Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Matematika Szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(3 pont)** Legyen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ egy csoportmorfizmus $(\mathbb{Q}, +)$-ból $(\mathbb{Q}, +)$-ba.

   a) Igazoljuk, hogy
   $$n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   b) Igazoljuk, hogy ha $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z}$, akkor
   $$f(1) = 0.$$

   c) Határozzuk meg $f(1)$-et úgy, hogy f gyűrűmorfizmus legyen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$-ból $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$-ba.

2. **(6 pont)**

   a) Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor
   $$a + b\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

   b) Igazoljuk, hogy $V = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ résztér $\mathbb{R}$-ben, mint $\mathbb{Q}$-feletti vektortérben (ahol a műveletek a valós számok összeadása és racionális számok szorzása valós számokkal).

   c) Igazoljuk, hogy az 1 és $1 + \sqrt{5}$ vektorok lineárisan függetlenek a $\mathbb{Q}$-feletti V vektortérben.

   d) Határozzuk meg a $\mathbb{Q}$-feletti V vektortér egy bázisát és dimenzióját.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tekintsük az $(x_n)_{n\geq 0}$ számsorozatot, melyre $x_0 = 1$ és
   $$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Igazoljuk, hogy $e^x > 1 + x$, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén.

   b) Igazoljuk, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

   c) Felhasználva esetleg a Stolz-Cesàro lemmát, számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ határértéket.

2. **(2 pont)** Tanulmányozzuk az α valós paraméter függvényében a következő valós számsor természetét:
   $$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}}{n^\alpha}.$$

3. **(2 pont)** Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$f(x) = (3x^2 - 6x)\, e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
   függvény. Írjuk fel ezen függvény n-ed rendű ($n \geq 3$) Maclaurin-féle képletét a Lagrange-féle maradéktaggal (az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámításához fel lehet használni két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályt).

4. **(2 pont)** Számítsuk ki az
   $$\int \frac{x}{x^2 - 1}\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\, dx$$
   integrált, ahol $x \in (1, \infty)$.

III. TÉTEL. Geometria

1. **(2 pont)** Az $O(0,0)$ origóból egy d egyenesre húzott merőleges talppontja az $A(-4,3)$ pont. Írjuk fel a d egyenes egyenletét!

2. **(2 pont)** Egy 5 sugarú kör áthalad az $A(2,3)$ ponton és középpontja a $d : x + 2y - 3 = 0$ egyenesen van. Határozzuk meg a kör egyenletét!

3. **(2 pont)** Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a paraméteres egyenletekkel megadott

$$d_1 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

egyenest és párhuzamos a d_2 egyenessel:

$$d_2 : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

4. **(3 pont)** Határozzuk meg a $d_1 : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ egyenes azon pontjainak koordinátáit, amelyek $\sqrt{6}$ távolságra vannak a $d_2 : x = y = z$ egyenestől!

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden feladathoz teljes megoldás megadása szükséges.
Minden tétel esetén jár **1 pont** hivatalból. A legkisebb átmenő jegy 5,00.
A munkaidő 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Matematika Szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) Mivel f csoportmorfizmus:
$n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ tag}} = f\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ tag}} = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(1)$ 1p

   b) Mivel $f\left(\frac{1}{n}\right), f(1) \in \mathbb{Z}$ és $n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, következik, hogy az $f(1)$ egész szám osztható minden $n \in \mathbb{N}^*$ számmal, tehát $f(1) = 0$ 1p

   c) Legyen $a = f(1)$. Ekkor $a = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = a^2$.
Az $a^2 = a$ egyenlet $\mathbb{Q}$ testbeli megoldásai $a = 0$ és $a = 1$, mely esetekben f nullmorfizmus, illetve az $1_{\mathbb{Q}}$ (auto)morfizmus 1p

2. a) Nyilván $a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{5} = 0$ 0.5p
Fordítva, $a, b \in \mathbb{Q},\ a + b\sqrt{5} = 0 \Rightarrow a = b = 0$
Valóban, ha $b \neq 0$, akkor $\sqrt{5} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ami ellentmond annak, hogy $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Tehát $b = 0$, ahonnan $a = 0$ 1p

   b) Alkalmazzuk a részterek jellemzési tételét
$0 = 0 + 0\sqrt{5} \in V$ 0.5p
Ha $a + b\sqrt{5}, a' + b'\sqrt{5} \in V$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{Q})$, akkor
$(a + b\sqrt{5}) + (a' + b'\sqrt{5}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{5} \in V$ 1p
Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$ és $a + b\sqrt{5} \in V$ $(a, b \in \mathbb{Q})$, akkor
$\alpha(a + b\sqrt{5}) = (\alpha a) + (\alpha b)\sqrt{5} \in V$ 1p

   c) Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, az a) pont alapján
$\alpha \cdot 1 + \beta(1 + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta) + \beta\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ 1p

   d) $V = \{a \cdot 1 + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \langle 1, \sqrt{5} \rangle$, vagyis az 1 és $\sqrt{5}$ vektorok által generált résztér ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$-ban, és az a) pont alapján 1 és $\sqrt{5}$ lineárisan függetlenek. Tehát $\{1, \sqrt{5}\}$ bázis ${}_{\mathbb{Q}}V$-ben és $\dim_{\mathbb{Q}} V = 2$. 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. *a*) Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x$ függvényt. Ekkor f deriválható és $f'(x) = e^x - 1 < 0$, ha $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$, ha $x \in (0, \infty)$, illetve $f'(x) = 0$, ha $x = 0$. Következésképp $x = 0$ az f függvény globális minimum pontja, ezért $f(x) > f(0) = 0$, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén.
.... (0,5p)

b)

- Indukcióval igazolható, hogy $x_n > 0$, minden $n \geq 0$ esetén.
Ha $x_n > 0$, akkor $e^{2x_n} > e^{x_n} > 1 + x_n$, tehát $x_{n+1} > 0$, bármely $n \geq 0$ esetén.
.... (0,5p)
- Indukcióval igazolható, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan csökkenő.
Az $e^{2x_n} > 1 + 2x_n$ miatt
$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - x_n} - x_n = \frac{x_n(1 + 2x_n - e^{2x_n})}{e^{2x_n} - 1 - x_n} < 0,$$
ezért $x_{n+1} < x_n$, minden $n \geq 0$ esetén.
.... (0,5p)
- Mivel az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, ezért az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens, tehát létezik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x \in \mathbb{R}$. Áttérve határértékre a rekurrens összefüggésben azt kapjuk, hogy $x = 0$.
.... (0,5p)

c) Mivel $\frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n} > 0$, minden $n \geq 0$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$, ezért alkalmazható a Stolz-Cesàro lemma:
.... (0,5p)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n^3}{e^{2x_n}-1-x_n}}{\frac{x_n(e^{2x_n}-1-2x_n)}{e^{2x_n}-1-x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{e^{2x_n} - 1 - 2x_n} = \\
&= \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2}{e^{2x} - 1 - 2x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{2e^{2x} - 2} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$
.... (0,5p)

2. Jelölje x_n az adott sor általános tagját. Látható, hogy $\sum_{n\geq 1} x_n$ pozitív tagú sor, ezért felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó II. összehasonlítási kritériumot az adott sor konvergenciájának a tanulmányozására, kiindulva az általánosított harmonikus sorból:
$$\sum_{n\geq 1} y_n := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{konvergenes,} & \text{ha} \quad a > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha} \quad a \leq 1. \end{cases}$$

. . . . (0.25p)

Célunk meghatározni az a paraméter értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty),$$

mely esetben a $\sum_{n\geq 1} x_n$ és $\sum_{n\geq 1} y_n$ sorok azonos természetűek.

. . . . (0.25p)

Mivel

$$\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n} = 2\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = 2\sin\frac{1}{n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{n(n+1)},$$

ezért figyelembe véve, hogy ha az $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ sorozatra teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1,$$

. . . . (0.25p)

ahonnan következik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

miatt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 = \frac{\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}}.$$

. . . . (0.25p)

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}} \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^{a+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha+4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Ez a határérték csak akkor van a $(0,\infty)$ intervallumban, ha

$$a+1 = \alpha+4 \Longleftrightarrow a = \alpha+3.$$

. . . . (0.5p)

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 4$, tehát a II. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} y_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha+3}}$ sorok azonos természetűek. Következésképp

$$\sum_{n\geq 1} x_n \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha} \quad \alpha > -2 \\ \text{divergens,} & \text{ha} \quad \alpha \leq -2. \end{cases}$$

. . . . (0.5p)

3. • Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a meghatározása $n \geq 2$ esetén (bármely más helyes megoldás 1 pontig lesz pontozva a javítókulcs alternatívájaként).

Az f függvény a $g(x) = 3x^2 - 6x$ polinomfüggvény és a $h(x) = e^x$ exponenciális függvény szorzata, így végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámítására két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályát alkalmazzuk. Így, ha $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, akkor

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

. . . . (0.25 p)

$$g'(x) = 6x-6, \quad g''(x) = 6 \quad \text{és} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq 3,$$

. . . . (0.25 p)

míg

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

. . . . (0.25 p)

Ezért

$$f^{(n)}(x) = C_n^n g(x)h^{(n)}(x) + C_n^{n-1}g'(x)h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2}g''(x)h^{(n-2)}(x),$$

minden $n \geq 2$ esetén. Következésképp

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[3x^2 - 6x + n(6x-6) + \frac{n(n-1)}{2}6\right] = e^x \left[3x^2 - 6x + n(6x-6) + 3n(n-1)\right],$$

minden $n \geq 2$ esetén. . . . . (0.25p)

- A Maclaurin-féle képlethez az n-ed rendű Taylor polinomra és a Lagrange-féle maradéktagra van szükségünk az $a = 0$ pont környezetében. Mivel f végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, ezért

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists\, c \text{ az } x \text{ és } 0 \text{ között úgy, hogy } f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.5p)

Mivel

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -6 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(0) = 3n(n-3), \quad \forall n \geq 2,$$

. . . . (0.25p)

ezért

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists\, c \text{ az } x \text{ és } 0 \text{ között úgy, hogy}$$

$$f(x) = -6x + \sum_{k=2}^{n} \frac{3(k-3)}{(k-1)!}x^k + \frac{e^c\left[3c^2 - 6c + (n+1)(6c-6) + 3n(n+1)\right]}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.25p)

4. Tekintsük a

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$$

helyettesítést. . . . . (0.5p)

Ekkor

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Longrightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

így

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt.$$

. . . . (0.5p)

Mivel

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1+t^2-1+t^2}{1-t^2}\right)\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1-t^2}\right) = \frac{4t^2}{(1-t^2)^2},$$

ezért az integrál alakja:

$$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{4t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,dt.$$

. . . . (0.25p)

Tehát

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-(1-t^2)+2}{1-t^2}\,dt = \int -1\,dt + \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = -t + \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \\ &= -t - \ln(1-t) + \ln(1+t) + \mathcal{C} = -t + \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

. . . . (0.5p)

Figyelembe véve a helyettesítésünket:

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}{2} = x + \sqrt{x^2-1},$$

ezért

$$I = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \mathcal{C}.$$

. . . . (0.25p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. $AO \perp d \Leftrightarrow m_{OA} \cdot m_d = -1$; $\quad m_{OA} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_d = \frac{4}{3}$. 1p
   A d egyenes egyenlete $y - 3 = \frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = 0$. 1p

2. A kör egyenletét $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 25$ alakban keressük. A kör áthalad az $A(2,3)$ ponton, tehát $(2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = 25$. A kör $M_0(x_0, y_0)$ középpontja rajta van a d egyenesen, ezért $x_0 = -2y_0 + 3$.
   .... 1p
   Megoldva az $\begin{cases} (2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = 25 \\ x_0 = -2y_0 + 3\alpha + 3 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk az $y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0$ egyenletet.
   A megoldások $y_0 = -1, x_0 = 5$ és $y_0 = 3, x_0 = -3$. Így két körünk van:
   $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$ és $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$. 1p

3. A d_1 egyenes egy irányvektora $\vec{d_1}(3, 2, -1)$. A d_1 egyenes egy pontja $M(1, 3, -2)$. A d_2 egyenes egy irányvektora $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2)$, ahol $p_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $q_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ és $r_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$.
   .... 1p
   A sík egyenlete $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 13x - 14y + 11z + 51 = 0$. 1p

4. $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2y + z = 0. \end{cases}$ Legyen $y = \alpha \Rightarrow x = \alpha + 3$, $z = -2\alpha$.
   A d_1 egyenesen levő M pontok koordinátái $M(\alpha+3, \alpha, -2\alpha)$. 1p
   A d_2 egyenes egy pontja az origó $O(0,0,0)$, egy irányvektora pedig $\vec{d_2}(1,1,1)$.
   $d(M, d_2) = \dfrac{||\overrightarrow{OM} \times \vec{d_2}||}{||\vec{d_2}||}$; $\quad \overrightarrow{OM}(\alpha+3, \alpha, -2\alpha)$
   $\overrightarrow{OM} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha+3 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha\vec{i} - 3(\alpha+1)\vec{j} + 3\vec{k}$ 1p
   $$d\left(M, d_2\right) = \frac{3\sqrt{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + 1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1$$
   Az $\alpha_1 = 0$ esetén kapjuk az $M_1(3,0,0)$, $\alpha_2 = -1$ esetén pedig az $M_2(2,-1,2)$ pontot. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.