STUDIA UNIV. "BABEŞ–BOLYAI", MATHEMATICA, Volume **XLVIII**, Number 2, June 2003

ÉVOLUTION DES COURS GOUVERNÉE PAR UN PROCESSUS DE TYPE ARIMA FRACTIONNAIRE

TRAN HUNG THAO AND CHRISTINE THOMAS-AGNAN

Abstract. A suitable model for the evolution of options in a financial market is proposed. It exhibits a long term dependence of options that is not expressed in the usual Black-Scholes model. A fractional processes of ARIMA type is chosen to model the perturbation of the evolution. A solution for a modified model is found.

1. Introduction

Il est bien connu que l'évolution du cours de l'action est habituellement décrite par l'équation de Black et Scholes:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \nu dW_t), 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

où S_t est le prix de l'action à l'instant t, μ et ν sont deux constantes, W_t est un mouvement brownien standard et T est la date d'échéance de l'option à étudier. Pour simplifier, on va se restreindre au cas univarié.

Dans ce modèle (1.1), le rapport relatif $\frac{dS_t}{S_t}$ entre le changement du prix de l'action et lui-même est supposé non seulement proportionnel à la durée du temps de ce changement mais aussi bruit é par le bruit blanc markovien dW_t. Et par conséquent, la solution S_t de (1.1) est un processus de Markov qui ne présente qu'une dépendance très faible et aussi qu'une sorte d'indépendance avec le passé lointain. Mais il est évident que, pour la plupart des processus économiques, l'hypothèse d'absence de mémoire n'est pas tenable. Le prix de l'action S_t à l'instant t peut être influencé par son comportement longtemps avant, ce qui est incompatible avec la propriété de Markov. Et le risque de l'action doit être représenté par un modèle comportant une dépendance. C'est pourquoi nous proposons ici un modèle des cours perturbé par un processus asymptotique à une série temporelle de type ARIMA qui exprime une évolution de longue mémoire.

Considérons d'abord un bruit modélisé par un processus ARIMA Y défini par

$$Y_s = (1-L)^{-d}\Phi(L)^{-1}\Theta(L)\varepsilon_s, \ s = 0, 1, 2, ..., [T] \tag{1.2}$$

où (ε_s) est un bruit blanc qui est une suite de variables aléatoires de moyennes nulles, non corrélées et de même variance σ, L est l'opérateur de retard, Φ et Θ sont des polynômes de retard ayant leurs racines à l'extérieur du disque unité, d est l'ordre fractionnaire de différentiation.

Received by the editors: 03.07.2002.
Key words and phrases. ARIMA, fractional process, Black-Scholes model.

On sait que la représentation moyenne mobile du processus peut s'écrire

$$Y = \sum_{k=1}^{s} h_{s-k}^{(d)} \varepsilon_k \tag{1.3}$$

où les coefficients moyennes mobiles peuvent être approchés par

$$h_s^{(d)} \approx \frac{\Theta(1)}{\Phi(1)\Gamma(1)} s^{d-1}$$

avec s grand et où Γ désigne la fonction gamma.

On considère maintenant un processus Z défini par:

$$Z_r = \frac{1}{T^{d-\frac{1}{2}}} Y_{[Tr]},\ 0 \leq r \leq 1 \tag{1.4}$$

où $[x]$ est la partie entière de x.

Nous renvoyons les lecteurs aux résultats présentés dans [3] où l'on peut trouver que, par un calcul et par l'application du théorème de Donsker on obtient l'approximation suivante:

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{1}{T^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{[Tr]} h_{[Tr]-k}^{(d)} . \varepsilon_k \\ &\approx \frac{\sigma\Theta(1)}{\Phi(1)\Gamma(d)} \sum_{k=1}^{[Tr]} \Big(r - \frac{k}{T}\Big)^{d-1} \Big[W\Big(\frac{k}{T}\Big) - W\Big(\frac{k-1}{T}\Big)\Big] \end{aligned}$$

où W est un mouvement brownien. On peut écrire aussi:

$$Z_r \approx \frac{\sigma\Theta(1)}{\Phi(1)\Gamma(d)} \int_0^r (r-s)^{d-1} dW_s,\ 0 \leq r \leq 1. \tag{1.5}$$

L'intégrale stochastique dans (1.5) joue un rôle essentiel dans la description de la présence d'une dépendance à long terme d'un prix d'action dans l'évolution du cours.

On peut revenir au temps t avec $0 \leq t \leq T$ par un changement de variable $s = \frac{u}{T}$ en remplaçant $\frac{r}{T}$ par t et en notant que le mouvement brownien W_s est un processus auto-similaire, c'est-à-dire, $W_s \equiv W_{\frac{u}{T}} \sim \frac{1}{T} W_u$ (identique en loi). On a alors:

$$Z_r \equiv Z_{tT} = \frac{\sigma\Theta(1)}{\Phi(1)\Gamma(d)} . \frac{1}{T^d} \int_0^t (t-u)^{d-1} dW_u,\ 0 \leq t \leq T. \tag{1.6}$$

En posant $d - 1 = \alpha \quad (\alpha < \frac{1}{2})$ on considère l'int égrale stochastique dans (1.6):

$$B_t \equiv \int_0^t (t-u)^{\alpha} dW_u,\ 0 \leq t \leq T,\ \alpha > 0, \tag{1.7}$$

qui sera choisie pour modélisé la perturbation dans notre modèle de long terme de l'évolution du cours.

Nous proposons donc de substituer au modèle (1.1) le modèle suivant

$$dS_t = S_t(\mu dt + \nu dB_t), \quad S_0 \text{ donné}, \tag{1.8}$$

S_t : prix d'option, μ et ν :constantes, B_t défini par (1.7), avec $\alpha = H - \frac{1}{2} > 0$ $(H > \frac{1}{2})$.

On désigne par $\mathcal{F}_t$ le σ-tribu engendré par la variable aléatoire donnée S_0 et par tout $B_s, s \leq t : \mathcal{F}_t = \sigma(S_0, B_s, s \leq t)$.

Une solution S_t de (1.8) est un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-adapté satisfaisant la relation suivante

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \nu \int_0^t S_s dB_s \tag{1.8$'$}$$

où la dernière intégrale est définie comme suit:

$$\int_0^t S_s dB_s = S_t B_t - \int_0^t B_s dS_s$$

en supposant que S_t soit presque surement borné.

Le modèle (1.8) *est celui de Black et Scholes où on a remplacé le mouvement brownien* W_t *par le processus fractionnaire* B_t *afin d'avoir un prix d'option de longue mémoire.*

2. Relation entre la perturbation B_t et le mouvement brownien fractionnaire

Certains auteurs ont aussi considéré le modèle suivant

$$dS_t = \mu S_t dt + \nu S_t dW_t^H \tag{2.1}$$

où W_t^H est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H, $0 \le H \le 1$ (voir [2], [5]). On rappelle que W_t^H est un processus gaussien centré avec fonction de covariance donnée par

$$R(s,t) = E(W_s^H W_t^H) = \frac{V_H}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}) \tag{2.2}$$

où V_H est une constante. Si $H = \frac{1}{2}$ alors $V_H = 1$, $R(s,t) = \frac{1}{2}(s+t-|t-s|) = \min(s,t)$ et on a un mouvement brownien standard ordinaire. Alors (2.1) est le modèle bien connu de Black et Scholes.

L'équation (2.1) ne peut pas être résolue dans le cadre de la théorie de l'intégrale stochastique d'Itô, car W_t^H n'est plus un semi-martingale en général, sauf le cas où $H = \frac{1}{2}$. Des calculs stochastiques nouveaux sont élaborés (voir [2]) pour traiter des telles situations, mais il semble qu'ils sont encore loin des besoins pratiques dans la finance. On sait aussi que le mouvement brownien fractionnaire admet une représentation de la forme

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ U_t + \int_0^t (t-s)^\alpha dW_s \right\}, \tag{2.3}$$

où Γ désigne la fonction de gamma, W_t un mouvement brownien standard, $\alpha = H - \frac{1}{2}$, et $U_t = \int_{-\infty}^0 [(t-s)^\alpha - (-s)^\alpha] dW_s$. Parce que U_t est un processus avec des trajectoires absolument continues il suffit de considérer le deuxième terme qui correspond à (1.7).

On a ainsi démontré qu'on a des raisons de choisir B_t défini par (1.7) au lieu de $W_t^H = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \{U_t + B_t\}$ et de W_t comme la perturbation du prix de l'action dans un marché financier.

Revenant au modèle (1.8) du paragraphe 1, on va approximer B_t par un semimartigale.

3. Approximation du processus B_t

Pour chercher une solution asymptotique pour le modèle (1.8) on a besoin d'une approximation du processus B_t.

D'abord, pour chaque $\varepsilon > 0$ on définit un processus B_t^ε comme suit

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^\alpha dW_s, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

où W_t est le mouvement brownien correspondant à B_t dans (1.7).

On voit que B_t^ε est un semimartingale continu:

$$dB_t^\varepsilon = \Big(\int_0^t \alpha(t-s+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_s\Big) dt + \varepsilon^\alpha dW_t. \tag{3.2}$$

En effet, d'après le théorème de Fubini, on a:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds &= \int_0^t \Big[\int_u^s (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} ds\Big] dW_u \\ &= \frac{1}{\alpha}\Big[\int_0^t (s-u+\varepsilon)^\alpha dW_u - \varepsilon^\alpha W_t\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha}\big[B_t^\varepsilon - \varepsilon^\alpha W_t\big], \text{ d' où:} \end{aligned}$$

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t \int_0^s \alpha(s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds + \varepsilon^\alpha W_t \text{ et il en result (3.2).}$$

On suppose dans cet article que $\frac{1}{2} < H < 1$, c'est à dire que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. On peut alors établie le résultat suivant

Théorème 1. *B_t^ε converge vers B_t dans $L^2(\Omega)$ lors que ε tend vers 0. Cette convergence est uniforme par rapport à $t \in [0,T]$.*

De la preuve du ce théorème, on obtient aussi l'estimation suivante:

$$\sup_{0\le t\le T} E|B_t^\varepsilon - B_t|^2 \le K(\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\alpha}, \ \alpha = H - \frac{1}{2}, 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Démonstration.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la function continument dérivable $u \to u^\alpha$, on a:

$$\begin{aligned} |(t-s+\varepsilon)^\alpha - (t-s)^\alpha| \le & \quad \alpha\varepsilon \sup_{0\le\theta\le 1} |(t-s+\theta\varepsilon)^{\alpha-1}| \\ = & \quad \alpha\varepsilon(t-s)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha = H - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'après l'isométrie de l'intégration d'Itô, on voit que

$$\begin{aligned} E|B_t^\varepsilon - B_t|^2 = & \quad E\Big|\int_0^t \big[(t-s+\varepsilon)^\alpha - (t-s)^\alpha\big] dW_s\Big|^2 \\ = & \quad \int_0^t \big|(t-s+\varepsilon)^\alpha - (t-s)^\alpha\big|^2 ds \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'inégalité (3.3) appliquée au membre droite de (3.4) nous donne:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left|(t-s+\varepsilon)^\alpha - (t-s)^\alpha\right|^2 ds &\le \alpha^2\varepsilon^2 \int_0^t |t-s|^{2\alpha-2} ds = \\ = \alpha^2\varepsilon^2 \int_0^{t-\varepsilon} |t-s|^{2\alpha-2} ds &+ \alpha^2\varepsilon^2 \int_{t-\varepsilon}^t |t-s|^{2\alpha-2} ds \\ &\le \alpha^2\varepsilon^2 \frac{\varepsilon^{2\alpha-1}}{1-2\alpha} + \alpha^2\varepsilon^2 \frac{\varepsilon^{2\alpha-1}}{1-2\alpha} = C(\alpha)\varepsilon^{2\alpha+1}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $C(\alpha)$ est une constante ne dépendant que de α : $C(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{1-2\alpha}$.

Par conséquent,

$$\sup_{0\le t\le T} \|B_t^\varepsilon - B_t\| \;\le\; K(\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\alpha} \to 0, \tag{3.6}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, où $0 < \alpha < \frac{1}{2}, K(\alpha) = \sqrt{C(\alpha)}$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$.

Donc B_t^ε converge dans $L^2(\Omega)$ vers B_t et la convergence est uniforme par rapport à $t \in [0, T]$. □

Remplacer B_t par le semimartingale B_t^ε permet alors un calcul stochastique usuel sans faire appel à des techniques difficiles comme le calcul de Malliavin.

4. **Modèle (1.8) modifié**

En se basant sur le Théorème 1 ci-dessus, nous proposons d'étudier ici un modèle modifié qui nous permettera d'utiliser le calcul d'Itô et facilitera les applications pratiques en prenant en compte de conséquences à long terme de chaque prix d'actif.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on associe à (1.8) le modèle asymptotique suivant:

$$dS_t^\varepsilon = \mu S_t^\varepsilon dt + \nu S_t^\varepsilon dB_t^\varepsilon, \quad S_0 = x, \tag{4.1}$$

où B_t^ε est défini comme dans le paragraphe 3 et x est une variable aléatoire positive donnée. Parce que

$$dB_t^\varepsilon = \Big(\int_0^t \alpha(t-s+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_s\Big) dt + \varepsilon^\alpha dW_t \tag{4.2}$$

on a

$$dS_t^\varepsilon = S_t^\varepsilon\Big[\mu + \nu\alpha \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_s\Big] dt + \varepsilon^\alpha \nu S_t^\varepsilon dW_t. \tag{4.3}$$

En désignant le crochet dans (4.3) par H_t^ε qui est un processus à trajectoires absolument continues, on peut reécrire (4.3) par

$$dS_t^\varepsilon = S_t^\varepsilon H_t^\varepsilon dt + \varepsilon^\alpha \nu S_t^\varepsilon dW_t. \tag{4.4}$$

(4.4) est une équation différentielle stochastique qui peut être résolue par le calcul d'Itô.

$$H_t^\varepsilon = \mu + \nu\alpha \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_s. \tag{4.5}$$

Théorème 2. *Pour le modèle modifié*

$$dS_t = S_t(\mu dt + \nu dB_t^\varepsilon),$$

avec la condition initiale $S_0 = x$, *où* x *est une variable aléatoire donnée telle que* $\|x\|^2 = E\,[x]^2 < \infty$, $B_t^\varepsilon = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^\alpha dW_s,\ \alpha > 0$, *nous avons la solution suivante:*

$$S_t^\varepsilon = x \exp\big(\mu t + \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha} t + \nu B_t^\varepsilon\big). \tag{4.6}$$

Démonstration.

L'équation (4.4) peut s'écrire

$$\frac{dS_t^\varepsilon}{S_t^\varepsilon} = H_t^\varepsilon dt + \varepsilon^\alpha \nu dW_t. \tag{4.7}$$

Appliquons la formule d'Itô à fonction $f(u) = \log u$ avec $u = S_t^\varepsilon > 0$:

$$\log S_t^\varepsilon = \log S_0^\varepsilon + \int_0^t \frac{dS_t^\varepsilon}{S_t^\varepsilon} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{(S_s^\varepsilon)^2}(\varepsilon^\alpha \nu S_s^\varepsilon)^2 ds.$$

D'où

$$\int_0^t \frac{dS_t^\varepsilon}{S_t^\varepsilon} = \log \frac{S_t^\varepsilon}{S_0^\varepsilon} - \frac{1}{2}(\varepsilon^\alpha\nu)^2 t. \tag{4.8}$$

On déduit de (4.7) et (4.8) que

$$S_t^\varepsilon = S_0^\varepsilon \exp\Big(\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha} t + \nu\varepsilon^a + \int_0^t H_s^\varepsilon ds\Big). \tag{4.9}$$

D'autre part on a

$$\int_0^t H_s^\varepsilon ds = \mu t + \nu\alpha \int_0^t \int_0^s (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds.$$

Comme on a déjà calculé avant l'énoncé du Thérème 1:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds = & \int_0^t \Big[\int_u^s (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} ds\Big] dW_u \\
= & \frac{1}{\alpha}\Big[\int_0^t (s-u+\varepsilon)^\alpha dW_u - \varepsilon^\alpha W_t\Big] \\
= & \frac{1}{\alpha}\big(\varepsilon^\alpha W_t - B_t^\varepsilon\big).
\end{aligned}$$

soit

$$\int_0^t H_s^\varepsilon ds = \mu t - \nu\varepsilon^\alpha dW_t + \nu B_t^\varepsilon. \tag{4.10}$$

On suppose que $S_0^\varepsilon = x$ est le cours observé à la date $t = 0$ et est une variable aléatoire indépendante de B_t (c'est -à - dire indépendante de W_t). En remplaçant (4.10) dans (4.9) on obtient enfin:

$$S_t^\varepsilon = x \exp\Big(\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha} t + \mu t + \nu B_t^\varepsilon\Big), \tag{4.11}$$

ce qu'il faudrait démontrer. □

5. Convergence

On constate que dans l' expression (4.11), lorsque $\varepsilon \to 0$ le terme $\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t$ tend vers 0 tandis que $B_t^\varepsilon \to B_t$ dans $L^2(\Omega)$ uniformement par rapport à $t \in [0,T]$. Alors on considère un processus S_t^* défini par:

$$S_t^* = S_0 \exp(\mu t + \nu B_t). \tag{5.1}$$

Et on a un résultat de convergence comme suivant:

Théorème 3. *Le processus S_t^* défini par le formule (5.1) est la limite dans $L^2(\Omega)$ de S_t^ε lorsque ε tend vers 0. Cette convergence est uniforme par rapport à $t \in [0,T]$.*

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} S_t - S_t^* = &\quad x\exp\big(\mu t - \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t + \nu B_t\big) - x\exp\big(\mu t + \nu B_t\big) \\ = &\quad x\exp\big(\mu t + \nu B_t\big)\Big[\exp\big(-\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t + \nu(B_t^\varepsilon - B_t)\big) - 1\Big] \end{aligned} \tag{5.2}$$

En désignant par $\|\cdot\|$ le norme dans $L^2(\Omega)$ on voit que

$$\|x\| = Ex^2 < 0 \text{ par hypothèse,} \tag{5.3}$$

$$\|\exp(\mu t + \nu B_t)\| \le e^{\mu t}\exp(\nu\|B_t\|) \le e^{\mu T}\exp\Big(\nu\frac{T^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{1+2\alpha}}\Big), \tag{5.4}$$

où $\|B_t\|$ est calculé d'après l'isométrie d'Itô:

$$\|B_t\|^2 = E\Big[\int_0^t (t-s)^\alpha dW_s\Big]^2 = E\int_0^t (t-s)^{2\alpha}ds = \frac{t^{1+2\alpha}}{1+2\alpha}.$$

D'autre part, il résulte de la relation $e^A - 1 = A + o(A)$ que

$$\|\exp\Big[-\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t + \nu(B_t^\varepsilon - B_t)\Big] - 1\| \le \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t + \nu\|B_t^\varepsilon - B_t\| + o\big(\|B_t^\varepsilon - B_t\|\big), \tag{5.5}$$

On a déjà une estimation de $\|B_t^\varepsilon - B_t\|$ par la formule (3.6) du Théorème 1:

$$\|B_t^\varepsilon - B_t\| \le K(\alpha)\varepsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}, \tag{5.6}$$

où $K(\alpha)$ est une constante ne dépendant que de α. Par conséquent

$$\|\exp\Big[-\frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{2\alpha}t + \nu(B_t^\varepsilon - B_t)\Big] - 1\| \le \nu^2\varepsilon^{2\alpha}T + 2K(\alpha)\varepsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Il résulte enfin de (5.2), (5.4) et (5.7) que

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le T}\|S_t^\varepsilon - S_t\| \le &\Big[\exp\big(\mu T + \frac{\nu T^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{1+2\alpha}}\big)\Big]\Big[\nu^2 T\varepsilon^{2\alpha} + 2K(\alpha)\varepsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}\Big] \\ &\to 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

d'où la conclusion du Théorème 3. $\square$

6. Solution du modèle fractionnaire

Nous revenons au modèle fractionnaire proposé au début:

$$\begin{cases} dS_t &= S_t(\mu dt + \nu dB_t) \\ S_0 &= x \text{ donné}, \quad B_t = \int_0^t (t-s)^\alpha dW_s, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Définition. *On appelle une solution du modèle fractionaire (1.8) la L^2-limite de la solution du modèle modifié lorsque $\varepsilon \to 0$:*

$$S_t \equiv S_t^* = L^2 - \lim_{\varepsilon \to 0} S_t^\varepsilon.$$

Par cette définition et par Thérème 3 on a maintenant la solution de (1.8): $S_t = x \exp(\mu t + \nu B_t)$.

Existence et Unicité de la solution

L'existence de la solution S_t est assurée par Théorème 3. Par ailleurs, le modèle modifié est donné sous la forme d'une équation différentielle stochastique linéaire gouvernée par un semimartingale avec des coefficients constants et avec la condition $ES_0^2 < \infty$. Alors il existe uniquement une telle solution S_t. L'unicité est au sens de l'espace $L^2(\Omega)$, car si $S_t^{*(1)}$ et $S_t^{*(2)}$ sont deux solutions de S_t^ε dans $L^2(\Omega)$ alors on a

$$\|S_t^{*(1)} - S_t^{*(2)}\| \le \|S_t^{*(1)} - S_t^\varepsilon\| + \|S_t^\varepsilon - S_t^{*(2)}\| \to 0,$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

7. Sur l'opportunité d'arbitrage

Il est bien connu en mathématiques financières que l'absence d'arbitrage est essentiellement équivalent à l'existence d'une mesure de martingale. Alors une question naturelle se pose: Est-ce-que le principe d'absence d'arbitrage est violé dans notre modèle où le processus gouvernant B_t n'est plus un semimartingale?

La réponse, est que la solution S_t du modèle fractionnaire proposé peut être approximée avec une exactitude arbitraire par une solution S_t^ε du modèle modifié gouverné par un semimartingale où il n'existe aucune opportunité d'arbitrage. C'est là un des avantages de notre approche à calcul stochasticque fractionnaire appliqué à la finance par rapport aux autres approches.

Bibliographie

[1] Alòs E., Mazet O., Nualart D., (2000) *Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst paramenter less than $\frac{1}{2}$*, Stochastic processes and their applications, Vol. 86, issue 1, pp. 121-139.
[2] Duncan T.E., Hu Y., Duncan B., (2000) *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion,* SIAM J.Control Optim., Vol 38, No 2, pp. 582 -
[3] Gourieroux C., Monfort A., (1995) *Séries temporelles et modèles dynamiques*, 2$^{\text{è}}$ édit., Economica, Paris.
[4] Lamberton D., Lapeyre, B. (1997) *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ed. Ellipses, Paris.
[5] Rogers L.C.G. (1997) *Arbitrage With Fractional Brownian Motion,* Mathematical Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 95-105.
[6] Shiryaev A.N. (1999) *On arbitrage and replication for fractal models,* Preprint, Moscow University and Steklov Institute.

Institut de Mathématicques, CNRS du Vietnam, Hanoi
Gremaq, Université Toulouse 1