţia corespunzătoare este :

$$\frac{dz}{dx} + 4\varepsilon(1 - \mu^2 x^2)z + 2P(x) = 0,$$

a cărei integrală generală este :

$$z = e^{-4\varepsilon\left(x - \frac{\mu^2}{3}x^3\right)}\left|c - 2\int_0^x P(\xi)\,e^{4\varepsilon\left(\xi - \frac{\mu^2}{3}\xi^3\right)}d\xi\right|$$

Importanţa expresiei z constă în faptul că ea poate fi folosită pentru determinarea poziţiilor de repaos ale oscilatorului.

În adevăr, fie $x = x_0$ o poziţie de repaos, adică $z = 0$.

Atunci soluţia ecuaţiei este :

$$z = -2e^{-4\varepsilon\left(x - \frac{\mu^2}{3}x^3\right)}\int_{x_0}^{x} P(\xi)e^{4\varepsilon\left(\xi - \frac{\mu^2}{3}\xi^3\right)}d\xi.$$

Pentru o altă poziţie de repaos x_1 avem :

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi)e^{4\varepsilon\left(\xi - \frac{\mu^2}{3}\xi^3\right)}d\xi \equiv \varphi(x) = 0$$

Determinarea poziţiilor de repaos $x_1, x_2 \ldots$ se reduce deci la rezolvarea ecuaţiilor :

$$S(x_n) = S(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Se poate demonstra că mulţimea $\{x\}$ a poziţiilor de repaos este mărginită.

În adevăr, se observă că oscilaţii pot exista numai dacă :

$$|x| > \frac{1}{\mu}.$$

Pentru ca $\{x\}$ să fie mărginită superior, trebuie ca :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x P(\xi)e^{4\varepsilon\left(\xi-\frac{\mu^2}{3}\xi^3\right)}d\xi < \infty.$$

Îndeplinirea acestei condiții rezultă din faptul că pentru

$$P(\xi) = \sum_{m=0}^{q} c_{2m+1}\,\xi^{2m+1}$$

avem, după cum rezultă din calcul :

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) < \sum_{m=0}^{q} a_{2m+1}\,\Gamma(2m+2) = L < \infty.$$

Astfel avem :

$$\frac{1}{\mu} < x_{2k} < L.$$

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Bogoliubov și A. Mitropolski, *Metodele asimptotice în teoria oscilațiilor neliniare,* Moscova 1958.

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Резюме)

Сообщение содержит доказательство одной теоремы относительно решения, в первом приближении, одного класса нелинейных дифференциальных уравнений из техники колебаний:

$$F(n) = \ddot{x} - 2\varepsilon(\operatorname{sgn}\dot{x})(1-\mu^2x^2)\,\dot{x}^{2n} + P(x) = E\sin rt$$

В случае n = 1, E = 0, доказывается, между прочим, что множество положений покоя осциллатора является ограниченным.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Résumé)

La note contient la démonstration d'un théorème relatif à la solution, en première approximation, d'une classe d'équations différentielles non linéaires de la technique des oscillateurs :

$$F(n) = \ddot{x} - 2\varepsilon(\operatorname{sgn}\dot{x})(1-\mu^2x^2)\,\dot{x}^{2n} + P(x) = E\sin rt.$$

Pour le cas de $n = 1$, $E = 0$, on démontre entre autres propriétés que l'ensemble des positions de repos de l'oscillateur est limité.

GÉRESI ISTVÁN ARITMETIKÁJA (II)

TÓTH SÁNDOR

III. GÉRESI ARITMETIKÁJÁNAK ÖSSZEHASONLÍTÁSA A KORABELI ARITMETIKÁKKAL

Egybevetve Géresi aritmetikáját a XVI. századbeli aritmetikákkal, sokatmondó hasonlatosságokat tapasztalunk.

A szabályokat, tételeket Géresi sem bizonyítja. Egyes módszertani elvek jelentkezése aritmetikájában kimutatható. A fokozatosság elvét Géresi iparkodik szem előtt tartani, példáiba fokozatosan mind nagyobb számokat iktat be, és az egyszerűtől kiindulva jut el a bonyolultabb esetekhez. Egy-egy fejezet bekezdésében csoportosítja, előrebocsátja azokat a szabályokat, amelyekre szüksége lesz a műveletek elvégzésekor stb. Különben, korának megfelelően, Géresi is a specieseket a következő öt lépésben tárgyalja : értelmezés, feladat, szabály, gyakorlat és próba. Ez jellemző a XVI. század aritmetikáira.

A műveletek keresztülvitelénél ugyanazokat a fogyatékosságokat találjuk, mint a nyugati aritmetikákban. Tovább élnek itt is a homokos táblákon kialakult eljárások, bizonyos mértékben néha még a számjegyek kihúzogatása is. Különben Géresi leginkább olasz módra számít[1]. Megjegyezhetjük, hogy a számjegyek pontos elrendezésére, elhelyezésére Géresi már súlyt helyez. A 4. lapon például azt írja : „az eöszve adasban penigh ezt igen eszedbe kel venned hogy az figurak azaz a beőteok szepen egymas ala iratasanak szep rendel hogy az keppen konnyeb legien egy summaba hozni ugy hogy az első az elsőnek beötoi ala irattasek, az masik az masik ala az harmadik az harmadik ala es igy mind addigh az migh az szamnak beőtoi ki telnek".

Műveleti jeleket Géresi sem használ. A + és — jelek csak a Regula Falsi fejezetében fordulnak elő párszor, de csak mint a többlet vagy hiány jelei. A magyar aritmetikák közül csak az 1743-ban Maróthi által kiadott aritmetika[2] vezeti be a +, — és = jeleket. De ő sem használja őket következetesen.

---

[1] A különböző aritmetikai fogalmak, számítási eljárások, szakkifejezések történetét lásd a függelékben.

[2] Maróthi György, *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége,* Debretzenben, 1743.

Az alapműveletek próbájaként Géresi is leggyakrabban a 9-es próbát alkalmazza, több esetben pedig a fordított műveletet. A műveletek próbáinak külföldön is ezek voltak a legelterjedtebb módjai.

Aritmetikai szakkifejezései megegyeznek az Európa-szerte használtakkal. Ezek : a „species", „proba", exemplum", „facit", „summa", „regula", „compendium", „cautio", „observatio", stb. A következőkben arról is meggyőződünk, hogy az egyes specieseknél előforduló szakkifejezések is nagy egyezést mutatnak az Európa többi részén abban az időben használatos kifejezésekkel.

A nagyobb számok elnevezésében a korabeli általános használathoz igazodik. Az ezernél nagyobb számneveket az ezer többszörös ismétlésével fejezi ki. Igy 10^3 = ezer, 10^6 = ezerni ezer, 10^9 = ezerszer valo ezerniezer stb. Nyugati minták szerint, a kiolvasás megkönnyítése végett, vonalakkal a szám jegyeit 3-as csoportokba osztja. (3. ábra). Meg is magyarázza a vonások hasznát (3. ábra). A millió, billió stb. olasz származású számneveket nem ismeri. Ebben az időben ezeket az újkeletű neveket nyugaton is csak néhány jeles matematikus használta. Nálunk jóval később kezdik használni. A Kolozsvári Aritmetika a „De numeratione" című fejezetben ugyan egyszer megnevezi a milliót : „Es eszt az utlolsó számot hiyác Milliomnac, és Magyarul tömény ezernec", de később sehol sem használja. Sem Pápai Páriz 1667-i kéziratos Aritmetikája, sem Lugosi említett 1669-i kézirata sem használja az új neveket. Egy 1695-ből származó kéziratos *Arithmeticae Practicae Compendium* (a volt kolozsvári ref. kollégium könyvtárában)-ban már előfordul a „milliones Seu millena millia". Moróthi használja a millió (10^6) és bimillió (10^{10}) elnevezést.

A zero neve Géresinél még „czifra". A „czifra" elnevezést még csak ebben az értelemben használja. (A Kolozsvári Aritmetikában a cyphra már általános számjegy.) Géresinél az általános számjegy fogalma kotha, beőtő, figura, numerus vagy zam, de ezeken rendszerint nem érti a zérót is.

A helyérték megkülönböztetésére szolgáló „locus" Géresinél nem fordul elő. Ő „egy rendbely figurak" és „mas rendbeli figurak"-ról beszél.

Géresi érthető módon nem ismerteti a kalkulusokkal való számolásokat (a Debreceni, a Kolozsvári Aritmetika és a legtöbb XVI. századbeli aritmetika igen). Ugyanis a XVI. században már eldőlt az abacisták és algoristák küzdelme, és ekkorra már nyugaton is eltűntek a kalkulusok. Megjegyzem, Maróthi újból — utoljára a magyar nyelvü matematikai irodalomban, — beveszi az aritmetikájába, "Paraszt számvetés vagy Calcularis Arithmetica" néven. Úgy említi ezt a számítási módot, mint amivel a régiek éltek, mielőtt a számvetés Ázsiából Európába jött, s mint amivel még az ő idejében is élnek „némelly görög és más a'féle kereskedők ; sőt néhol az irást tudatlan paraszt Emberek is."

A species értelmét Géresi tágabban értelmezi, mint a korabeli művek. Gemma Frisius például már csak négy speciesről beszél és (ő kivételesen) a fogalom értelmezését is megkísérli. Géresi még a régebbi szerzők nyomán 12 speciest ismertet (könyve első lapján felsorol nyolcat és a következőn még négyet). Így nem beszélhet az alapműveletek közötti kapcsolatról, fordított műveletekről sem. Nem beszél a gyökvonásról, sem a törtekről (sem a közönséges, sem a tizedes törtekről). Úgy látszik, a XVII. század elején ezeket nem tanították a bányai iskolában.

A „De numeratione" című fejezetben Géresi nem ismerteti a figurákat és a czifrát, nem beszél a számok felosztásáról (digiti, articuli, compositi, stb.), nem tisztázza a helyérték fogalmát. Ezekben különbözik a legtöbb korabeli aritmetikától.

Az összeadás neve Géresinél is „additio", mint a nyugati aritmetikákban. Ez a név már a klasszikus latinban is előfordul. Az összeadás definiciója sem különbözik a szokásos akkori definicióktól: „Az Additio nem egieb hanem sok szamoknak egy zummaban valo hozasa". Az összeadás kivitelezése azonos a maival, csak a nagyon sok összeadandó esetén, amikor egy oszlop jegyeinek összege két- vagy háromjegyű, alkalmaz egy ma már nem szokásos eljárást. A részösszegeket nem írja szigorúan egymás alá külön sorokba, hanem a részösszegek egyes számjegyeivel a felsőbb sor üresen levő helyeit tölti ki (4. ábra). Ez a ma már értelmetlennek tűnő eljárás a régi „német módra" végzett eljárás maradványának tekinthető. A régi módon végzett szorzásnál a részszorzatok számjegyeit valóban így helyezték el, mintha összetolták volna a különböző sorokban levő számjegyeket, amennyire csak lehet, hogy egy hely se maradjon üresen. A XVII. században ez az eljárás már sehol sem volt használatban. Nem ismerek egyetlen magyar nyelvű irást sem, amelyben ez a számítási eljárás szerepelne. De lám, Géresi kéziratában még kísért a régi eljárás emléke. Az összeadás mai módja a XV. században alakult ki (régebben balról jobbra haladtak), s megnevezésére külföldön is több szót használtak. Tartaglia például 12 szinonimát használ.

A kivonás Géresinél is „subtractio". Több esetet tárgyal: a kivonandó jegyei kisebbek, mint a kisebbítendő jegyei, a kivonandóban nagyobb jegyek is előfordulnak, mint a kisebbítendő megfelelő jegyei, a kisebbítendőben zérók is előfordulnak, a kisebbítendő több számjegyű, mint a kivonandó stb. Alkalmazásakor megkülönbözteti „a penz zamot" vagy „esztendőszamot" kereső eseteket. Eljárása egységes. A kivonandó jegyeit kivonja a kisebbítendő megfelelő jegyeiből. Amikor nem lehet, hozzáad 10-et a felső és 1-et az eggyel balra levő alsó jegyhez. Más XVI. századbeli eljárásról nem beszél. Nem ismeri azt a komplementáris eljárást sem, amelynél a kivonandó jegyeinek a tízes komplementumaival operálnak, pedig ez nagyon divatos volt.

A szorzást Géresi „multiplicatio" vagy „sokasítas"-nak nevezi. A korabeli aritmetikákban is a multiplicatio szerepel. A következő században Maróthi küzd a sokasítás kifejezés ellen, és inkább a sokszorozás elnevezést ajánlja. Géresi szerint, „Az multiplicatio semmi nem egyeb hanem egy szamnak az masodik szammal valo megh sokasitasa, avagy vagy az egyben sommalasnak rövideden valo uttya". Ez a meghatározás világosan utal arra, hogy a szorzás az összeadásnak egy esete, amiről a XVI. században ritkán beszélnek.

Géresi is hangoztatja az egyszeregy ismeretének a fontosságát, amelyet „ugy kel tudnod konyveden kivül hogy ugjã pereghjen a nyelved rajta" (Ez a meghatározás benne van a Kolozsvári Aritmetikában is.) Géresi közöl egy „Tabula Pitagoricat", amely azonban kiszakadt. Ez a tábla megvan a Kolozsvári Aritmetikában is. A Kolozsvári előre jelzi, hogy „Az könyvnec végibe megirjuk az derée Táblát Olasz Módra", mégsem közli a beígért táblát. Géresi kézirata végén valóban ott van a „Tabula Cebetis" (18. ábra). A Tabula Pitagorica után Géresi ismerteti, mint a XVI. századi aritmetikák, a regula pigrorumot.

A XV. és XVI. századi aritmetikák a szorzásnak több módját, néha még nyolc féle eljárást is tárgyalnak (Luca Pacioli, 1494 és N. Tartaglia, 1556), a gyakorlati alkalmazásuk azonban nem volt általános. Prodoscimi de Beldomandi 1410-ben írt algoritmusában már a szorzás mai módját tanítja. Ez az eljárás is az abakuszon történő számításból nőtt ki. Borghi (1484) és Cardano (1539) már kizárólag csak a modern eljárást (balra haladó részszorzatokkal) tanítja.

Géresi ugyancsak a modern eljárást tanítja. A szorzandót és szorzót egymás alá írja, aláhúzza és a vonal alá írja a részszorzatokat. Más eljárást nem ismertet. Ha O-ban végződik a szorzandó és a szorzó, megmondja, hogy „rekezd ki az ket O", mégis elvégzi „az hosszu operatio szerent" is. Amikor a szorzó utolsó jegye zéró, azt áthúzza. Tanítja a szorzást 10, 100, 1000-rel is.

Géresi nevet ad a szorzásban szereplő számoknak: „az Deakok az felső szamot multiplicandusnak hijak, az alsot multiplicans, avagy multiplicatornak, az linia alat valot multiplicatusnak hijak". Később a szorzatot summanak is nevezi.

A multiplicatio kifejezést már az ókorban is használták. Columella a szorzatot summa ex multiplicatione-nak mondja. A multiplicare előfordul már Boetiusnál, és a középkorban is végig használják. A multiplicans és multipicandus kifejezések a középkor második felében keletkeztek.

Az osztást Géresi „divisio"-nak, máskor „osztas"-nak nevezi. „Az osztas semmi nem egyeb egy zamnak avagy sumanak egy nehany reszre valo osztasa". Az osztás kétféle értelmezése közül, amint látjuk, Géresi a részekre osztást fogadja el. Azt is kiköti, hogy az osztandó legyen nagyobb, mint az osztó (A Kolozsvári Aritmetikában nincs, de a Debreceniben ott van ez a kikötés.) A Géresi által használt dividendus, divisor és quotiens terminusok a XV., XVI. században már elterjedt kifejezések.

Mindjárt a fejezet elején öt observatio tájékoztat a számok elrendezéséről, egymás mellé helyezéséről, a haladás irányáról a különböző esetekben, majd hat regula következik, amelyek az osztás elvégzését szabják meg. Más aritmetikában nem találkoztam ezzel a felépítéssel. A továbbiakban az observatioknak megfelelő sorrendben közli a feladatokat.

Az osztás nemcsak az ó és középkorban, hanem még a XV. és XVI. században is nehéz feladatnak számított. Technikai kivitelezését illetően, kevés módosítással, egy az indiaiaknál kialakult eljárás uralkodott egészen a XVIII. századig, a modern eljárás meghonosodásáig.

Az osztás mai modern eljárása Calandri számoló könyvében (1491) jelenik meg először. Ő a részszorzatokat az osztandó alá írja, kivonja, a maradék mellé lehozza az osztandó következő számát stb. Ezt az eljárást közli Luca Pacioli is (1441) Divisio danda néven. Még a XVIII. században is használatban volt mindkét eljárás, és a régi csak a XIX. század elején tűnt el.

Géresi (akárcsak a Kolozsvári és a Debreceni Aritmetikák) a régi eljárást ismerteti, az ugynevezett gályaosztást, pedig már 1583-ban megjelent Clavius kiváló munkája, amelyben az új osztási eljárást tanítja módszeresen és érthetően. Géresi mentségére szolgálhat, hogy az ő idejében ez volt az egyetlen osztási eljárás Németországban is, sőt mondhatni az egész nyugaton, ezt tanította Gemma Frisius is. Pedig ez a szorzás nehézkes és áttekinthetetlen. Lucas a galea vagy batello névvel jelöli, mert a keletkezett számtorony a gályához hasonlít. Ez az eljárás hindu eredetű. Jellegzetesebb lépései a következők : a) Az osztó az osztandó alá kerül és a hányadost minden új jegyével eggyel hátrább írjuk. b) A maradék az osztandó fölé kerül. c) A részszorzatokat balról jobbra haladva kiszámítjuk. d) A részszorzatokat egyenként kivonjuk. e) A hányados jegyeit jobbra egy kezdő-zárójel (Géresi szerint holdacska vagy circalom) mögé írjuk (8. ábra). Amint látjuk, az eljárás bonyodalmas. Nem meglepő, ha Géresi itt ott belevét a számításokba.

Maróthi kétféle osztást ismert. Az egyik közeledik a mai osztáshoz, csakhogy az osztót az osztandó alá írja, és mindig eggyel jobbra viszi, mintegy ragaszkodva a régi eljáráshoz. Amikor egyjegyű az osztó, akkor a maradékot fölül írja. A második eljárást olasz osztásnak nevezi, és az a véleménye róla, hogy azzal többnyire a kalmárok élnek. Ugyanarról az eljárásról van szó, amelyet Géresinél láttunk. Az elhasznált jegyeket kihúzogatja, akárcsak Géresi.

Az osztás után Géresi az arányos osztást magyarázza (De divisione in aequali). „Szoltunk azelöt az egyenes ostasnak modgia felol de mostan meghis az kulomb kulomb fele rezre valo osztasnak tudomanyat is tanulyuk megh ilyen peldaban". Egy példából kiindulva megfogalmazza a megoldás szabályát, a végén pedig összeadja az arányos részeket és megállapítja : „latod hogy ki iot az somma az probaban ezokaert ighaz az operatio".

Röviden megemlékezik a felezésről is. „Vagion megh egy Regula, melyet meditationak hinak, mely ezis az divisornak egyk resze, semmi nem egyeb azert, az meditatio hanem valamely szamnak csak ket fele valo osztasa". Tehát a mediatio-t nem tekinti külön alapművéletnek. Gemma egy kis fejezetben, a szorzás után, kifejti, hogy nem szükséges a duplatiot és mediatiot, mint külön speciest tanítani. Ő csak 4 speciesről beszél. Ennek ellenére az osztás után ő is beiktat egy fejezetet„ De mediatione, sive per duo Sectione".

A következő fejezet címe „De progressione". „Az progressio semmi nẽ egyeb hanẽ az additionak cumpendiuma, az az Rövideden valo modgya". Géresi definiciója egyezik a korabeliekkel. Aritmetica és geometrica progresszióról beszél. Az aritmetica progressio szintén kétféle, naturalis és intercisa. A naturalis progressio-n olyan számtani haladványt ért, melynek különbsége egy. Az első tagot az utolsó alá írja és összeadja, az összeget felezi és szorozza a tagok számával. Ha az összeg páratlan, akkor a tagok számát felezi („ hasids kette az Summat avagy Numerust"). „Intercisa azaz oly progressio (melynek) az o sokasodasa nem edgyel vagyon felyeb, hanem kettovel: es ezis harom keppen,... az egyik feles (páros),... mindegyik feletlen ... elegyes". (9. árba). Az utolsó esetben, a Géresi definiciójától eltérően, a különbség három.

„Ez a Geometrica Progressio semmi men egyeb hanem az szamokk igaz proportioia szerint valo felhaladasa, es annak el helyheztetise ugy mint kettessel, harmassal es nigyessel. Azzalis különböz penigh az Aritmetica

Progressiotul hogy az aritmetica Progressio az additio szerint vagyon, ez penigh az multilicao szerint". Közli a megoldást is: „az első kotat ird az utolso ala, es multiplicald megh velle. Az multiplikatusbul ved ki az otolso kotat az utan dividald ell az productust (az az az multiplicatust) az mire az quotiens kjiu az leszen Summaja, ugy mint ez triplaban megh latod".

A progressio az újkor kezdetén még a közönséges aritmetikához tartozott, speciesnek számított. Ez a magyarázata annak, hogy Géresi is külön speciesként tárgyalja. A XVI. század elején még minden gyakorlati aritmetikában, a legkisebbekben is, szerepel a progressio. A század vége felé azonban mindinkább kiszorul az aritmetikából. A XVII. században már végleg elmarad. Géresi a régi csapáson haladva tárgyalja a progressiot a speciesek között. Clavius említett könyvében már ki tudja számítani az utolsó tagot anélkül, hogy az összes előzőket ismerné. Könyvében szerepel a sakkjáték feltalálójának a kívánsága is $(1+2+4+\ldots+2^{63})$. A progressiok Géresi-féle felosztását több XVI. századbeli aritmetika tartalmazza. Huswirt, Rudolff, Riese, Apian is beszélnek „continua siue naturalis" és „discontinua siue intercesa" progressióról. A számtani haladvány összegét, abban a két esetben, amelyről Géresi még külön beszél, a XVI. században már egyetlen képlettel is kifejezték. A mértani haldvány összegének a kiszámítására pedig sokféle eljárást ismertek. A mértani haladványt többen alaposabban tanulmányozták, különösen Stifel, aki művében, az *Arithmetica integra* első könyvében, éppen a progressiot tárgyalja. Észre veszi a számtani és mértani haladvány közötti összefügést, lelkesedve beszél ezen számok csodálatos tulajdonságairól, nagy lépést tesz a logaritmusok irányában.

A progressio alkalmazásaként Géresi, akárcsak a Kolozsvári Aritmetika szerzője, beiktat egy fejezetet „az rostelyos ablakoknak megh vetisirül" (10. ábra). Forrásuk eddig ismeretlen, a rendelkezésemre álló külföldi aritmetikák egyikében sem találtam meg ezt a feladatot.

A „Regula Detri" Géresinél előforduló különböző megnevezései a XVI. században igen gyakoriak. Gemma Regula Proportionum sive trium numerorum-nak címezi a megfelelő fejezetét. Az aritmetikáknak az a törekvése, hogy a műveleti eljárást minél világosabbá tegyék és a tanulót minden szellemi erőfeszítéstől lehetőleg megkíméljék, oda vezetett, hogy teljesen gépiesen tanították, illetve alkalmazták ezt a regulát. A gépies alkalmazás híve Géresi is. (11, 12, 13. ábrák).

A XV. századtól kezdve a hármasszabályt nagyon változatos feladatokra alkalmazták. A különböző tipusú feladatok más és más nevet kaptak. Widmann aritmetikájában (1489) 28 típus szerepel. Tartaglia (1556) fontosabb feladat-típusai ma is érvényben vannak. Géresi ezek közül a típusok közül csak néhánnyal foglalkozik.

A „Regula de tri awersa"-t külön fejezetben ismerteti röviden, és egyetlen példával volágítja meg. (14. ábra). A XVI. századbeli aritmetikákban ez a feladat is előfordul, ha nem is mindenikben. Regula conversa, regula aversa néven emlegetik. Ma fordított hármasszabálynak mondjuk. Gemma könyvének a második részében, melyben a törteket tárgyalja, beiktat egy ilyen fejezetet is „Regula trium euersa"címmel. Ennek a regulának a megtanítása, a gépies tanítás következtében, nehézséget jelentett, és a tanulók csak sok gyakorlat után sajátították el. Úgy látszik, Géresi ezzel a nehézséggel nem számolt.

Géresi a Regula Detri frakciójára is utal. A XVI. századi aritmetikák rendszerint előbb a törteket tárgyalták, de volt rá eset, hogy a sorrend megfordult, miként Géresinél. Géresi a törtrészekkel, mint egészekkel kalkulál, így elkerüli a törtekkel való műveleteket. Hasonlóan jár el Riese, Böschensteyn, Gemma és mások is

A „Regula vulgaris", mai nevén összetett hármasszabály, Géresinél külön speciesként szerepel. A megoldásra ugyanolyan gépies szabályt közöl, mint az egyszerű hármasszabályra. A XVI. században Regula duplex, Clavius pedig Regula trium composita néven emlegeti.

Géresi a „Regula Societatis"-t, a társaság-szabályt, külön speciesnek tekinti és külön fejezetben is tárgyalja. Voltaképpen a regula detri egy alkalmazásnak tekinthetjük. Erre már a XVI. században is rámutattak többek között Gemma Frisius is. Úgy látszik, Géresinek erről nem volt tudomása. Ilyen típusú feladatok a történelem folyamán gyakran szerepeltek, kezdve a Rhind-papirusztól. A XVI. század aritmetikáiban is gyakoriak, mégpedig különböző csoportosításban. Clavius 26, vagy a Bamberger Rechenbuch 17 társaságszabály-feladata ilyen csoportok mintafeladatainak tekinthető.

Géresi „Regula Societatis temporum" címen egy összetett társaságszabályt tárgyal (15. ábra), amelyben az időt is tekintetbe veszi. Először az arányszámokat számítja ki. Annyira gépiesen dolgozik, illetve másol, hogy a hibás arányszámokat is átveszi.

A „Regula Falsi sev Positionū", című fejezetben ismertetett regulát sok aritmetika tárgyalja. Segítségével liniáris egyenlethez vezető feladatokat oldanak meg. Ennél messzebb vivő feladatokat ritkán találunk a XVI. századi aritmetikákban. Géresi elég röviden tárgyalja ezt a regulát, melyet külön speciesként említ. Megmagyarázza, hogy miért hívják a regulát falsinak: Ugyanezzel a magyrázattal több aritmetikában találkozunk, például Apiannál is. Néhány aritmetika beszél Regula falsi simplicis pasitionis és Regula falsi duplicis positionis-ról. Géresi ezeket nem említi· Nála ebben a fejezetben találkozunk a + és — jellel, de nem mint műveletjelekkel. Megjegyzeni, hogy a XVI. századi aritmetikák is éppen ezzel a feladattal kapcsolatosan használják ezeket a jeleket.

Géresi kéziratának következő, rövid fejezetei, „Az Nemet Penzrol" „Az Maghiar Penzről", „Az Masa szamrol", „Maghiar Fontrol", „Az magyar fertonrol", „Az nemet Masarol es fontrol", „Az Nemet Fontrol es Lothrol", az itteni visszonyokat tükrözik, és nyilvánvalóan nem találjuk meg a korabeli külföldi aritmetikákban. A külföldi aritmetikák viszont, az illető ország pénznemeit és más mértékrendszereit véve számításba, fejlett pénzváltási számításokat tartalmazak, így Lucas de Burgo és Tartaglia könyvei.

A „Lusus aritmeticus" fejezetben Géresi szabályt közöl „a Tarsodnak erszenyeben" levő pénz kiszámítására. Az összeget el kell osztani 3-mal, 5-tel, és 7-tel. A maradékot megszorozni 70, 21, illetve 15-tel. A szorzatok összegéből kivonjuk a 105-öt, ahányszor lehet. A maradék a keresett pénz-összeg. Ez a feladat benne van Köbel-nek és Rudolff-nak is az aritmetikájában (úgynevezett kínai bővités szabálya[3]). Géresi második feladata: „Hogy az mastol megh gondolt szamot megh tudhassad". Ha x-el jelöljük a gondolt számot, az elvégzett műveleteket így lehetne kifejezni: $x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\,\frac{2}{9} = x$. Ez a feladat benne van Gemma aritmetikájában és más aritmetikákban. A XVI. századi aritmetikák sok szórakoztató feladatot tartalmaznak.

A kézirat utolsó fejezete „Keövetkeznek immar külömb fele dirib darab Peldak" vagy magától Géresitől származik, vagy pedig egy feltételezett közös forrásból, amelyből ő is, a Kolozsvári Áritmetika és a Debreceni Aritmetika szerzői is merítettek. Az előző fejezet után Géresi odaírta: finis. Tehát ezt a fejezetet ő is toldaléknak tekintette. Itt Géresi olyan példákat tárgyal, amelyeket a mindennapi élet vetett fel, amelyek Nagybányán és Erdélyszerte gyakran előfordultak abban az időben. A példáknak a próbáját is elvégzi. Itt említem meg, hogy Gemma nem használja a „proba" elnevezést, hanem az „examen"-t, ez pedig Géresinél egyszer sem fordul elő.

IV. A KÉZIRAT TÖRTÉNETE

A Géresi kézirata közel két évtizeddel ezelőtt került először kezembe, az akkori marosvásárhelyi református kollégium nagykönyvtárában. A Matematikai és Fizikai Lapok 1957. októberi számában hívtam fel először a figyelmet erre a régi matematikai kéziratra.

A kéziraton kétféle könyvtári számozást találunk (2. ábra). A marosvásárhelyi Bolyai könyvtár, melynek páncélszekrényében őrzik, fekete számjegyekkel nyomtatott 380. szám alatt tartja nyilván (Farczády Elek könytáros számozása). Koncz József, a marosvásárhelyi református kollégium néhai kiváló könytárosa pedig a $10214\,\frac{b}{10}$ sorszámot írta rá piros tintával. (2. kép).

A kézirat a Koncz-féle katalógusok közül abban szerepel, amelyiknek felirata „A marosvásárhelyi ev. ref. koll. ktár újabb gyarapodásának címtára 1872".

Amint a már idézett bejegyzésből megállapítható, a kézirat Stephanus Géresi műve, aki azt a nagybányai református főiskolában (Schola Rivulina) fejezte be 1626-ban.

A 87. lap alján (10. ábra) az alábbi utólagos és más kéztől származó bejegyzés olvasható: „Ez könyvet vetem kezemhez in Ano 1726 Die vero 28 7-bris Francisus Csernatoni de Radnotfája". Tehát a könyv száz év mulva Radnótfáji Csernátoni Ferenc tulajdonába került. Csernátoni sok helyen a sorközöket és lapszéleket telefirkálta aláírásával, összeadásokkal és különböző mondásokkal. Ilyen beírások olvashatók: „Mint a szép híves patakra", „Mint uramnak szolgálok Uram kegyelmedne Gidófalvi, „Adgyon isten minden jót kegyelmednek edes anyam[ ] nem akarom el-

[3] Fr. Unger, *Die Methodik der Praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung*, Leipzig 1888, 108. lap.

mulasztani hogy", „Nemzetes G[ ] András Uramnak nekem[ ]", „Csernat Székely Farkas Uramnak Nekem nagy jo Uramnak", „Meltosagos gof(!) Csernatoni Nagysagos Csernatoni" „Nemes és Nemzetes Csernatoni Uramnak nekem kedves batyam Uramnak eo kegyelmenek [ ]" „Hic Liber est meus post mortem nescio cujus erit" stb.

Ezek a beírások fontos útmutatásokat tartalmaznak a kézirat vándorlása és Marosvásárhelyre kerülése történetének a felderítéséhez.

A nagybányai iskola fennmaradt anyakönyve 1633-tól kezdődően felsorolja a rektorok és diákok nevét, és a nevek mellé érdekes megjegyzéseket is fűz. Ezek között a számunkra igen fontos következő bejegyzés olvasható: „Ego Sigismundus Tsernatoni subscripsi legibus scholae Nagybanyensis anno 1710 mensis Decembris. Officio senioratus et classis syntacticae praeceptoratu probe defunctus concessit in illustre collegium Nagyenyediense. 1714 obiit in patriam"[4]

Tehát abban az iskolában, amelyben Géresi az aritmetikáját írta, 1710 után működött egy Tsernátoni Zsigmond nevű praeceptor, aki a munkáját kiválóan végezte. Egy ideig az enyedi híres kollégium tanulója, onnan pedig 1714-ben visszatért hazájába[5].

Érthető, hogy megvált a nagybányai iskolától, mert annak sorsa abban az időben az ellenreformáció erősődésével nagyon bizonytalanná vált. Thurzó írja erről a korról: „1712 január 11-én szüntette meg Pater Lenkes Pál jezsuita plébános a szepesi kamara hatása folytán és Grabarics Jakab pénzverő inspector közbejárásával a scholát. Ekkor történt, hogy Aszalai Sámuel rektor vezetése alatt a diákok és gyermekek szép renddel „a sikátoron kijövén, szomorú éneket énekleттek, volt hét diák, és gyermek igen sok". A coetus kiment a városból, a könyveket magával vitte, de háza a fölszereléssel együtt a jezsuitáké lett. A Híd-kapun kívül levő szemétdombon kaptak helyet templomuknak. Január 15-én az iskola nyilvánossága is megszűnt."[6] Lehetséges, hogy a kivonuló seregben ott volt Tsernátoni Zsigmond is, ha már előbb el nem távozott.

Tsernátoni Zsigmond Nagyenyedre ment. A nagybányai anyakönyv adatait megerősíti a nagyenyedi kollégium anyakönyve is, ahol 1714-ben subscribált Csernátoni Zsigmond. (Amiért Nagybányán praeceptor volt, azért még jelentkezhetett Nagyenyeden továbbtanulásra.) Ha praeceptor lett volna Nagyenyeden, az talán be lenne jegyezve, de nem feltétlenül. Enyedi paeceptorságának nagy a valószínűsége, mivel előzőleg már Bányán tanítóskodott. A nagyenyedi anyakönyvben még a következő bejegyzést olvashatjuk: „obüt Domi in patria"[7] meghalt otthon a hazájában. Ennél többet nem sikerült kiderítenem felőle. Hogy hol volt az a „patria", arról nem beszél sem a nagybányai, sem a nagyenyedi anyakönyv. A Radnótfáji előnév sem szerepel ezekben az anyakönyvekben.

---

[4] Lásd: Thurzó Ferenc, *A nagybányai ev. ref. főiskola (Schola Rivulina) története.* 1547—1755, Nagybánya 1905. — Thurzó teljes egészében közli az anyakönyv tartalmát.

[5] Az „obüt in patriam" mondat értelme Reischel Arthur akadémiai könyvtári főkönyvtáros szíves tolmácsolása szerint: „visszatért hazájába". (Tehát nem „meghalt".)

[6] I. m., 9. lap.

[7] Az enyedi adatokat kérésemre, Muzsnai László, a kollégium volt rektora, szolgáltatta.

Pár évvel később, 1726-ban, amint láttuk, a Géresi kézirata Radnótfáji Csernátoni Ferenc kezébe került. Kutatásaim alapján biztosra állíthatom, hogy Csernátoni Ferenc valóban radnótfáji származású. Egy 1729-es összeíráson a radnótfáji birtokos nemesek között szerepel Csernátoni Ferenc is, és még két Csernátoni[8].

Tekintettel arra, hogy a kézirat tulajdonosa többször említi a Csernátoniak nemességét és Radnótfáji előnevét, biztosra állítható, hogy az összeírásban szereplő Csernátoni Ferenc azonos a kézirat tulajdonosával.

Hogy miért érdekelte az aritmetika ezt a Csernátoni Ferencet, arra a Koncz könyve ad felvilágosítást. Koncz könyvében szerepel egy Csernátoni M. Ferenc, aki praeceptor volt a marosvásárhelyi ref. kollégiumban 1700 után[9], s aki talán azonos azzal a Csernátoni Mihály Ferenccel, aki az enyedi kollégiumban 1716-ban subscribált. (Az anyakönyvek bizonyára azért tüntetik fel a Mihály melléknevet is, mert a Csernátoni név sűrűn előfordul mind az enyedi, mind a vásárhelyi anyakönyvben.)

A fenti adatokból kirajzolódik a kézirat vándorlásának a története A kéziratot Nagybányán a praeceptorok használták. Így került Tsernátoni Zsigmond kezébe is. Amikor bomlóban volt a bányai iskola, magával vitte a kéziratot Nagyenyedre, remélve, hogy szüksége lesz rá. Rövid enyedi tartózkodása után hazament Radnótfájára és magával vitte a kéziratot is. S mivel ő már nem vehette hasznát, egyik atyafiának (esetleg éppen gyermekének), Csernátoni Ferencnek adományozta, a marosvásárhelyi kollégium praeceptorának, aki minden bizonnyal hozzá fordulhatott tanácsokért, hiszen két híres iskolában is praeceptorkodott. Ettől a Csernátoni Ferenctől kerülhetett aztán a kézirat a marosvásárhelyi ref. kollégium tulajdonába. Habent sua fata libelli!

Most pedig vessük fel a legnehezebb kérdést: ki volt a kézirat szerzője, ki volt Géresi István, és miként keletkezett a kézirat?

Kutatásaim során, e kéziratbeli bejegyzésen kívül, mindeddig nem sikerült Géresi István nyomára bukkannom. A nagybányai városi levéltár, református egyházmegyei és városi levéltár átvizsgálása sem hozott semmi eredményt[10] A vizsgálódásokat szélesebb körben kell tovább folytatni.

---

[8] Lásd: Kelemen Lajos, *Radnotfája története.* „Erdélyi Múzeum" XLVII. (1942). Fenti tanulmány Kemény József: „Possesonaria. Comitatus Torda, Görgény" kéziratára hivatkozik. (Kézirat az R.N.K. Akadémiája Kolozsvári Fiókjának könyvtárában, Kemény József gyűjteményében). — A Radnotfáji Csernátoni családról, mint érdekességet, szóbelileg említette Kelemen Lajos, hogy ez az egyetlen család, mely Mihály vajdától kapott lófőséget.

[9] Koncz József, *A marosvásárhelyi evang. reform. kollégium története*, Marosvásárhelyt 1896, 111. lap. Meglehet, hogy Koncz az értesülését a kollegium legrégebbről fennmaradt anyakönyvéből, az ún. Csulai-féle anyakönyvből szerezte. Ebben a 144. lapon, a „Nomina studiosorum, quos clarissimus dominus Michaël Köpeczy, ad regendam Scholam R [eformatam] hancce (sic) Agropolitanam Ao 1715 Introductus et Publice de Prov. [identia] Divina Oratione declamata, per Ecclesiasticum Senatum Regiae Liberaeque Ci[vi]t[a]tis hujus Marus Vasarhellyiensis inauguratus installatusque die [üres hely hagyva] reperit hic loci" cím alatt felsoroltak között az ötödik helyen olvassuk: Franciscus M. Csernatoni Praec. Par (olvashatatlan a szó vagy rövidítés többi része).

[10] Ezeket a levéltárakat, kérésemre, Oláh Sándor, Nagybánya és vidéke múltjának kiváló ismerője, sok napi önzetlen munka árán nézte át. A városi levéltárban, ugyancsak kérésemre, Szász Károly főlevéltáros és Metz József tanár is kutatott. Fenti levéltárban magam is végeztem kutatásokat.

Több, ebben a korban élő Géresire is bukkantam. Az ú.n. „kapcsos könyv"-ben[11] szerepel Géresi Mihály, ki a Schola Rivulina rektora volt 1630. XI. 27-én. Talán azonos azzal a Géresi Mihály-lyal, aki 1636-ban tért vissza külföldi tanulmányútjáról s jelenti a városi tanácsnak, hogy „ott künn adossá maradott 46 aranyakkal" amit a város azonnal kifizetett[12]. Meglehet, hogy rokona volt a mi Géresi Istvánunknak. Ez a Géresi Mihály minden bizonnyal azonos azzal a Géresi B. Mihállyal, aki 1634-ben Leydenben könyvet adott ki [13]. A testvére, Géresi B. András, Gönczön iskolaigazgató volt. 1597-ben a tasnádi zsinaton pappá szenteltek egy Géresi Miklóst[14]. stb. De ezek a Géresik és Géresi Istvánunk között semmilyen kapcsolatot sem sikerült felderíteni.

Egy 1367-i oklevélben (Vay 428), bizonyos Gres-i Péter nevében szerepel a Géresi név elsőizben. De egy 1424-ben kelt oklevélben ugyanott szerepel egy Geres nevü jobbágy is[15].

Feltehető, hogy a mi Géresi Istvánunk Magyargéresről (Ghirişa) került Nagybányára, és a Géresi nevet, annak a kornak a szokása szerint, szülőföldjétől kapta. Ez a község Erdődtől, ahonnan Kopácsi István, a Schola rivulina megalapítója ment Nagybányára, alig 2—3 kilométerre fekszik. Lehetséges, hogy Géresi először a szatmári református iskolában tanult, u.i. Magyargéres Szatmárnémetitől mindösze 28, Nagybányától pedig 100 km-re fekszik. A szatmári iskola éppen abban az időben élte fénykorát.

Egy újabb adat azonban ezt a feltevést meggyengítette. A „Tractus Rivuliensis Protocolon vetus ab anno 1620—1702"[16]-ben szerepel egy Géresi Erzsébet, aki 1614-ben Nagybányán perli a férjét hűtlenség miatt. Eszerint abban az időben Nagybányán is volt Géresi nevű család.

Mivel Géresi Istvánra vonatkozóan konkrét adatok nem állnak rendelkezésünkre, csak feltevésekre vagyunk utalva. A felsorolt adatok és elsősorban maga a kézirat alapján, több feltevést is megkockáztathatunk.

Feltételezhető, hogy Géresi tanulója volt a Schola Rivulina-nak és lejegyezte tanárának az előadását vagy felolvasását. Jelen mű függelékében is rámutatunk, hogy a XVI. századi tantervek és törvények kötelezően előírták a felolvasást bizonyos aritmetikákból. Az illető tanárnak lehetett a kezében a Kolozsvári Aritmetika. Megerősítené ezt a feltevést a Géresi kéziratának 149. lapján megfigyelhető, kihagyott és utólagosan beírt mondatrész. Mintha a tanár túl gyorsan haladt volna és a diák lemaradt volna az írással. Ezzel a feltevéssel sok mindent meg lehetne magyarázni.

Nagyon sok érv e feltevés ellen szól. Az első ránézésre megállapítható, hogy a vitatott kézirat nem gyermekírás. Egy gyakorlott kéznek a jól kialakult írásáról van szó, még ha az írás jellegében itt-ott komoly hullámzás tapasztalható is, márpedig az aritmetikát az alsó osztályokban tanították.

---

11 A nagybányai ref. egyház levéltárában.
12 Thurzó, i. m., 151. lap.
13 Lásd, Szabó K., 3 I., 451. lap.
14 Kis Áron, *XVI. századi zsinatok*.
15 Lásd: Maksai Ferenc, *A középkori Szatmár megye*, Bp. 1940.
16 A nagybányai ref. egyházmegye levéltárában. — Az adatot Metz József fedezte fel, egyik közös buvárkodásunk alkalmával.

Amint láttuk, a kéziratban előfordulnak kimondottan másolási hibák is, olyanok, amiket csak másoló követhet el: átvesz nyomdahibákat, amelyeket nehéz mesternek tulajdonítani. Továbbá, a Géresi kéziratában vannak részek, amelyek nem a Kolozsvári, hanem a Debreceni Aritmetikával egyeznek, sok meg Gemma Frisiusszal — sőt teljesen önállónak látszó részei is vannak. Tehát a tanár valamelyik közismert aritmetikából nem olvashatott fel. Géresi kézirata nem lehet iskolai diktálás után írt mű azért sem, mert annál alaposabban van írva, folyamatosabban, teljesebb terjedelmű.

A másik feltevés szerint Géresi István magistere, rektora volt a nagybányai iskolának. A kézirat ezt a feltevést sem igazolja. A rektor mindig nagyobb képzettségű, sok esetben külföldön járt, művelt ember. Egy ilyen terjedelmes írás folyamán leleplezte volna magát. A durva másolási hibák, nyomdahibák átvétele, sokhelyt szolgai másolás, és egy pár szakasz, amely a szerző hozzánemértését bizonyítja, ebben az esetben nem magyarázható meg. Nehezen is tételezhető fel a rektorról, akinek sok fontos feladata volt, hogy egy ilyen kéziratot szerkeszt, illetve másol. Az iskolák törvényei előirják a rektor didaktikai feladatát is. De azok mindig a felső osztályokban tartott kurzusokról emlékeznek meg. Állítható, hogy az aritmetika tanítása ebben az időben, a nagybányai iskolában, nem a rektot feladata volt. Nem hiszem, hogy Géresi István 1626-ban rektor lett volna.

A legelfogadhatobb feltevés az, hogy Géresi István praeceptor volt a Schola Rivulinában. Emellett bizonyít az a körülmény is, hogy a kézirata később is praeceptorok kezén forog. Géresinek is azért volt szüksége erre az aritmetikára, amiért Tsernátoni Zsigmondnak, vagy Csernátoni Ferencnek. Megírásával hivatali kötelességét teljesítette. Azt a kötelességét, amiről a nagybányai iskolának 1651-ből származó törvénye „De libellis et methode docendi" című fejezetében szól[17]. Szüksége volt egy olyan kézikönyvre, mely tartalmazza a törvények által megkövetelt tananyagot, a specieseket Ennek a feltevésnek az alapján könnyen megmagyarázható a kézirat jellege és legtöbb fogyatékossága is.

A kézirat keletkezésének a megvilágítása érdekében először a következő kérdésre kell feleletet adni: miként keletkeztek a XVI. és XVII. századi magyar nyelvű, nyomtatott vagy kézirásos aritmetikák? Ennek a kérdésnek a megválaszolása érdekében messzibbre kell visszanyúlnunk.

Már a honfoglaló magyarság is rendelkezett a matemetikai szaknyelv egyes elemeivel. Hiszen számneveink tízezerig honfoglalás előtti keletűek. Matematikai szaknyelvünk minden bizonnyal a középkor mindennapi gyakorlatában és iskoláiban tovább gazdagodott,[18] jóllehet a tanítás nyelve akkor kizárólag latin volt azokban az iskolákban, amelyekben feltehetően

[17] Lásd a függelék vonatkozó szakaszát.

[18] A középkori magyar nyelvű matematikai életről nagyon keveset tudunk. П. П. Боев szovjet matematikatörténész nemrég megjelent könyvének (Лекции по истории математики, Саратов 1956) 162. lapján olvasom, hogy azok közül a sok ideig megfejthetetlennek tartott, titokzatos számjegynevek, apex-nevek közül, amelyek pár XII. századbeli nyugaton írt kéziratban előfordulnak, három magyar eredetű. Ha ez a magyarázat helyes, akkor feltétlenül amellett szól, hogy matematikatörténészeink véleménye az akkori magyar nyelvű matematikát illetően revizióra szorul.

tanítottak matematikát is. Az első magyar nyelvű, aritmetikát tárgyaló írások keletkezéséhez valószínűleg a reformáció adta meg a döntő lökést.

Az első magyar protestáns iskolák a XVI. század közepe táján létesültek. A nagybányai 1547-ben, a debreceni 1552-ben, a szatmári talán még régebben, több erdélyi iskola pedig 1557-ben. Kolozsvárnak 1526 óta volt protestáns iskolája, előbb lutheránus, majd 1545-től református kézen. Ezekben az iskolákban tanították az aritmetikát a Debreceni, illetve Kolozsvári Aritmetika megjelenése előtt is. Az akkori praeceptoroknak épp úgy szükségük volt egy használható kézikönyvre, mint később Géresinek. Feltevésem szerint ezeknek a praeceptoroknak a munkássága nyomán keletkeztek az első magyar nyelvű aritmetikai kéziratok.

Ebben az időben a tanulók a praeceptorok (vagy tanárok, rektorok) által leírt, vagy diktált tananyagot tanulták meg. Az iskolai oktatás anyaga e sajátos eljárásmód által állandóan fejlődött és megújult. Minden oktató, magister vagy egyszerű praeceptor, a saját hozzáértése és felfogása szerint gyúrta át az anyagot, hogy azt megtanulásra minél alkalmasabbá tegye. Ha tekintetbe vesszük, hogy éppen abban az időben terjedt el Németországban Gemma Frisius kiváló, nagy népszerűségnek örvendő latin nyelvű aritmetikája (első kiadása 1540-ben jelent meg), azok az első írások minden bizonnyal a Gemma könyvének a hatását tükrözték. (Csak a kolozsvári könytárakban 6 példány maradt fenn a Gemma Frisius Aritmetikájából.).

Mai napig sem tisztázott a Debreceni Aritmetika és a Kolozsvári Aritmetika keletkezése. Egyes feltevések szerint Laskai János tanár volna a Debreceni Aritmetika szerzője. Laskai 1574 és 1577 között a wittenbergi egyetemen tanult. Tehát csak 1577-ben jött haza, a Debreceni Aritmetika megjelenésének az évében. Szerzőségének ez a körülmény is ellene szól. Más feltevés szerint Hoffhalter Rudolf nyomdász, az Aritmetika kiadója a szerző. Hoffhalter a II. kiadás előszavában olyan hangot üt meg, amiből arra is lehet következtetni, hogy ő maga a szerző. A címlapon úgy tünteti fel a könyvet, mintha azt Gemma Frisiusból fordították volna. Ezt az állítást ő maga cáfolja meg az előszóban, amikor azt írja : „az kic az Gemma Frisi' bőséges beszédében láttatnánac el fárataknac lenni, ez kis rövid es hasznos tractatusban fölötte meg niughatnac". A szerzőségét is ő maga cáfolta meg, az első kiadás előszavában : „egy iambor vram es Istenben attiamfia hozta az en officinamban, kervén hog' ki nyomtatnám es ő sem tudá ennékem meg mondani az iambornac neuét, ki neue alat tuttam volna ki bochátani". Hárs véleménye „A szerző kilétének eltitkolásával a könyv értékét kivánta emelni" (a kiadó), nem látszik meg alapozottnak. Ha a kön a Gemmaénak fordítása, akkor nem lényeges a fordító személye, nincs miért eltitkolni. Talán ezt az előszóban előadott történetet a mű eredetéről nem Hoffhalter találta ki. Valóban megjelent nála egy „iambor uram és Istemben attiamfia". Talán nem tévedek, ha azt állítom, hogy az az „uram" egy „praeceptor uram" lehetett, aki leginkább tapasztalta egy ilyen kiadvány szükségét, és kinek a kezében volt egy kiadásra alkalmas szöveg. Nem tudta megnevezni a szerzőt, mivel a szöveg, amivel jelenkezett, nem volt a saját szerzeménye. Legfennebb egyes kiegészítéseket mondhatott belőle a magáénak. Egy olyan irásról lehetett szó, amilyennek a keletkezéséről fennebb már szólottunk, amelyiket ő is az elődeitől örökölt, vagy másolt le. Hoffhalter, mint jó üzletember, azonnal átlátta a javaslat életrevalóságát, és elvállalta a kiadást. Talán itt-ott igazított is a szövegen, elképzelése szerint, változtatott a helyesírásán is. Véleményem szerint a Debreceni Aritmetika egy a protestáns iskolák praeceptorainak a kezében kialakult aritmetikát örökített meg.

A Debreceni Aritmetikát, a megjelenése utáni években nem hivatalosan az iskolákban is használták[19]. Ez az aritmetika, a praceptorok kezében, tovább fejlődhetett. Az első két kiadás hamar elfogyhatott, s így kéziratokban ez a kibővített, átalakított aritmetika terjedhetett[20]. Egy ilyen kéziratot aztán kiadott Kolozsvárt ifj. Heltai Gáspár, a nyomdájában kialakult helyesírással.

Heltai az aritmetika végén, „Az keresztyén Iffiuságnac" szánt felszólításában többek közt így ír : „Az mennyire en az Könyvekböl tanulhattam ugy magyaráztam..." Ezeket a sorokat olvasva azt a következtetést lehetne levonni, hogy a mű szerzője maga a kiadó. Ez az állítás minden fenntartás nélkül már csak azért sem fogadható el, mert ennek a műnek a nagyobb része szóról-szóra egyezik a Debreceni Aritmetikával. Tehát már csak ezért sem tekinthetjük Heltait szerzőnek. De talán nem is helyes a szerzői jogról vallott mai nézeteinket átvinni a XVI. századba. A Hoffhalter és Heltai vélekedését olvasva, az a benyomásom, hogy ők, mivel helyesírás szempontjából az írásokat átjavították, előszóval ellátták, itt-ott változtattak is a szövegen, kihagytak vagy betoldtak, és saját nyomdájukban, saját kockázatukra kiadták, az egészet saját szerzeményüknek tekintették[21]. Mi, az első magyar nyelvű aritmetikák keletkezését, az abban alkalmazott számítási eljárások eredetét, fejlettségi fokát, a fogalmak értelmezésének a pontosságát viszgáljuk, s nyilván egészen másként vélekedünk a szerzőség fogalmáról.

A fenti feltevést, mely szerint Heltai is a praeceptorok kezén forgó aritmetikát adott ki, elsősorban a Géresi Aritmetikájával való szerves kapcsolatára alapítom. Láttuk, milyen közeli rokonság áll fenn a két Aritmetika között. Van rá eset, hogy a Kolozsvári Aritmetikában kidolgozott példáknak Géresinél van meg a szövege, vagy eltérő adatok esetén a Kolozsvári Aritmetika is a Géresi-féle adatok szerint oldja meg a példát stb.

[19] A Debreceni Aritmetikát megjelenése után 5 évvel Hoffhalter újból kiadta változatlan szöveggel. A második kiadás címe : *Aritmetica, Az az, az Szamvetesnec tudomania mel forditatot Gemma Frisius Arithmeticaiabol Magiar Nielvre az Calcularis Szamvetesis szep rövid ertelemmel kiadatot.*

[20] Tudunk más példát is abból az időből, hogy kéziratban forog egy tankönyv évtizedekig, mielőtt kiadnák. Így Szikszói Fabricius Balázs sárospataki tanár 1570 körül szerkesztett egy szótárat : *Nomenclatura seu Dictionarium latino-ungaricum*, melyet sok éven keresztül kéziratban használtak Patakon és más iskolákban. Csak a szerző halála után 13 évvel, 1590-ben nyomták ki Debrecenben. A különböző levéltárakban több kézirat maradt fenn, melyeket sohasem adtak ki, de amelyeket abban az időben tankönyvül használtak. Feltételezik hogy Coresi is már előbb forgalomban levő szövegeket nyomtatott ki (Lásd O. D e n s u ş i a n u, *Histoire de la langue roumaine*, I. fasc. I, Paris 1914, pag. 8).

[21] Volt rá eset, hogy más tankönyvnek sem tüntette fel a kiadó a szerzőjét. Így kiadták szerző nélkül az *Orthographia Ungarica Az az igaz irás modjárol valo tudomány*, Krakko 1549. Heltai Gáspár 1562-ben kiadta *Troporum schematum ac figurarum communium libellus ex variis authoribus in usum studiosorum. Theologiae et bonarum artium collectus, unu cum indice.* Szerzőjét csak a múlt században derítették fel (F r a n k l, i. m., 41 lap).

Meglepő azonban, hogy azokban a szövegrészekben is , amelyek a két aritmetikában szószerint megegyeznek, a helyesírás különbözik. A Géresiféle helyesírás sok esetben régiesebb, jóllehet egy félévszázaddal későbbi keletű, mint a Debreceni Aritmetika első kiadása és a Kolozsvári Aritmetikánál is fiatalabb harmincöt évvel. A Kolozsvári Aritmetika írója minden mondat végére pontot tesz, az új mondatot nagy betűvel kezdi, használja a vesszőt, kettőspontot, kérdőjelt, ha nem is mindig pontosan a mai használatnak megfelelően. Ezzel szemben Géresi központozási jeleket alig használ. A mondatokat a legtöbb esetben nem választja el egymástól. Néha vesszőt tesz a mondat végére, ritkábban pontot. Az új mondatot nem kezdi nagybetűvel, csak az új bekezdéseket. Néha, bár ritkán, a vesszőt a mai értelemben használja. Oda is tesz vesszőt, ahol a Kolozsvári Aritmetikában nincsen. Pár esetben kettőspontot is alkalmaz a kéziratában, legtöbb esetben vessző helyett. A zárójelt használja. Ismeri a választójelt is (legtöbbször kettős vonalka), de csak ritkán teszi ki. Kérdőjelt, felkiáltójelt, pontosvesszőt, idézőjelt, hiányjelt, gondolatjelt nem alkalmaz.

Sem a Kolozsvári Aritmetika, sem Géresi hangírása nem egységes, mégis megfigyelhetjük a következő eltéréseket.

A magánhanzók jelölésekor a Kolozsvári Aritmetika különbséget tesz *a* és *á*, *e* és *é* között, csak gyakran eltér a mai használatuktól. Géresi nem tesz különbséget a fenti magánhangzók között. Nála az *e* betű kétféle alakban fordul elő. Legsűrűbben a középkori ϑ fordul elő, amelyik ebben a korban még használatos. Használja ritkán az *é* alakot is, de nem az *é* hang jelölésére. Nem találtam szabályszerűséget a két betű előfordulásában. A Kolozsvári Aritmetika rendszeresen használja az $\overset{e}{o}$/ = ö/ és $\overset{e}{u}$/ = ü/ jelölést. Géresi két pontot tesz az *o* illetve *u* felé, de nem következetesen. Nála az ö gyakran eö vagy eo alakban fordul elő. A Kolozsvári Aritmetika néha ó-t is használ, Géresi soha. Az u és v néha szerepet cserélve fordul elő mind a Kolozsvári Aritmetikában, mind Géresinél, Az i, j és y is gyakran cserél szerepet Géresinél. A Kolozsvári Aritmetikában is előfordulnak ezek a szerepcserék, de nem azokban az esetekben mint Géresinél.

A Kolozsvári Aritmetika még sok esetben, — különösen a szavak végén — megtartotta a latin c-t, a k helyett (deréc, ennec, másodic). Géresinél teljesen eltűnt ez a latin örökség. Géresi az sz hangot néha csak z-vel jelöli (zám), akárcsak a kódexeink. Ez a jelölés a Kolozsvári Aritmetikában nem fordul elő. A gh és th jelölés Géresinél gyakori (ghondolj, megh, minth, mondoth, eőth), viszont a Kolozsvári Aritmetikában nem fordul elő.

Az i-zés és ö-zés mindkét Aritmetika sajátja, de más-más szavak esetében.

A két Aritmetika helyesírása közötti feltűnő eltérés érthető. A XVI. században és még a XVII. század elején is, alig beszélhetünk megállapodott, egységes helyesírásról. Úgyszólván minden iró egyéni helyesírást alkalmaz, leginkább a kiejtés szerinti elvet követve. „Valószínűnek kell tartanunk, hogy minden iskolának külön egységes helyesírása volt" mondja Trócsányi[22].

[22] Trócsányi Zoltán, *Régi magyar nyomtatványok nyelve és helyesírása*, Bp. 1955, 5. l.

Megállapítását a XVI. század első felére vonatkoztatja. A XVI. század második felében a nyomdászok alakítanak ki valamelyes helyesírási elveket. A helyesírás elvei körül vita támad, de ezeknek a hatása csak a XVII. század második felében érvényesül. Az első fele még a XVI. század betűit és írásmódját használja. Ezt az állapotot tükrözi a Géresi kézirata is. Tehát a két Aritmetika helyesírása közötti feltűnő eltérés a mi szempontunkból csak azért jelentős, és azért kell felhívnunk rá a figyelmet, mert az is a mellett szól, hogy Géresinek a műve írásakor nem lehetett a kezében a Kolozsvári Aritmetika.

De bármennyire átjavította is Heltai a kezébe került szöveget, itt-ott megszólal az eredeti szerző is. Így a Kolozsvári Aritmetika O_2 lapján olvassuk: „csak hogy az mint eszembe vehetem nehezen tanulja meg a-Deaktalan ember." Ez már nem a kiadó, nem a Heltai megjegyzése. Ez a tanulókkal sokat és gyakran hiába vesződő praeceptornak a hangja.

Közvetve vall a Kolozsvári Aritmetika elődjéről, a Debreceni Aritmetikáról is. A K_{2}, lapon ezt írja: „Hogy valaki ne mondhassa aszt, hogy az Debrecenben nyomtatott Aritmeticának Regulai mellöl el mentünc, mellyeket honnat vöttéc légyen; nem tudhatom,. (A törtekről írt fejezetből idéztem. Ez a fejezet nincs meg Géresinél). Vagy, a G_7 lapon ezt írja: „Látod ezt az exemplomot, mellyet az Regula Detriben irtac volt, az kic az elöt az Magyar Számuetö könyuet irtác." Ezen sorok fogalmazója szerint tehát a Debreceni Aritmetikát *többen* írták. Kíváncsian kerestem ki a Géresi kéziratából a második idézetnek megfelelő helyet, hiszen ezt a fejezetet eléggé szószerint veszi át. Géresinél (108. lap) ezt találjuk: „De mivel hogy ide az regula Detrihez irtak az szam vetök itt is proballjuk megh." Tehát Géresi nem hivatkozik sem a Debreceni Aritmetikára, sem a Kolozsvári Aritmetikára (pedig itt alkalom lett volna erre), hanem a számvetők számlájára írta az exemplum téves fejezethez való beiktatását. Géresi itt határozottan arra utal, hogy a számvetőktől vette át a feladatot.

De a számvetők ismételt emlegetéséből arra is lehet következtetni, hogy Géresi az egész művet a számvetők nyomán haladva írta. Géresi vagy a nagybányai, vagy valamelyik testvérintézetben tanulta az aritmetikát, ott olvasták fel neki is, mint tanulónak, az előírt anyagot. Miután praeceptor lett, olyan kézikönyvre volt szüksége, melyből felolvashasson, amelyből példákat adhasson fel tanítványainak. A maga számára ilyen kézikönyvet írt. Lemásolta valamelyik elődjének művét, esetleg saját diákkori jegyzeteit. Tehát nem közvetlenül a Kolozsvári Aritmetikát másolta le, amint a két mű összevetéséből kiderül. A Kolozsvári Aritmetika megjelenése óta 35 év telt el. Nem valószínű, hogy rendelkezésére állt volna egy nyomtatott példány is. Művében nem találunk utalást sem a Kolozsvári, sem a Debreceni Aritmetikára. Ezek az Aritmetikák a bányai iskola könyvtárának a régi katalógusában sem szerepelnek.

A Debreceni és a Kolozsvári Aritmetika is gyakran tesz említést a „számvető uraim"-ról. Kik ezek a számvető urak? A számvetésre oktató praeceptorok. Ilyen „számvető úr" volt Géresi is. A nyomtatott aritmetikákban levő „számvető uraim" kifejezést Géresi mindig „számvetőkre" egyszerűsíti; szerénysége tiltja, hogy saját magát uramozza. A Debreceni Aritmetika 121. lapján például a következőket olvassuk: „Az számvetö uraim tsac eg' speciest sem hadnac proba nélkül..." Géresinél a megfelelő helyen (115. lap) ez áll: „Az Zamvetok ennek az speciesnek kulomb kulomb fele keppen adgyak probajath". A Kolozsvári Aritmetika D_2 lapján szereplő „az Szamvető mesterec" kifejezés Géresinél kimarad. Nem akarja mesterezni a praeceptorokat. Az úr szó egyetlen egyszer fordul elő Géresinél, a 17. oldalon: „Irnak it az Uraim megh mas formatis az subtractioban".

Az előbbiekben összehasonlítottuk Géresi Aritmetikáját a Kolozsvári Aritmetikával. Vannak Géresinél részek, amelyek nincsenek meg a Kolozsvári, de megvannak a Debreceni Aritmetikában. Olyan részeket is találunk, melyek nincsenek meg sem a Kolozsvári Aritmetikában, sem a Debreceni Aritmetikában, de megvannak Gemma Frisiusn ál. És találtunk olyan részeket is, amelyek egyik közismert aritmetikában sem fordulnak elő. Szerepelnek olyan példák is, amelyeknek az adatai a különböző aritmetikák közül csak az egyik forrásban vannak meg, de a kidolgozás mindenikben. Pár hibás megoldás mind a három Aritmetikában előfordul, s nem ritkák a számolási hibák sem. A Kolozsvári Aritmetika sajtóhibáit is jórészt megtaláltuk Géresi kéziratában. Ezeket a jelenséget legkönnyebben úgy magyarázhatjuk meg, ha feltételezünk egy közös forrást, amelyik a különböző iskolákban állandóan fejlődött, változott, amelyikre hatottak a nyomtatott Aritmetikák, s ugyanakkor az aritmetika fejlődésével is iparkodott lépést tartani. A különböző iskolák kéziratos Aritmetikái között lényeges eltérések is lehettek, mind helyesírásukat, mind tartalmukat illetően. A kézírásos Aritmetikák nyilvánvalóan alkalmazkodtak az egyes iskolákban kialakult helyesíráshoz, az iskola színvonalához és az aritmetikával kapcsolatos igényéhez is.

Ebbe az elméletbe könnyen beilleszthető Géresi kéziratának a keletkezése, megmagyarázható feltünő tartalmi egyezése a Kolozsvári Aritmetikával, elütő helyesírása, sőt a kézirat fogyatékosságai is.

V. A KÉZIRAT JELENTŐSÉGE

Tudomásom szerint Géresi aritmetikája a legrégibb hazai matematikai kézirat és egyben a legrégebbi magyar nyelvű matematikai kézirat is. Már csak ezért is érdeklődésre tarthat számot[23].

A hazai matematika történetében ez a kézirat a Kolozsvári Aritmetika és Apáczai enciklopédiája közötti több mint félévszázados (62 éves) űrt tölti ki. Ezért is igen értékes dokumentuma az RNK-beli matematika történetének.

[23] Az RNK-ban, tudomásom szerint, régebbi keletű matematikai kézirat nem maradt fenn. Említés történik ugyan Martin Ungleich-nak egy Rechenbuch-járól (Programm des evangel. gymnasiums A.B.... zu Hermannstadt für das Schuljahr 1895—96, 29 1.), melyet 1599-ben írt és mely a nagyszebeni Kapellenbibliothek-ben fennmaradt, de úgy látszik az később elveszett. Érdeklődésemre ui. a Brukenthal múzeum aról értesített, hogy az említett kézirat nem található a múzeumban. — A marosvásárhelyi Bolyai könyvtárban található egy XV. századból származó kézirat, mely az astrolabium készítését tárgyalja és sok számítást tartalmaz, de az mégsem tekinthető matematikai kéziratnak.

Géresi kéziratát tanulmányozva közelebb jutunk az első nyomtatott magyar nyelvű aritmetikák keletkezésének a tisztázásához, s megvilágíthatjuk az első magyar nyelvű matematikai írások keletkezésének az útját. Ez a kézirat betekintést nyújt a XVI—XVII. századi matematikaoktatásba. Bemutatja abból a korból való egyik iskolánknak a matematikai tananyagát, annak pontos terjedelmét. Rávilágít az akkori matematikai oktatás alapelveire, módszereire, mutatja a gyakorlati szellem térhódítását iskoláinkban.

A kézirat elemzéséből kiderül, hogy az a nagybányai iskola alsó tagozati harmadik osztályának az anyagát öleli fel. A Schola Rivulina törvénye a harmadik osztály számára pontosan a kéziratban foglalt anyagot írja elő. Az aritmetika első fejezete, a „De numeratione", azért annyira rövid, azért tekinti ismertnek a számjegyeket, a kisebb számok leírását, mert azt az előző osztályban, a másodikban már tárgyalták. Tehát joggal állíthatjuk, hogy Géresi aritmetikája az első ismert matematikai tankönyvünk. Kimondottan tankönyvnek szánták. Ebből a megsárgult könyvecskéből több, mint egy évszázadon át tanították, illetve tanulták a matematikát. Megismerjük ebből a kéziratból az akkori praeceptorok szerepét, akiknek vállára nehezedett a matematika oktatása. Egyben elénkbe állít egy praeceptort is, Géresi István személyében. Talán a legrégebbi praeceptort, akiről ezen keresztül bővebb ismeretünk van. Egy számolómestert, egy számvetőt a XVII. század elejéről.

Megismerjük belőle egyik XVII. századi iskolánknak a helyesírását és matematikai szaknyelvét. Ezért Géresi kéziratát jelentős nyelvészeti dokumentumnak is tekinthetjük.

A kézirat vándorlását tanulmányozva, ízelítőt kapunk abból is, hogy miként terjedtek az ismeretek egyik iskolából a másikba.

Géresi aritmetikája a tudományos színvonal, a műveleti eljárások fejlettsége, terminológiája és módszertani felépítése szempontjából nagy hasonlatosságot mutat a korabeli és a XVI. századbeli aritmetikák többségével, amint azt a III. fejezetben kimutattuk. Elmondhatjuk, hogy teljesen beleillik az aritmetikák európai fejlődéstörténetébe, a fejlődésnek a Függelékben vázolt menetébe. Géresi műve szervesen beleépül a matematika európai épületébe. Azokat a jellegzetességeket, fogyatékosságokat és tökéletesedéseket, amelyek jellemzők a XVI. századbeli aritmetikákra, jórészt megtaláljuk Géresi aritmetikájában is (akárcsak a Kolozsvári Aritmetikában), amint láttuk a III. fejezetben. Ugyanazokat a fejezeteket, problémaköröket tárgyalja, mint a XVI. századi aritmetikák többsége. A számítások technikai kivitelezésekor az Európa-szerte legelterjedtebb eljárásokat alkalmazza, s az Európa-szerte használt terminológiát is tanítja. Az eljárások oktatásakor a szabályokat, törvényeket nem igazolja, a hangsúly a begyakorlásukra esik.

Géresi aritmetikája tükrözi az akkori Nagybánya társadalmi, gazdasági, kulturális viszonyait. A Nagybányán érvényben levő törvények, az iskola jellege, ebben az országrészben kialakult tanügyi hagyományok szabják meg a részleteiben Géresi aritmetikájának a tartalmát, a terjedelmét. Az előírt óraszám is korlátokat jelentett. Azért nem tárgyalja a törteket, amelyeket, úgy látszik, Bányán nem tanítottak. Azért nem kerülhettek a Géresi könyvébe olyan fejezetek, mint a gyökvonás, kamat- és kamatoskamat-számítás, regula virginum stb. Korának a nagyobb igényű, más célból készült műveivel (Tartaglia, Stifel, Clavius, Apian stb.) Géresi aritmetikája nem versenyezhet. Géresi nem ismerte azokat a nagy felfedezéseket sem, amelyek a kéziratát megelőző évtizedekben láttak napvilágot: a szimbolikus algebra kialakulása, a trigonometria fejlődése, a logaritmusok felfedezése, Viète, Kepler munkái stb. Az itteni viszonyok ezeknek a megismerését nem követelték meg. A fejlettebb országokhoz képest mindinkább lemaradtunk.

Géresi aritmetikájában haladó vonások is találhatók: a kalkulusokkal való műveletek kihagyása, egyes módszertani szempontok érvényesítése, amelyekkel túlhaladja az első nyomtatott aritmetikáinkat. Ezek a törekvések csak a XVIII. század elején hangsúlyozódnak majd ki méginkább. A helyi jellegű feladatok Géresinél sem kerülnek jobban előtérbe, mint az első nyomtatott aritmetikáinkban. Kézirata nem tükrözi egy olyan bányavárosnak a sajátságos problémáit, mint amilyen Nagybánya volt. Ugyanazok a bányatermékek (réz, ón, só), ugyanazok az áruk, pénznemek és mértékek szerepelnek benne, akárcsak a nyomtatott aritmetikáinkban. A Géresi aritmetikája nem tükrözi az áruknak azt a nagy választékát, amiről a korabeli „limitációk" tanúskodnak. Pedig Nagybányán abban az időben vásárokat tartottak. („A nagybányai sokadalom közel van" írja Teleki Mihályné egyik levelében.) A használatban levő pénzek árfolyamainak, váltószámainak a gyakori változására sincs tekintettel, a régi váltószámokat veszi át.

Géresi István, a Schola Rivulina praeceptora, nem volt különösebben képzett matematikus. Átlag-praeceptornak tekinthető. Egy szorgalmasabb diák, aki praeceptorságot nyert. Matematikai műveltségét valamelyik hazai iskolában, valószínűleg éppen a nagybányai iskolában szerezte. Az akkori tanítási módszerek nem tették lehetővé az aritmetikai ismeretek alaposabb elsajátítását. A tanítás lényegében szabályok szajkózására szorítkozott. Így tanult Géresi is, ő csak így taníthatott, csak az elődöktől örökölt ismereteket foglalhatta könyvébe. Az elkövetett hibák, az átvett hibák, a „nehezebb" részek szolgai átvétele könnyen érthető. Gyakran olyan szabályt tanít, melyet maga sem ért.

Nem lehettek képzettebbek a kartársai sem. Kivételt csak azok képeztek, akiket „felfedeztek", felkaroltak és külföldi iskolákba küldtek, vagy pedig olyan kiváló tanár irányítása mellett tanultak, akik mellett tovább fejlődhettek, az önálló kutatás útjára léphettek. Ilyen kiváló rektor Géresi idejében tudomásunk szerint nem volt Nagybányán.

Bizony ezek az aritmetikák, a maguk receptszerű szabályaival, ma már nagyon primitív benyomást keltenek. Az egyiptomi papiruszok aritmetikájára emlékeztetnek. Már meg sem lepődünk, amikor olvassuk: „es igaz az operatio". Ahmes tekercsében is ez a mondás refrénszerűen ismétlődik. Ugyanezt mondhatom a szerzőnek az absztrakt szám fogalma előli menekküléseiről. Amikor az osztásnál például a maradékot, bármi is az osztandó, hibásan *pénznek* tekinti. Amikor egy számtani haladvány összegét kiszámítja és a végére odaírja: „Latod hogy zaz 33 teszen, immar te azzal szabad vagy hogy ha forintra ertede az vagy penzre". A Debreceni Aritmetikában ugyanitt: „Immár azzal te szabad légy valamire értőd, vagy forint számnac, vagy posztó számnac". Ugyanilyen benyomást tesznek Géresinek azok a számjai, amelyekben a számnév a számjegyekkel keveredik, mint az előbb: „zaz 33", ami az ősi babiloni gazdasági elszámolásokban (agyagtáblákon) szokásos jelölés. (Ugyanis egyes sémita törzsek átvéve a sumér 60-as számrendszert, ezt keverik a saját 10-es rendszerükkel és így jutnak ehhez a vegyes jelöléshez.) Megjegyzésem különben nemcsak a hazai XVI—XVII. századi aritmetikákra, hanem általában ennek a kornak az aritmetikáira vonatkozik.

Géresi aritmetikájának a jelentőségéről beszélve, reméljük, hogy ennek a kéziratnak az előkerülése érdeklődést ébreszt az annyira elhanyagolt matematikai kéziratok iránt. Esetleg újabb kéziratok előkerülését is eredményezi. Rámutat arra, a most már elodázhatatlan kötelességünkre, hogy számba vegyük és tanulmányozzuk azokat a matematikai kéziratokat, amelyek megmenekültek a pusztulástól és tanúskodni kívánnak matematikai életünk múltjáról. A hazai matematika múltjának a tanulmányozói eddig leginkább a nyomtatott művek iránt tanúsítottak figyelmet. Pedig a hazai matematika kezdeteinek a feltárása szempontjából kéziratainak jelentősebbek.

Számba kell vennünk azokat a külföldi matematikai műveket is, amelyek a régi iskoláink, intézményeink könyvtáraiban fellelhetők. Ezeknek a számbavétele ugyancsak hozzátartozik a hazai matematikai élet, a matematikai oktatás múltjának a felméréséhez.

Hazánk tudományos múltján végigtekintve, Géresi kéziratának az előkerülése nem számíthat meglepetésnek. Ismerve azokat a szoros kapcsolatokat, amelyek az itteni és külföldi iskolák között, már a középkorban és azóta is fennálltak, könyvtáraink, kézirattáraink, levéltáraink, valamint a külföldi könyvtárak és levéltárak tanulmányozásával sokkal nagyobb meglepetések is érhetnek.

Függelék

AZ ARITMETIKÁK ÉS ARITMETIKAI MŰVELETEK GÉRESI KÉZIRATA ELŐTT

A matematikai oktatás terén Nyugat-Európában a XVI. században mélyreható változások történtek. A már korábban jelentkező, a feudalizmust aláásó, új termelési mód új társadalmi viszonyokat teremt. Az általa kiváltott humanista felfogás, majd a reformáció, az oktatás terén is fordulatot jelentő változásokat eredményezett. A tudomány fejlesztésében érdekelt, mind jobban erősödő burzsoázia az oktatás fejlesztését szorgalmazza. A nevelés lényegéről is új felfogás alakul ki. Ez az új felfogás sugárzik többek között Rotterdami Erasmus, *De ratione studii* (1512) és Ph. Melanchton, *De corrigendis adolescentiae studiis* (1518) című művéből.

A J. Lefèbre d'Étaples (1455?—1636) alapította francia humanista iskola teljesen elfordult Arisztotelésztől. Ehhez az iskolához tartozott J. Sturm, az új elvek felépülő, híres strassburgi gimnázium megalapítója (1538). Sturm egyik párizsi tanítványa, P. de la Ramée[24] (1515—1572), a szerzője egy Euklidész-kiadásnak s többek közt egy aritmetikának, számoló könyvnek is (1555). *Scholae mathematicae* (1569) című művében a matematikaoktatás reformjával foglalkozik, és bírálja Euklidészt.

[24] János Zsigmond 1569-ben meghívta Ramus Pétert, a párizsi egyetem tanárát, Gyulafehérvárra tanárnak.

A matematikai oktatás fejlesztése terén jelentős az 1534-ben alapított jezsuita rend tevékenysége is. Az „eretnekségek" ellen indított offenzíva céljaira, Európa-szerte kitűnően szervezett iskolákat létesített. Így a Collegium Romanum-ot (1551), a Collegium Germanicumot (1552), az ingolstadti kollégiumot (1556) stb. Különben ellenezték Ramus felfogását, élesen szembefordultak a kor nagy haladó tudósaival, G. Galileivel, B. Telesioval, a skolasztika minden ellenzőjével, és alig vettek tudomást J. A. Komenskyről.

Az új körülmények között számos közép- és felsőiskola létesül, melyekben a matematika oktatása egyre nagyobb hangsúlyt kap, s fokozatosan, a protestáns és a jezsuita iskolákban — a középiskolákban és az egyetemeken — mindinkább a nevelés egyik fontos elemévé válik.

A humanizmus felújította a régi klasszikus időknek a felfogását a matematika-oktatásról, amikor is azt vallották, hogy a tökéletességhez a Quadrivium útján (aritmetika, geometria, zene, csillagászat) lehet eljutni, és ennek élén éppen az aritmetika állt. Ez a felfogás különben a középkorban sem felejtődött el teljesen. Az új idők írói dícsérik az aritmetikát, hivatkozva mind a görögök véleményére, mind az aritmetika nagy hasznára.

A XVI. század kezdetéig a matematika oktatása szűk körben mozog, a középiskolákban alig kap helyet, az egyetemeken is csak a törtszámításokig (bezárólag) terjed. A bécsi egyetem egyik tanárának, Georg Peurbachnak (1423—1461) az egyetemi ifjúság számára írt számoló könyve (*Elementa Arithmetices*, 1492) annyi számolási ismeretanyagot tartalmaz körülbelül, mint amennyivel egy mai 10 éves gyermek rendelkezik. Pedig a bécsi egyetem ebből a szempontból az igényesebbek közé tartozott.

A XVI. század folyamán viszont a matematikával kapcsolatos igények megnőnek az iskolákban is. A gyakorlati számítások tantárgyként szerepelnek mind a katolikus székesegyházi és kolostori, mind a protestáns városi, fejedelmi és főúri iskolákban, bár a nyelvi tanulmányok még túlsúlyban vannak. A tanítás legtöbb idejét a latin nyelv elsajátítása foglalja el. Megjegyzésünk elsősorban a latin iskolákra vonatkozik, ugyanis ebben a korban iskolán nyugaton elsősorban a latin iskolát értik. Az úgynevezett számoló iskolákban (ahol ilyenek voltak), amelyekben számolómesterek működnek, természetesen a matematika nagyobb szerepet kap. A jelentősebb egyetemeken is, a bölcsészeti karokon mind nagyobb lendülettel folyik a matematika oktatása.

A XVI. században az aritmetika főleg Németországban ért el nagyobb fejlődést, az addig vezető helyet elfoglaló Olaszország mellett. A magyarázatot Engelsnek egy 1889-ben írt leveléből is nyerhetjük, amelyben azt írja : „ez alkalommal vettem igazán észre, hogy az arany és ezüst bányászat Németországban... képezte az utolsó lökést, mely gazdasági szempontból Németországot 1470—1530-ban Európa élére helyezte és az első polgári forradalom központjává tette". Majd ugyanott : „... utolsó tényezőnek bizonyult, amikor a dolgok a céhek és közvetítő kereskedelem szervezeteinek a viszonylag erős fejlődéséhez vezettek, ami azt eredményezte, hogy Németország eléje került Olaszországnak, Franciaországnak és Angliának". Tanulmányunk szempontjából azért fontos ez a körülmény, azért térünk ki külön Németország fejlődésére, mert amint látni fogjuk, a XVI. és XVII. századbeli erdélyi fejedelemségbeli iskolák és a német iskolák között igen szoros volt a kapcsolat.

A XVI. századi tantervek keveset beszélnek a matematikával kapcsolatos igényekről, a matematikai oktatás anyagáról. A különböző hatóságok iskolákra vonatkozó rendeletei mégis tájékoztatnak a matematikai oktatás menetéről és tárgyáról. Íme néhány ilyen rendelet :

Zwickaui rendelet a hat osztályos latin iskolák számára 1523-ból[25] : „Der Sechser Übung : Die Zyphern vnd zal. Die übung der fünfer : Gemeyner rechnung. Der vierer übung (itt semmit sem mond). Vbung der dreyer : Musik (Arithmetik) vnd Astronomei." (A két felsőbb osztályról semmit sem mond.)

Szászországi tanításterv az öt osztályos maganiskolák részére, 1580-ból[26] : „Auf den Freitag soll von 12-1 Uhr die Arithmetica *gelesen*[27] werden. Es sollen aber die Praeceptores keine andre Arithmeticam denn Piscatoris brauchen un daraus in quarta Classe (felülről a második osztály) alleine die species, in quinta (legfelső osztály) aber die ganze Arithmeticam *lesen*".

---

[25] Fr. Unger, *Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung*, Leipzig 1888, 24. oldal.

[26] Unger, i. m., 25 old.

[27] A kiemelések tőlem.

A rendeletekben kötelezően előírt kompendiumok tájékoztatnak pontosan az oktatás matematikai anyagának a terjedelméről. Így az altdorfi gimnázium számára 1575-ben kiadott rendelet előírja[28] : „Der Mathematicus soll die Arithmeticam, so gut er die in lateinischer Sprach bekommen kann, ausdrücklich und verstendlich *lesen* und explicieren. Vnd solches führnehmlich auss dem libello Gemmae Frisii". Láttuk, hogy Szászországban Piscator (Joh. Fischer) Compendiumát írták elő.

Tegyük még hozzá, hogy az egyetemeken sem tanultak sokkal több matematikát, mint a középiskolákban. Grammateus említi könyvében, hogy a bécsi egyetemen a Peurbach „algorithmus"-át tanítják. A wittenbergi egyetem matematika-oktatásáról közvetve értesít Rhaeticus ottani tanárnak a fennmaradt megnyitó előadása[29], melyben dicséri az aritmetikát, és kéri a diákokat, hogy ne rettenjenek vissza az aritmetika tanulásától. Elmondja, hogy az összeadás és kivonás könnyű, a szorzás és osztás több igyekezetet igényel, de figyelemmel elsajátítható. Vannak az aritmetikának nehezebb részei is, „de én azokról a kezdeteiről beszélek, amelyet önöknek tanítanak".

Míg a XVI. századi gazdasági és szellemi életre a nagy fellendülés jellemző, addig a XVII. században, Közép-Európában a legtöbb területen visszaesést tapasztalunk. A nagy földrajzi felfedezések eredményeként a gazdasági, kereskedelmi élet súlypontja Európa nyugati országaiba helyeződött át. Ezek válnak mindinkább a tudományos élet középpontjává is. A 30 éves háború folyamán pedig egész országrészek pusztultak el, szemmelláthatóan visszaesett mind a gazdasági, mind a tudományos élet. A lakosság elszegényedett, az oktatás színvonala lesüllyedt. Az elemi oktatás úgyszólván megszűnik. A latin iskolák tengődnek és igen kevés számoló iskola maradt meg a nagyobb városokban.

A tantervek aritmetikai tartalma változatlanul az előző évszázadbeli Az alsóbb iskolákban nem jutnak túl a regel detrin és a törteken. A latin iskolákban is alig haladták meg ezeket a minimális igényeket. Haladásként talán azt említhetjük, hogy a latin iskolákban korábban kezdték tanítani a számolást.

Ebből a korból származó rendeletekből elég pontosan megállapítható az aritmetika tanításanyaga. Egy 1615-ből kelt pfalzi rendelet az öt osztályos gimnáziumok számára elrendeli : „Tertiani discant Numerationem, Additionem, Substractionem. Secundani addant superioribus Multiplicationem, Divisionem et Regulam de tri. Primani cum his omnibus Fractionum initia, prout ea in libello Arithmetico sunt exposita, conjugant". A hesseni, 1656-ban kelt rendelet a hat osztályos gimnáziumokra vonatkozóan így intézkedik[30] : „Die Inferiores (negyedikesek) sollen in der Arithmetik das einmalein und die zahl lehrnen vnd schreiben, die mitteln die 4 species gantz fertig, die superiores aber auch die doctrinam de numeris fractis vnd proportionibus wohl fassen vnd vben".

A régi homokkal beszórt táblán, és a későbbi abakuszon kialakult számítási eljárások tovább élnek az írásos számítások elterjedése idején is. Ezeket az eljárásokat Sacrobosco (1256 ?) sok kiadást megért műve (*Tractatus de arte numerandi*) is tartalmazza.

A Géresi kéziratot megelőző időben, az „ujjakon való számolás"-tól eltekintve (ami az újkor elején is még használatban volt), a számításoknak két módja terjedt el : a „kalkulusokkal való számolás" (kalkuláris számvetés) és az „írásos" számítás. A kalkuláris számvetés, illetve számoló pénzekkel[31] történő számítás a régi abakuszon történő számításnak egy új változata (Algorithmus linealis, Rechnen auf den Linien), amelyik mégegyszer felvette a versenyt az arabok terjesztette, (de indiai eredetű) írásos számításokkal (Rechnen auf der Feder). A kal-

---

[28] Unger, *i. m.*, 25. old.

[29] K. v. Raumer, *Geschichte der Pädagogik*, 4. Aufl. 1872, I. 288. old. Lásd még: V. Marian, *Philipp Melanchton și matematicile*," Gazeta matematică," 1941, nr. 8, 397. o.

[30] Unger, i. m., 117. old.

[31] A legrégebbi számoló pénzek Franciaországból, a XIII. századból valók, de később igen sok országban elterjedtek. A latin nyelvű írások főleg *calculus* (calculi- = kövek) néven emlegetik. Franciaországban *jeton*, Angliában *counter*, Németországban *rechenpfennig*, Németalföldön *telpenning* vagy *reckenghelde*, Spanyolországban *contos*, *contador* vagy *giton* nevekkel találkozunk. De mivel számolás közben ezeket az érmeket rárakták, dobták a számoló asztallapra, azért találkozunk a *jactator* és *projectile* nevekkel is. Leginkább fémből, különösen rézből verték ezeket a számoló pénzeket és különböző feliratokkal és ábrákkal is díszítették. Csontból, fából is készültek számoló pénzek. Talán ezek emlékét őrzi a „fabatka" szavunk is.

kulussal való számítás a XVI. században még igen nagy használatnak örvendett. Az írás ismeretének elterjedése, az indus-arab számjegyek, számírás és számolási eljárások elterjedése azonban mindinkább kiszorította Nyugat-Európából. Az új számítási módot, az arab (indiai) számjegyekkel való számítást, először a velencei és génuai kereskedők használták, mint valami titkos kereskedői műveletet. Később ezek a műveletek elterjednek egész nyugaton, különösen a könyvnyomtatás felfedezése után.

A négy alapművelet, a maitól némi eltéréssel, már az indiaiaknál kialakult, akik sokféle számítási eljárást ismertek. Homokkal beszórt táblákon, számjegyekkel számoltak. A már elhasznált, vagy kiigazításra szoruló jegyeket könnyen letörölték, és szükség szerint mást írtak a helyébe. Az arabok átvették az indiai eljárásokat, de amikor papíron kezdtek számolni, a jegyek letörlése már nehézségbe ütközött. Azért kiigazításkor áthúzták az illető jegyet, a helyest pedig föléje írták. Ez az eljárás került át Európába is.

A számok mai célszerűbb elrendezése, a csiszoltabb számítási eljárások Európában csak a XV. században kezdenek kialakulni. Az újabb eljárásokban a számjegyek áthuzogatása elmarad. Először Olaszországban alakul ki ez az új eljárás. Ettől az időtől kezdve kétféle számítási eljárásról beszélnek: „per figurarum deletionem more Alemanorum" (német módra, a számjegyek kitörlésével) és „sine figurarum deletione more Italorum" (a számjegyek kitörlése nélkül, olasz módra).

A XV. században nagy fejlődésnek induló bécsi iskola, Johannes von Gmunden (1380–1442), Georg von Peurbach (1423–1461), Johannes Regiomontanus (1426–1476), az olasz eljárást karolja fel és terjeszti el Németföldön is.

Keletebbre is, így az erdélyi fejedelemség területén is, ez az eljárás honosodik meg. Az első magyar nyelvű aritmetikák is már többnyire ezt az eljárást ismertetik. Nehéz megállapítani, hogy Peurbach és Regiomontanus közvetlen hatásaként [32], vagy pedig csak közvetve, nyugatról érkező hatásként terjednek el ezek az eljárások Erdélyben is. A pécsi és krakkói egyetem az olasz egyetemekkel szoros kapcsolatot tartott fenn, s így közvetlenül Olaszországból is kaphatta, illetve terjeszthette az olasz eljarást. Köztudomású, hogy különösen a krakkói egyetemet milyen nagy számban látogatták az erdélyi ifjak. Már a XIV. században moldvai ifjak is látogatták a krakkói egyetemet. A szász ifjak pedig leginkább a bécsi egyetemet látogatták. Megfelelő számban találunk erdélyieket Párizs, Bologna, Pádua, Prága stb. egyetemén is. De a XV. század elején az olasz, humanista műveltségű Scolari püspök (1409–1426) idején Váradon egy firenzei kolonia tevékenykedik, melynek tagjai is lehettek az olasz eljárások terjesztői. Annál is inkább gondolhatunk erre, mert a század közepén Váradon híres csillagda is működött, ami a matematikai ismeretek fejlettségét is feltételezi. Mégis a nyomtatott és írott aritmetikáink inkább amellett szólnak, hogy az új eljárások később és nyugatról, főleg a német és holland iskolák közvetítésével érkeztek hozzánk.

Történészeink szerint[33] nálunk az arabszámokkal szemben sok ideig ellenállás volt tapasztalható. Ebből következne, hogy az arab számítási módokkal szemben is. Janits Iván, amint írja, a megvizsgált okleveleken arab számjegyeket csak ritkán talált, a legrégibb arab számmal keltezett erdélyi oklevél pedig szerinte 1464-ből való[34].

[32] Peurbach 1451-ben Budán királyi asztronómus lett és Budán írta egyik asztronómiai munkáját is. Regiomontanus, egy ideig, 1467-től kezdődően, a pozsonyi egyetemen tanított.

[33] Jakó Zsigmond, *Paleografia latină cu referire la Transilvania* (sec. XII–XV.) „Documente privind Istoria Romîniei". Introducere, vol. I. 1956, pag. 171–280.

[34] Janits Iván, *Az erdélyi vajdák igazságszolgáltató és oklevéladó működése 1526-ig*, Bp., 1940–88 l. A szóbanforgó oklevelet Vízaknai Miklós és Somkereki Erdélyi István alvajdák adták ki. — Fr. Müller régebbi, 1859-ből származó, tanulmányában azt állíja, hogy tudomása szerint a legrégebbi arab számmal keltezett erdélyi oklevél a szebeni Nat. Archiv (ma Állami Levéltár) 254 és 258 számú oklevelei, 1466 ill. 1477-ből keltezve (Fr. Müller, *Zur älteren siebenbürgischen Glockenkunde*. „Archiv des Vereins für siebenbg. Landeskunde" 4, 1859). — Feliratokon az arab számjegyek régebbi előfordulásáról is tudunk. Így a Kraszna–Récse-i (Recea) harangon 1442 (? Nem olvasható ki pontosan). Viszont Fr. Müller, említett tanulmányában (u. o. 218.1.), a kőhalmi (Rupea, Reps) templom harangján szereplő kevert római és arab számjegyekből összetett évszámot tekinti az általa ismert legrégebbi harangon előforduló arab számnak. Ezen a harangon a következő évszám olvasható: m° CCCC°. 8° VII. (Amint G. Gündisch 1962 december 1-én kelt leveléből kiderül, az a harang és rajta az említett felirat, ma is ott található). Debreczeni Lászlónak a helyszínen történt feljegyzései

Megjegyzem, hogy az arab számjegyek nyugaton is lassan terjedtek el, bár már a XII. század több kéziratos algoritmusában szerepelnek. 1202-ben Leonardo da Pisa is megírta híres könyvét éppen azzal a céllal, hogy megismertesse az arab számokat és számolást. Ennek ellenére a szélesebb rétegek csak jóval később ismerték meg, ill. fogadták el. Leonardo után még három évszázadon át a nép körében a római számok uralkodtak.

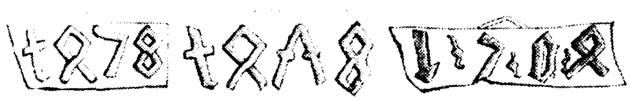
A középkori és reneszánsz-kori aritmetikák szerzői az egyes aritmetikai alapműveletek, speciesek elvégzésére rendszerint többféle eljárást ismertetnek, amelyek közül azonban egyesek alkalmazása, használata nem mondható általánosnak. A gyakorlatban a speciesek számára jól meghatározott eljárások alakultak ki.

Az aritmetika oktatására az jellemző, hogy nem az elméleti megalapozáson, hanem a gyakorlati, alkalmazható részek megtanításán van a hangsúly. Az oktatás módja elsősorban a szóbeli tanítás, a szabályoknak a könyvnélküli elsajátítása. Semmi nyoma sincs az aritmetika elméletének, módszertani alapelveknek. Peurbach gyakorlati jellegű műve hagyományokat teremtett. Azok a művek, amelyeket tankönyvként használtak, a kor szellemének megfe-

---

és rajzaiból azonban régebbi keletű, harangon előforduló arabszámokról is tudunk. Így Magyarlónán: m. CCCC 80, Kalotaszentkirályon: m. CCCC°. 81, Galambodon már tisztán arab számjegyekből: 1881, Olasztelken: 1889 stb. Lelkészi jelentések még régebbi, harangon előforduló arab számjegyekről is beszélnek. Így Tordaszentlászlón: m. CCCC. XX8, Magyarvistán 1881 stb. Sőt Borbereken 1(4)73, azonban a 4-es olvashatatlan. A XV. század végén az arab számjegyek használata általánosnak mondható.

M ü l l e r az említett tanulmányában mint a legrégebbi, épületen előforduló arab számjegyeket említi a szebeni evangélikus templom kapuján lévő 1471-es évszámot és a Reussenfels házon levő 1474-es évszámot. Viszont K e l e m e n L a j o s történész közlése szerint egy csikszentmihályi (Mihăileni) ház ajtókövén, az 1447-es évszám is előfordul. Ha ez a közlés igaznak bizonyul, úgy, tudomásom szerint, ez az eddig előkerült legrégebbi arab szám hazánkban. Sajnos a feliratnak nem tudtam a nyomára bukkanni, arról Orbán Balázs sem emlékezik meg. — O r b á n B a l á z s a *Torda város és környéke* című kötetében közli a tordai piaci nagy templom (róm. kath) pár feliratát (D a n i J á n o s terelte rá a figyelmemet) és úgy látszik itt fordulnak elő a legrégebbi, hazánkban jelenleg is meglevő arab számjegyek. O r b á n a templom építését, vagy legalább a megkezdését, Zsigmond király idejére teszi. A szentély régi boltozatának két zárókövét, melyeket lebontáskor hihetőleg kihordtak, utólag a lelkészi lak kapu alatti falába, a másikat pedig a konyhába vezető ajtó fölé falazták be. Az egyiken római számmal a következő felirat olvasható: A. D. MCCCCLXV E. U. T. ami mutatja O r b á n szerint a szentély boltozatának a bevégzésének a dátumát. A másik zárókövön olvasható 1452-es szám viszont a boltozat építésének a megkezdési évét mutatja, O r b á n szerint. Közöljük a fénykápét az utóbbi igen je-



lelően csak szabályokat és példákat tartalmaznak. Annak, aki a matematikai ismereteit el akarta mélyíteni, a klasszikus művekhez kellett folyamodnia. A reneszánsz folyamán az ókori klasszikus műveket sorra mind kiadták és azokat kommentálták.

A műveletek külső alakja, a számok leírása, elrendezése eléggé kezdetleges, rendszertelen. A külalakra csak a XVI. században kezdenek figyelmet fordítani. W. Grammateus (1518) az összeadásnál már ajánlja a számjegyek pontos egymás alá helyezését, az összeadandók aláhuzását és az összegnek a vonal alá írását. De ezeket az intelmeket csak a XVIII. században fogalmazták meg határozottabban és pontosabban.

A szerzők a műveletek szabályait az eljárások helyességét nem bizonyítják. Csak a XVIII. század elején megjelenő nagy tankönyvek hoznak komoly módszertani változást (Chr. Sturm, *Kurtzer Begriff der Gesamten Mathesis*, Nürnberg 1707; Chr. von Wolff, *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, Halle, 1710; *A. G.* Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie* stb., Göttingen 1758; stb.).

Az aritmetikában a XVI. század végéig műveleti jelek nem fordulnak elő. Sőt a XVII. században is csak ritkán. A + és — jelek J. Widmannál (1489), M. Stifelnél (1545), A. Riesenél (1550) ritkán előfordulnak ugyan, de rendszerint nem műveletjelként, hanem többlet-vagy hiány-jelként. Ezek a jelek rendszeresebben az algebrákban fordulnak elő. A műveleti jelek használatát csak a már említett XVIII. sz.-i tankönyvek terjesztik el és teszik általánossá az aritmetikákban is.

Az aritmetikai műveletek ellenőrzésére már a korábbi századokban különböző próbákat alkalmaztak. Ennek a szokásnak régi, történelmi gyökerei vannak. Amint már említettük, az indiaiak a műveletek elvégzése során a homokos tábláról a számjegyeket letörölték, ezért az elvégzett számítások ellenőrzése esetén az egészet meg kellett ismételniök. A hosszadalmas munka elkerülése végett folyamodtak próbákhoz. A próbák felfedezésének a története ismeretlen. Egyes arab írók indiai származásúnak mondják. H. Alhwarazmi (IX. sz.) a szorzás próbájaként gyakran alkalmazza a 9-es próbát. Alkarhi (1010 körül) ismeri a 11-es próbát is. Ibn Albanna (1300 körül) beszél a 7, 8, 9, 11 és más számokkal történő próbákról.

Nyugat-Európában a XII. században tűnnek fel az említett próbák. Leonardo da Pisa (1228) részletesen beszél róluk és megmagyarázza alkalmazásukat a négy alapművelet esetében. A próbát prímszámokkal, különösen 7, 11, 13-mal végzi, s ugyanakkor a próbát az ellenműveletek segítségével is ismerteti. Sok későbbi számoló már nem ismeri ezeket a próbákat. Sacrobosco kommentatora, Petrus de Dacia (XIV. sz.) ismét használja a 9-es próbát, még a gyökvonásnál is. Pacioli (1494) pedig részletesen tárgyalja a próbákat, teljes általánosságban. A XVI. század számoló könyvei különböző próbákat, egy feladatnál többet is alkalmaznak. Chr. Rudolff (1526) és P. Apian (1527) a 6, 7 és 8-as próbát alkalmazzák. J. Fischer (1559) az

---

lentős feliratnak az Orbán könyve alapján. Valószínűleg művészi szempontok miatt írták az egyik évszámot római és a másikat arab számjegyekkel. A terjedelmesebb római számjegyek szépen díszítik az egyik zárókövet, míg a címeren szűkebb lévén a hely, az arab számjegyek bizonyultak alkalmasabbaknak a másik zárókövön. A templom déli falának oldaltámasztó oszlopain még három évszám van bevésve, amelyeket ugyancsak az Orbán könyve alapján közlünk. Ezek a számok azt mutatják, Orbán szerint, hogy a templom falai 1458-tól 1478-ig elkészültek, de a templomot teljesen csak 1504-ben végezték be.

Vegyük szemügyre a zárókőre vésett évszámot. Számbavéve az arab számjegyek XV. századi alakjait, a tízesek helyén álló 5-ös számjegyet 7-esnek is lehet olvasni. Mégis összevetve ezt a jegyet a templom oszlopain levő három évszámmal, biztosra állítható, hogy 5—ösről és nem 7-esről van szó, amint azt Orbán is megállapította. A Sacrobosco kéziratán, vagy más XV. századi kéziratokon is az 5-ös hasonló, csak a jegy első szára egészen felkunkorodik, félkör alakban. A mi feliratunkon a művész alkalmazkodott a rendelkezésére álló szűk térséghez és így kapta a számjegy a látható alakot.

Meg kell még emlékeznünk a Szt. Györgyi János vajda gyűrűpecsétjéről, mely az 1460-as évszámot tartalmazza (arab számjegyekkel) és amelyről Müller is megemlékezik az idézett tanulmányában. Dani János tudományos kutató, 1962 nyarán kutatott a szebeni állami levéltárban, és kezébe került az az okmány, melyen előfordul az említett pecsét, egy papirfelzetes pecsét, rajta az 1460-as évszám. Egy levélről van szó, melyet „Johannes comes de Sancto Gergio et Bozin wayvoda Transsylvanus Siculorumque comes" intézett a hét szász szék bíráihoz, seniorjaihoz és magához a közösséghez és benne fejük s javaik vesztése terhe alatt megparancsolja, hogy minden hadi készületeket tegyenek meg (insurgáljanak), mert a török császár készül betörni Erdélybe. (Arhivele Statului Sibiu, Fond U. II. 254—1466 IX 25 Cluj)

5, 6, 7, 8, 9 és 11-es próbát stb. A 9-es próba szolgáltatja leggyorsabban a próbaszámokat, s azért ez volt az uralkodó.

A XV. és XVI. századi aritmetikák szakkifejezései többnyire latin eredetűek. A latin kifejezéseket az egyes nemzeti nyelvű aritmetikák is jórészt átvették vagy lefordították. A *próba* szó pl. a számjegyek összegéből a 9 többszörösének a kivonása utáni maradékot jelentette. Az *exemplum* (eximere igéből) a feladatot jelölte. A *facit* (facere ige egyes szám 3. személy) szó, mint szakkifejezés előfordul már Balbus (100 i. u.) földmérőnél, a XV., XVI. század aritmetikáiban pedig sűrűn szerepel, és az eredményt jelöli. A *resultatum* (resultare ige participiuma) a középkorban eredményértelmet nyer A *summa*, a legfelső szám (a rómaiak az eredményt a műveleteknél felül írták és nem alól, mint mi), már a klasszikus ókorban használatos volt, és a mai használattól eltérően, általánosan az eredményt jelölte. Így Cicerónál a kivonás maradéka summa reliqui. A szorzat, summa ex multiplicatione effecta stb. Ebben az értelemben használják a középkorban is. A XV. századtól kezdődően ez a szó csak az összeadás eredményét, az összeget jelöli. *Summálni* eszerint annyi mint összeadni. A latin evenire, provenire, exire igékből származik a *kijön* (herauskommen) kifejezés.

Az egyes specieseknél előforduló szakkifejezéseket később, az illető species tárgyalásakor vizsgáljuk meg.

Nézzük meg a tanulmányozott korban előforduló nagyobb számneveket. A reneszánsz fejlődő gazdasági, kereskedelmi élete, az árutermelés, a pénzgazdálkodás fejlődése, a nagy, központosított államok kialakulása a szükségleteknek megfelelően fejlesztette ki a számnevek rendszerét is. A XV. század aritmetikáiban megjelent a *millió* elnevezés, így a Treviso-i aritmetikában (1478), Pietro Borghi aritmetikájában (1484), Luca Pacioli Summa-jában (1494). Az utóbbiban még összetett alakban is, millione di millioni. N. Chuquet (1484) már használja a 10^{12} jelölésére a *billion*, a 10^{18} jelölésére a *trillion*-t stb. Az első nyomtatott orosz aritmetika, a Magnicki (1703) féle aritmetika is a nemzetközi neveket (million, billion, trillion) használja. Nem matematikai művekben már a XIV. században is találkozunk a *millió* elnevezéssel. Ezek az elnevezések olasz eredetűek. Az olaszoktól vették át a többi népek is, de csak jóval később honosodtak meg Európa-szerte. Franciaországban már a XVI, XVII. században, Németországban és Angliában csak a XVIII. században kezdik használni ezeket az új neveket. Addig a legtöbb aritmetikában a régi elnevezéssel találkozunk, azaz a nagyobb számokat is az ezer ismétlésével fejezik ki.

Emlékezzünk meg a zéró, illetve a nulla számnévről is. Ez a számnév indiai eredetű. A zéró indiai nevét, *sunya*-t, az arabok as-sifr (as névelő)-re fordították. Leonardo da Pisa-nál latinos alakban, mint *zephirum* jelenik meg. Egyes kéziratok *cifra*-nak nevezik. Ezekből származik a francia chiffre, az olasz zeuero és zero, a német ziffer, a román cifră stb. A cifra sok ideig csak a zero-t jelentette. Arab írások XII. századbeli latin fordításaiban megjelenik a nulla szó is. Később találkozunk ezzel a névvel a Treviso-i Aritmetikában (1478), Chuquet-nél (1484), Borghinál (1484) stb. Viszont sok aritmetikában nem fordul elő. Tartaglia 1556-i nagy művében a zero számára a következő kifejezéseket említi : niteccha, circolo, cifra, zerro, nulla.

A többi számjegy leggyakrabban mint *figura* szerepel az aritmetikákban. Gemma Frisiusnál a következő kifejezésekkel találkozunk : figura, nota, character, elementum. Cardano-nál a littera is előfordul. Franciaországban a chiffre, Németországban a ziffer szó a nép száján kapta az általános számjegy értelmet, és a XVI. század második felében kezdik ebben az értelemben használni.

A számjegy helyét (a leírt számban) a legrégibb, XII. századbeli latin kéziratok valamint Leonardo és Sacrobosco *differentia*-nak mondják. De már Sacrobosconál fellép a *locus* is.

A XVII. században kiadott aritmetikai tankönyvek meglepően kisigényűek. A Riese könyve több kiadásban került forgalomba, s az újabb aritmetikák is számoló könyvének csak rövidítései.

Az iskolákban arra törekedtek, hogy az aritmetikát minél kellemesebbé és könnyebbé tegyék. Például a tanulókat igyekeztek megkímélni a szorzótábla megtanulásának gyötrelmétől. Könnyíteni próbálták a különböző műveleteknél adódó szorzatok kiszámítását. E célból különböző eszközöket találtak ki. Így jelentősek J. Napier (1550—1618) számoló pálcikái, melyekkel a műveleteket a szorzótábla ismerete nélkül lehet elvégezni. Még sok más eszközt is használtak. E korban jelentek meg az első számológépek. E készülékek azonban komplikáltak, kényelmetlenek voltak, sokba kerültek, s emiatt az oktatásban nem használták őket.

Említésre méltó a logaritmussal való számítás elterjedése, a rövidített szorzás feltalálása és a kereskedelmi számítás fejlődése.

Aritmetikai vonatkozásban hangsúlyoznunk kell, hogy ebben a korban, mint az előzőben is, nagy szerepet játszottak az aritmetikák, az úgynevezett számolókönyvek (Rechenbuch).

Ebből az alkalomból tanulságos számba venni a Géresi kézirata előtt megjelent aritmetikákat. Egyesekre már eddig is hivatkoztunk. Ezek az aritmetikák legalább közvetve a hazai aritmetikák alakulását is befolyásolták[35].

IRODALOM

I. *Latin nyelven*

1. Johannes de Sacrobosco (†1256?), *Tractatus de arte numerandi*, Paris 1488.
2. Jordanus Nemorarius (1260 körül), *Arithmetica Demonstrata*, Paris 1496. *Algorithmus Demonstratus*, Nuremberg 1534.
3. Thomas Bradwardine (1290?–1349), *Arithmetica Speculativa*, Paris 1502.
4. Johannes de Muris (1290?–1360), *Arithmetica communis*, Wien 1515.
5. Johannes de Lineriis (1300?–1350), *Algorismus de minutiis*, Venezia 1540.
6. Georg Peurbach (1423–1461), *Algoritmus de numeris integris* etc. 1492.
7. Prosdocimo de Beldomandi, *Algorismi tractatus perutilis et necessarius* (1410), Padua 1483.
8. Georgius de Hungaria, *Arithmetica summa tripartita*, h.n., 1499.
9. F. Calandri, *De arithmetica opusculum*, Firenze 1491.
10. Petro Sanchez Ciruelo, *Tractatus Arithmetice Practice qui dicitur Algorismus*, Paris 1495.
11. B. Licht, *Algoritmus linealis*, Leipzig 1500.
12. J. Huswirt, *Enchiridion novus algorismi*, Cöln 1501.
13. Gregor Reisch, *Margarita philosophica*, Freyburg 1503.
14. J. K. v. Landshut, *Algoritmus integrorum*, Leipzig 1504.
15. J. Landshut, *Algoritmus linealis*, Krakau 1513.
16. H. Schreyber (Grammateus), *Algorismus proportionum*, Krakau 1514. *Algorithmus de integris*, Erfurt 1523.
17. C. Tonstall, *De arte Supputandi*, London 1522.
18. O. Fine (Finaeus), *Protomathesis*, 1532. *Arithmetica practica*, Parisiis 1535.
19. G. Cardano, *Practica Arithmeticae et mesurandi generalis*, Mediol. 1539.
20. H. Loriti (Glareanus), *De VI arithmeticae practicae speciebus*, Freib. 1539.
21. J. Bronkhorst, *De numeris*, Köln 1539.
22. Gemma Frisius, *Arithmeticae practicae methodus facilis*, Antwerpen 1540.
23. A. Lonicerus, *Arithmetices brevis introductio*, Frankfurt 1551.
24. P. Ramus, *Arithmeticae libri tres*, Paris 1555.
25. T. Klos, *Algorithmus*, Krakau 1538.
26. J. Peletier, *Arithmetica*, Poitiers 1545.
27. J. Scheybl, *Compendium arithmeticae artis*, Basel 1549.
28. J. Micyllus, *Arithmetica logistica*, Basel 1555.
29. K. Peucer, *Logistica*, Wittenberg 1556.
30. Lycas Lessius, *Arithmetices eratemata puerilia*, Frankfurt 1559.
31. J. Buteo, *Logistica*, Lugduni 1559.
32. C. Dasypodius, *Mathematicorum disciplinarium principia*, Strassburg 1567.
33. J. Otto, *Calculator*, 1579.
34. Chr. Wursteisen (Ursticius), *Elementa arithmeticae*, Basel 1579.
35. Chr. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, Roma 1583.
36. N. Rymers (Raymarus Ursus), *Arithmetica analytica*, Frankfurt/Oder 1601.

---

[35] Lásd: J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Berlin, 1953. B. I. 112–114. old. H. Grasse, *Historische Rechenbücher des 16. u. 17. Jh.*, Leipzig 1901.

37. P. Cataldi, *Practica arithmetica*, Bologna 1602.
38. J. H. Beyer, *Logistica decimalis*, Frankfurt 1603.
39. K. Waser, *Institutio arithmetica brevis et facilis*, Zürich 1603.
40. A. Metius, *Arithmeticae et geometriae practica*, Frankfurt 1611.
41. G. Henisch, *Arithmetica perfecta et demonstrata*, Augsburg 1609.
42. J. H. Alsted, *Elementale mathematicum*, Frankfurt 1611. *Methodus admirandorum mathematicorum*, Herborn 1613.
43. J. R. v. Graffenried, *Arithmetica logistica popularis*, Bern 1618.

II. Német nyelven

1. U. Wagner, *Rechenbuch*, Bamberg 1482.
2. *Bamberger Rechenbuch*, 1483. *Rechnung in mancherley weys in Babenberg* 1483.
3. J. Widmann, *Behede vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft*, Leipzig 1489.
4. J. Böschensteyn, *Ain newgeordnet Rechen biechlein mit den zyffern*, Augsburg 1514.
5. J. Koebel, *Eyne Newe geordnet Rechenbüchlein*, Oppenheim 1514. *Eyn New geordnet Vysirbuch*, Oppenheim 1515. *Mit der Kryde od'Schreibfedern durch die zeiferzal zu reche*...1520.
6. A. Riese, *Rechnung auff der linihen*, Erfurt 1518. *Rechnung auff der linihen und federn*, Erfurt 1522 stb.
7. H. Schreyber (Grammateus), *Behend und khünstlich Rechnung nach der Regel und wellisch practic*, Nürnberg 1521, stb.
8. K. Feme, *Eyn qui new rechenbuchleyn*, Erfurt 1523.
9. *Wittenberger Rechenbuch*, 1525.
10. Chr. Rudolff, *Kunstliche Rechnung mit der Ziffer vnd mit den Zahlpfeningen*, Wien 1526.
11. P. Apian, *Eyn Newe Unndwolgegrüngte underweysung aller Kauffmanss Rechnung*, Ingolstadt 1527.
12. M. Stifel, *Rechen Büchlein*, Wittenberg 1538. *Deutsche Arithmetica*, Nürnberg 1545. stb.
13. A. Böschensteyn, *Ein nützlich Rechenbüchlin*, *h.n.*, 1536.
14. J. Brandt, *Kvnstliche Rechenung mit der Zyffern vnd Pfenningen*, 1532.
15. Wälke, *Die Wälsch practica*, 1536.
16. Eysenhut, *Ein künstlich Rechenbuch*, 1536.
17. L. Hegelin, *Ein künstlich Rechenbuch auf Ziffern*, 1544.
18. J. Albert, *New Rechenbüchlein auff der Federn*, 1544.
19. J. Obers, *Newgestelt Rechenpüchlin*, 1545.
20. S. Jakob, *Rechenbuch auff den Linien und mit Ziffern*, Frankfurt 1557.
21. J. Fischer (Piscator), *Ein Künstlich Rechenbüchlein*, Wittenberg 1559.
22. J. Frey, *Exempelbüchlein allerley Kaufmannshandel betr. Nürnberg* 1569.
23. I. Riese, *Ein neues nutzbar gerechnetes Rechenbuch*, 1580.
24. J. Krafft, *Ein neues vnd wohlgegründtes Rechenbuch*, 1592.
25. Sartorius, *Ein New kunstlich Rechenbüchlin. Danzig* 1592.
26. S. Kurz (Curtius), *Schuelrechenbuechlein*, h.n., 1600. *Arithmetica practica*, Leipzig 1619.
27. Ph. Geyger, *Gründtliche vnd ordentliche Erklerung den newen vnd kunstreychen Rechentisches*..., Zürich 1609.

III. Olasz nyelven

1. *Trevisoi Aritmetika*, sz. n., c. n., Treviso 1478.
2. P. Borghi, *Libro de Abacho*, Venezia 1484.
3. L. Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e proportionalita*, Venezia 1494.
4. F. Pellos (Pellizzati), *Sen segue de la art de arithmeticha*..., Torino 1492.
5. G. Tagliente, *Libro de abaco*, Venezia 1515.
6. F. Feliciano, *Libro de abaco*, Venezia 1517.
7. F. Ghaligai, *Summa de Arithmetica* Firenze 1521.
8. G. Sfortunați, *Nuovo Lume, Libro di Arithmetica*, Venezia 1534.
9. N. Tartaglia, *General trattato di numeri et misure*, Venezia 1546.

10. P. Cataneo, *La pratiche delle due prime Mathematiche*, Venezia 1546.
11. G. Lapazzaia, *Libro d'arithmetica e geometria*, Napoli 1566.
12. O. Cantone, *L'uso prattice dell'arithmetica e geometria*, Napoli 1599.
13. L. Forestani, *Practica d'Arithmetica e Geometria*, Venezia 1603.

IV. Francia nyelven

1. Johan Adam, *Traicté d'arismetique pour pratique par gectoners*, Paris 1475. (kzrt)
2. N. Chuquet, *Le Triparty en la science des nombres*, 1484 (kzrt).
3. E. de la Roche (Villefranche), *L'arismetique nouellement composee*, Lyon 1520.
4. J. Peletier, *L'arithmétique*, Poitiers 1548.
5. Cl. de Boissière, *L'art d'Arythmetique contenant toute dimention, tressingulier et commode, tant pour l'art militaire que autres calculations*, Paris 1554.
6. P. Forcadel, *Arithmétique entière et abrégée*, Paris 1556/57.
7. P. Savonne, *L'Arithmetique*, Paris, 1563.
8. J. Trenchant, *L'arithmétique*, Lyon 1566.
9. S. Stevin, *L'arithmétique*, Lugduni 1585.
10. Launay, *L'Arithmétique Arpendage universel Toise des Bastimes* etc. Anjou et Rouen 1605.
11. C. G. Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres*, Lyon 1612.
12. E. Wingante, *Arithmétique logarithmique*, Paris, 1625.

V. Spanyol nyelven

1. A. Delatore, *Vision delectable de la philosophie et artes liberales*, Toulouse 1489 és Sevilla 1538.
2. J. de Ortega, *Compusicion de la arte de la arismetica y Juntamente de geometria*, Barcelona 1512.
3. G. de Texeda, *Suma de Arithmetica practica*, Valladolid 1546.
4. M. Aurel, *Libro primero, de arithmetica, Algebraica...*, Valencia 1552.
5. J. Diez Freyle, *Sumario Compendioso*, Mexico 1556.
6. J. P. de Moya, *Arithmetica Practica y Speculativa*, Salamanca 1562.
7. M. G. Santa Cruz, *Libro de Arithmetica speculativa*, h.n., 1594 és Sevilla 1603.

VI. Portugál nyelven

1. Pedro Nunez, *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1532), Antwerpen 1564.

VII. Angol nyelven

1. *An Introduction for to Lerne to Recken With the Pen, or With the Counters*, St. Albans 1537.
2. H. Baker, *The Well Spring of Sciences*, London 1568.
3. R. Recorde, *The Grounde of Artes*, London 1540.

VIII. Németalföldi nyelven

1. G. van der Hoecke, *Een sonderlingke boeck in dye edel conste Arithmetica*, Antwerpen 1514.
2. S. Stevin, *De Thiende*, Leiden 1585.
3. J. Coutereels. *'t konstigh Cyffer-Boek*, Utrecht 1590. *Arithmetica*, Middelburg 1599.
4. J. van der Schure of Meenen, *Arithmetica, oft Reken-const*, Haarlem 1600.
5. W. Bartjens, *De Cyfferinge*, h. n., 1609.

IX.

Ahhoz, hogy a felsorolást valamennyire is teljesnek tekinthessük, szükséges megemlékezni a fontosabb arab és kínai aritmetikákról valamint az orosz aritmetikai kéziratokról is.

Amint már mondtuk, Európa az arab művekből ismerte meg az írásos számítást [36]. Fontos ebből a szempontból Muhammud ibn Musa Alhwarazmi (IX. század) egyik műve, mely ma csak latin fordításban ismeretes[37]. Sok arab aritmetikáról tudunk még, de csak azok közül említünk párat, amelyek napjainkig fennmaradtak, vagy pontosabban ismertek. Ilyenek :

1. Banu Musa (IX. sz.), *Farastan* (A mérlegről)
2. Abu Kamil Soga ibn Aslam (850 és 931 között), *Tara'il* (Ritkaságok).
3. Ali ben Ahmed Abu'l-Qasim (+987), *El-tacht* (A tábla).
4. Kusjar ben Lebban Abul-Hasan (971—1009), *Jijjun ha 'iggarim* (héberre fordítva).
5. Al-Karagi (régebb al-Karki) (+1029), *Al kafi fil hisab* (Elegendő a számolás művészetéről).
6. Abul Hasan el Nasavi (+1035), *El-moqni' fi'l-hisab el-hindi* (Elegendő az indiai számolásról).
7. Al-Biruni (973—1018), *Kitabal tafhim* (Oktatás könyve).
8. Al-Hajjami (1014?—1123), *Mus kilat el-hisab* (A számolás nehéz példái).
9. Nasir ed-din at-Tusi (1201—1274), *Muchtasar bi-gami 'al hisab bi 'l-tacht we' l-turab* (Számítás táblával és homokkal).
10. Gijat ed-din al-Kasi (+1436), *Miftah al-hisab* (Kulcs a számoláshoz).
11. Abu' l-Hasan al-Qalasadi (+1486), *El -tabsira fi'ilm el-hisab* (Tanulmány a számokról) : *Kasf el-gibab an ilm el-hisab* (A fátyol felemelése a számolás mesterségéről).
12. Beha ed-din el-Amili (1547—1622), *Cholasat el hisab* (A számolás lényege).

Az arabok, pontosabban a muzulmán népek, nem csak közvetítik az indiai ismereteket, hanem azokat tovább is fejlesztik. Például az aritmetikában ők vezetik be először a tizedestörteket.

X.

A kínai matematika fejlődése sokban elüt a többi népek matematikájának a fejlődésétől. A kínai matematika második fejlődési korszakában, (Li-yen beosztása szerint : 200 i.e. —1000 i.u.)[38] elkészültek az ún. suan ching shig shu, klasszikus matematikai művek : 1. Chiu chung, 2. Hai-tao, 3. Sun tí, 4. Wu ts'ao, 5. Chang ch'iu chien, 6. Hsia-hou- yang, 7. Chou pei, 8. Wu ching, 9. Ch' ih ku, 10. Chui-shu. Ezek a művek — később is kiadták őket — felölelik a kor matematikai eredményeit. Tartalmaznak számításokat is, beleértve a törtszámításokat, hatványozásokat és gyökvonásokat is. Összehasonlítva ezeket a nyugati számításokkal, korukhoz viszonyítva rendkívül fejlettek. Sok mindenben megelőzik a nyugati számítási eljárásokat. A kínaiak már a legrégebbi korban fejlett 10-es számrendszerrel rendelkeztek. A pálcikákkal való számítást nagyon kifejlesztették. A számírásukban külön jele volt 1-től 9-ig minden számnak, valamint a 10 különböző hatványainak. Később megismerkednek a zéróval. A XIII. században

---

[36] H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig 1900 „Abh. z. Gesch. d. Math." *10.*

А. П. Юшкевич, *О математике народов Средней Азии в IX—XV вв. Ист. мат. иссл. з IV*, 1951. 455—488 l.

[37] Lásd : B. Boncompagni, *Trattati d'arithmetica*. I. Roma, 1857. *Algorithmi de numero Indorum*. Johannes de Sevilla 1146-ból kelt átdolgozása.

[38] Li-yen, *Chung suan shih lun ts'ung* I. köt., Peking. 1954.

А. П. Юшкевич, *О достижениях китайских ученых в области математики*, Историко-матем. иссл., в VIII (1955).

kialakítanak egy pozicionális számírást is. A tizedestörtek leírását nem találták fel, és azért inkább a közönséges törtekkel dolgoztak.

A kínai számítási eljárások hatását az európai eljárásokra nem lehet felmérni, kimutatni. Pár kínai feladat mindenesetre a nyugati matematikai művekbe is átszivárgott. A kínaiak csak a XVII. században kezdenek megismerkedni az európai matematikával.

XI.

Az orosz szakirodalom nagyon gazdag matematikai kéziratokban. Ezek egy részének a keletkezése éppen Géresi kéziratának a korára esik.

A IX—XVIII századokból, mintegy 300 orosz matematikai kézirat ismeretes. Tartalmuk nagyon változatos [39]. Javarészük a moszkvai Lenin Könyvtárban, a moszkvai Szaltikov-Scsedrin Történelmi Múzeumban és a leningrádi Akadémiai Könyvtárban található. Más részük csak irodalmi források alapján ismeretes. A XVII. századból 15 db aritmetikai jellegű kézirat és 22 db a geometriában alkalmazott aritmetika ismeretes. A 37 db kézirat közül kilenc csak könyvforrásból ismert.[40]

A XVII. század első feléből való aritmetikai kéziratokról Bobinin feltételezi, hogy a XVI. századból való közös forrásból táplálkoztak[41]. Az aritmetikai részt rendszerint bevezetés előzi meg, mely dicséri az aritmetikát és a nagy hasznáról beszél. A bevezetést elnevezés, címzés követi, amelyik majdnem mindegyiknél azonos. A továbbiakban a kétféle számkört tárgyalják, a kis- és a nagyszámok körét. Itt sok ellentmondással találkozunk. Következnek az alapműveletek: összeadás, szorzás, kivonás, osztás. A műveleteknek a próbáit is ismertetik. Az összeadást és szorzást táblázatok könnyítik meg. Különben ismerik az összeadási és szorzási eljárás mai formáját is. Belliusztin 26 féle szorzást talált a kéziratokban[42]. Az 5-10 közötti számok szorzására ismertetik azt a szabályt, amit a magyar aritmetikák „Regula pigrorum" néven tárgyalnak. Tartalmaznak szorzó táblákat, amelynek az ismeretét megkövetelték. Találkozunk bennük négyzetek táblázataival is. A leningrádi Szaltikov-Scsedrin könyvtár egyes kézirataiban haladványok is előfordulnak. Bennük a kivonás azonos a maival. Az osztás is hasonlít az abban az időben használatos gályaosztáshoz. A műveleteket a 9-es próbával ellenőrizték.

Az egészszámokkal való műveletek után következnek az eszközökkel való számítások. Kétféle eljárásról van szó, a „Счете костьми vagy пеняги és a „дощаном счете"[43].

Majd következik egy fejezet a hármas szabályról, ilyen címekkel, „Статья тровная в целых и в долях всяких" vagy „Статья тровная в доля. Azután egy fejezet a regula falsi-t tárgyalja, azaz a kéziratokban, „фальшивая или збойливая статья". Megjegyzem, hogy a XVII. századi orosz matematikai kéziratokban a szláv és arab számjegyek még keverednek.

Befejezésül még említsük meg, hogy Oroszországban a XVII. században keletkeztek a régi grammatikai iskolák mellett a felsőbb iskolák: görög-latin iskola Moszkvában, a kievi akadémia, stb. Ezekben a matematikának még csak alárendelt szerepe volt.

Most pedig térjünk rá az erdélyi fejedelemség gazdasági társadalmi és kulturális fejlődésére és próbáljuk megvilágitani azokat a körülményeket, feltételeket, amelyek között a Géresi aritmetikája keletkezett.

---

[39] Lásd: К. И. Швецов, *Библиография русских математических рукописей IX — XVIII*, Научные записки Станиславского педагогического института, в. I, 1955. — Д. Мордовцев, *О русских щколных книгах XVII в.* Чтения в импер. истории и древностей Российских при Московском университете 1861, *г.* IV.

[40] К. И. Швецов, *О характерных чертах арифметических рукописей XVII столетия*, Математика в школе, 1954 *нр.* 5, 1 old.

[41] В. В. Бобинин, *Очерки истории развития физико-математических знаний в России XVII*, вып. 1. Москва 1886, 17 1.

[42] В. Беллюстин, *Как постепенно дошли люди настоящей арифметики*, под ред. А. Юшкевича, Москва, 1940.

[43] И. Н. Спасский, *Происхождение история русских счетов*. Историко-математ. иссл. вып. V. Москва, 1952.

A XIII–XIV. században Erdély gazdaságilag igen szépen fejlődik. Az arany és ezüstbányászat fokozódása, a vasérckitermelés és sóbányászat erősen lendítette előre Erdély gazdasági életét. Az arany gazdasági szerepének a növekedése előmozdítja többek közt Nagybányának is bányavárossá alakulását. A város 1347-ben a bányászattal kapcsolatban szabadságjogokat nyer. Nagybányán a XV. században pénzverdét is állítanak fel.

Az erdélyi városok, Nagybánya is, a XVI–XVII. században még feudális jellegűek. Ezek a városok még ekkor is csak a céhes kézművesség szűk korlátai között fejlődtek. A fejlett céhes kézműipari városokban ekkor már uralkodott az áru- és a pénzgazdálkodás, bár az az ország naturális gazdaságába van beágyazva. A külső és belső háborúk azonban gátolják Erdély társadalmi viszonyainak a fejlődését, kedvezőtlenül hatnak az ipar fejlődésére.

Erdélyben nem következett be a XVI. században a parasztok szabaddá tétele, hanem az 1514-es parasztfelkelés megtorlásaként, még az addigi szabad vagy félszabad parasztokat is jobbágyságba taszítják. A nagybirtokos oligarchia ráteszi a kezét az ország területének legnagyobb részére és a jobbágyságot véres terrorral kényszeríti szolgaságba.

A XVI. század nem kedvez Erdélyben a városiasodásnak. A Habsburgok és a törökök állandó támadása, a városok ismételt kifosztása és feldúlása eredményeként fejlődésük leáll, nem tartanak lépést a nyugati városokkal, ahol akkor már virágzik a manúfaktura, bomlasztja a hűbéri társadalmat és új termelési viszonyokat hoz létre. Erdélyben a céhek elég erősek maradtak és megakadályozták a termelőerők fejlődését, konzerválták az avult termelési viszonyokat.

A bányászatban is válság állt be. A bányászatot igen elhanyagolták a fejedelemség idején. A nagymennyiségű és olcsó amerikai aranynak a megjelenése Európa piacain az erdélyi aranybányák eljelentéktelenedését eredményezte.

A Habsburg-politika is ekkor mindenütt a feudális nagybirtokosságnak kedvezett. Ipar- és városellenes volt. Ezt a politikát támogatta a katolikus egyház is, a protestantizmustól való félelmében is, amely elsősorban a város polgárságát hódította meg. A városokra kivetett adó állandóan nőtt. A városokat még a köztisztségekben levő oligarchák is sarcolták. Tehát a város polgárságát úgy is mint a kézművesség hordozóját, mint társadalmi erőt, úgy is mint az új vallás legfőbb hordozóját meg akarták semmisíteni. A zsoldos csapatok, ahol tehették, szétrombolták még a termelőeszközöket is, a lakóházakkal együtt a műhelyeket is felgyújtották. Érthető, hogy a XVII. század eleji erdélyi városok szegények, sínylődnek. Ez a képe Nagybányának is.

Bethlen Gábor uralkodása (1613–1629) nyugodtabb éveket jelentett Erdély számára, ami a gazdasági élet felélénkülését vonta maga után. Bethlen Gábor politikája maga is elősegítette a városi fejlődést.

Megemlítem, hogy még Bethlen Gábor idején is állandó nehézséget jelentett a pénzkérdés. A hamis pénzek tömege árasztotta el a piacot. Az országgyűlés több ízben is hoz határozatot a pénz stabilizálására, kivon a forgalomból rossz pénzeket, megszabja a használatban levő pénzek árfolyamát és megtiltja a jó pénz kivitelét az országból. Ezekkel a határozatokkal kapcsolatosan kiadott „limitáció"-k (árszabályzatok) rengeteg hazai és behozott árut sorolnak fel. Így az 1627-es limitáció negyven szakmának több száz áruját tünteti fel.

Fordítsuk most figyelmünket az alépítményről a felépítményre és tegyük vizsgálat tárgyává az Erdélyben érvényesülő társadalompolitikai, vallási, filozófiai áramlatokat és az ezeknek megfelelő intézményeket, Erdély kulturális helyzetét és az itteni iskolázás alakulását. Elmondhatjuk, hogy a humanizmus és reformáció Erdélybe is behatolt. Mivel itt még a polgárság nem alakult ki, azért az új, humanista műveltség először a püspöki udvarokban nyert teret, mint a nemesség művelődésének egy formája, és csak később hatolt be a városokba is. Éppen ezért a humanizmus Erdélyben veszít a forradalmi jellegéből, nem bírálja a feudalizmust és a katolikus egyház túlkapásait. Fel sem veti a tudomány és a vallás közötti ellentmondás kérdéseit, békülékeny magatartást ölt. A városi rétegek követeléseinek csak a reformáció irodalma ad hangot. Mégis a humanizmus sokban hozzájárult ahhoz, hogy a művelődés mindinkább világi jelleget nyert, és előkészítette a teret az anyanyelvű irodalom keletkezéséhez, Erdély mindhárom népénél.

A reformáció ugyancsak ebben az irányban hat, mind a huszitizmus, mind a későbbi változatok. Ezek hatása alatt az okmányok is mindinkább anyanyelven íródnak, úgy, hogy a XVI. század közepén már általános az anyanyelv használata az okmányok szerkesztésénél is.

Erdélybe a reformáció igen korán behatol, mégpedig sorra az összes változatai. De a különböző áramlatok programjai az itteni szociális-gazdasági viszonyoknak megfelelően átalakulnak. Az erdélyi városi irodalom igen fellendül a XVI. század második felében a haladóbb jellegű protestáns áramlatok és a mérsékeltebb áramlatok közötti éles harc következtében. Különösen éles volt a harc Kolozsváron, ahol a városi lakosság közötti osztályellentétek is élesebbek voltak, és ahol a haladó nézetek (unitárianizmus) kedvező talajra leltek.

A XVI. század végén a humanista irodalom és a tudományok újbóli virágzásáról beszélhetünk. Ez a késői humanizmus a reformációval szoros kapcsolatban fejlődött ki és éppen ezért már nem arisztokrata jellegű. Ennek a humanista irodalomnak a nyelve sem kizárólagosan latin, éppen a reformáció irodalmának a hatásaként. A tudományok sem maradhattak teljesen latin nyelvűek, habár a tudományok hivatalos nyelve és tanítási nyelve továbbra is a latin maradt. A számban megszaporodott világi értelmiségiek követelték az anyanyelvet a tudományok művelése terén is. Éppen azért ennek a kornak az irodalmi és tudományos művei részben latin és részben anyanyelven íródnak. A magyar nyelven írt tudományos művek közül jelentősebb Méliusz Juhász Herbarium-a (1578), Lencsés György orvosi könyve, valamint a már említett Kolozsvári Aritmetika. Igen nagy a száma az ebben a korban írt latin nyelvű tudományos műveknek.

Emlékezzünk meg a könyvtárak megszaporodásáról is. Már a XVI. században sok könytvtár keletkezik. Igen értékes magánkönyvtárakról is tudunk. De különösen jelentősek az egyes iskolák mellet létesült nyilvános könyvtárak, amelyek közül több napjainkig fennmaradt, kézzelfogható bizonyságául az akkori műveltségnek.

A XVII. századi erdélyi körülmények igen lefékezték a kulturális fejlődést, stagnáláshoz vezettek, akárcsak Közép-Európában. A városok gazdasági ereje, szociálpolitikai jelentősége csökkent. A feudális földesurak hatalma megnőtt. A fejedelmi hatalom az egyházzal lépett szövetségre. A művelődés az egyház irányítása alá került. Mégis egyes haladó áramlatok is utat törnek, így a puritánizmus, presbiteriánizmus és főleg a kartéziánizmus[44]. Ezeket az áramlatokat a nyugaton tanult ifjak terjesztik.

Most pedig vizsgáljuk meg a XVI–XVII. század erdélyi iskolázás helyzetét.

A reformáció korában elpusztul a katolikus iskolák többsége, de helyükre új, protestáns iskolák emelkednek. Csak néhány katolikus iskola marad fent szigetként a körülvevő protestáns és ortodox iskolák tengerében. Az 1557-i országgyűlés szomorú képet rajzol a közoktatás helyzetéről, de a fejedelmek és a városok, a szükségletek nyomása alatt erőfeszítéseket tesznek a helyzet orvoslására. Iskolákat alapítanak, jeles tanárokat hívnak meg, tanulókat segélyeznek az itteni és külföldi, főleg németországi és németalföldi iskolákban.

Később, a Báthoryak alatt, a katolikus iskolák részesülnek fejedelmi pártfogásban. Jezsuita iskolákat is szerveznek (Váradon, Gyulafehérvárt és Kolozsvárt).

Az erdélyi román nyelvű iskolák is jelentős haladást érnek el a reformáció idején. A brassói román iskola, melyet a XV. században alapítottak[45], a reneszánsz hatása alatt fellendül. Egy 1570-es keltű kézirat szerint alsó és felső tagozattal működik. A felső tagozaton románul (1559-től), szlávul, s talán latinul is tanítanak. Ennek az iskolának a számára 1597-ben kőépületet emelnek, amihez Aron Vodă, moldvai fejedelem is jelentős összeggel járult hozzá. Ezen kívül még sok ortodox román iskola működött, habár ezekről kevés adat maradt fenn.

De más jellegű román iskolákról is tudunk. Így tudjuk, hogy a XVI. században Karánsebesen és Hátszegen, és valószínűleg Lugoson is román iskolák működtek, melyeket a kálvinista propaganda céljaira létesítettek. 1657-ben Fogarason létesítettek jól szervezett román iskolát, mely együttműködött az ottani magyar iskolával. Szigeten is működött román iskola.

Moldvában Despot Vodă (1561–1563) tesz erőfeszítéseket az új, humanista jellegű oktatás meghonosítására. Cotnariban „schola latina"-t létesít, ahova meghívja többek között Georg Joachim Rheticus (1514–1576) már említett wittenbergi tanárt, jeles matematikust és Casparus Peucerus-t (1525–1602), Melanchton vejét, aki ugyancsak tanára, majd rektora volt a wittenbergi egyetemnek. Rheticus és Peucerus nem fogadták el a meghívást. Viszont tudjuk, hogy a szászországi Johann Sommer, jeles humanista költő, aki az Odera melletti Frankfurtban végzett tanulmányokat, tanított a cotnari iskolában. De a fejedelmet 1563-ban megölték, Sommer Erdélybe menekült és ott folytatta tevékenységét. A cotnari iskola további sorsárol igen keveset tudunk.[46]

---

[44] V. Marian, *Descartes Einfluss in Transsylvanien (Siebenbürgen) im XVIII. Jahrhundert*, „Archeion" XV (1933).

[45] N. Sulica, *Cea mai veche școală romînească din cuprinsul Romîniei întregite*, Lásd: „Omagiu lui Constantin Kirițescu," Buc. 1937, 735–164. 1. N. Albu, *Istoria învățămîntului romînesc din Transilvania pînă la* 1800, Blaj, 1944.

[46] St. Bîrsănescu, *„Schola latina" de la Cotnari*, Buc. 1957.

Az erdélyi protestáns iskolákat külföldi mintára, főleg a németországi iskolák mintájára szervezték meg. Luther és Melanchton wittenbergi és Sturm strassburgi iskolai rendszereit léptették életbe. Ezt igazolja több iskola fennmaradt szabályzata[47]. Így ismerjük a brassói városi iskola Honterus által kidolgozott szabályzatát. Nagyszebenben is ehhez hasonló szabályzat volt érvényben. Az Erdéllyel szomszédos területeken is hasonló tanrenddel működtek a protestáns iskolák. Igy a besztercebányai gimnázium tenrendjét Abraham Schremmel dolgozta ki és 1574-ben mutatta be a városi tanácsnak jóváhagyás végett[48]. Sturmnak a strassburgi rendszerét igyekezett meghonosítani. A besztercebányai iskola tanrendjéből ismerjük a használatban levő összes tankönyveket, melyek közt ott találjuk Gemma Frisius és A. Riese aritmetikáját és Chr. Rudolff algebráját.

Ha még számba vesszük a XVI. század óta fennálló erdélyi iskolák könyvtáraiban megmaradt és ebből az időből származó matematikai könyveket, akkor eléggé pontosan felmérhető az erdélyi iskolákban folyó matematikai oktatás Géresi kéziratának a keletkezése idején[49].

Erdélyben a XVII. század elején, a nehéz gazdasági viszonyok ellenére, elég nagyszámú középiskola működik. A legtöbb városnak megvan a maga előző századból fennmaradt iskolája, jól lehet többségük fejlődése visszaesett. Ezekben az iskolákban főleg nemesek és polgárok gyermekei tanultak. A földesurak gátolták a jobbágyok gyermekeinek a tanulását, csak Bethlen Gábor engedélyezi a jobbágy gyermekek tanulását a felsőbb iskolákban is. Ez az engedmény egyben a reformáció eredménye is, tehát közvetve a társadalmi fejlődés váltotta ki.

A nagybányai iskolában a XVII. század elején a tanítás kb. olyan tartalmú és színvonalú lehetett, mint a többi erdélyi protestáns iskolában. Az iskola megszervezője, Kopácsi István, Wittenbergben tanult s Luther és Melanchton wittenbergi iskolai rendszerét léptette életbe.

Utódai is ezen a csapáson haladhattak. Állításunk mellett szólnak a nagybányai ref. egyáz levéltárában ma is meglévő „Matrix illustris scolae Rivulinae"-ben fennmaradt iskolai törvények[50]. A legrégibb 1651-ből való. Ezek a törvények feltünő hasonlóságot mutatnak az 1571 évi, wittenbergi törvényeken alapuló debreceni és sárospataki iskolai-törvényekkel.

A „Schola Rivulina"[51] rektort Sárospatakról, Váradról, Kolozsvárról, Szatmárról, Enyedről kapott. A városi levéltárban őrzött egyik jegyzőkönyvben olvashatjuk „1660 die 6 Febr. Scholamestert hova hamarébb hozzanak Patakról vagy Varadról[52]." Tehát a bányai iskola is azoknak a hatása alatt lehetett.

Az iskola könytárral is rendelkezett és féltve őrizte könyveit. Az egyik jegyzőkönyvből kiderül, hogy amikor 1692-ben az iskolát a könyvtárral együtt elvették a reformátusoktól, a könyveket biztonságba helyezték. 1712-ben, amikor távozniok kellett az iskolából, a városból kiinduló coetus a könyvtárt magával vitte.

Az idézett anyakönyvben, Matrix-ban, fennmaradt a Schola Rivulina könyvtárának öt különböző időben készült katalógusa is. Az első katalógus 1669-ben, Eszéki István rektor idejében készült. Ez a hiányos katalógus (1 lap hiányzik a Matrixból) 213 művet 248 példányban tart számon. Jórészt az itt feltüntetett könyvek lehettek a könyvtárban Géresi idejében is. Matematikai mű nem szerepel benne. („J. de Sacrobusco, *Libellus de sphera*-t nem tekinthetjük matematikai műnek). A könyvek többségét teológiai, nyelvészeti és bölcészeti művek alkotják, s mellettük csak néhány természettudományi mű szerepel. A katalógusban Melanchton több műve szerepel, s ez is azt bizonyítja, hogy Nagybányán a wittenbergi tanítási rendszer honosodott meg. Keckermann Heidelbergből került ide.

---

[47] Frankl (Fraknói) Vilmos, *A hazai és külföldi iskolázás a XVI. sz.-ban*, Bp. 1873.

[48] Eredetije Besztercebánya város levéltárában. Lásd Frankl, *i.m.*, 177–181 old.

[49] V. Marian, *Invăţămîntul matematicilor în şcolile superioare din Ardeal din veacul al XVII-lea oglindit în manuscrisele contemporane*. „Prima sesiune de bibliogie şi documentare" Bucureşti, 1955.

[50] Lásd: Thurzó Ferenc, *i.m.*, 3–4. old.

[51] Nagybánya város középkori magyar neve Asszonypataka, latin fordítása Rivulus Dominarum. Erről nevezték az iskolát „Schola Rivulina"-nak. Az iskolát Kopácsi István alapította 1547-ben, a város reformálásával egyidejűleg.

[52] Lásd: Thurzó, *i.m.*, 16. old.

Az 1654. évi törvények „De lectionibus et discipulis" című fejezete arról intézkedik, hogy a második osztályban hetenként egy órában tanítsák az első aritmetikai alapműveleteket (singulis septimanis unica saltem hora primae species aritmetices doceantur). Mivel, az idézett törvény szerint, a második osztályban a vallás alapelemeit előbb magyarul, azután latinul tanulták, feltehető, hogy az aritmetikánál is megvolt ez az engedmény. Annál is inkább hihető, mert a bányai törvények azt a benyomást keltik, hogy ott az anyanyelvet nem tiltották éppen olyan szigorúan, mint a többi hasonló iskolában. Csak „a Deák nyelv gyakorlására rendeltetet helyen" és az étkezéskor volt kötelező a latin nyelv. A törvény „De classibus in genere" című fejezetének II. pontja elrendeli ugyan a latin nyelv állandó gyakorlását, de ahol a szükség követeli, megengedi az anyanyelvet is. („Lingua latina perpetuo exerceatur, nec vernaculae usus, nisi ubi necessitas postulaverit permittatur") Géresi kéziratának az utolsó lapjain (171—178) levő két magyar vers is amellett szól, hogy az iskolában a magyar nyelvet is művelték, hivatalosan vagy félhivatalosan, vagy esetleg csak önszorgalomból.

A törvény már említett fejezete elrendeli, hogy a harmadik osztályban az aritmetikai alapműveleteket részletesebben gyakorolják (item arithmeticae species plenius exercendae). Mindössze ennyi vonatkozik a matematika oktatására.

A nagybányai iskolában a tanítás 3 alsó és 3 felső osztályban folyt. (Ezért néha főiskolának is nevezik.) A felső osztályokról csak annyit mond a törvény, hogy ott költészetet és szónoklattant tanuljanak. A felső tagozaton valószínűleg matematikát nem tanítottak[53].

Az iskolai törvény „De libellis et methodo docendi" című fejezete II. szakasza elrendeli, hogy a tanulók a gyakorlatokat könyvbe írják. A III. szakasz szerint csak az iskolai tanulás nem elégséges, a praeceptoroknak gondot kell fordítaniok a házi gyakorlatokra is, *és az írások fordítását ők maguk készítsék ill. ellenőrizzék*. (Nec satis sit in scholis tantum discere, sed praeceptorum cura sit, etiam domestica exercitia praecipue scriptionem stylorumque translationem ipsis imponere).

[53] Németországban sem szerepel a 6 osztályos latin iskolák felső osztályaiban a matematika. Lásd Unger, *i. m.*, 24—25. old.

ARITMETICA LUI ŞTEFAN GÉRESI

(Rezumat)

III. Comparînd Aritmetica lui Géresi cu aritmeticele din secolul al XVI-lea, constatăm asemănări foarte semnificative.

Teoremele şi regulele nu le demonstrează nici Géresi. Intîlnim însă cîteva principii didactice în expunerea materiei. La tratarea species-urilor deosebim următoarele etape: definiţia, punerea problemei, regula de rezolvare, exerciţii şi proba. La fel procedează aproape toate aritmeticele din secolul al XVI-lea.

In tehnica calculelor intîlnim aceleaşi imperfecţiuni ca şi în aritmeticele apusene. Apar procedeele care s-au format pe tablele cu nisip, intîlnim şi calcule efectuate trăgînd cu liniuţa peste cifre. Géresi nu foloseşte semne de operaţie. Semnele plus şi minus apar în capitolul referitor la Regula falsi, dar ele indică un surplus sau o lipsă.

Termenii aritmetici din acest manuscris sînt identici cu cei din aritmeticele contemporane: „species", „proba", „exemplum", „facit", „summa", „regula", „compendium", „cautio", „observatio" etc.

Numerele mari sînt denumite, după obiceiul vremii, prin repetarea miilor. Numeralele nou introduse (milioanele, bilioanele etc.) nu figurează în această aritmetică. De altfel aceste numerale erau întrebuinţate şi în Apus, numai de către cîţiva matematicieni mai renumiţi.

Numele cifrei zero este czifra, iar al celorlalte cifre este kotha, figura, numerus, zam.

Operaţia adunării este numită „additio", iar scăderea „subtractio" ca şi în aritmeticile apusene. Inmulţirea este numită „multiplicatio" şi autorul preconizează importanţa tablei înmulţirii dînd o astfel de tablă „Tabula Pitagorica", iar la sfîrşitul cărţii încă una numită „Tabula Cebetis". In legătură cu ea dă şi regula pigrorum, adică regula leneşilor, pentru a obţine datele din această tablă. În ce priveşte operaţia înmulţirii, procedează după metoda modernă. Dă şi regula înmulţirii cu 10, 100, 1000.

Impărțirea este numită „divisio", altă dată „osztas". Dă cinci „observatio" și șase reguli în vederea efectuării impărțirii. Géresi cunoaște un singur fel de împărțire, cea numită „galea" sau „batello" (fig. 8), care era metoda cea mai răspîndită pe acea vreme și în Apus, deşi metoda modernă a apărut încă în aritmetica lui Calandri (1491). Această metodă veche dispare numai la începutul secolului XIX.

Capitolul „De progressione" tratează progresii aritmetice şi geometrice. Distinge două feluri de progresii aritmetice: naturalis și intercisa. Aceste tipuri de progresii apar în multe aritmetici contemporane. Géresi dă reguli pentru însumarea diferitelor progresii. Ca aplicație pentru progresia geometrică prezintă problema „Despre calcularea ferestrelor unui grilaj" (fig. 10).

Géresi aplică cu totul mecanic „Regula Detri". Această regulă joacă un rol important în toate aritmeticile contemporane.

Urmează „Regula de tri awersa", într-un capitol aparte. Această regulă apare mai rar în aritmeticile contemporane, sub denumirea de „Regula conversa, regula eversa, sau regula inversa". Astăzi o numim regula de trei inversă.

„Regula vulgaris" este tratată de Géresi ca un species și ei îi consacră deasemenea un capitol întreg, expunînd un șablon după care trebuie procedat. Regula apare în aritmeticile din secolul al XVI-lea sub denumirea de Regula duplex, iar Clavius o numește Regula trium composita. Azi o numim de asemenea regula de trei compusă.

„Regula societatis", este de fapt o aplicare a regulei de trei. În sec. al XVI-lea apar des probleme de acest fel. Astfel, în „Bamberger Rechenbuch" sînt date 17 tipuri de astfel de probleme. Géresi introduce și „Regula societatis temporum", denumind astfel o regulă compusă de societate. Dar nici el nu înțelege prea bine metoda de calcul aplicată, astfel încît preia din Aritmetica Clujeană niște numere greșit calculate.

„Regula Falsi seu Positionum" figurează în multe din aritmeticile contemporane, cu ajutorul ei putînd fi rezolvate probleme care duc la ecuații liniare. Géresi tratează foarte pe scurt această regulă.

În capitolul „Lusus aritmeticus" este expusă o metodă pentru a calcula „banii din punga camaradului tău". Problema figurează și în aritmetica lui Köbel și în aritmetica lui Rudolff. În acest capitol figurează și o a doua metodă, metodă împrumutată probabil de la Gemma Frisius.

Capitolul ultim pare original și cuprinde probleme din viața de toate zilele.

IV. După cum rezultă din inscripția citată, aritmetica este opera lui Stephanus Géresi, a fost scrisă în școala reformată din Baia Mare (Schola Rivulina) și a fost terminată în anul 1626.

Pe pag. 87, găsim o inscripție ulterioară (fig. 10) : „Această carte am luat-o la mînă în ano 1726 Die vero 28 7—bris Francisus Csernatoni de Radnotfája", Deci peste 100 de ani, manuscrisul a ajuns în mîna lui Franciscus Csernátoni din Iernuțeni. Acest Csernátoni a umplut marginile foilor cu fel de fel de inscripții, care ne-au ajutat să clarificăm istoricul manuscrisului.

Matricula școlii din Baia Mare cuprinde numele rectorilor și ale elevilor, începînd de la 1633. În această matriculă figurează un Sigismund Csernátoni, care a subscris legile școlii la 1710, funcționînd în calitate de senior și praeceptor, iar de aici a plecat la vestita școală din Aiud, apoi acasă (fără a indica unde anume a plecat). Aceste date sînt confirmate de matricula școlii din Aiud, în care Sigismund Csernátoni a subscris legile la 1714. Peste cîțiva ani, la 1726, manuscrisul a ajuns în mîna lui Francisc Csernátoni. Cartea lui Koncz, privind istoria școlii din Tg. Mureș, ne arată că după 1700 într-adevăr la această școală a funcționat un Fr. Csernátoni, în calitate de praeceptor. (Un Fr. Csernátoni a subscris legile școlii din Aiud în anul 1716.) Deși nu cunoaștem legătura de rudenie dintre Francisc Csernátoni și Sigismund Csernátoni, totuși din datele înșirate rezultă cu suficientă certitudine peregrinările manuscrisului, pînă ce a ajuns în posesia școlii din Tg. Mureș.

În ce privește persoana autorului Stephanus Géresi, sîntem nevoiți să recurgem numai la ipoteze. Ipoteza cea mai plauzibilă afirmă că el a fost praeceptor al școlii din Baia Mare. Vedem că manuscrisul său a fost utilizat și ulterior de către praeceptori.

Problema elaborării acestui manuscris se leagă de problema apariției celorlalte aritmetici ungurești tipărite sau în manuscris. În lucrarea de față se arată că ele au apărut sub imboldul reformei religioase și apariția lor se leagă tocmai de activitatea praeceptorilor, care aveau sarcina de a preda cunoștințele aritmetice, citind sau dictînd dintr-un compendiu de aritmetică, după cum rezultă din legile școlilor din sec. al XVI-ea și al XVII-lea, între altele și din legile școlii din Baia Mare.

Atît Aritmetica din Debrețin și Aritmetica Clujeană, cît și Aritmetica lui Géresi, trebuiesc privite ca fiind cîte un exemplar din manuscrisele elaborate de acești praeceptori, în miinile cărora aceste aritmetici, cu timpul, au suferit diferite modificări.

V. Aritmetica lui Géresi este probabil cel mai vechi manuscris matematic care s-a păstrat la noi în țară. Ea umple golul de 62 ani dintre Aritmetica Clujeană și Enciclopedia lui Apáczai. Deci este un document de valoare în ce privește istoria matematicii din țara noasrtă. Această aritmetică ne permite o introspecțiune în învățămîntul nostru matematic de la începutul secolului al XVII-lea, arătînd extinderea și metodica acestui învățămînt. Ea ne arată rolul praeceptorilor din acea vreme, care aveau ca sarcină predarea aritmeticii, și totodată ne prezintă un praeceptor de atunci în persoana lui Géresi. Urmărind drumul străbătut de acest manuscris, peregrinările sale, ne dăm seama și de modul în care se răspîndeau cunoștințele în acea vreme.

Studiind structura, conținutul, terminologia și procedeele de calcul din această aritmetică, constatăm mari asemănări cu aritmeticile contemporane și mai ales cu cele din secolul al XVI-lea. În ce privește nivelul ei științific, ea nu poate fi comparată cu aritmeticile mai pretențioase din acele vremuri, scrise cu alte scopuri, cum ar fi operele lui Tartaglia, Stifel, Clavius, Apian etc. Géresi nu cunoștea nici marile descoperiri matematice din vremea sa, cum ar fi descoperirea algebrei simbolice, ale logaritmilor, etc. Relațiile de la noi nu reclamau încă aceste cunoștințe.

Constatăm că problemele locale, problemele matematice ale unui oraș minier, nu se prea reflectă în această aritmetică. Intîlnim aceleași produse miniere (aramă, cositor, sare), aceleași mărfuri, monede și unități de măsură ca și în Aritmetica Clujeană.

Stephanus Géresi n-a fost un matematician prea instruit. Metodele de invățămînt din acele vremuri nu înlesneau o aprofundare a cunoștințelor de aritmetică. Învățămîntul consta în buchisirea unor reguli aritmetice. Astfel a învățat în tinerețe și Géresi și la rîndul său tot astfel putea învăța și el pe alții. În lucrarea sa a putut include numai cunoștințele obținute pe această cale. Greșelile comise de el, greșelile preluate, copierea servilă a unor aliniate din alte aritmetici, pot fi ușor înțelese. Predă cîteodată reguli pe care nici el nu le înțelege.

Manuscrisul lui Géresi este totuși de mare valoare și scoaterea lui la lumină sperăm că va stîrni interes față de documentele matematice scrise, care s-au păstrat în bibliotecile și arhivele de la noi, care pînă astăzi au fost prea puțin studiate și în bună parte sînt necunoscute.

Apendice

În secolul XVI. au avut loc transformări profunde în învățămîntul matematic din Europa apuseană. Dezvoltarea forțelor de producție reclamă dezvoltarea corespunzătoare a științei. Cunoaștem conținutul și metodele predării aritmeticii din această perioadă din diferite regulamente școlare care s-au păstrat. Cîteva din aceste regulamente sînt reproduse și în lucrarea de față.

În secolul XVII. în Europa centrală, în urma războiului de 30 de ani, nivelul învățămîntului decade, progresul științelor stagnează. Conținutul învățămîntului aritmetic este tot cel din secolul precedent.

În secolele XV. XVI. calculele se făceau pe degete, cu ajutorul ,,jetoanelor'' de calcul (algoritmus linealis, Rechnen auf den Linien), sau în scris. În urma răspîndirii pe scară largă a scrisului și a pătrunderii în Europa a cifrelor indo-arabe și a metodelor de calcul indo-arabe, calculele făcute în scris ajung pe primul plan și se răspîndesc tot mai mult, mai ales după inventarea tiparului.

Cele patru operații aritmetice făcute in scris au apărut încă la indieni, care cunoșteau variate metode de calcul. Ei făceau calculele pe niște table presărate cu nisip, pe care cifrele se șterg și corectează ușor. Arabii au preluat metodele indiene, dar cu timpul au început să întrebuințeze hîrtia. Pe hîrtie cifrele se șterg mai greu și de aceia ei sînt nevoiți să modifice metodele indiene, trăgînd cu o liniuță peste cifre, în decursul operației, și scriind deasupra lor cifra nouă. Acest sistem a fost preluat și de europeni.

Operațiile aritmetice mai practice, mai cizelate se formează în Europa, începînd cu secolul XV, cînd se abandonează metoda de a trage cu liniuțe peste cifre. Noile metode apar în Italia și de atunci se vorbește despre două feluri de calcule: ,,per figurarum deletionem more Alemanorum'' (metoda germană cu ștergerea cifrelor) și ,,sine figurarum deletione more Italorum'' (metoda italiană, fără ștergerea cifrelor).

Școala vieneză (Peuerbach, Regiomontanus), care s-a dezvoltat mult în secolul XV, a adoptat de asemenea metoda italiană. Această metodă s-a răspîndit și mai spre răsărit, astfel și în regiunile apusene ale țării noastre, în Principatul Transilvaniei.

Tot aceste metode le întîlnim și în aritmeticele tipărite în chestiune, precum și în manuscrisele aritmetice din Transilvania.

Este greu de stabilit dacă la noi au pătruns aceste metode în urma activității lui Peurbach și Regiomontanus, sau ele au parvenit pe alte căi. Universitățile din Cracovia și Pécs aveau legături strînse cu universitățile italiene, deci aceste cunoștințe puteau veni din Italia și prin intermediul lor. Se știe că în special universitatea din Cracovia a fost frecventată de un mare număr de ardeleni. De asemenea se știe că tineri din Moldova au studiat la Cracovia încă începînd din sec. XIV. Sașii studiau cu precădere la Viena. Dar găsim ardeleni și la universitățile din Paris, Padua, Bologna, Praga etc. Mai tîrziu, după apariția reformei religioase, se intensifică relațiile cu universitățile din Germania și Țările de Jos.

De altfel, în secolul XV, în timpul episcopului Scolari, la Oradea activa o colonie italiană venită din Florența, care de asemenea a putut să transmită noile metode de calcul. La mijlocul secolului XV, în Oradea a fost înființat și un observator astronomic renumit, care de asemenea a putut difuza noile procedee de calcul.

Aritmeticile tipărite analizate, ca și manuscrisul lui Géresi, în orice caz au apărut sub influența școlilor protestante olandeze și germane. Dar calculele făcute în scris au pătruns la noi, probabil, pe diferite căi.

După cum afirmă istoricii, cifrele arabe, deci și calculele arabe, au putut pătrunde greu la noi. Cele mai vechi monumente pe care s-au păstrat la noi cifre arabe sînt, după cît știm, clopotul din Recea (Crasna), pe care se poate citi data 1442(?) și edificiul parohiei rom. catolice din Turda, unde pe o piatră este gravată data 1452 (vezi figura de pe pag. 63). Cel mai vechi act scris la noi, pe care figurează cifre arabe, după cît știm, este o diplomă emisă la 1464. (În biblioteca Bolyai din Tg. Mureș se păstrează un manuscris, care provine din secolul XV, care tratează despre astrolabiu și care cuprinde tabele întregi cu cifre arabe). De altfel, cifrele arabe au fost acceptate foarte greu și în apus. Deși aceste cifre figurează deja pe cîteva manuscrise din secolul XII, iar la 1202 apare celebra lucrare a lui Leonardo de Pisa, totuși ele au pătruns în păturile mai largi mult mai tîrziu. Chiar după apariția cărții lui Leonardo, timp de trei secole, cifrele romane au rămas dominante.

Terminologia aritmetică din sec. XV.—XVI a fost, în general, latinească în toate țările Europei. Acești termeni latinești sînt preluați în bună parte și în aritmeticile scrise în diferite limbi naționale. Această situație se constată și în aritmetica lui Géresi.

Aritmeticile au jucat un rol foarte important în sec. XV—XVI. Ele au putut influența, direct sau indirect, și aritmetica lui Géresi. De aceia am întocmit lista lor cît mai completă. Ne-am oprit și la manuscrisele aritmetice ruse contemporane. Am vorbit chiar și despre aritmeticile arabe și chineze.

Pentru a lămuri condițiile între care a apărut aritmetica lui Géresi, am fost nevoiți să vorbim și despre dezvoltarea economică, socială și culturală a Transilvaniei. Am expus pe scurt și istoricul școlilor din Transilvania, mai ales istoricul școlii din Baia Mare, numită Schola Rivulina, după denumirea latină medievală a orașului, Rivulus Dominarum. Această școală, în care a fost scrisă aritmetica studiată, a fost înființată în 1547, deodată cu introducerea reformei religioase, după modelul școlii din Wittenberg. În arhiva școlii s-au păstrat și legile școlare (cea mai veche provine din anul 1651) și cinci cataloage ale bibliotecii școlare (cel mai vechi provine din anul 1669).

Studiind condițiile între care a apărut aritmetica lui Géresi, putem explica nivelul și lipsurile ei.

АРИФМЕТИКА ШТЕФАНА ГЕРЕШИ

(Резюме)

Рукопись Гереши сравнивается, глава с главой, с первыми арифметиками, напечатанными у нас, а также с более важными арифметиками за рубежом с точки зрения использованной терминологии, техники вычислений и структуры работы. Эта арифметика представляет явную аналогию с большинством современных арифметик, что касается научного уровня, способов вычислений, терминологии и введенной в ней методологии.

Из работы вытекает, что существует тесная связь между появлением первых арифметик, напечатанных у нас и рукописью Гереши. Установленные факты приводят к выводу, что эти арифметики были выработаны в различных протестантских школах, воспитателями. Первоначальные формулировки были подвергнуты различным изменениям в руках воспитателей, и таким образом появились указанные арифметики.

На основе замечаний из рукописи, введенных позже, можно следить за перемещением рукописи, которая находилась в руках многих воспитателей, а в 1726 г. попала в руки одного воспитателя из Тыргу-Муреш.

Рассмотренная арифметика позволяет взглянуть на преподавание математики у нас в начале XVII века. Она является важным документом истории математики в нашей стране.

Приложения

В приложениях рассмотрены те глубокие изменения, которые произошли в преподавании математики в Европе в XVI—XVII веках.

Излагается история вычислений, история четырех арифметических операций, проникновение арабских чисел и новых методов вычислений на территорию РНР. Дана история арифметической терминологии. Приведен список арифметик, которые появились раньше, включая арабские и китайские арифметики, а также русские рукописи по арифметике. Коротко показывается экономическое, социальное и культурное развитие Трансильвании, а также история трансильванских школ, особенно история школы из Бая Маре.

L'ARITHMÉTIQUE D'ETIENNE GÉRESI (II)

(R é s u m é)

L'auteur compare chapitre par chapitre le manuscrit de Géresi avec les premières arithmétiques imprimées chez nous ainsi qu'avec les plus importantes de l'étranger, sous le rapport de la terminologie employée, de la technique des calculs et de la structure de l'ouvrage. Cette arithmétique présente des analogies frappantes avec la plupart des arithmétiques contemporaines relativement au niveau scientifique, aux procédés de calcul, à la terminologie et à la méthode adoptées.

L'étude de cet ouvrage permet de dégager la relation étroite existant entre l'apparition des premières arithmétiques imprimées chez nous et le manuscrit de Géresi. Les constatations effectuées légitiment la conclusion que ces arithmétiques ont été élaborées dans les diverses écoles protestantes par des „précepteurs" (praeceptores). Les formulations initiales ont subi différentes modifications de la main des précepteurs et c'est ainsi qu'ont paru les arithmétiques en question. Géresi, l'auteur de notre manuscrit, a dû être un de ces précepteurs.

Les annotations introduites ultérieurement dans le manuscrit permettent de suivre ses pérégrinations : c'est ainsi qu'il a été en la possession de plusieurs précepteurs, avant de passer en 1726 aux mains d'un précepteur de Tg. Mureş.

L'arithmétique étudiée nous offre la possibilité d'effectuer un sondage dans l'enseignement mathématique en Transylvanie au début du XVII-e s. C'est un document de valeur sur l'histoire des mathématiques dans notre pays.

Appendice

Un appendice à l'article montre les transformations profondes qui eurent lieu au XVII-e s. dans l'enseignement mathématique en Europe. On expose l'historique des calculs, des quatre opérations arithmétiques, la pénétration des chiffres arabes et des nouveaux calculs sur le territoire de l'actuelle R.P.R. On donne aussi l'historique de la terminologie arithmétique, ainsi qu'une liste des arithmétiques parues antérieurement, y compris les arithméthiques arabes et chinoises, et celle des manuscrits d'arithmétiques russes du temps. On montre enfin brièvement le développement économique, social et culturel de la Transylvanie, outre l'historique des écoles transylvaines, spécialement de l'école de Baia-Mare.

MECANICA ANALITICĂ A FLUIDELOR PERFECTE BAROTROPE

de

ION I. CRISTEA (București)

Omagiu profesorului Dr. TH. ANGHELUȚĂ cu ocazia împlinirii a 80 de ani

I. REPREZENTAREA CANONICĂ A UNUI CÎMP VECTORIAL

1. Reprezentarea lui Clebsch.

Se știe că o formă Pfaff în trei variabile x_1, x_2, x_3 se poate pune sub următoarea formă canonică [6] :

$$a_i\, \delta x_i = \delta f + g \delta h$$

unde a_1, a_2, a_3 și f, g, h sînt funcțiuni de x_1, x_2, x_3 și eventual de un parametru t.

Fie $\bar{v} = \bar{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ o funcție vectorială definită pe un anumit domeniu D al spațiului euclidian tridimensional fizic, iar v_1, v_2, v_3 componentele vectorului $\bar{v}$ față de axele triedrului cartezian triortogonal față de care s-au definit coordonatele x_1, x_2, x_3.

Notînd cu δr o deplasare virtuală infinitezimală ale cărei proiecții pe axele triedrului considerat sînt δx_1, δx_2, δx_2, este vizibil că produsul scalar*

$$\bar{v} \cdot \delta \bar{r} = v_i\, \delta x_i$$

este o formă Pfaff în variabilele x_1, x_2, x_3. Conform celor precizate la începutul acestui paragraf, există trei funcțiuni de variabilele x_1, x_2, x_3 și t, fie ele φ, ψ, χ, așa fel ca

$$\bar{v} \cdot \delta \bar{r} = \delta\varphi + \psi \delta\chi$$

Oricare ar fi funcția $F = F(x_1, x_2, x_3, t)$ putem scrie

$$\delta F = F_i \delta x_i = \nabla F \cdot \delta \bar{r}, \qquad F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

* S-a făcut convenția ca indicele repetat într-un monom ori de cîte ori aceasta nu duce la confuzii, este un indice de sumare relativ la valorile 1,2,3.

unde s-a pus

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{i}_k$$

$\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ fiind versorii axelor Ox_1, Ox_2, Ox_3. Deci:

$$\bar{v} \cdot \delta\bar{r} = (\nabla\varphi + \psi\nabla\chi) \cdot \delta\bar{r}$$

de unde

$$(\bar{v} - \nabla\varphi - \psi\nabla\chi) \cdot \delta\bar{r} = 0$$

Cum însă deplasarea $\delta\bar{r}$ este arbitrară în spaţiu şi independentă de parametrul t, adică δx_1, δx_2, δx_3 sînt funcţiuni de x_1, x_2, x_3 independente, rezultă

$$\bar{v} - \nabla\varphi - \psi\nabla\chi = 0$$

Deci, pentru orice cîmp vectorial $\bar{v} = \bar{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ există totdeauna trei funcţiuni φ, ψ, χ de x_1, x_2, x_3 şi eventual t aşa fel ca acest cîmp să se reprezinte sub forma

$$\bar{v} = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi \tag{1}$$

Această reprezentare se întîlneşte pentru prima dată la C l e b s c h [2], fapt pentru care ea a fost numită [1,5], *reprezentarea lui Clebsch*. C l e b s c h a ajuns la reprezentarea (1) într-un cadru particular, $\bar{v}$ reprezentînd cîmpul vitezelor într-un fluid, iar consideraţiile pe care le-a efectuat fiind specifice mecanicii fluidelor. Modul prin care noi am ajuns la reprezentarea (1) a lui C l e b s c h arată că această reprezentare este foarte generală ea putîndu-se da oricărui cîmp vectorial definit într un domeniu D tridimensional indiferent de natura cîmpului vectorial considerat.

Reprezentarea (1) a lui C l e b s c h, analog cu formele Pfaff, se poate aduce mai departe la una din următoarele forme canonice:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \bar{v} = \nabla\varphi \\ &\text{II.} \quad \bar{v} = \psi \cdot \nabla\chi \\ &\text{III.} \quad \bar{v} = \nabla\varphi + \psi \cdot \nabla\chi \end{aligned} \tag{1'}$$

şi numai la una din aceste trei forme canonice. În felul acesta în spaţiul tridimensional fizic avem trei *tipuri canonice* distincte de cîmpuri vectoriale, tipul unui cîmp vectorial fiind caracterizat în mod unic de una din reprezentările canonice (1′) şi numai de o singură reprezentare (1′).

2. Recunoaşterea tipului canonic al unui cîmp vectorial.

Vom da cîteva criterii imediate pentru determinarea tipului canonic al unui cîmp vectorial $\bar{v}$.

T e o r e m a 1. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un cîmp vectorial $\bar{v}$ să fie într-un domeniu D de tipul canonic* I *este ca în orice punct al domeniului D să fie îndeplinită condiţia*

$$\text{rot}\, \bar{v} = 0 \tag{2}$$

Această teoremă este imediată. Ea afirmă că orice cîmp vectorial de tipul canonic I este un cîmp *irotațional*.

T E O R E M A **2.** *O condiție necesară și suficientă ca un cîmp vectorial* $\bar{v}$ *să fie într-un domeniu D de tipul canonic* II *este ca peste tot în D să fie îndeplinite condițiile*

$$\text{rot}\, v \neq 0 \;\text{ și }\; \text{rot}\, \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \tag{3}$$

Această teoremă afirmă deci, că orice cîmp vectorial de tipul canonic II este un cîmp *rotațional* pentru care avem ortogonalitatea în orice punct al lui D a vectorilor $\bar{v}$ și rot $\bar{v}$. Dacă în particular $\bar{v}$ reprezintă cîmpul vitezelor într-un fluid, acest cîmp este de tipul canonic II dacă și numai dacă mișcarea fluidului este rotațională și avem ortogonalitatea liniilor de curent pe liniile de vîrtej.

Pentru demonstrație, dacă v este un cîmp vectorial de tipul canonic II avînd

$$\bar{v} = \psi\nabla\chi \quad \text{și} \quad \text{rot}\, \bar{v} = \nabla\psi \times \nabla\chi$$

condiția de ortogonalitate

$$\text{rot}\, \bar{v} \cdot v = 0$$

se verifică imediat.

Reciproc, să presupunem că avem asigurate în D condițiile (3). Am văzut că orice cîmp vectorial $\bar{v}$ se poate reprezenta sub forma canonică

$$\bar{v} = \nabla\lambda + \mu\nabla\nu \tag{4}$$

unde λ, μ, ν sînt funcțiuni de x_1, x_2, x_3 și t. Vizibil

$$\text{rot}\, \bar{v} = \nabla\mu \times \nabla\nu$$

astfel că

$$\text{rot}\, \bar{v} \cdot v = (\nabla\mu \times \nabla\lambda) \cdot \nabla\lambda.$$

Deci, condiția de ortogonalitate între v și rot $\bar{v}$ atrage că în orice punct al domeniului D avem

$$\frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0$$

ceea ce înseamnă că între funcțiile λ, μ, ν există în D o relație de dependență funcțională de tipul

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{5}$$

Cum admitem că rot $\bar{v} \neq 0$ în orice punct din D, urmează că în D între funcțiile μ și ν nu poate exista o relație de dependență funcțională de tipul

$$f(\mu, \nu) = 0. \tag{5}$$

Rezultă că în D avem neapărat $\frac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$ ceea ce atrage că relația (5) se poate rezolva în raport cu λ, obținînd pe λ ca funcție de μ și ν:

$$\lambda = \lambda(\mu, \nu).$$

Reprezentarea (4) a vectorului $\bar{v}$ se va scrie atunci

$$v = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \nabla \mu + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} + \mu\right) \nabla \nu.$$

Considerînd atunci forma Pfaff

$$\bar{v} \cdot \delta \bar{r} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \mu + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} + \mu\right) \delta \nu,$$

această formă Pfaff fiind relativ la două variabile independente μ și ν ea se poate pune mai departe sub forma canonică

$$v \cdot \delta \bar{r} = \psi \cdot \delta \chi$$

unde ψ și χ sînt funcțiuni de μ și ν. Relațiile diferențiale între funcțiile ψ, χ și μ, ν sînt evident

$$\psi \frac{\partial \chi}{\partial \mu} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \quad \psi \frac{\partial \chi}{\partial \nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} + \mu$$

Analog ca mai înainte, rezultă că vectorul $\bar{v}$ se poate pune sub forma canonică

$$\bar{v} = \psi \cdot \nabla \chi$$

și deci, $\bar{v}$ este un cîmp vectorial de tipul canonic II.

Teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 3. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un cîmp vectorial $\bar{v}$ să fie într-un domeniu D de tipul canonic* III *este ca*

$$rot\ \bar{v} \cdot \bar{v} \neq 0 \tag{6}$$

peste tot în D.

În adevăr, conform teoremelor precedente relația (6) afirmă că $\bar{v}$ nu poate fi de tipurile canonice I sau II. Cum în spațiul euclidian tridimensional fizic nu pot exista decît trei tipuri canonice distincte, I, II și III, de cîmpuri vectoriale urmează că $\bar{v}$ este neaparat de tipul canonic III.

Dacă ținem cont că orice cîmpul vectorial $\bar{v}$ se poate pune sub forma (1) dată de Clebsch, aceste trei teoreme se pot transpune și sub următoarele forme echivalente:

TEOREMA 1'. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un cîmp vectorial $\bar{v}$ să fie într-un domeniu D de tipul canonic* I *este ca în reprezentarea (1) a lui Clebsch între funcțiile ψ și χ să existe o relație de forma*

$$f(\psi, \chi) = 0 \tag{7}$$

peste tot în D.

T e o r e m a 2'. *O condiție necesară și suficientă ca un cîmp vectorial* $\bar{v}$ *să fie într-un domeniu D de tipul canonic* II *este ca în reprezentarea* (1) *a lui Clebsch între funcțiile* ψ *și* χ *să nu existe în D o relație de dependență funțională de tipul* (7), *dar să existe în D o relație de dependență funcțională de forma*

$$F(\varphi, \psi, \chi) = 0 \tag{8}$$

între funcțiile φ, ψ, χ.

T e o r e m a 3'. *O condiție necesară și suficientă ca un cîmp vectorial* $\bar{v}$ *să fie într-un domeniu D de tipul canonic* III *este ca între funcțiile* φ, ψ *și* χ *ce apar în reprezentarea (1) a lui Clebsch să nu existe în D nici o relație de dependență funcțională de tipul (8).*

3. Gradul de arbitrar al reprezentării lui Clebsch.

Ca și în cazul formelor Pfaff, reprezentarea unui cîmp vectorial $\bar{v}$ sub forma (1) dată de C l e b s c h nu este unică. Pentru aceasta este suficient să observăm că reprezentarea (1) se mai scrie și sub forma

$$\bar{v} = \nabla(\varphi + \psi\chi) - \chi\nabla\psi$$

Să vedem atunci, care este gradul de arbitrar în definirea funcțiilor φ, ψ, χ în reprezentarea (1) a lui C l e b s c h.

Dacă φ, ψ, χ și Φ, Ψ, X sînt două terme de funcții ce asigură reprezentarea lui C l e b s c h a unui cîmp vectorial $\bar{v}$, adică

$$\bar{v} = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi = \nabla\Phi + \Psi\nabla X,$$

ecuațiile diferențiale ce leagă funcțiile φ, ψ, χ de funcțiile Φ, Ψ, X sînt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial x_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \Psi\frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3$$

de unde

$$\delta\varphi + \psi\delta\chi = \delta\Phi + \Psi\delta X,$$

sau

$$\psi\delta\chi - \Psi\delta X = \delta\Phi^*, \text{ cu } \Phi^* = \Phi - \varphi \tag{9}$$

Se observă astfel că transformarea de trecere de la funcțiile ψ și χ la funcțiile Ψ și X este o *transformare canonică* în sensul utilizat în mecanica analitică [8].

De asemenea putem vedea care este gradul de arbitrar în definirea funcțiilor φ, ψ și χ în fiecare din reprezentările canonice (1') ce caracterizează tipul canonic al cîmpului vectorial respectiv.

Astfel, în cazul tipului canonic I, funcția φ este unic determinată abstracție făcînd de o constantă aditivă arbitrară, anume

$$\Phi = \varphi + c.$$

În cazul tipului canonic II, dacă ψ, χ și Ψ, X sînt două perechi de funcții care asigură reprezentarea canonică (1'), în acest caz, gradul de arbitrar al funcţiilor ψ, χ este determinat de relaţiile

$$\Psi = \psi \cdot f'(\chi), \quad X = f(\chi).$$

În cazul tipului canonic III, funcţiile φ, ψ, χ fiind independente să presupunem că Φ, Ψ, X sînt funcţiuni de φ, ψ, χ. Între funcţiile Φ, Ψ, X avem relaţiile

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \Psi \frac{\partial X}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \Psi \frac{\partial X}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + \Psi \frac{\partial X}{\partial \chi} = \psi \tag{10}$$

Eliminînd funcţia Φ între aceste ecuaţii, obţinem

$$\frac{\partial(\Psi, X)}{\partial(\varphi, \psi)} = 0, \quad \frac{\partial(\Psi, X)}{\partial(\varphi, \chi)} = 0, \quad \frac{\partial(\Psi, X)}{\partial(\psi, \chi)} = 1.$$

Din aceste ecuaţii rezultă că funcţiile Ψ şi X sînt independente de funcţia φ, adică

$$\Psi = \Psi(\psi, \chi), \quad X = X(\psi, \chi) \tag{11}$$

şi în plus că

$$\frac{\partial(\Psi, X)}{\partial(\psi, \chi)} = 1 \tag{12}$$

Deci, una din funcţiile (11) se poate lua arbitrară, cealaltă funcţie şi funcţia Φ determinîndu-se din ecuaţia (12), respectiv una din ecuaţiile (10). Deci, şi în cazul acesta gradul de arbitrar al funcţiilor φ, ψ, χ este determinat.

II. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ALE FLUIDELOR PERFECTE BAROTROPE.

4. Funcţiile de vîrtej.

Să presupunem că $\bar{v}$ reprezintă cîmpul vitezelor particolelor fluide situate la un moment dat într-un anumit domeniu D al spaţiului. În baza celor prezentate în capitolul precedent, cîmpul $\bar{v}$ se poate reprezenta sub forma

$$\bar{v} = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi. \tag{1}$$

Cîmpurile de viteze de tipul canonic I corespund unor mişcări fluide irotaţionale (rot $\bar{v} = 0$). Întrucît aceste mişcări sînt suficient de cunoscute în literatura clasică de specialitate ne vom mărgini doar la mişcările fluide rotaţionale (rot $\bar{v} \neq 0$). Deci, vom avea în vedere cîmpurile de viteze de tipurile canonice II sau III.

Cîmpul de vîrtejuri în aceste cazuri se reprezintă sub forma

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \nabla\psi \times \nabla\chi. \tag{13}$$

Amintim că la un moment t dat, suprafeţele avînd proprietatea că în orice punct al lor vectorul turbion rot $\bar{v}$ este situat în planul tangent la suprafaţă, se numesc *suprafeţe de vîrtej*. De asemenea la un moment t dat, curbele avînd proprietatea că în orice punct al lor vectorul rot $\bar{v}$ este tangent la curbă, se numesc *linii de vîrtej*. Se știe că suprafețele și liniile de vîrtej se conservă în timp.

Din reprezentarea (13) rezultă că la un moment t fixat, suprafețele

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const. și } \chi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \tag{14}$$

sînt niște suprafețe de vîrtej, intersecția lor definind o linie de vîrtej. Se observă că la momentul t considerat, oricare ar fi funcția $f(\psi, \chi, t)$ odată cu suprafețele de vîrtej (14) și suprafața

$$f(\psi(x_1, x_2, x_3, t), \chi(x_1, x_2, x_3, t), t) = \text{const.} \tag{14'}$$

este deasemenea o suprafață de vîrtej. Oricare ar fi funcția $f(\psi, \chi, t)$ suprafața (14') conține la momentul t linia de vîrtej definită de suprafețele (14).

Este natural deci, ca funcțiile ψ și χ precum și orice funcție de tipul $f = f(\psi, \chi, t)$ să se numească *funcție de vîrtej*.

5. Ecuațiile de mișcare sub forma canonică a lui Stuart.

Ecuația de mișcare a lui Helmholtz în cazul unui fluid perfect barotrop și în prezența unor forțe de masă conservative are forma

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \nabla B, \quad B = U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \tag{15}$$

unde V este modulul vitezei particulei fluide, ρ densitatea fluidului, p presiunea sa, iar U funcțiunea de forță a forțelor de masă în punctul de coordonate x_1, x_2, x_3 și la momentul t.

Să vedem ce devine această ecuație (15) dacă considerăm funcțiile φ, ψ, χ introduse de reprezentarea (1) a lui Clebsch.

În baza lui (13) avem

$$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = (\nabla \psi \times \nabla \chi) \times \bar{v} = \nabla \chi \cdot (\nabla \psi \cdot \bar{v}) - \nabla \psi \cdot (\nabla \chi \cdot \bar{v})$$

sau încă

$$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \nabla \chi \cdot \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \nabla \psi \cdot \left(\frac{d\chi}{dt} - \frac{\partial \chi}{dt}\right)$$

căci am ținut seamă de legătura între derivata totală în raport cu timpul t a funcțiilor ψ și χ și derivata lor parțială în raport cu t:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \psi \cdot \bar{v} \quad \text{și} \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \chi \cdot \bar{v}.$$

Apoi, conform cu (1) avînd

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \psi \cdot \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \nabla \chi$$

ecuația (15) a lui Helmholtz conduce la

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) + \frac{d\psi}{dt} \nabla \chi - \frac{d\chi}{dt} \nabla \psi = \nabla B$$

au

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\psi\,\frac{\partial\chi}{\partial t}-B\right)=\frac{d\chi}{dt}\nabla\psi-\frac{d\psi}{dt}\nabla\chi.$$

Considerînd atunci funcţia

$$H=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\psi\,\frac{\partial\chi}{\partial t}-B \tag{16}$$

adică

$$H=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+\int\frac{dp}{\rho}-U, \tag{16'}$$

ultima ecuaţie se transcrie

$$\nabla H=\frac{d\chi}{dt}\nabla\psi-\frac{d\psi}{dt}\nabla\chi. \tag{17}$$

Această ecuaţie afirmă că funcţia H depinde de x_1, x_2, x_3 şi t prin intermediul funcţiilor de vîrtej ψ şi χ şi al lui t:

$$H=H(\psi,\chi,t). \tag{18}$$

Deci, funcţia H este o funcţie de vîrtej. În acelaşi timp din (17) rezultă ecuaţiile

$$\frac{\partial H}{\partial\psi}=\frac{d\chi}{dt}\ \text{şi}\ \frac{\partial H}{\partial\chi}=-\frac{d\psi}{dt} \tag{19}$$

care se aseamănă perfect cu ecuaţiile canonice ale lui Hamilton din mecanica analitică a sistemelor de puncte materiale.

Ecuaţiile (19) au fost găsite prin consideraţii analoage de către T. Stuart [7, 5] fapt pentru care le vom numi *ecuaţiile lui Stuart.*

Să evaluăm derivata totală a funcţiei H în raport cu timpul t. Cum

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi}\cdot\frac{d\psi}{dt}+\frac{\partial H}{\partial\chi}\cdot\frac{d\chi}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

în baza ecuaţiilor canonice (19) rezultă că

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{20}$$

ceea ce întregeşte asemănarea funcţiei H cu funcţia lui Hamilton din mecanica analitică.

Dacă în particular, H nu depinde explicit de timpul t, adică $H = H(\psi, \chi)$, din ecuaţia (20) rezultă

$$H=\text{const.} \tag{21}$$

obţinînd astfel o integrală primă a ecuaţiilor de mişcare.

Independenţa în mod explicit a lui H de timpul t se pune imediat în evidenţă în cazul mişcărilor permanente. În acest caz, funcţia H reducîndu-se la $H = -B = E$, adică la energia particulelor pe unitatea de masă, ecuaţia (21) se înlocuieşte cu

$$B=\text{const.} \tag{21'}$$

În cazul mișcărilor permanente, din (21) citim că H, deci și B, este o *funcțiune de curent* [3]. Cum însă H este și o funcțiune de vîrtej, suprafețele (21′) nu sînt altele decît cunoscutele *suprafețe Bernoulli-Vâlcovici* [9].

Din punct de vedere matematic se pot considera și cazurile în care H nu depinde explicit de una, sau cealaltă, sau niciuna din funcțiile ψ sau χ.

Astfel, dacă H nu depinde explicit de ψ, anume $H = H(\chi, t)$ din prima ecuație (19), rezultă integrala primă :

$$\chi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \tag{22}$$

Deci, particulele fluide alunecă pe suprafețele variabile (22) ceea ce înseamnă că suprafețele (22) sînt niște *suprafețe de mișcare* [3]. Pe de altă parte suprafețele (22) sînt la orice moment t niște suprafețe de vîrtej. Am pus astfel în evidență un tip de suprafețe care se înrudesc oarecum în cazul mișcărilor nepermanente cu suprafețele Bernoulli-Vâlcovici din cazul mișcărilor permanente.

Din cealaltă ecuație (19) rezultă

$$\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial \chi} dt + \text{const.}$$

Analog, în cazul cînd H nu depinde explicit de χ, mișcarea se efectuează pe familia de suprafețe

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \tag{22′}$$

care sînt de asemenea niște suprafețe de mișcare iar la orice moment t dat dau o familie de suprafețe de vîrtej.

Dacă H nu depinde nici de ψ nici de χ, adică $H = H(t)$, ecuațiile canonice (19) conduc la integralele prime

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \quad \text{și} \quad \chi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \tag{23}$$

astfel că mișcarea fluidelor se efectuează pe familia curbelor definite de aceste suprafețe (23), aceste curbe în general fiind mobile și deformabile în timp. Cum ecuațiile (23) caracterizează la un moment dat t și familia liniilor de vîrtej ale mișcării, curbele (23) pe care sînt obligate să rămînă moleculele de fluid sînt la orice moment t tangente liniilor de vîrtej ale mișcării, punctul de tangență fiind dat de poziția la acel moment a particulei considerate.

6. Ecuațiile lui Lagrange.

Ecuația (17) se mai scrie și sub forma

$$\nabla\left(\psi \frac{d\chi}{dt} - H\right) = \frac{d\psi}{dt} \nabla\chi + \psi \cdot \nabla\frac{d\chi}{dt} \tag{17′}$$

Vom pune

$$L = \psi \frac{d\chi}{dt} - H, \tag{24}$$

adică

$$L = \psi \left(\frac{d\chi}{dt} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 - \int \frac{dp}{\rho} + U.$$

Observînd că

$$V^2 = \nabla\varphi \cdot \bar{v} + \psi(\nabla\chi \cdot \bar{v})$$

avem

$$\psi \left(\frac{d\chi}{dt} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} V^2$$

şi deci expresia funcţiunii L devine

$$L = - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} V^2 - \int \frac{dp}{\rho} + U. \tag{24'}$$

Conform notaţiei (24) ecuaţia (17′) se transcrie

$$\nabla L = \frac{d\psi}{dt} \nabla\chi + \psi \cdot \nabla \frac{d\chi}{dt} \tag{25}$$

Dacă notăm pentru prescurtare

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \dot{\chi}$$

ecuaţia (25) atrage că L este o funcţie care depinde de x_1, x_2, x_3 şi t prin intermediul funcţiilor χ, $\dot{\chi}$ şi eventual t

$$L = L(\chi, \dot{\chi}, t) \tag{26}$$

şi în plus sînt îndeplinite ecuaţiile

$$\frac{\partial L}{\partial \chi} = \dot{\psi} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = \psi. \tag{27}$$

Expresiile (24) şi (26) ale funcţiei L precum şi ecuaţiile (27) permit a spune că funcţia L este analogul funcţiei lui Lagrange din mecanica analitică. Pe ecuaţiile (27) se citeşte că funcţia χ corespunde unei coordonate generalizate (lagrangiene) iar ψ unui impuls generalizat.

Eliminînd funcţia ψ între ecuaţiile (27) obţinem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0 \tag{28}$$

ecuaţie care corespunde ecuaţiilor lui Lagrange din mecanica analitică relativ la funcţia χ considerată ca coordonată lagrangiană.

7. Principiul variaţional al lui Hamilton.

Alura ecuaţiei (28) pe care o satisface funcţia L permite intuirea unui principiu variaţional care să corespundă principiului lui Hamilton din mecanica analitică.

Vom arăta în acest sens că ecuația (28) este o condiție necesară și suficientă ca funcționala

$$I(x_i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\chi, \dot{\chi}, t)dt + l(\chi, t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{29}$$

să fie staționară.

În adevăr, să presupunem că $L = L(\chi, \dot{\chi}, t)$, $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3, t)$ și $x_i = x_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ sînt funcțiuni de clasă C^2 în raport cu variabilele corespunzătoare. Cum $\dot{\chi}$ este derivata totală a funcției de vîrtej $\dot{\chi}$ în raport cu timpul t, expresia lagrangianului L se scrie

$$L = L\left(\chi, \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j, t\right), \quad \dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt}. \tag{30}$$

Să considerăm familia curbelor

$$\Gamma : x_i = x_i(t), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ce satisfac următoarelor condiții la limită naturale

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial l}{\partial x_i}\right) \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{31}$$

Curbele Γ_0 ale acestei familii de curbe Γ ce extremează funcționala (29) sînt date de sistemul de ecuații ale lui Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ (i = 1, 2, 3). \tag{32}$$

Din (30) avem însă

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_j\right)$$

ultima din aceste expresii punîndu-se evident sub forma

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right)$$

Ecuațiile (32) vor deveni atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \, \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sau

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \chi}\right] \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{33}$$

Ori cum $\chi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.}$ este la orice moment t o suprafață de vîrtej, înseamnă că funcția χ depinde explicit de x_1, x_2, x_3 și prin urmare ea nu poate fi de tipul $\chi = \chi(t)$. De altfel, aceasta nu se poate și din motivul că avem în studiu cîmpurile de viteze de tipurile canonice II sau III. Din ecuația (33) va rezulta neapărat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0$$

adică tocmai ecuația (28).

Reciproc, dacă ecuația (28) este satisfăcută, atunci avem verificate ecuațiile (33) și deci și ecuațiile (32) ale lui Euler-Lagrange.

Se observă că condițiile la limită naturale (31) impuse curbelor Γ se transcriu sub forma

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} + \frac{\partial l}{\partial \chi}\right) \delta\chi \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad (31')$$

Aceste condiții la limită naturale, împreună cu ecuația (28) permit a considera integrala (29) ca o funcțională depinzînd de funcția de vîrtej

$$\chi = \chi(x_1, x_2, x_3, t) : \quad I(x_i(t)) = \mathcal{J}(\chi(x_1, x_2, x_3))$$

ceea ce întregește caracterul de coordonată generalizată atribuit funcției χ.

În baza celei de a doua ecuații (27) condițiile la limită naturale (31′) se pot pune și sub forma

$$\left(\psi + \frac{\partial l}{\partial \chi}\right) \delta\chi \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \qquad (31'')$$

Se observă în plus că ecuațiile (32) ce dau extremalele funcționale (29) privite ca depinzînd de curba Γ, adică de $x_i = x_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ sînt tocmai proiecțiile pe axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 ale ecuației fundamentale a mecanicii fluidelor perfecte.

În adevăr, funcționala (29) se mai scrie

$$I(x_i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} V^2 - \int \frac{dp}{\rho} + U\right) dt + l^*(x_i, t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

sau încă

$$I(x_i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} V^2 - \int \frac{dp}{\rho} + U\right) dt + [l^*(x_i, t) - \varphi(x_i, t)] \Big|_{t_1}^{t_2} \qquad (29')$$

S-a notat $l^*(x_i, t) = l(\chi(x_1, x_2, x_3, t), t)$. Ecuațiile Euler-Lagrange pentru această funcțională (29′) sînt

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\int \frac{dp}{\rho} + U\right) = 0$$

întrucît s-a ținut cont că $V^2 = v_i v_i$, iar $v_i = \dot{x}_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Am obținut astfel ecuațiile de mișcare ale fluidelor perfecte prin aplicarea unui principiu variațional:

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{34}$$

ecuații care concentrat se scriu sub forma cunoscută

$$\bar{a} = \nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{34'}$$

Condițiile la limită naturale în baza cărora pot fi scrise ecuațiile (34) sînt

$$\left(\dot{x}_i + \frac{\partial l}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\delta x_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \text{sau} \quad \left(\psi\frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \frac{\partial l}{\partial x_i}\right)\delta x_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

sau încă

$$(\psi\delta\chi + \delta l)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{35}$$

căci am ținut cont că $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$ și avem reprezentarea (1) a lui Clebsch.

Așa dar, ecuațiile lui Euler-Lagrange pentru funcționala (29') în raport cu funcțiile $x_i = x_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ dau tocmai ecuațiile de mișcare (34) ale unei particole fluide în intervalul de timp $[t_1, t_2]$. În concluzie, *pentru o particulă fluidă dată, dintre toate curbele* Γ *ce satisfac condițiilor la limită naturale* (35) *traeictoria particulei este curba* Γ_0 *ce extremează funcționala* (29').

Un caz particular al condițiilor la limită naturale (31) este acela în care extremitățile arcelor de curbă Γ sînt fixe:

$$\delta x_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

BIBLIOGRAFIE

1. Appell P. A., *Traité de mécanique rationnelle*, vol. III, ed. III-a Paris, 1928, pag. 460 — 463.
2. Clebsch A., „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Berlin, 1857, pag. 293—312.
3. Cristea I. I., „Comunicările Academiei R.P.R." **XI**, 1961, nr. 12 pag. 1443—1450.
4. Iacob C., *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959.
5. Lamb H., *Hydrodynamics*, ed. VI-a, Cambridge, 1932, pag. 248—249.
6. Stepanov V. V., *Curs de ecuații diferențiale* (trad. din l. rusă), București, 1955, pag. 422—424.
7. Stuart T., Disertație, Dublin, 1900.
8. Vâlcovici V. V., Bălan Șt., Voinea R., *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1959, pag. 713—797.
9. Vâlcovici V. V., „Studii și cercetări de mecanică aplicată", **XI**, 1960, nr. 6, pag. 1507—1533.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СОВЕРШЕННЫХ БАРОТРОПНЫХ ФЛЮИДОВ

(Резюме)

Работа имеет в виду использование представления Клебша для трактовки уравнений движения совершенных баротропных флюидов с аналитической точки зрения.

Таким образом, получаютса уравнения (19) Стюарта и уравнение (28), соответствующие каноническим уравнениям Гамильтона, соответственно уравнениям Лагранжа из аналитической механики систем материальных точек.

Функция вихря χ рассматривается, как координата Лагранжа, а функция вихря ψ—как обобщенный импульс.

На основании уравнения [28] даётся вариационный принцип, являющийся аналогичным принципу Гамильтона из аналитической механики.

LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE DES FLUIDES PARFAITS BAROTROPES

(Résumé)

L'article a pour objet d'employer la représentation (1) de Clebsch afin de traiter d'un point de vue *analytique* les équations du mouvement des fluides (parfaits barotropes).

On obtient ainsi les équations (19) de Stuart et l'équation (28) qui correspondent respectivement aux équations canoniques de Hamilton et aux équations de Lagrange des systèmes de points matériels, dans sa Mécanique analytique.

La fonction de tourbillon (χ) est interprétée comme une coordonnée lagrangienne, la fonction de tourbillon (ψ) comme une impulsion agénérlisée.

Sur la base de l'équation (28) on donne un principe variationnel qui est l'analogue du principe de Hamilton de la Mécanique analytique.

CERCETĂRI CU PRIVIRE LA INFLUENŢA ULTRASUNETULUI ASUPRA GERMINAŢIEI SEMINŢELOR DE GRÎU

de

D. AUSLÄNDER, E. VERESS, N. ALBU

Studiul acţiunii ultrasunetului asupra diferitelor sisteme biologice a constituit şi constituie o nouă orientare a lucrărilor de biofizică, începînd cu sfîrşitul deceniului al treilea din secolul al XX-lea.

E. N. Harvey şi A. L. Loomis [3] au cercetat în 1928, efectul ultrasunetului asupra celulelor vegetale. Influenţa ultrasunetului asupra germinaţiei şi creşterii plantelor a fost studiată în 1931 de N. Gaimes. Primele cercetări sistematice au fost efectuate în 1936 de către O. Istomina şi E. Ostrovski [3]. Ei au tratat seminţe de cartofi şi mazăre cu ultrasunete de frecvenţă de 400 kHz şi au constatat stimularea, atît în ceea ce priveşte germinaţia cît şi creşterea plantelor. În 1948 I. Berents [3] constată că în urma ultrasonării seminţelor de mazăre, la frecvenţa de 800 kHz, se accelerează procesul de germinaţie. W. W. Schwabe şi M. I. Thornley, au obţinut în 1950 acţiuni stimulatoare ale ultrasunetului de frecvenţa 1 MHz asupra germinaţiei seminţelor secarei de toamnă. În 1951 O. A. Krotova [5] a studiat acelaş efect asupra seminţelor unor specii de legume, constatînd stimularea germinaţiei acestora. Despre aceste rezultate, Krotova afirmă că: ,,Folosirea ultrasunetelor. ca mijloc de pregătire a seminţelor înainte de semănat, merită, să fie studiată şi introdusă în practică''.

Cercetările lui E L. Ruban şi N. N. Dolgopolov [7] din, 1952 s-au extins asupra plantelor leguminoase, a cerealelor şi a oleaginoaselor. Ei au pus în evidenţă importante modificări fiziologice la aceste plante provenite din seminţe ultrasonate. În acelaşi an I. N. Barsukov şi K. M. Zabavskaia au studiat influenţa vibraţiilor sonore de frecvenţă ridicată asupra seminţelor diferitelor plante de cultură. Ei au obţinut efecte de stimulare asemănătoare celor produse de acţiunea ultrasunetelor.

Cele mai importante rezultate din acest domeniu, le prezintă în literatura de specialitate din ultimii ani, cercetătorul sovietic I. E. Elpiner [4]. El a studiat efectele stimulatoare ale acestor vibraţii asupra semințelor de porumb, cercetînd procesele fizico-chimice și cele biochimice ce apar în structura celulară în urma acestor acțiuni, care constau în activarea proceselor enzimatice din straturile superficiale ale celulelor și în creșterea sensibilității lor față de anumite substanțe biologic active.

La noi în țară de această problemă s-au ocupat acad. Bădărău și prof. Lazányi.

E. Bădărău și Gh. Ghiurgea [1] au urmărit influența ultrasunetului asupra semințelor de grîu și au constatat o stimulare a energiei germinative și a producției.

Colectivul A. Lazányi, A. Márki, G. Crăciun și Șt. Kiss [6] au studiat suprapunerea acțiunii ultrasunetului și a drojdiei de bere asupra germinării și dezvoltării porumbului. Pe lîngă efectul de creștere a organelor vegetative, autorii au constatat că cele două efecte nu se însumează, acțiunea stimulatoare a ultrasunetului în experiențele respective fiind chiar frînată.

Într-o altă serie de cercetări [3] mai mulți autori trag concluzii în sensul inexistenței oricărei acțiuni a ultrasunetelor asupra germinației și a creșterii plantelor. Astfel Stockebrand în 1952 afirmă, pe baza experiențelor sale efectuate asupra sfeclei de zahăr, că nu a obținut nici un fel de efect nici în privința germinației nici a creșterii plantelor. Concluzii identice trag cercetătorii Loza (1949), Bercy (1951) Haskell și Selman (1950), Tomberg și alții, [3] în ceea ce privește o serie de plante ca : porumbul, mazărea și altele.

S-ar putea ca aceste contradicții să se explice prin condiții diferite de experimentare, care de exemplu în cazul unor intensități prea mici, nu au putut produce cavitația în interiorul semințelor.

Partea experimentală și rezultatele.

În cercetările noastre ne-am propus să urmărim influența timpului de tratare a grîului asupra germinației și să stabilim intervalul optim de ultrasonare. Am studiat acest efect pe semințe uscate și pe semințe introduse în apă la soiul de grîu de primăvară, Marquis.

Am utilizat un generator piezoelectric TESLA de frecvență 1 MHz, diametrul cvarțului, așezat în baie de ulei, fiind de 5 cm. În toate expunerile semințelor în cîmpul ultrasonor a fost menținută constantă puterea sonoră totală de 80 W.

Semințele, după ce au fost curățite de impurități, au fost așezate într-un vas de sticlă cu baza plană în care a avut loc tratarea atît în stare uscată, cît și în apă. Vasul cilindric a fost prevăzut în interior cu un inel cu diametrul de 4 cm și înălțimea de 4 mm acoperit pe partea superioară cu o sită metalică, sub care se așezau cîte 50 semințe, într-un singur strat, pe fundul vasului.

În felul acesta toate semințele au fost expuse într-un cîmp de aceeași intensitate, pentru diferite intervale de timp. Vasul a fost așezat deasupra cvarțului, la distanța de 4,25 cm fiind introdus în baia de ulei.

Ultrasonarea s-a efectuat în următoarele condiţii de experimentare.

a) Seminţe uscate expuse într-o gamă largă de intervale de timp.

b) Seminţe uscate expuse numai în intervalele de stimulare rezultate din datele de la punctul a.

c) Seminţe aşezate în apă, ultrasonate în intervale de stimulare.

d) Seminţe îmbibate timp de 2 ore cu apă, apoi ultrasonate în apă, tot în domeniile de stimulare.

În cele 4 serii de experienţe au fost tratate 18 800 seminţe.

a) Au fost experimentate 11 diferite intervale de timp între 30 secunde şi 25 minute, în comparaţie cu proba martor, pentru fiecare tratînd cîte 100 seminţe, deci în total 12 variante.

Imediat după ultrasonare seminţele au fost aşezate pe hîrtie de filtru în germinatoare, care au fost menţinute la temperatura camerei de aproximativ 22°C.

În vederea stabilirii modificărilor biologice produse de ultrasunete asupra seminţelor de grîu, au fost fixaţi trei indici care permit evaluări cantitative şi anume :

— energia germinativă

— facultatea germinativă, şi

— intensitatea de creştere a plantulelor.

Pentru determinarea energiei germinative, în ziua a doua şi a treia au fost numărate de trei ori pe zi seminţele germinate, la orele 8, 14 şi 20. După aceea s-a trecut la stabilirea facultăţii germinative la sfîrşitul intervalului de germinaţie. Toate aceste măsurători au fost efectuate, pentru comparaţie şi cu probe martor.

Pentru a pune în evidenţă diferenţele dintre lungimile rădăcinilor plantulelor provenite din seminţe ultrasonate faţă de cele netratate, în ziua a doua a germinaţiei au fost fotografiate seminţele încolţite (fig. 1)

În ziua a 6-a au fost tăiate tulpinile şi s-au determinat lungimile şi greutăţile lor, făcîndu-se media pentru fiecare variantă.

Experienţele au fost repetate de 4 ori cu toate cele 12 variante, în total pe 4800 seminţe (inclusiv martorul), rezultatele medii fiind prezentate în tabelul I.

Primele măsurători au indicat pentru condiţiile cele mai bune de stimulare, valori ale timpului de ultrasonare cuprinse între 30 secunde şi 5 minute.

S-a mai observat o accentuare pronunţată a capacităţii de îmbibare a seminţelor ultrasonate. De asemenea s-a pus în evidenţă faptul că durata scurtă de tratare stimulează germinaţia, pe cînd cea lungă duce la inhibiţii. Procesul de germinaţie devine mai lent, germinează mai puţine seminţe, unele pierzîndu-şi complet această capacitate, iar uneori ajungîndu-se chiar la moartea seminţelor. Astfel seminţele inhibate ajung la o facultate germinativă inferioară martorului.

Rezultatele acestea sînt reprezentate pe baza datelor din tabelul I, pe fig. 1. Cele de mai sus se referă la seminţe tratate în stare uscată care prezintă pînă la intervalul de 5 minute domeniul de stimulare iar peste 5 minute cel de inhibiţie.

Semințele tratate în funcție de efect datorită duratei le-am numit „stimulate" respectiv „inhibate".

b) Pentru explorarea mai precisă a timpului optim am redus intervalul cercetat între valorile de 30 secunde și 3 minute, lucrînd cu duratele de 30 secunde, 50 secunde, 1 minut, 1 1/2 minut, 2 minute, 3 minute.

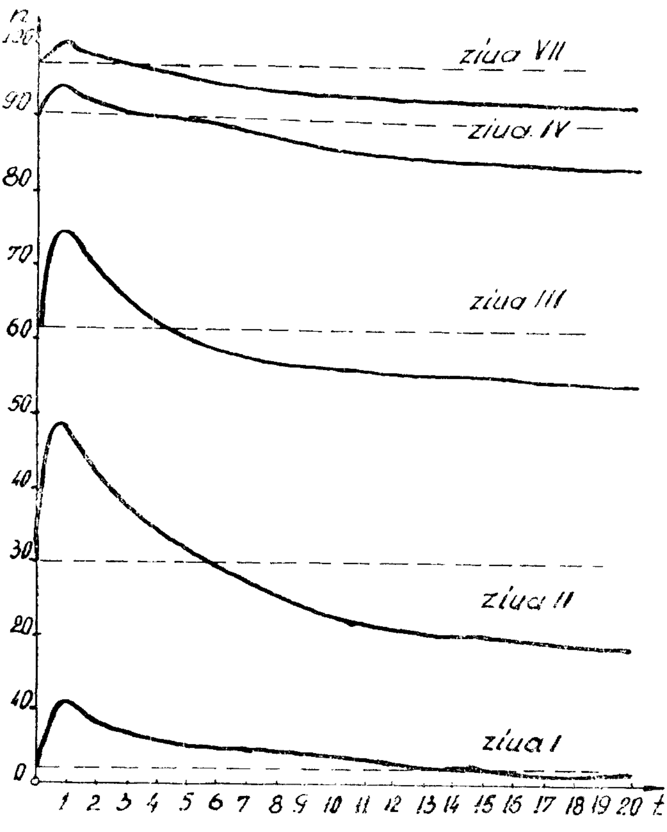


Fig. 1. Numărul semințelor germinate în funcție de timpul de ultrasonare (pe cale uscată).
n = numărul semințelor germinate.
t = timpul de ultrasonare (în minute).

Experiențele au fost repetate de 10 ori pentru cele 7 variante de mai sus (inclusiv martorul) cu cîte 100 seminţe de variantă, deci în total cu 7000 semințe.

Acțiunea stimulatoare se manifestă în deosebi în primele zile, astfel la semințele stimulate, valoarea energiei germinative a martorului a fost depășită deja în ziua a doua a germinării. Cele mai bune rezultate au fost obținute cu intervale de tratare de 50 secunde, la care s-a înregistrat o creștere în medie de 20 % a energiei germinative.

Aceste diferențe încep să scadă ajungînd de ordinul 2–3 % la facultatea germinativă. În schimb aici apare în mod pronunțat accelerarea creșterii părților vegetative, în special a tulpinei.

c) Paralel cu experiențele de mai sus, au fost efectuate aceleași cercetări cu semințe așezate în apă, supuse astfel acțiunii cîmpului ultrasonor. În condițiile acestea au fost repetate experiențele de 10 ori cu 7 variante de cîte 100 semințe, în total cu 7000 semințe.

Rezultatele medii obținute sînt reprezentate în tabelul II.

După cum se vede de aici, tratamentul în apă dă maximul de stimulare pentru intervalul de 30 secunde. Energia germinativă obținută pentru această durată este superioară celei corespunzătoare la tratarea uscată cu intervalul de timp optim de 50 secunde după cum se vede în graficele comparative *a*, *b* din fig. 2.

d) Au fost urmărite efectele stimulatoare ale ultrasunetului asupra seminţelor aşezate în apă după o prealabilă îmbibare a acestora prin ţinerea lor în apă timp de 2 ore. Rezultatele obţinute în acest caz au depăşit

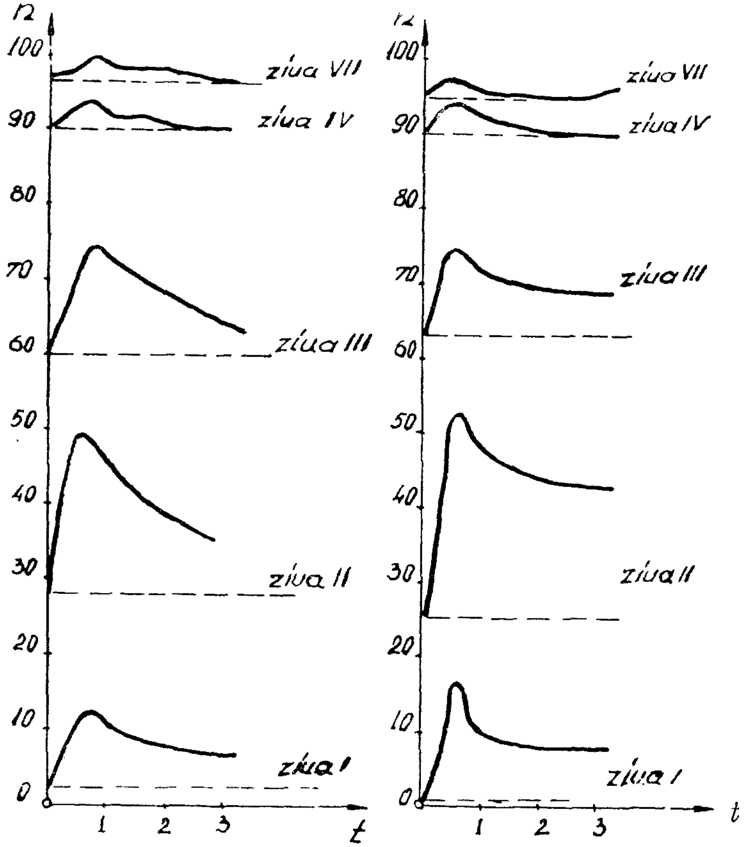


Fig. 2. Numărul seminţelor germinate în funcţie de timpul de ultrasonare
a — pe cale uscată, *b* — în apă).
n = numărul seminţelor germinate.
t = timpul de ultrasonare (în minute).

valorile celor trei indici (energia germinativă, facultatea germinativă şi intensitatea de creştere a plantulelor) atît în cazul tratării uscate cît şi a celei în apă, dar fără o îmbibare anterioară.

O altă serie de măsurători biometrice au fost extinse referitor la influenţa tratării seminţelor de grîu cu ultrasunete, asupra dezvoltării părţilor vegetative.

S-a putut constata o accelerare accentuată a creșterii rădăcinilor semințelor ultrasonate.

După cum se vede din fig. 3 lungimile rădăcinilor semințelor ultrasonate în apă timp de 30 secunde ajung de două ori mai mari, decît cele ale martorului, la aceeași durată de germinație. Se pot observa de asemenea deosebirile lungimii rădăcinilor plantulelor provenite din semințe tratate timp de 50 secunde pe cale uscată față de cele ale martorului.

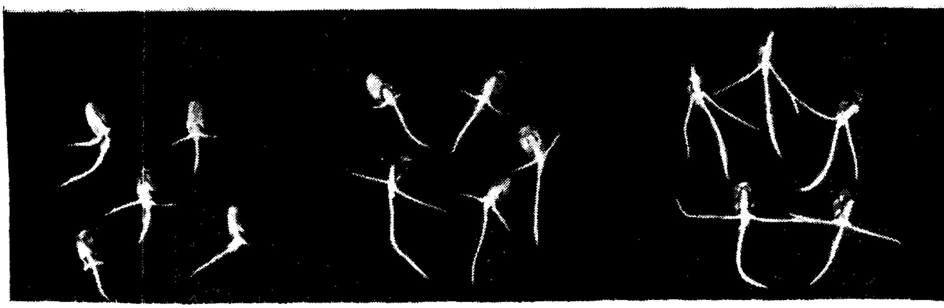


Fig. 3. Plantele martor, și plantele provenite din semințe ultrasonate la 2 zile.
a — Martor.
b — Ultrasonat în uscat timp de 50 secunde.
c — Ultrasonat în apă timp de 30 secunde.

Pe lîngă rezultatele de mai sus au mai fost măsurate intensitatea de creștere a tulpinei plantulelor prin determinări ale lungimilor și greutăților, efectuate în ziua a 6-a de germinație. Valorile medii obținute din aceste determinări sînt cuprinse în tabelele III și IV și reprezentate în fig. 4 și 5.

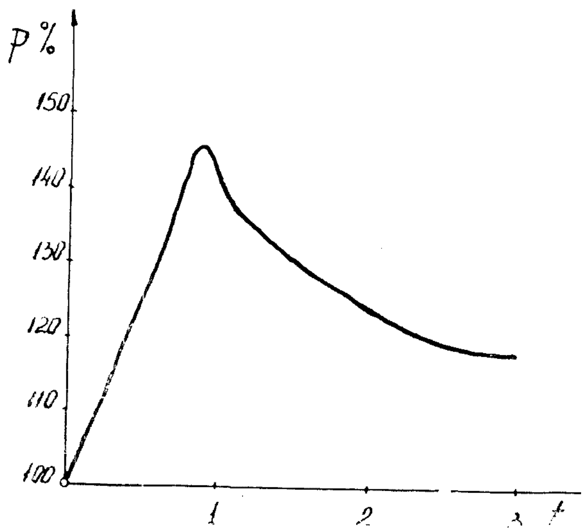


Fig. 4. Greutatea tulpinilor plantelor provenite din semințe ultrasonate.
p% — creșterea greutății (în procente).
t = timpul de ultrasonare (în minute).

Rezultatele arată o creștere accentuată atît a lungimilor cît și a greutăților plantulelor provenite din semințe supuse acțiunii ultrasunetelor.

Discuții.

Interpretarea rezultatelor este destul de dificilă avînd în vedere că acțiunea biologică a ultrasunetelor este legată de procese fizico-chimice complexe.

Elpiner consideră că ultrasunetul determină o „zdruncinare" a structurii submicroscopice a membranelor celulare şi astfel accentuiază metabolismul. Această acţiune cu caracter mecanic, după părerea lui Limar, prezintă un maxim în condiţiile de rezonanţă a seminţelor cu vibraţiile ultrasonore.

După constatările lui Elpiner, ultrasunetele stimulează procesele enzimatice, datorită reacţiilor de oxidare.

Considerăm că acestea îşi găsesc explicaţia în fenomenul de cavitaţie care se produce în lichidul din celulele seminţelor, chiar neîmbibate, la intensităţi suficient de mari ale fascicolului ultrasonor.

Conform teoriilor microdescărcărilor electrice, emisă de fizicianul sovietic I. Frenkel, sarcinile electrice ce apar pe suprafaţa bulei de cavitaţie, dau tensiuni ce duc la străpungerea electrică a bulei. În consecinţă se produce ionizarea particulelor vecine şi apariţia de radiaţii ultraviolete care favorizează reacţiile de oxidare. Astfel devin explicabile rezultatele superioare obţinute pentru seminţele tratate după îmbibarea lor în apă şi anume atît prin creşterea intensităţii fascicolului, deci apariţia fenomenului de cavitaţie, cît şi prin favorizarea apariţiei acestui efect, datorită creşterii mediului apos din interiorul celulelor.

În cazul seminţelor neîmbibate, rezultatele inferioare se datoresc absorbţiei mari a ultrasunetului în zonele de gaze din interiorul seminţelor, precum şi a refracţiilor cauzate de diferenţele de densităţi, proprietate caracteristică structurii anatomice a seminţelor. Prin îmbibarea lor cu apă, impedanţele acustice specifice diferitelor straturi vor lua valori apropiate între ele, ceea ce va duce la micşorarea pierderilor de energie ultrasonoră, în propagare prin seminţe.

Rezultatele referitoare la deosebirile dintre acţiunile stimulatoare ale ultrasunetului în tratarea uscată şi umedă se explică prin scăderea absorbţiei ultrasunetelor pe intervalul dintre vibrator şi seminţe. De fapt în primele experienţe, seminţele fiind aşezate pe baza vasului, nu s-au putut elimina straturile de aer dintre acestea şi vas datorită formei şi aşezării neregulate a seminţelor. La frecvenţa la care s-a lucrat, absorbţia fiind foarte mare în aer, introducerea în apă a seminţelor — numai pe durata tra-

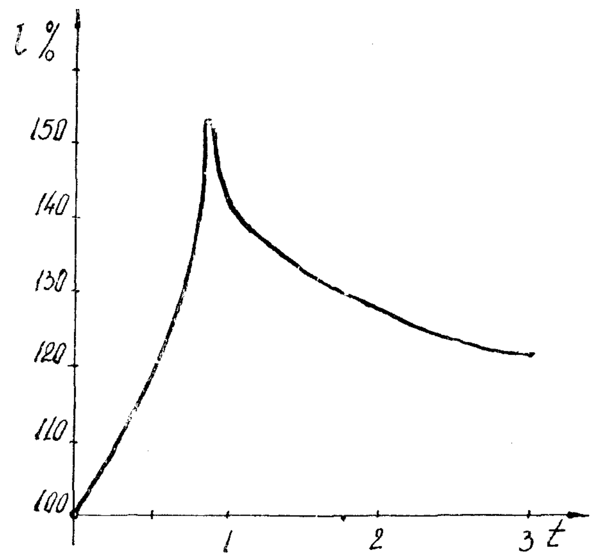


Fig. 5. Lungimea tulpinilor plantelor provenite din seminţe ultrasonate.
l % — creşterea lungimii (în procente).
t = timpul de ultrasonare (în minute).

Tabelul 1

Germinația pe zile a semințelor ultrasonate în stare uscată

Variantele	Timpul de ultrasonare	Procentul de germinație										
		Ziua 1	Ziua 2			Ziua 3			Ziua 4	Ziua 5	Ziua 6	Ziua 7
		ora 8	ora 8	ora 14	ora 20	ora 8	ora 14	ora 20	ora 8	ora 8	ora 8	ora 8
V_1	Martor	2	18	28	49	57	61	75	90	95	97	97
V_2	45″	10	36	49	63	71	73	83	94	96	98	99
V_3	50″	12	39	49	64	72	75	86	94	96	98	100
V_4	1′	10	35	45	62	70	73	84	92	95	97	98
V_4	$1^1/_2$′	9	30	41	61	68	71	81	92	96	96	97
V_5	2′	7	29	39	56	64	68	79	91	96	97	98
V_6	3′	7	25	36	54	62	65	75	91	94	96	97
V	5′	5	24	32	49	58	60	72	90	92	93	95
V	7′	5	23	28	45	56	57	69	87	90	91	92
V_{10}	10′	4	20	22	44	54	56	68	85	90	90	93
V_{11}	15′	2	18	20	38	52	55	66	84	88	91	92
V_{12}	20′	1	15	18	37	50	54	65	83	86	90	91

Tabelul 2

Germinația pe zile a semințelor ultrasonate în apă

Variantele	Timpul de ultrasonare	Procentul de germinație										
		Ziua 1	Ziua 2			Ziua 3			Ziua 4	Ziua 5	Ziua 6	Ziua 7
		ora 4	ora 8	ora 14	ora 80	ora 8	ora 14	ora 20	ora 8	ora 8	ora 8	ora 8
V_1	Martor	1	10	25	49	57	63	75	90	95	96	96
V_2	30″	17	39	53	65	72	76	86	94	96	98	98
V_3	50″	10	37	50	63	71	73	84	93	93	96	97
V_4	1′	10	35	48	60	69	71	80	92	93	97	96
V_5	$1^1/_2$′	9	34	45	61	69	70	81	91	92	95	95
V_6	2′	8	32	44	59	68	69	79	91	91	95	95
V	3′	9	27	42	57	67	69	78	90	90	96	96

Tabelul 3

Greutatea medie a tulpinelor plantulelor în ziua a 6-a

Variantele	Timpul de ultrasonare	Greutatea în g	Creşterea greutății în %
V_1	Martor	2,12	100
V_1	45″	2,96	139
V_2	50″	3,21	147
V_3	1′	2,89	136
V_4	$1^1/_2$′	2,81	132
V_5	2′	2,61	123
V_6	3′	2,51	118

Tabelul 4

Lungimea medie a tulpinelor plantulelor în ziua a 6-a

Variantele	Timpul de ultrasonare	Lungimea în mm	Creşterea lungimii în %
V_1	Martor	36	100
V_2	45″	49	133
V_3	50″	55	153
V_4	1′	51	141
V_5	$1^1/_2$′	49	133
V_6	2′	46	128
V	3′	44	122

tării — a asigurat uniformitatea cîmpului pentru toate punctele seminței.

Considerăm că pentru complecta elucidare a acestei probleme va mai trebui urmărită într-o cercetare viitoare, influența factorului de intensitate a fascicolului ultrasonor în condițiile asigurării unei acțiuni omogene a cîmpului asupra semințelor.

Pe de altă parte se știe că ultrasunetele au acțiune depolimerizantă și de emulsionare; putem presupune că în cazul semințelor se produce o emulsionare a grăsimilor și o descompunere a materiilor lor de rezervă nutritivă.

Din creșterea greutății părților vegetative, putem trage concluzia că și depozitarea materiilor nutritive este accelerată prin acționarea cîmpului ultrasonor.

Se poate constata și modificarea permeabilității celulelor, urmînd ca în cercetări viitoare să studiem această problemă cît și cea privitoare la creșterea capacității de absorbție a semințelor în urma ultrasonării.

În ceea ce privește menținerea efectului de stimulare pînă la sfîrșitul perioadei de vegetație, precum și influența acestor tratamente asupra creșterii producției, urmează ca rezultatele ce se vor obține pe cîmpul de experiență al Institutului agronomic din Cluj, să dea răspuns.

Toate rezultatele pot fi sintetizate în următoarele concluzii:

Concluzii generale.

1. Germinația semințelor de grîu este stimulată de acțiunea ultrasunetelor de frecvență 1 MHz și putere totală de 80 W, în intervale de timp bine determinate.

2. Tratamente depășind durata de 5 minute duc la inhibiție.

3. Acțiunea ultrasunetului asupra semințelor așezate în apă este mai pronunțată decît asupra celor uscate.

4. Greutatea și lungimea tulpinei crește în urma ultrasonării depășind cu 50% valorile medii corespunzătoare semințelor netratate.

BIBLIOGRAFIE

1. Bădărău E. și Giurgea Gh. D., *Cercetări cu privire la influența ultrasunetului asupra germinației și dezvoltării plantelor*. „Buletinul științific al Academiei R.P.R. Mat., fiz., chim.„ 1950, I—II, nr. 8, p. 663.
2. Barsukov L. N. și Zabavskaia K. M., *Vlianie visokociastotnîh kolebanii na prorastanie semian i razvitie rastenii*. „Agrobiologhia" 1953, nr. 5, p. 80—85.
3. Dr. Bergmann L., *Ultrazvuk*, Moskva, 1954, p. 545—576.
4. Elpiner I. E., *Biologhiceskie deistvia ultrazvukov*, „Jurn. obșcei. biol." **XV** (1954), nr. 1. — *Ultrazvukovîe, volnî i ih primenenie v biologhii*. „Priroda" (1952) nr. 11, p. 109—114.
5. Elpiner I. E. i Bronskaia, L. M. *O nekotorîh fizikohimiceskih osnovah stimulirujușcevo deistvia ultrazvukovih voln na vshozest semian kukuruzî* „DAN SSSR" **128** (1959) nr. 5. p. 1073—1075.

6. Hock H, *Despre folosirea ultrasunetelor în cultura și selecția plantelor*. Traducere IDT din „Die Deutsche Landwirtschaft", **4** (1953), nr. 11 (noiembrie).
7. Krotova, O. A. *Tratarea semințelor cu ultrasunete*. „Livada și grădina" T, **95** (1957), nr. 9. (sept.), p. 28–29.
8. Lazányi A., Márki A., Crăciun C., Kiss Șt., *Contribuții la studiul efectului tratamentului cu ultrasunete și drojdie de bere asupra dezvoltării, creșterii și activității enzimatice a porumbului*. Acad. R.P.R. Filiala Cluj, „Studii și cercetări de biol." **X** (1959), nr. 1, p. 63–74.
9. Ruban E. L., Dolgopolov H. N., *Vozdejstvie ultrazvukovîh kolebanii na rannie fazî razvitia rastenii*. „DAN SSSR", **84** (1952), p. 632.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗДЕЙСТВИЯ УЛЬТРАЗВУКА НА ПРОРАСТАНИЕ ПШЕНИЧНЫХ СЕМЯН

(Резюме)

Авторы изучили стимулирующее действие ультразвуков на прорастание семян яровой пшеницы сорта Марки. Они наблюдали влияние ультразвукового действия на энергию прорастания, на всхожесть и на интенсивность прироста проростков, в зависимости от различных промежутков времени.

После приведения библиографических данных, в работе излагается употреблённый экспериментальный метод, условия работы и полученные результаты. Экспериментальные результаты даются в 4 таблицах и графиках, а действия, проявившиеся относительно длин корней, были иллюстрированы фотоснимками.

После обработки экспериментальных результатов можно установить, что прорастание семян и прирост проростков стимулируются ультразвуками в точно определенные промежутки времени. Длительная выдержка ведёт к угнетению. Причина должна быть поискана, с одной стороны, в явлении кавитации, а с другой стороны, в том, что ультразвуки ускоряют энзиматические процессы. Различие в стимулирующем действии ультразвуков при обработке сухих, как и промоченных в воде семян, объясняется поглощением ультразвука газовыми зонами и кратными преломлениями ультразвуков внутри семени с неоднородной структурой.

RECHERCHES RELATIVES À L'INFLUENCE DES ULTRA-SONS SUR LA GERMINATION DES GRAINS DE BLÉ

(Résumé)

Les auteurs ont étudié l'effet de stimulation que les ultra-sons ont sur la germination des semences du blé de printemps, de la variété Marquis. Ils ont observé l'influence de l'ultrason sur l'énergie germinative, la faculté germinative et l'intensité de croissance des plantules en fonction des différents intervalles de temps.

Après avoir rappelé les données bibliographiques, l'article expose la méthode expérimentale employée, les conditions de la recherche et les résultats obtenus. Les résultats expérimen-

taux sont groupés en 4 tableaux et graphiques, et les effets qui se sont manifestés quant aux longueurs des racines sont illustrés par des photographies.

L'analyse des résultats expérimentaux permet de constater que la germination des semences et la croissance des plantules sont stimulées par les ultra-sons dans des intervalles de temps bien déterminés. Une exposition de longue durée aboutit à l'inhibition. Les causes doivent être recherchées d'une part dans le phénomène de cavitation, d'autre part dans le fait que les ultra-sons accélèrent les processus enzymatiques. La différence entre l'effet de stimulation des ultra-sons dans le traitement des semences desséchées et des semences inhibées dans l'eau s'explique par l'absorption de l'ultra-son dans les zones de gaz et par lesr éfractions multiples des ultra-sons dans l'intérieur de la semence à structure non-homogène.

STUDII ASUPRA MĂSURĂRII RADIAȚIILOR CU BOLOMETRE METALICE ȘI CU SEMICONDUCTORI

de

ERVIN DEZSŐ

În articolul de față se vor trata pe rînd factorii ce influențează sensibilitatea bolometrului. Voi studia comparativ proprietățile optice și electrice ale metalelor și semiconductorilor pentru ca la sfîrșit să se poată răspunde la întrebarea dacă se poate mări sensibilitatea bolometrelor la o alegere justă a materialului și la o măsurare precisă.

1. Sensibilitatea de radiație.

$$S_R \equiv \frac{\Delta T}{W_0} \tag{1}$$

Fie W_0 watt cantitatea de energie ce cade în timp de o secundă pe suprafața bolometrului. O parte din această energie se reflectă de suprafață, alta se absoarbe și a treia parte este transmisă prin bolometru mediului exterior. Efectul termic este produs de energia absorbită.

Expresia energiei reflectate este

$$W_R = R \cdot W_0 \tag{2}$$

unde R este coeficientul de reflexie determinat de indicele de refracție al materialului. Valoarea indicelui de refracție în cazul metalelor și semiconductorilor este de natură complexă. Expresia lui este dată de relația

$N = n - ik$ k este coeficientul de absorbție.

Partea reală a indicelui de refracție este legată de curentul de deplasare cauzat de undele electromagnetice, partea complexă este condiționată de curentul de conducere. În general la metale, curentul de deplasare este mic în comparație cu cel de conducere, prin urmare : $n < k$.

Aplicînd legea lui Fresnel referitoare la cantitatea de radiație reflectată cu întrebuințarea indicelui de refracție complex, obținem legea lui Beer :

$$R = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \tag{3}$$

Pentru

$$k >> n \quad R \cong 1.$$

La metale, coeficientul de reflexie în ultraviolet are o valoare mică. În domeniul vizibil, valoarea lui variază între 50—98%, pentru ca în infraroșu să fie foarte apropiat de 1, de pildă la platină $R = 91{,}5\%$, la nichel $R = 91{,}9\%$, la lungimea de undă $\lambda = 4$ microni.

Valoarea mare a coeficientului de reflexie a metalelor pure se datorește conductivității lor specifice mari, de ordinul de mărime 10^5 (ohm cm)$^{-1}$ = 10^{14} u.CGS e.m. Din ecuația lui Maxwell, făcînd aproximațiile permise, obținem

$$K = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^{1/2} \quad \text{și} \quad R = 1 - 2\left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^{1/2} \tag{1}$$

unde

$\nu \equiv$ frecvența radiației

$\sigma \equiv$ conductivitatea specifică în u CGS e.m.

La lungimi de undă de 1,5 microni platina și nichelul reflectă cca 80% radiație, absorbind numai 20% din ea.

Materialele bolometrice semiconductoare au o conductivitate de ordinul

$$\sigma = 10^{-4} - 10^{-5} \text{ (ohm cm)}^{-1} = 10^5 - 10^4 \text{ u. CGS e. m.}$$

prin urmare și coeficientul de absorbție k va fi mai mic. În tabelul ce urmează figurează cîteva date corespunzătoare radiațiilor cu lungimea de undă de 1 micron (după T.S. Moss).

Denumirea	B	Si	Ge	Se	Pb S	Zn S	In Sb
n	3,2	3,6	3,99	3	4,1	2,3	3,96
k	0,5	1	2,5	2,5	1	1	0,2

În general, materialele semiconductoare folosite au n și k în jurul valorilor $n = 3$ și $k = 1$ pentru $\lambda = 1$ micron. Folosind aceste date, din legea lui Beer, rezultă $R = 30\%$ și $1 - R = 70\%$. Se vede că semiconductorii absorb de 3,5 ori mai mult din energia incidentă decît metalele. Pentru mărirea absorbției s-a preconizat acoperirea superficială a metalelor cu un strat de oxid sau funingine. Procedeul n-a îmbunătățit situația, pentru că stratul depus absoarbe o mare parte din radiație, însă este în același timp termoizolant. Pe de altă parte, acoperirea cu un strat de oxid transformă metalul în semiconductor a cărui sensibilitate scade considerabil.

Dacă în domeniul vizibil semiconductorii absorb de 3,5 ori mai multă energie din cea incidentă decît metalele, diferența aceasta în infraroșu este mult mai pronunțată. Astfel pentru lungimea de undă de 14 microni Pt și Ni absoarbe numai 3% din radiație, în aceleași condiții, de pildă, borul absoarbe 75% din radiație, adică de 25 de ori mai mult (pentru bor $k = 0{,}1$, $n = 3$, deci $R = 25\%$ la $\lambda = 14$ microni).

Dacă pe suprafaţă cade o cantitate de energie W_0 şi energia reflectată de suprafaţă este

$$W_R = R \cdot W_0$$

atunci prin suprafaţa bolometrului va trece energia

$$W_1 = (1 - R)W_0 \tag{5}$$

Din aceasta la adîncimea d vom avea

$$W_T = W_1 \exp(-Kd) \tag{6}$$

unde $K \equiv$ constanta de absorbţie.

Înseamnă că în stratul de grosime d s-a absorbit

$$W_A = W_1 - W_T = W_1(1 - \exp(-K \cdot d)) = W_0(1-R)(1-\exp(-Kd) = W_0\eta \tag{7}$$

$$\eta = (1 - R)(1 - \exp(-K \cdot d)) \tag{8}$$

Nichel $n_D = 1{,}79$	Semiconductor $n_D = 3$
$k_D = 3{,}82$; $R = 72\%$	$k_D = 1$; $R = 30\%$
$K = 7{,}6 \cdot 10^5$ cm^{-1}	$K = 2 \cdot 10^5$ cm^{-1}
$W_R = 0{,}72\ W_0$	$W_R = 0{,}3\ W_0$
$W_I = 0{,}28\ W_0$	$W_I = 0{,}7\ W_0$
$W_T = 0{,}11\ W_0$	$W_T = 0{,}26\ W_0$
$W_A = 0{,}17\ W_0$	$W_A = 0{,}44\ W_0$
	$k \cdot d = 1$

Încălzirea bolometrului fiind proporţională cu energia absorbită W_A înseamnă că bolometrul se încălzeşte cu atît mai mult cu cît este mai mic coeficientul de reflexie R şi cu cît este mai mare produsul Kd. Valoarea lui K depinde de coeficientul k de absorbţie

$$K = 4\pi \frac{k}{\lambda} \tag{9}$$

Variaţia ΔT de temperatură a materialului iradiat este proporţională cu energia absorbită W_A şi invers proporţională cu masa încălzită, adică cu grosimea stratului

$$\Delta T \propto \frac{(1 - \exp(-Kd))}{d}$$

Încălzirea depinde în mare măsură şi de pierderile de căldură, pierderi survenite mai ales prin conducere.

În practică se alege în aşa fel grosimea d a bolometrului ca energia absorbită să fie 50% din cea incidentă, iar energia reflectată şi cea transmisă să fie cam cîte 25—25% din W_0. Tabelul de mai sus ne arată că aceste condiţii pot fi satisfăcute numai de semiconductori.

2. Încălzirea bolometrului.

Suprafaţa bolometrului se încălzeşte sub influenţa unei radiaţii incidente. Apare deci un gradient de temperatură, ce determină un flux de căldură de la suprafaţă spre centre.

O parte din energia absorbită serveşte încălzirii bolometrului însuşi, iar restul serveşte încălzirii mediului exterior. La o iradiere continuă, temperatura bolometrului creşte exponenţial pînă la o valoare maximă, pentru ca apoi să se stabilească starea staţionară. În acest caz se stabileşte un echilibru între energia absorbită şi cea transmisă mediului exterior.

Procesul încălzirii este descris de ecuaţia

$$W_A = C\frac{\Delta T}{\Delta t} + P\Delta t \tag{11}$$

unde C este capacitatea termică a întregului bolometru, iar P este pierderea de căldură specifică în Watt/grad.

Soluţia ecuaţiei (11) este

$$\Delta T = \frac{W_A}{P}\left[1 - \exp\left(-\frac{P}{C}t\right)\right] = \frac{W_A}{P}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)\right] \tag{12}$$

Încălzirea maximă după atingerea stării staţionare este

$$\Delta T_{max} = \frac{W_A}{P} \tag{13}$$

Curba de încălzire este caracterizată de constanta de timp $t_0 = \frac{C}{P}$. După un timp $t = t_0$ încălzirea este de $[1 - \exp(-1)]\cdot T_{max} = 63\% T_{max}\cdot$ $\cdot C$ şi t_0 sînt mai mari la semiconductori decît la metale.

Pierderile de căldură se datoresc radiaţiei, convecţie şi conducerii căldurii. Luînd în considerare încălzirea mică, $\Delta T \ll T$; putem scrie pentru pierderea prin radiaţie

$$P_s = a_s e A . 4 . T^3 \tag{14}$$

unde $a_s = 5{,}75 \cdot 10^{-12}$ watt/cm², grad⁴ este radiaţia specifică a corpului negru; iar $e \cong 1 - R$ este coeficientul de radiaţie al materialului.

A este suprafaţa bolometrului în cm².

În general, metalele şi semiconductorii sînt selectivi din punctul de vedere al radiaţiei, deci valoarea lui e depinde de lungimea de undă. În plus, semiconductorii se abat mai mult de la legile corpurilor radiante cenuşii, pierderea de radiaţie fiind mai mare decît în cazul metalelor.

Pierderea prin convecţie

$$P_C = a_c A$$

unde a este coeficientul de convecţie variabil, ce depinde în mare măsură şi de suprafaţa A.

Pierderile prin conducere sînt cauzate de firele conductoare şi de suporturile bolometrului. Ele sînt date de expresia

$$P_v = a_v A \tag{16}$$

Sensibilitatea este mult influenţată de materialul suportului. Konozenko făcînd măsurători în acest sens, a stabilit că în condiţii analoage, variind materialul suportului, sensibilitatea se schimbă.

Suport	Sticlă	Din cuarţ	Fără suport
Sensibilitatea	585	705	1210 V/W

Din tabel se vede că sensibilitatea bolometrului fără suport este de două ori mai mare ca în cazul unui suport din sticlă.

Pierderile prin conducere în cazul semiconductorilor sînt mai mici decît la metale, datorită conductibilităţii lor termice mici, însă pierderile prin radiaţie sînt mai mari la semiconductori. Global pierderile sînt aproximativ de acelaşi ordin de mărime atît la semiconductori, cît şi la metale.

Stabilindu-se starea staţionară, temperatura maximă a bolometrului va fi :

$$T_{max} = \frac{W_A}{P_s + P_c + P_v} = \frac{W_A}{A}\,\frac{1}{4a_s eT^3 + a_c + a_v} = \frac{W_0(1 - R)(1 - \exp(-Kd))}{P} \tag{17}$$

Sensibilitatea de radiaţie : $S_R \equiv \frac{\Delta T}{W_0}$ este

$$S_R = \frac{(1 - R)(1 - \exp(-K \cdot d))}{P} \tag{18}$$

unde se stabilesc următoarele valori aproximative :

radiaţia :	$4a_s eT^3$	10^{-3}	watt/cm², grad
convecţie :	a_c	$2 \cdot 10^{-4}$	— ,, —
conducere :	a_v	$3 \cdot 10^{-2}$	— ,, — (suport din sticlă)

Se vede că pierderile cele mai mari sînt cele prin conducere.

3. Coeficientul termic al rezistenţei (CTR).

$$s_\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta T} = \alpha R_1 \tag{19}$$

Rezistenţa metalelor poate fi considerat constantă la o variaţie de temperatură mică. În general, variaţia rezistenţei este de $\alpha = 0{,}4\,\%/\text{grad}$, iar pentru materialele feromagnetice $\alpha = 0{,}6\,\%/\text{grad}$.

La semiconductori cu reţeaua atomică, conducţia specifică este :

$$\sigma = \sigma_n \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right) \tag{20}$$

σ_n este o constantă, ΔE energia de disociaţie a electronului, k este numărul lui Boltzmann.

$$\ln \sigma = \ln \sigma_n - \frac{\Delta E}{2k}\,\frac{1}{T} \tag{20 a}$$

Prin urmare, reprezentînd dependența conducției specifice de temperatură, în coordonate logaritmice, ca funcție de $\frac{1}{T}$, obținem o linie dreaptă. În fig. 1 este reprezentată variația lui σ pentru Cu_2O pur și cu surplus de oxigen.

Un mare avantaj al bolometrelor cu semiconductori este că la acestea conducția specifică variază cu 3—5% grad, fiind de zece ori mai mare ca la metale.

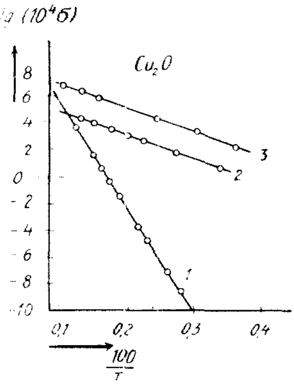


Fig. 1. Variația conductivității specifice a Cu_2O în funcție de temperatură $\left[\lg \sigma\, 10^4 = f\left(\frac{100}{T}\right)\right]$

1. Cu_2O pur.
2. Cu surplus mediocru de oxigen.
3. Cu mare surplus de oxigen.

Bolometrele fiind întrebuințate într-o zonă îngustă de temperatură, se poate utiliza cu bună aproximație dependența liniară

$$\Delta R = \alpha \Delta T \cdot R_1 \tag{21}$$

unde α este coeficientul termic al rezistenței, pozitiv la metale și negativ la semiconductori

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_1 \cdot \Delta T} = \frac{s_\alpha}{R_1} \tag{22}$$

4. Sensibilitatea de circuit.

$$s_c = \frac{\Delta U}{\Delta R} \tag{23}$$

Variația ΔR a rezistenței bolometrului nu se poate măsura pe cale directă. Dacă legăm un bolometru căruia îi variază rezistența la o sursă de tensiune U, intensitatea circuitului va varia cu valoarea

$$\Delta I = \frac{U}{R_0} - \frac{U}{R_0 + \Delta R} \approx \frac{U \cdot \Delta R}{R^2} = I\alpha\Delta T \tag{24}$$

La o variație de temperatură de un grad, procentul de variație a intensității ar fi de ordinul unei miimi, ceea ce nu se poate aproxima nici cu instrumente foarte sensibile. De aceea bolometrele se introduc întotdeauna folosind montaje în punte. Datorită măsurătorilor bolometrice s-a perfecționat metoda măsurării deviațiilor, contrar cu metoda obișnuită de aducere la zero.

Încă de la începutul secolului nostru, diferiți cercetători au căutat montajul în punte cel mai potrivit pentru obținerea unei sensibilități cît se poate de mari. Fig. 2 indică montajul cel mai utilizat.

Sursa de tensiune U produce la bolometrul de rezistență R_1 căderea de tensiune U_1

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{25}$$

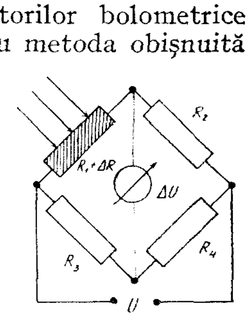


Fig. 2. Circuitul obișnuit de bolometru.

În urma iradierii, rezistenţa bolometrului va varia cu ΔR şi variaţia tensiunii pe diagonală va avea valoarea

$$\Delta U = U \frac{R_2 \Delta R}{(R_1 + R_2)^2} \tag{26}$$

sensibilitatea de circuit :

$$s_c = \frac{\Delta U}{\Delta R} = U \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \tag{27}$$

Însă

$$\Delta R = R_1 \, \alpha \Delta T$$

şi

$$\frac{\Delta U}{\Delta T} = U \alpha \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \tag{28}$$

De cele mai multe ori se foloseşte montajul simetric unde $R_1 = R_2$. În acest caz $\Delta U = \frac{1}{4} U \cdot \alpha \Delta T$.

La o altă alegere, de exemplu $R_2 = 2R_1$ sensibilitatea va varia. Astfel coeficientul $\frac{1}{4} = 25\%$ devine $\frac{2}{9} = 22{,}5\%$, diferenţa fiind de 10%.

Este interesant de amintit că aproape toţi autorii care au lucrat în această direcţie au primit rezultate diferite pentru valoarea maximă a sensibilităţii, pentru că au pornit de la premise diferite.

Este clar că soluţia cea mai sensibilă ar fi dată de o punte total simetrică, punte a cărei braţe să aibă aceeaşi rezistenţă, ceea ce practic nu este posibil. Dacă rezistenţa bolometrelor metalice este mică, bolometrele cu semiconductori au o rezistenţă de ordinul megaohmilor. În plus şi rezistenţa sursei şi a galvanometrului variază între anumite limite. Metoda ar putea fi aplicată numai în cazul concret în care cunoaştem cîteva rezistenţe, determinîndu-le pe celelalte prin calcul. Sensibilitatea galvanometrului este

$$s_g = \frac{\Delta \varphi}{\Delta U} \tag{29}$$

În cazul bolometrelor cu semiconductori se lucrează de obicei cu surse de frecvenţă acustică, puntea fiind legată la instrumentul de măsură, prin intermediul unui amplificator. Schema de conexiune este dată în fig. 3. Avantajele întrebuinţării curentului alternativ constau în mărimea sensibilităţii şi micşorarea pragului de sensibilitate.

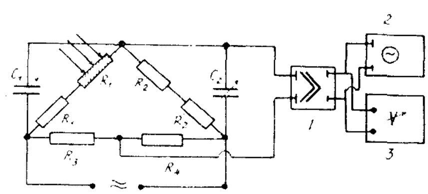


Fig. 3. Circuitul obişnuit de la un bolometru cu mare rezistenţă.
1. Amplificator.
2. Oscilograf catodic.
3. Voltmeru catodic.

Compararea sensibilităţii bolometrelor se face de obicei cu următoarea formulă empirică :

$$Z \propto \alpha \frac{U}{A} \tag{30}$$

iar după socotelile noastre:

$$Z \equiv \frac{\Delta\varphi}{W_0} = \frac{\Delta T\,\Delta R\,\Delta U\,\Delta\varphi}{W_0\,\Delta T\,\Delta R\,\Delta U} = S_R \cdot S_\alpha \cdot S_c \cdot S_g \qquad (31)$$

luate în considerare proprietățile optice și termice ale materialului bolometric. Din formulă, pe baza tabelelor date în text, rezultă că sensibilitatea bolometrelor cu semiconductori este mai mare ca a celor metalice.

Pragul sensibilității este determinat de mai mulți factori. Astfel variații mici de tensiune, de radiație sau chiar fluctuații termice schimbă sensibilitatea. În cazul bolometrelor cu semiconductor influențează sensibilitatea și tensiunile termoelectrice mari. Pragul de $10^{-10}W$ este luat considerînd toate fluctuațiile amintite. Cunoscînd această limită, se vede ușor că prin metode bolometrice se pot măsura ușor radiația emisă de liniile spectrale din domeniul de infraroșu, acestea fiind de ordinul 10^{-7} Watt. Bolometrele pot măsura variații de temperatură de 10^{-7} grade.

5. Concluzii.

1. La dimensionarea bolometrelor trebuie să se țină cont de criterii optice, termice și electrice.

2. Materialul bolometric ales trebuie să aibă următoarele proprietăți:

a) coeficientul de reflexie mic;

b) coeficientul de absorbție în regiunea de infraroșu cît se poate de mic;

c) conductibilitatea electrică și termică mică;

d) grosimea bolometrului astfel aleasă ca radiația absorbită să constituie 50% din cea incidentă.

3. Bolometrele cu semiconductori au următoarele avantaje față de cele metalice:

a) au în regiunea vizibilă coeficientul de reflexie de 2,5 ori mai mic;

b) coeficientul lor de absorbție este de 3 ori mai mic;

c) coeficientul termic este de 10 ori mai mare.

4. Dezavantajul bolometrelor cu semiconductori constă în:

a) tensiunea termoelectrică mare;

b) capacitate termică mare;

c) nivelul de zgomot mare.

Remarcăm o atenuare a dezavantajelor prin întrebuințarea curentului alternativ.

5. Bolometrele nu sînt detectoare independente de lungimea de undă a radiației, pentru că proprietățile optice ale materialului bolometric sînt condiționate de lungimea de undă. Prin urmare, bolometrul trebuie „acordat" cu sursa de radiație pentru a obține sensibilitatea maximă. De aceea prezintă o deosebită importanță studiul proprietăților optice a semiconductorilor, studiu abordat recent.

BIBLIOGRAFIE

1. A. F. Ioffe, *Polupropodnikie termoelementi*, Moskva-Leningrad, 1960, Izd. Ak. Nauk SSSR, 188 p.
2. Warburg, Leithauser, Johansen, *Über den Vakuumbolometer*, „Annalen der Physik", 4, 1907, 24, p. 25.
3. Georg Bauer, *Zur Empfindlichkeit eines Hochohmbolometers*. „Physikalische Zeitschrift", 43 (1943), nr. 17, p. 301.
4. Georg Bauer, *Ein Halbleiter-Hochohmbolometer*. „Physikalische Zeitschrift", 44 (1943), nr. 3/4, p. 53.
5. I. D. Konozenko, *Poluporovodnikovie bolometri*, „Uspehi fiziceskih nauk", 1955, nr. 56, p. 283.
6. Karl Baedeker, *Metallische Leitung*. „Annalen der Physik", (1907), nr. 22, p. 749.
7. A. F. Ioffe, *Physik der Halbleiter*, Berlin, 1958, Ak. Verlag., 400 p.
8. — *Fotoelectriceskie i opticeskie iavlevnie v poluprovodnikah*. Kiev, 1959, Izd. Ak. Nauk Ukr. SSSR, 404 p.
9. T.S. Moss, *Optical properties of semi-conductors*, London, 1959, Butterworth Scientific Publications, 304 p.
10. A. V. Sokolov, *Opticeskie svoistva metallov*, Moskva, 1961, Gos. izd. fiz. -mat. lit. 464 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ БОЛОМЕТРОВ

(Резюме)

Данная статья производит сравнительное изучение металлических и полупроводниковых болометров устанавливая, что, вообще, их чувствительность зависит от оптических, термических и электрических свойств болометрического материала и от правильного определения размеров болометра.

Чувствительность болометра определена некоторыми факторами, а именно: чувствительностью излучения, цепью измерительного прибора, как и тепловым коэффициентом сопротивления.

Данная работа изучает упомянутые факторы показывая, что не учитанная до настоящего времени чувствительность излучения играет решающую роль. Также, для получения максимальной чувствительности, следует выбрать таким образом толщину болометрического слоя, чтобы поглощённая энергия составляла 50 % из инцидентной энергии.

Преимущества употребления полупроводников в качестве болометрического материала следующие: малый коэффициент отражения, большое удельное сопротивление и большой тепловой коэффициент.

На основе этих факторов, при правильном определении размеров, можно достичь чувствительности, превосходящей чувствительность металлических болометров.

Недостатки полупроводниковых болометров состоят в большом термоэлектрическом напряжении и в большом уровне шума, который может быть затушен, употребляя мостиковую схему переменного тока.

Затронутое лишь в последние три года изучение оптических свойств полупроводников закончится, конечно, значительными результатами.

ETUDE DE LA MESURE DES RADIATIONS À L'AIDE DE BOLOMÈTRES MÉTALLIQUES ET À SEMI-CONDUCTEURS

(Résumé)

Le présent article étudie comparativement les bolomètres métalliques et à semi-conducteurs et démontre que, en général, leur sensibilité dépend des propriétés optiques, thermiques et électriques du matériel bolométrique et de la justesse des dimensions du bolomètre.

La sensibilité du bolomètre est déterminée par plusieurs facteurs, à savoir : la sensibilité de radiation, de circuit, de l'instrument de mesure, ainsi que du coefficient thermique de la résistance.

L'auteur de l'article étudie successivement les facteurs cités, montrant que la sensibilité de radiation, qui n'a pas été prise en considération jusqu'ici, joue un rôle décisif. De même l'épaisseur de la couche bolométrique, pour obtenir une sensibilité maxima, doit être telle que l'énergie absorbée constitue 50% de l'énergie incidente.

Les avantages de l'emploi de semi-conducteurs comme matériel bolométrique sont les suivants : faible coefficient de réflexion, grande résistance spécifique et haut coefficient thermique de la résistance. Grâce à des dimensions justes établies d'après ces facteurs, on peut atteindre une sensibilité supérieure à celle des bolomètres métalliques.

Les désavantages des bolomètres à semi-conducteurs proviennent : de la grande tension thermoélectrique et du bruit considérable, lequel peut d'ailleurs être atténué en employant le montage en pont de courant alternatif.

L'étude des propriétés optiques des semi-conducteurs, abordée à peine depuis les trois dernières années, ne manquera pas de donner des résultats importants.

ASUPRA ECUAŢIEI DE DISPERSIE A UNUI FLUID VÎSCOS, CU CONDUCTIVITATE ELECTRICĂ FINITĂ, ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE UNIFORMĂ

de

MIRCEA VASIU

Lucrare comunicată la Colocviul de mecanica fluidelor ţinut la Braşov în 23. X. 1961 — 28.X. 1961

1. Introducere.

În lucrarea de faţă ne propunem să stabilim ecuaţia de dispersie pentru un fluid vîscos, compresibil, total ionizat, ce este supus la acţiunea unui cîmp magnetic uniform şi la acţiunea propriului său cîmp gravitaţional. Fluidul se consideră ca un mediu omogen şi infinit, cu o conductivitate electrică finită, mediul respectiv fiind animat în acelaşi timp de o mişcare de rotaţie uniformă.

Problema stabilirii ecuaţiei de dispersie are o deosebită importanţă pentru studiul criteriului de instabilitate magnetogravitaţională a unui mediu fluid conductor.
Astfel de probleme au fost studiate de mai mulţi autori, dintre care menţionăm pe: Chandrasekhar şi Fermi [1], Chandrasekhar [2], Severnîi [3], Pacholczyk şi Stodólkiewicz [4], [5].

Pacholczyk şi Stodólkiewicz, pe a căror lucrare ne vom baza, s-au ocupat de stabilirea ecuaţiei de dispersie şi de criteriul de instabilitate magnetogravitaţională în cazul unui mediu fluid infinit şi omogen, în mişcare de rotaţie uniformă.

Aceşti autori au studiat două cazuri particulare: 1. fluidul nevîscos cu conductivitate electrică finită şi 2. fluidul vîscos cu conductivitate electrică infinită.

Am considerat util să ne ocupăm de aceeaşi problemă, în cazul unui fluid vîscos compresibil, total ionizat, cu conductivitate electrică finită şi prin aceasta, să dăm o interpretare unitară a rezultatelor obţinute de autorii citaţi şi totodată să generalizăm aceste rezultate.

În această lucrare, mediul fluid îl considerăm în mişcare de rotaţie uniformă, neglijînd curentul de deplasare electrică (vezi Anexa) procesele de conductibibilitate termică şi de transfer de radiaţie din interiorul fluidului. Variaţiile de temperatură din interiorul mediului le considerăm atît de mici, încît densitatea, respectiv vîscozitatea sa nu depind de temperatură. În acest caz vom considera mediul respectiv ca fiind izotermic.

CAPITOLUL I.

2. Ecuaţiile fundamentale.

Atunci ecuaţiile magnetohidrodinamice, raportate la un sistem de referinţă ce se roteşte solidar cu fluidul, care guvernează fenomenele fizice din interiorul mediului, în rotaţie uniformă, cu proprietăţile fizice enunţate în introducere, sînt de forma [4]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\vec{H}\times\vec{H} + \nu\Delta\vec{v} + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) + \vec{a}_c + \operatorname{grad}\Psi; \quad (1)$$

$$\mu = 1.$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{H}) + \nu_m\Delta\vec{H}; \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}; \ \sigma \neq +\infty \quad (2)$$

cu condiţia:

$$div\vec{H} = 0 \quad (3)$$

Ecuaţia continuităţii, pentru fluidul considerat, este de forma:

$$\frac{\partial\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (4)$$

şi respectiv, ecuaţia lui Poisson:

$$\Delta\Psi + 4\pi G\rho = 0 \quad (5)$$

Legătura dintre presiune şi densitate este dată de relaţia:

$$p = V_i^2\rho; \ V_i^2 = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (6)$$

unde în ecuaţiile (1) — (6) $\vec{v}$ reprezintă vectorul viteză liniară de rotaţie al unui element de fluid; ρ — densitatea fluidului; p — presiunea sa; μ — permeabilitatea magnetică a fluidului; $\vec{H}$ — vectorul intensitate cîmp magnetic; ν — coeficientul de vîscozitate cinematică a mediului respectiv; $\vec{a}_c = -2\vec{v}\times\vec{\Omega}$ acceleraţia lui Coriolis; Ψ — potenţialul gravitaţional; ν_m — coeficientul de vîscozitate magnetică; σ — coeficientul de conductivitate electrică al fluidului, Δ — operatorul lui Laplace; G — constanta gravitaţională; V_i — viteza sunetului în cazul proceselor de tip izotermic c — viteza luminii în vid. Deoarece sistemul ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale (1 — (2) este neliniar, pentru a-l liniariza, vom utiliza metoda micilor perturbaţii, limitîndu-ne la cazul aproximaţiei de ordinul întîi.

Considerăm că starea staţionară a mediului respectiv este definită de mărimile constante $\vec{H}_0$, $\vec{v}_0$, p_0, ρ_0 şi Ψ_0. Admitem apoi că, în urma mişcării plasmei, starea iniţială este modificată prin suprapunerea unor mici perturbaţii, caracterizate de mărimile $\vec{h}$, $\vec{u}$, $\delta p, \delta\rho$ şi $\delta\Psi$, astfel că în calcule vom neglija patratele şi produsele micilor perturbaţii. Vom avea satisfăcute următoarele expresii [4]:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + h \tag{7}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} = \vec{u}\,;\; v_0 = 0 \tag{8}$$

$$p = p_0 + \delta p \tag{9}$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \tag{10}$$

$$\Psi = \Psi_0 + \delta\Psi \tag{11}$$

Înlocuind expresiile (7) — (11) în ecuaţiile (1) — (6), obţinem următorul sistem de ecuaţii diferenţiale liniare, cu derivate parţiale:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{dt} = -\operatorname{grad}(\delta p) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{h}\times\vec{H}_0 + 2\rho_0\vec{u}\times\vec{\Omega} + \rho_0\operatorname{grad}(\delta\Psi) + \nu\rho_0\Delta\vec{u} + \frac{\nu\rho_0}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} \tag{12}$$

unde $\vec{\Omega}$ este vectorul viteză unghiulară al unei particule de fluid, în mişcare de rotaţie uniformă,

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = (\vec{H}_0\cdot\operatorname{grad})\vec{u} - \vec{H}_0\operatorname{div}\vec{u} + \nu_m\Delta\vec{h} \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\vec{h} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{15}$$

$$\Delta(\delta\psi) = -4\pi G(\delta\rho) \tag{16}$$

$$\delta p = V_i^2\,\delta\rho \tag{17}$$

Vom introduce sistemul cartezian de axe de coordonate $Oxyz$ şi considerăm că vectorul intensitate cîmp magnetic în stare staţionară $\vec{H}_0$ are componentele: $H_{0x} = 0$; H_{0z} şi H_{0y}. Mărimile fizice perturbatoare $\vec{h}$, $\vec{u}$, $\delta\rho$ şi $\delta\Psi$ le considerăm funcţii de timp şi de coordonata z:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{h}(t, z)\\ \vec{u} &= \vec{u}(t, z)\\ \delta\rho &= \delta\rho(t, z)\\ \delta\Psi &= \delta\Psi(t, z) \end{aligned} \tag{18}$$

În acest caz ecuaţiile (12) — (16), ţinînd seama de (17), devine :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h_x}{\partial z} - 2u_y\Omega_z + 2u_z\Omega_y - \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h_y}{\partial z} - 2u_z\Omega_x + 2u_x\Omega_z - \nu\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h_y}{\partial z} - 2u_x\Omega_y + 2u_y\Omega_x - \frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{V_i^2}{\rho_0}\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial z} - \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_x}{\partial t} - H_{0z}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \nu_m\frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} = 0\\
&\frac{\partial h_y}{\partial t} - H_{0z}\frac{\partial u_y}{\partial z} + H_{0y}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \nu_m\frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} = 0\\
&h_z = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Faptul că $h_z=0$ se poate demonstra în felul următor : din ecuaţia (13) vom obţine pentru componenta h_z ecuaţia diferenţială scalară :

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} - H_{0z}\frac{\partial u_z}{\partial z} + H_{0z}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \nu_m\frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} = 0 \tag{21}$$

şi conform ecuaţiei (3), ţinînd seama de faptul că $\vec{h} = \vec{h}(t, z)$, rezultă :

$$\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0 \text{ şi respectiv } \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} = 0 \tag{22}$$

astfel că ecuaţia (21) se reduce la condiţia :

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = 0$$

adică componenta h_z a cîmpului magnetic perturbator nu depinde de coordonata z şi de timp, fiind o constantă care se ia egală cu zero.

Ecuaţia continuităţii (15) şi ecuaţia lui Poisson (16) devine :

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

şi

$$\frac{\partial^2(\delta\psi)}{\partial z^2} + 4\pi G\delta\rho = 0 \tag{24}$$

CAPITOLUL II.

3. Cazul perturbaţiilor sub forma undelor periodice.

Să considerăm soluţiile sistemului de ecuaţii (19), (20), (23) şi (24) de forma unor unde plane monocromatice :

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{u}_0 e^{i(\omega t + k\cdot z)}\\
\vec{h} &= \vec{h}_0 e^{i(\omega t + k\cdot z)}\\
\delta\rho &= (\delta\rho)_0 e^{i(\omega t + k\cdot z)}\\
\delta\Psi &= (\delta\Psi)_0 e^{i(\omega t + k\cdot z)}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Aceasta înseamnă că mărimile perturbatoare $\vec{u}$, $\vec{h}$, $\delta\rho$ şi $\delta\Psi$ se propagă sub forma unor unde plane monocromatice cu pulsaţia ω de-a lungul axei Oz.

În (25) am notat prin $\vec{u}_0$, $\vec{h}_0$, $(\delta\rho)_0$, $(\delta\Psi)_0$ amplitudinile undelor plane corespunzătoare perturbaţiilor respective, iar prin $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — numărul de undă.

Înlocuind soluţiile (25) în sistemul de ecuaţii (19), (20), (23) şi (24), vom obţine următorul sistem de ecuaţii algebrice pentru amplitudinile undelor mărimilor perturbatoare :

$$\begin{aligned}
&\text{a)}.\ i\omega u_{0x} - \frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0} ikh_{0x} - 2u_{0y}\Omega_z + 2u_{0z}\Omega_y + \nu k^2 u_{0x} = 0\\
&\text{b)}.\ i\omega u_{0y} - \frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0} ikh_{0y} - 2u_{0z}\Omega_x + 2u_{0x}\Omega_z + \nu k^2 u_{0y} = 0\\
&\text{c)}.\ i\omega u_{0z} + \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} ikh_{0y} - 2u_{0x}\Omega_y + 2u_{0y}\Omega_x + \frac{4}{3}\nu k^2 u_{0z} + \frac{V_i^2}{\rho_0} ik(\delta\rho)_0 - ik(\delta\Psi)_0 = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&\text{a)}.\ i\omega h_{0x} - H_{0z}\, iku_{0x} + \nu_m k^2 h_{0x} = 0\\
&\text{b)}.\ i\omega h_{0y} - H_{0z}\, iku_{0y} + H_{0y}\, iku_{0z} + \nu_m k^2 h_{0y} = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\omega(\delta\rho)_0 + \rho_0 k u_{0z} = 0 \tag{28}$$

şi

$$-k^2(\delta\Psi)_0 + 4\pi G(\delta\rho)_0 = 0 \tag{29}$$

Din ecuaţiile (28) şi (29) obţinem :

$$(\delta\rho)_0 = -\frac{k}{\omega}\rho_0 u_{0z} \tag{30}$$

$$(\delta\Psi)_0 = 4\pi G\frac{(\delta\rho)_0}{k^2} = -\frac{4\pi G}{k\omega}\rho_0 u_{0z} \tag{31}$$

iar din (26) :

$$u_{0x} = \frac{\frac{kH_{0z}}{4\pi\rho_0} ih_{0x} + 2(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{i\omega + \nu k^2} \tag{32}$$

sau

$$u_{0x} = \frac{kH_{0z}}{4\pi\rho_0\omega}\left[\frac{h_{0x}\omega + \frac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \frac{\nu}{i}k^2}\right] \tag{32'}$$

Vom introduce notaţiile

$$\begin{aligned}
&\Omega_A = \frac{kH_{0z}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\ ; \qquad \Omega_B = \frac{kH_{0y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\\
&\Omega_L^2 = \nu k^2\ ; \quad \Omega_R^2 = \nu_m k^2\\
&\Omega_J^2 = V_i^2 - 4k^2\pi G\rho_0
\end{aligned} \tag{33}$$

Să substituim formulele (30), (31) și (32') în ecuațiile (26_b), (26_c) (27_a) și (27_b). Obținem :

$$i\omega u_{0y} - i\frac{H_{0z}k}{\sqrt{4\pi\rho_0}}(4\pi\rho_0)^{-1/2}h_{0y} - 2u_{0z}\Omega_x + 2\frac{H_{0z}k}{\sqrt{4\pi\rho_0}\cdot\omega}(4\pi\rho_0)^{-1/2}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{h_{0x}\omega + \dfrac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \dfrac{\nu}{i}k^2}\right]\Omega_z + \nu k^2 u_{0y} = 0 \tag{34}$$

$$i\omega u_{0z} - \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0}ikh_{0y} - 2\frac{H_{0z}k}{4\pi\rho_0\cdot\omega}\left[\frac{h_{0x}\omega + \dfrac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \dfrac{\nu}{i}k^2}\right]\Omega_y + 2u_{0y}\Omega_x +$$
$$+\frac{4}{3}\nu k^2 u_{0z} - i\frac{V_i^2}{\omega}k^2 u_{0z} + i\frac{4\pi G}{\omega}\rho_0 u_{0z} = 0 \tag{35}$$

$$i\omega h_{0x} - i\frac{H_{0z}^2 k^2}{4\pi\rho_0\cdot\omega}\left[\frac{h_{0x}\omega + \dfrac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \dfrac{\nu}{i}k^2}\right] + \nu_m k^2 h_{0x} = 0 \tag{36}$$

$$i\omega h_{0y} - iH_{0z}ku_{0y} + iH_{0y}ku_{0z} + \nu_m k^2 h_{0y} = 0 \tag{37}$$

Vom înmulți ecuația (34) cu factorul $-i$, ecuațiile (35) și (36) cu factorul $-i\omega$, ecuația (37) cu factorul i și vom ține seama de notațiile (33). În acest fel sistemul de ecuații algebrice obținut poate fi pus sub forma :

$$\omega u_{0y} - (4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_A h_{0y} - 2i\left\{\Omega_A\frac{(4\pi\rho_0)^{1/2}}{\omega}\left[\frac{h_{0x}\omega}{\omega + \dfrac{\Omega_L^2}{i}} + \frac{\dfrac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \dfrac{\Omega_L^2}{i}}\right]\Omega_z - \right.$$
$$\left. - u_{0z}\Omega_x\right\} - i\Omega_L^2 u_{0y} = 0 \tag{38}$$

$$\omega^2 u_{0z} + \omega(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_B h_{0y} - \frac{4}{3}i\omega\Omega_L^2 u_{0z} - 2i\omega\left\{u_{0y}\Omega_x - \Omega_A\frac{(4\pi\rho_0)^{-1/2}}{\omega}\left[\frac{h_{0x}\omega}{\omega + \dfrac{\Omega_L^2}{i}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\dfrac{8\pi\rho_0\omega}{ikH_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \dfrac{\Omega_L^2}{i}}\right]\Omega_y\right\} - \Omega_J^2 u_{0z} = 0 \tag{39}$$

$$(\omega^2 - i\omega\Omega_R^2)h_{0x} - \Omega_A^2\left[\frac{h_{0x}\,\omega}{\omega + \frac{\Omega_L^2}{i}} + \frac{\frac{8\pi\rho_0\omega}{i\,k\,H_{0z}}(u_{0y}\Omega_z - u_{0z}\Omega_y)}{\omega + \frac{\Omega_L^2}{i}}\right] = 0 \quad (40)$$

$$(4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_A\,u_{0y} - (4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_B\,u_{0z} + (i\Omega_R^2 - \omega)h_{0y} = 0 \quad (41)$$

Să ordonăm în ecuațiile (38) — (41) termenii în u_{0y}, u_{0z}, h_{0x} și h_{0y} în mod convenabil :

$$\left(\omega - i\Omega_L^2 - \frac{4}{K^2}\,\Omega_Z^2\right)u_{0y} + \left(\frac{4}{K^2}\,\Omega_y\,\Omega_z + 2i\,\Omega_x\right)u_{0z} - \frac{2i\,(4\pi\rho_0)^{-1/2}\,\Omega_A\Omega_z}{K^2}\,h_{0x} -$$
$$- (4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_A\,h_{0y} = 0 \quad (42)$$

$$-2\omega\left(\Omega_x i - \frac{2}{K^2}\,\Omega_y\Omega_z\right)u_{0y} + \left(\omega^2 - \Omega_J^2 - \frac{4}{3}\,i\omega\Omega_L^2 - 4\,\frac{\omega}{K^2}\,\Omega_y^2\right)u_{0z} +$$
$$+ \frac{2i\omega}{K^2}\,\Omega_A\,\Omega_y\,(4\pi\rho_0)^{1/2}\,h_{0x} + \omega(4\pi\rho_0)^{-1/2}\,\Omega_B\,h_{0y} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{2i\omega}{K^2}(4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_A\Omega_z u_{oy} - \frac{2i\omega}{K^2}(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A\Omega_y u_{oz} + \left(\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \frac{\omega}{K^2}\Omega_A^2\right)h_{ox} = 0 \quad (44)$$

și

$$(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A u_{oy} - (4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_B u_{oz} + (i\Omega_R^2 - \omega)h_{oy} = 0 \quad (45)$$

unde am pus

$$K^2 = \omega + \frac{\Omega_L^2}{i} \quad (46)$$

Sistemul de ecuații (42)—(45) generalizează ecuațiile obținute de către Pacholczyk și Stodólkiewicz.

4. Ecuația de dispersie pentru cazul particular: $\Omega_y = \Omega_z = 0$; $\Omega_x = \Omega$.

Vom presupune că vectorul viteză unghiulară $\vec{\Omega}$ este perpendicular pe planul yOz și rotația mediului fluid se face în jurul axei Ox, astfel că :

$$\Omega_y = \Omega_z = 0 \quad (47)$$

și

$$\Omega_x = \Omega \quad (48)$$

Atunci sistemul de ecuații (42)—(45) devine :

$$(\omega - i\Omega_L^2)u_{oy} + 2i\Omega u_{oz} - (4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_A h_{oy} = 0 \quad (49)$$

$$-2\omega i\Omega u_{oy} + \left(\omega^2 - \Omega_J^2 - \frac{4}{3}\,i\omega\Omega_L^2\right)u_{oz} + \omega(4\pi\rho_0)^{1/2}\,\Omega_B h_{oy} = 0 \quad (50)$$

$$\left(\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \frac{\omega}{K^2}\,\Omega_A^2\right)h_{ox} = 0 \quad (51)$$

și

$$(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A u_{oy} - (4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_B u_{oz} + (i\Omega_R^2 - \omega)h_{oy} = 0 \quad (52)$$

În cazul particular considerat, sistemul de ecuaţii (49)—(52) admite soluţii nebanale, dacă determinantul coeficienţilor mărimilor u_{oy}, u_{oz}, h_{ox} şi h_{oy} este nul, adică :

$$\begin{vmatrix} \omega - i\Omega_L^2 & 2i\Omega & 0 & -(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_A \\ -2i\omega\Omega & \omega^2 - \Omega_J^2 - \frac{4}{3} i\omega\Omega_L^2 & 0 & (4\pi\rho_0)^{-1/2}\omega\Omega_B \\ 0 & 0 & \omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \frac{\omega}{K^2}\Omega_A^2 & 0 \\ (4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A & -(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_B & 0 & i\Omega_R^2 - \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (53)$$

de unde rezultă :

$$\left(\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \frac{\omega}{K^2}\Omega_A^2\right)\begin{vmatrix} \omega - i\Omega_L^2 & 2i\Omega & -(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_A \\ -2i\omega\Omega & \omega^2 - \Omega_J^2 - \frac{4}{3} i\omega\Omega_L^2 & \omega(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_B \\ (4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A & -(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_B & i\Omega_R^2 - \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (54)$$

respectiv :

$$\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \frac{\omega}{K^2}\Omega_A^2 = 0 \qquad (55)$$

şi

$$\begin{vmatrix} \omega - i\Omega_L^2 & 2i\Omega & -(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_A \\ -2i\omega\Omega & \omega^2 - \Omega_J^2 - \frac{4}{3} i\omega\Omega_L^2 & \omega(4\pi\rho_0)^{-1/2}\Omega_B \\ (4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_A & -(4\pi\rho_0)^{1/2}\Omega_B & i\Omega_R^2 - \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (56)$$

Dezvoltînd determinantul, obţinem următoarea ecuaţie algebrică :

$$\begin{aligned} \omega^4 - i\omega^3\left(\Omega_R^2 + \frac{7}{3}\Omega_L^2\right) - \omega^2\left(\Omega_A^2 + \Omega_J^2 + \Omega_B^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^2 + \frac{7}{3}\Omega_L^2\,\Omega_R\right) + \\ + i\omega\left(\Omega_R^2\,\Omega_J^2 + 4\Omega_R^2\,\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^2\,\Omega_R + \frac{4}{3}\Omega_L^2\,\Omega_A^2 + \Omega_L^2\,\Omega_J^2 + \Omega_L^2\,\Omega_B^2\right) + \qquad (57) \\ + \Omega_J^2\left(\Omega_A^2 + \Omega_R^2\,\Omega_L^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Ţinînd seama de (46) ecuaţia (55) se mai poate scrie şi sub forma :

$$\omega^2 - i(\Omega_R^2 + \Omega_L^2)\,\omega - (\Omega_R^2\,\Omega_L^2 + \Omega_A^2) = 0 \qquad (58)$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$\zeta = i\omega \qquad (59)$$

ecuația (57) devine:

$$\zeta^4 + \zeta^3\left(\Omega_R^2 + \frac{7}{3}\Omega_L^2\right) + \zeta^2\left[\Omega_A^2 + \Omega_J^2 + \Omega_B^2 + 4\Omega^2 + \Omega_L^2\left(\frac{4}{3}\Omega_L^2 + \frac{7}{3}\Omega_R^2\right)\right] +$$
$$+ \zeta\left[\Omega_R^2(\Omega_J^2 + 4\Omega^2) + \Omega_L^2\left(\frac{4}{3}\Omega_L^2\,\Omega_R^2 + \frac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_J^2 + \Omega_B^2\right)\right] + \Omega_J^2\Omega_{A'}^2 = 0 \qquad (60)$$

unde

$$\Omega_{A'}^2 = \Omega_A^2 + \Omega_R^2\,\Omega_L^2 \qquad (61)$$

Ecuația (60) constituie ecuația de dispersie căutată de noi și generalizează ecuația de dispersie obținută de către Pacholczyk și Stodółkiewicz pentru anumite cazuri particulare.

5. Cazuri particulare.

În continuare ne vom ocupa de cele două cazuri particulare studiate de către Pacholczyk și Stodółkiewicz în lucrarea citată. Într-adevăr:

1°. Cazul fluidului vîscos ($\nu \neq 0$; $\Omega_L^2 \neq 0$), cu conductivitate electrică infinit de mare ($\sigma = +\infty$; $\Omega_R^2 = 0$), în mișcare de rotație uniformă. În acest caz ecuațiile (58) și (60) devin:

$$\omega^2 - i\omega\,\Omega_L^2 - \Omega_A^2 = 0 \qquad (62)$$

și

$$\zeta^4 + \frac{7}{3}\zeta^3\,\Omega_L^2 + \zeta^2\left(\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^2\right) + \zeta\left(\Omega_l^2\,\Omega_B^2 + \Omega_L^2\Omega_J^2 +\right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\Omega_L^2\Omega_A^2\right) + \Omega_A^2\,\Omega_J^2 = 0 \qquad (63)$$

Regăsim astfel ecuațiile stabilite de Pacholczyk și Stodółkiewicz pentru acest caz particular.

2° Cazul fluidului nevîscos ($\nu = 0$; $\Omega_L^2 = 0$), cu conductivitate electrică finită ($\sigma \neq +\infty$; $\Omega_R^2 \neq 0$), în mișcare de rotație uniformă. În acest caz ecuațiile (58) și (60) devin:

$$\omega^2 - i\omega\Omega_R^2 - \Omega_A^2 = 0 \qquad (64)$$

și

$$\zeta^4 + \zeta^3\Omega_R^2 + \zeta^2(\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2) + \zeta(\Omega_R^2\,\Omega_J^2 + 4\Omega^2\Omega_R^2) + \Omega_A^2\Omega_J^2 = 0 \qquad (65)$$

Se regăsesc astfel ecuațiile stabilite de către acești autori pentru acest caz particular.

Într-o lucrare viitoare ne vom ocupa de problema stabilirii criteriului de instabilitate magnetogravitațională a aceluiași fluid.

Mulțumesc prof. Dr. Mircea Drăganu pentru unele observații și sugestii date în legătură cu această lucrare.

ANEXĂ

ASUPRA ECUAȚIEI DE DISPERSIE A UNUI FLUID VÎSCOS COMPRESIBIL, CU CODUCTIVITATEA ELECTRICĂ INFINITĂ, ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE UNIFORMĂ, ÎN PREZENȚA CURENTULUI DE DEPLASARE ELECTRICĂ.

1. Introducere

În lucrarea de mai sus ne-am ocupat de problema stabilirii ecuației de dispersie pentru un mediu fluid vîscos compresibil, infinit și omogen, total ionizat, cu conductivitate electrică finită, fluidul fiind animat de o mișcare de rotație uniformă. Printre supozițiile simplificatoare făcute a fost și aceea referitoare la neglijarea curentului de deplasare electrică din interiorul mediului considerat.

În cele ce urmează vom stabili ecuația de dispersie pentru un fluid vîscos compresibil, infinit și omogen, total ionizat, cu conductivitate electrică infinită, în prezența curentului de deplasare electrică, fluidul fiind animat de o mișcare de rotație uniformă. Fluidul conductor este supus atît acțiunii unui cîmp magnetic uniform, cît și acțiunii propriului său cîmp gravitațional. Pentru simplificarea problemei vom neglija forța electrică, procesele de conductibilitate termică și de transfer de radiație din interiorul mediului. De asemenea presupunem că vîscozitatea fluidului nu depinde de temperatură și transformările termodinamice ce au loc în interiorul său le considerăm de tip izotermic.

2. Ecuațiile fundamentale liniarizate.

În baza considerațiilor făcute mai sus și dacă admitem că în interiorul mediului conductor apar mici perturbații, sistemul de ecuații magnetohidrodinamice liniarizate este de forma

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}(\delta p) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\operatorname{rot}\vec{h}\times\vec{H}_0 + \frac{1}{\rho_0}(2\rho_0\vec{u}\times\vec{\Omega}) + \operatorname{grad}(\delta\Psi) + \nu\Delta\vec{u} + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \frac{1}{4\pi\rho_0}\frac{\partial\delta\vec{E}}{\partial t}\times\vec{H}_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vec{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{H}_0) \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{h} = 0 \tag{4}$$

$$\delta\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{H}_0 \tag{5}$$

$$\Delta(\delta\Psi) = -4\pi G\delta\rho \tag{6}$$

$$\delta p = V_i^2\,\delta\rho \tag{7}$$

unde $\vec{u}$ reprezintă perturbația vectorului viteză; ρ_0 — densitatea fluidului pentru starea de echilibru; δp — perturbația presiunii din interiorul fluidului; $\delta\Psi$ — perturbația potențialului gravitațional; $\vec{h}$ — perturbația vectorului intensitate cîmp magnetic; $\vec{H}_0$ — vectorul intensitate cîmp magnetic pentru starea de echilibru a fluidului conductor; $\delta\vec{E}$ = perturbația vectorului intensitate cîmp electric; $\delta\rho$ — perturbația densității fluidului, G — constanta gravitațională; $\vec{a}_c = -2\vec{u} \times \vec{\Omega}$ — accelerația Coriolis (în ecuațiile de mai sus am considerat permitivitatea mediului și permeabilitatea sa magnetică ca fiind egale cu unitatea).

Vom introduce sistemul cartesian de axe de coordonate.

Presupunem că vectorul intensitate cîmp magnetic în starea de echilibru $\vec{H}_0$ este o mărime constantă și are componentele

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_0(O, H_y, H_z) \tag{8}$$

iar mărimile vectoriale $\vec{u}$, $\vec{h}$, $\delta\vec{E}$ și $\vec{\Omega}$ au componentele

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}(u_x, u_y, u_z) \\ \vec{h} &= \vec{h}(h_x, h_y, h_z) \\ \delta\vec{E} &= \delta\vec{E}(\delta E_x, \delta E_y, \delta E_z) \\ \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}(\Omega, 0, 0) \end{aligned} \tag{9}$$

unde $\vec{u}$, $\vec{h}$, δE reprezintă perturbațiile corespunzătoare vitezei, cîmpului magnetic și cîmpului electric, iar $\vec{\Omega}$ — vectorul viteză unghiulară.

3. Cazul perturbațiilor sub forma undelor plane monocromatice

Considerăm că perturbațiile se propagă de-a lungul axei Oz sub forma unor unde plane monocromatice:

$$\vec{u} = \vec{u}_0\, e^{i(\omega t + k\cdot z)}; \qquad \delta\rho = (\delta\rho)_0 e^{i(\omega t + k\cdot z)}$$

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{h}_0\, e^{i(\omega t + k\cdot z)} \\ \delta\vec{E} &= (\delta\vec{E})_0\, e^{i(\omega t + k\cdot z)} \\ \delta\Psi &= (\delta\Psi)_0\, e^{i(\omega t + k\cdot z)} \end{aligned} \tag{10}$$

unde $\vec{u}_0$; $\vec{h}_0$; $(\delta\vec{E})_0$; $(\delta\Psi)_0$; $(\delta\rho)_0$ reprezintă amplitudinile perturbaţiilor; ω este pulsaţia undei, iar $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ este numărul de undă. Proiectînd sistemul de ecuaţii diferenţiale vectoriale (1)—(7) pe axele de coordonate cartesiene şi ţinînd seama de (10), rezultă următoarele ecuaţii algebrice:

$$\left.\begin{aligned} & i\omega u_{ox} - \frac{iH_z k}{4\pi\rho_0} h_{ox} + \frac{i\omega}{4\pi\rho_0 c}\left[(\delta E)_{oy}H_z - (\delta E)_{oz}H_y\right] + \nu k^2 u_{ox} = 0 \\ & i\omega u_{oy} - \frac{iH_z k}{4\pi\rho_0} h_{oy} - \frac{i\omega}{4\pi\rho_0 c}(\delta E)_{ox}H_z - 2u_{oz}\Omega_x + \nu k^2 u_{oy} = 0 \\ & i\omega u_{oz} + \frac{iH_y k}{4\pi\rho_0} h_{oy} + \frac{i\omega}{4\pi Bc}(\delta E)_{ox}H_y + 2u_{oy}\Omega_x + \\ & + \frac{V_i^2}{\rho_0} ik(\delta\rho)_0 - ik(\delta\Psi)_0 + \frac{4}{3}\nu k^2 u_{oz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\omega(\delta\rho)_0 + \rho_0 k u_{oz} = 0 \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} & \omega h_{ox} - kH_z u_{ox} = 0 \\ & \omega h_{oy} + kH_y u_{oz} - kH_z u_{oy} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} & (\delta E)_{ox} + \frac{1}{c}(u_{oy}H_z - u_{oz}H_y) = 0 \\ & (\delta E)_{oy} - \frac{1}{c} u_{ox} H_z = 0 \\ & (\delta E)_{oz} + \frac{1}{c} u_{ox}H_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$k^2(\delta\Psi)_0 - 4\pi G(\delta\rho)_0 = 0 \quad (15)$$

unde am considerat $h_z = 0$, (valoare care rezultă din ecuaţiile (3) şi (4)).

Din ecuaţiile (12), (13) şi (15) obţinem mărimile $(\delta\rho)_0$, h_{ox}, h_{oy}, $(\delta\Psi)_0$ pe care înlocuindu-le în ecuaţiile (11) obţinem următorul sistem de ecuaţii algebrice pentru amplitudinile perturbaţiilor referitoare la viteză:

$$\left.\begin{aligned} & -\omega u_{ox} + \frac{H_z^2 k^2}{4\pi\rho_0\omega} u_{ox} - \frac{\omega}{4\pi\rho_0 c^2}(u_{ox}H_z^2 + u_{ox}H_y^2) + i\nu k^2 u_{ox} = 0 \\ & -\omega u_{oy} + \frac{H_z k^2}{4\pi\rho_0\omega}(H_z u_{oy} - H_y u_{oz}) + \frac{\omega}{4\pi\rho_0 c^2}(u_{oz}H_y H_z - u_{oy}H_z^2) - \\ & \qquad - 2iu_{oz}\Omega_x + i\nu k^2 u_{oy} = 0 \\ & -\omega u_{oz} - \frac{H_y k^2}{4\pi\rho_0\omega}(H_z u_{oy} - H_y u_{oz}) - \frac{\omega}{4\pi\rho_0 c^2}(-u_{oy} H_y H_z + u_{oz} H_y^2) + \\ & + 2iu_{oy}\Omega_x + \frac{4}{3} i\nu k^2 u_{oz} + \frac{1}{\omega}(V_i^2 k^2 - 4\pi G\rho_0)u_{oz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Introducînd notațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_A^2 = \frac{k^2H_z^2}{4\pi\rho_0}; \quad \Omega_B^2 = \frac{k^2H_y^2}{4\pi\rho_0} && \text{a.}\\
&\Omega_L^2 = \nu k^2 && \text{b.}\\
&\Omega_C^2 = c^2k^2 && \text{c.}\\
&\Omega_J^2 = V_i^2k^2 - 4\pi G\rho_0 && \text{d.}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

și ordonînd termenii în u_x, u_y și u_z în mod convenabil, rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&(-\omega + \omega^{-1}\Omega_A^2 - \omega\Omega_C^{-2}\Omega_A^2 - \omega\Omega_C^{-2}\Omega_B^2 + i\Omega_L^2)u_{ox} = 0\\
&(-\omega + \omega^{-1}\Omega_A^2 - \omega\Omega_C^{-2}\Omega_A^2 + i\Omega_L^2)u_{oy} - (\omega^{-1}\Omega_A\Omega_B - \omega\Omega_C^{-2}\Omega_A\Omega_B +\\
&\qquad + 2i\Omega_x)u_{oz} = 0\\
&(-\omega^{-1}\Omega_A\Omega_B + \omega\Omega_C^{-2}\Omega_A\Omega_B + 2i\Omega_x)u_{oy} - (\omega - \omega^{-1}\Omega_B^2 +\\
&\qquad + \omega\Omega_C^{-2}\Omega_E^2 - \frac{4}{3}i\Omega_L^2 - \omega^{-1}\Omega_J^2)u_{oz} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Sistemul de ecuații algebrice (18) admite soluții nebanale, dacă determinantul coeficienților mărimilor u_x, u_y și u_z este nul, adică

$$\left[-\omega + \omega^{-1}\Omega_A^2 - \omega\Omega_C^{-2}(\Omega_A^2 + \Omega_B^2) + i\Omega_L^2\right]\begin{vmatrix} \begin{matrix}-\omega + \omega^{-1}\Omega_A^2 -\\ -\omega\Omega_C^{-2}\Omega_A^2 +\\ + i\Omega_L^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\omega^{-1}\Omega_A\Omega_B -\\ -2i\Omega_x +\\ +\omega\Omega_C^{-2}\Omega_A\Omega_B\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\omega^{-1}\Omega_A\Omega_B +\\ + 2i\Omega_x +\\ +\omega\Omega_C^{-2}\Omega_A\Omega_B\end{matrix} & \begin{matrix}-\omega + \omega^{-1}\Omega_B^2 -\\ -\omega\Omega_C^{-2}\Omega_B^2 +\\ +\omega^{-1}\Omega_J^2 + \frac{4}{3}i\Omega_L^2\end{matrix}\end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Introducînd notația

$$\Omega_D^2 = \Omega_C^{-2}(\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_C^2) \tag{20}$$

obținem din (19) ecuațiile:

$$\omega^2 - i\omega\Omega_L^2\Omega_D^{-2} - \Omega_A^2\Omega_D^{-2} = 0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\omega^4\Omega_D^2 - i\omega^3\Omega_L^2\left[\Omega_C^{-2}\left(\frac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_B^2\right) + \frac{7}{3}\right] - \omega^2\left(\Omega_A^2 +\right.\\
&\left.\quad + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^2 + \Omega_C^{-2}\Omega_A^2\Omega_J^2\right) +\\
&\quad + i\omega\Omega_L^2\left(\frac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2\right) + \Omega_A^2\Omega_J^2 = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$\zeta = i\omega \tag{23}$$

ecuațiile (21) și (22) devin

$$\zeta^2 + \zeta\Omega_L^2\Omega_D^{-2} + \Omega_A^2\Omega_D^{-2} = 0 \tag{21'}$$

$$\begin{aligned}\zeta^4 &+ \zeta^3\Omega_L^2\Omega_D^{-2}\left[\Omega_C^{-2}\left(\frac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_B^2\right) + \frac{7}{3}\right] + \zeta^2\Omega_D^{-2}\left(\Omega_A^2 + \right.\\ &\left. + \Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega_L^2 + \Omega_C^{-2}\Omega_A^2\Omega_J^2\right) + \\ &+ \zeta\Omega_L^2\Omega_D^{-2}\left(\frac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_B^2 + \Omega_J^2\right) + \Omega_A^2\Omega_J^2\Omega_D^{-2} = 0\end{aligned} \tag{22'}$$

Ecuația (22′) *constituie ecuația de dispersie căutată de noi* și aceasta generalizează ecuația de dispersie obținută în lucrarea de mai sus.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Chandrasekhar și E. Fermi, „Ap. J.", 1953, **118**, p. 116.
2. S. Chandrasekhar, „Ap. J". 1954, **119**, p. 7.
3. A. Severnîi, „Izv. K.A.O.", 1954, **11**, p. 129.
4. A. Pacholczyk și J. Stodółkiewicz, „Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. math., astr. et phys.", 1959, **VII**, nr. 11, p. 681.
5. A. Pacholczyk și J. Stodółkiewicz, „Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. math. astr. et phys.", 1959, **VII**, No. 7, p. 429.

ОБ УРАВНЕНИИ ДИСПЕРСИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ УДЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В РАВНОМЕРНОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

(Резюме)

В данной работе автор определяет уравнение дисперсии для вязкой сжимаемой проводящей жидкости, полностью ионизированной, имея конечную удельную проводимость, жидкость будучи увлечена равномерным вращательным движением. Рассматриваемая среда считается бесконечной и подвергается действию своего собственного гравитационного поля, а также действию однородного магнитного поля.

Полученное уравнение дисперсии обобщает уравнение дисперсии, полученное предыдущими исследователями.

В „Приложении", автор занимается определением уравнения дисперсии для вязкой сжимаемой проводящей жидкости, полностью ионизированной, имея конечную удельную проводимость, при наличии тока смещения, жидкость будучи увлечена равномерным вращательным движением. Среда, которая считается бесконечной и однородной, подвергается действию однородного магнитного поля, а также действию своего собственного гравитационного поля. Автор получает уравнение дисперсии, более общее чем уравнение, полученное в случае пренебрежения током смещения.

SUR L'ÉQUATION DE DISPERSION D'UN FLUIDE VISQUEUX À CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE FINIE, DANS LE MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME

(Résumé)

L'auteur établit l'équation de dispersion pour un fluide conducteur visqueux compressible, totalement ionisé, à conductivité électrique finie, le fluide étant animé d'un mouvement de rotation uniforme. Le milieu respectif est considéré infini et homogène et est soumis à l'action de son propre champ gravitationnel et à celle d'un champ magnétique uniforme.

L'équation de dispersion ainsi obtenue généralise l'équation de dispersion établie par les chercheurs antérieurs.

Dans l'Annexe, l'auteur s'efforce d'établir l'équation de dispersion pour un fluide conducteur visqueux et compressible, totalement ionisé, à conductivité électrique infinie, en présence du courant de déplacement électrique, le fluide étant animé d'un mouvement de rotation uniforme. Le milieu, considéré infini et homogène, est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme et à l'action de son propre champ gravitationnel. L'auteur obtient ainsi une équation de dispersion plus générale que dans le cas où l'on néglige le courant de déplacement électrique.

VARIAŢIA REZISTIVITĂŢII ELECTRICE LA SOLUŢIILE SOLIDE BINARE PE BAZĂ DE COBALT

de

IULIU POP şi PETRE ŞTEŢIU

Prezenta lucrare este o continuare în studiul proprietăţilor electrice a soluţiilor solide binare pe bază de elemente de tranziţie. Anterior am arătat în [1] şi [2] că rezistivitatea electrică a unui mare număr de aliaje binare în soluţie solidă pe bază de nichel, fier şi paladiu variază liniar în funcţie de concentraţia electronică a metalului aliat, conform relaţiilor :

$$\rho_a = \rho_{Ni} (1 + a_{\mathrm{Ni}}\, n\tau) \tag{1}$$

$$\rho_a = \rho_{Fe} (1 + a_{\mathrm{Fe}}\, n\tau) \tag{2}$$

$$\rho_a = \rho_{Pd} (1 + a_{\mathrm{Pd}}\, n\tau) \tag{3}$$

unde am notat prin ρ_a rezistivitatea aliajului, prin ρ_{Ni}, ρ_{Fe}, ρ_{Pd}, rezistivitatea nichelului, fierului şi paladiului pur, prin n şi τ valenţa respectiv concentraţia atomică a metalului aliat iar prin a_{Ni}, a_{Fe} şi a_{Pd} constante ce depind de natura metalului luat ca bază. Aceste relaţii au fost stabilite pe baza datelor experimentale culese din literatura de specialitate.

În ce priveşte rezistivitatea electrică a aliajelor ce au ca bază alte elemente de tranziţie, presupunem că sînt respectate relaţii analoage.

Noi am măsurat rezistivitatea electrică la aliaje de Co—Cu, la concentraţii mici de cupru, în condiţii normale de temperatură, folosind un montaj potenţiometric de comparare. Din raportul căderilor de tensiune, măsurate cu ajutorul unui potenţiometru pe o rezistenţă etalon şi pe probă, am determinat rezistivitatea electrică a probelor studiate. Schema metodei utilizate de noi este dată în fig. 1.

Pentru eliminarea rezistenţei de contact, al dispozitivului de prindere, cu proba, am utilizat metoda contactului în patru puncte. Eroarea de măsurare nu depăşeşte 1%.

Rezultatele experimentale sînt cuprinse în tabelul nr. 1.

În figura 2 am reprezentat grafic rezistivitatea electrică în funcţie de concentraţia atomică a cuprului aliat.

Din diagramă se constată o dependenţă liniară a rezistivităţii electrice a aliajului în funcţie de concentraţia electronică a cuprului, care poate fi exprimată cantitativ printr-o relaţie analoagă cu (1), (2), (3) şi anume:

$$\rho_a = \rho_{Co} (1 + a_{Co}\, n\, \tau) \qquad (4)$$

unde toate notaţiile au semnificaţia deja cunoscută.

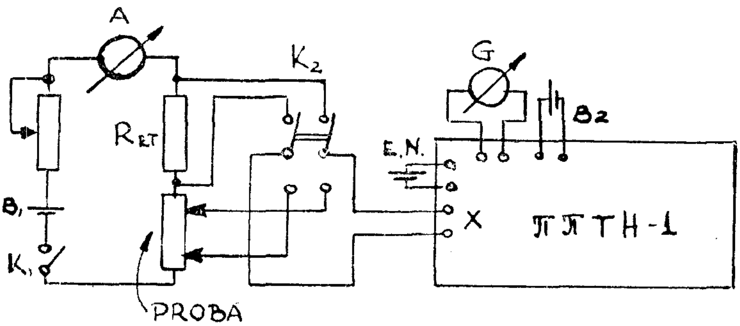


Fig. 1.

La stabilirea relaţiei (4) am mai folosit şi datele existente în literatură referitor la aliajele de Co-W [3].

Luînd în considerare configuraţia electronică a elementelor Ni, Fe şi Pd, în lucrarea [2] am arătat că a_{Ni}, a_{Fe}, a_{Pd} se pot pune sub o formă analitică ce permite stabilirea unei relaţii matematice între aceste mărimi şi anume:

$$a_{Ni} = a\nu_{Ni} \qquad a_{Fe} = a\nu_{Fe} \qquad a_{Pd} = a\nu_{Pd} \qquad (5)$$

unde prin ν_{Ni}, ν_{Fe}, ν_{Pd}, se reprezintă numărul electronilor cu spini necompensaţi din pătura „3d" şi respectiv „4d" ai elementelor de tranziţie mai sus citate, iar a este o constantă numerică cu valoare unică pentru toate aliajele studiate.

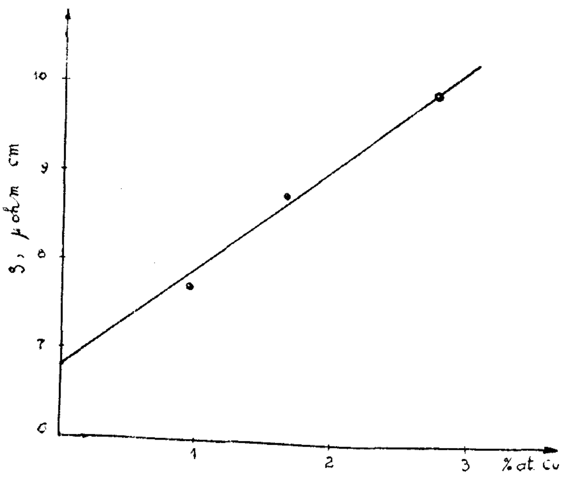


Fig. 2.

Din relaţiile (5) se obţine un şir de rapoarte egale

$$\frac{a_{Fe}}{a_{Ni}} = \frac{\nu_{Fe}}{\nu_{Ni}}; \frac{a_{Ni}}{a_{Pd}} = \frac{\nu_{Ni}}{\nu_{Pd}} \qquad (6)$$

Presupunînd valabilă relaţia (6) şi pentru cobalt am calculat a_{Co} cunoscînd ν_{Co}. Valoarea obţinută pe această cale corespunde bine cu valoarea obţinută din măsurători. Am reuşit astfel să facem o verificare cu date experimentale proprii a relației (6) care acum devine mai completă:

$$\frac{a_{Fe}}{a_{Ni}} = \frac{\nu_{Fe}}{\nu_{Ni}}; \quad \frac{a_{Ni}}{a_{Pd}} = \frac{\nu_{Ni}}{\nu_{Pd}}; \quad \frac{a_{Pd}}{a_{Co}} = \frac{\nu_{Pd}}{\nu_{Co}} \tag{7}$$

Avînd în vedere relația (7), relațiile (1), (2), (3), (4) se pot pune sub o formă mai generală:

$$\rho_a = \rho_b(1 + a\,\nu\,n\,\tau) \tag{8}$$

unde ρ_b desemnează rezistivitatea electrică a metalului de tranziție luat ca bază în aliaj, iar ν numărul electronilor cu spini necompensați din pătura necompletă caracteristică elementelor de tranziție respective.

Tabelul nr. 1

Nr. crt.	Concentr. masică %	Concentr. atomică %	Rezistivit. electrică în $\mu\Omega$.cm.
1	1	0,944	7,68
2	2	1,66	8,7
3	3	2,79	9,83
4	0	0	6,8

În relația (8) rămîne fără un sens fizic stabilit, ca o constantă numerică cu valoare unică pentru toate aliajele studiate, mărimea a. Pentru a lămuri natura acestei mărimi, considerăm că este necesar continuarea studiului aliajelor luînd ca bază metale din alte serii a elementelor de tranziție

BIBLIOGRAFIE

1. Iuliu Pop și Petre Ștețiu, *Variația rezistivității electrice la soluțiile solide binare pe bază de Ni și Fe*. „Studia Universitatis Babeș-Bolyai", Ser. I, Fasc. 1 (1961), pp. 227–231.

2. Iuliu Pop, *Electriceskoe i magnitnoe povedenie dvoinîh splavov na osnove perehodnih metalov* (sub tipar).

3. A. E. Vol, „Stroenie i svoistva dvoinih metalliceskih sistem", II (1962), p. 405.

ИЗМЕНЕНИЕ УДЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТВЕРДЫХ БИНАРНЫХ РАСТВОРОВ НА ОСНОВЕ КОБАЛЬТА

(Резюме)

Работа является продолжением изучения электрических свойств твёрдых бинарных растворов на основе переходных элементов. Авторы измерили удельное электрическое сопротивление сплавов кобальта-меди и нашли более общее соотношение зависимости, вида

$$\rho_{спл} = \rho_0\,(1 + a\nu\tau n)$$

где через $\rho_{спл}$ и ρ_0 обозначены соответствующие удельные электрические сопротивления сплава и чистого металла, взятого в качестве основы; через n и τ обозначены валентность и атомная концентрация элемента легированного с переходным металлом; через ν обозначено число электронов с неспаренными спинами из недостроенной оболочки переходного элемента; a — численная постоянная с единым значением для всех изученных сплавов.

VARIATION DE LA RÉSISTIVITÉ ÉLECTRIQUE AUX SOLUTIONS SOLIDES BINAIRES À BASE DE COBALT

(Résumé)

L'article est une suite de l'étude des propriétés électriques des solutions solides binaires à base d'éléments de transition. Les auteurs ont mesuré la résistivité électrique des alliages de cobalt-cuivre et ont trouvé une relation de dépendance plus générale, de la forme :

$$\rho_a = \rho_b(1 + a\nu n\tau)$$

où l'on a noté par ρ_a et ρ_b la résistivité électrique respective de l'alliage et du métal pur pris pour base ; par n et τ la valence et la concentration atomique de l'élément allié avec le métal de transition ; par ν le nombre d'électrons à spins non compensés de la couche incomplète de l'élément de transition ; enfin par a une constante numérique à valeur unique pour tous les alliages étudiés.

OBSERVAȚII ASUPRA PUNCTELOR NORMALE DE TOPIRE LA ELEMENTELE DE TRANZIȚIE (II)

de

IULIU POP, A. NICULA și O. POP

Elementele de tranziție din punct de vedere al configurației electronice au o caracteristică comună și anume faptul că anumite nivele energetice sînt necomplete și în majoritatea lor spinii electronici sînt necompensați pe aceste nivele. Această caracteristică se reflectă și chiar determină majoritatea însușirilor fizice în aceste elemente, cum sînt : conductibilitatea electrică, proprietățile magnetice și catalitice.

Ormont [1] a căutat să lege temperaturile normale de topire a elementelor de tranziție de configurația lor electronică, punînd în evidență o oarecare regularitate. El a arătat că într-o anumită măsură temperatura de topire pentru cîteva elemente de tranziție crește în funcție de numărul electronilor cu spinii necompensați „3d".

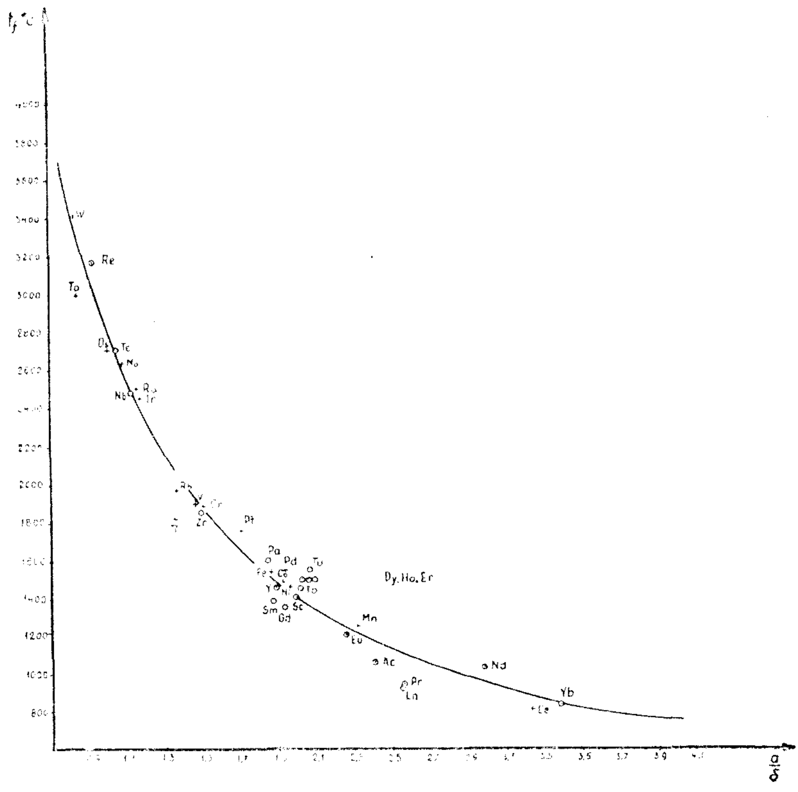
Noi, pornind de la considerentul că temperatura normală de topire poate fi concepută ca o măsură a energiei de interacțiune a atomilor în rețeaua cristalină a metalelor, am examinat la început un număr de 17 elemente de tranziție [2], pentru care am găsit că dacă se reprezintă grafic în funcție de raportul $\frac{a}{\delta}$ dintre constanta rețelei cristaline în faza în care se topește metalul și diametrul păturii electronice necomplete, temperaturile normale de topire se dispun după o hiperbolă echilaterală. Am găsit astfel că produsul dintre temperatura normală de topire T_f și raportul dintre constanta rețelei cristaline și diametrul păturii electronice necomplete $\frac{a}{\delta}$ este constant, adică

$$T_f \cdot \frac{a}{\delta} = \text{const} \tag{1}$$

Acum, noi am extins aceste considerații la majoritatea elementelor de tranziții, reușind să cuprindem prin relația (1) un număr de 36 elemente. Pentru celelalte elemente de tranziție (puține la număr) nu sînt cunoscute sau sînt inexacte temperaturile de topire, precum și ceilalți parametrii, motiv pentru care nu sînt cuprinse în studiu.

Remarcăm faptul că la elementele de tranziție din seria lantanidelor și actinidelor în loc de diametrul păturii „4f" respective „5f" care este considerată caracteristică pentru aceste elemente, am luat diametrul păturii „5d", respective „6d" (mai exact diametrul ionului trivalent) din cauza efectului de ecranare a electronilor interiori de către cei exteriori.

În tabelul nr. 1 sînt cuprinse datele din literatură folosite [3, 4, 5].



Graficul 1.

Graficul prezentat cuprinde atît datele anterioare, marcate prin cruciuliță, cît și datele noi, marcate prin cerculețe punctate.

Atît în figura prezentată cît și din ultima coloană a tabelului, se poate constata abaterea, care este sub 10 % și pe care o putem atribui preciziei cu care sînt determinate diametrul δ și temperaturile de topire. Considerăm că acest fapt nu afectează regularitatea găsită mai sus.

Tabelul nr. 1

Nr. crt.	Elementul	Învelișul electronic	a Å	σ Å	$V = \frac{a}{\delta}$	T°C	TV
1	Sc	3d	3,302	1,66	1.99	1400	2780
2	Y	4d	3,663	1,94	1,887	1450	2740
3	Nb	4d	3,2941	2,9	2,9	2468	2801
4	Zr	4d	3,61	2,42	1,49	1855	2765
5	Tc	4d	2,735	2,6	1,052	2700	2840
6	La	5d	5,31	2,08	2,55	920	2350
7	Pr	5d	5,151	2	2,577	935	2410
8	Eu	5d	×i573	1,94	2,258	1200	2825
9	Gd	5d	3,622	1,88	1,93	1350	2600
10	Tb	5d	3,585	1,78	2,105	1450	2920
11	Dy	5d	3,578	1,76	2,03	1500	3050
12	Ho	5d	3,557	1,72	2,065	1500	3100
13	Rr	5d	3,53	1,7	2,077	1500	3110
14	Tu	5d	5,523	1,7	2,07	1550	3210
15	Yo	5d	5,468	1,62	3,38	824	2785
16	Nd	5d	5,809	1,975	2,975	1024	3040
17	S	5d	3,621	1,94	1,87	1300	2600
18	Pa	6d	3,925	2,12	1,85	1600	2960
19	Ac	6d	5,1313	2,22	2,22	1050	2520

BIBLIOGRAFIE

1. B. F. Ormont, *Strukturî neorganiceskih vescestv.* Goshimizdat, Moskva-Leningrad, 1954, pp. 82–150.
2. Iuliu Pop, O. Pop și A. Nicula, *Observații asupra punctelor normale de topire la elementele de tranziție. I.* „Studia Universitatis Babeș-Bolyai", Ser. Math. Phys. ,2, ,/1962
3. G. S. Jdanov. *Fizika tveordovo tela.* Izd. moskovskovo un-ta, 1961, pp. 184–185.
4. A.F. Vol. *Stroienie i svoistva dvoinîh metalliceskih sistem.* F.1. Fizmatghiz. 1959, pp. 8–60.
5. R. Bozorth, *Ferromagnetism*, Izd. inostran. lit., Moskva, 1956, pp. 686–691.

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С НОРМАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ПЛАВЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Резюме)

В статье разработаны данные, касающиеся нормальных точек плавления и атомных и кристаллографических свойств, имеющихся в научной литературе. На этой основе устанавливается гиперболическая зависимость нормальных точек плавления, почти для всех переходных элементов, как функция от отношения $\frac{a}{\delta}$, считая нормальные точки плавления мерой энергии взаимодействия атомов в кристаллической решётке. Установленное соотношение выражено формулой:

$$T_{пл} \cdot \frac{a}{\delta} = \text{констант} \qquad (1),$$

где $T_{пл}$ — нормальная температура плавления, a — постоянная кристаллической решётки в фазе плавления, а δ — диаметр недостроенной электронной оболочки переходных элементов.

OBSERVATIONS SUR LES POINTS NORMAUX DE FUSION DANS LES ÉLÉMENTS DE TRANSITION

(R é s u m é)

Les auteurs de l'article élaborent des données relatives aux points normaux de fusion et aux propriétés atomiques et cristallographiques de la littérature de spécialité. Sur cette base ils établissent une dépendance hyperbolique des points normaux de fusion pour presque tous les éléments de transition en fonction du rapport $\frac{a}{\delta}$, considérant les points normaux de fusion comme une mesure de l'énergie d'interaction des atomes dans le réseau cristallin. La relation établie s'exprime par la formule

$$T_f \cdot \frac{a}{\delta} = \text{const} \tag{1}$$

où T_f est la température normale de fusion, a la constante du réseau cristallin dans la phase de fusion, et δ le diamètre de la couche électronique incomplète des éléments de transition.

STUDIUL RĂSPUNSULUI LUMINOS DAT DE TUBURI CU DESCĂRCARE LUMINISCENTĂ UTILIZATE PENTRU GENERAREA IMPULSURILOR DE LUMINĂ DREPTUNGHIULARE

de

ALEXANDRU BÓDI și PETRU CIOARĂ

Lucrare prezentată la Sesiunea științifică de electrotehnică, București, decembrie 1962

1. *Introducere.* Pentru a studia comportarea fotorezistențelor, a celulelor fotoelectrice și a fotomultiplicatorilor în regim de impulsuri, se cer impulsuri luminoase cu pantă foarte mare, cît mai apropiate de impulsul dreptunghiular ideal. Pentru generarea unor astfel de impulsuri, în ultima vreme se întrebuințează din ce în ce mai frecvent tuburi obișnuite cu neon, tuburi stabilizatoare sau tiratroane alimentate cu tensiune ridicată, [1], [2], [3], [4], tuburi disponibile în oricare laborator.

În cadrul acestei lucrări am studiat forma răspunsului luminos dat de tuburi de semnalizare cu neon „Electrofar" tip N-25 alimentate în regim de impulsuri dreptunghiulare de înaltă frecvență, în vederea utilizării lor în scopul mai sus amintit. Deoarece unele probleme privind descărcarea în acest regim au fost studiate de unul din noi [5] s-a constatat că această metodă prezintă unele avantaje față de descărcarea în impulsuri de curent continuu.

2. *Aparatura folosită și metoda de măsurare.* Excitînd tubul cu o tensiune de înaltă frecvență ($f = 2{,}44$ MHz), în regim de impulsuri, am urmărit variația luminozității descărcării în timp. Observația s-a făcut cu ajutorul fotomultiplicatorului ФЭУ-19 obturat cu o diafragmă, care înregistrează intensitatea luminoasă totală. Schema bloc a aparaturii este dată în fig. 1.

Generatorul GIF este un oscilator cu un singur tub, avînd circuitul de rezonanță în circuitul anodic (tip Meissner). Tensiunea de ieșire care apare la bornele unei bobine — cu diametrul de 5 cm și un număr de spire cuprins între 14 și 70 — se poate regla fie modificînd tensiunea anodică fie modificînd cuplajul bobinei de ieșire. Tensiunea de înaltă frecvență depinde aproape linear de tensiunea anodică a tubului oscilator.

Comanda oscilatorului se face cu ajutorul generatorului de tensiune dreptunghiulară (*GTD*) tip I.C. Cuanta. Fotomultiplicatorul (*FM*) este alimentat de la un redresor stabilizat (*IT*) tip A.G. IFA. și se găsește într-o cutie de aluminiu împreună cu tubul de descărcare studiat. Curentul de înaltă frecvență se poate măsura cu un miliampermetru cu termocruce.

Înregistrarea și măsurarea amplitudinii tensiunii de înaltă frecvență respectiv a semnalului dat de fotomultiplicator s-a făcut cu un oscilograf catodic *RFT* tip OG1-9 cu banda de trecere 0—30 MHz (0) și un amplificator de bandă largă *RFT* tip BV-9 (A).

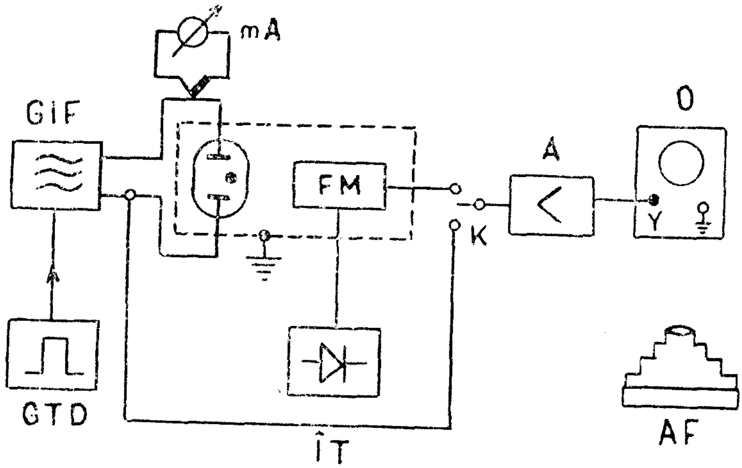


Fig. 1.

Tensiunea de înaltă frecvență în cursul formării descărcării s-a menținut constantă cu o precizie de 3%, durata de creștere a frontului impulsului a fost aprox. 4—8 μs, iar durata de descreștere a frontului posterior între 8—16 μs, ambele fiind funcții de frecvența de repetiție a impulsurilor. În cursul măsurătorilor am avut în vedere ca descărcarea produsă de către un impuls să nu fie influențată de descărcarea produsă de impulsul precedent. Pentru aceasta, intervalul de timp între două impulsuri a fost ales în așa fel încît să fie mai mare decît timpul de recombinare al purtătorilor de sarcini.

Oscilogramele au fost fotografiate cu un aparat „Orizont" înzestrat cu o lentilă suplimentară.

3. *Rezultatele măsurătorilor*. a) Am constatat că majoritatea tuburilor cu neon „Electrofar" tip N-25 prezintă o întîrziere a descărcării față de impulsul de tensiune aplicat, cuprinsă între 5—800 μs. Întîrziere asemănătoare am observat și la tuburile confecționate de noi și umplute cu heliu [5]. Această întîrziere (mult superioară celei statistice dar care nu se confundă cu timpul de formare a descărcării) semnalată în lucrarea [6] la o descărcare în argon, apare dacă tubul conține impurități — de ex. kripton — care au fost observate pe cale spectroscopică. În fig. 2 se dă o oscilogramă tipică pentru acest caz: curba de sus reprezintă impulsul de înaltă frecvență, față de care semnalul luminos al descărcării (curba de jos) întîrzie considerabil.

b) Timpul de întîrziere depinde de factorul de umplere și frecvența de repetiție a impulsurilor [5], de asemenea și de amplitudinea impulsurilor. În fig. 3 se arată cum descrește timpul de întîrziere-măsurat la un lot de tuburi — pe măsură ce crește tensiunea aplicată tubului peste tensiunea de aprindere.

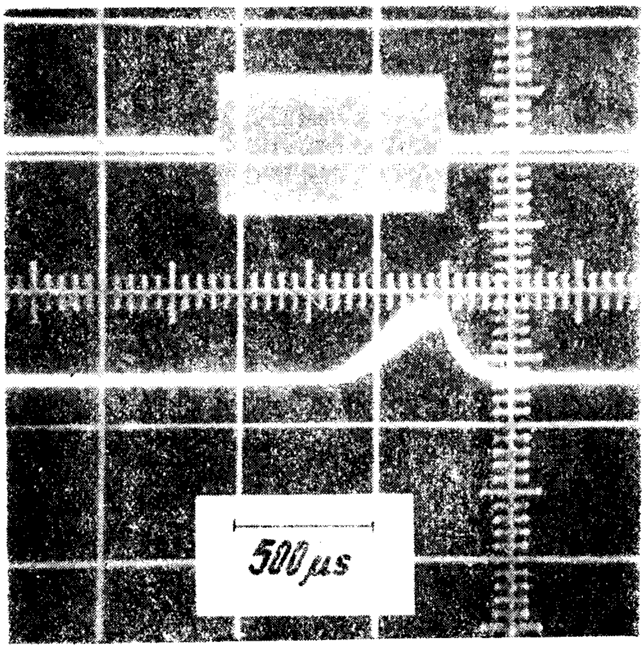

500 µs

Fig. 2.

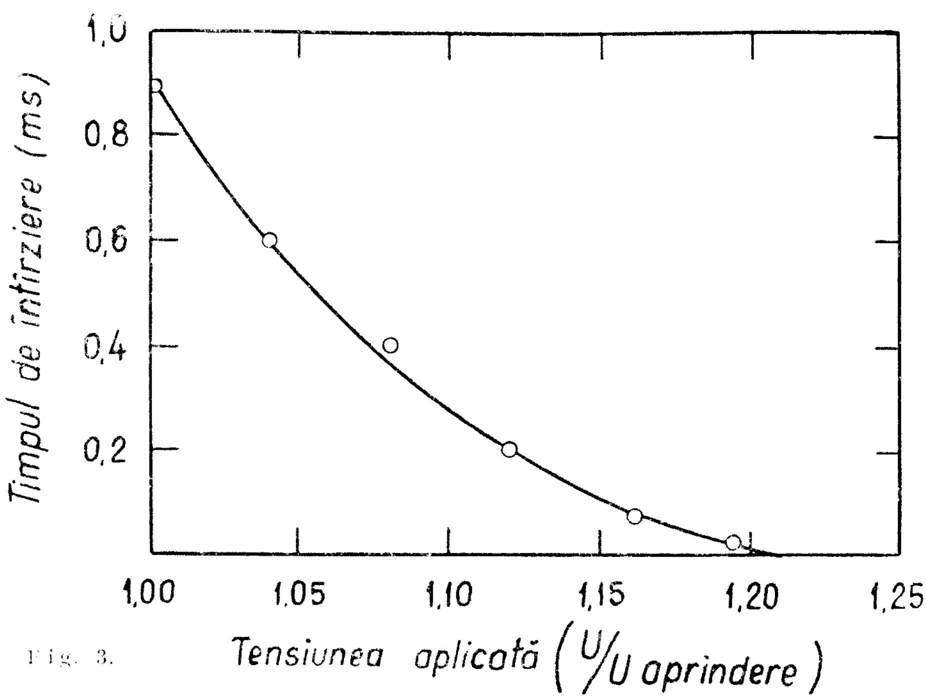

Timpul de întîrziere (ms)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
1,00
1,05
1,10
1,15
1,20
1,25
Tensiunea aplicată (U/U aprindere)

Fig. 3.

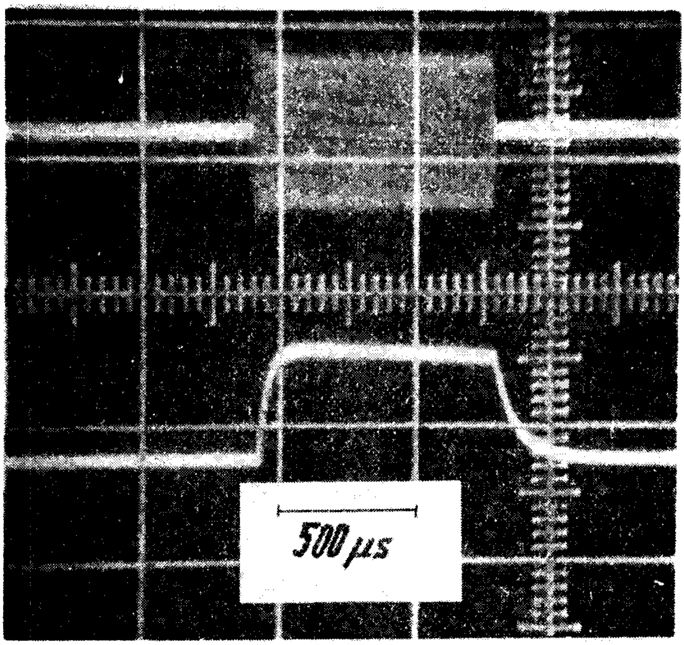


Fig. 4.

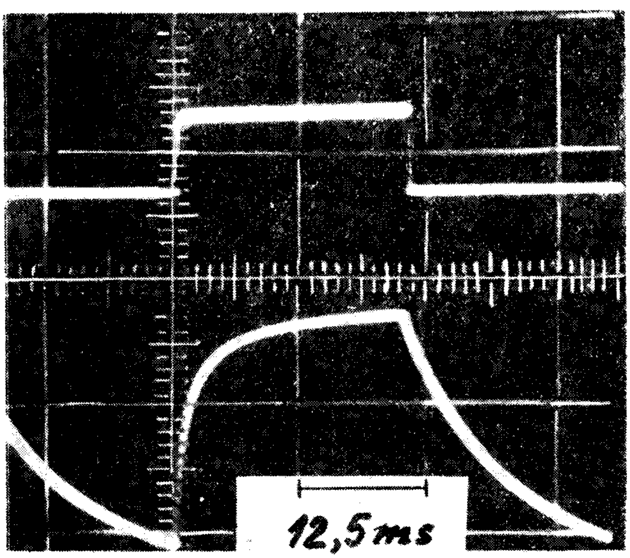


Fig. 5.

c) Tuburile care nu conțin adaosuri străine au o întîrziere mai mică decît 0,5 μs, timp observabil cu instalația descrisă. În acest caz semnalul răspunsului luminos urmărește relativ fidel înfășurătoarea impulsului dreptunghiular de înaltă frecvență (fig. 4.).

d) Am constatat că timpul de întîrziere nu depinde de sensibilitatea aparaturii de măsurare, deci este cauzat de fenomene fizice care au loc la amorsarea descărcării.

4. *Aplicații*. Am sortat un număr de 100 tuburi N-25 după timpul de întîrziere respectiv răspunsul luminos fidel și am găsit 11 tuburi potrivite pentru a fi folosite la generarea impulsurilor dreptunghiulare de lumină. Impuls dreptunghiular cît mai apropiat de cel ideal se obține pentru o tensiune de alimentare anumită, care variază de la caz la caz. Îmbătrînirea tubului influențează forma semnalului luminos, mai mult chiar, poate să ducă la apariția unei întîrzieri a descărcării.

Folosind unul din aceste tuburi cu răspuns fidel, am utilizat aparatura descrisă drept generator de impulsuri luminoase dreptunghiulare — cu forma controlată și durata cunoscută — necesar la studiul comportării unor traductori fotoelectrici. Pentru a exemplifica cele spuse, curba de jos pe oscilograma din fig. 5. arată felul cum se modifică în timp curentul într-un circuit de c.c. ce conține o fotorezistență (Zeiss-Jena tip CdSeG) în urma iluminării acesteia cu impulsuri dreptunghiulare (curba de jos). Creșterea curentului în urma iluminării are loc conform unei legi exponențiale [7], adică

$$I = I_0 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right].$$

Pentru constanta de timp a circuitului se obține $\tau = 5{,}4 \pm 0{,}1$ ms. Pe această cale se poate construi ușor și caracteristica de frecvență a fotorezistenței.

BIBLIOGRAFIE

1. Barsukov, J. K., J.T.F. **26** (1956), 475.
2. Kerns, Q. A., Kirsten, F. A., Cox, G. C., Rev. Sci. Instr. **30** (1959), 31
3. Caplan, H. S., Stewart, D. T., J. Sci. Instrum. **38** (1961), 133.
4. Náray, Zs., Varga, P., J. Sci. Instrum. **38** (1961), 352.
5. Bódi, A., *Contribuții privind studiul și folosirea tensiunii dreptunghiulare în tehnica măsurătorilor*. Disertație. Cluj, 1962.
6. Zastenker, F. M., Solnțev, G. S., Izv. A. Nauk SSSR ser. fiz. **23**(1959), 934.
7. Wangsness, R.K., J. Appl. Phys. **34** (1963), 664.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕТЯЩЕГОСЯ ОТВЕТА, ВЫПУЩЕННОГО ЛАМПАМИ С ТЛЕЮЩИМ РАЗРЯДОМ, ИСПОЛЬЗОВАННЫМИ ДЛЯ СОЗДАНИЯ СВЕТЯЩИХСЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

(Резюме)

Описывается электронный метод создания светящихся прямоугольных импульсов, употребляя неоновые лампы „Электрофар" типа N—25, и изучаются условия в которых светящийся ответ точно следует за огибающей применённого прямоугольного импульса высокой частоты. Сделанное приспособление может быть применено, например, для проверки фотоэлектрических датчиков.

ETUDE DE LA RÉPONSE LUMINEUSE DONNÉE PAR DES TUBES À DÉCHARGE LUMINESCENTE UTILISÉS POUR PRODUIRE DES IMPULSIONS DE LUMIÈRE RECTANGULAIRES

(Résumé)

Les auteurs décrivent une méthode électrique de production des impulsions lumineuses rectangulaires utilisant des tubes à néon „Electrofar" type N-25, et ils étudient les conditions dans lesquelles la réponse lumineuse suit fidèlement l'enveloppe de l'impulsion rectangulaire de haute fréquence qui est appliquée. Le dispositif réalisé peut être employé, par exemple, pour la vérification des traducteurs photoélectriques.

CRONICĂ

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CELEI MAI BUNE APROXIMAȚII PRIN POLINOAME ÎN DOMENIUL COMPLEX

Rezumatul lucrării de disertație, prezentată de I. MARUȘCIAC *pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice și susținută la Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj, în* 20 *decembrie* 1962

Lucrarea urmărește să aducă contribuție la studiul celei mai bune aproximații prin polinoame algebrice sau combinații liniare de funcții continue în domeniul complex.

Lucrarea conține o scurtă introducere, 6 capitole și o bibliografie compusă din 74 titluri.

Fie K o mulțime compactă din planul complex și $f(z)$ o funcție continuă pe K. Se notează cu $T_n(z;f,K)$ polinomul de gradul n care se abate cel mai puțin de la funcția $f(z)$ pe mulțimea K, adică pentru care

$$\rho_n(f,K) = \max_{z\in K} |f(z)-T_n(z;f,K)| = \inf_{(P_n)} \max_{z\in K} |f(z)-P_n(z)|,$$

unde $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

În prima parte a lucrăii se studiază posibilitatea determinării polinomului $T_n(z;f,K)$ folosind o metodă a lui G. P o l y a care face legătura între cea mai bună aproximație exponențială și cea uniformă. Astfel se consideră media ponderată de ordinul p (p întreg pozitiv)

$$J_p(\mu) = \left[\sum_{j}^{m} \mu_j |f(z_j) - P(z_j)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

unde $\mu_j \geqslant 0$, $\sum \mu_j = 1$, iar $P(z)$ — un polinom de gradul n.

Se arată că există un singur polinom $P_p(z;\mu)$ care realizează minimul $J_p(\mu)$ și că în plus

$$\lim_{p\to\infty} P_p(z;\mu) = T_n(z;f,M),\ M = \{z_j\}_{j=1}^{m}$$

Folosind acest rezultat se găsește că polinomul $T_n(z;f\,M)$ are aurmătoarea formă specială

$$T_n(z,f,M) = \frac{\sum K_{j_0}\ldots K_{j_n} |V(z_{j_0},\ldots,z_{j_n})|^2 \cdot L(z_{j_0},\ldots,z_{j_n};f)}{\sum K_{j_0}\ldots K_{j_n} |V(z_{j_0},\ldots,z_{j_n})|^2}$$

unde Σ se extide asupra tuturor indicilor $j_0,\ldots,j_n$ de la 1 la m, $V(z_1,\ldots,z_n)$ este determinatul lui Vandermonde a numerelor $z_0,\ldots,z_n$, iar $L(z_0,\ldots,z_n;f)$ polinomul de interpolare a lui Lagrange pe nodurile $z_0,\ldots, z_n$ a funcției $f(z)$.

În continuare se extind toate rezultatele la cazul aproximării prin combinații liniare de funcții continue $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ care formează un sistem Cebîșev pe mulțimea K, scriinduse și în acest caz forma specială a combinației liniare care se abate cel mai puțin de la funcția $f(z)$ pe mulțimea M.

Cu aceiași metodă se studiază apoi polinoamele de abatere minimă de la zero pe o mulțime finită, ai căror coeficienți verifică mai multe relații liniare date de forma

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r, \; 0 \leqslant r < n.$$

Se obține și în acest caz o formă specială analoagă pentru polinomul $M_n^r(z)$ care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea considearată :

$$M_n^r(z) = \frac{\Sigma K_{j_1} \ldots K_{j_{n-r}} \sum_{k=0}^{r} D^{(k)}(z_{j_1}, \ldots z_{j_{n-r}}; z, \alpha^{(r)}) \cdot \bar{D}(z_{j_1}, \ldots z_{j_{n-r}}; \alpha^{(r)})}{\Sigma K_{j_1} \ldots K_{j_{n-r}} |D(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{n-r}}; \alpha^{(r)})|^2}$$

unde

$$D(z_1, \ldots, z_{n-r}; \alpha^{(r)}) = \begin{vmatrix} z_1^n & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n-r}^n & \ldots & 1 \\ \alpha_{00} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r0} & \ldots & \alpha_{rn} \end{vmatrix}$$

iar $D^{(k)}(z_1, \ldots, z_{n-r}, z, \alpha^{(r)})$ este $D(z_1, \ldots, z_{n-r}, \alpha^{(r)})$ în care s-a înlocuit linia $\alpha_{k0}, \ldots, \alpha_{kn}$ cu $z^n, \ldots, 1 \cdot$ $\cdot \bar{D}(z_1, \ldots z_{n-r}; \alpha^{(r)})$ înseamnă conjugata lui $D(z_1, \ldots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})$.

În partea doua a două a lucrării se studiază o clasă de polinoame extremale, numite *infra-polinoame condiționate*, definite de autor, care constituie o lărgire a clasei infrapolinoamelor restrînse definite de M. Fekete și J. L. Walsh.

Astfel, fie K din nou o mulțime compactă din planul complex. Spunem că polinomul $B(z) = b_0 z^n + \ldots + b_n$ este un polinom *adjunct* $r+1$-*condiționat* pe mulțimea K a polinomului $A(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$ ai cărui coeficienți verifică relațiile

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r, \quad 0 \leqslant r < n,$$

dacă verifică condițiile

$$\text{I.} \; \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r$$

$$\text{II.} \; B(z) = 0 \text{ dacă } A(z) = 0, \; z \in K,$$

$$\text{III.} \; |B(z)| < |A(z)|, z \in K \text{ și } A(z) \neq 0.$$

Spunem că $A(z)$ este un *infrapolinom* $r+1$ *-condiționat* pe mulțimea K, dacă acesta nu admite niciun polinom adjunct $r+1$-condiționat pe mulțimea K.

După ce se dau mai multe proprietăți generale ale acestor polinoame, printre care și un criteriu necesar și suficient pentru ca un polinom $r+1$-condiționat să fie infrapolinom pe mulțimea K, se studiază localizarea rădăcinilor acestor infrapolinoame. Se arată că dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r+1$- condiționat pe mulțimea K și care nu se anulează pe K, atunci φ_z fiind unghiul sub care se vede mulțimea K din punctul z, avem

$$\varphi_{\alpha_1} + \cdots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{\beta_1} + \cdots + \varphi_{\beta_{k_r}} \geqslant \pi,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui $A(z)$, iar $\beta_1, \ldots, \beta_{k_r}$ — rădăcinile unui anumit polinom bine determinat cu ajutorul coeficienților α_{ik} din condițiile I. Acest rezultat general conține ca și cazuri particulare majoritatea rezultatelor conuscute în acest sens.

În capitolul V se studiază problema exprimării diametrului transfinit al unei mulţimi compacte plane (in general infinită) cu ajutorul polinoamelor lui Cebîşev de gradul n, construite pe anumite sisteme de cîte $n+1$ puncte, numite după F. L e j a, *grupări armonice*, ale mulţimii K.

Lucrarea se încheie cu nu algoritm finit, construit de autor pentru calculul polinomului de cea mai bună aproximaţie a unei funcţii continue pe mulţimea finită de puncte din planul complex, bazat pe metoda gradientului, sugerată de aceia a lui S. I. Z u h o v i ţ k i din cazul real. Tot aici se arată cum se poate construi aproximativ polinomul de cea mai bună aproximaţie a unei funcţii pe o mulţime infinită. Ca o aplicaţie se arată cum se leagă polinoamele lui Cebîşev de gradul întîi construit pe o mulţime finită de puncte din planul complex de o problemă din tehnică.

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC: Acad. prof. Dr. G. *Călugăreanu* (Univ. „Babeş-Bolyai" din Cluj).
REFERENŢI: Acad. *M. Niculescu* (Universitatea din Bucureşti).
Prof. Dr. *Th. Angheluţă* (Institutul Politehnic Cluj).
Prof. Dr. *I. Climescu* (Institutul Politehnic Iaşi).

ŞEDINŢE DE COMUNICĂRI

× În anul 1962 Facultăţile de matematică-mecanică şi fizică au ţinut următoarele *şedinţe de comunicări*:

12 ianuarie

V. Z e l m e r, Despre un cvasigrup special.

G. C ă l u g ă r e a n u, membru coresp. al Acad. R. P. R., O teoremă asupra traversărilor esenţiale unui nod.

Z. G á b o s, O. G h e r m a n, Asupra polarizaţiei rezultante la compunerea undelor plane.

23 februarie

G h. P i c, Despre o teoremă a lui Fejér.

A. I. R u s, Proprietăţile zerourolor unui sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de de ordinul 1.

P. M o c a n u, [illegible]pre raza de stelaritate şi raza de convexita[illegible] a funcţiilor olomorfe.

16 martie

A. N e y, Un procedeu de îmbunătăţire a convergenţei seriilor şi a integralelor improprii.

P. H a m b u r g, M. B a l á z s, D. B o r ş a n, Compatibilitatea relaţiil[illegible].

6 aprilie

D. V. I o n e s c u, O formulă de cubatură.

M. F r o d a- S c h e c h t e r, Clase de echivalenţă în mulţimea familiilor de părţi ale unei mulţimi.

P. M o c a n u, Despre raza de stelaritate şi conexitate a funcţiilor olomorfe.

3 mai

V. Z e l m e r, O generalizare a noţiunii de inel.

O. G h e r m a n, F. C o n s t a n t i n e s c u, Difuzia undelor electromagnetice pe particule mici.

I. K o l u m b á n, Problema celei mai bune aproximaţii în spaţii funcţionale.

9 iunie

C. K a l i k, Despre completitatea unor clase de funcţii.

P. S z i l á g y i, Despre rezolvabilitatea unor sisteme eliptice.

A. I. R u s, Comportarea în mare a integralelor unei ecuaţii diferenţiale de tip Riccati.

26 iunie

D. V. I o n e s c u, Determinarea genului unei conice. Soluţie a ecuaţiei diferenţiale a conicelor corespunzînd la condiţii iniţiale date.

G h. P i c, Despre o proprietate a grupurilor F. C. nilpotente.

F. C o n s t a n t i n e s c u, Posibilităţi de aplicaţie a teoriei distribuţiilor la analiza clasică.

23 octombrie

P. M o c a n u, Domenii extremale în clasa funcţiilor univalente.

I. Gy. M a u r e r, I. P u r d e a, E. V i r á g, Studiul topologic al transformărilor liniare generalizate.

6 noiembrie

D. A u s l ä n d e r, N. A l b u, E. V e r e s s, Influenţa ultrasunetului aspura germinaţiei grîului.

A. W e i s s m a n n, Cvasiparticule în semiconductorii. Ecuaţia masei efective şi interacţia electron plasmon.

14 noiembrie

F. R a d ó, Despre țesuturile tridimensionale regulate.

A. I. R u s, Proprietățile zerourilor integralelor unui sistem de ecuații diferențiale neliniare.

30 noiembrie

I. U r s u, C. B á l i n t f f i, O metodă sensibilă pentru determinarea pe cale magnetică a concentrației de oxigen.

F. K e l e m e n, Măsurarea coeficientului de difusivitate termică și a coeficientului de transmisie de căldură prin metoda impulsului de căldură în fire metalice.

A. B ó d i, P. C i o a r ă, Studiul răspunsului luminos al unor tuburi cu neon.

21 decembrie

G h. P i c, Despre un criteriu pentru descompunerea unui grup.

G. C ă l u g ă r e a n u membru coresp. Acad. R. P. R., Descompunerea unui nod în două cercuri topologice.

27 decembrie

F. B o t a, F. K e l e m e n, A. N é d a Asupra unei metode de strat pentru măsurarea coeficientului de difuzie în gel agar-agar.

I. S t a n, A. W e i s s m a n n, Contribuția interacțiunii electron electron la calcularea nivelului energic al unui semiconductor.

F. K o c h, Cîteva aspecte ale razonanței ionilor Cu^{++} și Mn^{++} în cîmpuri slabe. Construcția unui dispozitiv de rezonanță paramagnetică

Z. G á b o s, O. G h e r m a n, Asupra metodei parametrilor lui Stobes la studiul polarizației undelor electromagnetice în spectru continuu.

VIZITE

× Facultățile de matematică-mecanică și fizică au fost vizitate în anul 1962 de mai mulți oameni de știință care au și ținut conferințe în fața cadrelor didactice și studenților facultăților noastre.

2 aprilie

M. I. P o d g a r e v s k i, M. I. S o l o v i o v (Institutul unificat de cercetare a nucleului din Dubna, U. R. S. S.), Interacția mezonilor Π cu nucleoni.

23 mai

Prof. C a i u s I a c o b, membru coresp. Acad. R. P. R. (Universitatea din București), Teoria jeturilor la mari viteze.

24 mai

Prof. C a i u s I a c o b, membru coreps. Acad. R. P. R. (Universitatea din București), Rezolvarea problemei lui Dirichlet și a problemei biarmonice fundamentale pentru cerc în unele cazuri particulare.

11 iunie

V. A. A m b a r ț u m i a n, (membru titular al Academiei de științe a U.R.S.S. și președintele Academiei de științe a R. S. S. Armeană), Marele Univers.

28 septembrie

Prof. G a e t a n o F i c h e r a (Universitatea din Roma, Italia), Aproximarea funcțiilor olomorfe cu funcții raționale avînd polii fixați dinainte.

29 septembrie

Prof. G a e t a n o F i c h e r a (Universitatea din Roma, Italia), Teoria unificată a problemelor de contur pentru ecuațiile eliptico-parabolice de ordinul al doilea.

1 și 2 octombrie

Prof. M. A. K r a s n o s e l s k i (Universitatea din Voronej, U.R.S.S.). Cîteva probleme de analiză neliniară.

25 octombrie

Dr. B o r i s V a l i č e k, cercetător principal (Observatorul Central din Ondrejov, R. S. Cehoslovacă), Activitatea Observatorului din Ondrejov al Acad. de Științe a R.S. Cehoslovace.

9 noiembrie

Prof. G l e b K. M i h a i l o v (Universitatea „Lomonosov", Moscova, U.R.S.S.), Asupra unei probleme de mișcare a unui lichid într-un mediu poros cu suprafața liberă, sub influența unui cîmp electric.

7 decembrie

Prof. A d o l f H a i m o v i c i (Universitatea „Al. I. Cuza", Iași), O generalizare a problemei lui Cauchy și a lui Goursat.

20 decembrie

Prof. M e n d e l H a i m o v i c i, membru coresp. Acad. R. P. R. (Universitatea „Al. I. Cuza", Iași), Reductibilitatea sistemelor de ecuații cu derivate parțiale.

× Violeta Zelmer și-a susținut disertația pentru titlul de candidată în științele matematico-fizice la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași, în 15 octombrie 1962: „Pseudogrupuri și pseudoinele".

Intreprinderea Poligrafică Cluj — 5278/963

ERATĂ

g.	*Rîndul*	*În loc de:*	*Se va citi:*	*Greşeala s-a făcut din vina:*
	14 de sus	$d\dot{\psi}$	$d\psi$	redacţiei
	7 de sus	$\dot{\chi}$	χ	"
	1 de jos	$V_i^2 - 4k^2\pi$	$V_i^2 k^2 - 4\pi$	autorului
	9 de jos	δE	$\delta \vec{E}$	"
	11 de sus	Ω_E^2	Ω_B^2	"
	11 de jos	$\sum_{j-}^{m}$	$\sum_{j=1}^{m}$	tipografiei