STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1963

C L U J

În cel de al VIII-lea an de apariţie (1963) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На VIII году издания (1963), *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur VIII-me année de publication (1963) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie-pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1963

CLUJ

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI
ANUL VIII 1963

Redacția:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 34—50

SUMAR

СОДЕРЖАНИЕ

SOMMAIRE

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A LUI J. BOLYAI

de

M. BICA, M. NEUMANN, L. STANCIU (Timișoara)

În acest articol, care este continuarea articolelor [3] și [4], sînt deduse, folosind semispațiul lui Poincaré, rezultatele găsite de Bolyai în (§ 32[1]). Se introduc, atît în plan cît și în spațiu, diferite sisteme de coordonate care permit printr-o metodă unitară deducerea elementului de arc, de arie plană, de arie a unei suprafețe și de volum. Pentru a pune în evidență formulele găsite de Bolyai ele au fost numerotate prin I—XV.

I. GEOMETRIA HIPERBOLICĂ PLANĂ DIFERENȚIALĂ

1. *Sisteme de coordonate.* a) În semiplanul lui Poincaré considerăm un sistem de axe rectangulare Ax, Ay unde Ax se găsește pe dreapta obișnuită cu punctul impropriu în M, sensul pozitiv fiind sensul semidreptei AM. Axa Ay se reprezintă deci printr-un semicerc cu centrul în M. B fiind un punct din acest semiplan, să notăm cu C și D intersecțiile axelor Ax și Ay cu perpendiculara coborîtă din B pe Ax, respectiv cu hiperciclul BM ce trece prin B corespunzător dreptei AM. Coordonatele (x,y) ale punctului B fiind măsurile hiperbolice ale segmentelor hiperbolice AC și AD avem

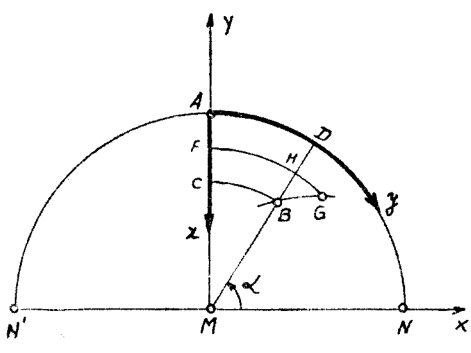

Fig. 1.

$$x = k\, ln(ACM\infty), \qquad y = k\, ln(ADNN')$$

sau

$$e^{-\frac{x}{k}} = \frac{MB}{MA}, \quad e^{-\frac{y}{k}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

unde α este unghiul oblicei MB cu absolutul.

Semiplanul considerat îl mai raportăm la un sistem de axe rectangulare carteziene XMY, MX fiind dreapta absolută. În raport cu acest sistem avem $A(0,a)$, $B(X,Y)$. Din $X = MB \cos \alpha$, $Y = MB \sin \alpha$ deducem

$$\begin{aligned} X &= ae^{-\frac{x}{k}} \, th\frac{y}{k} \\ Y &= \frac{ae^{-\frac{x}{k}}}{ch^{-\frac{y}{k}}} \end{aligned} \tag{1}$$

Din (1) rezultă că $x = \text{const.}$ reprezintă drepte nesecante avînd AM ca perpendiculară comună şi $y = \text{const}$ hipercicle corespunzătoare dreptei AM

b) Punctul B mai poate fi determinat prin coordonatele (ρ, θ) unde ρ este măsura hiperbolică a segmentului AB, iar $\theta = \sphericalangle (AX, AB)$. Au loc relaiţiile (§ 31, din [4]).

$$\begin{aligned} th\frac{x}{k} &= th\frac{\rho}{k}\cos\theta \\ sh\frac{y}{k} &= sh\frac{\rho}{k}\sin\theta \end{aligned} \tag{2}$$

Din (2) rezultă că $\rho = \text{const.}$ reprezintă cercuri cu centrul în A de ecuaţie

$$ch\frac{x}{k}\, ch\frac{y}{k} = ch\frac{\rho}{k} \tag{3}$$

iar $\theta = \text{const.}$ drepte ce trec prin A

$$th\frac{y}{k} = sh\frac{x}{k}\, \text{tg}\ \theta \cdot$$

c) Fie $P(x_0, 0)$ intersecţia cu axa Ax a oriciclului ce trece prin B şi are centrul în M. Din relaţiile

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{PM}{BM} = (PCM\infty) = e^{\frac{x-x_0}{k}}$$

deducem că ecuaţia oriciclului este dată de

$$e^{\frac{x-x_0}{k}} = ch\frac{y}{k}, \tag{4}$$

care pentru $x_0 = 0$ se poate scrie şi sub forma

$$e^{\frac{y}{k}} = e^{\frac{x}{k}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{k}} - 1} \cdot \tag{I}$$

Deoarece un oriciclu cu centrul în M şi o dreaptă cu un punct impropriu în M determină biunivoc un punct B, expresiile

$$u = e^{-\frac{x}{k}} ch \frac{y}{k}$$
$$v = e^{\frac{x}{k}} th \frac{y}{k} \tag{5}$$

pot fi considerate drept coordonate ale punctului B. În adevăr u = const şi v = const reprezintă respectiv un oriciclu de centru M şi o dreaptă avînd un punct impropriu în acest centru.

În cele trei sisteme considerate liniile parametrice au fost două cîte două perpendiculare şi sînt respectiv formate din drepte nesecante avînd o perpendiculară comună şi hiperciclele perpendiculare pe ele; drepte concurente şi cercurile ortogonale acestor drepte; drepte paralele şi oriciclele ortogonale lor.

2. *Element de arc.* Fie $y = f(x)$ o curbă (C^1), H şi F intersecţiile hiperciclului BM şi axei Ax cu perpendiculara dusă din G pe Ax, B şi G fiind puncte ale curbei date. Notînd $FC = \Delta x$, $HG = \Delta y$, $BG = \Delta s$ şi ţinînd seama de (Introducere [4]) şi de (§ 27[3]) avem

$$\frac{HB}{FC} = \frac{1}{\sin\alpha} ch \frac{y}{k} \cdot \tag{6}$$

sau

$$\frac{HG}{HB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \sin\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic rectiliniu HBG avem

$$\operatorname{tg} \widehat{HBG}\, sh \frac{HB}{k} = th \frac{HG}{k}$$

de unde

$$\lim_{G \to B} \operatorname{tg} \widehat{HBG} = \lim_{G \to B} \frac{HG}{HB},$$

sau

$$\lim_{G \to B} \operatorname{tg} \widehat{HBG} = \frac{dy}{dx} \sin\alpha, \tag{7}$$

relaţie care dă tangenta trigonometrică a unghiului format de tangenta geometrică într-un punct al curbei $y = f(x)$ cu hiperciclul corespunzător axei Ax ce trece prin acel punct. Relaţia (6) găsită cu metoda indicată în Appendix, dar care nu este dată de Bolyai este o relaţie absolută, deoarece în geometria euclidiană hiperciclul considerat este o paralelă la axa Ax.

Din triunghiul rectiliniu BHG avem relaţia (§ 31 [4])

$$sh^2 \frac{HB}{k} + sh^2 \frac{HG}{k} ch^2 \frac{HB}{k} = sh^2 \frac{BG}{k},$$

din care prin dezvoltare în serie găsim

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{HB}{\Delta x}\right)^2 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Ţinînd seama de (6) avem

$$ds^2 = ch^2 \frac{y}{k} dx^2 + dy^2 \tag{8}$$

relaţia care devine, folosind (1)

$$ds^2 = \frac{k^2 (dX^2 + dY^2)}{Y^2},$$

sau, notînd cu ds' elementul de arc euclidian corespunzător lui ds : găsim

$$ds = \frac{k ds'}{Y}, \tag{9}$$

relaţia folosită în [3] şi [4].

Dacă curba este dată de $\rho = f(\theta)$, folosind (2) şi (3), formula (8) devine

$$ds^2 = d\rho^2 + k^2 \; sh^2 \frac{\rho}{k} d\theta^2 \tag{8'}$$

iar dacă curba este dată de $u = f(v)$, (8) devine, folosind (5)

$$ds^2 = k^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 dv^2\right). \tag{8''}$$

Aplicaţii. a) Elementul de arc al cercului se găseşte din (8') luînd $\rho = \text{const}$:

$$ds = k sh \frac{\rho}{k} d\theta$$

deci

$$s = k(\theta_1 - \theta_0) \, sh \, \frac{\rho}{k}$$

Se regăseşte astfel formula

$$s = 2 \; k\pi sh \frac{\rho}{k}, \tag{II}$$

care dă lungimea cercului de rază ρ.

b) Elementul de arc al oriciclului se găseşte din (8'') ţinînd seama că ecuaţia oriciclului este $u = \text{const}$.

$$ds = kudv = kd(uv)$$

deci

$$s = ku(v - v_0) \qquad \text{sau} \qquad s = k\left(sh\,\frac{y}{k} - sh\,\frac{y_0}{k}\right). \tag{10}$$

Dacă $y_0 = 0$ găsim formula dată de Bolyai :

$$2s = k\left(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}}\right), \tag{III}$$

prin care se exprimă lungimea unui arc de oriciclu în funcție de coarda $2y$ corespunzătoare arcului.

Păstrînd notațiile din (2) avem

$$\cos\widehat{GBH}\, th\,\frac{GB}{k} = th\,\frac{BH}{k},$$

de unde, deoarece $\sphericalangle GBH$ tinde către α cînd G se apropie de B, avem

$$\cos\,\alpha = \frac{1}{\sin\,\alpha}\cdot\frac{dx}{ds}.$$

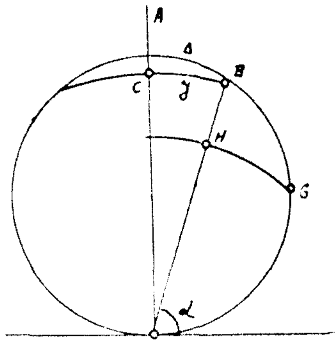

Fig. 2.

Dar, din (4)

$$dx = -kctg\,\alpha.d\alpha,$$

deci, am dedus printr-o metodă geometrică încă o expresie pentru lungimea arcului de oriciclu și anume

$$s = kctg\alpha. \tag{III'}$$

3. *Arii plane.* Considerînd două familii de curbe ortogonale ale căror elemente de arc sînt ds_1 și ds_2, prin definiție elementul de arie este

$$d\sigma = ds_1\, ds_2. \tag{11}$$

Ținînd seama de (9) avem, deoarece ortogonalitatea se păstrează

$$d\sigma = \frac{k^2 ds'_1 ds'_2}{Y^2} = \frac{k^2 d\sigma'}{Y^2}, \tag{12}$$

unde $d\sigma'$ este elementul de arie euclidian corespunzător.

Avînd în vedere că în cele trei sisteme de coordonate din 1. liniile parametrice sînt perpendiculare și au ecuațiile

$x =$ const. $\qquad y =$ const.

$\rho =$ const. $\qquad \theta =$ const.

$u =$ const. $\qquad v =$ const.

iar elementele lor de arc date respectiv de (8), (8′) şi (8″) fiind:

$$ds_1 = dy \qquad ds_2 = ch\,\frac{y}{k}\,dx$$

$$ds_1 = ksh\,\frac{\rho}{k}\,d\theta \qquad ds_2 = d\rho$$

$$ds_1 = kudv \qquad ds_2 = \frac{k}{u}\,du$$

din (11) deducem

$$d\sigma = ch\,\frac{y}{k}\,dxdy, \tag{13}$$

$$d\sigma = ksh\,\frac{\rho}{k}\,d\rho d\theta \tag{13′}$$

$$d\sigma = k^2dudv. \tag{13″}$$

Observare. Formulele (13), (13′) (13″) pot fi deduse din (12) folosind (1), (2), şi (5). În adevăr din

$$d\sigma' = dXdY = \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}\,dxdy,$$

şi

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{Y^2}{k^2}\,ch\,\frac{y}{k},$$

se obţine (13). Din

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \frac{kch^2\,\frac{x}{k}\,ch\,\frac{y}{k}\,sh\,\frac{\rho}{k}}{ch^2\,\frac{\rho}{k}} = k\,\frac{sh\,\frac{\rho}{k}}{ch\,\frac{y}{k}}$$

se obţine (13′), iar din

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{k^2}\,ch\,\frac{y}{k},$$

se obţine (13″).

Aplicaţii. a) Aria cuprinsă între o dreaptă, hiperciclul corespunzător şi două perpendiculare comune ale lor.

Fie Ax dreapta dată şi Ay una din perpendicularele comune. Avem

$$\sigma = \iint_{(F)} ch\,\frac{y}{k}\,dxdy = \int_0^x dx \int_0^y ch\,\frac{y}{k}\,dy \tag{13}$$

deci

$$\sigma = kxsh\,\frac{y}{k}. \tag{IV}$$

b) Aria cuprinsă între două cercuri concentrice și două raze ale lor. A fiind centrul cercurilor date și Ax una din raze, din (13′) avem

$$\sigma = k\iint\limits_{(E)} sh\frac{\rho}{k}\,d\rho d\theta = k\int_0^{\theta} d\theta \int_{\rho_0}^{\rho} sh\frac{\rho}{k}\,d\rho,$$

deci

$$\sigma = k^2\theta\left(ch\frac{\rho}{k} - ch\frac{\rho_0}{k}\right).$$

aria cercului este

$$\odot\sigma = 4\,k^2\pi sh^2\frac{\rho}{2k}. \qquad \text{(V)}$$

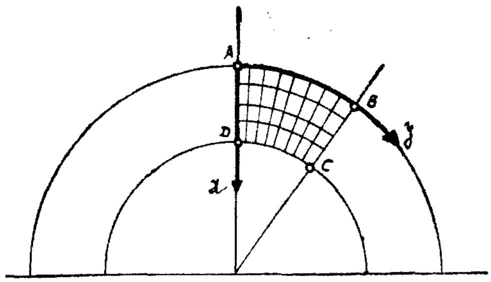

Fig. 3.

c) Aria cuprinsă între două oricicle concentrice și două raze ale lor, M fiind centrul oriciclelor date, Ax una din raze avem din (13″), dacă unul din oricicle trece prin A, care în sistemul (u, v) dat de (5) are coordonatele $(1, 0)$:

$$\sigma = \iint\limits_{(E)} k^2\,dudv = k^2\int_u^1 du\int_0^v dv$$

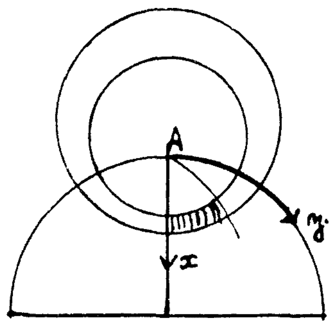

Fig. 4.

deci se obține relația

$$\sigma = k^2v(1-u)$$

de unde pentru $u \to 0$ găsim aria sectorului de oriciclu

$$\sigma = k^2v.$$

Cele două formule găsite pot fi aduse la forma din Appendix. În adevăr pe oriciclul $u = 1$ arcul este conform formulei (10) $s = kv$, iar, conform formulelor (4) și (5) $u = e^{-\frac{x_0}{k}}$, unde x_0 este abscisa punctului în care al doilea oriciclu taie axa Ax. Rezultă că

$$\sigma = ks\left(1 - e^{-\frac{x_0}{k}}\right), \qquad \text{(VI)}$$

iar aria sectorului de oriciclu este

$$\sigma = ks. \qquad \text{(VII)}$$

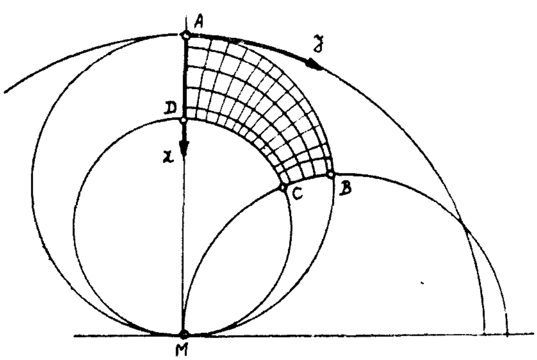

Fig. 5.

Observare. Am calculat ariile cu ajutorul integralelor duble. Ele pot fi calculate ca în Appendix prin integrale simple. În adevăr din (11) deducem

$$\sigma = \int_0^{s_1} s_2(s_1)ds_1 , \tag{14}$$

care dă aria cuprinsă între curbele $s_2 = 0$, $s_2 = s_2(s_1)$, $s_1 = 0$, şi $s_1 = \text{const.}$

II. GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ HIPERBOLICĂ ÎN SPAŢIU

1. *Sisteme de coordonate.* a) În semispaţiul lui Poincaré considerăm un sistem euclidian de axe rectangulare MX, MY, MZ, MX şi MZ fiind în planul absolut. Fie B proiecţia hiperbolică a unui punct P pe planul obişnuit XMY iar U şi V punctele improprii ale dreptei BP. Reprezentăm punctul P fie prin (X, Y, Z) fie prin (x, y, z) unde în planul XMY avem $B(x, y)$, şi z este măsura hiperbolică a segmentului BP. Q fiind intersecţia axei MX cu planul obişnuit care trece prin BP, iar distanţele euclidiene PQ şi BQ fiind egale, avem folosind (1)

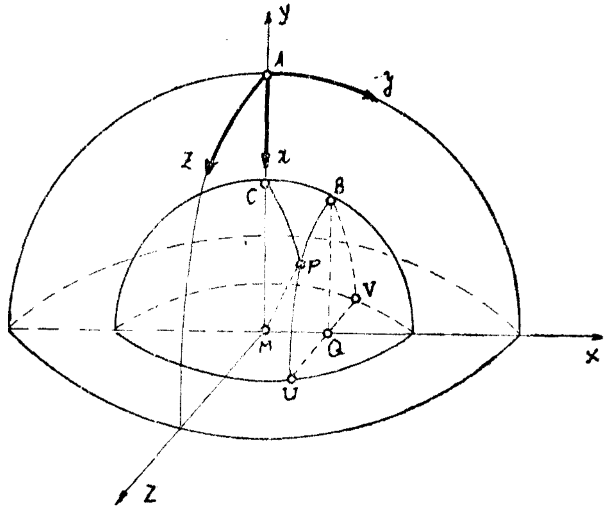

Fig. 7.

$$X = ae^{-\frac{x}{k}} th \frac{y}{k}$$

$$\sqrt{Y^2 + Z^2} = \frac{ae^{-\frac{x}{k}}}{ch \frac{y}{k}}$$

Conform definiţiei

$$Z = kln\,(BPUV) = \frac{k}{2}\,ln\,(0, Z, \sqrt{Y^2 + Z^2}, -\sqrt{Y^2 + Z^2})$$

de unde

$$X = ae^{-\frac{x}{k}} th \frac{y}{k}$$

$$Y = \frac{ae^{-\frac{x}{k}}}{ch \frac{y}{k}\, ch \frac{z}{k}} \tag{15}$$

$$Z = \frac{ae^{-\frac{x}{k}} th \frac{z}{k}}{ch \frac{y}{k}}$$

Din relaţiile

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 e^{-\frac{2x}{k}}$$

$$X^2 = (Y^2 + Z^2)\, sh^2 \frac{y}{k}$$

$$Y\, sh \frac{z}{k} - Z = 0,$$

rezultă că

x = const reprezintă plane hiperbolice nesecante avînd pe MY drept perpendiculară comună

y = const reprezintă conuri euclidiene de rotaţie în jurul axei MX cu vîrful în M.

z = const reprezintă hipersfere corespunzătoare planului obişnuit XMY.

Intersectînd aceste suprafeţe două cîte două găsim un sistem de trei linii parametrice perpendiculare două cîte două şi anume : hiperciclul BM, meridianul sferei cu centrul în M şi de rază MB perpendicular pe planul YMZ, şi paralelul UBV.

b) C fiind proiecţia punctului B pe axa Ax, conform teoremei celor trei perpendiculare dreapta hiperbolică CP este perpendiculară pe Ax. Punctul P poate fi reprezentat prin (x, r, θ) unde r este distanţa hiperbolică CP iar θ unghiul planului ACP în planul xAy, au loc relaţiile absolute

$$\begin{aligned} x &= x \\ th \frac{y}{k} &= th \frac{r}{k} \cos \theta \\ sh \frac{z}{k} &= sh \frac{r}{k} \sin \theta \end{aligned} \tag{16}$$

Din relaţiile

$$Y^2 sh^2 \frac{r}{k} = X^2 + Z^2$$

$$X \operatorname{tg} \theta - Z = 0$$

rezultă că

r = const reprezintă conuri euclidiene de rotaţie în jurul lui MY cu vîrful M

θ = const reprezintă plane obişnuite conţinînd pe MY.

Sistemul celor trei linii parametrice perpendiculare două cîte două este deci format de dreapta hiperbolică CP, cercul cu centrul în C şi de rază CP, şi de hiperciclul PM.

c) Reprezentăm punctul P prin (ρ, θ, φ) unde ρ este distanţa hiperbolică AP şi $\varphi = \sphericalangle (Ax, AP)$. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} th \frac{x}{k} &= th \frac{\rho}{k} \cos \varphi \\ sh \frac{r}{k} &= sh \frac{\rho}{k} \sin \varphi \\ \theta &= \theta \end{aligned} \tag{17}$$

şi

$$\begin{aligned} th\frac{x}{k} &= th\frac{\rho}{k}\cos\varphi \\ sh\frac{y}{k}\,ch\frac{z}{k} &= sh\frac{\rho}{k}\sin\varphi\cos\theta \\ sh\frac{z}{k} &= sh\frac{\rho}{k}\sin\varphi\sin\theta \end{aligned} \tag{18}$$

Din

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\,aY ch\frac{\rho}{k} + a^2 = 0$$

$$X\mathrm{tg}\,\theta - Z = 0$$

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2)^2 - 4a^2(X^2 + Z^2)\mathrm{ctg}^2\varphi = 0,$$

rezultă că

ρ = const reprezintă sfere cu centrul hiperbolic în A.
θ = const reprezintă plane obişnuite care trec prin MX.
φ = const reprezintă suprafeţe de rotaţie în jurul axei MY care pot fi considerate conuri hiperbolice cu vîrful în A şi de generatoare AP.

Intersectînd două cîte două aceste suprafeţe găsim că prin punctul P, trece un sistem de trei linii parametrice perpendiculare două cîte două şi anume: dreapta hiperbolică AP, un cerc situat într-un plan Y = conste şi un cerc mare al sferei cu centrul în A perpendicular pe planul absolut.

d) Fiind dat un punct P considerăm orisfera cu centrul în M şi care trece prin P de ecuaţie

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - auY = 0, \tag{19}$$

şi planele

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{a}{v}X &= 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{a}{w}Z &= 0 \end{aligned} \tag{19'}$$

care trece prin P iar M este un punct impropriu al lor şi sînt reprezentat prin emisfere cu centrele pe MX şi MZ.

Punctul P fiind determinat de aceste trei suprafeţe, poate fi reprezentat prin $P(u, v, w)$. Ţinînd seama de formulele (15), (19) şi (19′) avem

$$\left\{\begin{aligned} u &= e^{-\frac{x}{k}}\,ch\frac{y}{k}ch\frac{z}{k} \\ v &= e^{\frac{x}{k}}\,th\frac{y}{k} \\ w &= e^{\frac{x}{k}}\frac{th\frac{z}{k}}{ch\frac{y}{k}}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Liniile parametrice în acest sistem sînt perpendiculare două cîte două și formate de dreapta PM și de două oricicle trecînd prin P cu centrul comun în M situate respectiv în cele două plane considerate.

2. *Element de arc în spațiu.* Punctele $P(x,y,z,)$, și $P_1(x_1,y_1,z_1,)$ fiind situate pe o curbă (C^1), considerăm planul α care conține dreapta PP_1 și este perpendicular pe planul xAy. Fie U și V punctele improprii ale dreptei BB_1 unde $B(x,y,0)$, $B_1(x_1,y_1,0)$, iar Q intersecția lui B_1P_1 cu hiperciclul UPV din planul α corespunzător dreptei BB_1. Din triunghiul PQP_1 dreptunghic în Q avem relația (§ 31 [34])

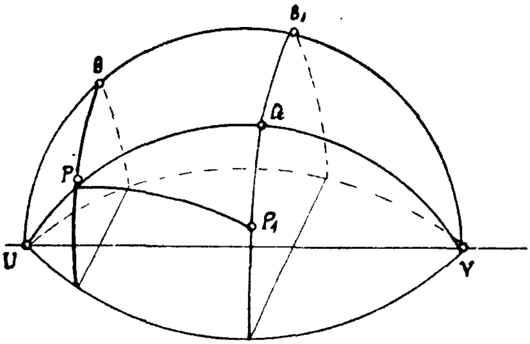

Fig. 7.

$$sh^2\frac{PP_1}{k} = sh^2\frac{QP_1}{k} + sh^2\frac{PQ}{k}\,ch^2\frac{QP_1}{k},$$

care dezvoltînd-o în serie și ținînd seama de (8) și de relația

$$\frac{PQ}{BB_1} = ch\frac{z}{k}.$$

din (§ 27 [3]), devine

$$ds^2 = dz^2 + \left(ch^2\frac{y}{k}\,dx^2 + dy^2\right)ch^2\frac{z}{k}.$$

Elementul de arc în spațiu este deci dat de

$$ds^2 = ch^2\frac{y}{k}\,ch^2\frac{z}{k}\,dx^2 + ch^2\frac{z}{k}\,dy^2 + dz^2, \tag{21}$$

Ținînd cont de (15) avem

$$ds^2 = \frac{k^2(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}{Y^2},$$

deci

$$ds = \frac{k\,ds'}{Y}, \tag{22}$$

expresie care generalizează formula (9).

Din (21) și (16) găsim formula

$$ds^2 = ch^2\frac{r}{k}\,dx^2 + dr^2 + k^2sh^2\frac{r}{k}\,d\theta^2, \tag{21'}$$

care dă elementul de arc în coordonate (x, r, θ).

Din (21′) şi (17) găsim formula

$$ds^2 = d\rho^2 + k^2 sh^2\frac{\rho}{k}\sin^2\varphi d\theta^2 + k^2 sh^2\frac{\rho}{k} d\varphi^2, \tag{21″}$$

care dă elementul de arc în coordonate (ρ, θ, φ).

Pentru a găsi elementul de arc în coordonate (u, v, w) din diferenţierea relaţiilor (20) găsim

$$ke^{\frac{x}{k}} du = -\left(ch\frac{y}{k} ch\frac{z}{k} dx\right) + sh\frac{y}{k}\left(ch\frac{z}{k} dy\right) + ch\frac{y}{k} sh\frac{z}{k} dz.$$

$$ke^{-\frac{x}{k}} ch^2\frac{y}{k} ch^2\frac{z}{k} dv = sh\frac{y}{k} ch\frac{z}{k}\left(ch\frac{y}{k} ch\frac{z}{k} dx\right) + ch\frac{z}{k}\left(ch\frac{z}{k} dy\right)$$

$$ke^{-\frac{x}{k}} ch^2\frac{y}{k} ch^2\frac{z}{k} dw = sh\frac{z}{k}\left(ch\frac{y}{k} ch\frac{z}{k} dx\right) - sh\frac{y}{k} sh\frac{z}{k}\left(ch\frac{z}{k} dy\right) + ch\frac{y}{k} dz.$$

de unde

$$k^2\left[e^{\frac{2x}{k}} du^2 + e^{-\frac{2x}{k}} ch^4\frac{y}{k} ch^4\frac{z}{k}(dv^2 + dw^2)\right] = ch^2\frac{y}{k} ch^2\frac{z}{k} ds^2$$

deci

$$ds^2 = k^2\left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 dv^2 + u^2 dw^2\right). \tag{21‴}$$

3. *Element de arie al unei suprafeţe.* Considerăm, ca în cazul ariilor plane două familii de linii parameteric ortogonale trasate pe suprafaţă. Notînd elementele de arc ale acestor curbe cu ds_1 şi ds_2 elementul de arie este prin definiţie

$$d\sigma = ds_1\, ds_2, \tag{23}$$

sau conform lui (22)

$$d\sigma = \frac{k d\sigma'}{y^2} \tag{24}$$

unde $d\sigma'$ este elementul de arie euclidian corespunzător.

Aplicaţii. a) *Aria calotei sferice.* Considerăm pe o sferă cu centrul în A şi de rază ρ care taie direcţia pozitivă a axei Ax în F sistemul de linii parametrice $\theta = \text{const}$ şi $\varphi = \text{const}$, unde θ şi φ au fost definite în (18). Din (21″) şi (23) deducem

$$\sigma = k^2 \iint_{(E)} sh^2\frac{\rho}{k}\sin\varphi\, d\theta d\varphi$$

expresia care reprezintă aria unei porţiuni de pe sfera dată. În particular, aria calotei cu vîrful în F este dată de

$$\sigma = 2k^2\pi sh^2\frac{\rho}{k}(1 - \cos\varphi_0) = 4k^2\pi sh^2\frac{\rho}{k}\sin^2\frac{\rho_0}{2}, \tag{25}$$

unde $\varphi = \varphi_0$ este ecuaţia paralelului care mărgineşte calota. Aria sferei este deci

$$\sigma = 4\pi k^2 sh^2 \frac{\rho}{k}. \tag{VIII}$$

Pentru a aduce formula (25) la forma dată de Bolyai, notăm cu C un punct de pe paralela $\varphi = \varphi_0$. Avem

$$sh \frac{\rho}{k} \sin \frac{\varphi_0}{2} = sh \frac{FC}{2k},$$

de unde

$$\sigma = 4\pi k^2 sh^2 \frac{FC}{2k} = \odot FC. \tag{IX}$$

Am găsit deci următoarea proprietate absolută: aria calotei sferice este egală cu aria cercului descris de coarda FC ca rază.

b) *Aria unei porţiuni de orisferă.* Considerăm pe orisfera $u = \text{const}$, liniile parametrice $v = \text{const}$ şi $w = \text{const}$. definite prin (20). Din (21''') şi (23) deducem expresia

$$\sigma = k^2 u^2 \iint\limits_{(E)} dv dw, \tag{26}$$

care dă aria unei porţiuni de pe orisfera dată. Cercul care limitează o calotă orisferică cu polul în punctul F de intersecţie a orisferei cu axa x, are ecuaţiile carteziene:

$$u = \text{const}, \quad Y = \text{const},$$

care devin folosind (15) şi (20)

$$u = \text{const} \quad u^2(v^2 + w^2) = \frac{au}{Y} - 1.$$

Dar, din (19), (15) şi (16) se deduce

$$\frac{au}{Y} - 1 = sh^2 \frac{r}{k}.$$

Înlocuind avem ecuaţiile paralelului

$$u = \text{const}$$

$$v^2 + w^2 = \frac{1}{u^2} sh^2 \frac{r}{k} \tag{27}$$

unde r este raza paralelului.

Prin urmare, pentru a afla aria calotei orisferice integrăm în interiorul cercului (27) şi obţinem

$$\sigma = k^2 \pi sh^2 \frac{r}{k}. \tag{X}$$

Deoarece conform formulei (10′), $ksh\, \frac{r}{k}$ este raza orisferică a cercului considerat, aria unui cerc pe orisferă se calculează cu formula euclidiană.

Observaţie. Pe hipersferă ariile se calculează analog.

4. *Element de volum.* Considerăm trei familii de curbe două cîte două ortogonale şi fie ds_1, ds_2, ds_3 elementele de arc de pe aceste curbe. Prin definiţie, elementul de volum este dat de

$$dv = ds_1\, ds_2\, ds_3, \tag{28}$$

care, folosind (9) devine

$$dv = \frac{k^3 ds_1' ds_2' ds_3'}{Y^3},$$

sau

$$dv = \frac{k^3 dv'}{Y^3}, \tag{29}$$

unde dv' este elementul de volum euclidian corespunzător.

În coordonatele (x, y, z), folosind formula (21), elementul de volum devine

$$dv = ch \frac{y}{k}\, ch^2 \frac{z}{k}\, dx dy dz. \tag{30}$$

În coordonatele (x, r, θ) avem, folosind (21′)

$$dv = ksh \frac{r}{k}\, ch \frac{r}{k}\, dx dr d\theta; \tag{30′}$$

în coordonatele (ρ, θ, φ) avem din (21″)

$$dv = k^2 sh^2 \frac{\rho}{k} \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \tag{30″}$$

iar în coordonatele (u,v,w) din (21‴) avem

$$dv = k^3 u du dv dw. \tag{30‴}$$

Observare. Formulele (30), (30′), (30″), şi (30‴) pot fi deduse din (29) folosind schimbările de variabile (15), (16), (17) şi (20) şi ţinînd seama de

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = \frac{a^3 e^{-\frac{3z}{k}}}{k^3 ch^2 \frac{y}{k} ch \frac{z}{k}}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x, r, \theta)} = \frac{k sh \frac{v}{k}}{ch \frac{z}{k}}$$

$$\frac{D(x, r, \theta)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \frac{k sh \frac{\rho}{k}}{ch \frac{r}{k}}$$

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = -\frac{e^{\frac{z}{k}}}{k^3} ch \frac{z}{k}.$$

Aplicaţie. a) *Volumul sferei.* Sistemul de coordonate fiind (ρ, θ, φ), volumul sferei cu centrul în A şi de rază ρ se calculează cu ajutorul formulei (30″). Avem

$$V = k^2 \iiint\limits_{(E)} sh^2 \frac{\rho}{k} \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \frac{k^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\rho} \left(ch \frac{2\rho}{k} - 1 \right) d\rho$$

deci

$$V = \pi k^3 sh \frac{2\rho}{k} - 2\pi k^2 \rho \cdot \tag{XI}$$

b) Volumul cuprins între porţiunea de orisferă mărginită de o curbă (C) şi de axele orisferei care trec prin punctele curbei (C) se găseşte cu ajutorul formulei (30‴), figura fiind raportată la sistemul u,v,w. Avem

$$V = k^3 \iiint\limits_{(E)} u du dv dw = k^3 \iint\limits_{(E_1)} dv dw \int\limits_0^{\mu} u du$$

deci

$$V = \frac{k}{2} \sigma, \tag{XII}$$

unde σ este, după cum ne arată (26), aria porţiunii de pe orisferă mărginită de curba (C).

c) Volumul cuprins între o arie plană limitată de curba (C), de hipersfera corespunzătoare planului în care se află aria dată şi dreptele perpendiculare pe acest plan duse prin punctele curbei (C) este, folosind coordonatele (x,y,z) şi (30)

$$V = \iiint\limits_{(E)} ch\frac{y}{k}\, ch^2\frac{z}{k}\, dxdydz = \iint\limits_{(E)} ch\frac{y}{k}\, dxdy \int_0^z ch^2\frac{z}{k}\, dz$$

deci

$$V = \frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{k}{2} sh\frac{2z}{k}\right); \qquad \text{(XIII)}$$

unde σ este conform formulei (13) aria plană limitată de (C).

5. *Aria laterală şi volumul corpurilor de rotaţie.* a) În cazul unei suprafeţe de rotaţie în jurul axei Ax, alegem drept linii parametrice meridianele şi paralelele. Raportînd figura la sistemul de coordonate (x,r,θ) şi notînd cu ds elementul de arc al meridianului, avem, folosind (21′)

$$\sigma = \iint\limits_{(E)} ksh\frac{r}{k}\, d\theta ds,$$

de unde ducem aria generală prin rotirea completă a unui arc de meridian cuprins între două paralele

$$\sigma = 2\pi k \int_{x_0}^{x} sh\frac{r}{k}\, ds \qquad (31)$$

formulă care este absolută.

Dacă curba generatoare este situată în planul xAy atunci $r = y$, şi (31) devine

$$\sigma = 2\pi k \int_{x_0}^{x} sh\frac{y}{k}\, ds. \qquad (31')$$

În particular, dacă curba generatoare este un hiperciclu corespunzător axei Ax avem din (8)

$$\sigma = 2\pi k \int_{x_0}^{x} sh\frac{y}{k} ch\frac{y}{k}\, dx,$$

deci

$$\sigma = k\pi(x - x_0) sh\frac{2y}{k}. \qquad \text{(XIV)}$$

b) În cazul unui corp obţinut prin rotirea unei curbe (c) în jurul axei Ax, volumul corpului generat de curba (C) şi mărginit de două paralele, este dat în sistemul (x,y,θ), folosind (30′), de

$$V = 2\pi k \int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{r} sh\frac{r}{k}\, ch\frac{r}{k}\, dr\,,$$

sau, considerînd curba generatoare (C) dată în planul xAy

$$V = k^2\pi \int_{x_0}^{x} sh^2\frac{y}{k}\, dx\,. \tag{32}$$

În particular, dacă (C) este un hiperciclu corespunzător axei Ax avem

$$V = k^2\pi(x-x_0)\, sh^2\frac{y}{k}\,. \tag{XV}$$

BIBLIOGRAFIE

1. János Bolyai, *Appendix*, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1954.
2. S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol. I. Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1954.
3. M. Neumann, M. Bica, L. Stanciu, *Despre Appendix*. „Lucrările ştiinţifice ale Institutului pedagogic Timişoara", 1960.
4. M. Neumann, M. Bica, L. Stanciu, *Despre Appendix* (II)., „Lucrările ştiinţifice ale Institutului pedagogic Timişoara", 1961.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ БОЛЬЯИ

(Резюме)

В настоящей работе выведены результаты, полученные Больяи в § 32 „Аппендикс"-а в полупространстве Пуанкаре. Вводятся плоские системы координат, которые даны с помощью формул (1), (2) и (5), и трёхмерные системы координат, которые даны через (15), (16), (18), (20); элемент дуги в плоскости (8), (8′) и (8″) и в пространстве (21), (21′), (21″) и (21‴); элемент площади определяется выражением (11), откуда выводятся (13), (13′), (13″), а элемент объёма определяется через (28) который в вышеизложенных системах координат выражается формулами (30), (31′), (31″), (31‴).

Результаты применяются для вычисления дуги орицикла и окружности, площади круга, орициклического сектора, площади шарового сегмента, поверхности сферы, части орисферы, объёма сферы и. т. п.

LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DE J. BOLYAI

(R é s u m é)

Les auteurs déduisent dans le demi-espace de Poincaré les résultats trouvés par Bolyai et exposés au §32 de l'Appendix, qui traite de la géométrie différentielle. Les auteurs introduisent des systèmes de coordonnées planes données par les formules (1), (2) et (5) et des systèmes de coordonnées dans l'espace données par (15), (16), (18) et (20), l'élément d'arc dans le plan est donné par (8), (8') et (8'') ; l'élément d'arc dans l'espace, par (21), (21'), (21'') et (21''') ; l'élément d'aire est défini par (11), d'où l'on déduit (13), (13'), (13''), et l'élément de volume est défini par (28), qui dans les systèmes de coordonnées considérés devient (30), (31'), (31'') et (31''').

A titre d'application, on calcule la longueur d'arc d'horicycle et de cercle, l'aire du cercle du secteur d'horicycle, de la calotte sphérique, de la sphère, d'une portion d'horisphère, le volume de la sphère etc.

ASUPRA CLASEI SPAȚIILOR RIEMANNIENE V_3 CU GRUP DE MIȘCĂRI NETRANZITIVE

de

P. ENGHIȘ

Fiind dată o varietate riemanniană V_n cu elementul liniar :

$$ds^2 = gij\, du^j du^i \quad (i,j = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

prin clasa sa înțelegem un număr întreg pozitiv q astfel ca metrica (1) să fie realizată pe o suprafață cu n dimensiuni dintr-un spațiu euclidian E_{n+q}

$$y^i = y^i\ (u^1, \ldots, u^n) \quad (i = 1,\ldots, n, \ n+1,\ldots, n+q) \tag{2}$$

astfel ca realizarea să nu fie posibilă într-un Em cu $m<n+q$.

În acest caz va trebui ca în baza relației (2) să avem :

$$(dy^1)^2 + \ldots + (dy^{n+q})^2 = gij\ du^i du^j \tag{3}$$

de unde rezultă :

$$\frac{\partial y^i}{\partial u^k}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial u^s} = g_{ks} \qquad \begin{matrix}(i = 1, \ldots, n+q)\\ (k,s = 1, \ldots, n)\end{matrix} \tag{4}$$

Ricci a arătat că sistemul (4) este echivalent cu sistemul :

$$\begin{cases} Rijkl = \sum\limits_{s=1}^{b} (\lambda^s_{ij}\lambda^s_{jc} - \lambda^s_{ie}\lambda^s_{jk}) \\ \lambda^s_{ik,j} - \lambda^s_{ij,k} = \lambda^t_{ij} A^s_{tk} - \lambda^t_{ik} A^s_{tj} \\ \dfrac{\partial A^s{}_{tk}}{\partial u^j} - \dfrac{\partial A^s{}_{tj}}{\partial u^k} = \lambda^l_{tj}\lambda^s_{lk} - \lambda^l_{tk}\lambda^s_{lj} + A^\sigma_{tj} A^s_{\sigma k} - A^\sigma_{tK} A^s_{rj}. \end{cases} \tag{5}$$

unde $i, j, k, 1 = 1, 2, 3, \ldots, n$, iar $s, t, = 1,2,\ldots, q$.

În sistemul (5), funcțiile Rijkl sînt componentele tensorului lui Riemann Cristoffel, iar λ și A funcții necunoscute care determină scufundarea. Aceste ecuații se numesc, respectiv, ecuațiile lui Gauss, Codazzi și Ricci.

Condiţia ca metrica (1) să aibă clasa$\leq q$, capătă astfel două formulări echivalente şi anume:

1. Condiţia necesară şi suficientă ca metrica (1) să fie de clasă $\leq q$ este ca să existe $n+q$ funcţiuni y^i care să satisfacă sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (4).

2. Condiţia necesară şi suficientă ca metrica (1) să fie de clasă $\leq q$, este ca să existe funcţiunile $\overset{s}{\lambda}_{ik}$ şi $\overset{s}{A}_{tj}$ care să satisfacă sistemul (5).

Sistemul (4) conţine $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţii şi $n+q$ funcţiuni necunoscute y^i. El admite întotdeauna soluţii pentru $n+q=\frac{n(n+1)}{2}$ conform teoremei lui Schlafli deci o varietate riemanniană V_n admite întotdeauna scufundarea în $E_{\frac{n(n+1)}{2}}$. Clasa unei metrici riemanniene verifică deci relaţia $q \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Dacă scufundarea are loc într-un spaţiu euclidian real numărul întreg pozitiv q se numeşte clasă reală, iar dacă scufundarea are loc într-un spaţiu euclidian imaginar atunci întregul pozitiv q se numeşte clasă imaginară.

Cartan [1] şi Janet [2] s-au ocupat de această problemă nefăcînd nici o deosebire între clasa reală şi clasa imaginară.

C. Burstin [3], arată că şi clasa reală maximă este $\frac{n(n-1)}{2}$.

Prin urmare dacă q_1 e clasa reală avem inegalităţile:

$$0 \leqslant q \leqslant q_1 \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

Determinarea clasei unei metrici (1) necesită integrarea unui sistem mixt de ecuaţii cu derivate parţiale (5), ceea ce practic prezintă mari greutăţi.

O problemă importantă este stabilirea unor criterii invariante pentru determinarea clasei.

În acest sens singurele criterii generale cunoscute sînt cele ale lui Weise referitoare la clasa $q=1$. Prin aceste criterii Weise indică modul de rezolvare a sistemului de ecuaţii al lui Gauss, soluţia indicată fiind următoarea:

$$\pm \lambda_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} R_{ikrs} & R_{ikrt} \\ R_{ilrs} & R_{ilrt} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{ikrs} & R_{ikrt} & R_{ikst} \\ R_{ilrs} & R_{ilrt} & R_{ilst} \\ R_{klrs} & R_{klst} & R_{klst} \end{vmatrix}^{1/2}} \tag{6}$$

cu condiţiile:

$$\begin{vmatrix} R_{ik_1rs_1} & R_{ik_1rt_1} & R_{ik_1s_1t_1} \\ R_{il_1rs_1} & R_{il_1rt_1} & R_{il_1s_1t_1} \\ R_{k_1l_1rs_1} & R_{k_1l_1rt_1} & R_{k_1l_1s_1t_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{ik_2rs_2} & R_{ik_2rt_2} \\ R_{il_2rs_2} & R_{il_2rt_2} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} R_{ik_2rs_2} & R_{ik_2rt_2} & R_{ik_2s_2t_2} \\ R_{il_2rs_2} & R_{il_1rt_2} & R_{il_2s_2t_2} \\ R_{k_2l_2rs_2} & R_{k_2l_2rt_2} & R_{k_2l_2s_2t_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{ik_1rs_1} & R_{ik_1rt_1} \\ R_{il_1rs_1} & R_{il_1rt_1} \end{vmatrix}^2$$

Funcţiile λ_{ir} astfel determinate trebuie să verifice sistemul:

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\lambda_{il} - \frac{\partial}{\partial u^l}\lambda_{ik} + \Gamma^j_{il}\lambda_{jk} - \Gamma^j_{ik}\lambda_{il} = 0 \tag{7}$$

(Ecuaţiile lui Codazzi)

Rezultatele obţinute de Weise sînt sistematizate de Ianenco în [4].

Pentru clasă mai mare decît unitatea nu se cunosc astfel de criterii, din care cauză puţine metrici sînt cu clasa determinată.

Se ştie de exemplu că metricile conform-euclidiene au clasa cel mult egală cu doi (Brinkmann, 1932). Metrica lui Schwartzschild, adică spaţiul riemannian V_4 creat de mase distribuite simetric în jurul unui punct, are clasa doi (Kasner, 1921).

Nu se ştie nimic despre clasa varietăţilor riemanniene V_3 în cazul că clasa depăşeşte unitatea.

Un obiectiv important este înlocuirea sistemului (5) cu altul echivalent dar simplificat, care să poată fi mînuit uşor.

C. Burstin [5] se ocupă de această problemă, plecînd de la un spaţiu V_n cu metrica de clasă q. El va putea fi atunci scufundat în E_{n+q} în care alegem un sistem de coordonate carteziene ortogonale $y^1, y^2,\ldots,y^q$ faţă de care spaţiul V_n va fi dat de ecuaţiile:

$$y^i = y^i(u^1,\ldots,u^n) \qquad (i = 1,\ldots,n+q).$$

Varietatea definită de:

$$\begin{matrix} \bar{y}^\alpha = y^\alpha\ (u^1,\ldots,u^n) + u^{n+\alpha} \\ \bar{y}^\beta = y^\beta\ (u^1,\ldots,u^n) \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha = 1,\ldots,q \\ \beta = q+1,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{8}$$

unde $u^{n+\alpha}$ sînt q variabile noi, are matricea $\left\| \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial u^k} \right\|$ de rang $n+q$ şi se confundă cu o porţiune a lui E_{n+q} şi deci va avea tensorul de curbă nul.

$$\bar{R}^i_{klm} = 0 \quad (i,\ k,\ l,\ m, = 1,\ldots\ n+q) \tag{9}$$

Ecuaţiile (9) constituie condiţiile necesare şi suficiente ca V_n cu metrica (1) să fie de clasă q.

Burstin demonstrează că sistemul (9) conţine $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ ecuaţii independente, număr egal cu numărul ecuaţiilor lui Gauss, prin urmare mai puţine ecuaţii decît sistemul (5).

Tot Burstin arată [6] că rezolvarea sistemului (9) se reduce la o problemă algebrică de unde rezultă o metodă formală pentru determinarea clasei reale a unui V_n cu metrica (1). Metoda constă în cercetarea sistemului (9) succesiv pentru valorile $q = 1, 2,\ldots$ şi primul întreg q pentru care sistemul admite soluţii reale ne va da clasa reală. Metoda indicată este însă pur formală.

În cele ce urmează se delimitează clasa unor metrici care apar în clasificarea spaţiilor riemanniene V_3 după grupul lor de mişcări. Această clasificare a fost dată de B i a n c h i [7] pentru spaţiile propriu riemanniene şi de K r u c i k o v i c i [8] în cazul spaţiilor riemanniene cu metrici nepozitiv definite.

Pentru determinarea clasei acestor metrici se stabilesc transformările care permit scrierea metricii sub forma euclidiană. Pe această cale se obţin reprezentări analitice parametrice pentru varietatea care realizează metrica.

Spaţiile V_3 cu grup de mişcări netranzitiv G_3, au metrici care se pot reduce la următoarele tipuri :

$$\begin{aligned} &\text{I. } ds^2 = e_1 dx_1^2 + \varphi(x_1)(dx_2^2 + e_3 dx_3^2) \quad e_1 \text{ şi } e_3 = \pm 1 \\ &\text{II. } ds^2 = e_1 dx_1^2 + \varphi(x_1)(dx_2^2 + \sin^2 x_2\, dx_3^2) \\ &\text{III. } ds^2 = e_1 dx_1^2 + \varphi(x_1)(dx_1^2 + sh^2 x_2 dx_3^2) \end{aligned} \tag{10}$$

în cazul cînd suprafeţele de tranzitivitate ale grupului sînt neizotrope şi la :

$$\text{IV. } ds^2 = g_{11}(x_1)dx_1^2 + 2\, g_{12}(x_1)dx_1 dx_2 + g_{33}(x_1)dx_3^2 \tag{11}$$

cînd suprafeţele de tranzitivitate sînt izotrope, funcţiile g fiind funcţii arbitrare de x_1 iar g_{12} şi g_{33} diferite de zero.

Pentru metrica de tip. I. dacă se aplică transformarea :

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\varphi(x_1)} \cos x_2 & y_4 &= \sqrt{\varphi(x_1)} \sin \sqrt{e_3} x_3 \\ y_2 &= \sqrt{\varphi(x_1)} \sin x_2 & & \\ y_3 &= \sqrt{\varphi(x_1)} \cos \sqrt{e_3} x_3 & y_5 &= \int \sqrt{e_1 - 2(\sqrt{\varphi})'^2}\, dx_1 \end{aligned}$$

elementul liniar ia forma euclidiană: $ds^2 = \sum_{i=1}^{5} dy_i^2$.

Pentru tipul I de varietăţi, scufundările au loc într-un E_5 clasa $q \leq 2$. Aplicînd însă criteriul lui Weise se arată uşor că avem $q = 1$ pentru φ oarecare.

În cazul particular $\varphi(x_1) = x_1^2$ transformările se pot scrie

$$y_1 = \sqrt{\frac{e_1}{2}}\, x_1 \cos \sqrt{2\ e_1}\, x_2$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{e_1}{2}}\, x_1 \sin \sqrt{2 e_1}\ x_2$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{e_1}{2}}\, x_1 \cos \sqrt{2\ e_1 e_3}\ x_3$$

$$y_4 = \sqrt{\frac{e_1}{2}}\, x_1 \sin \sqrt{2\, e_1 e_3}\, x_3$$

spaţiul de scufundare este E_4, clasa metricii este $q = 1$, realizarea fiind reală pentru $e_1 = 1$ şi $e_2 = 1$.

Pentru metricile de tipul II. transformările care o reduc la forma euclidiană sînt :

$$y_1 = \sqrt{\varphi} \sin x_2 \cos x_3$$

$$y_2 = \sqrt{\varphi} \sin x_2 \sin x_3$$

$$y_3 = \sqrt{\varphi} \cos x_2$$

$$y_4 = \int \sqrt{e_1 - (\sqrt{\varphi})'^2}\, dx_1$$

Suprafețele pe care se realizează metrica sînt hipersuprafețele de rotație în E_4. Tensorul de curbură al spațiului pentru $\varphi \neq x_1^2$ este diferit de zero prin urmare clasa este $q = 1$. Pentru spațiile proprii riemanniene realizarea este reală dacă $4\varphi(x_1) - \varphi'^2(x_1) > 0$.

Pentru $\varphi(x_1) = x_1^2$ și $e_1 = 1$ tensorul de curbură al spațiului este nul, spațiul este euclidian cu realizarea :

$$y_1 = x_1 \sin x_2 \cos x_3$$
$$y_2 = x_1 \sin x_2 \sin x_3$$
$$y_3 = x_1 \cos x_2$$

Pentru $\varphi(x_1) = x_1^2$ și $e_1 = -1$ realizarea este :

$$y_1 = x_1 \sin x_2 \cos x_3 \qquad y_4 = i\sqrt{2}\, x_1$$
$$y_2 = x_1 \sin x_2 \sin x_3$$
$$y_3 = x_1 \cos x_2$$

clasa este și în acest caz egală cu unitatea.

Metrica de tipul III. în (10) ia forma euclidiană prin transformarea :

$$y_1 = \sqrt{\varphi}\; sh\; x_2 \cos \sqrt{e_3}\, x_3$$

$$y_2 = \sqrt{\varphi}\; sh\; x_2 \sin \sqrt{e_3}\; x_3$$

$$y_3 = i\sqrt{\varphi}\; ch\; x_2$$

$$y_4 = \int \sqrt{e_1 + (\sqrt{\varphi})'^2}\, dx_1 .$$

suprafețele din E_5 pe care este realizată metrica sînt tot hipersuprafețele de rotație. Tensorul de curbură al spațiului nefiind nul în general, clasa acestor varietăți este egală cu unitatea.

Dacă în cazul de mai sus avem $\varphi(x_1) = x_1^2$ şi $e_1 = -1$, tensorul de curbură al spaţiului este nul iar spaţiul este euclidian cu realizarea :

$$y_1 = x_1 sh\ x_2 \cos\sqrt{e_3}\ x_3$$

$$y_2 = x_1\ sh\ x_2 \sin\sqrt{e_3}\ x_3$$

$$y_3 = i\, x_1\, ch\, x_3.$$

Pentru metrica de tip IV în (11), cînd suprafeţele de transitivitate ale grupului sînt izotrope, transformarea :

$$y_1 = x_1 + \int g_{12}\ dx_1$$

$$y_2 = i\ x_2$$

$$y_3 = \sqrt{g_{33}}\ \cos\ x_3$$

$$y_4 = \sqrt{g_{33}}\ \sin\ x_3$$

$$y_5 = \int\sqrt{g_{11} - g_{12}^2 - (\sqrt{g_{33}})'^2}\, dx_1$$

o reduce la forma euclidiană; spaţiul de scufundare este E_5. Din cercetarea criteriilor lui Weise rezultă că funcţiile λ în (6) sînt nedeterminate, criteriul este inaplicabil. Sistemul lui Gauss (5) pentru forma cea mai generală a metricii de tipul IV din (11) este practic foarte greu de mînuit. Din scufundarea dedusă mai sus, rezultă pentru clasa acestei metrici $q \leq 2$.

Dacă $g_{33}(x_1)$ satisface ecuaţia diferenţială :

$$g_{33}\ g_{33}'' + g_{33}'^2 = 0\cdot$$

tensorul de curbură este nul şi spaţiul este euclidian.

Spaţiile V_3 cu grup G_4 de mişcări cu divizor normal G_3 netranzitiv, au metricele care se reduc la următoarele tipuri :

$$\begin{aligned}
\text{V.}\ ds^2 &= Kdx_1^2 + 2\, dx_1dx_2 - \cos^2 x_1 dx_3^2 \\
\text{VI.}\ ds^2 &= Kdx_1^2 + 2(2 - C)e^{cx_1}\ dx_1dx_2 + e^{2x_1}dx_3^2 \\
\text{VII.}\ ds^2 &= Kdx_1^2 + e^{2x_1}(2\ dx_1dx_2 - dx_3^2)
\end{aligned}\tag{12}$$

dacă grupul G_4 este rezolubil şi la :

$$\begin{aligned}
\text{VII.}\ ds^2 &= e_1dx_1^2 + dx_2^2 + dx^2 + \sin^2 x_2dx_3^2 \\
\text{IX.}\ ds^2 &= e_1dx_1^2 + dx_2^2 + e_3sh^2x_2dx_3^2
\end{aligned}\tag{13}$$

dacă grupul este nerezolubil.

În (12) C şi K sînt constante cu $C \neq 2$ iar e_1 şi e_3 în (13) sînt soluţii ale ecuaţiei $e^2 = 1$. Suprafeţele de tranzitivitate în cazul rezolubil, sînt izotrope, cele neizotrope fiind admise numai de cazul nerezolubil.

Metricele de tipul V se reduc la forma euclidiană prin transformarea :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= i x_2 \\ y_3 &= \cos x_1 \cos i x_3 \\ y_4 &= \cos x_1 \sin i x_3 \\ y_5 &= \int \sqrt{K - 1 - \sin^2 x_1}\, dx_1. \end{aligned}$$

şi spaţiul de scufundare este E_5.

Pentru metricele de tipul VI. avem transformările :

$$y_1 = \frac{2-C}{C} e^{cx_1} + x_2 \qquad y_4 = i x_2$$

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{x1} \cos x_3 \\ y_3 &= e^{x1} \sin x_3 \end{aligned} \qquad y_5 = \int \sqrt{K - e^{2x_1} - (2-c)^2 e^{2x_1}}\, dx_1$$

pentru $C \neq 0$ şi

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\ x_1 + x_2 \\ y_2 &= i x_2 \\ y_3 &= e^{x1} \cos x_3 \\ y_4 &= e^{x1} \sin x_3 \\ y_5 &= \int \sqrt{K - e^{2x_1} - 4}\ dx_1 \end{aligned}$$

pentru $C = 0$ care reduc elementul liniar la forma euclidiană. Spaţiul de scufundare este tot E_5.

Din aplicarea criteriului lui Weise pentru cazul tipurilor V, VI şi VII în (12) se constată că funcţiile λ în (6) sînt nedeterminate deci criteriul este inaplicabil. Din scufundările date rezultă că în toate tipurile din (12) pentru clasă avem relaţia $q \leq 2$.

Tipul VIII este caz particular al tipului II iar tipul IX este caz particular al tipului III, deci ambele au clasa egală cu unitatea iar scufundarea se deduce în ambele cazuri din cele anterioare.

Spaţiile riemanniene V_3 cu grup de mişcări G_3 netranzitiv şi cu grup de mişcări G_4 al cărui divizor normal G_3 este netranzitiv, au clasa egală cu unitatea dacă suprafeţele de tranzitivitate sînt neizotrope şi clasa $q \leq 2$ dacă suprafeţele de tranzitivitate sînt izotrope, afară de cazul spaţiilor euclidiene.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*. „Annales Soc. pol. math.", **6**, 1927.
2. M. Janet, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*. „Annales Soc. pol. math.", **5**, 1926.
3. C. Burstin, *Problema izghivania ghiperpoverhnostei v evklidovîh prostranstvah*. „Mat. zbornik" 1930.
4. N. N. Iauenko, *Nekotorîie voprosî iz teorii vlojenia mnogomernîh rimanovîh metrik v evklidovî prostranstva*. „U.M.N.„ **VIII** 1. 1953.
5. C. Burstin, *Zum Einbettungsproblem*. „Societ. matem. Harkov." 1932.
6. C. Burstin, *K probleme Pfaffa i k teorii pfaffovîh agregatov*. „Mat. zbornik" 1934.
7. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*. Pisa, 1918.
8. K. I. Krucikovici, *Klassifikaţia trehmernîh rimanovîh prostanstv po gruppam dvijenia*. „U.M.N." **IX** 1954.

О КЛАССЕ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ V_3 С НЕТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЯ

(Резюме)

В статье изучается класс римановых пространств V_3 с нетранзитивной группой движения. Доказывается, что римановые пространства V_3 с нетранзитивной группой движения G_3 и с группой движения G_4, нормальный делитель которого G_3 является нетранзитивным, имеют класс равный единице, если поверхности транзитивности неизотропны, и имеют класс $q \leqq 2$ если поверхности транзитивности являются изотропными, исключая случай эвклидовых пространств.

SUR LA CLASSE DES ESPACES RIEMANNIENS V_3 À GROUPE DE MOUVEMENTS NON-TRANSITIF

(Résumé)

L'auteur étudie la classe des espaces riemanniens V_3 à groupe de mouvements non-transitif. Il établit que les espaces riemanniens V_3 à groupe de mouvements G_3 non-transitif et à groupe de mouvements G_4 dont le diviseur normal G_3 est non-transitif ont la classe égale à l'unité si les surfaces de transitivité sont non-isotropes, et la classe $q \leqq 2$ quand les surfaces de transitivité sont isotropes, en dehors du cas des espaces euclidiens.

INVARIANŢII DIFERENŢIALI PROIECTIVI AI SUPRAFEŢELOR RIGLATE

de

TIBERIU MIHĂILESCU (Bucureşti)

1. În lucrarea noastră [1] am stabilit un sistem complet de invarianţi diferenţiali proiectivi care apar în etapa fixării unei familii de repere mobile asimptotice (R_3) asociate unui punct al unei suprafeţe riglate care nu este nici cuadrică şi nici suprafaţă desfăşurabilă.

Cu excepţia unuia din invarianţii finiţi şi a doi invarianţi infinitezimali, ceilalţi invarianţi au fost însoţiţi de semnificaţii geometrice.

Pentru a completa această lacună, revenim — în cele ce urmează — asupra problemei invarianţilor, modificînd puţin sistemul stabilit în [1] şi dînd semnificaţii geometrice pentru toţi invarianţii, atît cei finiţi cît şi cei infinitezimali, care sînt asociaţi familiei reperelor asimptotice de clasă egală cu 3 relative la suprafeţele simplu riglate nedesfăşurabile.

2. Tetraedrul unui reper (R_3), asociat unui punct M al unei suprafeţe simplu riglate nedesfăşurabile (S), este bine determinat ca poziţie.

Vîrful A_0 coincide cu un punct regulat M al suprafeţei (S), dreapta $[A_0, A_1]$ este generatoarea rectilinie care conţine punctul A_0 iar dreapta $[A_0, A_2]$ este tangenta la linia asimptotică curbilinie (C_2) care conţine acelaşi punct A_0.

Dreptele $[A_0, A_3]$, $[A_1, A_2]$ sînt —respectiv— axa cuspidală a unui con (Γ) cu vîrful în A_0 şi dreapta inflexiunilor a unei cubice nodale (C) din planul tangent în A_0 la (S), figuri care se obţin din problema variaţională simplă asupra invariantului infinitezimal fundamental al lui Bompiani, iar punctul A_3 este punctul comun cuadricei osculatoare în A_0 la (S) de-a lungul generatoarei rectilinii $[A_0, A_1)$ cu axa cuspidală a conului (Γ).

Relaţiile caracteristice ale familiei de repere (R_3) sînt [1]:

$$\left.\begin{array}{llll} \omega_{03} = 0, & \omega_{13} = b_2\omega_{02}, & \omega_{23} = b_2\omega_{01}, & \\ \omega_{12} = 0, & \omega_{21} = c_3\omega_{02}, & db_2 + b_2(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) = 0, & \\ \omega_{10} = b_2\omega_{32}, & \omega_{20} = b_2\omega_{31}, & dc_3 + c_3(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}) = 0, & \\ \omega_{30} = c_3b_5\omega_{02}, & \omega_{31} = b_5'\omega_{01} + c_5\omega_{02}, & \omega_{32} = b_5\omega_{01} - 2b_5'\omega_{02} & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Din aceste relaţii, din ecuaţiile de structură ale familiei de repere proiective şi din relaţiile deduse prin rezolvarea sistemului exterior asociat sistemului (1) rezultă că, în raport cu o variaţie a parametrilor secundari rămaşi, care sînt parametrii de poziţie ai punctului unitate, care a rămas arbitrar, coeficienţii sistemului (1) şi formele principale ω_{01}, ω_{02} admit următoarele variaţii :

$$\left.\begin{array}{l} \delta b_2 = -b_2(e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}),\ \delta c_3 = -c_3(e_{00} + e_{11} - 2e_{22}), \\ \delta b_5 = -b_2(e_{00} - e_{11} + e_{22} - e_{33}),\ \delta b_5' = -b_5'(e_{00} - e_{33}), \\ \delta c_5 = -c_5(e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33}), \\ \delta\omega_{01} = (e_{00} - e_{11})\omega_{01},\ \delta\omega_{02} = (e_{00} - e_{22})\omega_{02} \end{array}\right\} \quad (2)$$

În modul cunoscut se stabileşte că invarianţi finiţi, care apar odată cu fixarea familiei (R_3), sînt soluţiile sistemului complet [1] :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 f = b_2\dfrac{\partial f}{\partial b_2} - c_3\dfrac{\partial f}{\partial c_3} + b_5\dfrac{\partial f}{\partial b_5} - c_5\dfrac{\partial f}{\partial c_5} = 0 \\ X_2 f = b_2\dfrac{\partial f}{\partial b_2} + 2c_3\dfrac{\partial f}{\partial c_3} - b_5\dfrac{\partial f}{\partial b_5} - c_5\dfrac{\partial f}{\partial c_5} = 0 \\ X_3 f = b_2\dfrac{\partial f}{\partial b_2} - b_5'\dfrac{\partial f}{\partial b_5'} - b_5'\dfrac{\partial f}{\partial b_5'} - c_5\dfrac{\partial f}{\partial c_5} = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

iar invarianţii infinitezimali relativi la aceeaşi familie sînt soluţiile sistemului complet

$$\left.\begin{array}{l} X_1' f = X_1 f - \omega_{01}\dfrac{\partial f}{\partial\omega_{01}} = 0 \\ X_2' f = X_2 f - \omega_{02}\dfrac{\partial f}{\partial\omega_{02}} = 0 \\ X_3' f = X_3 f \qquad\qquad\quad = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

În ipoteza

$$b_5 b_5' c_5 \neq 0$$

a cărei semnificaţie geometrică rezultă din lucrarea menţionată ([1], p. 228–235), se deduce că sistemele (3) şi (4) admit, respectiv, 2 şi 4 soluţii independente, soluţiile generale fiind funcţiuni arbitrare de soluţiile independente ale fiecărui sistem.

Ca invarianţi finiţi independenţi vom considera funcţiunile

$$f_1 = \frac{b_5'^2}{b_5 c_5},\quad f_2 = \frac{b_2 c_5^2}{c_3^2 b_5} \quad (5)$$

iar ca invarianţi infinitezimali independenţi considerăm funcţiunile

$$\varphi_1 = \frac{c_3 b_5}{c_5}\omega_{01},\ \varphi^2 = b_2 b_5'\omega_{01}\omega_{02},\ \varphi_3 = b_2 c_5 \omega_{02}^2 \quad (6)$$

care sînt de al cincilea ordin diferențial, și invariantul fundamental al lui Bompiani

$$\varphi \quad \frac{c_3\omega_{02}}{\omega_{01}} \tag{7}$$

care este de al treilea ordin diferențial și care a apărut odată cu fixarea familiei de repere asimptotice (R_8).

Între invarianții (5) — (7) există relațiile de dependență

$$\varphi_3 = f_2\varphi\varphi_1, \qquad \varphi_2^2 = f_1 f_2 \varphi_1^2 \varphi_3 \tag{8}$$

Se obțin semnificații geometrice pentru cei doi invarianți finiți (5) considerînd curbele pe care variază vîrful A_3 al tetraedrului reperului atunci cînd A_0 variază pe fiecare din cele două linii asimptotice ale suprafeței (S).

Din relația

$$dA_3 = c_3 b_5 \omega_{02} A_0 + (b_5' \omega_{01} + c_5 \omega_{02}) A_1 + (b_5 \omega_{01} - 2\, b_5' \omega_{02}) A_2 + \omega_{33} A_3$$

se deduce că pentru o variație a lui A_0 pe generatoarea rectilinie : $(\omega_{02} = 0)$ punctul A_3 variază pe o curbă a cărei tangentă în A_3 întîlnește planul tangent în A_0 la (S) în punctul

$$P_2 = b_5' A_1 + b_5 A_2$$

iar, pentru o variație a lui A_0 pe linia asimptotică (C_2) : $(\omega_{01} = 0)$ punctul de intersecție a planului tangent cu tangenta la curba pe care variază A_3 este

$$P_3 = c_3 b_5 A_0 + c_5 A_1 - 2\, b_5' A_2$$

Punctele comune dreptelor din fiecare din perechile

$$\{[A_0, P_3]\ [A_2, A_1]\}, \quad \{A_2, P_3], \ [A_0, A_2]\}$$

sînt, respectiv :

$$P_1 = c_5 A_1 - 2\, b_5' A_2$$
$$Q_1 = c_3 b_5 A_0 + c_5 A_1.$$

În raport cu o variație a lui A_0 pe linia asimptotică (C_2) punctul A_2 variază pe o curbă a cărei tangentă în A_2 întîlnește generatoarea rectilinie. în punctul :

$$Q_2 = b_2 c_5 A_0 + c_3 A_1.$$

Valorile birapoartelor

$$\rho_1 = (A_1, A_2, P_1, P_2) = -2 f_1, \qquad \rho_2 = (A_0, A_1, Q_1, Q_2) = f_2$$

dau semnificațiile geometrice ale invarianților finiți.

Considerînd pe generatoarea rectilinie un punct

$$A_0' = (1 + \omega_{00}) A_0 + \omega_{01} A_1$$

situat în vecinătatea lui A_0, biraportul

$$\sigma_1 = (A_0, A_1, A_0', Q_1) \frac{c_3 b_5}{c_5} \omega_{01} + (2)$$

are ca parte principală invariantul infinitezimal φ_1.

Față de o variație a punctului A_0 pe generatoarea rectilinie $[A_0, A_1]$, punctul A_2 variază pe o curbă a cărei tangentă în A_2 întîlnește dreapta $[A_0, A_3]$ în punctul

$$Q_3 = b'_5 A_0 + A_3.$$

Se consideră pe (S) un punct A'_0 din vecinătatea lui A_0. Planul $[A_1, A_2, A'_0]$ intersectează dreapta $[A_0, A_3]$ în punctul A''_0 și biraportul

$$\sigma_2 = (A_0, A_3, A''_0, Q_3) = b_2 b'_5 xy + (3),$$

a cărui parte principală este echivalentă cu

$$b_2 b'_5 \omega_{01} \omega_{02}$$

dă semnificația geometrică a invariantului φ_2.

Considerînd un punct A^0 situat pe linia asimptotică (C_2) în vecinătatea lui A_0 și proiectîndu-l din $[A_2, A_3]$ pe $(A_0, A_1]$ în $\bar{A}'_0$, partea principală a biraportului

$$\sigma_3 = (A_0, \quad A_1, \quad \bar{A}'_0, \quad Q_2) = \frac{1}{2} b_2 b_5 y^2 + (3),$$

care este echivalentă cu

$$\frac{1}{2} b_2 c_5 \omega_{02}^2$$

dă, în afară de factorul constant $\frac{1}{2}$, o semnificație geometrică a ultimului invariant infinitezimal φ_3.

Invariantului lui Bompiani (7) i se mai poate da o nouă semnificație geometrică, în afară de cea cunoscută ([1], p. 221).

S-a stabilit că mulțimea cuadricelor care au în A_0 un contact de ordinul al patrulea cu linia asimptotică curbilinie (C_2) formează o familie cu patru parametri esențiali ([1], p. 227). În această familie există o singură cuadrică

$$(Q_2) \qquad b_2 x_1 x_2 - 3\, x_0 x_3 = 0$$

care este circumscrisă tetraedrului $A_0 A_1 A_2 A_3$ și este tangentă în A_3 cuadricei

$$(Q_1) \qquad b_2 x_1 x_2 - x_0 x_3 = 0$$

care este osculatoare la (S) de-a lungul generatoarei $[A_0, A_1]$.

Se consideră pe (S) un punct A_0 și pe cuadrica (Q_1) un punct M_1 -ambele situate în vecinătatea lui A_0.

Drepta $(A_0, M_1]$ intersectează în punctul T planul tangent în A_0 la (S) și are în comun cu cuadrica (Q_2) două puncte, dintre care unul, notat M_2, este un punct din vecinătatea lui A_0.

Valoarea biraportului

$$(T, \quad M_1, \quad M_2, \quad A'_0) = \frac{1}{6} \frac{c_3 y^2}{x} + (2)$$

prin partea sa principală și în afară de factorul numeric $\frac{1}{6}$, dă o nouă semnificație geometrică a invariantului lui Bompiani.

3. Familia de repere (R_3) admite și trei ecuații invariante

$$b_5 = 0, \qquad b_5' = 0, \qquad c_5 = 0 \tag{9}$$

a căror existență permite clasificarea suprafețelor simplu riglate în clase, caracterizate de semnificațiile geometrice respective ([1], p. 228—235).

Considerarea congruențelor binare formate de muchile $[A_0, A_3]$, $[A_1, A_2)$ ale reperelor (R_3) conduce la alte semnificații geometrice ale ecuațiilor invariante (9).

Relațiile focale relative la congruența transversală formată de dreptele $[A_0, A_3]$ -axele cuspidale ale conurilor (Γ) - sînt

$$\omega_{01} + z\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{02} + z\omega_{32} = 0 \tag{10}$$

z fiind abscisa proiectivă a punctelor dreptei $[A_0, A_3]$:

$$M = A_0 + zA_3$$

Pentru congruența tangențială $[A_1, A_2]$, formată de dreptele inflexionale ale cubicelor (C), relațiile focale sînt :

$$\omega_{10} + t\omega_{20} = 0, \qquad \omega_{13} + t\omega_{23} = 0 \tag{11}$$

t fiind abscisa proiectivă a punctelor dreptei $[A_1, A_2]$:

$$M = A_1 + tA_2.$$

Eliminarea parametrilor z, t ,respectiv din relațiile (10) și (11), are ca rezultat o singură ecuație

$$b_5\omega_{01}^2 - 3\, b_5'\omega_{01}\omega_{02} - c_5\omega_{02}^2 = 0 \tag{12}$$

Cele două congruențe considerate au deci curbe focale comune.

Abscisele proiective ale punctelor focale sînt date, respectiv, de ecuațiile

$$[A_0, A_3] : \qquad Z^2 - b_5'Z - (b_5c_5 + 2\, b_5'^2) = 0$$
$$[A_1, A_2] : \qquad b_5t^2 - b_5't - c_5 = 0$$

Rezultă, din cele de mai sus, că pentru suprafețele riglate de indice 1, pentru care punctele flecnodale ale fiecărei generatoare sînt coincidente și care sînt caracterizate analitic de ecuația invariantă

$$b_5 = 0,$$

generatoarea rectilinie este o curbă focală comună a celor două congruențe. Pentru o variație a lui A_0 de-a lungul generatoarei rectilinii $[A_0, A_1]$, dreptele $[A_0, A_3]$, $[A_1, A_2]$ formează suprafețe desfășurabile iar punctul A_1, unicul punct flecnodal al generatoarei, este un punct focal deci variază de-a lungul muchei de întoarcere relativă la desfășurabila formată de $[A_1, A_2]$.

Pentru suprafeţele riglate ale căror generatoare rectilinii aparţin unei congruenţe liniare şi care sînt caracterizate de ecuaţia invariantă

$$b_5' = 0$$

curbele focale (12) formează o reţea conjugată.

Punctele focale ale dreptelor $[A_0, A_3]$, $[A_1, A_2]$ formează pe fiecare din ele sisteme armonice cu vîrfurile reperului situate pe dreapta respectivă.

În fine, în cazul suprafeţelor caracterizate de ecuaţia invariantă

$$c_5 = 0$$

pentru care conica osculatoare în A_0 la curba (C_2') -proiecţia din A_3 pe planul tangent în A_0 la (S) a liniei asimptotice curbilinii (C_2) -conţine vîrful A_1 al reperului (R_3), linia asimptotică (C_2) este o curbă focală comună a celor două congruenţe.

Fiecare din aceste proprietăţi este, în mod evident, caracteristică pentru clasa respectivă de suprafeţe riglate.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihăilescu, Tiberiu, *Geometrie diferenţială proiectivă*. Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1958, 494 p.

ПРОЕКТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Резюме)

В работе рассматривается задача проективных дифференциальных инвариантов одного семейства подвижных реперов третьего порядка (R_3) связанных с неразвертывающейся простой линейчатой поверхностью. Даётся геометрический смысл всех конечных и бесконечных инвариантов, которые появляются в этапе фиксирования одного семейства реперов (R_3).

LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS PROJECTIFS DES SURFACES RÉGLÉES

(Résumé)

Revenant sur le problème des invariants différentiels projectifs d'une famille de repères mobiles de classe (R_3) attachée aux points d'une surface simplement réglée non développable, l'A. donne les significations géométriques de tous les invariants, tant finis qu'infinitésimaux, relatifs à la famille (R_3) considérée.

ASUPRA UNUI REZULTAT AL LUI E. CARTAN

de

ŞT. PETRESCU (Bucureşti)

1. E. Cartan, ocupîndu-se de sistemele de două ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea, într-o funcţie $z = z(x,y)$ ca necunoscută, arată [1] că problema integrării unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0 \\ G(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0 \end{aligned} \tag{1. 1}$$

în involuţie, poate fi redusă la aceea a unui sistem de 3 ecuaţii Pfaff în 5 variabile de forma

$$\begin{aligned} dx^2 - x^3\, dx^1 &= 0 \\ dx^3 - x^4 dx^1 &= 0 \\ dx^5 - f(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)\, dx^1 &= 0 \end{aligned} \tag{1. 2}$$

pentru care $\frac{\partial^2 f}{(\partial x^4)^2} \neq 0$ şi că acest sistem admite un grup de automorfisme cu maximum 14 parametri, fiind un grup simplu (primul din seria celor 5 grupuri simple excepţionale)

Mai mult, Cartan demonstrează că pentru sistemele (1. 1) în involuţie, admiţînd un grup simplu g_{14} ca grup maxim de automorfisme sistemul (1. 2) are forma canonică (1. 2) cu $f = (x^4)^2$.

Într-o lucrare recentă [2], acad. G. Vrănceanu determină, într-un mod simplu, condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul (1. 2) să admită un g_{14} ca grup maxim de transformări în el însuşi şi, plecînd de la ea, arată că componentele ξ ale transformărilor infinitesimale ale grupului, depind efectiv, pentru cazul în care $f = (x^4)^2$, de 14 parametri.

Urmînd o cale analogă aceleia utilizată în [2], ne propunem să dovedim direct că sistemul (1.2), cu $f = (x^4)^2$, admite ca grup maxim de automorfisme un g_{14} considerîndu-l însă sub o altă formă obţinută din (1. 2) printr-o transformare convenabilă de variabile, aceasta făcînd calculele mai simetrice şi credem, mai simple.

2. Să facem în (1. 2) cu $f = (x^4)^2$ transformarea de variabile

$$\begin{cases} y^i = x^i \ ,(i = 1, 3, 4, 5) \\ y^2 = x^2 - x^1x^3. \end{cases} \tag{2. 1}$$

El devine atunci

$$\begin{cases} dy^2 + y^1y^4dy^1 = 0 \\ dy^3 - y^4dy^1 = 0 \\ dy^5 - (y^4)^2dy^1 = 0. \end{cases} \tag{2. 2}$$

În loc de a pleca de la sistemul (2. 2), în y^i ca variabile, să plecăm de la sistemul în x^i,

$$\begin{cases} dx^2 + x^1x^4dx^1 = 0 \\ dx^3 - x^4dx^1 = 0 \\ dx^5 - (x^4)^2dx^1 = 0 \end{cases} \tag{2. 3}$$

şi să-i căutăm transformările în el însuşi de forma

$$x'^i = x^i + \xi^i\,(x^1, x^2, \ldots, x^5), \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{2.4}$$

ξ^i fiind cantităţi infinitesimale de primul ordin.

Scriind că (2. 4) este o transformare infinitesimală pentru sistemu (2. 3), deducem condiţiile :

$$\begin{cases} d\xi^2 + x^1x^4d\xi^1 + (x^1\xi^4 + x^4\xi^1)dx^1 = 0 \\ d\xi^3 - x^4d\xi^1 - x^4d\xi^1 = 0 \\ d\xi^5 - (x^4)^2d\xi^1 - 2x^4\xi^4dx^1 = 0. \end{cases} \tag{2. 5}$$

Dacă notăm, în general, cu $\xi = \xi(x^1,\ldots,x^5)$ o funcţie diferenţiabilă, deci

$$d\xi = \xi_i dx^i, \quad \left(\xi_i = \frac{\partial \xi}{\partial x^i}\right)$$

în virtutea sistemului (2. 3) vom avea

$$d\xi = [\xi_1 + (\xi_3 - x^1\xi_2)x^4 + \xi_5(x^4)^2]dx^1 + \xi_4dx^4. \tag{2.6}$$

Considerînd însă operatorul

$$D\xi = \xi_1 + (\xi_3 - x^1\xi_2)x^4 + \xi_5(x^4)^2 \tag{2. 7}$$

(2. 6) se mai scrie

$$d\xi = D\xi dx^1 + \xi_4dx^4. \tag{2. 6'}$$

Prin urmare, în baza sistemului (2. 3) avem

$$d\xi^i = D\xi^i\, dx^1 + \xi^i_4dx^4, \quad (i = 1,\ldots,5) \tag{2. 8}$$

iar condiţiile (2. 5) se transformă în următoarele :

$$\begin{aligned}&(D\xi^2 + x^1x^4D\xi^1 + x^1\xi^4 + x^4\xi^1)dx^1 + (\xi^2_4 + x^1x^4\xi^1_4)dx^4 = 0\\&(D\xi^3 - x^4D\xi^1 - \xi^4)dx^1 + (\xi^3_4 - x^4\xi^1_4)dx^4 = 0\\&[D\xi^5 - (x^4)^2D\xi^1 - 2x^4\xi^4]dx^1 + [\xi^5_4 - (x^4)^2\xi^1_4]dx^4 = 0\end{aligned}\tag{2.5'}$$

Deoarece (2. 5′) trebuie să aibă loc oricare ar fi dx^1, dx^4, deducem relaţiile

$$\begin{aligned}&D\xi^2 + x^1x^4D\xi^1 + x^1\xi^4 + x^4\xi^1 = 0,\\&D\xi^3 - x^4D\xi^1 - \xi^4 = 0,\\&D\xi^5 - (x^4)^2D\xi^1 - 2x^4\xi^4 = 0\,;\end{aligned}\tag{2. 9}$$

$$\begin{aligned}&\xi^2_4 + x^1x^4\xi^1_4 = 0,\\&\xi^3_4 - x^4\xi^1_4 = 0,\\&\xi^5_4 - (x^4)^2\xi^1_4 = 0.\end{aligned}\tag{2. 9'}$$

Totul revine acum la a găsi funcţiile ξ^i care verifică sistemul (2.9), (2. 9′).

3. Din prima ecuaţie (2. 9′) scoatem

$$\xi^2 = -x^1\xi^3 + \psi(x^1, x^2, x^3, x^5)\tag{3. 1}$$

şi introducînd în prima din (2. 9), găsim , în virtutea lui (2. 7) care ne dă

$$D\xi^2 = D\psi - x^1D\xi^3 - \xi^3,$$

relaţia

$$D\psi - x^1D\xi^3 - \xi^3 + x^1x^4D\xi^1 + x^1\xi^4 + x^4\xi^1 = 0.$$

Observînd însă a doua ecuaţie (2. 9), rămîne

$$\xi^3 = x^4\xi^1 + D\psi.$$

Să derivăm pe ξ^3 în raport cu x^4 şi să ţinem seama de a doua ecuaţie (2. 9′) : vom obţine

$$\xi^1 = x^1\psi_2 - \psi_3 - 2x^4\psi_5.\tag{3. 2}$$

Pe de altă parte, aplicînd operatorul (2. 7) lui ξ^3, a doua relaţie (2. 9) ne dă imediat

$$\xi^4 = D^2\psi.\tag{3. 3}$$

Aşa dar, am găsit valorile componentelor ξ^i , cu excepţia lui ξ^5, ele fiind date (3. 1), (3. 2), (3. 2′) şi (3.3).

Avem apoi

$$\xi^5_4 = (x^4)^2\xi^1_4 = (x^4)^2(-2\psi_5) = -2(x^4)^2\psi_5$$

şi integrînd rezultă :

$$\xi^5 = -\frac{2}{3}(x^4)^2\psi_5 + \varphi(x^1, x^2, x^3, x^5), \quad \varphi = \text{arb.}\tag{3. 4}$$

Ne mai rămîne să verificăm ultimile ecuaţii (2. 9), (2. 9').
Cum

$$D\xi^5 = -\frac{2}{3}(x^4)^3 \quad D\psi_5 + D\varphi$$

ultima relaţie (2. 9) capătă forma

$$-\frac{2}{3}(x^4)^3 D\psi_5 + D\varphi - (x^4)^2 D\xi^1 - 2x^4\xi^4 = 0 \tag{2.5}$$

şi, deoarece (3. 2'), împreună cu (2. 7), ne dă

$$D\xi^1 = \psi_2 + x^1 D\psi_2 - D\psi_3 - 2x^4 D\psi_5,$$

introducînd în (2. 5) această expresie a lui $D\xi^1$, căpătăm relaţia

$$-\frac{4}{3}(x^4)^3 D\psi_5 - D\varphi + (x^4)^2\psi_2 + x^1(x^4)^2 D\psi_2 - (x^4)^2 D\psi_3 + 2x^4 D^2\psi = 0 \tag{2. 6}$$

Deoarece

$$D\psi = \psi_1 - x^1x^4\psi_2 + x^4\psi_3 + (x^4)^2\psi_5,$$

găsim că

$$D^2\psi = (D\psi)_1 - (D\psi)_2 x^1x^4 + (D\psi)_3 x^4 + (D\psi)_5 (x^4)^2.$$

Cum

$$(D\psi)_1 = D\psi_1 - x^4\psi_2,$$
$$(D\psi)_k = D\psi_{k\cdot}, \ (k = 2, 3,5).$$

deducem

$$D^2\psi = D\psi_1 - x^1x^4 D\psi_2 + x^4 D\psi_5 + (x^4)^2 D\psi_5 - x^4\psi_2$$

iar (2.6) devine, în cele din urmă,

$$\frac{2}{3}(x^4)^3 D\psi_5 - (x^4)^2\psi_2 - x^1(x^4)^2 D\psi_2 + (x^4)^2 D\psi_3 + 2x^4 D\psi_1 - [\varphi_1 - \varphi_2 x^1 x^4 + \varphi_3 x^4 + $$
$$+ \varphi_3 x^4 + \varphi_5 (x^4)^2] = 0 \tag{3.6}$$

sau explicitat:

$$\frac{2}{3}(x^4)^3[\psi_{51} - x^1x^4\psi_{52} + x^4\psi_{53} + (x^4)^2\psi_{55}] - (x^4)^2\psi_2 - x^1(x^4)^2[\psi_{21} - x^1x^4\psi_{22} +$$
$$+ x^4\psi_{23} + (x^4)^2\psi_{25}] + (x^4)^2[\psi_{31} - x_1x^4\psi_{32} + x^4\psi_{33} + (x^4)^2\psi_{35}] + 2\,x^4$$
$$[\psi_{11} - x^1x^4\psi_{12} + x^4\psi_{13} + (x^4)^2\psi_{15}] - \varphi_1 + x^1x^4\varphi_2 - x^4\varphi_3 - (x^4)^2\varphi_5 = 0.$$

Dar, deoarece ψ şi φ nu depind de variabila x^4, trebuie ca (3.8) să aibă loc oricare ar fi x^4. Din egalarea cu zero a coeficienţilor lui $(x^4)^5,\ldots,x^4$ obţinem ecuaţiile următoare :

$$\psi_{55} = 0, \qquad \psi_{35} - x^1\psi_{25} = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{8}{3}\psi_{15} + (x^1)^2\psi_{22} - 2x^1\psi_{23} = 0, \qquad \varphi_5 = 3(\psi_{13} - x^1\psi_{12}) - \psi_2 \tag{3.9'}$$

$$\varphi_1 = 0, \qquad x^1\varphi_2 - \varphi_3 = -2\psi_{11} \tag{3.9''}$$

Din $\varphi_1 = 0$, deducem

$$\varphi = \varphi(x^2, x^3, x^5).$$

Derivînd a doua din (3.9)'' în raport cu x^1, căpătăm sistemul

$$(S) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = -2\psi_{111} \\ \varphi_3 = 2(\psi_{11} - x^1\psi_{111}) \\ \varphi_5 = 3(\psi_{13} - x^1\psi_{12}) - \psi_2. \end{cases}$$

4. Trecînd la (3.9), prima ecuație ne dă

$$\psi = A(x^1, x^2, x^3)x^5 + B(x^1, x^2, x^3) \tag{4.1}$$

Pe de altă parte, (S) fiind un sistem cu diferențiale totale, condițiile lui de integrabilitate

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \qquad (i \neq j)$$

ne vor da, pentru $i = 1$, $j = 2$, $\psi_{1111} = 0$ adică

$$A_{1111} = 0, \quad B_{1111} = 0$$

ceea ce ne permite să scriem

$$\begin{aligned} A &= \alpha(x^1)^3 + \beta(x^1)^2 + \gamma x^1 + \delta, \\ B &= \bar\alpha(x^1)^3 + \bar\beta(x^1)^2 + \bar\gamma x^1 + \bar\delta, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \bar\delta$ fiind funcții, necunoscute încă, de variabilele $x^2 x^3$.

Celelalte condiții de integrabilitate ale lui (S) împreună cu primele trei ecuații din (3.9), (3.9'), ne conduc la relațiile (permițînd determinarea funcțiilor necunoscute) care urmează.

$$\begin{aligned} &\psi_{35} = x^1\psi_{25} \\ &4\psi_{12} = 3\psi_{113} - 3x^1\psi_{112} \\ &\psi_{22} = 3\psi_{123} - 3x^1\psi_{122} + 2\psi_{1115} \\ &\psi_{23} = 3\psi_{133} - 3x^1\psi_{123} - 2\psi_{115} + 2x^1\psi_{1115} \\ &\psi_{112} = x^1\psi_{1112} - \psi_{1113} \\ &\frac{8}{3}\psi_{15} + (x^1)^2\psi_{22} - 2x^1\psi_{23} + \psi_{33} = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Prima din ele ne dă

$$A_3 = x^1 A_2 \tag{4.4}$$

iar a doua,

$$\begin{aligned} 4A_{12} &= 3(A_{113} - x^1 A_{112}), \\ 4B_{12} &= 3(B_{113} - x^1 B_{112}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Din a treia (4.3) scoatem de asemenea ecuațiile

$$\begin{aligned} &A_{22} - 3A_{123} + 3x^1 A_{122} = 0, \\ &B_{22} - 3B_{123} + 3x^1 B_{122} - 2A_{111} = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

în timp ce a patra conduce la relațiile

$$\begin{aligned} &A_{23} - 3A_{133} + 3x^1 A_{123} = 0 \\ &B_{23} - 3B_{133} + 3x^1 B_{123} + 2A_{11} - 2x^1 A_{111} = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

În fine, din a cincea (4.3) deducem încă

$$A_{112} - x^1 A_{1112} + A_{1113} = 0, \quad B_{112} - x^1 B_{1112} + B_{1113} = 0, \qquad (4.8)$$

iar din ultima scoatem

$$(x^1)^2 A_{22} - 2x^1 A_{23} + A_{33} = 0$$

$$(x^1)^2 B_{22} - 2x^1 B_{23} + \quad A_1 + B_{33} = 0$$

Calculînd derivatele A_i şi introducîndu-le în (4.4), ajungem uşor la egalităţile

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \beta_2, \ \beta_3 = \gamma_2, \ \gamma_3 = \delta_2, \ \delta_3 = 0. \qquad (4.7')$$

Ca atare

$$\alpha = \alpha(x^3), \qquad \delta = \delta(x^2).$$

Ţinînd însă seama de prima relaţie (4.5) deducem

$$\alpha_3 = 0, \ \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_2 = 0$$

deci (4,8₁)

$$\alpha = \text{const}, \qquad \beta = \text{const}, \qquad \gamma = \gamma(x^3).$$

Pe de altă parte, din $\delta_3 = 0$ şi $\gamma_3 = \delta_2$ obţinem $\gamma_{33} = 0$ deci

$$\gamma = ax^3 + b, \qquad (a,\ b \text{ constante arbitrare}) \qquad (4.8')$$

şi pe urmă din $\gamma_{32} = \delta_{22} = 0$ rezultă

$$\delta = ax^2 + e, \qquad (e = \text{constantă arb.}) \qquad (4.8'')$$

Aşadar, avem pentru A expresia

$$A = \alpha(x^1)^3 + \beta(x^1)^2 + (ax^3 + b)x^1 + ax^2 + e \qquad (4.9)$$

care depinde — cum se vede — de constantele arbitrare α, β, a, b, e

5. În mod analog, a doua relaţie (4.5) ne conduce la egalităţile

$$\bar{\alpha}_2 = 0, \quad 9\,\bar{\alpha}_3 = 7\,\bar{\beta}_2, \quad 2\bar{\gamma}_2 = 3\beta_3 \qquad (5.1)$$

ceea ce face ca ultima din (4.6) să ne dea

$$\bar{\beta}_{22} = 0 \qquad \bar{\beta} = \bar{a}(x^3)x^2 + \bar{b}\,(x^3),$$
$$2\bar{\gamma}_{22} = 3\bar{\beta}_{23} \qquad (5.2)$$
$$\bar{\delta}_{22} - 3\,\bar{\gamma}_{23} = 12\,\alpha$$

Utilizînd încă a doua din relaţiile (4.7) căpătăm

$$\begin{cases} 7\bar{\beta}_{23} = 3\,\bar{\alpha}_{33} \\ 2\bar{\gamma}_{23} = 3\,\bar{\beta}_{33} \\ \bar{\delta}_{23} - 3\,\bar{\gamma}_{33} = -4\beta \end{cases} \qquad (5.3)$$

În sfîrşit, ultimele din relaţiile (4.8), (4.9) ne mai dau

$$\overline{\beta}_2 = -3\,\alpha_3, \tag{5.4}$$

respectiv egalităţile

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma}_{22} - 2\,\overline{\beta}_{23} + \overline{\alpha}_{33} = 0 \\ &\overline{\delta}_{22} - 2\,\overline{\gamma}_{23} + \overline{\beta}_{33} + 8\,\alpha = 0 \\ &2\,\overline{\delta}_{23} = \overline{\gamma}_{33} + \frac{16}{3}\beta \\ &3\overline{\delta}_{33} = -8\gamma. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ultima din (5.5) ne permite să scriem

$$\overline{\delta} = -\frac{4}{9}a(x^3)^3 - \frac{4}{3}e(x^3)^2 + fx^3 + g, \tag{5.5'}$$

cu f şi g funcţii de x^2 încă nedeterminate.

Din a doua relaţie (5.1), derivată în raport cu x^1 şi prima din (5.3) scoatem că

$$\overline{\alpha}_{33} = 0, \quad \overline{\beta}_{23} = 0, \quad \overline{\gamma}_{22} = 0 \tag{5.6}$$

aşa încît $a_3 = 0$, de unde $a =$ ctă.

Cum $\overline{\alpha}_{33} = 0$ rezultă

$$\overline{\alpha} = \varepsilon x^3 + \lambda$$

şi observînd a doua din (5.1) şi pe (5.4), deducem ca $a = -3\varepsilon$, $\varepsilon = 0$, prin urmare

$$\overline{\alpha} = \lambda(= \text{ctă}), \overline{\beta} = \overline{b}(x^3) \,. \tag{5.7}$$

Ultima din (5.6) ne arată că

$$\overline{\gamma} = \overline{a}(x^3)x^2 + \overline{d}(x^3) \,. \tag{5.8}$$

Egalînd valorile lui $\overline{\delta}_{23}$ date de ultima din (5.3) şi penultima relaţie (5.5), obţinem

$$\overline{\delta}_{23} = 4\beta$$

şi în consecinţă

$$f = 4\,\beta x^2 + \sigma, \ (\sigma \text{ constantă arb.})$$

În acelaşi timp rezultă însă

$$\overline{\gamma}_{33} = \frac{8}{3}\beta$$

ceea ce ne dă $\bar{a}_{33}x^2 + \bar{d}_{33} = \frac{8}{3}\beta$, de unde

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= 0 \therefore \bar{a} = \bar{\varepsilon}x^3 + \mu \\ \bar{d}_{33} &= \frac{8}{3}\beta \therefore \bar{d} = \frac{4}{3}\beta(x^3)^2 + \rho x^3 + \sigma\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Avînd în vedere a treia relație (5.2) care dă $\bar{\varepsilon} = -12\,\alpha$ putem scrie acum pe γ sub forma

$$\bar{\gamma} = (-12\;\alpha\;x^3 + \mu)x^2 + \frac{4}{3}\beta(x^3)^2 + \rho x^3 + \sigma \tag{5.11}$$

μ, ρ, σ fiind — la fel ca α, β — constante arbitrare.

6. Ne mai rămîne încă să-l determinăm pe $b(x^3)$ — deci pe $\bar{\beta}$ și pe $g(x^2)$ din expresia lui δ.

Ori, a doua din relațiile (5.5) dîndu-ne egalitatea

$$\bar{\delta}_{22} = -24\,\alpha$$

avînd în plus $\delta_{22} = g_{22}$, prin integrarea ecuației

$$g_{22} = -24\;\alpha$$

căpătăm imediat

$$g = -12\alpha\;(x^2)^2 + \zeta x^2 + \theta,\;(\zeta,\;\theta\text{ cte}). \tag{6,1}$$

Introducînd încă valorile (5.9) și (6.1) în (5.5′) deducem:

$$\bar{\delta} = -\frac{4}{9}\,a(x^3)^3 - \frac{4}{3}\,e(x^3)^2 + (4\beta x^2 + \tau)x^3 - 12\;\alpha(x^2)^2 + \zeta\,x^2 + \theta\,.$$

Cît privește $b(x^3)$, el poate fi găsit din relația $\bar{\beta}_3 = -8\alpha x^3 + \frac{2}{3}\mu$, care ne dă

$$\bar{\beta} = -4\;\alpha\;(x^3)^2 + \frac{2}{3}\,\mu\;x^3 + \nu \tag{6.2}$$

Cu aceasta avem și expresiile lui A și B (deci a lui ψ)

$$A = \alpha(x^1)^3 + \beta(x^1)^2 + (ax^3 + b)x^1 + ax^2 + c \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} B = {} & \lambda(x^1)^3 - \left[4\;\alpha\;(x^3)^2 - \frac{2}{3}\,\mu x^3 - \nu\right](x^1)^2 + \\ & + \left[\frac{4}{3}\,\beta(x^3)^2 + \rho x^3 + \sigma - (12\;\alpha\;x^3 - \mu)x^2\right]x^1 - \\ & - \frac{4}{9}\,a(x^3)^3 - \frac{4}{3}\,b(x^3)^2 + (4\;\beta x^2 + \tau)x^3 - \\ & - 12\;(x^2)^2 + 5x^2 + 0\,; \end{aligned}$$

care depind de cele 13 constante arbitrare α, β, a, b, c, λ, μ, ν, δ, σ, ζ, τ, θ, şi la fel va depinde

$$\psi = A\cdot x^5 + B, \tag{6.4'}$$

de aceeaşi parametri.

Întegrînd încă pe $d\varphi = \varphi_i dx^i$, $(i = 1, 2, 3, 5)$ cu φ_i daţi de sistemul (S) căpătăm pentru φ valoarea

$$\varphi = -12\alpha x^2x^5 + 4\beta x^3x^5 - \frac{16}{3}(x^3)^3 + \frac{4}{3}\mu(x^3)^2 + a(x^5)^2 - \tag{6.5}$$
$$-12\lambda x^2 + 4\upsilon x^3 + (3\delta - \zeta)x_5 + \chi$$

cu χ o nouă constantă arbitrară.

Observînd că avem pentru componentele ξ^i expresiile

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x^1\psi_2 - \psi_3 - 2x^4\psi_5 \\
\xi_2 &= -x^1\xi_3 + \psi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x_5) \\
\xi^3 &= x^4\xi^1 + D\psi \\
\xi^4 &= D^2\psi = D\psi_1 - D\psi_2x^1x^4 + D\psi_3x^4 + D\psi_5(x^4)^2 - x^4\psi_2 \\
\xi^5 &= -\frac{2}{3}(x^4)^3\psi_5 + \varphi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^5)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

se desprinde imediat concluzia că ele depind de cele 14 constante arbitrare semnalate mai sus şi ca atare grupul de automorfisme (2.4) depinde el însuşi de 14 parametri.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre.* „Oeuvres, Partie II, vol. II," p. 927.
2. G. Vrănceanu, *Sur les systèmes de Pfaff à trois équations dans cinq variables*, „Bull. Math. de la Soc. Math. Phys. de la R.P.R". **V** 3(51), nr. 2, 1959.

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ Е. КАРТАНА

(Резюме)

Доказано прямым путём — пользуясь методом Г. Врынчану [2] — что система Пфаффа (2.3) допускает максимальную группу автоморфизма, которая имеет 14 параметров. Она получается из системы (1.2) при $f = (x^4)^2$, которая соответствует одной системе, состоящей из двух уравнений с частными производными второго порядка в инволюции которыми занимался Е. Картан в [1].

SUR UN RÉSULTAT D'E. CARTAN

(Résumé)

On démontre —par une voie directe provenant d'une méthode de G. Vrănceanu [2]— que le système de Pfaff (2.3) admet un groupe maximum d'automorphismes ayant 14 paramètres. On l'obtient à partir du système (1.2) avec $f = (x^4)^2$, qui se rattache à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre en involution, dont Élie Cartan s'est occupé dans un grand Mémoire de 1910 [1].

FUNCȚII ARMONICE (p, q) — CONJUGATE

de

M. GHERMĂNESCU (București)

1. Noțiunea de funcții armonice conjugate este legată de funcțiile de variabilă complexă, analitice într-un domeniu închis D, $f(z) = u + iv$, în care funcțiile reale u și v sînt armonice și satisfac, în acest domeniu, relațiilor lui Cauchy,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Proprietățile atît de simple și de importante ale acestor funcții au dat naștere la extensiuni remarcabile, avînd ca punct de plecare sisteme lineare de ecuații cu derivate parțiale de primul ordin cu două funcții necunoscute, mai generale ca (1), cu ajutorul cărora s-a extins noțiunea de funcție analitică sau s-a construit o teorie relativă la integrarea unor asemenea sisteme.

E. Picard este primul care, în 1891, consideră sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} v_x &= au_x + bu_y, \\ v_y &= cu_x + du_y, \end{aligned} \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{etc}, \tag{2}$$

— în care a, b, c, d sînt funcții date, analitice într-un domeniu închis dat — punînd problema determinării soluției sistemului, cunoscînd valorile pe contur ale funcțiilor u și v.

De altă parte, E. Beltrami semnalase sisteme de primul ordin, de o formă particulară, în legătură cu problema lui Cauchy, [2].

D. Pompeiu, în 1912 și 1913, a extins noțiunea de funcție olomorfă, introducînd derivata sa areolară, [3], căreia noi i-am dat mai tîrziu o o expresie foarte simplă, [4].

Noi înșine am integrat apoi, într-o comunicare făcută la Soc. romînă de Științe, în 1930, ecuația liniară cu derivate areolare,

$$\frac{DF}{DZ} + AF = B, \quad F = u + iv \tag{3}$$

şi am arătat că din integrarea acesteia se putea deduce soluţia sistemului de primul ordin

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + A_1 v + A_2 u = B_2, \quad A = A_1 + iA_2, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - A_1 u + A_2 v = -B_1, \quad B = B_1 + iB_2, \end{aligned} \tag{4}$$

care satisface la condiţii date pe conturul C al domeniului dat, [5].

Problemele enunţate mai sus au fost luate în de-aproape cercetare puţin mai tîrziu, iar astăzi sîntem în posesia unei teorii destul de înaintate referitoare la aceste două probleme, [6], [7].

Interesul unor asemenea cercetări, importante din punct de vedere teoretic, poate fi mărit dacă din soluţia sistemelor de primul ordin, ca (2) sau altele, mai generale, se poate deduce aceea a unor anumite ecuaţii de ordin superior.

2. Atenţia noastră a fost reţinută de o problemă particulară, a cărei soluţie răspunde parţial la cererea precedentă: noi considerăm acele sisteme ale lui Picard, (2), a căror soluţie — adică funcţiile u şi v — satisfac unei aceleeaşi ecuaţii liniare cu derivate parţiale, care va fi de ordinul al doilea.

În adevăr, se deduce din ecuaţiile (2), presupunînd derivabilitatea necesară,

$$\begin{aligned} v_{xy} &= au_{xy} + bu_{yy} + a_y u_x + b_y u_y, \\ v_{yx} &= cu_{xx} + du_{yx} + c_x u_x + d_x u_y, \end{aligned}$$

din care se deduce — dacă condiţiile cerute pentru a avea $u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$ sînt satisfăcute (teorema lui Schwarz, de exemplu) —

$$L(u) = cu_{xx} + (d - a)u_{xy} - bu_{yy} + (c_x - a_y)u_x + (d_x - b_y)u_y = 0 \tag{5}$$

Pentru a obţine ecuaţia satisfăcută de funcţia v, se deduce mai întîi din (2)

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{a}\, v_x + \bar{b} v_y, \\ u_y &= \bar{c} v_x + \bar{d} v_y, \end{aligned} \tag{6}$$

cu $\Delta = ad - bc > 0$, apoi

$$\Delta \bar{a} = d, \quad \Delta \bar{b} = -b, \quad \Delta \bar{c} = -c, \quad \Delta \bar{d} = a; \tag{7}$$

se deduce, de aceeaşi manieră ca pentru funcţia u,

$$\bar{c} v_{xx} + (\bar{d} - \bar{a})\, v_{xy} - \bar{b} v_{yy} + (\bar{c}_x - \bar{a}_y) v_x + (\bar{b}_y - \bar{d}_x) v_y = 0 \tag{8}$$

care este, evident, de acelaşi tip ca ecuaţia (5).

Vom zice că ecuaţiile de ordinul al doilea (5) şi (8) sînt *ecuaţiile-consecuente* ale sistemului (2).

Reciproc, fiind date două ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea,

$$\begin{aligned} Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y &= 0, \\ A'v_{xx} + B'v_{xy} + C'_{yy} + D'v_x + E'v_y &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

ar fi interesant de examinat condiţiile cerute pentru ca acestea să fie ecuaţiile consecuente ale unui anumit sistem de primul ordin, cum este (2).

3. Presupunem că sistemul (2), ca şi ecuaţiile (5) şi (8), sînt de tipul eliptic în D,

$$\delta = (d - a)^2 + bc > 0$$

şi să determinăm sistemele (2) pentru care ecuaţiile consecuente sînt de forma canonică: trebuie să avem

$$a = d, \qquad b + c = 0 \tag{11}$$

astfel că, cu notaţiile $c = -b = p$, $a = d = q$ sistemul (2) şi ecuaţiile (5) şi (8) devin respectiv

$$\begin{aligned} v_x &= qu_x - pu_y, \\ v_y &= pu_x + qu_y, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} L(u) &= p\Delta u + (p_x - q_y)u_x + (p_y + q_x)u_y = 0, \\ M(v) &= p\Delta v + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Am obţinut astfel rezultatul

I. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin* (2) *să aibă drept ecuaţii-consecuente ecuaţii liniare de ordinul al doilea de tipul canonic* (13) *este ca sistemul* (2) *să se reducă la* (12).

Sistemul de ecuaţii (12) a servit ca punct de plecare lui N. P o l o j i, [7], pentru definirea funcţiilor sale (p, q) — analitice. Proprietatea noastră precedentă exprimă astfel o proprietate sau o raţiune a existenţei sistemelor de tipul (12).

4. Să determinăm sistemele (2) pentru care ecuaţiile consecuente (5) şi (8) coincid: egalităţile corespunzătoare,

$$(\bar{a}_y - \bar{c}_x) = c_x - a_y\,, \; (\bar{b}_y - \bar{d}_x) = d_x - b_y$$

conduc la condiţiile

$$\begin{aligned} (a + d)x &= a(ln\Delta)_x + \; + b\,(ln\Delta)_y, \\ (a + d)_y &= c(ln\Delta)_x + d(ln\Delta)_y, \end{aligned}$$

care exprimă proprietatea, destul de curioasă,

II. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale* (2) *să aibă o singură ecuaţie-consecuentă este ca funcţiile* $a + d$ *şi* $ln\Delta$, *cu* $\Delta = ad - bc > 0$, *să satisfacă sistemului* (2) *însuşi*.

Vom spune atunci că sistemul (2) este *uni-consecuent*.

Un caz particular remarcabil este acela cînd cele două ecuaţii (5) şi (8) se reduc la ecuaţia lui Laplace: în primul rînd, trebuie să avem

$$d = a, \quad b + c = 0, \quad c_x = a_y, \quad d_x = b_y, \tag{15}$$

deci $\Delta = a^2 + b^2$, apoi

$$\bar{a}_y = \bar{c}_x \quad \bar{b}_y = \bar{d}_x,$$

care devin, ţinînd seama de (7),

$$\left(\frac{c}{\Delta}\right)_x+\left(\frac{d}{\Delta}\right)_y=0\,,\quad\left(\frac{a}{\Delta}\right)_x+\left(\frac{b}{\Delta}\right)_y,$$

sau încă, ţinînd seama de (15),

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)_y-\left(\frac{b}{\Delta}\right)_x=0\,,\quad\left(\frac{a}{\Delta}\right)_x+\left(\frac{b}{\Delta}\right)_y=0, \tag{16}$$

care se reduc la identităţi.

Deoarece ultimele relaţii (15) devin, în virtutea primelor, două,

$$a_x=b_y,\qquad a_y=-b_x, \tag{17}$$

rezultă

III. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul* (2) *,definit într-un domeniu închis D, să admită ca ecuaţie uni-consecuentă ecuaţia lui Laplace, este ca sistemul* (2) *să fie de forma* (12), *iar funcţia* $f(z)=p+iq$ *să fie olomorfă în D.*

Vom spune că u şi v sînt în acest caz, funcţii *armonice* (p,q)*-conjugate.*

5. Noţiunea de funcţii armonice $(p,\ q)$-conjugate poate avea aplicaţii utile în rezolvarea unor anumite probleme cu condiţii la limită, în afara interesului pur teoretic pe care-l prezintă prin ele inşile.

Ca exemplu, vom da elementele unei noi soluţii a problemei următoare, pusă de dr. Poincaré [8].

Să se determine o funcţie $v(x,\ y)$, *armonică în interiorul unui domeniu închis D, care satisface pe conturul C condiţiei*

$$A(s)\frac{dv}{ds}+B(s)\frac{dv}{dn}=C(s), \tag{18}$$

unde $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ sînt funcţii date de arcul s pe C.

Relaţia (18) se poate scrie

$$A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)+B\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)=C(s)\,.$$

Fie $u(x,\ y)$ funcţia armonică în D, a cărei funcţie armonică $(p,\ q)$ — conjugată este funcţia căutată $v(x,\ y)$, definită prin relaţiile (12), în care p şi q satisfac condiţiilor (1) : înlocuind cu (12), relaţia precedentă devine

$$A\frac{dv}{ds}+B\frac{dv}{dn}=(Aq+Bp)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)+(Ap-Bq)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}\right)$$

şi, înfine,

$$(Aq+Bp)\frac{du}{ds}+(Bq-Ap)\frac{du}{dn}=C, \tag{19}$$

care este astfel condiţia la limită satisfăcută de funcţia armonică $u(x,\ y)$.

Deoarece funcţiile p şi q sînt nedeterminate, în afară de condiţiile (1), es poate profita de aceasta pentru a face relaţia (19) cît mai simplă cu putinţă.

Astfel, dacă se ia, pe C,

$$Ap - Bq = 0, \tag{20}$$

determinarea funcţiilor p şi q conduce la o problemă omogenă Hilbert, iar relaţia (19) conduce la

$$\frac{du}{ds} = \frac{C(s)}{Aq + Bp}, \quad u(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{C(s)ds}{Aq + Bp}. \tag{21}$$

Se cunosc deci valorile funcţiei armonice $u(x, y)$ pe conturul domeniului D şi avem de rezolvat astfel o problemă Dirichlet.

O dată funcţia $u(x, y)$ determinată, se deduce funcţia $v(x,y)$ cu ajutorul relaţiilor (12) sau cu al formulei lui Schwarz.

Se poate lua de asemenea, în (12),

$$Aq - Bp = 0, \tag{22}$$

ceea ce procură de asemenea o problemă omogenă Hilbert, iar relaţia (12) se reduce la

$$\frac{du}{dn} = \frac{-C}{Ap - Bq}. \tag{23}$$

Se cunosc deci valorile derivatei normale pe C şi sîntem conduşi astfel la o problemă Neumann.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Picard, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles.* „C.R.Paris", *112*, p. 685–688, 1891.
2. E. Beltrami, *Sulle funzioni potenziali di sistemi sistemmetrici.* „Opere mat.„ t. 3, Milano, 1911, pp. 115–128, 349–377.
3. D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* „Rendiconti, Palermo", *33*, p. 108–113, 1912; t. 35, p. 277–281, 1913.
4. M. Ghermănescu, *Sur les fonctions monogènes.* „Bull. sc. de l'Ec. pol. de Timişoara", *2*, p. 195–197; 1929.
5. M. Ghermănescu, *Sur l'équation aréolaire linéaire.* „Bull. de Math. et de phys. de L'Ec. pol. de Bucarest", II, p. 85–87, 1931.
6. I. N. Vekua, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben.* Berlin, VEB. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.
7. N. G. Poloji, „Fr. Tretiego Vsesoiuz. Matem. sezdo. M." t. I, 1956.
8. H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste.* Paris, t. III, Chap. X, 1910.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ (p, q) — СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ

(Резюме)

Автор рассматривает системы первого порядка (2), откуда вытекает, что „u“ и „v“ являются решениями уравнения второго порядка (5), соответственно (8) представляющие собой уравнения вытекающие из системы (2).

Доказываются следующие свойства:

I. *Для того чтобы уравнения, вытекающие из системы (2) имели канонический вид, необходимо и достаточно чтобы (2) имела вид (12).*

II. *Для того чтобы система (2) имела единственное вытекающее уравнение необходимо и достаточно, чтобы функции $a + b$ и $\Delta = ad - bc > 0$ были решениями системы (2).*

III. *Для того чтобы единственным вытекающим уравнением системы (2) было уравнение Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы оно имело форму (12) с условиями (1).*

В порядке применения разрешается задача Пуанкаре, состоящая в отыскании гармонической функции v(x, y) в области D, которая удовлетворяет условию (18) на границе C. Эта задача сводится к задаче Дирихле или к задаче Неймана.

FONCTIONS HARMONIQUES (p, q) -CONJUGUÉES

(Résumé)

L'auteur considère les systèmes du premier ordre (2), desquels il déduit que les fonctions u et v sont des solutions des équations du second ordre, respectivement (5) et (8), qui sont les équations-conséquentes du système (2).

On démontre les propriétés suivantes :

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que les équations-conséquentes d'un système elliptique* (2) *aient la forme canonique est que* (2) *soit de la forme* (12).

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (2) *ait une seule équation-conséquente est que les fonctions* $a + d$ *et* $\Delta = ad - bc > 0$ *satisfassent au système* (2) *lui-même.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (2) *admette comme équation uni-conséquente l'équation de Laplace est qu'il soit de la forme* (12) *avec les conditions* (1).

Comme application, on résout le problème de Poincaré, concernant la détermination de la fonction v(x, y), harmonique dans D, satisfaisant à la condition (18) sur le contour C. Le problème est ramené à un problème de Dirichlet ou de Neumann.

O CLASĂ DE ECUAȚII FUNCȚIONALE

de

N. GHIRCOIAȘIU

Lucrare prezentată la sesiunea științifică a Societății de matematică și fizică, București, 12—13 febr. 1960

Ne propunem să găsim soluțiile funcții reale și continue, ale fiecăreia dintre ecuațiile funcționale:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} & S(x+y) &= S(x)C(y) + S(y)C(x)\\
&\text{(II)} & C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y)\\
&\text{(III)} & S(x-y) &= S(x)C(y) - S(y)C(x)\\
&\text{(IV)} & C(x-y) &= C(y)C(y) + S(x)S(y)\\
&\text{(V)} & C(x+y) &= C(x)C(y) + S(x)S(y)\\
&\text{(VI)} & C(x-y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y)\\
&\text{(VII)} & S(x+y) &= S(x)C(y) - S(y)C(x)\\
&\text{(VIII)} & S(x-y) &= S(x)C(y) + S(y)C(x)
\end{aligned}
$$

Se știe că funcțiile $\sin x$ și $\cos x$, sînt soluții ale fiecăreia dintre ecuațiile (I)—(IV), iar funcțiile $\operatorname{sh} x$ și $\operatorname{ch} x$ sînt soluții ale ecuațiilor (I), (III), (V) și (VI).

Ecuațiile funcționale de mai sus au fost studiate atît separat, cît și în sisteme de cîte două ecuații. Astfel de exemplu, sistemul (I) + (II) a fost integrat de J. Tannery [13], W. F. Osgood [10], O. Perron [11], E. B. van Vleck și H. Doubler [17], Th. Anghelută [3], P. Montel [9] și M. Ghermănescu [6]. Sistemul (III) + (IV) a fost integrat de H. Wilson [18], iar sistemul (I) + (V) de Th. Anghelută [3]. Ecuațiile luate separat, au fost integrate de Th. Anghelută [2] (ecuația I), H. Wilson [18] (ecuația III), H. E. Vaughan [14] (ecuația IV) și alții. Rezultate mai complete au fost date de L. Vietoris [15], care integrează fiecare dintre primele 6 ecuații, atît separat cît și grupate în sisteme de cîte două ecuații. În aproape toate lucrările care se ocupă cu aceste ecuații funcționale, metoda utilizată constă în efectuarea unor transformări asupra ecuației funcţionale pentru a ajunge la alte ecuaţii a căror soluţii se cunosc. Transformările efectuate uneori sînt complicate şi pot duce la pierderi de soluţii.

Recent cu aceeaşi problemă s-au ocupat J. Aczél [1] şi E. Vincze [16], care semnalează şi soluţii pierdute de diferiţi autori, în special de L. Vietoris.

În această lucrare ne propunem să facem direct studiul fiecărei ecuaţii, utilizînd relaţiile de recurenţă [2].

I

1° Să considerăm ecuaţia funcţională

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x). \tag{I}$$

Pentru $x = y = 0$, se găseşte

$$S(0)[1 - 2C(0)] = 0. \tag{1}$$

Putem deosebi următoarele cazuri, după valorile în origine ale celor două funcţii necunoscute:

$$S(0) = 0, \ C(0) = 0.$$

Dacă $S(x) \equiv 0$, rezultă că $C(x)$ este arbitrar.

Dacă $C(x) \equiv 0$, rezultă că $S(x) \equiv 0$, soluţie cuprinsă în cea precedentă.

Eliminînd aceste cazuri particulare şi făcînd în (I) $y = 0$, găsim $S(x) \equiv 0$, deci cu aceste valori în origine nu avem decît soluţia

$$S(x) \equiv 0, \ C(x) \text{ arbitrar}. \tag{2}$$

2° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = \beta \neq 0$.

Din (1) rezultă că $\beta = \frac{1}{2}$.

Dacă $S(x) \equiv \alpha$, din (I) avem $C(x) + C(y) = 1$, deci $C(x) = \frac{1}{2}$.

Dacă $C(x) \equiv \frac{1}{2}$, din (I) rezultă $S(x+y) = \frac{1}{2} S(x) + \frac{1}{2} S(y)$, iar pentru $y = 0$, $S(x) = \alpha$, deci aceeaşi soluţie ca mai sus.

Eliminînd aceste cazuri, din (I) pentru $y = 0$, găsim

$$S(x) = \frac{1}{2} S(x) + \alpha C(x)$$

sau

$$C(x) = \frac{1}{2\alpha} S(x),$$

care înlocuită în (I), ne dă

$$S(x+y) = \frac{1}{\alpha} S(x) \, S(y)$$

cu soluţia

$$S(x) = \alpha \, a^{cx}$$

unde a şi c sînt constante. Deci ecuaţia (I) are soluţia

$$S(x) = \alpha a^{cx}, \quad C(x) = \frac{1}{2} a^{cx} \tag{3}$$

în care, pentru $c=0$, se cuprinde şi cea găsită mai sus.

3^0 $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = 0$.

Caz imposibil, căci din (1) rezultă $\alpha = 0$.

4^0 $S(0)=0, C(0) = \beta \neq 0$.

Din (I), pentru $y=0$, găsim $\beta = 1$.
Urmează să integrăm ecuaţia (I) în ipoteza că

$$S(0)=0, \quad C(0) = 1. \tag{4}$$

În acest scop să înlocuim în (I) pe x şi y respectiv cu $x+h$ şi $y-h$ şi din ecuaţia obţinută să scădem pe (I). Avem

$$0=S(x+h)\, C(y-h)+S(y-h)\, C(x+h)- S(x)\, C(y)-S(y)\, C(x) \tag{5}$$

care pentru $y=0$, ne dă

$$0=S(x+h)C(-h) + S(-h)\, C(x+h)-S(x)$$

sau înlocuind pe $x+h$ cu x

$$0=S(x)\, C(-h)+S(-h)\, C(x)-S(x-h)$$

de unde presupunînd că $S(-h) \neq 0$, căci $S(x) \not\equiv 0$, găsim

$$C(x) = -\frac{C(-h)}{S(-h)} S(x) + \frac{1}{S(-h)} S(x-h) \tag{6}$$

sau

$$C(x) = m\, S(x) + n\, S(x-h)$$

unde m şi n depind de creşterea h. Înlocuind în (5), avem

$$S(x+h)\;[2mS(y-h) + nS(y-2h)] - 2mS(x)S(y) - nS(x-h)S(y) = 0.$$

Făcînd $y=$const., găsim ecuaţia funcţională

$$L(h)S(x+h) + M(h)\, S(x) + N(h)\, S(x-h) = 0 \tag{7}$$

cu o singură funcţie necunoscută. Integrala ei generală este [6], [7], [8], [12]

$$S(x)= A_1 r_1^{\frac{x}{h}} + A_2 r_2^{\frac{x}{h}}$$

sau

$$S(x)= A_1 r_1^{\frac{x}{h}} + A_2 \frac{x}{h} r_1^{\frac{x}{h}}$$

unde A_1, A_2 sînt constante arbitrare, iar h este fix, r_1, r_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice

$$L(h)\, r^2 + M(h)\, r + N(h) = 0, \tag{8}$$

în primul caz fiind presupuse distincte, iar în al doilea caz egale.

Notînd

$$\gamma_1 = \frac{1}{h} \ln r_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{h} \ln r_2 \tag{9}$$

avem

$$S(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} \tag{10}$$

sau

$$S(x) = e^{\gamma_1 x} (B_1 + B_2 x), \tag{11}$$

unde A_1, A_2, B_1, B_2, γ_1 și γ_2 sînt constante arbitrare ce se determină cu ajutorul funcțiilor L, M și N și al valorilor inițiale date ale funcției $S(x)$.

Observare. Dacă r_1, r_2 sînt reali, luînd determinarea principală pentru logaritmi, rezultă că γ_1 și γ_2 sînt reali, deci A_1, A_2 sînt reali, căci $S(x)$ este reală. În acest caz soluția rămîne sub forma (10). Dacă r_1, r_2 sînt complecși conjugați (căci funcțiile L, M și N sînt reale), atunci γ_1, γ_2 sînt complecși conjugați. Schimbînd în (10) pe i în $-i$, rezultă că și A_1, A_2 sînt complecși conjugați. Notînd

$$\gamma_1 = \delta + i\eta, \quad A_1 = a + ib,$$

funcția $S(x)$ se scrie

$$S(x) = e^{\delta x} (2a\cos \eta x - 2b\sin \eta x) \tag{12}$$

unde δ, η, a și b sînt constante arbitrare reale.

Vom folosi formulele (10), (12) și (11), după cum rădăcinile ecuației caracteristice sînt presupuse reale și distincte, complex conjugate sau egale.

Revenind la ecuația (I), pentru a găsi toate soluțiile, avem următoarele cazuri:

r_1, r_2 *reali și diferiți*. Ținînd seama că $S(0)=0$, rezultă $A_1 = -A_2$, deci (10) se scrie

$$S(x) = A_1 (e^{\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x}) = A_1 e^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} x} \left(e^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} x} - e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} x} \right)$$

sau

$$S(x) = \alpha\, e^{\delta x} \operatorname{sh} \eta\, x \tag{13}$$

unde constantele arbitrare

$$\alpha = 2A_1, \quad \delta = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \quad \text{și} \quad \eta = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$$

sînt reale.

Pentru a găsi cealaltă funcţie, înlocuim în (6) şi aflăm

$$C(x) = \frac{e^{\delta(x+h)}}{\operatorname{sh} \eta h}[\,C(-h) \operatorname{sh} \eta x - e^{-\delta h} \operatorname{sh} \eta\,(x-h)\,]$$

şi se vede că avem $C(0) = 1$.

Făcînd $x=h$, găsim

$$C(-h) = e^{-\delta h} \operatorname{ch} \eta h$$

prin urmare

$$C(x) = e^{\delta x} \operatorname{ch} \eta x. \tag{14}$$

r_1, r_2 complex conjugaţi. Ţinînd seama că $S(0) = 0$, rezultă din (12) că $2a=0$, deci aceasta devine

$$S(x) = \alpha\, e^{\delta x} \sin \eta x \tag{15}$$

unde $\alpha = -2b$, este o constantă arbitrară.

Procedînd ca mai sus din (6) avem

$$C(x) = e^{\delta x} \cos \eta x \tag{16}$$

$r_1=r_2$. În formula (11), $B = 0$, căci $S(0), = 0$ deci avem

$$S(x) = \alpha x e^{\gamma x} \tag{17}$$

unde $\alpha = B_2$ este o constantă arbitrară. Din (6) deducem

$$C(x) = e^{\gamma x} \tag{18}$$

Recapitulînd avem

TEOREMA I. *Ecuaţia funcţională*

$$S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x)$$

are soluţiile

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv 0 & C(x) &= \text{arbitrar} \\ &= \alpha\, a^{cx} & &= \frac{1}{2}\, a^{cx} \\ &= \alpha\, e^{\delta x} \operatorname{sh} \eta\, x & &= e^{\delta x} \operatorname{ch} \eta\, x \\ &= \alpha\, e^{\delta x} \sin \eta x & &= e^{\delta x} \cos \eta x \\ &= \alpha x\, e^{\gamma x} & &= e^{\gamma x} \end{aligned}$$

unde a, c, α, γ *şi* δ *sînt constante arbitrare reale.*

II

Pentru ecuaţia funcţională

$$C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y) \tag{II}$$

se procedează la fel ca mai sus.

Pentru $x=y=0$, avem

$$C(0) = C^2(0) - S^2(0) \tag{19}$$

şi urmează să studiem diferitele posibilităţi după valorile în origine a celor două funcţii.

1° $S(0)=0, C(0)=0$. Se găseşte numai soluţia

$$S(0) \equiv 0, \ C(x) \equiv 0 \tag{20}$$

2° $S(0) = \alpha \neq 0, C(0) = \beta \neq 0$. Din (19) avem $\beta = \beta^2 - \alpha^2$.
Dacă $S(x) \neq \alpha$, din (II) rezultă

$$C(x+y) = C(x)C(y) - \alpha^2$$

şi pentru $y=0$

$$C(x) = \beta\, C(x) - \alpha^2,$$

deci

$$C\,(x) \equiv \frac{\alpha^2}{\beta - 1} = \beta$$

Analog, dacă $C(x) \equiv \beta$ se găseşte aceeaşi soluţie.

Eliminînd aceste cazuri, din (II) pentru $y=0$, găsim

$$C(x) = \beta\, C(x) - \alpha\, S(x)$$

şi înlocuind pe $S(x)$ în ecuaţia dată obţinem

$$C\,(x+y) = \frac{1}{\beta}\, C(x)\, C(y)$$

şi avem soluţia

$$S(x) = \alpha\, a^{cx},\ C(x) = \beta\, a^{cx} \tag{21}$$

unde a, c, sînt constante arbitrare şi $\alpha^2 = \beta^2 - \beta$, soluţie în care se cuprinde şi cazul particular precedent, pentru $c=0$.

3° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0)=0$. Caz imposibil, căci din (19) rezultă $S(0)=0$.

4° $S(0) = 0$, $C(0)=\beta \neq 0$. Din (19) rezultă $\beta=1$ şi urmează să integrăm ecuaţia (II) în ipotezele

$$S(0) = 0 \text{ şi } C(0) = 1.$$

Procedînd analog ca şi pentru ecuaţia (I), avem succesiv

$$0=C(x+h)\ C(y-h)-S(x+h)\ S(y-h)-C(x)C(y)+S(x)S(y) \tag{22}$$

$$S(x) = \frac{C(-h)}{S(-h)}\, C(x) - \frac{1}{S(-h)}\, C(x-h) \tag{23}$$

şi se poate presupune că $-h$ se găseşte într-un interval $(0,\omega)$ în care $S(x)$ nu se anulează. (În cazul cînd $S(x) \equiv 0$, pentru toate punctele unui asemenea interval, rezultă că $S(x) \equiv 0$, şi $C(x) = a^{cx}$). Înlocuind funcţia $S(x)$ în ecuaţia precedentă şi presupunînd y constant, se ajunge la o ecuaţie funcţională analogă cu (7), însă cu alţi coeficienţi. Funcţia $C(x)$ are una dintre formele (10), (11) sau (12) după natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice corespunzătoare. Avem deci următoarele cazuri

r_1, r_2 reali şi diferiţi. Avem

$$C(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x}$$

unde A_1, A_2, γ_1, şi γ_2 sînt constante arbitrare reale. Cum $C(0)=1$, rezultă $A_2=1-A_1$, deci

$$C(x) = e^{\delta x} [A_1 e^{\eta x} + (1 - A_1)e^{-\eta x}],$$

unde am notat

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \delta, \quad \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = \eta,$$

sau

$$C(x) = e^{\delta x} [\operatorname{ch} \eta x + (2A_1 - 1) \operatorname{sh} \eta x], \tag{24}$$

care înlocuită în (23) ne dă

$$S(x)S(-h) = e^{\delta(x-h)} 4A_1 (1 - A_1) \operatorname{sh} \eta x \operatorname{sh} \eta h.$$

Făcînd $x = -h$, avem

$$S(-h) = \pm 2\sqrt{A_1(A_1-1)}\, e^{-\delta h} \operatorname{sh} \eta h$$

unde trebuie ca

$$A_1(A_1-1) \geqslant 0, \text{ deci } A_1 \leqslant 0, \text{ sau } A_1 \geqslant 1,$$

căci funcţia $S(x)$ este reală. Rezultă

$$S(x) = \pm 2\sqrt{A_1(A_1-1)}\, e^{\delta x} \operatorname{sh} \eta x. \tag{25}$$

Cum din condiţiile pentru A_1 deducem că $2A_1 - 1$ trebuie să fie în afara intervalului $(-1, 1)$, putem nota

$$2A_1 - 1 = \operatorname{ctgh} s$$

şi cum atunci

$$A_1(A_1-1) = \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 s}$$

formulele (24) şi (25) devin

$$C(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} s} e^{\delta x} \operatorname{sh}(\eta x + s), \quad S(x) = \pm \frac{1}{\operatorname{sh} s} e^{\delta x} \operatorname{sh} \eta x \tag{26}$$

unde δ, η şi s sînt constante arbitrare.

r_1, r_2 complecşi conjugaţi. Conform formulei (12) avem

$$C(x) = e^{\delta x} (2a \cos \eta x - 2b \sin \eta x)$$

Cum $C(0)=1$, rezultă $2a=1$. Notînd $2b=\operatorname{tg} s$, avem

$$C(x) = \frac{1}{\cos s} e^{\delta x} \cos(\eta x + s) \tag{27}$$

şi din (23)

$$S(x) = \pm \frac{1}{\cos s} e^{\delta x} \sin \eta x, \tag{28}$$

unde δ, η şi s sînt constante arbitrare.

$r_1 = r_2$. Din (11), ţinînd seama de $C(0)=1$, avem

$$C(x) = e^{\gamma x}(1 + B_2 x), \tag{29}$$

iar din (23)

$$S(x) = \pm B_1 x e^{\gamma x} \tag{30}$$

unde γ şi B_2 sînt constante arbitrare.

Recapitulînd avem

TEOREMA II. *Ecuaţia funcţională*

$$C(x+y) = C(x)\, C(y) - S(x)\, S(y)$$

are soluţiile

$$\begin{array}{ll}
S(x) \equiv 0 & C(x) \equiv 0 \\
= \alpha\, a^{cx} & = \beta\, a^{cx}, \quad \textit{unde } \alpha^2 = \beta^2 - \beta \\
= \pm \frac{1}{\operatorname{sh} s} e^{\delta x} \operatorname{sh} \eta x & = \frac{1}{\operatorname{sh} s} e^{\delta x} \operatorname{sh}(\eta x + s) \\
= \pm \frac{1}{\cos s} e^{\delta x} \sin \eta x & = \frac{1}{\cos s} e^{\delta x} \cos(\eta x + s) \\
= \pm B_2\, x\, e^{\gamma x} & = e^{\gamma x}(1 + B_2 x),
\end{array}$$

unde a, c, s, α, β, δ, η, *şi* B_2 *sînt constante arbitrare.*

III

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$S(x-y) = S(x)\, C(y) - S(y)\, C(x). \tag{III}$$

Pentru $x = y = 0$, avem $S(0) = 0$ şi avem numai două posibilităţi:

1° $S(0) = 0$, $C(0) = 0$.

Dacă $S(x) \equiv 0$, funcţia $C(x)$ este arbitrară.

Dacă $C(x) \equiv 0$, rezultă $S(x) \equiv 0$.

Eliminînd aceste cazuri şi făcînd în (III) $y=0$, găsim $S(x) \equiv 0$, deci singura soluţie este

$$S(x) \equiv 0,\ C(x) \text{ arbitrar}. \tag{31}$$

2° $S(0) = 0$, $C(0) = \beta \neq 0$.

Din (III) pentru $y=0$, găsim $\beta=1$, deci vom integra ecuaţia în ipotezele

$$S(0)=0 \text{ şi } C(0)=1.$$

Înlocuind pe x şi y respectiv cu $x+h$ şi cu $y+h$ şi scăzînd din (III), avem

$$0=S(x+h)\,C(y+h)-S(y+h)\,C(x+h)-S(x)C(y)+S(y)C(x). \tag{32}$$

Făcînd $y=0$ şi înlocuind pe $x+h$ cu x, găsim

$$C(x)=\frac{C(h)}{S(h)}S(x)-\frac{1}{S(h)}S(x-h) \tag{33}$$

unde am presupus $S(h)\neq 0$ (pentru orice h dintr-un interval $(0,\omega)$), care înlocuită în (III), ne conduce la ecuaţia funcţională cu o singură funcţie necunoscută

$$S(x+h)\,S(y)-S(x)\,[S(y+h)+S(y-h)]+S(x-h)\,S(y)=0,$$

din care pentru y constant se obţine

$$L(h)\,S(x+h)+M(h)\,S(x)+L(h)\,S(x-h)=0,$$

a cărei soluţie este de una din formele (10), (11) sau (12), după natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice

$$L(h)r^2+M(h)r+L(h)=0.$$

Avem următoarele cazuri:

r_1, r_2 *reali şi distincţi*. Ţinînd seama că $(S(0)=0$, şi cum $r_1r_2=1$ avem

$$\ln r_2=-\ln r, \text{ deci } \gamma_2=-\gamma_1=-\gamma$$

şi conform lui (10), soluţia se scrie

$$S(x)=\alpha \operatorname{sh}\gamma x \tag{34}$$

unde $\alpha=2A_1$ este o constantă arbitrară ca şi γ.

Înlocuind această expresie în (33), găsim

$$C(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}\gamma h}[C(h)\operatorname{sh}\gamma x-\operatorname{sh}\gamma(x-h)]$$

şi se observă că $C(0)=1$. Cum $C(h)$ nu se poate determina, înseamnă că ea poate fi considerată ca o constantă arbitrară. Pentru a da o expresie mai strînsă, notăm

$$\frac{C(h)-\operatorname{ch}\gamma h}{\operatorname{sh}\gamma h}=\operatorname{tgh}s \quad \text{sau} \quad \frac{C(h)-\operatorname{ch}\gamma h}{\operatorname{sh}\gamma h}=\operatorname{ctgh}s$$

după cum valoarea absolută a părţii întîia este mai mică, respectiv mai mare decît unitatea. Găsim

$$C(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} s} \operatorname{ch} (\gamma x + s) \tag{35}$$

sau

$$C(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} s} \operatorname{sh} (\gamma x + s). \tag{36}$$

Ambele soluţii verifică ecuaţia dată.

r_1, r_2 *complecşi conjugaţi*. Modulul rădăcinilor este egal cu unitatea, căci $r_1 r_2 = 1$. Cum

$$\gamma_1 = \frac{1}{h} \ln r_1 = \delta + i\eta \quad \text{avem} \quad \delta = \frac{1}{h} \ln |r_1| = 0$$

deci (12) devine

$$S(x) = 2a \cos \eta x - 2b \sin \eta x,$$

sau

$$S(x) = \alpha \sin \eta x \tag{37}$$

căci $S(0) = 0$ şi $\alpha = -2b$.

Înlocuind în (33) şi raţionînd ca mai sus, găsim

$$C(x) = \frac{1}{\cos s} \cos (\eta x + s) \tag{38}$$

unde s-a notat

$$\frac{\cos \eta h - C(h)}{\sin \eta h} = \operatorname{tg} s$$

sau

$$C(x) = \frac{1}{\sin s} \sin (\eta x + s) \tag{39}$$

cu notaţia

$$\frac{C(h) - \cos \eta h}{\sin \eta h} = \operatorname{ctg} s.$$

Ambele soluţii verifică ecuaţia dată şi se poate arăta că ele reprezintă aceeaşi funcţie.

$r_1 = r_2$. Cum $r_1 r_2 = r^2 = 1$, rezultă că rădăcina dublă poate fi sau $+1$ sau -1.

Dacă $r = 1$, $\gamma = \frac{1}{h} \ln r = 0$, deci din (11) avem

$$S(x) = B_1 + B_2 x$$

sau cum $S(0)=0$, rezultă

$$S(x) = B_2 x \tag{40}$$

şi din (33)

$$C(x) = \alpha x + 1 \tag{41}$$

unde B_2 şi α sînt constante reale arbitrare.

Dacă $r=-1$, avem $\ln r = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi)$, deci $\gamma = \frac{i\pi}{h}$. Ţinînd seama că $B_1 = 0$, avem

$$S(x) = e^{\frac{i\pi}{h}} B_2\, x.$$

Cum $S(x)$ este real, $D = e^{\frac{i\pi}{h}} B_2$ trebuie să fie real şi se găseşte aceeaşi soluţie ca mai sus.

Recapitulînd avem

TEOREMA III. *Ecuaţia funcţională*

$$S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x)$$

are soluţiile

$S(x) \equiv 0$	$C(x)$ arbitrar
$= \alpha \operatorname{sh} \gamma x$	$= \frac{1}{\operatorname{ch} s} \operatorname{ch}(\gamma x + s)$
$= \alpha \operatorname{sh} \gamma x$	$= \frac{1}{\operatorname{sh} s} \operatorname{sh}(\gamma x + s)$
$= \alpha \sin \eta x$	$= \frac{1}{\cos s} \cos(\eta x + s)$
$= B_2 x$	$= \alpha x + 1$

unde α, γ, η *şi* B_2 *sînt constante arbitrare.*

IV

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y). \tag{IV}$$

Pentru $x=y=0$, avem

$$C(0) = C^2(0) + S^2(0). \tag{42}$$

Deosebim următoarele cazuri:

1° $S(0)=0$, $C(0)=0$. Se găseşte soluţia

$$S(x) \equiv 0,\ C(0) \equiv 0. \tag{43}$$

2° $S(0) = \alpha \neq 0, C(0) = \beta \neq 0$. Avem numai soluţia

$$S(x) \equiv \alpha,\ C(x) \neq \beta, \text{ unde } \beta = \beta^2 + \alpha^2. \tag{44}$$

3° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0)=0$. Caz imposibil din (42).

4° $S(0)=0$, $C(0)=\beta\neq 0$. Din (IV) pentru $y=0$ rezultă $\beta=1$, deci vom integra ecuaţia în ipoteza

$$S(0) = 0,\ C(0) = 1.$$

Avem succesiv

$$0 = C(x+h)\, C(y+h) + S(x+h)\, S(y+h) - C(x)\, C(y) - S(x)S(y)$$

şi apoi

$$S(x) = -\frac{C(h)}{S(h)}\, C(x) + \frac{1}{S(h)} C(x-h) \tag{45}$$

care înlocuită în ecuaţia precedentă, ne dă

$$[C(y+h) - C(h)C(y)]C(x+h) + C(h)\,[C(y-h) - C(y+h)]C(x) + \\ + [C(h)C(y) - C(y-h)]C(x-y) = 0 \tag{46}$$

unde am ţinut seama că

$$S^2(x) + C^2(x) = 1,$$

care se obţine din (IV) pentru $x=y$.

Ecuaţia se poate scrie sub o formă mai simplă, ţinînd seama că $C(x)$ este pară, iar $S(x)$ impară, ceea ce se demonstrează fără greutate. Inlocuind în (IV) pe y cu $-y$, avem atunci

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

Ecuaţia (46) devine

$$C(x+h) - 2C(h)C(x) + C(x-h) = 0, \tag{47}$$

care este tocmai ecuaţia lui Poisson. Ecuaţia ei caracteristică

$$r^2 - 2C(h)r + 1 = 0$$

are rădăcinile complexe de modul unitate

$$C(h) \pm iS(h).$$

Avem atunci ca şi în paragraful precedent

$$C(x) = \cos \eta x - 2b \sin \eta x$$

unde s-a ţinut seama că $C(0)=1$. Înlocuind în (45), găsim

$$S(h)S(x) = \sin \eta x \sin \eta h + 4b \cos \eta x \sin \eta h - 4b^2 \sin \eta x \sin \eta h,$$

de unde

$$S^2(h) = \sin \eta h + 4b \sin \eta h \cos \eta h - 4b^2 \sin \eta h.$$

Cum $S(h)$ este real, expresia din partea a doua trebuie să fie pozitivă pentru orice b, ceea ce nu se poate, căci trinomul în b are rădăcini reale. Rezultă $b=0$.

Soluţia corespunzătoare este atunci

$$C(x) = \cos \eta x, \quad S(x) = \sin \eta x. \tag{48}$$

Avem deci

TEOREMA IV. *Ecuaţia funcţională*

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y)$$

are soluţiile

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv 0 & C(x) &\equiv 0 \\ &\equiv \alpha & &\equiv \beta, \textit{ unde } \beta = \beta^2 + \alpha^2 \\ &= \sin \eta x & &= \cos \eta x, \end{aligned}$$

unde α, β *şi* η *sînt constante arbitrare reale.*

V

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$C(x+y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \tag{V}$$

Pentru $x=y=0$, avem

$$C(0)=C^2(0)+S^2(0). \tag{49}$$

Avem următoarele cazuri:

1° $S(0)=0$, $C(0)=0$. Se găseşte numai soluţia

$$S(x) \equiv 0, \ C(x) \equiv 0 \tag{50}$$

2° $S(0) = \alpha \neq 0, C(0) = \beta \neq 0$. Ca şi la (II) se găseşte numai soluţia

$$S(x) = \alpha a^{cx}, \ C(x) = \beta a^{cx}, \quad \text{unde} \quad \beta = \beta^2 + \alpha^2. \tag{51}$$

3° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0)=0$. Caz imposibil, după cum rezultă din (49).

4° $S(0)=0$, $C(0)=\beta\neq 0$. Din (49) deducem $\beta=1$, deci urmează să integrăm ecuaţia în ipoteza

$$S(0) = 0, \ C(0) = 1.$$

Procedînd ca şi pentru ecuaţia (II), se găsesc succesiv ecuaţiile

$$0=C(x+h)C(y-h) + S(x+h)S(y-h) - C(x)C(y) - S(x)S(y)$$

$$S(x) = -\frac{C(-h)}{S(-h)}C(x) + \frac{1}{S(-h)}C(x-h) \tag{52}$$

şi apoi o ecuaţie de forma

$$L(h)C(x+h)+M(h)C(x)+N(h)C(x-h)=0$$

După natura rădăcinilor r_1, r_2 ale ecuaţiei caracteristice corespunzătoare, avem următoarele posibilităţi:

r_1, r_2 *reali şi distincţi*. Din (10) şi $C(0) = 1$ avem

$$C(x) = A_1 (e^{\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x})$$

sau

$$C(x) = e^{\delta x} \ [\operatorname{ch} \eta x + (2A_1 - 1) \operatorname{sh} \eta x]$$

unde am notat

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \delta, \qquad \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = i\eta.$$

Înlocuind în (52), avem

$$S(x)S(-h) = -e^{\delta(x-h)}\, 4A_1(1-A_1) \text{ sh } \eta x \text{ sh } \eta h$$

deci

$$S^2(-h) = e^{-2\delta h}\, 4A_1\,(1 - A_1) \text{ sh}^2\, \eta h.$$

aşa că trebuie să avem

$$A_1\,(1-A_1\,) \geqslant 0$$

deci $0 \leqslant A_1 \leqslant 1$. Cum atunci $-1 \leqslant 2A_1-1 \leqslant 1$, putem nota

$$2A_1 - 1 = \text{tgh}\, s$$

şi găsim soluţia

$$C(x) = \frac{1}{\text{ch } s} e^{\delta x} \text{ ch}\,(\eta x + s) \tag{53}$$

$$S\,(x) = \pm \frac{1}{\text{sh } s} e^{\delta x} \text{ sh } \eta\, x \tag{54}$$

r_1, r_2 *complex conjugaţi*. Ţinînd seama că $C(0) = 1$, din (12) avem

$$C(x) = e^{\delta h}\,(\cos \eta x - 2b \sin \eta x).$$

Înlocuind în (52) găsim

$$S(x)S(-h) = e^{-\delta(x-h)}\,(1+4b^2) \sin \eta x \sin \eta h$$

deci

$$S^2(-h) = -e^{-2\delta h}\,(1+4b^2) \sin^2 \eta h$$

ceea ce arată că acest caz este imposibil, deoarece $S(x)$ este real.

$r_1 = r_2$. Din (11) avem

$$C(x) = e^{\gamma h}(1 + B_2 x)$$

care înlocuită în (52) ne dă

$$S(x)S(-h) = e^{\gamma(h-x)}\, B_2^2\, xh$$

de unde

$$S^2(h) = -e^{-\gamma 2h}\, B_2^2\, h^2,$$

deci şi acest caz este imposibil.

TEOREMA V. *Ecuaţia funcţională*

$$C(x+y) = C(x)C(y) + S(x)S(y)$$

are soluţiile

$$S(x) \equiv 0 \qquad\qquad C(x) \equiv 0$$
$$= \alpha\, a^{cx} \qquad\qquad = \beta\, a^{cx} \text{ unde } \beta = \beta^2 + \alpha^2$$
$$= \pm \frac{1}{\mathrm{ch}\, s} e^{\delta x} \,\mathrm{sh}\, \eta x \qquad\qquad = \frac{1}{\mathrm{ch}\, s} e^{\delta x} \,\mathrm{ch}\, (\eta x + s)$$

unde α, β, δ, η, a, c *şi* s *sînt constante arbitrare.*

VI

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$C(x-y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \tag{VI}$$

Avem

$$C(0) = C^2(0) - S^2(0). \tag{55}$$

1° $S(0)=0$, $C(0)=0$. Avem numai soluţia

$$S(x) \equiv 0,\ C(x) \equiv 0. \tag{56}$$

2° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = \beta \neq 0$. Se găseşte numai soluţia

$$S(x) \equiv \alpha\ ,\ C(x) \equiv \beta^2, \text{ unde } \beta = \beta_1 - \alpha^2 \tag{57}$$

3° $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = 0$. Caz imposibil.

4° $S(0)=0$, $C(0) = \beta \neq 0$. Din (55) rezultă $\beta=1$, deci vom integra ecuaţia (VI) în ipoteza

$$S(0) = 0,\ C(0) = 1.$$

Se procedează exact ca la ecuaţia IV. Soluţia este

$$C(x) = \mathrm{ch}\ \eta x,\ S(x) = \pm\ \mathrm{sh}\ \eta x. \tag{58}$$

TEOREMA VI. *Ecuaţia funcţională*

$$C(x-y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$$

are soluţiile

$$S(x) \equiv 0 \qquad\qquad C(x) \equiv 0$$
$$\equiv \alpha \qquad\qquad \equiv \beta, \text{ unde } \beta = \beta^2 - \alpha^2$$
$$= \pm\ \mathrm{sh}\ \eta x \qquad\qquad = \mathrm{ch}\ \eta x$$

unde α, β *şi* η *sînt constante arbitrare.*

VII

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$S(x+y) = S(x)C(y) - S(y)C(x). \tag{VII}$$

Pentru $x = y = 0$, avem

$$S(0) = 0.$$

1⁰ $S(0) = 0$, $C(0) = 0$. Ecuaţia are numai soluţia

$$S(x) \equiv 0, \ C(x) \text{ arbitrar.} \tag{59}$$

2⁰ $S(0)=0$, $C(0) = \beta \neq 0$. Din (VII), pentru $y=0$, rezultă $\beta = 1$. Eliminăm cazul $S(x) \equiv 0$.
Dacă $C(x) \equiv \beta = 1$, rezultă

$$S(x + y) = S(x) - S(y) \text{ şi } S(x) \equiv 0.$$

Eliminînd aceste cazuri, din (VII), pentru $x=y$, avem

$$S(2x) = 0, \text{ deci } S(x) = 0.$$

TEOREMA VII. *Ecuaţia funcţională*

$$S(x+y) = S(x)C(y)-S(y)C(x)$$

are numai soluţia

$$S(x) \equiv 0, \ C(x) \textit{ arbitrar.}$$

VIII

Să integrăm ecuaţia funcţională

$$S(x-y) =S(x)C(y)+S(y)C(x). \tag{VIII}$$

Pentru $x=y=0$, avem

$$S(0)\,[1-2C(0)]=0. \tag{60}$$

1⁰ $S(0) = 0$, $C(0)=0$. Avem numai soluţia

$$S(x) \equiv 0, \ C(x) \text{ arbitrar} \tag{61}$$

2⁰ $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = \beta \neq 0$. Din (60) rezultă $\beta = \frac{1}{2}$.
Dacă $S(x) \equiv \alpha$, deducem $C(x) \equiv \frac{1}{2}$ şi reciproc. Alte soluţii nu mai avem.

3⁰ $S(0) = \alpha \neq 0$, $C(0) = 0$. Imposibil.

4⁰ $S(0) = 0$, $C(0)=\beta \neq 0$. Din (VIII), pentru $y=0$, rezultă $\beta=1$ şi nu mai găsim alte soluţii decît cele de mai sus, căci pentru $x=y$, din (VIII) avem

$$S(x)\, C(x) = 0.$$

TEOREMA VIII. *Ecuaţia funcţională*

$$S(x - y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

are numai soluţiile

$$S(x) \equiv 0 \qquad C(x) \textit{ arbitrar}$$

$$S(x) \equiv \alpha \qquad C(x) \equiv \frac{1}{2}$$

unde α *este arbitrar.*

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1961. p. 131–134.
2. Th. Angheluță, *Asupra ecuației funcționale* $\varphi(x + y) = \varphi(x)f(y) + \varphi(y)f(x)$,,Gazeta matematică și fizică'', **X**, Seria A, Nr. 7, 1958, p. 386–390.
3. Th. Angheluță, *Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles*. ,,Mathematica'', **XIX**, 1943, p. 19–22.
4. J. G. van der Corput, *Goniometrische functies gekarakteriseerd door een funktionalbetrekking*. ,,Euclides'', **17**, 1940, p. 55–75.
5. J. C. H. Gerretsen, *De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een funktionaalbetrekking*. ,,Euclides'', **16**, 1939, p. 92–99.
6. M. Ghermănescu, *Caracterizarea funcțională a funcțiilor trigonometrice*. ,,Buletinul Institutului Politehnic din Iași'', **4**, 1948, p. 362–368.
7. M. Ghermănescu, *Ecuații funcționale*, București, 1961.
8. N. Ghircoiașiu, *Asupra unei ecuații funcționale cu trei funcții necunoscute*. ,,Buletinul științific al Institutului Politehnic din Cluj'', **4**, 1961, p. 55–65.
9. P. Montel, *Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles*. ,,Mathematica'', **XXI**, 1945, p. 10–11.
10. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 1912, p. 582.
11. O. Perron, *Über Addition- und Substraktionstheoreme*. ,,Arch. Math. Phys.'' (3) **28**, 1920, p. 97–100
12. F. Radó, *Caracterizarea mulțimii integralelor tuturor ecuațiilor diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți*. ,,Studii și cercetări'', 1962, Cluj.
13. J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. 1886, p. **147**.
14. H. E. Vaughan, *Caracterisation of the Sine and Cosine*. ,,The American Mathematical Monthly'', **62**, nr. 10, 1955, p. 707–713.
15. L. Vietoris, *Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen*. ,,Journal für die reine und angewandte Mathematik'', **186**, Heft 1, 1944.
16. E. Vincze, *Komplex változós trigonometriai függvényegyenletek megoldása, néhány alkalmazása és általánosítása*. Miskolc Egyetemváros, 1961, p. 7–10.
17. E. B. van Vleck und H. Doubler, *A study of certain functional equations for the* δ – *functions*. ,,Transactions Amer. Math. Soc.'' **17**, 1916, p. 30.
18. H. Wilson, *On certain related functional equations*. ,,Bulletin of the Am. Math. Soc.'' **XXVI**, Nr. 7, 1920, p. 300–312.

О КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Пользуясь отношениями рекуррентности, интегрируют каждое функциональное уравнение I—VIII. Даются решениями действительные и непрерывные функции.

Результаты даются в теоремах I—VIII.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

(Résumé)

Utilisant les relations de récurrence, l'auteur intègre chacune des équations fonctionnelles I–VIII, en donnant les solutions fonctions réelles et continues. Les résultats sont donnés dans les théorèmes I–VIII.

PROPRIETĂŢI INTEGRALE CARACTERISTICE PENTRU POLINOAME

de

I. STAMATE

1. M. S t a r k [7] a considerat ecuaţia funcţională

$$f[\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta] = \frac{k}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt \tag{1}$$

λ şi k fiind două constante şi a arătat că: dacă o funcţie integrabilă în orice sens, satisface ecuaţia funcţională (1), atunci $f(t)$ este o funcţie liniară.

Ecuaţia funcţională (1) generalizează următoarea propoziţie a lui D. P o m p e i u [3] şi [4]: dacă $f(t)$ este o funcţie continuă şi dacă media valorilor lui $f(t)$, în un interval oarecare este egală cu valoarea lui $f(t)$ în mijlocul acestui interval, atunci funcţia $f(t)$ este liniară.

În alţi termeni, dacă avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{2}$$

oricare ar fi α şi β, funcţia este liniară.

Pentru $k=1$ şi $\lambda = \frac{1}{2}$ ecuaţia (1) revine la ecuaţia (2).

În cele ce urmează, la început, vom modifica soluţia dată de M. S t a r k prin alta, în care se introduce numai o derivare, apoi vom da o metodă de a determina soluţia generală fără a introduce derivate, metodă pe care, la urmă, o utilizăm şi la alte ecuaţii funcţionale care au soluţii polinoame de grad superior lui unu.

2. În demonstraţia sa M. S t a r k porneşte dela ipoteza că partea a 2-a a ecuaţiei funcţionale (1) este o funcţie continuă pentru $\beta \neq \alpha$, acelaşi lucru este valabil şi pentru partea 1-a şi de aici concluzia că $f(t)$ are derivate de orice ordin.

Derivînd (1) în raport cu β presupunînd $\beta \neq \alpha$ se obține ecuația funcțională

$$(1-\lambda)(\beta-\alpha) f' [\lambda\alpha + (1-\lambda) \beta] + f [\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta] = k f(\beta) \qquad (3)$$

Partea 2-a din (3) nu depinde de α, deci α poate fi arbitrar. Pentru $\alpha=\beta$ avem

$$f(\beta) = kf(\beta)$$

egalitatea valabilă pentru β oarecare, deci $k = 1$. Astfel (3) devine

$$(1-\lambda)(\beta-\alpha) f^1[\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta] + f[\lambda\alpha + (1-\lambda) \beta] = f(\beta). \qquad (4)$$

Putem obține integrala generală a acestei ecuații funcționale fără a introduce o nouă derivare. Pentru aceasta, fie $[a,b]$ intervalul în care noi considerăm funcția $f(t)$. Dacă punem

$$\frac{a+b}{2} = c, \quad \beta = x, \quad \alpha = \frac{c-(1-\lambda)x}{\lambda}$$

cu $\lambda \neq 0$, pentru $x \neq c$, ecuația (4) devine

$$f(x) = f(c) + \frac{1-\lambda}{\lambda}(x-c) f'(c) \qquad (5)$$

din care se vede clar că $f(t)$ este o funcție liniară, deci $f(t) = at + b$, unde a și b sînt două constante arbitrare.

În virtutea continuității funcției $f(t)$ egalitatea (5) este valabilă și pentru $x = c$.

Pentru $f(t) = at + b$, din (4) deducem $\lambda = \frac{1}{2}$.

Cazul $\lambda =$ o exclus mai sus, nu aduce nimic deosebit.

3. Vom da acum ecuației funcționale (1) o soluție în care nu utilizăm derivate.

Dacă $f(t) =$ constant și satisface (1) rezultă $k = 1$ iar λ poate fi oarecare.

Fie $f(t) \neq$ constant. Valorile α și β fiind oarecari, fie y mijlocul intervalului $[\alpha, \beta]$, apoi fie α și β mijloacele intervalelor $[x,y]$ și $[y,z]$.

Funcția $f(t)$ satisfăcînd (1) cu α și β oarecari, avem

$$k\int_x^y f(t)\,dt = (y-x) f[\lambda x + (1-\lambda)] y],$$

$$k\int_y^z f(t)\,dt = (y-x) f [\lambda y + (1-\lambda)z],$$

$$k\int_x^z f(t)\,dt = 2(y-x) f[\lambda x + (1-\lambda)z]$$

căci prin ipoteză

$$y = \frac{x+z}{2} \text{ deci } z - y = y - x \text{ şi } z - x = 2\,(y-x).$$

Cum însă

$$\int_x^z f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt + \int_y^z f(t)\,dt$$

rezultă ecuaţia funcţională

$$f[\lambda(x-y)+y] + f[\lambda(x-y)+2y-x] = 2f[2\lambda(x-y)+2y-x] \tag{6}$$

Ecuaţia (6) trebuie să fie verificată de funcţia $f(t)$ oricare ar fi x şi y, cu λ o constantă.

Dacă în (6) facem substituţiile

$$x = u + v\,, \quad y = u - v$$

se obţine

$$f\,[u+(2\lambda-1)v] + f[u+(2\lambda-3)\,v] - 2\,f[u+(4\lambda-3)\,v] = 0 \tag{7}$$

care este un caz particular al ecuaţiilor de forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, f(x + \alpha_i\, h) = 0 \tag{8}$$

tip de ecuaţii studiat de Prof. T. Popoviciu [5] şi [6] pentru care a arătat că dacă numărul k este aşa fel că

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i = \ldots = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i^{k-1} = 0 \text{ şi } \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i^{k} \neq 0 \tag{9}$$

şi dacă $f(t)$ este o funcţie mărginită (poate fi sumabilă sau măsurabilă) care satisface (8) atunci soluţia generală a ecuaţiei (8) este polinomul general de gradul $k-1$.

În cazul nostru

$$\Sigma a_i = 0,\ \Sigma a_i \alpha_i = 2\lambda - 1 + 2\lambda - 3 - 2\,(4\lambda-3) = -2\,(2\lambda-1),$$
$$\Sigma\, a_i\, \alpha_i^2 = (2\lambda-1)^2 + (2\lambda-3)^2 - 2\,(4\lambda-3) = -8\,(\lambda-1)\,(3\lambda-1)$$

Cum $\Sigma\, a_i\, \alpha_i^2$ nu se anulează pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ concludem: ecuaţia funcţională (1), dacă $k = 1$ şi λ este oarecare admite ca soluţie $f(t) = \text{const.}$, iar dacă $f(t)$ este diferit de o constantă are ca soluţie numai dacă $\lambda = \frac{1}{2}$ şi $k = 1$ şi atunci $f(t) = at + b$ unde a şi b sînt două constante oarecari.

3. J. Herbrand [2] a studiat ecuaţia funcţională

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = k_0 f(\alpha) + k_1 f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + k_2 f(\beta) \tag{10}$$

care generalizează pe a cea lui D. Pompeiu şi sub ipoteza că $f(t)$ este mărginită în un interval oarecare, a găsit că singurele soluţii ale acestei ecuaţii sînt :

1° $f(t) = at + b$ *dacă* $k_0 = k_2$, $k_1 + 2k_0 = 1$, caz în care intră ecuaţia (2) dacă $k_0 = 0$,

2° $f(t)$ un polinom de gradul al 3-lea dacă $k_0 = k_2 = \frac{1}{6}$, $k_1 = \frac{4}{6}$, caz în care ajungem la formula celor trei nivele.

N. Ciorănescu [1] pornind de la ecuaţia (10) a studiat diferite alte ecuaţii funcţionale, care se pot soluţiona fără a introduce derivate, reducîndu-le la ecuaţii de forma (8). Una dintre acestea este

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(\alpha_1) + f(\beta_1)] \tag{11}$$

unde

$$\alpha_1 = \alpha + \lambda\,(\beta-\alpha), \qquad \beta_1 = \beta - \lambda\,(\beta-\alpha) \qquad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$

în care $f(t)$ este o funcţie mărginită pentru orice α, $\beta \in (a, b)$.

N. Ciorănescu arată că dacă $f(t)$ este o funcţie mărginită într-un interval oarecare şi verifică ecuaţia de mai sus, ea este continuă, derivabilă, analitică,

Dezvoltînd pe $f(t)$ în serie deduce că: dacă λ este oarecare, soluţia cea mai generală a ecuaţiei (11) este polinomul de gradul întîi.

Dacă λ nu este arbitrar, ci satisface ecuaţia

$$\frac{\lambda^2 + (1-\lambda)^2}{2\cdot 2!} = \frac{1}{3!}, \qquad 6\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

adică $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ecuaţia admite ca soluţie generală polinoamele de grad ≤ 3.

Vom da pentru ecuaţia (11) o altă soluţie, fără a utiliza derivate.

Făcînd în (11) schimbările de variabile

$$\beta = u + v, \quad \alpha = u - v$$

şi descompunînd integrala astfel

$$\int_{u-v}^{u} f(t)\,dt + \int_{u}^{u+v} f(t)\,dt = \int_{u-v}^{u+v} f(t)\,dt \tag{12}$$

se deduce

$$\frac{1}{2v}\int_{u-v}^{u+v} f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(u-v+2\lambda v)+f(u+v-2\lambda v)],$$

$$\frac{1}{2v}\int_{u-v}^{u} f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(u-v+\lambda v)+f(u-\lambda v)].$$

$$\frac{1}{v}\int_{u}^{u+v} f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(u+\lambda v)+f(u+v-\lambda v)]$$

Avînd în vedere (12) rezultă ecuaţia funcţională

$$f(u+\lambda v)+f(u+v-\lambda v)+f(u-v+\lambda v)+f(u-\lambda v)-2f(u-v+2\lambda v)-$$
$$-2f(u+v-2\lambda v)=0.$$

Ecuaţia aceasta este de forma (8). Expresiile (9) în acest caz devin

$$\Sigma a_i = 0,\ \Sigma a_i\alpha_i = 0,\ \Sigma a_i\alpha_i^2 = -12\lambda^2+12\lambda-2,$$
$$\Sigma a_i\alpha_i^3 = 0,\ \Sigma a_i\alpha_i^4 = -60\lambda^4+120\lambda^3-84\lambda^2+24\lambda-2.$$

Cum nici una din valorile cari anulează pe $\Sigma a_i\alpha_i^2$, nu anulează pe $\Sigma a_i\alpha_i^4$ urmează că ecuaţia funcţională (11) admite ca soluţie generală polinomul de gradul unu cînd $-12\lambda^2+12\lambda-2\neq 0$ şi cînd aceasta este zero polinomul de gradul al 3-lea.

5. Prin acelaşi procedeu se poate studia şi ecuaţia

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \frac{1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}[(2\lambda_2-1)f(\alpha_1)+(1-2\lambda_1)f(\alpha_2)] \tag{13}$$

unde

$$\alpha_1=\alpha+\lambda_1(\beta-\alpha),\quad \alpha_2=\alpha+\lambda_2(\beta-\alpha),\quad 0\leqq\lambda_i\leqq 1,\quad \lambda_1\neq\lambda_2$$

obţinîndu-se ecuaţia funcţională

$$(2\lambda_2-1)f[u+(\lambda_1-1)v]+(1-2\lambda_1)f[u+(2\lambda_2-1)v]+$$
$$(2\lambda_2-1)f(u+\lambda_1 v)+(1-2\lambda_1)f(u+\lambda_2 v)$$
$$-2(2\lambda_2-1)f[u+(2\lambda_1-1)v]-2(1-2\lambda_1)f[u+(2\lambda_2-1)v]=0$$

Dacă o legăm de (8) şi (9) se deduce

$$\Sigma a_i=0,\ \Sigma a_i\alpha_i=0,\ \Sigma a_i\alpha_i^2=2(\lambda_2-\lambda_1)[6\lambda_1\lambda_2-3(\lambda_1+\lambda_2)+2]$$

În consecință: 1⁰ dacă λ_1 și λ_2 sînt oarecari, soluția ce mai generală a ecuației (13) este funcția liniară ,

2⁰ dacă λ_1 și λ_2 sînt legați prin relația

$$6 \lambda_1 \lambda_2 - 3 (\lambda_1 + \lambda_2) + 2 = 0$$

soluția cea mai generală este polinomul general de gradul al 2-lea.

Dacă se calculează $\Sigma\, a_i x_i^3$ prin anulare se deduce că ecuația (13) admite ca soluție polinomul general de gradul al 3-lea dacă $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Procedînd ca mai sus, se poate arăta că și celelalte ecuații funcționale din nota lui N. Ciorănescu [1] se pot aduce la ecuații de forma (5), deci că se pot obține soluțiile lor generale fără a utiliza dezvoltări în serie.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Ciorănescu *Sur la définition fonctionnelle des polynômes et quelques formules à deux et trois niveaux*, „Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences", nr. 33—34 (1932), pag. 39—47.
2. J. Herbrand, *Recherche des solutions bornées de certaines équations fonctionnelles*, „Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sc. Paris", **189** (1929) pag. 689—671.
3. D. Pompeiu, *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne*, „Comptes rendus, Paris", **190** (1930), 1107—1109.
4. D. Pompeiu, *Sur une propriété intégrale caractéristique des fonctions linéaires*, „Bulletin de Math. et de Physique pures et appl. de l'École Polytechn. de Bucarest", **II** (1930—31) pag. 3—5.
5. T. Popoviciu, *Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes*, „Mathematica", **10** (1935), pag. 194—208.
6. T. Popoviciu, *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles*; „Mathematica", **14** (1938), pag. 47—106.
7. M. Stark, *On a Functional Equation*. „Colloquium Mathematicum", **13** (1938) pag. 230—31.

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

(Резюме)

Изучаются уравнения (1), (11) и (13) без введения производных. Метод заключается в приведении этих уравнений к виду (8), изученному Т. Поповичиу в [5] и [6].

PROPRIÉTÉS INTÉGRALES CARACTÉRISTIQUES POUR DES POLYNÔMES

(Résumé)

L'auteur étudie les équations (1), (11) et (13) sans introduire de dérivations. La méthode consiste à réduire ces équations à la forme (8) étudiée par T. Popoviciu en [5] et [6].

DESPRE O FORMULĂ DE CUBATURĂ

de

D. V. IONESCU

Este cunoscută formula de cubatură

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \frac{S}{6}\left[f(x_0 - h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0 - k) + \right. \tag{1}$$
$$\left. + f(x_0, y_0 + k) + 2f(x_0, y_0)\right] + R$$

în care domeniul D este un dreptunghi definit de inegalităţile

$$D: x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h,\ y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0 + k$$

S este aria dreptunghiului, iar R este restul formulei.

Această formulă este amintită de Fr. A. Willers [5], de G. W. Tyller [4] şi de I. Albrecht şi L. Collatz [1].

În această lucrare vom da o metodă pentru a obţine formula de cubatură (1) şi restul R în acelaşi timp, sub forma

$$R = \iint\limits_D \Phi\,(x, y)\, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\, dx dy + \int\limits_{x-h}^{x_0+h} \varphi(s)\, \frac{\partial^4 f}{\partial s^4}(s, y_0)\, ds + \int\limits_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(t)\, \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\,(x_0, t) dt \tag{2}$$

determinînd funcţiile $\Phi(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$

Restul formulei (1) fiind astfel bine precizat, se va face o aplicaţie a formulei (1), la calculul aproximativ al integralelor duble.

Metoda de lucru pentru obţinerea formulei de cubatură (1) este aceeaşi cu cea întrebuinţată în lucrarea noastră [2], despre punerea unei diferenţe divizate de ordinul (m, n) a unei funcţii de două variabile, sub forma unei integrale duble. Prin această metodă obţinerea unei formule de cubatură se reduce la integrarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale cu anumite condiţii la limită, după cum obţinerea unei formule de cuadratură este legată de integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale cu anumite condiţii la limită [3].

§ 1. FORMULE PRELIMINARII

1. Să considerăm dreptunghiul D, definit de inegalităţile

$$\mathrm{D}: x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2$$

în care sînt definite funcţiile $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ continue împreună cu derivatele lor parţiale,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \; \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Transformînd integrala dublă

$$\iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy$$

prin integrări prin părţi convenabile, se ajunge la următoarea formulă

$$\begin{aligned}\iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy &= \varphi(x_2, y_2) f(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) f(x_1, y_2) - \\ &- \varphi(x_2, y_1) f(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) f(x_1, y_1) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) f(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) f(x, y_2) dx + \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) f(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_2, y) f(x_2, y) dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} f\, dx\, dy\end{aligned} \tag{3}$$

Să presupunem acum că funcţiile $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ mai au derivatele parţiale

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

continue în D.

Înlocuind atunci în formula (3) pe f cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vom avea

$$\iint_D \varphi \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx\, dy = \varphi(x_2\, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1\, y_2) -$$

$$- \varphi(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1)$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\varphi x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) dx +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy +$$

$$+ \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

Dacă în membrul al doilea înlocuim ultima integrală cu membrul al doilea al formulei (3), în care $\varphi(x, y)$ este înlocuit cu $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ obținem formula

$$\iint_D \varphi \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \varphi\, (x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) -$$

$$- \varphi(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \varphi\, (x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_2, y_2)\, f(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_1, y_2)\, f\, (x_1, y_2) -$$

$$- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, (x_2, y_1)\, f(x_2, y_1) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_1, y_1)\, f(x_1, y_1) + \tag{4}$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2)\, dx +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y)\, dy +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1)\, f(x, y_1)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2)\, f(x, y_2)\, dx +$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}(x_1,y)f(x_1,y)dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}(x_2,y)f(x_2,y)dy+$$

$$+\iint_D\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}f\,dxdy$$

care este fundamentală pentru această lucrare.

2. Să considerăm acum dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4, definite de inegalitățile

$$\begin{array}{lll} D_1: & x_2\leqslant x\leqslant x_3, & y_2\leqslant y\leqslant y_3\\ D_2: & x_1\leqslant x\leqslant x_2, & y_2\leqslant y\leqslant y_3\\ D_3: & x_1\leqslant x\leqslant x_2, & y_1\leqslant y\leqslant y_2\\ D_4: & x_2\leqslant x\leqslant x_3, & y_1\leqslant y\leqslant y_2\end{array}$$

și să notăm cu D dreptunghiul format din dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4.

La dreptunghiul D_i atașăm funcția $\varphi_i(x)$ continuă și cu derivatele parțiale care figurează în formula (4), continue în D_i; aceasta pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

De asemenea fie $f(x, y)$ o funcție continuă în dreptunghiul D și care are derivatele parțiale care figurează în formula (4), continue în D.

Aplicăm la fiecare dreptunghiu D_i și la funcțiile f, φ_i formula (4). Adunăm membru cu membru cele patru formule care se obțin și vom avea următoarea formulă

$$\sum_{i=1}^{4}\iint_{D_i}\varphi_i\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dxdy= \tag{5}$$

$$=\varphi_1(x_3,y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_3,y_3)-\varphi_2(x_1,y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_1,y_3)+\varphi_3(x_1,y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_1,y_1)$$

$$-\varphi_4(x_3,y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_3,y_1)+[\varphi_3(x_3,y_3)-\varphi_1(_2,y_3)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_2,y_3)+$$

$$+[\varphi_2(x_1,y_2)-\varphi_3(x_1,y_2)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_1,y_2)+[\varphi_4(x_2,y_1)-\varphi_3(x_2,y_1)]\frac{\partial_2 f}{\partial x\,\partial y}(x_2,y_1)+$$

$$+[\varphi_4(x_3,y_2)-\varphi_1(x_3,y_2)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_3,y_2)+[\varphi_1(x_2,y_2)-\varphi_2(x_2,y_2)+$$

$$+\varphi_3(x_2,y_2)-\varphi_4(x_2,y)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}(x_3y_3)f(x_3,y_3)-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x_1y_3)f(x_1,y_3)+$$

$$+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}(x_1,y_1)f(x_1,y_1)-\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}(x_3,y_1)f(x_3,y_1)+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x_2,y_3)-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}(x_2,y_3)\right]f(x_2,y_3)+\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x,y_2)-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}(x_1,y_2)\right]f(x_1,y_2)+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}(x_2,y_1)-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}(x_2,y_1)\right]f(x_2,y_1)+\left[\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}(x_3,y_2)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x_3,y_2)\right]f(x_3,y_2)+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)-\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)\right]f(x_2,y_2)+$$

$$+\int_{x_2}^{x_3}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y_2)-\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x,y_2)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_2)-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x,y_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y_1)\right\}dx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y_2)-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x,y_2)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_2)-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_3)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x,y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_1)\right\}dx+$$

$$+\int_{y_2}^{y_3}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x_2,y)-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x_2,y)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y)-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x_3,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_3,y)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x_1,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_3,y)\right\}dy+$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}(x_2,y)-\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}(x_2,y)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y)-\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}(x_3,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_3,y)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}(x_1,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y)\right\}dy+$$

$$+\int_{x_2}^{x_3}\left\{\left[\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^2\partial y}(x,y_2)-\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x^2\partial y}(x,y_2)\right]f(x,y_2)-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^2\partial y}(x,y_3)\,f(x,y_3)+\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x^2\partial y}(x,y_1)f(x,y_1)\right\}dx+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^2\partial y}(x,y_2)-\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x^2\partial y}(x,y_2)\right]f(x,y_2)-\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^2\partial y}(x,y_3)\,f(x,y_3)+\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x^2\partial y}(x,y_1)\,f(x,y_1)\right\}dx+$$

$$+\int_{y_2}^{y_3}\left\{\left[\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial y^2}(x_2,y)-\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial y^2}(x_2,y)\right]f(x_2,y)-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial y^2}(x_3,y)f(x_3,y)+\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial y^2}(x_1,y)\,f(x_1,y)\right\}dy+$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\left\{\left[\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial y^2}(x_2,y)-\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x\partial y^2}(x_2,y)\right]f(x_2,y)-\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x\partial y^2}(x_3,y)\,f(x_3,y)+\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x\partial y^2}(x_1,y)f(x_1,y)\right\}dy+$$

$$+\sum_{i=1}^{4}\iint_{D_i}\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial x^2\partial y^2}\,f\,dx\,dy$$

§ 2. PROBLEMĂ LA LIMITĂ

3. În legătură cu formula (5) se pune următoarea problemă la limită.

Să se determine funcțiile $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ *soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x^2\partial y^2}=1,\quad \frac{\partial^4\varphi_2}{\partial x^2\partial y^2}=1,\quad \frac{\partial^4\varphi_3}{\partial x^2\partial y^2}=1,\quad \frac{\partial^4\varphi_4}{\partial x^2\partial y^2}=1 \tag{6}$$

şi care să verifice următoarele condiţii la limită

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^2\partial y}(x,y_3) = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial y^2}(x_3,y) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}(x_3, y_3) = 0\\
&\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^2\partial y}(x,y_3) = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial y^2}(x_1,y) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}(x_1,y_3) = 0\\
&\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x^2\partial y}(x,y_1) = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x\partial y^2}(x_1,y) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}(x_1,y_1) = 0\\
&\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x^2\partial y}(x,y_1) = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x\partial y^2}(x_3,y) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}(x_3,y_1) = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y_3) = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x_3,y) = 0, \quad \varphi_1(x_3,y_3) = 0\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y_3) = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x_1,y) = 0, \quad \varphi_2(x_1,y_3) = 0\\
&\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x,y_1) = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}(x_1,y) = 0, \quad \varphi_3(x_1,y_1) = 0\\
&\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x,y_1) = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial y}(x_3,y) = 0, \quad \varphi_4(x_3,y_1) = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Integrînd ecuaţiile (6) cu condiţiile la limită (7), se găseşte

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} &= (x - x_3)(y-y_3)\\
\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y} &= (x-x_1)(y-y_3)\\
\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y} &= (x-x_1)(y - y_1)\\
\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y} &= (x - x_3)(y - y_1)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Integrînd apoi ecuaţiile cu derivate parţiale (9) cu condiţiile (8) se obţine

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{4}(x - x_3)^2 (y - y_3)^2\\
\varphi_2 &= \frac{1}{4}(x - x_1)^2 (y - y_3)^2\\
\varphi_3 &= \frac{1}{4}(x - x_1)^2 (y - y_1)^2\\
\varphi_4 &= \frac{1}{4}(x - x_3)^2 (y-y_1)^2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Cu aceasta problema la limită pusă mai sus este rezolvată.

§ 3. FORMULĂ DE CUBATURĂ

4. În formula (5) să alegem funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ astfel ca ele să fie soluţiile ecuaţiilor cu derivate parţiale (9) şi care verifică condiţiile la limită (7) şi (8). Atunci această formulă capătă forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx\,dy = A \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + B f(x_2, y_2) + \\
+ \int_{x_2}^{x_3} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_1 y_2) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x_1 y_2) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1 y_2)\, dx + \\
+ \int_{y_2}^{y_3} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_2 y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_2, y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y)\, dy + \\
+ \int_{x_2}^{x_3} \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2)\, dx + \\
+ \int_{y_2}^{y_3} \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y)\, dy + \\
+ \iint_D f\, dx\,dy
\end{aligned}
\tag{11}
$$

unde

$$A = \varphi_1(x_2, y_2) - \varphi_2(x_2, y_2) + \varphi_3(x_2, y_2) - \varphi_4(x_2, y_2) \tag{12}$$

$$B = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \tag{13}$$

Ţinînd seamă de ecuaţiile (10) şi făcînd calculele, avem

$$A = (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right) \tag{12'}$$

$$B = (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \tag{13'}$$

Mai departe, avem

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y_2) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x,y_2) = -(y_3 - y_1)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)(x - x_3)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y_2) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x,y_2) = -(y_3 - y_1)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)(x - x_1)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2,y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_2,y) = -(x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)(y - y_3) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_2,y) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_2,y) = -(x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)(y - y_1).$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x,y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x,y_2) = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x,y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x,y_2) = -(y_3 - y_1)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_2,y) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_2,y) = \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_2,y) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_2,y) = -(x_3 - x_1)$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (6) şi de condiţiile la limită (7), (8), (9), precum şi de formulele (12′), (13′), (14), formula fundamentală (5) se transformă în formula

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\, dx\, dy = {} & (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2,y_2) + \\
& + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) f(x_2,y_2) - \\
& - (y_3 - y_1)\int_{x_1}^{x_3} f(x,y_2)\, dx - (x_3 - x_1)\int_{y_1}^{y_3} f(x_2,y)\, dy - \qquad (15) \\
& - (y_3 - y_1)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\left[\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2)\, dx + \int_{x_2}^{x_3} (x - x_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y_2)\, dx\right] - \\
& - (x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\left[\int_{y_1}^{y_2} (y - y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2,y)\, dy + \int_{y_2}^{y_3} (y - y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2,y)\right] + \\
& + \iint_D f\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Să observăm însă că

$$\int_{x_1}^{x_2}(x - x_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2)\,dx = (x_2 - x_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2)\,dx$$

$$\int_{x_2}^{x_3}(x - x_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2)\,dx = (x_3 - x_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \int_{x_2}^{x_3}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_2)\,dx$$

$$\int_{y_1}^{y_2}(y - y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y)\,dy = (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2 y_2) - \int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y)\,dy$$

$$\int_{y_2}^{y_3}(y - y_3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y)\,dy = (y_3 - y_2)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) - \int_{y_2}^{y_3}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y)\,dy$$

şi ţinînd seama de aceasta, formula (15) devine

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\iint_{D_i}\varphi_i\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\,dx\,dy &= (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \\ &+ (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)f(x_2, y_2) - (y_3 - y_1)\int_{x_1}^{x_3} f(x, y_2)\,dx - (x_3 - x_1)\int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y)\,dy - \\ &- (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left[\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2)\right] + \\ &+ (y_3 - y_1)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\int_{x_1}^{x_3}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2)\,dx + (x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\int_{y_1}^{y_3}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y)\,dy + \\ &+ \iint_D f\,dx\,dy\end{aligned} \tag{16}$$

Din formula (16), rezultă formula de cubatură care face obiectul acestei lucrări:

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dx\,dy &= -(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \\ &- (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)f(x_2, y_2) +\end{aligned}$$

$$+ (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\left[\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2) + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2)\right] +$$

$$+ (y_3 - y_1)\int_{x_1}^{x_3} f(x,y_2)\,dx + (x_3 - x_1)\int_{y_1}^{y_3} f(x_2,y)\,dy. \tag{17}$$

$$-(y_3 - y_1)\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)\int_{x_1}^{x_3}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_2)dx - (x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)\int_{y_1}^{y_3}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y)dy + \mathrm{R}$$

unde restul R este dat de formula

$$R = \iint_D \Phi(x,y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\,dx\,dy \tag{18}$$

unde funcţia $\Phi(x, y)$ coincide pe dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4 cu funcţiile φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 date de formulele (10).

5. În cazul particular cînd punctul de coordonare (x_2, y_2) este centrul dreptunghiului D, formula de cubatură (17) se simplifică şi ia forma

$$\iint_D f\,dx\,dy = -(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)f(x_2, y_2) + (y_3 - y_1)\int_{x_1}^{x_3} f(x,y_2)dx + \int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y)dy + R \tag{19}$$

unde restul R este dat tot de formula (18). În acest caz însă funcţia $\varphi(x, y)$ este continuă pe dreptunghiul D şi se anulează pe laturile acestui dreptunghi.

Înlocuind în formula (19) pe $f(x, y)$ cu $\frac{(x - x_2)^2(y - y_2)^2}{4}$, obţinem

$$\iint_D \Phi(x, y)dx\,dy = \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9} \tag{20}$$

şi de aici rezultă o nouă formă a restului formulei de cubatură

$$R = \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{\substack{x = \xi \\ y = \eta}} \tag{21}$$

unde (ξ, η) este un anumit punct din dreptunghiul D.

Din formula (21) rezultă şi următoarea evaluare a restului. Avem

$$|R| \leqq \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9} M_{22} \tag{22}$$

unde

$$M_{22} = \sup_{(D)}\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right|$$

§ 4. APLICAŢIE A FORMULEI DE CUBATURĂ (19)

6. Să schimbăm notaţia punînd

$$x_1 = x_0 - h, \qquad x_2 = x_0, \qquad x_3 = x_0 + h$$
$$y_1 = y_0 - k, \qquad y_2 = y_0, \qquad y_3 = y_0 + k$$

Formula (19) se va scrie sub forma

$$\iint_D f dxdy = -4hkf(x_0, y_0) + 2h \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_0,y)dy + 2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x,y_0)dx + R \tag{19}$$

şi avem

$$|R| \leqq \frac{h^3k^3}{9} M_{2,2} \tag{22'}$$

Să aplicăm la fiecare integrală din membrul al doilea formula de cuadratură a lui Simpson. Vom avea

$$\begin{aligned} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x,y_0)\, dx &= \frac{h}{3} [f(x_0-h, y_0) + 4f(x_0,y_0) + f(x_0+h, y_0)] + R_1 \\ \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_0,y)\, dy &= \frac{k}{3} [f(x_0, y_0-k) + 4f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0+k) + R_2 \end{aligned} \tag{23}$$

unde după cum se ştie [3], avem

$$R_1 = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x) \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} (x, y_0)\, dx, \quad R_2 = \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y) \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} (x_0,y)\, dy \tag{24}$$

unde funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(y$ au fost studiate de noi: ele sînt negative prima pe intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$, a doua pe intervalul $(y_0 - k, y_0 + k)$ şi avem

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x)dx = -\frac{(2h)^5}{2880}, \quad \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y)dy = -\frac{(2k)^5}{2880} \tag{25}$$

Făcînd înlocuirea integralelor din membrul al doilea al formulei (19') cu membrii al doilea din formulele de cuadratură (23), obţinem *formula de cubatură.*

$$\begin{aligned} \iint_D f dxdy = \frac{2hk}{3} [f(x_0-h, y_0) + f(x_0, y_0-k) + f(x_0+h, y_0) + \\ + f(x_0, y_0+k) + 2f(x_0, y_0)] + R' \end{aligned} \tag{26}$$

unde restul R' este dat de formula

$$R' = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} dx\, dy + 2h \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y) \frac{\partial^4 f(x_0, y)}{\partial y^4} dy + \\ + 2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} \psi(x) \frac{\partial^4 f(x, y_0)}{\partial x^4} dx \tag{27}$$

Restul se mai poate pune şi sub forma

$$R' = \frac{h^3 k^3}{9} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(\xi, \eta) - \frac{hk^5}{45} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, \eta_1) - \frac{h^5 k}{45} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1, y_0) \tag{28}$$

dacă ţinem seama de formulele (20), (25). În această formulă (ξ, η), (ξ_1, η_1) sînt două puncte, anumite, din dreptunghiul D.

Notînd

$$M'_{40} = \sup_{(x_0-h,\, x_0+h)} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y_0) \right|, \quad M'_{04} = \sup_{(y_0-k,\, y_0+k)} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, y) \right|$$

avem următoarea evaluare pentru $|R|$

$$|R'| \leqq \frac{hk}{45}(5\, h^2 k^2 M_{22} + h^4 M'_{40} + k^4 M'_{04}) \tag{29}$$

Ţinînd seamă că formula de cubatură (19') este exactă pentru orice funcţie $f(x, y)$ de forma

$$f = A(x)y + B(y)x + A_1(x) + B_1(y) \tag{30}$$

unde funcţiile $A(x)$, $B(y)$, $A_1(x)$ şi $B_1(y)$ sînt oarecari, formula de cubatură (26) este exactă tot pentru funcţii de forma (30) în care $A(x)$, $A_1(x)$, $B(y)$, $B_1(y)$ sînt polinoame de gradul al treilea.

În alte lucrări care vor urma, vom face noi aplicaţii ale formulei de cubatură (19') şi o nouă extindere a ei care de asemenea să conducă la formule practice de cubatură.

BIBLIOGRAFIE

1. Albrecht, J., Collatz, L. *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale.* „ZAMM" **38**(1958) 1–15.
2. Ionescu, D. V. *La représentation de la différence divisée d'une fonction de deux variables par une intégrale définie.* „Mathematica", **3(26)**, (1961), 59–78
3. Ionescu, D. V. *Cuadraturi numerice.* Editura tehnică. Bucureşti, 1957.
4. Tyller, G. W. *Numerical integration of fonctions of several variables.* „Canadian J. Math." **5**(1953), 393–412.
5. Willers, Fr. A. *Methoden der praktischen Analysis.* 1928, p. 110.

ОБ ОДНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ

(Резюме)

В этой работе выводится остаточный член кубатурной формулы (1). Устанавливаются сначала формулы (4) и (5) потом проблема на границе из §2 приводит к кубатурным формулам (17) и (26) с их остаточными членами.

SUR UNE FORMULE DE CUBATURE

(Résumé)

Dans ce travail on donne l'expression du reste de la formule de cubature (1). On établit d'abord les formules fondamentales (4) et (5). Ensuite, le problème aux limites du § 2 conduit aux formules de cubature (17) et (26) avec leurs restes.

ASUPRA POLINOAMELOR ARMONICE ŞI BIARMONICE

de

P. P. TEODORESCU (Bucureşti)

1. Funcţiile armonice $F = F(x_i)$ $(i = 1, 2,\ldots,m)$, care verifică ecuaţia

$$\Delta F = 0, \tag{1}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2}$$

a constituit obiectul studiului multor matematicieni, încă dela începutul secolului trecut.

Ulterior, diferite probleme puse de practică — menţionăm problema plană a teoriei elasticităţii — au făcut să se introducă funcţiile biarmonice, care verifică ecuaţia

$$\Delta\Delta F = \Delta^2 F = 0. \tag{3}$$

Un pas important înainte în construirea funcţiilor biarmonice a fost făcut de E. Almansi [1], care a arătat că o asemenea funcţie se poate pune totdeauna, în mod univoc, sub forma[1]

$$F = \Phi_0 + \Phi_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \tag{4}$$

unde funcţiile $\Phi_0 = \Phi_0(x_i)$ şi $\Phi_1 = \Phi_1(x_i)$ sînt armonice

$$\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi_1 = 0. \tag{5}$$

Se pot introduce în mod analog şi funcţiile poliarmonice[2]; astfel, o funcţie p—armonică $F = F(x_i)$, care verifică ecuaţia

$$\Delta^p F = 0, \tag{6}$$

---

[1]Aceasta este numai una din formele în care se poate scrie o funcţie biarmonică, formă care ne va folosi în cele ce urmează.

[2]Pentru aceste funcţii, vezi — de exemplu — lucrarea [5].

se va putea exprima printr-o formulă care generalizează pe (5), cu ajutorul a p funcții armonice

$$F = \Phi_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)^j \tag{7}$$

unde $\Phi_j = \Phi_j(x_i) (j = 1,2,\ldots,p)$. Aceasta ne arată că studiul funcțiilor armonice prezintă o importanță deosebită pentru studiul celorlalte tipuri de funcții menționate.

În cele ce urmează ne vom referi la cazul polinoamelor armonice omogene (cu ajutorul cărora se pot forma orice polinoame armonice), care prezintă interes în diferite probleme practice. Menționăm că, tot din punct de vedere aplicativ, vom face distincție între diferitele polinoame omogene de grad n oarecare, după proprietățile de paritate sau de imparitate în raport cu fiecare din cele m variabile.

2. Fie întîi cazul unui polinom omogen de gradul n în două variabile

$$P_n(x, y) = \sum_{i,j} A_{ij}\, x^i y^j \qquad (i + j = n), \tag{8}$$

unde i, j pot fi orice numere naturale pozitive sau zero. Este evident că un asemenea polinom are $(n + 1)$ coeficienți.

Punînd condiția ca acest polinom să verifice ecuația (1), găsim

$$\sum_{i,j} A_{ij} \left[i(i-1) x^{i-2} y^j + j(j-1) x^i y^{j-2} \right] = 0 \qquad (i + j = n) \tag{a}$$

și făcînd o schimbare de indice pentru al doilea termen, putem scrie

$$\sum_{i,j} \left[i(i-1) A_{ij} + (j+2)(j+1) A_{i-2,\, j+2} \right] x^{i-2} y^j = 0 \,. \tag{a'}$$

Acest polinom este identic nul numai dacă toți coeficienții săi sînt nuli. O nouă schimbare de indici ne conduce la $(n - 1)$ relații

$$(i+2)(i+1) A_{i+2} + (j+2)(j+1) A_{i,\, j+2} = 0 \; (i + j = n - 2) \tag{9}$$

între cei $(n + 1)$ coeficienți. Deci un polinom armonic omogen, de gradul n, cu două variabile, depinde de $(n + 1) - (n - 1) = 2$ constante arbitrare (cu excepția polinomului de grad zero, care depinde de o singură constantă arbitrară). Cu alte cuvinte există cel mult două polinoame armonice omogene, de grad n, în două variabile, liniar independente.

Alegînd pe $A_{0,n}$ și $A_{1,n-1}$ drept constante arbitrare, determinăm, cu ușurință, din relația de recurență (9), coeficienții polinomului armonic omogen (8) sub forma[3]

$$\begin{aligned} A_{2q,j} &= (-1)^q C_n^{2q} A_{0,n} && (2q + j = n), \\ A_{2q+1,j} &= (-1)^q \frac{1}{n} C_n^{2q+1} A_{1,n-1} && (2q + j + 1 = n), \end{aligned} \tag{10}$$

unde C_r^s este simbolul combinărilor a r obiecte luate cîte s.

---

[3] Pentru a nu complica scrierea, am preferat să folosim două formule, după paritatea indicelui i.

Introducînd o nouă constantă arbitrară

$$\overline{A}_{1,n-1} = \frac{1}{n} A_{1,n-1}, \tag{11}$$

putem scrie coeficienţii cu indicele i impar şi sub forma

$$A_{2q+1,j} = (-1)^q c_n^{2q+1} \overline{A}_{1,n-1} \quad (2q + j + 1 = n). \tag{10'}$$

După proprietăţile de paritate în raport cu cele două variabile, un polinom armonic omogen, de gradul n, se poate descompune în două polinoame, corespunzînd fiecare cîte uneia din cele două constante arbitrare alese.

Pentru polinomul armonic omogen de gradul n par găsim:

— un polinom par în raport cu x şi y[4]

$$P_n^{22}(x,y) = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^l C_n^{2l} x^{2l} y^{n-2l}; \tag{12}$$

— un polinom impar în raport cu x şi y

$$P_n^{11}(x, y) = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^l C_n^{2l+1} x^{2l-1} y^{n-2l-1}. \tag{12'}$$

Pentru polinomul armonic omogen de gradul n impar putem scrie:

— un polinom impar în raport cu x şi par în raport cu y

$$P_n^{12}(x, y) = \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-)^l C_n^{2l+1} x^{2l+1} y^{n-2l-1}, \tag{13}$$

— un polinom par în raport cu x şi impar în raport cu y

$$P_n^{21}(x, y) = \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l C_n^{2l} x^{2l} y^{n-2l}. \tag{13'}$$

Aceste polinoame corespund funcţiilor introduse, pe altă cale, de A. Kahane [3].

3. Folosind relaţia (4), putem construi cu uşurinţă polinoamele biarmonice omogene, de gradul n, în două variabile, care vor depinde de patru constante arbitrare (cîte două constante pentru fiecare din cele două polinoame armonice folosite).

[4] Indicii superiori corespund celor două variabile x şi y; indicele 1 indică o imparitate iar indicele 2 ne arată o paritate în raport cu variabila respectivă.

Cu aceleaşi notaţii ca mai sus, găsim pentru un polinom biarmonic omogen de gradul n par

$$P_n^{22}(x, y)=\sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^l(n-2l)C_n^{2l}(\alpha_n x^{n-2l}y^{2l}+\beta_n x^{2l}y^{n-2l}),$$

$$P_n^{11}(x, y)=\sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-2}(-1)^l(n-2l-2)C_n^{2l+1}(\gamma_n x^{n-2l-1}y^{2l+1}+\delta_n x^{2l+1}y^{n-2l-1}); \tag{14}$$

analog, pentru un polinom biarmonic omogen de gradul n impar putem scrie

$$P_n^{12}(x,y)=\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^l(n-2l-1)(\alpha_n C_n^{n-2l}x^{n-2l}y^{2l}+\beta_n C_n^{n-2l-1}x^{2l+1}y^{n-2l-1}),$$

$$P_n^{21}(x,y)=\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^l(n-2l-1)(\gamma_n C_n^{n-2l-1}x^{n-2l-1}y^{2l+1}+\delta_n C_n^{n-2l}x^{2l}y^{n-2l}). \tag{15}$$

Noi am găsit [6], [11] aceste expresii şi pe altă cale, pornind de la un polinom de forma

$$P_n(x,y)=A_n(x+iy)^n+B_n(x-iy)^n+(x^2+y^2)[C_n(x+iy)^{n-2}+ +D_n(x-iy)^{n-2}], \tag{16}$$

unde i este unitatea imaginară.

În [14] se dau valori numerice şi unele reprezentări grafice pentru aceste polinoame.

Analog se poate construi, folosind formula (7), un polinom p—armonic omogen, de gradul n, în două variabile, care va depinde de $2p$ constante arbitrare (am presupus $p<n$, altfel numărul constantelor arbitrare este mai mic, datorită faptului că polinomul armonic de gradul zero are o singură constantă arbitrară).

4. Cu ajutorul acestor rezultate se pot rezolva cu uşurinţă diferite probleme la limită ale fizicii matematice, avînd un caracter particular.

Fie astfel problema lui Dirichlet pentru un cerc de rază unitate, cu centrul în origine

$$x^2+y^2=1, \tag{17}$$

funcţia pe contur fiind dată de

$$F|_c=\sum_{l=0}^{r}a_{l,r-l}x^ly^{r-l}+\sum_{l=0}^{r-1}a_{l,r-l-1}x^ly^{r-l-1}+\ldots+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}. \tag{18}$$

Ţinînd seama de (17), putem exprima această condiţie la limită sub forma unui polinom în raport cu variabila x, de exemplu

$$F|_c = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i x^i + \beta_i x^{i-1} y) + \alpha_0 , \tag{18'}$$

unde apar numai (2r + 1) coeficienţi.

Pentru rezolvarea problemei alegem o funcţie armonică formată dintr-o sumă de polinoame armonice pînă la gradul r, folosînd expresiile (12), (12'), (13) şi (13'). Această funcţie va cuprinde $(2r + 1)$ constante arbitrare (observăm că polinomul omogen de gradul zero este o constantă, deci introduce o singură constantă arbitrară). Dacă ţinem seama de (17), se poate scrie şi această funcţie într-o formă asemănătoare cu (18') pe contur. Prin identificarea coeficienţilor rezultă că problema s-a redus la rezolvarea unui sistem de $(2r + 1)$ ecuaţii algebrice liniare cu $(2r + 1)$ necunoscute.

În mod analog se poate studia şi problema lui Neumann, cînd derivata normală se dă pe contur sub aceeaşi formă.

Problema biarmonică fundamentală ca şi o problemă p-armonică oarecare se pot rezolva asemănător, în condiţii pe contur analoge. Numărul constantelor arbitrare care se pot introduce corespunde cu numărul maximum de coeficienţi ce pot apărea în expresiile condiţiilor pe contur.

De asemenea, se pot studia aceste probleme şi în cazul unei elipse sau a altui contur închis, reprezentat printr-o formă polinomială.

5. Polinoamele biarmonice în două variabile pot fi folosite cu succes şi pentru rezolvarea unor probleme plane ale teoriei elasticităţii, după cum se poate vedea în [11].

De asemenea, am arătat [6], [12] că — utilizînd aceste polinoame — se pot construi expresii aproximative pentru funcţii biarmonice, punînd condiţii la limită într-un număr finit de puncte pe contur. Metoda condiţiilor în puncte pe contur ne permite să reducem probleme dificile — pentru domenii complicate şi cu condiţii la limită arbitrare — la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare[5], cu un număr finit de necunoscute. Menţionăm şi faptul că, în acest caz, se poate aprecia cu uşurinţă şi exactitatea calculului făcut.

6. În problema spaţială a teoriei elasticităţii se pot folosi de asemenea polinoame armonice şi biarmonice pentru rezolvarea unor probleme la limită particulare. Noi am arătat [7], [9] astfel că unele probleme privind paralelipipedul elastic sau placa groasă pot fi rezolvate pe această cale. De asemenea, toate consideraţiile făcute la punctele 4 şi 5 se pot extinde şi la acest caz (rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru o sferă etc.). Aceste observaţii ne arată că este util un studiu al polinoamelor armonice în trei variabile.

[5] Ţinînd seama de posibilitatea utilizării maşinilor electronice de calcul, aceasta nu constituie o dificultate în rezolvarea problemelor — chiar în cazul unui număr mare de necunoscute.

În lucrarea [4] se fac diferite considerații generale în legătură cu studiul funcțiilor armonice omogene în trei variabile. Noi ne vom referi numai la polinoamele armonice omogene.

Fie astfel un polinom omogen de gradul n

$$P_n(x, y,z) = \sum_{i,j,k} A_{ijk} x^i y^j z^k \qquad (i + j + k = n), \tag{19}$$

unde toți indicii sînt pozitivi sau cel puțin egali cu zero.

Observăm că pentru i fix avem $j + k = n - i$, corespunzînd $(n-i+1)$ coeficienți diferiți. Făcînd pe i să ia toate valorile posibile, găsim numărul total al coeficienților de determinat

$$(n + 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}. \tag{20}$$

Punînd condiția de armonicitate pentru acest polinom, obținem

$$\sum_{i,jk,} A_{ijk} \left[i(i - 1)x^{i-2} y^j z^k + j(j - 1)\, x^i\, y^{j-2}\, z^k + k(k-1) x^i\, y^j\, z^{k-2}\right] = 0. \tag{b}$$

Făcînd schimbări de indici pentru al doilea și al treilea termen din paranteză, mai putem scrie

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} [i(i - 1)\, A_{ijk} + (j + 2)(j + 1) A_{i-2,\, j+2,k} + \\ + (k + 2)\,(k + 1) A_{i-2,j,k+2}]\, x^{i-2} y^j z^k = 0\end{aligned} \tag{b'}$$

Acest polinom este identic nul dacă toți coeficienții lui sînt identic nuli. Făcînd o schimbare de indici, găsim că între cei $\frac{1}{2}(n + 2)(n + 1)$ coeficienți trebuie să existe relațiile

$$(i+2)\,(i+1)\, A_{i+2,j,k} + (j+2)(j + 1)\, A_{i,j+2,k} + (k+2)(k+1) A_{i,j,k+2} = 0, \tag{21}$$

unde $i + j + k = n - 2$, deci $\frac{1}{2}\, n(n - 1)$ relații.

Un polinom armonic omogen, de grad n, în trei variabile, va depinde deci de $\frac{1}{2}(n + 2)(n + 1) - \frac{1}{2}\, n(n - 1) = 2n + 1$ constante arbitrare ; deci există $(2n + 1)$ polinoame armonice omogene, de gradul n, în trei variabile, liniar independente.

Putem alege drept constante arbitrare coeficienții

$$\begin{aligned} &A_{0,0,n},\, A_{0,1,n-1}, \ldots, A_{0,n-1,1},\, A_{0,n,0}, \\ &A_{1,0,n-1},\, A_{1,1,n-2}, \ldots, A_{1,n-2,1},\, A_{1,n-1,0}, \end{aligned} \tag{22}$$

cei din primul rînd fiind în număr de $(n + 1)$, cei din al doilea rînd în număr de n.

Dacă n este un număr cu soț, polinomul P_n poate să fie par în raport cu toate cele trei variabile și putem lua constantele arbitrare

$$A_{0,0,n},\, A_{0,2,n-2}, \ldots, A_{0,n-2,2},\, A_{0,n,0}, \tag{23}$$

în număr de $\left(\frac{n}{2}+1\right)$, sau poate fi par numai în raport cu o variabilă şi impar în raport cu celelalte variabile şi alegem constantele arbitrare

$$\begin{array}{l} A_{0,1,n-1}, A_{0,3,n-3}, \ldots, A_{0,n-3,3}, A_{0,n-1,1}, \\ A_{1,0,n-1}, A_{1,2,n-3}, \ldots, A_{1,n-4,3}, A_{1,n-2,1}, \\ A_{1,1,n-2}, A_{1,3,n-4}, \ldots, A_{1,n-3,2}, A_{1,n-1,0}, \end{array} \tag{23'}$$

fiecare şir cuprinzînd cîte $\frac{n}{2}$ constante.

În mod, analog, dacă n este un număr fără soţ, polinomul P_n poate să fie impar în raport cu toate cele trei variabile şi putem alege constantele arbitrare

$$A_{1,1,n-2}, A_{1,3,n-4}, \ldots, A_{1,n-4,3}, A_{1,n-2,1}, \tag{24}$$

în număr de $\frac{1}{2}(n-1)$, sau poate fi impar numai în raport cu o variabilă şi par în raport cu celelalte două variabile; alegem astfel constantele arbitrare

$$\begin{array}{l} A_{1,0,n-1}, A_{1,2,n-3}, \ldots, A_{1,n-3,2}, A_{1,n-1,0}, \\ A_{0,1,n-1}, A_{0,3,n-3}, \ldots, A_{0,n-2,2}, A_{0,n,0}, \\ A_{0,0,n}\ \ , A_{0,2,n-2}, \ldots, A_{0,n-3,3}, A_{0,n-1,1}, \end{array} \tag{24'}$$

fiecare şir cuprinzînd căte $\frac{1}{2}(n+1)$ constante.

Ceilalţi coeficienţi (pentru celelalte valori ale indicelui i) se pot obţine în funcţie de aceştia, cu ajutorul relaţiei de recurenţă (21). Găsim astfel că, pentru un indice i par, coeficienţii vor fi daţi de formula

$$A_{2q,j,k} = (-1)^q \sum_{l=0}^{q} \frac{C_q^l}{C_{2q}^{2l}} C^{2(q-l)}_{j+2(q-l)} C^{2l}_{k+2l} A_{0,j+2(q-l),k+2l}\ (2q+j+k=n), \tag{25}$$

care se poate verifica prin inducţie completă.

Astfel, pentru $q=1$ vom avea

$$A_{2,j,k} = -\left(C^2_{j+2} A_{0,j+2,k} + C^2_{k+2} A_{0,j,k+2}\right) \quad (j+k=n-2), \tag{c}$$

relaţie care se obţine din (21), făcînd $i=0$.

Să presupunem că relaţia (25) este valabilă dacă primul coeficient este $2(q-1)$, deci să presupunem că

$$A_{2(q-1),j,k} = (-1)^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} \frac{C_{q-1}^l}{C^{2l}_{2(q-1)}} C^{2(q-l-1)}_{j+2(q-l-1)} C^{2l}_{k+2l} A_{0,j+2(q-l-1),k+2l}; \tag{d}$$

unde $2q + j + k = n + 2$. Aceasta ne permite să scriem şi

$$A_{2(q-1),j+2,k} = (-1)^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{C_{q-1}^{l}}{C_{2(q-1)}^{2l}}C_{j+2(q-l)}^{2(q-l-1)}C_{k+2l}^{2l}A_{0,j+2(q-l),k+2l}, \qquad (d')$$

$$A_{2(q-1),j,k+2} = (-1)^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{C_{q-1}^{l}}{C_{2(q-1)}^{2l}}C_{j+2(q-l-1)}^{2(q-l-1)}C_{k+2l+2}^{2l}A_{0,j+2(q-l-1),k+2l+2} =$$

$$= (-1)^{q-1}\sum_{l=1}^{q}\frac{C_{q-1}^{l-1}}{C_{2(q-1)}^{2(l-1)}}C_{j+2(q-l)}^{2(q-l)}C_{k+2l}^{2(l-1)}A_{0,j+2(q-l),k+2l},$$

unde $2q + j + k = n$. Din relaţiile (21)şi (d') rezultă că

$$A_{2q,j,k} = -\frac{(j+2)(j+1)}{2q(2q-1)}A_{2(q-1),j+2,k} - \frac{(k+2)(k+1)}{2q(2q-1)}A_{2(q-1),j,k+2} =$$

$$= (-1)^{q}\left[\frac{(j+2)(j+1)}{2q(2q-1)}C_{j+2q}^{2q-2}A_{0,j+2q,k} + \frac{(k+2)(k+1)}{2q(2q-1)}C_{k+2q}^{2q-2}A_{0,j,k+2q}\right] +$$

$$+ (-1)^{q}\sum_{l=1}^{q-1}\left[\frac{(1+2)(j+1)C_{q-1}^{l}}{2q(2q-1)C_{2q-2}^{2l}}C_{j+2(q-1)}^{2(q-l-1)}C_{k+2l}^{2l} + \right. \qquad (e)$$

$$\left. + \frac{(k+2)(k+1)}{2q(2q-1)}\frac{C_{q-1}^{l-1}}{C_{2q-2}^{2l-2}}C_{j+2(q-l)}^{2(q-l)}C_{k+2l}^{2l-2}\right]A_{0,j+2(q-l),k+2l}.$$

Ţinînd seama de formula cunoscută

$$C_{q-1}^{l-1} + C_{q-1}^{l} = C_{q}^{l}, \qquad (f)$$

relaţia (e) ne conduce la formula (25), care este astfel demonstrată.

Analog, pentru un indice i impar, coeficienţii vor fi daţi de formula

$$A_{2q+1,j,k} = \frac{(-1)^{q}}{2q+1}\sum_{l=0}^{q}\frac{C_{q}^{l}}{C_{2q}^{2l}}C_{j+2(q-l)}^{2(q-l)}C_{k+2l}^{2l}A_{1,j+2(q-l),k+2l} \quad (2q+j+k=n-1). \qquad (25')$$

Cu ajutorul formulelor (25) şi (25′) se pot forma cele $(2n + 1)$ polinoame armonice liniar independente. Astfel, ţinînd seama de (23), un polinom par în raport cu cele trei variabile, corespunzător coeficientului $A_{0,2r,n-2r}$, se va scrie sub forma[6]

$$P_{n}^{222}(x,y,z) = \sum_{q,s=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^{q}\frac{C_{q}^{s+q-r}}{C_{2q}^{2(s+q-r)}}C_{2r}^{2(r-s)}C_{n-2(q+s)}^{2(s+q-r)}x^{2q}y^{2s}z^{n-2(q+s)}, \qquad (26)$$

[6] Folosim notaţia dela punctul 2.

unde $q + s \leqslant \frac{n}{2}$ și putem avea $r = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$. Celelalte polinoame se pot exprima analog folosind coeficienții (23′), (24) și (24′).

7. Putem folosi aceste rezultate și în cazul polinoamelor biarmonice. Găsim astfel că un polinom biarmonic omogen, de gradul n, în trei variabile, depinde de $(2n + 1) + [2(n - 2) + 1] = 4n - 2$ constante arbitrare, pe care le putem alege pe aceleași considerente ca și în cazul polinoamelor armonice.

Observăm astfel că dacă n este un număr cu soț, polinomul P_n se descompune într-un polinom par în raport cu toate cele trei variabile, care depinde de $(n + 1)$ constante arbitrare, și în trei polinoame pare numai în raport cu o variabilă și impare în raport cu celelalte variabile, care depind fiecare de cîte $(n - 1)$ constante arbitrare.

De asemenea, dacă n este un număr fără soț, polinomul P_n se descompune într-un polinom impar în raport cu toate cele trei variabile, care depinde de $(n - 2)$ constante arbitrare, și în trei polinoame impare în raport cu o variabilă și pare în raport cu celelalte variabile, care depind fiecare de cîte n constante arbitrare.

În cazul polinoamelor p-armonice se pot face considerații analoge. Găsim astfel că un polinom p-armonic omogen, de gradul n, în trei variabile, depinde de

$$(2n + 1) + [2(n - 2) + 1] + [2(n - 4) + 1] + \ldots + [2(n - 2p + 2) + 1] = \\ = p[2(n - p) + 3], \tag{27}$$

constante arbitrare (presupunem $p < n$, în caz contrar numărul polinoamelor p-armonice liniar independente putînd fi mai mic).

8. Fie acum cazul unui polinom omogen, în m variabile,

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_j} A_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m}. \tag{28}$$

unde i_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt întregi nenegativi.

După cum se știe (vezi, de exemplu, [2]), un asemenea polinom are

$$K_m^n = C_{m+n-1}^n = \frac{(m + n - 1)(m + n - 2)\ldots m}{n!} \tag{29}$$

coeficienți, unde K_m^n este simbolul combinărilor cu repetiție a m obiecte, luate cîte n.

Punînd condiția de biarmonicitate (1), se poate arăta — ca și la punctele precedente — că se obține relația

$$\sum_{j=1}^{m} (i_j + 2)(i_j + 1) A_{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}, i_j + 2, i_{j+1}, \ldots, i_m} = 0, \tag{30}$$

unde $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n - 2$; se observă că putem scrie

$$K_m^{n-2} = C_{m+n-3}^{n-2} \tag{g}$$

asemenea relații. Rezultă că se pot construi

$$N = C^{n}_{m+n-1} - C^{n-2}_{m+n-3} = \frac{m+2n-2}{n} C^{n-1}_{m+n-3} \tag{31}$$

polinoame armonice omogene, de gradul n, în m variabile, liniar independente. Cele N constante arbitrare de care depinde un polinom armonic omogen, de gradul n, în m variabile, pot fi

$$\begin{aligned} &A_{0,i_2,i_3,\ldots,i_m} && (i_2 + i_3 + \ldots + i_m = n), \\ &A_{1,i_2,i_3,\ldots,i_m} && (i_2 + i_3 + \ldots + i_m = n - 1), \end{aligned} \tag{32}$$

în număr de

$$N = C^{n}_{m+n-2} + C^{n-1}_{m+n-3} = \frac{m+2n-2}{n} C^{n-1}_{m+n-3} \,. \tag{h}$$

Relația de recurență (30) ne permite apoi să obținem, din aproape în aproape, ceilalți coeficienți, construind astfel polinoamele armonice care ne interesează.

9. Cu ajutorul relației (4) se pot construi și polinoamele biarmonice corespunzătoare. Ținînd seama de (31), constatăm că un asemenea polinom biarmonic omogen, de gradul n, în m variabile, depinde de

$$\left(C^{n}_{m+n-1} - C^{n-2}_{m+n-3}\right) + \left(C^{n-2}_{m+n-3} - C^{n-4}_{m+n-5}\right) = C^{n}_{m+n-1} - C^{n-4}_{m+n-5} \tag{33}$$

constante arbitrare.

În general, un polinom p-armonic, omogen, de gradul n, în m variabile, se poate obține cu ajutorul formulei (7) ; ca și mai sus, se poate arăta că se pot construi

$$C^{n}_{m+n-1} - C^{n-2p}_{m+n-2p-1} = C^{m-1}_{m+n-1} - C^{m-1}_{m+n-2p-1} \tag{34}$$

asemenea polinoame. În particular se regăsește formula (27).

Menționăm de asemenea faptul că toate considerațiile de la punctul 4, privind anumite probleme la limită, se pot generaliza pentru acest caz.

10. Problemele practice au impus de asemenea să se considere și unele ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic, altele decît cele armonice și poliarmonice. Menționăm astfel ecuațiile care apar în studiul problemei plane a teoriei elasticității în alte sisteme de coordonate [8] sau pentru corpuri anizotrope [10] sau pentru corpuri neomogene [13]. În toate aceste cazuri sînt adesea utile soluții polinomiale. Un studiu general al polinoamelor care verifică aceste ecuații prezintă deci interes.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Almansi, *Sull' integrazione dell' Equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$, „Ann. di Matem.", s. **III**, t. **II**, 1898, p. 1.
2. Th. Angheluţă, *Curs de algebră superioară*, vol. I, Ed. Univ., 1943.
3. A. Kahane, *Asupra transformărilor în care unghiul pe care îl face tangenta la o curbă plană cu raza vectoare a punctului de contact este un invariant*, „St. şi cerc. matem.", **X**, nr. 2, 1959, p. 91.
4. A. Kahane, *Asupra funcţiilor armonice şi omogene cu aplicaţii în teoria suprafeţelor*, „St. şi cerc. matem.", **XII**, nr. 1, 1961, p. 91.
5. M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris, Hermann Ed. 1936.
6. P. P. Teodorescu, *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii*, „St. şi cerc. de mec. apl.", **VII**, nr. 1956. p. 655.
7. P. P. Teodorescu, *Asupra unor probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii*, „St. şi cerc. de mec. apl.", **VIII**, nr. 4, 1957, p. 1101.
8. P. P. Teodorescu, *Asupra calculului grinzilor pereţi cu contur paralelogram*, „An. Univ. „C.I. Parhon", seria şt. nat." **VII**, nr. 20, 1958, p. 9.
9. P. P. Teodorescu, *Consideraţii în legătură cu aplicarea metodelor elementare la calculul plăcilor plane groase*, „An. Univ. „C.I. Parhon", seria şt. nat., mat., fiz.", **IX**, nr. 25, 1960, p. 191.
10. P. P. Teodorescu, *On the Plane Problem of Elasticity of Some Aeolotropic Bodies*, „Rev. de Méc. Appl.", **V**, nr. 3, 1960, p. 385.
11. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticităţii*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R. Bucureşti, 1961.
12. P. P. Teodorescu, *Asupra unei metode numerice de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemelor la limită ale fizicii matematice*, „St. şi cerc. matem. (Cluj) a **XII**, nr. 1 1961,p. 171.
13. P. P. Teodorescu, M. Preeleanu, *Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper*, „Acta Techn. Acad. Sc. Hung.", **XXVII**, fasc 3 – 4, 1959, p. 349.
14. K. Zwieling, *Biharmonische Polynome*, Berlin, 1952.

О ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ

(Резюме)

После общего введения вычисляются [формулы (10), (10′), (25), (25′) коэффициенты гармонических однородных полиномов n-го порядка двух и трех переменных. Даются выражения гармонических линейно-независимых полиномов [числом равным 2 для случая двух переменных и $(2n+1)$ для случая трех переменных], принимая во внимание свойства чётности или нечетности по отношению к каждой переменной. С помощью формулы типа Альманси обобщаются полученные результаты для бигармонических и p-гармонических полиномов. Показывается, затем, возможность применения полученных результатов для решения некоторых конкретных краевых задач математической физики.

Рассматриваются и некоторые случаи однородных гармонических полиномов n-го порядка с m переменными; показывается, например, что число произвольных постоянных, от которых зависит данный полином, даётся формулой (31).

SUR LES POLYNÔMES HARMONIQUES ET BIHARMONIQUES

(Résume)

Après une introduction de caractère général, on calcule (formule (10), (10') (25')) les coefficients des polynômes harmoniques homogènes, de degré n, à deux et trois variables. On donne ensuite les expressions des polynômes harmoniques linéairement indépendants (qui sont au nombre de 2 pour le cas de deux variables et au nombre de $(2n+1)$ pour le cas de trois variables), en tenant compte des propriétés de parité ou d'imparité par rapport à chaque variable. A l'aide des formules du type d'Almansi, on généralise les résultats obtenus pour les polynômes biharmoniques et p-harmoniques. On démontre ensuite la possibilité d'appliquer les résultats obtenus à la résolution de certains problèmes aux limites de la physique mathématique. Suivent quelques considérations concernant les polynômes harmoniques homogènes de degré n, à m variables, démontrant par exemple que le nombre des constantes arbitraires dont dépend un tel polyôme est donné par la formule (31).

ASUPRA ECUAȚIEI LUI FOKKER-PLANCK PENTRU O PLASMĂ COMPLET IONIZATĂ

de

MIRCEA DRĂGANU

I

1. Ecuația lui Fokker-Planck pentru un sistem gazos constituit din particule în interacțiune coulombiană, adică după o lege de forță invers proporțională cu patratul distanței reciproce, a fost stabilită de M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald și D. L. Judd [1]. Ecuația stabilită a fost apoi generalizată de acești autori pentru un sistem de coordonate oarecare q_1, q_2, q_3 în spațiul vitezelor [1].

Expresia generală a elementului de linie în spațiul vitezelor fiind

$$ds^2 = a_{\mu\nu}\, dq^\mu\, dq^\nu \tag{1}$$

ecuația generalizată dedusă de Rosenbluth, MacDonald și Judd se scrie sub forma

$$\frac{1}{\Gamma_a}\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c = -\left(fT^\mu_a\right)_{,\mu} + \frac{1}{2}\left(fS^{\mu\nu}_a\right)_{,\mu\nu} \tag{2}$$

unde

$$T^\mu_a = a^{\mu\nu}(h_a)_{,\nu} \tag{3}$$

$$S^{\mu\nu}_a = a^{\mu\omega}\, a^{\nu\tau}(g_{\omega\tau}) \tag{4}$$

iar

$$(h_a)_{,\nu} = \frac{\partial h_a}{\partial q^\nu} \tag{5}$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g}{\partial q^\mu\, \partial q^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \omega\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial g}{\partial q^\sigma} \tag{6}$$

În ultima formulă $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \omega\tau \end{matrix} \right\}$ este simbolul lui Christoffel de al doilea fel, adică

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \omega\ \tau \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} a^{\nu\tau} \left(\frac{\partial a_{\omega\tau}}{\partial q^{\mu}} + \frac{\partial a_{\mu\tau}}{\partial q^{\omega}} - \frac{\partial a_{\omega\mu}}{\partial q^{\tau}} \right) \tag{7}$$

De asemenea

$$(fT^{\mu})_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \left(\sqrt{a}\, fT^{\mu}_{\ a} \right), \tag{8}$$

$$a = \det(a_{\mu\nu}), \tag{9}$$

$$(fS^{\mu\nu})_{,\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial^2}{\partial q^{\mu} \partial q^{\nu}} (\sqrt{a}\, fS^{\mu\nu}) + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^{\nu}} \left(\sqrt{a} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \omega\ \mu \end{matrix} \right\} fS^{\mu\nu} \right) \tag{10}$$

Mărimea Γ_a este dată de expresia

$$\Gamma_a = \frac{4\pi e^4}{m_a^2} \ln D \tag{11}$$

unde

$$\ln D = \frac{1}{e^2} \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2 Z_{eff}}} \ln \left(\frac{1}{2} m_{ab} u^2 \right) \tag{12}$$

fiind viteza relativă a particulelor plasmei, n numărul acestor particule, iar m_{ab} masa redusă

$$m_{ab} = \frac{m_a\, m_b}{m_a + m_b} \tag{13}$$

2. Cazul coordonatelor sferice în spaţiul vitezelor prezintă un interes particular. Rosenbluth, MacDonald şi Judd în lucrarea citată au calculat ecuaţia (2) în coordonate polare, admiţînd existenţa unei simetrii azimutale.

Noi vom relua aici problema şi vom calcula în cele ce urmează această ecuaţie în coordonate polare sferice, în cazul general, adică în absenţa unei simetrii azimutale.

Fie deci $q^1 = v$, $q^2 = \mu$, $q^3 = \varphi$ coordonatele polare sferice, unde $\mu = \cos\theta$. Atunci elementul de linie în spaţiul vitezelor în coordonate sferice poate fi scris sub forma următoare:

$$ds^2 = dv^2 + \frac{v^2}{1-\mu^2} d\mu^2 + v^2(1-\mu^2) d\varphi^2 \tag{14}$$

Avem deci

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = \frac{v^2}{1-\mu^2}, \quad a_{33} = v^2(1-\mu^2), \tag{15}$$

$$a_{ij} = 0, \text{ cînd } i \neq j$$

Rezultă

$$a = \det (a_{\mu\nu}) = v^4 \tag{16}$$

astfel încît din formula

$$a^{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \tag{17}$$

unde $\alpha_{\nu\mu}$ este minorul elementului $a_{\mu\nu}$, se deduce

$$a^{11} = 1, \quad a^{22} = \frac{1 - \mu^2}{v^2}, \; a^{33} = \frac{1}{v^2(1 - \mu^2)} \tag{18}$$

$$a^{ij} = 0, \text{ cînd } i \neq j$$

Calculînd acum simbolurile lui Christoffel, obţinem

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \frac{1}{v} \tag{19}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = -v(1 - \mu^2) \tag{20}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{1 - \mu^2} \tag{21}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = \mu(1 - \mu^2) \tag{22}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = -\frac{\mu}{1 - \mu^2} \tag{23}$$

Celelalte simboluri ale lui Christoffel sînt toate nule, adică

$$\begin{gathered} \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 22 \end{Bmatrix} = 0 \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 21 \end{Bmatrix} = 0 \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 33 \end{Bmatrix} = 0 \end{gathered} \tag{24}$$

3. Din (3) avem, ţinînd seamă de (18),

$$T^1 = \frac{\partial h_a}{\partial v}, \; T^2 = \frac{1 - \mu^2}{v^2} \frac{\partial h_a}{\partial \mu}, \; T^3 = \frac{1}{v^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial h_a}{\partial \varphi} \tag{25}$$

De asemenea, după (4), (6), (18) și (19—20), rezultă

$$S^{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \tag{26}$$

$$S^{22} = \frac{(1-\mu^2)^2}{v^4}\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{1-\mu^2}{v^4}\left(v\frac{\partial g}{\partial v} - \mu\frac{\partial g}{\partial \mu}\right) \tag{27}$$

$$S^{33} = \frac{1}{v^4(1-\mu^2)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{v^4(1-\mu^2)}\left(v\frac{\partial g}{\partial v} - \mu\frac{\partial g}{\partial \mu}\right) \tag{28}$$

$$S^{12} = S^{21} = \frac{1-\mu^2}{v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial \mu}\right) \tag{29}$$

$$S^{13} = S^{31} = \frac{1}{v^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) \tag{30}$$

$$S^{23} = S^{32} = \frac{1}{v^4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\, \partial \varphi} + \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) \tag{31}$$

4. Atunci din (8), ținînd seamă de (16) și (25), obținem

$$(fT^{\mu})_{,\mu} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[f_a v^2 \frac{\partial h_a}{\partial v}\right] + \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[f_a(1-\mu^2)\frac{\partial h_a}{\partial \mu}\right] +$$

$$+ \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[f_a \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial h_a}{\partial \varphi}\right] \tag{32}$$

De altă parte, avînd în vedere (10) și utilizînd în mod convenabil diverse expresii de mai sus, deducem

$$(fS^{11})_{,11} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(f_a v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \tag{33}$$

$$(fS^{22})_{,22} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[f_a \frac{(1-\mu^2)^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + f_a \frac{1-\mu^2}{v^2}\left(v\frac{\partial g}{\partial v} - \mu\frac{\partial g}{\partial \mu}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[f_a \frac{1-\mu^2}{v}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial \mu}\right) + f_a \frac{\mu(1-\mu^2)}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} +\right.$$

$$\left. + f_a\left(\frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\mu^2}{v^2}\frac{\partial g}{d\mu}\right)\right] \tag{34}$$

$$(fS^{33})_{,33} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[f_a\frac{1}{v^2(1-\mu^2)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + f_a\frac{1}{v^2(1-\mu^2)}\left(v\frac{\partial g}{\partial v} - \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{v(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\varphi} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right) -\right.$$

$$\left. - f_a\frac{\mu}{v^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\partial\varphi} + \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right], \tag{35}$$

$$(fS^{12})_{,12} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial\mu}\left[f_a(1-\mu^2)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[f_a\frac{1-\mu^2}{v}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right], \tag{36}$$

$$(fS^{21})_{,21} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial\mu}\left[f_a(1-\mu^2)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\mu} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[f_a\left(\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right) + f_a\frac{1-\mu^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\mu^2}\right], \tag{37}$$

$$(fS^{13})_{,13} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\varphi} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{v(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\varphi} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right], \tag{38}$$

$$(fS^{31})_{,31} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\varphi} - \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[f_a\frac{1}{v(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right], \tag{39}$$

$$(fS^{23})_{,23} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\partial\varphi} + \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_a\frac{\mu}{v^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\partial\varphi} + \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right], \tag{40}$$

$$(fS^{32})_{,32} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\varphi}\left[f_a\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\partial\varphi} + \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[f_a\frac{\mu}{v^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + f_a\left(\frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\mu^2}{v^2}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)\right]. \tag{41}$$

5. Să introducem acum expresiile (32)—(40) în (2) şi să grupăm termenii în mod convenabil. La însumarea termenilor să observăm, că avem din (34), (36) şi (41)

$$-\frac{2}{v^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[f_a\left(\frac{1-\mu^2}{v^2}+\frac{\mu^2}{v^2}\right)\frac{\partial g}{\partial\mu}\right]=-\frac{2}{v^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[f_a\frac{1}{v^2}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right], \tag{42}$$

iar din (35), (38) şi (40)

$$-\frac{2}{v^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_a\left(\frac{1}{v^2(1-\mu^2)}+\frac{\mu^2}{v^2(1-\mu^2)^2}\right)\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right]=-\frac{2}{v^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_a\left(\frac{1}{v^2(1-\mu^2)^2}\right)\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right]. \tag{43}$$

Vom obţine astfel ecuaţia căutată, care poate fi pusă sub forma:

$$\begin{aligned}\frac{2v^2}{\Gamma_a}\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c &= \frac{\partial}{\partial v}(f_aG_1)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}(f_aG_2)+\frac{\partial}{\partial\mu}(f_aG_3)+\\ &+\frac{\partial^2}{\partial v\partial\mu}(f_aG_4)+\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(f_aG_5)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(f_aG_6)+\\ &+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(f_aG_7)+\frac{\partial^2}{\partial v\partial\varphi}(f_aG_8)+\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\varphi}(f_aG_9)\end{aligned} \tag{44}$$

unde

$$G_1=-2v^2\frac{\partial h_a}{\partial v}-2\frac{\partial g}{\partial v}+2\frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}-\frac{1-\mu^2}{v}\frac{\partial^2 g}{\partial\mu^2}-\frac{1}{v(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}, \tag{45}$$

$$G_2=v^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned}G_3 &= -2(1-\mu^2)\frac{\partial h_a}{\partial\mu}+2\frac{\mu}{v}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{2}{v^2}\frac{\partial g}{\partial\mu}-2\frac{1-\mu^2}{v}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\mu}+\\ &+\mu\frac{1-\mu^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\mu^2}+\frac{\mu}{v^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2},\end{aligned} \tag{47}$$

$$G_4=2(1-\mu^2)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\mu}-\frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial\mu}\right), \tag{48}$$

$$G_5=\frac{1-\mu^2}{v}\frac{\partial g}{\partial v}-\mu\frac{1-\mu^2}{v^2}\frac{\partial g}{\partial\mu}+\frac{(1-\mu^2)^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\mu^2}, \tag{49}$$

$$G_6=-\frac{2}{1-\mu^2}\frac{\partial h_a}{\partial\varphi}-\frac{2}{v^2(1-\mu^2)^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}+\frac{2}{v(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial\varphi}-\frac{\mu}{v}\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\partial\varphi}\right) \tag{50}$$

$$G_7=\frac{1}{v(1-\mu^2)}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\mu}{v^2(1-\mu^2)}\frac{\partial g}{\partial\mu}+\frac{1}{v^2(1-\mu^2)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}, \tag{51}$$

$$G_8 = -\frac{2}{v(1-\mu^2)}\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{2}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \varphi} \tag{52}$$

$$G_9 = \frac{2\mu}{v^2(1-\mu^2)}\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial \varphi} \tag{53}$$

Formula (44), astfel obţinută, se deosebeşte de formula dată de către Rosenbluth, MacDonald şi Judd [1] numai prin termenii ce conţin derivări parţiale în raport cu variabila independentă φ.

Să observăm că funcţiunile h_a şi g, care apar în formulele de mai sus, sînt date, după calculele lui Rosenbluth, MacDonald şi Judd (referinţa [1], formulele (19)) de expresiile

$$h_a(\vec{v}) = \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_b} \int \frac{f_b(\vec{v}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}' \tag{54}$$

$$g(\vec{v}) = \sum_b \int f_b(\vec{v}')|\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}' \tag{55}$$

II

6. Autorii citaţi au analizat cazul particular cu simetrie azimutală, presupunînd pentru funcţia de distribuţie f_a o dezvoltare de forma

$$f_a(v, \mu) = \Sigma a_n(v) P_n(\mu), \tag{56}$$

iar pentru funcţiile h_a şi g dezvoltări de forma

$$h_a(v, \mu) = \sum_b \sum_n \frac{m_a + m_b}{m_b} A_n^{(b)}(v) P_n(\mu), \tag{57}$$

$$g(v, \mu) = \sum_b \sum_n B_n^{(b)}(v) P_n(v) \tag{58}$$

şi au calculat coeficienţii A_n, B_n în funcţie de coeficienţii a_n, utilizînd o transformare Fourier.

După cum vom arăta aici se pot obţine relaţii între coeficienţii A_n, B_n şi coeficienţii a_n şi prin altă metodă, care poate fi generalizată pentru cazul absenţei simetriei azimutale.

În metoda elaborată de noi se utilizează dezvoltările cunoscute

$$\frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} = \frac{1}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\gamma)^{1/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos\gamma)\frac{(v')^m}{v^{m+1}}, \tag{59}$$

dacă $v' < v$, şi

$$\frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} = \frac{1}{(v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \gamma)^{1/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \gamma) \frac{v^m}{(v')^{m+1}} \tag{60}$$

dacă, $v > v'$.

Înlocuind aceste dezvoltări, cum şi dezvoltările (56), (57) în (54) şi observînd, că avem

$$d\vec{v}' = v'^2\, dv'\, d\mu'\, d\varphi', \tag{61}$$

obţinem:

$$\sum_b \frac{m_a + m_b}{m_a} \sum_{m=0}^{\infty} A_n^{(b)}(v) P_n(\mu) =$$

$$= \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_a} \sum \sum \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} P_n(\mu') P_m(\cos \gamma) d\mu' d\varphi' \times$$

$$\times \left\{ \int_0^v a_n^{(b)}(v') \frac{(v')^{m+2}}{v^{m+1}} dv' + \int_v^{\infty} a_n^{(b)}(v') \frac{v^m}{(v')^{m-1}} dv' \right\} \tag{62}$$

Ţinînd seama de relaţia cunoscută [2]

$$\int_{\mu'=-1}^{+1} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} P_n(\cos \gamma) P_m(\mu') d\mu' d\varphi' = \begin{cases} \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\mu), & \text{cînd } m = n \\ 0 & , \text{ cînd } m \neq n \end{cases} \tag{63}$$

formula (62) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(b)}(v) P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\mu) \left\{ \int_0^v a_n^{(b)}(v') \frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}} dv' + \int_v^{\infty} a_n^{(b)}(v') \frac{v^n}{(v')^{n-1}} dv' \right\} \tag{64}$$

Identificînd în cei doi membri ai acestei egalităţi coeficienţii polinomului $P_n(\mu)$ şi înlocuind indicele b prin indicele a obţinem

$$A_n^{(a)}(v) = \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \int_0^v a_n^{(a)}(v') \frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}} dv' + \int_v^{\infty} a_n^{(a)}(v') \frac{v^n}{(v')^{n-1}} dv' \right\}. \tag{65}$$

8. Pentru a calcula coeficienţii B_n, vom introduce dezvoltările (56), (58) în relaţia (55). Obţinem

$$\sum_b \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(b)}(v) P_n(\mu) = \sum_b \int \left(\sum_n a_n(v) P_n(\mu) \right) |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}' ; \tag{66}$$

Să considerăm acum factorul $|\vec{v} - \vec{v}'|$ de sub semnul integrală din membrul al doilea al egalităţii (66). Amplificînd acest factor cu $|\vec{v} - \vec{v}'|$, vom putea scrie succesiv

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = \frac{|\vec{v} - \vec{v}'|^2}{|\vec{v} - \vec{v}'|} = \frac{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\gamma}{(v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\gamma)^{1/2}} \tag{67}$$

astfel încît utilizînd dezvoltările (59), (60), rezultă

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\gamma)\sum_m P_m (\cos\gamma) \frac{(v')^m}{v^{m+1}}, \tag{68}$$

cînd $v' < v$, şi

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\gamma)\sum_m P_m(\cos\gamma) \frac{v^m}{(v')^{m+1}}, \tag{69}$$

cînd $v' > v$.

Vom aplica aici formula bine cunoscută din teoria polinoamelor ui L e g e n d r e [2]

$$(2m + 1)\, x\, P_m(x) = (m + 1)\, P_{m+1}(x) + m\, P_{m-1}(x), \tag{70}$$

unde punem $x = \cos\gamma$. Vom avea deci

$$\cos\gamma\, P_m(\cos\gamma) = \frac{m+1}{2m+1} P_{m+1}(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1} P_{m-1}(\cos\gamma) \tag{71}$$

Formulele (68) şi (69) devin atunci

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = \sum_m \left\{ P_m(\cos\gamma)\left[\frac{(v')^m}{v^{m-1}} + \frac{(v')^{m+2}}{v^{m+1}}\right] - \right. \tag{72}$$
$$\left. - 2\frac{(v')^{m+1}}{v^m}\left[\frac{m+1}{2m+1} P_{m+1}(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1} P_{m-1}(\cos\gamma)\right] \right.$$

cînd $v' < v$,

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = \sum_m \left\{ P_m(\cos\gamma)\left[\frac{v^{m+2}}{(v')^{m+1}} + \frac{v^m}{(v')^{m-1}}\right] - \right. \tag{73}$$
$$\left. - 2\frac{v^{m+1}}{(v')^m}\left[\frac{m+1}{2m+1} P_{m+1}(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1} P_{m-1}(\cos\gamma)\right] \right.,$$

cînd $v' > v$.

Înlocuind expresiile (61), (72) şi (73) în (66), obţinem

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(b)}(v) P_n(\mu) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_{\varphi'}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} P_n(\mu')P_m(\cos\gamma)d\varphi'\,d\mu'\int_0^v\left[\frac{(v')^m}{v^{m-1}} + \frac{(v')^{m+2}}{v^{m+1}}\right]a_n^{(b)}(v')dv' -\right. \tag{74}$$

$$-2\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} P_n(\mu')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(\cos\gamma) +\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2m+1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'\,d\varphi'\int_0^v \frac{(v')^{m+3}}{v^m}a_n^{(b)}(v')dv' +$$

$$+\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} P_n(\mu')P_m(\cos\gamma)d\mu'\,d\varphi'\int_v^{\infty}\left[\frac{v^{m+2}}{(v')^{m+1}} + \frac{v^m}{(v')^{m-1}}\right]a_n^{(b)}(v')dv' -$$

$$-2\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} P_n(\mu')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(\cos\gamma) +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m}{2m+1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'\,d\varphi'\int_v^{\infty}\frac{v^{m+1}}{(v')^{m-2}}a_n(v')\,dv'\right\}.$$

Aplicînd acum formula (63), rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(b)}(v)P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v \frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}} + \frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}a_n^{(b)}(v')dv' -\right. \tag{75}$$

$$\left.-\frac{2n}{2n-1}\int_0^v \frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}a_n^{(b)}(v')\,dv' - \frac{2n+2}{2n+3}\int_0^v \frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}a_n^{(b)}(v')dv'\right\}P_n(\mu).$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_v^{\infty}\left[\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}} + \frac{v^n}{(v')^{n-3}}\right]a_n^{(b)}(v')dv' -\right.$$

$$\left.-\frac{2n}{2n-1}\int_v^{\infty}\frac{v^n}{(v')^{n-3}}a_n^{(b)}(v')dv' - \frac{2n+2}{2n+3}\int_v^{\infty}\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}}a_n^{(b)}(v')dv'\right\}P_n(\mu).$$

Identificînd în fine coeficienţii polinomului $P_n(\mu)$ din cei doi membri ai egalităţii de mai sus şi ordonînd termenii în mod convenabil, se obţine

$$
\begin{aligned}
B_n^{(a)}(v) = & \frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n}{2n-1}\right)\int_0^v \frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}} a_n^{(a)}(v')dv' + \\
& + \frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right)\int_0^v \frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}} a_n^{(a)}(v')dv' + \\
& + \frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n}{2n-1}\right)\int_v^\infty \frac{v^n}{(v')^{n-3}} a_n^{(a)}(v')dv' + \\
& + \frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right)\int_v^\infty \frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}} a_n^{(a)}(v')dv'.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Or, avem

$$
\frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n}{2n-1}\right) = -\frac{4\pi}{4n^2-1}, \tag{77}
$$

$$
\frac{4\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right) = \frac{4\pi}{4n^2-1}\,\frac{1}{2n+3}. \tag{78}
$$

Relaţia (76) se va putea scrie deci sub forma mai condensată

$$
\begin{aligned}
B_n^{(a)}(v) = & -\frac{4\pi}{4n^2-1}\left\{\int_0^v \left[1-\frac{2n-1}{2n+3}\,\frac{(v')^2}{v^2}\right]\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}\, a_n^{(a)}(v')dv' + \right. \\
& \left. + \int_v^\infty \left[1-\frac{2n-1}{2n+3}\,\frac{v^2}{(v')^2}\right]\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\, a_n^{(a)}(v')dv'\right\}
\end{aligned}
\tag{79}
$$

sau încă

$$
\begin{aligned}
B_n^{(a)}(v) = & -\frac{4\pi}{4n^2-1}\left\{\int_0^v a_n^{(a)}(v')\,\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\,\frac{(v')^2}{v^2}\right)dv' + \right. \\
& \left. + \int_v^\infty a_n^{(a)}(v')\,\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\,\frac{v^2}{(v')^2}\right)dv'\right\}.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Expresiile (79) şi (80), astfel deduse, coincid cu cele date de Rosenbluth, MacDonald şi Judd [1].

III

9. Metoda dată aici are, față de metoda autorilor citați mai sus, avantajul de a putea fi extinsă fără nici o dificultate la cazul general al absenței unei simetrii azimutale.

Dezvoltările funcțiilor f_a, h_a și g le vom presupune în acest caz de forma

$$f_a(v, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ a_{nk}^{(a)}(v) Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + c_{nk}^{(a)}(v) Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \right\}, \tag{81}$$

$$h_a(v, \mu, \varphi) = \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ A_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + C_{nk}^{(b)} Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \right\}, \tag{82}$$

$$g(v, \mu, \varphi) = \sum_b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ B_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + D_{nk}^{(i)} Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \right\}. \tag{83}$$

unde s-au notat cu $Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi)$, $Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi)$ funcțiile sferice superficiale

$$Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) = \cos k\varphi P_n^k(\mu), \tag{84}$$

$$Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) = \sin k\varphi P_n^k(\mu), \tag{85}$$

$P_n^k(\mu)$ fiind polinoamele lui Legendre asociate de gradul n și de ordinul k.

Înlocuind (81) și (82) în (54), obținem

$$\sum_b \frac{m_a + m_b}{m_b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ A_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + C_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \right\} = \tag{86}$$

$$= \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int \left\{ a_{nk}^{(b)}(v') Y_{nk}^{(p)}(\mu', \varphi') + c_{nk}^{(b)}(v') Y_{nk}^{(i)}(\mu', \varphi') \right\} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'$$

Ținînd seamă de expresia (61) și utilizînd dezvoltările (59) și (60), rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ A_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(b)}(\mu, \varphi) + C_{nk}^{(b)}(v) Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \right\} = \tag{87}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu', \varphi') P_m(\cos\gamma)\, d\varphi'\, d\mu' \left[\int_0^v a_{nk}^{(b)}(v') \frac{(v')^{m+2}}{v^{m+1}} dv' + \right.$$

$$\left. + \int_v^{\infty} a_{nk}^{(b)}(v') \frac{v^m}{(v')^{m-1}} dv' \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu', \varphi') P_m(\cos\gamma)\, d\varphi'\, d\mu'$$

$$\left[\int_0^v c_{nk}^{(b)}(v') \frac{(v')^{m+2}}{v^{m+1}} dv' + \int_v^{\infty} c_{nk}^{(b)}(v') \frac{v^m}{(v')^{m-1}} dv' \right]$$

Vom aplica acum formula cunoscută [2], [3], [4]:

$$\int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\int\limits_{\mu'=-1}^{+1} Y_n(\mu', \varphi')P_m(\cos\gamma)d\mu'\,d\varphi' = \begin{cases}\dfrac{4\pi}{2n+1}Y_n(\mu, \varphi) & \text{, cînd } m = n,\\ 0 & \text{, cînd } m \neq n,\end{cases} \tag{88}$$

care este valabilă pentru orice funcţie sferică superficială de ordinul n, deci atît pentru funcţiile $Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi)$, cît şi pentru funcţiile $Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi)$. După efectuarea acestei operaţii, formula (87) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{A_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + C_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi)\right\} = \tag{89}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v a_{nk}^{(b)}(v')\frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}}dv' + \int_v^{\infty} a_{nk}^{(b)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-1}}dv'\right\}Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v c_{nk}^{(b)}(v')\frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}}dv' + \int_v^{\infty} c_{nk}^{(b)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-1}}dv'\right\}Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi).$$

Identificînd coeficienţii funcţiilor $Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi)$ şi $Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi)$ din cei doi membri şi înlocuind indicele b prin indicele a se obţin în fine relaţiile:

$$A_{nk}^{(a)}(v) = \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v a_{nk}^{(a)}(v)\frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}}dv' + \int_v^{\infty} a_{nk}^{(a)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-1}}dv'\right\}, \tag{90}$$

$$C_{nk}^{(a)}(v) = \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v c_{nk}^{(a)}(v')\frac{(v')^{n+2}}{v^{n+1}}dv' + \int_v^{\infty} c_{nk}^{(a)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-1}}dv'\right\}. \tag{91}$$

10. Să introducem acum dezvoltările (81), (83) în formula (55). Obţinem

$$\sum_b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{B_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + D_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi)\right\} = \tag{92}$$

$$= \sum_b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\int\left\{a_{nk}^{(b)}(v')Y_{nk}^{(p)}(\mu', \varphi') + c_{nk}^{(b)}(v')Y_{nk}^{(i)}(\mu', \varphi')\right\}|\vec{v} - \vec{v}'|\,d\vec{v}'.$$

Substituind aici în membrul al doilea $|\vec{v} - \vec{v}'|$ din formula (72), (73) rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{B_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(p)}(\mu,\varphi) + D_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(i)}(\mu,\varphi)\right\} = \tag{93}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\left\{\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu',\varphi')P_m(\cos\gamma)d\mu'\,d\varphi'\int_0^v\left[\frac{(v')^{m+2}}{v^{m-1}} + \frac{(v')^{m+4}}{v^{m+1}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv' - \right.$$

$$-2\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu',\varphi')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'd\varphi'\int_0^v\frac{(v')^{a+3}}{v^m}a_{ak}^{(b)}(a')\,dv' +$$

$$+\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu',\varphi')P_m(\cos\gamma)\,d\mu'\,d\varphi'\int_v^{\infty}\left[\frac{v^{m+2}}{(v')^{m-1}} + \frac{v^m}{(v')^{m-3}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv' -$$

$$-2\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu',\varphi')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_m(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'\,d\varphi'\int_v^{\infty}\frac{v^{m+1}}{(v')^{m-2}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'\Bigg\} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu',\varphi')P_m(\cos\gamma)d\mu'\,d\varphi'\int_0^v\left[\frac{(v')^{m+2}}{v^{m-1}} + \frac{(v')^{m+4}}{v^{m+1}}\right]c_{nk}^{(b)}(v')dv' - \right.$$

$$-2\int_0^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu',\varphi')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(\cos\gamma) + \frac{m}{2m+1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'\,d\varphi'\int_0^v\frac{(v')^{m+3}}{v^m}c_{nk}^{(b)}(v')\,dv' +$$

$$+\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu',\varphi')P_m(\cos\gamma)d\mu'\,d\varphi'\int_v^{\infty}\left[\frac{v^{m+2}}{(v')^{m-1}} + \frac{v^m}{(v')^{m-3}}\right]c_{nk}^{(b)}(v')dv' -$$

$$-2\int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu',\varphi')\left[\frac{m+1}{2m+1}P_m(\cos\gamma)+\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2m-1}P_{m-1}(\cos\gamma)\right]d\mu'\,d\varphi'\int_v^\infty \frac{v^{m+1}}{(v')^{m-2}}a_m^{(b)}(v')dv'$$

Aplicînd în membrul al doilea al acestei relaţii, formula (88), se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{B_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(p)}(\mu,\varphi)+D_{nk}^{(b)}(v)Y_{nk}^{(i)}(\mu,\varphi)\right\} \tag{94}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v\left[\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}+\frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv'-\right.$$

$$-\frac{2n}{2n-1}\int_0^v\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'-$$

$$-\frac{2n+2}{2n+3}\int_0^v\frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'+\int_v^\infty\left[\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}}+\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv'-$$

$$\left.-\frac{2n}{2n+1}\int_v^\infty\frac{v^n}{(v')^{n-3}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'-\frac{2n+2}{2n+3}\int_v^\infty\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'\right\}Y_{nk}^{(p)}(\mu,\varphi)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_0^v\left[\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}+\frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv'-\frac{2n}{2n-1}\int_0^v\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'-\right.$$

$$-\frac{2n+2}{2n+3}\int_0^v\frac{(v')^{n+4}}{v^{n+1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'+\int_v^\infty\left[\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}}+\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\right]a_{nk}^{(b)}(v')dv'-$$

$$\left.-\frac{2n}{2n+1}\int_v^\infty\frac{v^n}{(v')^{n-3}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'-\frac{2n+2}{2n+3}\int_v^\infty\frac{v^{n+2}}{(v')^{n-1}}a_{nk}^{(b)}(v')dv'\right\}Y_{nk}^{(i)}(\mu,\varphi)$$

Identificînd din cei doi membri ai egalităţii de mai sus coeficienţii funcţiilor $Y_{nk}^{(p)}(\mu,\varphi)$ de o parte şi ai funcţiilor $Y_{nk}^{(i)}(\mu,\varphi)$ de altă parte, apoi ţinînd seamă de formulele (77), (78) şi înlocuind indicele b cu indicele a, cum am făcut înainte, se obţin imediat relaţiile următoare

$$B_{nk}^{(a)}(v) = -\frac{4\pi}{4n^2-1}\left\{\int_0^v a_{nk}^{(a)}(v')\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\frac{(v')^2}{v^2}\right)dv' + \right. \tag{95}$$

$$\left. + \int_v^\infty a_{nk}^{(a)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\frac{v^2}{(v')^2}\right)dv'\right\},$$

$$D_{nk}^{(a)}(v) = -\frac{4\pi}{4n^2-1}\left\{\int_0^v c_{nk}^{(a)}(v')\frac{(v')^{n+2}}{v^{n-1}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\frac{(v')^2}{v^2}\right)dv' + \right. \tag{96}$$

$$\left. + \int_v^\infty c_{nk}^{(a)}(v')\frac{v^n}{(v')^{n-3}}\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\frac{v^2}{(v')^2}\right)dv'\right\}$$

Aşadar relaţiile (90), (91) şi (95), (96) deduse pentru cazul general al absenţei simetriei azimutale sînt absolut analoge relaţiilor (65), (80), care au fost obţinute presupunînd existenţa unei astfel de simetrii.

Să observăm, că în dezvoltările (81)—(83) o parte din termeni sînt nuli, după cum se vede examinînd expresiile (84), (85) şi că pentru $k=0$ se reduc la dezvoltările (56) — (58).

Două note preliminare din această lucrare au fost publicate în cursul anului 1960 [5], [6].

ADAOS MATEMATIC

Formula (88) poate fi demonstrată în felul următor. Să observăm întîi, că după teorema de adunare a funcţiilor sferice, avem [2]

$$P_m(\cos\gamma) = P_m(\mu)P_m(\mu') + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(m+j)!}P_m^j(\mu)P_m^j(\mu')\cos(\varphi-\varphi') = \tag{1A}$$

$$= P_m(\mu)P_m(\mu') + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(m+j)!}P_m^j(\mu)P_m^j(\mu')\left[\cos j\varphi\ \cos j\varphi' + \sin j\varphi\ \sin j\varphi'\right]$$

a) Atunci, pentru $Y_n = Y_{nk}^{(p)}$, avem succesiv

$$I_1 = \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(p)}(\mu',\varphi')P_m(\cos\gamma)d\mu' d\varphi') = \tag{2A}$$

$$= \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} \cos k\varphi' \, P_n^k(\mu') \Big\{ P_m(\mu) P_m(\mu') +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m-j)!}{(m+j)!} P_m^j(\mu) P_m^j(\mu') [\cos j\varphi \cdot \cos j\varphi' + \sin j\varphi \cdot \sin j\varphi'] \Big\} d\mu' \, d\varphi'$$

sau

$$I_1 = P_m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \cos k\varphi' \cdot d\varphi' \tag{3A}$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(m-j)!}{(m+j)!} \Big\{ \cos j\varphi P_m^j(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m^j(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \cos k\varphi' \cdot \cos j\varphi' \cdot d\varphi' +$$

$$+ \sin j\varphi P_m^j(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m^j(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \cos k\varphi' \cdot \sin j\varphi' d\varphi'.$$

Or, în virtutea relaţiilor [2]

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi' \cdot d\varphi' = 0, \tag{4A}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi' \cdot \cos k\varphi' \cdot d\varphi' = \begin{cases} 0, \text{ cînd } j \neq k, \\ \pi, \text{ cînd } j = k, \end{cases} \tag{5A}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot \cos k\varphi' \cdot d\varphi' = \begin{cases} 0, \text{ cînd } j \neq k \\ 0, \text{ cînd } j = k \end{cases} \tag{6A}$$

şi a relaţiei [2]

$$\int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m^k(\mu') d\mu' = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}, & \text{cînd } m = n \\ 0 & \text{cînd } m \neq n \end{cases} \tag{7A}$$

vor fi nenuli în membrul al doilea numai termenii pentru care $j = k$ şi $m = n$. Rezultă

$$I_1 = \frac{4\pi}{2n+1} \cos k\varphi \cdot P_n^k(\mu) = \frac{4\pi}{2n-1} Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) \tag{8A}$$

b) Avem de asemenea

$$I_2 = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} Y_{nk}^{(i)}(\mu', \varphi') P_m(\cos \gamma) d\mu' \, d\varphi' = \tag{9A}$$

$$= \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} \sin k\varphi \cdot P_n^k(\mu') \Big\{ P_m(\mu) P_m(\mu') +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(m-j)!}{(m+j)!} P_m^j(\mu) P_m^j(\mu') [\cos j\varphi \cdot \cos j\varphi' + \sin j\varphi \cdot \sin j\varphi'] \Big\} d\mu' \, d\varphi'$$

sau

$$I_2 = P_m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_m^k(\mu') P_m(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot d\varphi' + \tag{10A}$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(m-j)!}{(m+j)!} \Big\{ \cos j\varphi \cdot P_m^j(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m^j(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot \cos j\varphi' \cdot d\varphi' +$$

$$+ \sin j\varphi \cdot P_m^j(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n^k(\mu') P_m^j(\mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot \sin j\varphi' \cdot d\varphi' \Big\}$$

Observînd, că în afară de relațiile (4A—7A) există și relațiile [2]

$$\int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot d\varphi' = 0. \tag{11A}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\varphi' \cdot \sin j\varphi' \, d\varphi' = \begin{cases} 0, & \text{cînd } k \neq j; \\ \pi, & \text{cînd } k = j. \end{cases} \tag{12A}$$

rezultă imediat

$$I_2 = \frac{4\pi}{2n+1} \sin k\varphi \cdot P_m^k(\mu) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nk}(\mu, \varphi). \tag{13A}$$

Totodată se vede imediat din aceste rezultate, că relația (89) se aplică și funcției sferice de forma generală

$$Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{n} \Big\{ A_{nk} Y_{nk}^{(p)}(\mu, \varphi) + B_{nk} Y_{nk}^{(i)}(\mu, \varphi) \tag{14A}$$

unde A_{nk} și B_{nk} sînt de astă dată constante.

BIBLIOGRAFIE

1. M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald şi D. L. Judd, *Fokker-Planck Equations for an Inverse-Square Force* în „Phys. Rev." **107**, 1957, p. 1.
2. Mircea Drăganu, *Introducere Matematică în Fizica Teoretică Modernă*, vol. II, cap. XVIII, Bucureşti, 1958, Ed. Tehnică.
3. V. I. Smirnov, *Curs de Matematici Superioare*, vol. III, partea II, cap. VI, Bucureşti, 1955, Ed. Tehnică.
5. Mircea Drăganu, *Sur l'équation de Fokker-Planck d'un plasma*, în „C.R. Acad. Sci. Paris", **250**, 1960, p. 2519.
6. Mircea Drăganu, *Sur la résolution de l'équation de Fokker-Planck d'un plasma*, în „C.R. Acad. Sci. Paris", **251**, 1960, p. 518.

ОТНОСИТЕЛЬНО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

(Резюме)

Исходя из общего уравнения типа Фоккера — Планка в некоторых координатах пространства скоростей, установленного Розенблютом, Мак Дональдом и Джеддом для полностью ионизированной плазмы, автор выводит выражение этого уравнения в сферических координатах в пространстве скоростей, допуская отсутствие азимутальной симметрии. Выведенное уравнение совпадает в частном случае существования азимутальной симметрии с уравнением, выведенным Розенблютом, Мак Дональдом и Джеддом для этого частного случая.

Функции h_a, g и f_a, появляющиеся в формуле, полученной Розенблютом, Мак Дональдом и Джеддом в случае существования азимутальной симметрии, были разложены в ряды многочленов Лежандра этими авторами, установив затем соотношения между коэффициентами h_a g и коэффициентами функции f_a. В настоящей работе эти соотношения выведены прямым методом, отличающимся от метода цитированных авторов, без использования преобразований Фурье, а именно: используется разложение в ряд многочленов Лежандра выражения 1) $|\vec{v} - \vec{v}'|$. Метод этот обладает преимуществом непосредственного обобщения в случае отсутствия азимутальной симметрии, что и выполняется в настоящей работе. В этом случае функции h_a, g и f_a разлагаются в ряды поверхностных сферических функций.

SUR L'ÉQUATION DE FOKKER-PLANCK POUR UN PLASMA COMPLÈTEMENT IONISÉ

(Résumé)

Partant de l'équation générale de type Fokker-Planck en coordonnées quelconques dans l'espace des vitesses, établie par Rosenbluth, Mac Donald et Judd pour un plasma complètement ionisé, l'auteur déduit l'expression de cette équation en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses admettant l'absence de symétrie azimutale. L'équation déduite coïncide dans le cas particulier de l'existence d'une symétrie azimutale avec l'équation déduite par Rosenbluth, Mac Donald et Judd pour ce cas particulier.

Les fonctions h_a, g et f_a, qui apparaissent dans la formule obtenue par Rosenbluth, Mac Donald et Judd pour le cas de l'existence d'une symétrie azimutale, ont été développées par ces auteurs en séries de polynômes Legendre, après quoi ils ont établi des relations entre les coefficients des fonctions h_a et g et les coefficients de la fonction f_a. Dans le présent travail ces relations sont déduites par une méthode directe différente de celle des auteurs cités, sans employer la transformation de Fourier: on utilise pour cela le développement en séries de polynômes Legendre de l'expression $1/|\vec{v} - \vec{v}|$. Cette méthode a l'avantage d'être immédiatement généralisable au cas de l'absence d'une symétrie azimutale, ce que l'on a fait en effet dans le présent travail. Dans ce cas les fonctions h_a, g et f_a sont développées en séries de fonctions sphériques superficielles.

OSCILAȚII FORȚATE ÎNTR-UN CIRCUIT OSCILANT CU FERITA POLARIZATĂ

de

EMIL TĂTARU

În ultimul timp se manifestă un interes din ce în ce mai mare în studiul elementelor reactive nelineare, fapt justificat de aplicațiile practice tot mai numeroase ale acestora. Desigur că în acest studiu găsirea proprietăților circuitelor oscilante cu elemente reactive nelineare ocupă un loc important. A fost studiată comportarea circuitului oscilant cu ferită nepolarizată [1] precum și comportarea circuitului oscilant conținînd capacitatea nelineară a unei joncțiuni $p-n$ în regim de oscilații forțate [2]. Lucrarea de față își propune să studieze comportarea în regim de oscilații forțate, a unui circuit oscilant cu ferită polarizată, făcînd totodată o comparație cu concluziile lucrărilor mai sus amintite.

Fie montajul din fig. 1, în care de la un generator de semnal GS prin cuplajul inductiv dintre bobinele L și $\mathcal{L}$ se induce o tensiune electromotoare, constantă în raport cu frecvența, în circuitul oscilant de studiat format din inductanța nelineară $\mathcal{L}$, conținînd un miez de ferită, și capacitatea standard C. Polarizarea miezului de ferită se face de la bateria E_0 prin intermediul rezistenței variabile P și a bobinei de șoc L_s.

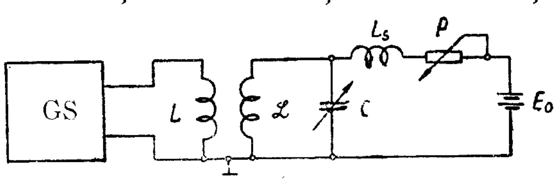

Fig. 1.

Se pune problema determinării curentului care parcurge circuitul de studiat atunci cînd acestuia i se aplică o tensiune cu o variație sinusoidală în timp.

Presupun ca și în lucrarea menționată [1] că inductanța nelineară, în cazul miezului de ferită variază în raport cu curentul i care o parcurge după relația

$$L(i) = \alpha + \beta i^2$$

unde α și β sînt mărimi constante.

Notînd cu: E valoarea de vîrf a tensiunii electromotoare sinusoidală indusă în circuitul de studiat

I_0 — componenta continuă a curentului care produce polarizarea
$\mathcal{I}$ — componenta alternativă a curentului care străbate bobina
R — rezistența-serie de pierderi a circuitului studiat
L_0 — inducția bobinei corespunzătoare curentului de polarizare $i = I_0$:

$$y = \frac{\mathcal{I}}{I_0} \qquad p = \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\tau = \omega t \qquad Q_0 = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad \gamma = \frac{\beta I_0^2}{\alpha + \beta I_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \qquad a = \frac{E\omega_0 C}{I_0}$$

şi ţinînd seama că :

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \frac{d\mathcal{I}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}; \qquad \int y dt = \frac{1}{\omega}\int y d\tau$$

iar

$$\mathcal{L}(i) = \mathcal{L}(I_0) + \frac{1}{1!}\frac{d\mathcal{L}}{di}\bigg|_{i=I_0} \cdot \mathcal{I} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\mathcal{L}}{di^2}\bigg|_{i=I_0} \cdot \mathcal{I} +$$

$$\mathcal{L}(i) = \alpha + \beta I_0^2 + 2\beta I_0 \mathcal{I} + \beta \mathcal{I}^2 + \ldots =$$

$$= \mathcal{L}(I_0)\left[1 + 2\frac{\beta I_0^2}{\alpha + \beta I_0^2}\left(\frac{\mathcal{I}}{I_0}\right) + \frac{\beta I_0^2}{\alpha + \beta I_0^2}\left(\frac{\mathcal{I}}{I_0}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\mathcal{L}(i) = L_0[1 + 2\gamma y + \gamma y^2 + \ldots] = L_0 f(y)$$

se poate scrie ecuaţia circuitului sub următoarele forme :

$$\omega \mathcal{L}(y)\frac{dy}{d\tau} + Ry + \frac{1}{\omega C}\int y d\tau = E \sin \tau$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} f(y)\frac{dy}{d\tau} + (\omega CR)y + \int y d\tau = \frac{E\omega C}{I_0} \sin \tau$$

$$f(y)\frac{dy}{d\tau} + p\frac{y}{Q_0} + p^2 \int y d\tau = pa \sin \tau \tag{1}$$

Se poate observa că ecuaţia (1) din care se determină curentul prin circuit, are aceeaşi formă ca şi ecuaţia circuitului oscilant derivaţie care conţine capacitatea nelineară a unei joncţiuni p — n, unde se determină tensiunea la bornele capacităţii nelineare.

Pentru a soluţiona această ecuaţie integro-diferienţială aproximez funcţia $f(y)$ prin primii trei termeni ai dezvoltării. Voi căuta o soluţie de forma

$$y = u \sin \tau + v \cos \tau \qquad (u, v \text{ constante})$$

Prin înlocuire se găseşte

$$f(y) = 1 + \frac{1}{2}\gamma(u^2 + v^2) + 2\gamma u \sin\tau + 2\gamma v \cos\tau + \gamma uv \sin 2\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma(v^2 - u^2)\cos 2\tau$$

$$\frac{dy}{d\tau} = u\cos\tau - v\sin\tau$$

$$f(y)\frac{dy}{d\tau} = -v\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right]\sin\tau + u\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right]\cos\tau +$$

$$+ \gamma(u^2 - v^2)\sin 2\tau + 2\gamma uv\cos 2\tau + \frac{1}{4}\gamma u(3v^2 - u^2)\cos 3\tau +$$

$$+ \frac{1}{4}\gamma v(3u^2 - v^2)\sin 3\tau$$

$$p\frac{y}{Q_0} = p\frac{u}{Q_0}\sin\tau + p\frac{v}{Q_0}\cos\tau$$

$$p^2\int y\,d\tau = -p^2u\cos\tau + p^2v\sin\tau$$

Identificînd termenii corespunzători lui $\sin\tau$ şi $\cos\tau$ după ce în prealabil expresiile de mai sus au fost introduse în ecuaţia circuitului (1) se găseşte

$$-v\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right] + p\frac{u}{Q_0} + p^2v = pa \tag{2}$$

$$u\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right] + p\frac{v}{Q_0} - p^2u = 0 \tag{3}$$

Experienţa arată că, pentru explicarea fenomenelor în prima aproximaţie armonicele superioare pot fi neglijate. Soluţionarea sistemului de ecuaţii (2, 3) pentru determinarea amplitudinii normate a curentului, egală cu $\sqrt{u^2 + v^2}$ este mai dificilă în cazul circuitelor cu pierderi. De aceea voi considera că circuitul are pierderi neglijabile, adică factorul de calitate Q_0 are valoare infinită. Apoi pe baza concluziilor deduse în acest caz şi a datelor experimentale voi arăta comportarea circuitelor cu pierderi.

Pentru $Q_0 = \infty$ ecuaţiile (2) şi (3) se pot scrie sub forma:

$$-v\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right] + p^2v = pa \tag{2'}$$

$$u\left[1 + \frac{1}{4}\gamma(u^2 + v^2)\right] - p^2u = 0 \tag{3'}$$

Din (3′) rezultă că $u = 0$, adică curentul este defazat cu $\pi/2$ față de tensiunea aplicată cicrcuitului. În acest caz (2′) devine

$$-v\left[1 + \frac{1}{4}\gamma v^2\right] + p^2 v = pa$$

sau

$$\frac{1}{4}\gamma v^3 - (p^2 - 1)v + pa = 0 \tag{4}$$

Față de tratarea problemei în [1] în cazul de față mărimile se normează. Ecuația (4) poate fi adusă la forma corespunzătoare feritelor nepolarizate. În adevăr pentru $I_0 = 0$ se obține

$$\frac{\beta}{4\alpha} I^3 - (p^2 - 1)I + pE\omega_0 C = 0$$

unde s-a notat cu I amplitudinea componentei alternative de pulsație ω.

Este comod a soluționa grafic ecuația (4). Soluțiile sînt date de punctele de intersecție ale curbelor

$$Z_1 = \frac{1}{4}\gamma v^3$$

și

$$Z_2 = (p^2 - 1)v - pa$$

După cum se vede în fig. 2 (cazul $\gamma > 0$) pentru $p > 1$ se obțin trei soluții reale, iar dacă $p < 1$ se obține o singură soluție reală. În cazul soluțiilor $v > 0$ le corespunde o fază zero, iar pentru soluțiile $v < 0$ le corespunde o fază π, Reprezentînd grafic soluțiile ecuației (4) în funcție de p se obține curba din fig. 3. În cazul circuitelor cu pierderi curentul nu devine infinit ci are o valoare finită cu atît mai mare cu cît factorul de calitate al circuitului este mai mare (fig. 3).

Dacă $\gamma < 0$, atunci curba $|v| = |v(p)|$ arată ca în fig. 4. Aici s-a luat ca parametru a.

Din cele arătate mai sus rezultă următoarele concluzii :

1. Întrucît ecuația circuitului oscilant serie cu ferită polarizată este de aceeași formă cu ecuația circuitului oscilant derivație care conține capacitatea nelineară a unei joncțiuni $p - n$ [2], curbele $|v(p)|$ ridicate experimental arată ca în figura 5 (în figură este considerat cazul $\gamma > 0$). Rezultă că feritele care fac ca inductanțele să varieze după o lege pătratică, în raport cu curentul, au o comportare similară cu capacitățile nelineare ale joncțiunilor $p - n$, într-un circuit oscilant, supus la oscilații forțate. Datorită nelinearității inductanței, curbele de rezonanță prezintă salturi ; în consecință noțiunile clasice de factori de calitate și rezonanță trebuie folosite cu grijă. Salturile, în cazul feritelor pot să fie atît pentru $p > 1$ cît și pentru $p < 1$ după cum $\gamma > 0$. sau $\gamma < 0$.

2. Pentru $Q_0 = \infty$ rezultă $u = 0$, deci curentul este defazat cu $\pi/2$ față de tensiunea aplicată circuitului oscilant. Maximul curentului și frec-

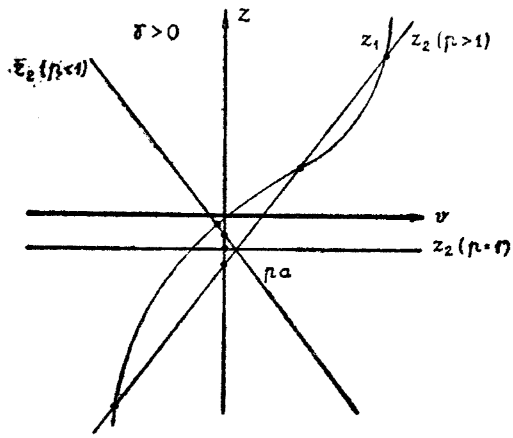

Fig. 2.

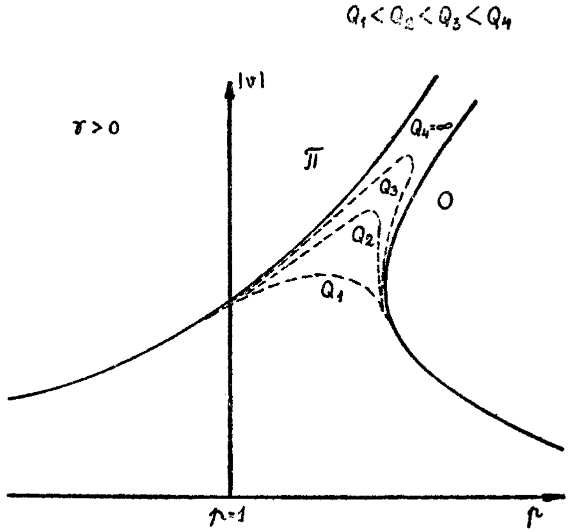

Fig. 3.

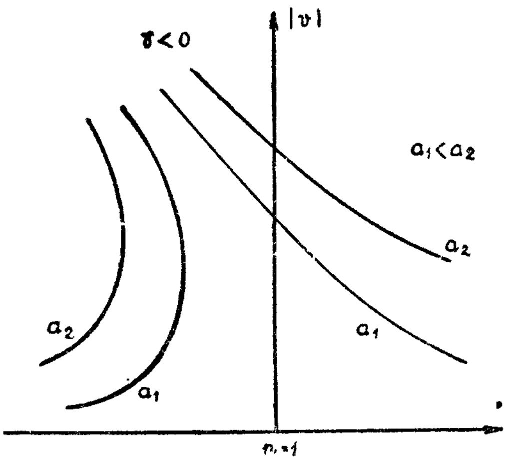

Fig. 4.

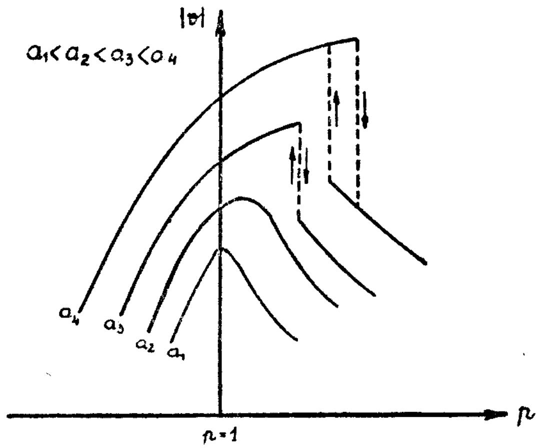

Fig. 5.

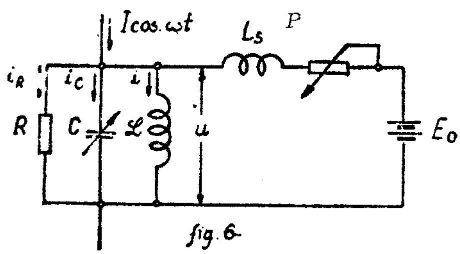

Fig. 6

venţa la care apare acest maxim depinde de curentul de polarizare, tensiunea de excitaţie, factorul de calitate al circuitului şi nelinearitatea feritei. Amplitudinea curentului la pulsaţia $\omega = \omega_0$ este

$$v_0 = -\left(4\frac{a}{\gamma}\right)^{1/3}$$

şi deci

$$I = -I_0\left(4\frac{E\omega_0 C}{I_0\gamma}\right)^{1/3} = -\left(4\frac{EC^{1/2}}{\beta}\right)^{1/3}(\alpha + \beta I_0^2)^{1/6}$$

şi creşte o dată cu creşterea tensiunii de excitaţie precum şi a curentului de polarizare dacă $\beta > 0$. (Este o situaţie similară cu cea studiată în [2].) Trebuie însă observat că o dată cu creşterea lui I_0 scade parametrul a, deci salturile vor fi mai mici.

Spre deosebire de ceea ce reiese din articolul menţionat [2] pentru aceeaşi valoare a parametrului a nu se obţin curbe de rezonanţe $|v| = |v(p)|$ identice, deoarece coeficientul γ variază cu curentul de polarizare.

3. Rezultate similare se obţin şi în cazul circuitului oscilant derivaţie cu ferită polarizată. În adevăr ţinînd seamă de notaţiile din fig. 6 se poate scrie

$$i_c + i_r + i = \mathrm{I} \cos \omega t$$

$$i_c = C\frac{du}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}\frac{di}{dt}\right)$$

$$i_R = \frac{\mathcal{U}}{R} = \frac{\mathcal{L}}{R}\frac{di}{dt}$$

$$\frac{L_0 f(y)}{R}\frac{dy}{dt} + y + CL_0\frac{d}{dt}\left[f(y)\frac{dy}{dt}\right] = \frac{I}{I_0}\cos \omega t$$

$$\frac{\omega L_0}{R} f(y)\frac{dy}{d\tau} + y + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{d}{d\tau}\left[f(y)\frac{dy}{d\tau}\right] = \frac{I}{I_0}\cos\tau$$

$$\frac{p}{Q_0} f(y)\frac{dy}{d\tau} + p^2 y + \frac{d}{d\tau}\left[f(y)\frac{dy}{d\tau}\right] = p^2\frac{I}{I_0}\cos\tau$$

Prin integrare se obţine:

$$f(y)\frac{dy}{d\tau} + \frac{p}{Q_0}\int f(y)\,dy + p^2\int y\,d\tau = p^2 a'\sin\tau \tag{5}$$

(am notat $a' = \dfrac{I}{I_0}$).

Din relaţiile (1) şi (5) conchidem că pentru factorii de calitate ridicaţi curbele de rezonanţă vor avea o alură similară.

Rezultatele teoretice obţinute mai sus au fost verificate în cazul unei ferite pentru care $\gamma < 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Nicolau *Asupra măsurării feritelor pentru miezuri de înaltă frecvenţă.* „Electrotehnică", 1956, nr. 6, pag. 272–276.
2. E. Tătaru, *Comportarea în regim de oscilaţii forţate a circuitelor oscilante conţinînd capacitatea nelineară a unei joncţiuni p.–n.* (Lucrare comunicată în cadrul şedinţelor de comunicări a Facultăţii de matematică şi fizică din Cluj.)

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ФЕРРИТОМ

(Резюме)

В статье показано, что при режиме вынужденных колебаний колебательные цепи с поляризованными ферритами проявляют себя как нелинейные емкости типа соединения p—n.

OSCILLATIONS FORCÉES DANS UN CIRCUIT OSCILLANT A FERRITE POLARISÉE

(Résumé)

L'auteur montre dans son article qu'en régime d'oscillations forcées les circuits oscillants à ferrites polarisées ont un comportement analogue à celui des capacités non-linéaires à type de jonction p–n.

MANUSCRISELE ASTRONOMIEI LUI BISTERFELD (II)

de

VICTOR MARIAN

Astronomia lui Bisterfeld se deosebeşte de *Uranometria* cuprinsă în Cartea XVII a lui Alsted nu numai ca titlu, ci şi ca conţinut. În timp ce cele 20 de propoziţii din cosmografia lui Bisterfeld nu sînt decît definiţiile lui Alsted copiate aproape toate textual, cele 54 propoziţii din Astronomie corespund la început cu definiţiile lui Alsted, pe care Bisterfeld le completează şi le explică dar apoi se abat din ce în ce mai mult de la textul din Uranometrie.

Din primele propoziţii se vede că este vorba de o astronomie în sensul lui Ptolomeu, fără nici o menţiune a sistemului lui Copernic. Ne vom ocupa în cele ce urmează cu diversele propoziţii.

Propoziţia I defineşte astronomia la fel ca Alsted în Uranometria : ,,Astronomia este ştiinţa sferei cereşti''.

Propoziţia II, pe care nu o găsim la Alsted, defineşte sfera cerească ca pe un corp rotund extins foarte subtil, cel mai perfect. ,,În fizică, cerul se consideră ca un corp natural, iar în astronomie ca un corp măsurabil şi mensurativ''.

Propoziţia III ne dă împărţirea astronomiei. Ea se împarte mai întîi în ,,primă sau născută (prima vel orta)''. Astronomia primă se ocupă cu ,,mişcarea şi măsura corpurilor cereşti, considerată în sine, fără a ţine seama de timp''. Astronomia primă se împarte în sferică propriu-zisă şi teoria planetelor. O altă împărţire a astronomiei este în generală şi specială. Astronomia generală studiază mişcarea stelelor, pe cînd cea specială cercetează influenţele stelelor şi predispoziţiile din situaţia stelelor ; aceasta din urmă poartă şi numele de astrologie.

Prima parte a astronomiei este cea sferică ; ea se ocupă cu cele trei sfere superioare : primum mobile, cerul cristalin sau cerul stelifer (IV). Primum mobile este sfera cea mai mare dintre toate. (V) Imediat după ea vine cerul cristalin, sfera ce se mişcă de la apus spre răsărit în patruzeci şi nouă de mii de ani, astfel că mişcarea ei este foarte lentă (VI). Cerul stelifer este sfera a opta, care cuprinde stelele fixe (VII). ,,Ea se mişcă cu mişcare proprie spre nord sau spre sud, mişcare numită de trepidaţie şi libraţie''. Stelele fixe,, au totdeauna aceeaşi distanţă între ele şi sînt purtate cu o mişcare uniformă de la răsărit la apus, însă în aşa fel, că spre nord şi sud păstrează aceeaşi perioadă" (VIII).

Stelele fixe se clasifică după cantitate, lumină, figură şi poziţie (IX). În ce priveşte cantitatea stelele sînt nebuloase, obscure şi luminoase. Ele se împart în şapte clase (X).

Stelele de mărimea întîia sînt acelea care sînt de 107 1/6 ori mai mari ca Pămîntul. Numărul acestor stele este 15, printre care se distinge Canicula sau Sirius, care începe anul sideral la Egipteni (X).

Stelele de mărimea a doua sînt în număr de 45 ; ele sînt de 90 1/8 ori mai mari decît Pămîntul. Atari sînt cele şapte stele ale Carului (XI).

Stelele de mărimea a treia sînt 208, de 72 1/3 ori mai mari ca Pămîntul. Aici se numără steaua polară (XII).

Stele de mărimea a patra sînt 474, mai mari ca Pămîntul de 54 1/2 ori (XIII).

Stele de mărimea a cincea sînt 216, fiecare din ele fiind de 36 1/8 sau după alţii de 31 de ori mai mari ca Pămîntul (XIV).

Stele de mărimea a şasea sînt 49 sau 50, care întrec Pămîntul de 18 1/10 de ori.

„În rîndul al şaptelea sînt nouă stele întunecoase şi cinci nebuloase, al căror exces nu se poate determina suficient, fiindcă abia se văd" (XVI).

„În ce priveşte luminozitatea, stelele fixe se împart în şapte clase după numărul celor şapte planete„ (XVII). Clasificarea este diferită de a lui Alsted, care distinge opt clase.

„Stelele din clasa întîia sînt cele saturniene, care strălucesc mai mult sau mai puţin cu o culoare plumburie.

Stelele din clasa a doua sînt stelele fixe joviale, care strălucesc cu o culoare albă.

Stelele din clasa a treia sînt stelele fixe de natura lui Marte, de culoare roşie purpurie.

Stelele din clasa a patra sînt stelele solare, care sînt puţin roşietice şi foarte strălucitoare.

Stelele din clasa a cincea sînt stelele care imită culoarea lui Venus, cu strălucire gălbuie deschisă.

Stelele din clasa a şasea sînt cele mercuriale, care strălucesc în culoare cenuşie.

Stelele din clasa a şaptea sînt cele lunare, care au o lumină palidă, ştearsă. Mai sînt stele fixe ce imită culoarea mai multor planete" (XVII).

„Privitor la formă, stelele fixe se împart de către ceilalţi în XXII de imagini. De obicei se împart în figurate şi diforme, adică în constelaţii şi aglomeraţii". Constelaţiile se împart în continue, cum este Calea laptelui, şi în „discrete în care stelele fixe au fost clasificate de cei vechi cu multă destoinicie, ca să poată fi şi recunoscute mai uşor şi ca înseşi formele, şi numele ce li s-a dat să ne arate natura şi efectele lor, pe care le provoacă în lumea elementară" (XVIII). Numărul constelaţiilor din univers este de 48, dintre care 21 septemtrionale, 12 zodiacale şi 15 meridionale, cele din zodiac se numesc medii, cele dinafara lui externe".

Din cele 12 constelaţii zodiacale, trei : Berbecul, Taurul şi Gemenii sînt semnele primăverii, aparţinînd lunilor martie, aprilie şi mai. Alte trei : Cancerul, Leul şi Fecioara, lunilor de vară, iunie, iulie, şi august alte trei Cumpăna, Scorpionul şi Săgetătorul, aparţin lunilor de toamnă, septembrie, octombrie şi noiembrie ; în sfîrşit Capriorul, Vărsătorul şi Peştii aparţin lunilor de iarnă, decembrie, ianuarie şi februarie (XIX).

,,În ce priveşte poziţia, 360 de stele fixe se găsesc în partea septemtrională sau boreală, 346 în zodiac, 316 în partea australă sau meridională, acestea erau cunoscute de cei vechi ; la acestea se adaugă trei sute şi mai bine vecine de vîrful antarcticului" (XX).

Trecînd la stelele fixe, numite astfel fiindcă: ,,Păstrează totdeauna poziţii pe cer, aceleaşi intervale, şi aceeaşi ordine" (XXI), se ocupă cu proprietatea acestora. ,,Toate stelele sînt rotunde fiindcă aceasta este forma cea mai potrivită pentru mişcarea şi absorbţia luminii şi fiindcă este potrivită corpurilor perfecte, adică stelelor şi cerului" (XXII). Raţionamentul este pur peripatetician.

,,Planetele fiind mai apropiate de Pămînt nu scînteiază şi nu tremură, cu excepţia lui Marte singur, care se cunoaşte uşor după culoarea sa de foc, ca stelele fixe, deoarece lumina compactă şi concentrată scînteiază cu atît mai intens, cu cît este mai depărtată de ochi" (XXIII).

O explicaţie curioasă se da întrebării: ,,Pentru ce iarna mai ales cînd este aspră şi senină se văd mai multe stele, decît vara sau în altă epocă ; cauza este parte în felul de a vedea, parte în halucinarea vederii, care este înşelată de scînteierea frecventă a atîtor lumini. Căci frigul curăţă aerul astfel că îl face mai senin şi mai clar, şi de aceea stelele scînteiază cu atît mai intens" (XXIV).

O altă explicaţie interesantă se dă fenomenului că: ,,Stelele uneori apar mai mari la orizont decît în mijlocul cerului, din cauza straturilor dese, adunate în jurul Pămîntului, şi încă neîmprăştiate dimineaţa şi seara. Din cauza slăbirii razelor solare, se întîmplă că mediul vizibil nu este liber, ci aproape dublu : de aceea lucrurile văzute apar în mod necesar mai mari. Un alt criteriu este că în ambele cazuri sînt mai depărtate decît la mijlocul cerului cu semidiametrul Pămîntului, adică cu 859 milioane de mile germane" (XXV).

Privitor la galaxie se spune: ,,Galaxia constă dintr-un conglomerat extins de multe stele, foarte mici care din cauza micimii şi distanţei, scapă simţurilor care din cauza slăbiciunii şi distanţei neputînd fi observate separat, luminează împreună cu o lumină obscură" (XXVI).

,,Steaua de la capătul cozii Ursei mici se numeşte polară, fiindcă este cea mai apropiată de polul lumii. Ea se numeşte şi steaua magnetului, deoarece magnetul se mişcă spre polul arctic, din care cauză oferă un ajutor de necrezut navigatorilor" (XXVII).

Se trece apoi la însuşirile stelelor fixe:,, Însuşirile stelelor fixe provin din mişcarea întîia sau a doua. Mişcarea întîia cauzează răsăritul şi apusul şi anume în general şi în special" (XXVIII).

,,Răsăritul în general este ivirea astrului sau stelei deasupra orizontului. Apusul în general este ascunderea astrului sau a stelei sub orizont.

Răsăritul în special este apariția astrului sau a stelei, care mai înainte a fost ascunsă de razele solare, după apusul acestuia, la orizont. Apusul în special este ascunderea astrului sau a stelei, care înainte se vedea răsărind deja soarele, în jurul orizontului" (XXIX).

,,Stelele răsar și apun totdeauna în același loc. Cu toate că acesta în decursul secolelor variază puțin, totuși această variație nu este evidentă" (XXX).

Intervalul de timp între răsăritul și apusul stelelor este diferit. Cele din jurul polului se văd mai mult, cele dinspre sud mai puțin. Sînt stele care abia răsărind apun (XXXI). În sfera dreaptă, toate stelele răsar și apun simultan, în sfera oblică nu (XXXII).

În următoarele două propoziții se arată influența răsăritului și apusului stelelor asupra vremii. Ele alcătuiesc un fel de meteorologie populară. ,,Astfel Pleiadele aproape niciodată nu răsar sau nu apun fără ploi sau zăpadă, ceea ce se poate observa totdeauna toamna, cînd apun seara cu soarele. Astfel Orion este favorabil adunării norilor de ploaie, din care cauză poeții îl numesc stea noroasă și dușmană a navigatorilor" (XXXIII). Influența Soarelui depinde de constelația în care se găsește. Astfel Soarele în Cumpănă fertilizează solul, în Scorpion umezește semănăturile, în Săgetător tempereaz frigul, în Căprior închide Pămîntul, în Vărsător dă ploaie, în Pești produce umezeală, în Berbec uscă pămîntul, în Taur dă căldură necesară recoltării, în Gemeni favorizează însămînțările, în Cancer umezește, în Leu coace fructele, în Fecioară umezește și răcorește vremea (XXXIII — XXXIV).

,,Stelele ies în mod diferit din razele solare. Stelele de mărimea întîia merg cînd se depărtează cu 12 grade de soare, cele de gradul al doilea cu 13 grade, de gradul al treilea cu 14, al patrulea cu 15, al cincilea cu 16, al șaselea cu 17, iar cele mai mici cu 18 grade, excepție se face cînd este lună plină, fiindcă atunci stelele foarte mici nu se pot vedea" (XXXV).

,,În urma mișcării a doua, stelelor le revine longitudine, latitudine față de ecliptică și declinație. Longitudinea stelei este distanța ei de la începutul Berbecului în ordinea înșirată a constelațiilor. Latitudinea stelei este distanța ei de la ecliptică, spre polul nord sau sud. De aceea latitudinea este dublă : nordică și sudică. Declinația este distanța stelei de la ecuator spre unul din polii lumii, de aceea este dublă, nordică sau boreală și australă". (XXXV).

La sfîrșitul acestei părți asupra stelelor fixe se dau instrucții asupra folosirii globului ceresc pentru observarea ușoară a stelelor fixe (XXXVI).

Partea ultimă a Astronomiei se ocupă cu planetele. ,,Teoria planetelor este doctrina planetelor sau a stelelor rătăcitoare, care-și execută mișcarea în intervalele și timpuri inegale, și sînt între stelele fixe în număr de șapte, cuprinse în versurile :

,,Post Sim Sum sequitur, proxima Luna subest".

Ele sînt Saturn, Jupiter, Marte, Soarele, Venus, Mercur și Luna (XXXVIII), după sistemul lui Ptolomeu.

,,Lumina planetelor apare constantă și liniștită, nu tremurătoare și scînteietoare ca a stelelor fixe" (XIL).

,,Poziţia şi intervalele planetelor atît între ele ca şi în raport cu cele fixe variază încontinuu" (XL). Ele nu se depărtează de ecliptică cu mai mult de opt grade, de ambele părţi, de aceea le putem găsi în jurul eclipticei printre semnele zodiacului (XLI). Propoziţiile din urmă sînt cu totul diferite de textul lui Alsted.

Propoziţia următoare afirmă că,,planetele şi toate celelalte stele sînt luminate de Soare. Nu toată lumina, ci cea mai mare parte o primesc toate stelele de la Soare, astfel că ele sînt ca nişte oglinzi, ce reflectă lumina Soarelui spre Pămînt,,. În dovedirea acestei afirmaţii aduce trei argumente : 1. Cazul Lunii luminate de Soare, care în timpul eclipsei devine întunecoasă ruginie. 2. ,,Celelalte stele cu cît sînt mai direct opuse Soarelui, cu atît strălucesc mai intens". În al treilea rînd, Soarele este astrul cel mai strălucitor dintre toate, unicul izvor de lumină şi căldură, principele astrelor, ochiul lumii, darul naturii şi de aceea măsura stelelor secundare (XLII).

,,Cu cît o planetă se mişcă mai încet, cu atît are o sferă mai mare, în consecinţă este mai depărtată şi mai sus de Pămînt. Deosebim zece perioade diferite. Căci Luna îşi descrie orbita într-o lună, Soarele, Venus, şi Mercur o parcurg într-un an cu aceeaşi viteză. Marte îşi descrie cercul în aproximativ doi ani. Jupiter îşi parcurge orbita în aproximativ 12 ani, iar Saturn în aproape 70 de ani. Sfera stelelor fixe îşi descrie mişcarea în 1000 ani, sfera a noua în 4000 ani, iar sfera a zecea, adică superioară se învîrteşte în spaţiul său în 24 de ore şi în această mişcare antrenează cu ea întreg sistemul ceresc" (XLIII).

,,Orbitele planetelor sînt corpuri cereşti sferice, concave şi mobile, împrejmuind una pe cealaltă, deosebită de ale cometelor" (XLIV).

,,Deşi cu natura şi perfecţiunea corpurilor cereşti nu se potriveşte această variaţie a orbitelor lucrurilor şi punctelor, totuşi nu este împotriva naturii omeneşti, care este cu mult mai slabă decît să poată înţelege în mod simplu acele mişcări".

,,Mişcarea planetelor este aceea, prin care planetele sînt purtate împreună cu sferele lor prin sine în mod regulat, în aşa fel încît să ne apară regulată. Ea este de longitudine şi de latitudine. Zic că prin sine se mişcă în mod regulat fiindcă o mişcare dezordonată, neregulată şi inegală nu poate avea loc în acele corpuri atît de perfecte. Ele sînt încete în apogeu, rapide în perigeu, deoarece acolo au mai mult spaţiu de parcurs" (XLVI).

,,Aspectul planetelor este poziţia lor determinată în zodiac şi între ele, născută din conflictul dintre unele şi situaţia diferită. Ea este de conjucţie sau de distanţă. Aceea este întîlnirea a două sau mai multe planete în acelaşi loc al zodiacului. Acesta este locul unde se găsesc planetele la un anumit interval de timp" (XLVII).

Propoziţia XLVIII descrie fazele Lunii din 3 sau 4 în 4 zile, începînd cu conjuncţia ei.

Cu propoziţia următoare (XLIX) începe descrierea Soarelui care,,este planeta mijlocie, maximă şi primară, originea luminii şi căldurii adevărate, şi astfel cea mai nobilă din toate. De aceea nu numai generează lucrurile sublunare ca o cauză universală, ci întreţine şi astrele" (XLIX).

,,Fiindcă viaţa se conservă şi susţine prin două mijloace puternice, aerul şi alimentele, Soarele tempereză aerul prin razele sale, astfel că devine potrivit spiritelor vitale generatoare, căci Pămîntul produce alimentele ca o mamă încălzită de razele Soarelui şi fertilizat de el, adăpat de ploi potrivite" (L). Mai important este scoaterea în evidenţă a poziţiei centrale a Soarelui între planete.

,,Soarele este situat pe sfera mijlocie pentru ca 1. să-şi poată împrăştia puterea în toate părţile, şi astfel să poată distribui lumina atît astrelor superioare cît şi celor inferioare. 2. Nici ca distanţa prea mare a locurilor îndepărtate să acţioneze asupra celor inferioare şi să le îngheţe pe toate prin frig, sau din cauza apropierii lui să le ardă pe toate prin căldura prea mare" (LI).

Propoziţia LII ne dă cîteva date numerice în legătură cu Soarele : ,,Soarele este cel mai mare dintre toate stelele, căci întrece de 66 de ori Pămîntul, de 6640 de ori Luna. Luna plină se ridică deasupra Pămîntului la 59 de semidiametre terestre, unul din aceştia avînd lungimea de 860 de mile germane. Prin urmare Luna se află la o înălţime de 50740 de mile germane. Soarele se ridică deasupra Pămîntului la 1210 semidiametre, adică la 104060 de mile germane, sau dacă vrem în cifre rotunde, înălţimea Lunii este de 50000 de mile, a Soarelui de 1000000, astfel că înălţimea Soarelui întrece pe aceea a Lunii de douăzeci de ori. Soarele parcurge într-o oră 261905 de mile. Cercul zilnic al Soarelui este cu aproape 914285 mai mare ca drumul orar al Soarelui" (LII).

Propoziţia LIII arată modul de întrebuinţare al globului pentru determinarea lungimii zilei, din determinarea răsăritului şi apusului soarelui. De aici, se vede că pentru învăţămîntul astronomiei se întrebuinţa sfera cerească. Cu ajutorul ei se determină de ex. că lungimea zilei la 10 august este de 14 ore 16 minute, iar a nopţii de 9 ore 44 minute. Soarele răsare la ora 4 şi 54 de minute şi apune la ora 7 şi 6 minute, ora locală.

În sfîrşit, propoziţia LIV dă datele intrării soarelui în diversele semne ale zodiacului, cuprinse în tabelul următor :

Berbecul	martie 11	Cumpăna	septembrie 13
Taurul	aprilie 10	Scorpionul	octombrie 13
Gemenii	mai 11	Săgetătorul	noiembrie 12
Cancerul	iunie 11	Capricornul	decembrie 12
Leul	iulie 13	Vărsătorul	ianuarie 10
Fecioara	august 19	Peştii	februarie 8

Acest tablou este rezumat în versurile :
,,Gaude, Cristus, Adest, Titan, Aptissionque, Exit, Intro, Ibit, Fussus, Impius, Exul, Exit".

,,Aici sînt 12 cuvinte care corespund la tot atîtea luni ale anului în ordinea în care se găsesc în calendar, astfel că dacă numele începe cu o consoană, ziua a zecea a lunii este ziua intrării Soarelui, iar dacă numele începe cu o vocală, trebuie văzut a cîtea este aceasta în ordinea vocalelor şi acest număr adunat la zece ne dă ziua intrării : aceste tabele se potrivesc şi cu vechiul calendar".

Manuscrisele IV şi V au fost scrise mai tîrziu decît cele precedente. Manuscrisul IV ce poartă cota A. 2. Ms. 1176 a fost copiat în 1651 de Csernátoni, iar manuscrisul V iarăşi de Porcsalmi înainte de 1660. Ambele poartă titlul *Aphorismi physici* şi acesta ca şi textul lor e identic cu cel din cartea lui Bisterfeld intitulată: *Bisterfeldius redivivus*, apărută în 1661 la Haga. Chestiunile de astronomie sînt tratate în Secţiunea I, intitulată *Cosmologia* şi Secţiunea IV care poartă numirea *De coelo et coelestibus corporibus*; ambele sînt caracterizate prin atitudinea potrivnică lui Aristotel şi predominarea argumentelor religioase. Nu voi insista asupra acestora, mărginindu-mă la scoaterea în evidenţă a exagerărilor celor mai bătătoare la ochi şi mai absurde.

La fel ca în manuscrisele anterioare cosmologia este considerată ca o parte a fizicii împreună cu fiziologia. Dar în timp ce acolo cosmologia este tratată la urmă, aici se spune că ea trebuie să premeargă fiziologiei. Deşi Bisterfeld afirmă că cosmologia lui Aristotel este falsă, la fel cu el susţine că lumea este perfectă. Obiectul acestei secţiuni este să arate naşterea, starea şi moartea lumii. După ce afirmă că lumea a fost creată, dar nu din etern, aduce în sprijinul acestei afirmaţii nu numai Scriptura, ci şi „mintea sănătoasă". Apoi scrie, evident fără nici un argument: „Cînd a fost creată lumea, Soarele se găsea în Cumpănă, astfel că ea a fost creată toamna„. Elementul principal al creaţiei este „apa originală".

Starea lumii este continuarea existenţei ei care se datoreşte în primul rînd „incubaţiei Spiritului Sfînt", iar în al doilea rînd „Spiritului universului", care „nu este alta decît apa cea mai perfectă", adică „partea cea mai pură a apei originale, atît de distilată, prin scara universală a naturii, încît se poate urca deasupra tuturor cercurilor şi invers, coborî cu anumite grade ale naturii, şi este aproape incorporată (incorporata), iar filozofii orientali o numesc tinctura sau piatra filozofală".

Moartea lumii este reîntoarcerea lumii corporale în starea de haos şi astfel încetarea stării actuale. Ea va avea loc prin foc, în urma „combinării focului intern al pămîntului cu focul ceresc, astfel că toate se vor întoarce în apa originală".

Bisterfeld termină această secţiune susţinînd că „adevărata filozofie poate şi trebuie să cunoască atît moartea lumii cît şi modul ei general. Dar nici îngerii nici oamenii nu pot şti timpul acestei morţi, deşi se pare că şi Scripturii cît şi întregii naturi îi repugnă că ea va avea loc în proximii 7000 de ani".

Secţiunea a IV-a, intitulată *Despre cer şi corpurile cereşti*, are ca obiect studiul corpurilor terminate (consummata) de natură constantă. Deoarece toate corpurile sînt fie luminoase, fie neluminoase, şi fiindcă lumina este cheia întregii naturi corporale şi aşa zicînd limita şi orizontul spiritual, trebuie să ne ocupăm cu natura, constituţia şi operaţia ei.

„Lumina (lux) este vapoarea cea mai perfectă". Aici nu mai face distincţie nici între „lux" şi „lumen" nici între lumina substanţială şi accidentală ca mai înainte, ci vorbeşte pur şi simplu despre lumină. Cu mult mai tare decît înainte se scoate aici în evidenţă natura corpusculară a luminii. „Lumina este vapoare, deci corp adevărat, şi atît luminarea cît şi însăşi lumina inerentă a substanţei, şi împrăştiată şi lumina dispersată în corpuri este substanţă".

„Părţile luminii, fiindcă este vapoare, sînt foarte subtile (tenuissimae) şi deci rezolvabile în particulele cele mai mici. Din subtilitatea părţilor luminii rezultă micimea și multiplicabilitatea lor astfel că o scînteie oricît de mică se poate diviza în oricîte".

În lumină trebuie să distingem trei părți, care nu diferă atît prin esența cît prin felul de a subsista și prin grad. Întîia este corpul luminos oricît de puțin ar fi de uleios sau de gras, căci orice corp gras din natură este în proxima putință lumină sau foc. Lumina și focul nu diferă în esență. Partea a doua este corpul uleios ce se răspîndește; căci prin forța activității sale în mod necesar se agită și își mărește sfera. A treia parte este corpul uleios, întrucît se reunește la izvorul său. Căci fiind vapoare foarte asemănătoare, prin simpatia naturală tinde să se întoarcă la izvorul original. După aceste considerații Bisterfeld adaugă că „din cauza acestei minunate generări și propagări a luminii, Dumnezeu în Scriptură se numește lumină". Apoi trage concluzia că toate părțile luminii sînt sferice, deoarece sfera este figura cea mai potrivită atît unei distribuiri ordonate cît și unei uniuni intime.

Lumina nu are un loc anumit și sigur, căci ea poate fi și opera oriunde, dar din cauza temperaturii diferite a părților preferă unele locuri altora. Ea difuzează în toate părțile, dar din cauza stării diferite tinde mai mult în sus decît în jos. Lumina este continuă; datorită acesteia dacă diverse lumini se adună într-un punct fiecare își păstrează esența și eficacitatea. Lumina dă naștere culorii, care este „o anumită modificare și gradare a luminii incidente pe un corp opac, căci culorile nu sînt altceva decît aprinderile foarte subtile ale corpurilor colorate".

În ce privește operația (operatio) luminii, ea este foarte mobilă și motivă. Este mobilă fiindcă toate părțile ei se dispersează prin mișcare continuă, în această mișcare continuă constă așa zicînd viața luminii. Mișcarea ei în întregime se numește „mișcare locală", pe cînd a părților sale radiație. „Radiația este mișcarea luminii, prin care particulele sale țîșnesc incontinuu și în linie dreaptă; această radiație are loc în timp dar foarte scurt, într-o clipită (instanti) nu metafizică ci fizică, adică aparîndu-ne nouă astfel". Aceste păreri susținute înaintea descoperirii iuțelii luminii de Römer și a stabilirii teoriei corpusculare a ei de către Newton, sînt o notă bună pentru Bisterfeld. Propagarea în timp a luminii o susține și în propoziția următoare: „Este evident, că deoarece orice lumină este corp, iar un corp nu poate fi simultan în mai multe locuri, — la un moment dat lumina Soarelui este în eter, în altul în aer, în altul pe Pămînt". Radiația este simplă, directă sau multiplă, și este reflectată sau refractată.

„Lumina este foarte motivă (motivissima) fiindcă orice mișcare a corpurilor naturale se naște, conservă și guvernează din mișcarea luminii și a corpurilor luminoase". Dar nu uită să adauge că de aceea a creat dumnezeu lumina în ziua întîia. Pentru generarea luminii este necesară uniunea potrivită a particulelor, excitația și inflamația lor, care se numește aprindere. Aceasta nu este altceva decît mișcare comunicată prin impuls. Aici Bisterfeld are următoarea observație nostimă: „Unde pulchre et subtilissime dicitur Hungarica lingua ignem abdormivisse". În continuare spune că deoarece lumina își împrăștie particulele încontinuu este necesar ca ea să fie alimentată; aceasta se obține de la vapori, fiindcă ceea ce generează aceea și întreține.

În particular corpurile luminoase sînt fixe sau mobile. Fixe sînt stelele şi focul subteran. Focul sublunar al peripateticienilor îl consideră ca o pură imaginaţie. Stelele sînt corpuri luminoase situate în eter. Ele se nasc din lumina originală adunată în formă de sferă, şi se conservă prin afluenţa vaporilor din toate părţile. Această sentinţă (sententia) despre conservarea stelelor Bisterfeld o consideră ca ,,foarte veche şi adevărată, şi fără nici un motiv atacată mai întîi de către Aristotel, pentru a-şi impune părerea sa falsă despre eternitatea lumii". Izvorul vaporilor menţionaţi este triplu : globul terestru şi apele, apele supercereşti şi razele mutuale ale stelelor.

Stelele se mişcă în eterul cel mai lichid foarte liber, perpetuu şi ordonat. Cauza primă a acestei mişcări este voinţa Creatorului, a doua însă şi naturală nu este extrinsecă cum îşi închipuie peripateticienii, ci intrinsecă şi anume dorinţa de nutremînt. ,,În adevăr după cum se mişcă vaporii din care se conservă stelele, la fel fac şi stelele ; la fel cum flacăra artificială se mişcă în sus şi în jos, înainte şi înapoi şi se învîrteşte ca Elychnium, tot aşa Soarele consumînd vaporii de la sud se mişcă spre nord, şi invers, şi fiindcă spre poli secţiunea sferei este mai mică, şi nu poate furniza vapori suficienţi, planetele se menţin între tropice". Apoi adaugă pe bună dreptate că orbitele cereşti sînt utile din punct de vedere astronomic, fiziceşte însă sînt inutile (futilia).

În ce priveşte influenţa stelelor, Bisterfeld o atribuie forţei luminii. Apoi ia atitudine hotărîtă împotriva mişcării Pămîntului. ,,Ceea ce se afirmă de unii filozofi despre repausul stelelor şi mişcarea Pămîntului nu este de acord nici cu Scriptura, nici cu natura".

Trecînd la proprietăţile stelelor în particular, se spun cam aceleaşi lucruri ca în manuscrisele anterioare. Menţionăm numai că se acceptă că ,,galaxia sau Calea Laptelui este un conglomerat dens de foarte multe stele împrăştiate aproape în mijlocul cerului. Poeţii o numesc în mod potrivit *poarta cerului*, fiindcă cunoaşterea ei ne descoperă natura cerurilor, stelelor şi mişcarea celor cereşti". ,,Cometele sînt planete eterice născute în cer de vapori, de formă, mişcare şi alte calităţi neregulate, care în sfîrşit dispar sau se rezolvă". Ele, mai ales cea din 1618, nu sînt fum aprins sub sfera Lunei. Printre planete înşiră şi sateliţii lui Jupiter descoperiţi de Galilei.

,,Focul subteran este focul pus în centrul Pămîntului, în prima creaţie atît pentru a-i da forma, dînd naştere munţilor, cît şi pentru a o păstra, cît şi în fine, pentru a promova generarea tuturor vieţuitoarelor pe pămînt".

Spre sfîrşit, Bisterfeld revine la problema luminii şi împarte corpurile neluminoase în transparente şi opace. ,,Cel mai transparent este cerul". El este ca mărime, formă şi puritate cel mai perfect, născut din rarefierea apei, ca să despartă apele superioare de cele inferioare. Cerul este triplu : aer, eter şi cerul suprem, care nu diferă în esenţă ci numai în gradaţie. Aerul este cer între Lună şi Pămînt, sediul meteorilor. Eterul este cer, aer şi cerul suprem, sediul stelelor. Cerul suprem este cerul cuprins între eter şi apele supracereşti, sediul spiritelor fericite. Bisterfeld încheie aceste consideraţii asupra cerului cu afirmaţia că el este descris mai exact de Scriptură decît de unii filozofi, ca Aristotel. Secţiunea se termină cu descrierea vînturilor, meteorilor şi a mişcării mărilor.

*

Din expunerea amănunțită de mai sus a conținutului cursului de astronomie al lui Bisterfeld, rezultă, ca și în cazul fizicii, o abatere progresivă de la Aristotel și apropierea de Biblie. În timp ce în primele manuscrise, copiate în parte după Alsted, se fac unele concesii stagiritului, în ultimele Aristotel este atacat tot mai des și mai vehement, iar argumentele biblice se înmulțesc. În locul scolasticei sprijinită pe Aristotel avem de-a face cu un fel de scolastică protestantă bazată aproape exclusiv pe Biblie. Introducerea exagerată a elementului biblic în fizică și astronomie de către Alsted și mai ales de Bisterfeld este explicabilă prin faptul că ei nu erau nici fizicieni, nici astronomi de renume, ci teologi protestanți, chemați la Alba-Iulia de principele Bethlen pentru întărirea calvinismului în Ardeal.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ БИСТЕРФЕЛЬДА (II)

(Резюме)

В этой части статьи изучаются последние астрономические рукописи Бистерфельда, где он все больше удаляется от Альштеда, которого он оспаривает. Так, часть III рукописи, озаглавленная *Astronomia* в 54 предложениях рассматриваются вопросы, которыми занимается Альштед в XVII книге своей *Уранометрии*. Последние две рукописи (IV—V), озаглавленные *Aphorismi physici*, содержат материал I и IV разделов книги, напечатанной в 1661 г, в Гааге под заглавием *Bisterfeldius redivivus*. Раздел I, носящий заглавие *Cosmologia*, рассматривает проблему зарождения, состояния и конца мира, а раздел IV, озаглавленный *„О небе и небесных телах“*, придает особое значение теориям относительно света, опираясь большей частью на Библию. Хотя автор и знаком с теорией Коперника, все же отрицает её, как не являющуюся в согласии „ни со св. писанием, ни с природою“.

LES MANUSCRITS DE L'ASTRONOMIE DE BISTERFELD (II)

(Résumé)

Cette suite de l'article antérieur étudie les derniers manuscrits à contenu astronomique de Bisterfeld, où il s'écarte toujours davantage d'Alsted et d'Aristote, qu'il combat. Ainsi la partie du manuscrit III intitulée *Astronomia* traite en 54 propositions les questions dont Alsted s'occupe au livre VII de son *Uranométrie*. Les deux derniers manuscrits (IV—V), intitulés *Aphorismi physici*, contiennent la matière des sections I et IV de l'ouvrage imprimé en 1661 à la Haye sous le titre de *Bisterfeldus redivivus*. La section I, portant le titre de *Cosmologia*, traite le problème de la genèse, de l'état et de la mort du monde, et la section IV, intitulée *Du corps et des corps célestes* accorde une importance particulière aux théories de la lumière, en s'appuyant en grande partie sur la Bible ; quoique l'auteur connaisse la théorie de Copernic, il la repousse cependant comme n'étant d'accord, ,,ni avec l'Écriture ni avec la nature''.

O METODĂ MAGNETICĂ PENTRU ANALIZA OXIGENULUI DIN AMESTECURI DE GAZE

de

I. URSU și C. BÁLINTFFI

INTRODUCERE

Oxigenul gaz în condiții normale de presiune și temperatură este un gaz paramagnetic ($\chi_{20^\circ C} = +106{,}2 \cdot 10^{-6}$) Cum majoritatea gazelor sînt diamagnetice, paramagnetismul oxigenului este mult folosit pentru analiza sa din amestecuri de gaze [1]. Într-o lucrare anterioară [2] am cercetat un dispozitiv sensibil cu înregistrare automată pentru analiza de oxigen pe cale magnetică.

Acest dispozitiv se bazează pe efectul convecției termomagnetice. În cele ce urmează vom prezenta un alt dispozitiv pe care l-am experimentat în laboratoarele noastre, și care se deosebește de cel studiat în lucrarea anterioară prin sensibilitatea sa mult mai ridicată și posibilitatea de a fi folosit într-un domeniu mult mai larg de concentrație de oxigen gaz.

DISPOZITIVUL EXPERIMENTAL. REZULTATE

Principiul de funcționare al dispozitivului experimentat este reda în figura 1, iar schema sa electrică în figura 2. După cum se vede am folosit două celule de convecție termomagnetică în serie. Gazul de analizat este introdus în prima celulă prin tubul *i*.

Datorită cîmpului magnetic neomogen creat de magneții permanenți M_1 și a gradientului de temperatură creat de rezistențele încălzite R_3 și R_4 oxigenul din amestec se deplasează prin tubul orizontal în sensul arătat de săgeată. Acest curent de gaz răcește rezistența R în mod proporțional cu concentrația de oxigen. Gazul de analizat care intră în prima celulă circulară, în întregime trece în cea de a doua. Aici fiind aceleași condiții ca și în prima, oxigenul din gazul de analizat răcește rezistența R_1 în aceeași măsură ca și rezistența R_4. Rezistențele R_1 și R_4 datorită acestei răciri se micșorează ambele cu aceeiași cantitate. Prin legarea în serie a celor două celule de analiză obţinem o mărire a sensibilităţii de lucru a sistemului. Cele patru rezistenţe ale sistemului fiind în interiorul celulelor, nu sînt supuse influenţei mediului exterior şi folosind două potenţiometre P_1 şi P_2 se pot realiza condiţii mai bune de echilibrare a punţii în curent

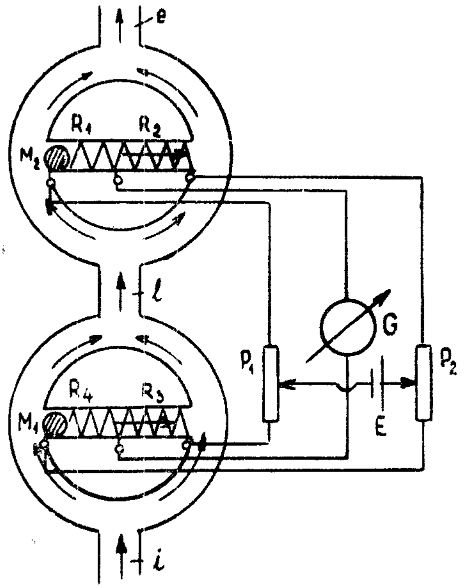

Fig. 1.

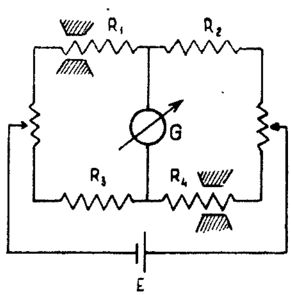

Fig. 2.

continuu. Aceste fapte conduc de asemenea la mărirea sensibilităţii punţii. În al treilea rînd simpla schemă electrică realizată măreşte sensibilitatea aparatului de două ori, faţă de cazul cînd se lucrează cu o singură celulă. Se poate vedea acest lucru din relaţia simplă cu privire la funcţionarea punţilor de curent continuu neechilibrate.

Se ştie că tensiunea pe diagonala punţii este dată de relaţia :

$$U_0 = U\left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) \tag{1}$$

unde U este tensiunea punţii.

Folosind numai o singură celulă de analiză, trebuie să ţinem seama de faptul că numai rezistenţa R_1 se schimbă, devenind R — X, iar celelalte sînt egale între ele prin construcţie: $R_2 = R_3 = R_4 = R$. În acest caz formula [1] devine :

$$U'_0 = U \frac{X}{2(2R - X)} \tag{2}$$

unde X este cantitatea cu care se micşorează rezistenţa R_1 sub influenţa oxigenului din gazul de analizat.

Folosind două celule în serie, trebuie să ţinem seamă de faptul că se modifică atît rezistenţa R_1 cît şi R_4, devenind: $R_1 = R_4 = R - X$, iar prin construcţie $R_2 = R_3 = R$. În acest caz formula [1] devine:

$$U_0'' = U \frac{X}{2R - X} \tag{3}$$

Făcînd raportul între (3) şi (2) obţinem:

$$\frac{U_0''}{U_0'} = 2 \tag{4}$$

În acest fel se vede că numai prin simpla modificare a schemei electrice putem ridica sensibilitatea instalaţiei de două ori.

Performanţele aparatului de analiză au fost stabilite, prin etalonările făcute cu oxigen gaz în concentraţii bine cunoscute. Astfel s-au făcut etalonări în concentraţii mici de oxigen (fig. 3) în amestec cu CH_4, CO_2, H_2, şi N_2, obţinînd o sensibilitate de cca. 0,005—0,01% O_2. În aceste condiţii, oximetrul se poate folosi pentru detectarea urmelor de oxigen din amestecuri de gaze.

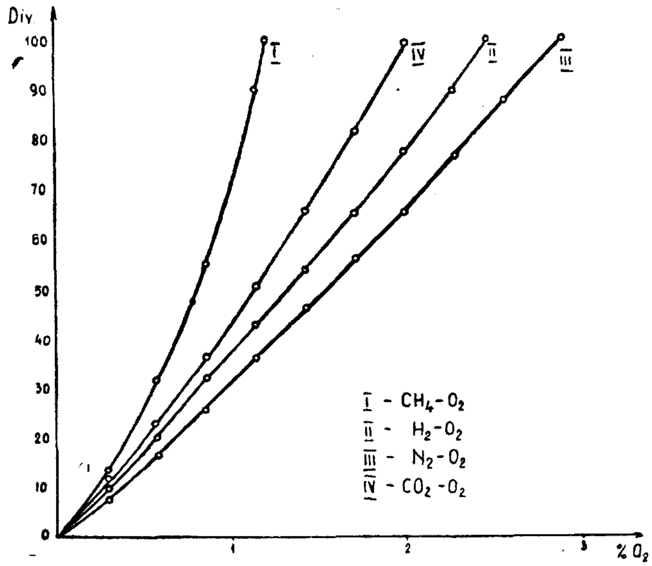

Fig. 3.

Tot aceeaşi sensibilitate s-a obţinut la etalonarea cu aceleaşi gaze conţinînd aer în concentraţii mici (fig. 4.)

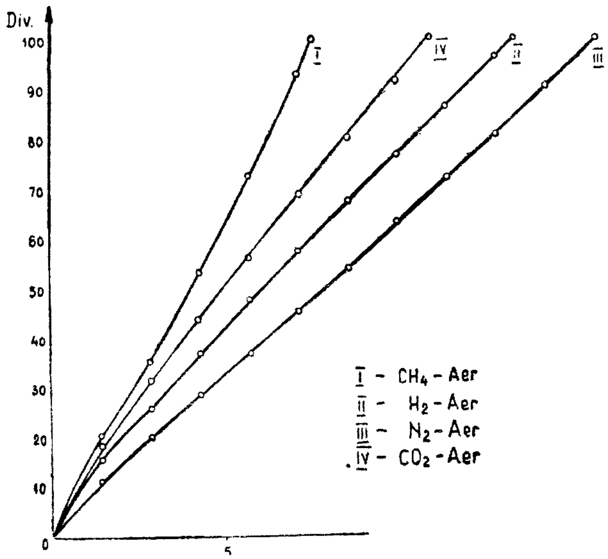

Fig. 4.

Tot cu amestecurile de mai sus s-a făcut o etalonare în jur de 20%O_2 (fig. 5). În acest domeniu sensibilitatea oximetrului scade la 0,02—0,25% O_2. În aceste condiţii oximetrul se poate folosi pentru controlul aerului îmbogăţit sau sărăcit în oxigen.

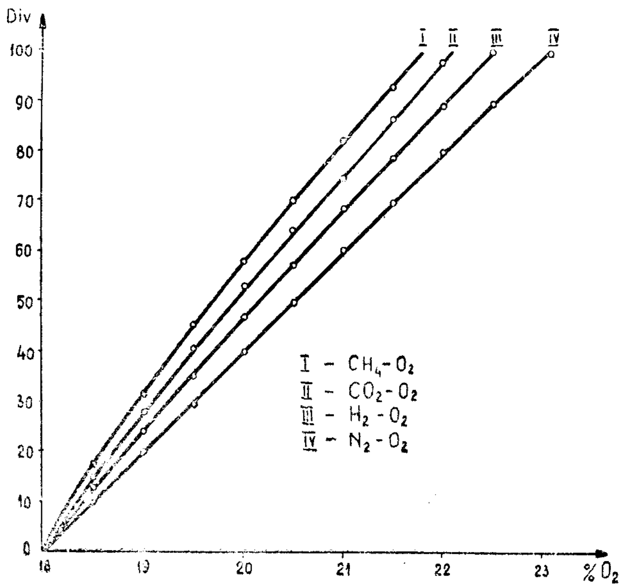

Fig. 5.

Folosind aceleaşi amestecuri de gaze s-a făcut etalonarea aparatului pentru concentraţii mari de oxigen, în jur de 90% O_2 (fig. 6). Pentru acest caz sensibilitatea aparatului este de 0,06—0,09% O_2. În această situaţie oximetrul se poate folosi pentru detectarea impurităţilor de gaze diamagnenetice din oxigen.

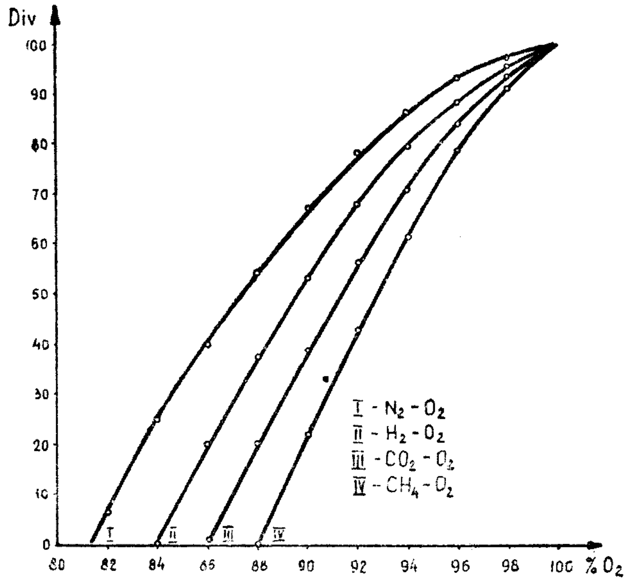

Fig. 6.

CONCLUZII

Noua schemă de oximetru termomagnetic studiată, prezintă avantaj net faţă de cele precedente.

Se pot determina cu ajutorul său, cu mare precizie, concentraţiile mici de oxigen, concentraţiile medii de oxigen (de 20% O_2) şi urmele de gaze diamagnetice.

Rezultatele cercetărilor efectuate în cadrul acestei lucrări, ne-au permis îmbunătăţirea proiectului făcut pentru un nou tip de oximetru.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Ursu, *Efecte magnetomecanice la oxigen.* „Monografii de fizică", V, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1959.
2. I. Ursu şi C. Bălintffi, *Determinarea concentraţiei de oxigen dintr-un amestec de gaze, pe cale magnetică* (manuscris).

О НОВОМ МАГНИТНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ АНАЛИЗА КИСЛОРОДА В ГАЗОВОЙ СМЕСИ

(Резюме)

Авторы исследуют новую схему термомагнитного оксиметра, поставляя в ряд две анализаторские ячейки (циркулярные камеры).

Исследовалась чувствительность прибора для разных смесей газов с кислородом. Замечается возможность легко переходить из одной области измерений к другой, так как прибор может быть использован от небольшой концентрации с кислородом до ста процентов кислорода в условиях большой чувствительности.

MÉTHODE MAGNÉTIQUE POUR L'ANALYSE DE L'OXYGÈNE DANS UN MÉLANGE DE GAZ

(Résumé)

Les auteurs expérimentent un nouveau schéma d'oxymètre thermomagnétique par la mise en série de deux cellules d'analyse (chambres circulaires). Ils ont étudié la sensibilité de l'appareil pour divers mélanges de gaz avec de l'oxygène. On remarque la possibilité de passer sans difficulté d'un domaine de mesure à l'autre, l'appareil étant utilisable à partir de faibles concentrations d'oxygène jusqu'à 100% O_2, dans des conditions de haute sensibilité.

Întreprinderea Poligrafică Cluj 2354/1363

ERATA—ОПЕЧАТКИ

Pag. Стр.	*Rîndul* Строка	*In loc de:* Напечатано:	*Se va citi:* Следут читать:	*Greşeala s-a făcut din vina:*
34	12 de sus	$-c_5$	$+c_5$	redacţiei
	13 de sus	$-b_5' \frac{\partial f}{\partial b_5'}$	$-b_5 \frac{\partial f}{\partial b_5}$	"
35	form. (7)	φ	$\varphi=$	tipografiei
	2 de jos	$\frac{c_3 b_5}{c_5}$	$=\frac{c_3 b_5}{c_5}$	redacţiei
39	7 de jos	ξ	ξ^i	"
44	6 de sus	A_1	$\frac{8}{3} A_1$	"
45	14 de sus	a_3	$\bar{a}_3$	"
	14 de sus	a	$\bar{a}$	"
	17 de sus	$\boldsymbol{a}$	$\bar{a}$	"
46	9 de jos	b	$\bar{b}$	"
55	11 de sus	$C(y)C(y)$	$C(x)C(y)$	autorului
59	14 de sus	B	B_1	"
65	5 de jos	$\neq$	$=$	"
80	5 de jos	Q	D	"
88	11 de sus	φ	Φ	"
126	14 de sus	(ultimul) $\mathcal{J}+$	$\mathcal{J}^2+\ldots$	"
127	5 de sus	ε	γ	redacţiei
130	19 de sus	$\mathcal{U}$	u	"
142	16 сверху	рассматри-ваются	рассматри-вает	redacţiei
143	18 de sus	reda	redat	tipografiei