Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)** Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ un morfism de grupuri între $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{Q}, +)$.
   a) Să se arate că
   $$n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   b) Să se arate că dacă $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z}$ atunci
   $$f(1) = 0.$$
   c) Determinaţi $f(1)$ pentru care f este un morfism de inele între $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
2. **(6 puncte)**
   a) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ atunci
   $$a + b\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$
   b) Să se arate că $V = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este un subspaţiu al $\mathbb{Q}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}$ (dat de operaţiile uzuale de adunare a numerelor reale şi înmulţire în $\mathbb{R}$ a unui număr raţional cu un număr real).
   c) Să se arate că vectorii 1 şi $1 + \sqrt{5}$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial V.
   d) Găsiţi o bază şi dimensiunea $\mathbb{Q}$-spaţiului vectorial V.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$ și
   $$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   a) Să se demonstreze că $e^x > 1 + x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
   c) Folosind eventual lema lui Stolz-Cesàro, să se calculeze limita: $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.
2. **(2 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real α natura seriei de numere reale:
   $$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}}{n^\alpha}.$$
3. **(2 puncte)** Scrieţi formula lui Maclaurin cu rest de tip Lagrange, de rang $n \geq 3$, ataşată funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde
   $$f(x) = (3x^2 - 6x)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   În determinarea derivatei de ordinul n a funcţiei f se poate folosi formula lui Leibniz, privind derivata de ordinul n a produsului de funcţii.
4. **(2 puncte)** Calculaţi integrala:
   $$\int \frac{x}{x^2 - 1}\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\, dx,\ \text{unde } x \in (1, \infty).$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(2 puncte)** Dacă $A(-4,3)$ este piciorul perpendicularei din originea $O(0,0)$ pe dreapta d, atunci să se scrie ecuația dreptei d.
2. **(2 puncte)** Un cerc de rază 5 are centrul pe dreapta $d: x+2y-3=0$. Să se determine ecuația cercului, știind că el trece prin punctul $A(2,3)$.
3. **(2 puncte)** Să se determine ecuaţia planului care conţine dreapta d_1 de ecuaţii parametrice

$$d_1 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t+3 \\ z = -t-2 \end{cases}$$

şi care este paralel cu dreapta d_2

$$d_2 : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

4. **(3 puncte)** Să se determine coordonatele punctelor de pe dreapta $d_1 : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ situate la distanţa $\sqrt{6}$ faţă de dreapta $d_2 : x = y = z$.

NOTĂ:

Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) Se foloseşte faptul că f este morfism de grupuri astfel:
$n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ termeni}} = f\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ termeni}} = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(1)$ 1p

b) Din $f\left(\frac{1}{n}\right), f(1) \in \mathbb{Z}$ şi $n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că numărul întreg $f(1)$ se divide cu toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare $f(1) = 0$ 1p

c) Notăm $a = f(1)$ şi avem $a = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = a^2$.
Ecuaţia $a^2 = a$ (în $\mathbb{Q}$) are soluţiile $a = 0$ şi $a = 1$, cazuri în care f este morfismul nul, respectiv (auto)morfismul $1_{\mathbb{Q}}$ 1p

2. a) Evident, $a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{5} = 0$ 0.5p
Reciproc, $a, b \in \mathbb{Q},\ a + b\sqrt{5} = 0 \Rightarrow a = b = 0$ 1p
Într-adevăr, cum $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, dacă am avea $b \neq 0$ atunci $\sqrt{5} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, imposibil. Prin urmare, $b = 0$ şi, implicit, $a = 0$.

b) Se aplică teorema de caracterizare a subspaţiului 2.5p
$0 = 0 + 0\sqrt{5} \in V$ 0.5p
Pentru orice $a + b\sqrt{5}, a' + b'\sqrt{5} \in V$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{Q})$ avem
$(a + b\sqrt{5}) + (a' + b'\sqrt{5}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{5} \in V$ 1p
Pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{5} \in V$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ avem
$\alpha(a + b\sqrt{5}) = (\alpha a) + (\alpha b)\sqrt{5} \in V$ 1p

c) Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, folosind a) avem
$\alpha \cdot 1 + \beta(1 + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta) + \beta\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ 1p

d) $V = \{a \cdot 1 + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \langle 1, \sqrt{5} \rangle$ este subspaţiul lui ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ generat de 1 şi $\sqrt{5}$, iar din a) rezultă că 1 şi $\sqrt{5}$ sunt liniar independenţi. Prin urmare, $\{1, \sqrt{5}\}$ este o bază în ${}_{\mathbb{Q}}V$ şi $\dim_{\mathbb{Q}} V = 2$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. *a*) Se defineşte funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x - 1 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece ea este derivabilă iar derivata acesteia este negativă pe $(-\infty, 0)$ şi pozitivă pe $(0, \infty)$, anulându-se doar în 0, funcţia f are punctul $x = 0$ punct de minim global, astfel $f(x) > f(0) = 0$, deci

$$e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0.$$

.... (0,5p)

b)

- Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că $x_n > 0$.
  Dacă $x_n > 0$, atunci $e^{2x_n} > e^{x_n} > 1 + x_n$, deci $x_{n+1} > 0$ pentru orice $n \geq 0$.............. (0,5p)
- Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că şirul (x_n) este strict descrescător.
  Avem $e^{2x_n} > 1 + 2x_n$, de unde

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - x_n} - x_n = \frac{x_n(1 + 2x_n - e^{2x_n})}{e^{2x_n} - 1 - x_n} < 0,$$

  deci $x_{n+1} < x_n$ pentru orice $n \geq 0$. .... (0,5p)
- Deoarece şirul (x_n) este strict descrescător şi mărginit inferior, din teorema lui Weierstrass, rezultă că șirul (x_n) este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: l \in \mathbb{R}$.
  Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 0$. .... (0,5p)

c) Deoarece $\frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n} > 0$ pentru orice $n \geq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{0_+} = \infty$, putem aplica lema lui Stolz-Cesàro:
.... (0,5p)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n^3}{e^{2x_n}-1-x_n}}{\frac{x_n(e^{2x_n}-1-2x_n)}{e^{2x_n}-1-x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - 2x_n} = \\
&= \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2}{e^{2x} - 1 - 2x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{2e^{2x} - 2} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

.... (0,5p)

2. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

. . . . (0.25p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a asfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. . . . . (0.25p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

. . . . (0.25p)

Deoarece

$$\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n} = 2\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{1}{n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}} = 1,$$

. . . . (0.25p)

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}} \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^{a+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha+4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a + 1 = \alpha + 4 \Longleftrightarrow a = \alpha + 3.$$

. . . . (0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 4$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+3}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \ \text{dacă } \alpha > -2 \\ \text{divergentă} & : \ \text{dacă } \alpha \le -2 \end{cases}.$$

. . . . (0.5p)

3. • Determinarea derivatei de ordinul n, $n \ge 2$ a funcţiei f (orice soluţie corectă, alternativă baremului va fi punctată corespunzător cu (1p))

Observăm că funcţia f este un produs dintre o funcţie polinomială $g(x) = 3x^2 - 6x$ şi $h(x) = e^x$, astfel ea este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Derivata de ordinul n a funcţiei f se va calcula cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n pentru produsul a două funcţii. Astfel, dacă $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, atunci

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

. . . . (0.25 p)

$$g'(x) = 6x - 6, \quad g''(x) = 6 \quad \text{şi} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \ge 3,$$

. . . . (0.25 p)

iar

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

. . . . (0.25 p)

De aceea,

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = C_n^n g(x)h^{(n)}(x) + C_n^{n-1}g'(x)h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2}g''(x)h^{(n-2)}(x).$$

Astfel

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = e^x \left[3x^2 - 6x + n(6x-6) + \frac{n(n-1)}{2}6\right].$$

. . . . (0.25p)

- Formula lui Maclaurin implică utilizarea polinomului lui Taylor de rang n şi a restului de tip Lagrange, toate dezvoltate în jurul punctului $a = 0$. Astfel, deoarece funcţia f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, c \text{ între } x \text{ şi } 0 \text{ a. î.} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.5p)

Avem

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -6 \quad \text{şi} \quad \forall n \geq 2 \quad f^{(n)}(0) = 3n(n-3),$$

. . . . (0.25p)

astfel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, c \text{ între } x \text{ şi } 0 \text{ a. î.}$$

$$f(x) = -6x + \sum_{k=2}^{n} \frac{3(k-3)}{(k-1)!}x^k + \frac{e^c\left[3c^2 - 6c + (n+1)(6c-6) + 3(n+1)n\right]}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.25p)

4. Se va porni cu substituţia

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t,$$

. . . . (0.5p)

atunci

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Longrightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

astfel

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt.$$

. . . . (0.5p)

Deoarece

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1+t^2-1+t^2}{1-t^2}\right)\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1-t^2}\right) = \frac{4t^2}{(1-t^2)^2},$$

integrala devine

$$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{4t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\, dt.$$

. . . . (0.25p)

Deci

$$I = \int \frac{-(1-t^2)+2}{1-t^2}\, dt = \int -\, dt + \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = -t + \frac{2}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= -t - \ln(1-t) + \ln(1+t) + \mathcal{C} = -t + \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mathcal{C}.$$

. . . . (0.5p)

Ţinând cont de substituţia făcută

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}{2} = x + \sqrt{x^2-1},$$

deci

$$I = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \mathcal{C}.$$

. . . . (0.25p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. $AO \perp d \Leftrightarrow m_{OA} \cdot m_d = -1$; $\quad m_{OA} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_d = \frac{4}{3}$. 1p
   Ecuația dreptei $d : y - 3 = \frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = 0$. 1p

2. Ecuația cercului este de formă: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 25$. Cercul trece prin $A(2,3)$, deci: $(2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = 25$. Centrul cercului $M_0(x_0, y_0) \in d \Leftrightarrow x_0 = -2y_0 + 3$ 1p
   Rezolvăm sistemul $\begin{cases} (2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = 25 \\ x_0 = -2y_0 + 3\alpha + 3 \end{cases}$ și obţinem ecuaţia $y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0$.
   Soluţiile sunt $y_0 = -1, x_0 = 5$ și $y_0 = 3, x_0 = -3$. Deci avem două cercuri: $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$. 1p

3. Un vector director al dreptei d_1 este $\vec{d_1}(3,2,-1)$. Un punct al dreptei d_1 este $M(1,3,-2)$. Un vector director al dreptei d_2 este $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2)$ unde $p_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $q_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ şi $r_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. 1p
   Ecuaţia planului este $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 13x - 14y + 11z + 51 = 0$. 1p

4. $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ Notăm $y = \alpha \Rightarrow x = \alpha + 3,\ z = -2\alpha$.
   Punctele M de pe dreapta d_1 au coordonatele $M(\alpha+3, \alpha, -2\alpha)$ 1p
   Un punct de pe dreapta d_2 este $O(0,0,0)$. Un vector director al dreptei d_2 este $\vec{d_2}(1,1,1)$. Distanţa $d(M, d_2) = \frac{||\overrightarrow{OM} \times \vec{d_2}||}{||\vec{d_2}||}$. $\overrightarrow{OM}(\alpha+3, \alpha, -2\alpha)$
   $\overrightarrow{OM} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha+3 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha\vec{i} - 3(\alpha+1)\vec{j} + 3\vec{k}$ .... $1p$
   $$d(M, d_2) = \frac{3\sqrt{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + 1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1$$
   Pentru $\alpha_1 = 0$ obţinem $M_1(3,0,0)$.
   Pentru $\alpha_2 = -1$ obţinem $M_2(2,-1,2)$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.