Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(4 puncte)** Este $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un subgrup al grupului $(M_2(\mathbb{R}), +)$? Dar subinel al inelului $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$? Este $\mathcal{A}$ subspaţiu în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$? Justificare.

2. **(5 puncte)** În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii:

$$v_1 = (3, 0, 3, 6),\ v_2 = (0, 2, 2, 4),\ v_3 = (0, 2, 3, 5),\ v_4 = (3, 0, 2, 5).$$

a) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 şi v_4 sunt liniar dependenţi în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ şi să se găsească o relaţie de dependenţă liniară între ei.

b) Determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţiului generat $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ al lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real α natura seriei de numere reale:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}{n^\alpha}.$$

2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de rang par $2n$ ataşat funcţiei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ în jurul punctului $a = 0$, unde

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

3. **(3 puncte)** Calculaţi integrala:

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1 + x)^2}\, dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. (**5 puncte**) Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel. Ipotenuza BC este dată de ecuaţia $3x - y - 3 = 0$ şi coordonatele vârfului A sunt $(4, -1)$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei suport pentru înălţimea ce trece prin A şi lungimea acestei înălţimi.

b) Să se afle coordonatele punctului O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

c) Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.

d) Să se scrie ecuaţiile dreptelor suport ale catetelor.

2. **(4 puncte)** Se consideră cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$.

a) Să se determine centrul şi raza cercului.

b) Să se determine ecuația dreptei suport a diametrului care este paralel cu dreapta $d : 3x - y + 7 = 0$.

Subiectul IV. Informatică

Notă pentru subiectul de Informatică:
Pentru rezolvarea problemei 1 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit.
Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 puncte)** Scrieți un program care:
   a) Implementează o clasă ***Article*** care are un constructor cu parametri şi următoarele atribute:
   - ***title***– atribut protejat de tip string, reprezintă titlul articolului;
   - ***pages*** – atribut protejat de tip întreg, reprezintă numărul de pagini al articolului.

   b) Implementează două clase derivate din clasa ***Article***:
   - clasa ***JournalArticle*** are toate atributele clasei ***Article*** şi adaugă atributul privat ***name*** (de tip string, reprezintă numele revistei);
   - clasa ***ConferenceArticle*** are toate atributele clasei ***Article*** şi adaugă atributele private ***name*** (de tip string, reprezintă numele conferinţei) şi ***location*** (de tip string, reprezintă locaţia conferinţei).

   Toate clasele vor implementa metode de tip **get/set** pentru toate atributele şi o metodă ***toString*** care returnează un string format din toate atributele separate prin virgulă. Metoda ***toString*** din clasele derivate trebuie să folosească metoda ***toString*** din clasa ***Article***.

2. **(2 puncte)** Scrieţi codul funcţiei ***counting*** dată mai jos. Această funcţie trebuie să returneze numărul de elemente dintr-un vector de obiecte de tip ***Article*** care au numărul de pagini cuprins între două limite date, *lmin* şi *lmax* (unde *1 <= lmin <= lmax*).

```
int counting(const vector<Article*>& v, int lmin, int lmax) {
   ....
}
```

3. **(2 puncte)** Scrieţi liniile de cod lipsă din următoarea funcţie care sortează un vector de obiecte ***Article*** alfabetic după titlu.

```
void sorting(vector<Article*>& v) {
   for(int i = 0; i < v.size()-1; i++) {
      int ind = i;
      for(int j = i + 1; j < v.size(); j++) {
        ...........
      }
      if (i < ind) {
         Article* aux = v[i];
         v[i] = v[ind];
         v[ind] = aux;
      }
   }
}
```

4. **(2 puncte)** Precizaţi ce se afişează în urma executării secvenţei de instrucţiuni de mai jos, ştiind că funcţia *push_back()* inserează un element la finalul vectorului iar metodele de tip get din clasa ***Article*** sunt *getTitle* (pentru atributul ***title***) şi *getPages* (pentru atributul ***pages***).

```
....
int main()
{
   vector<Article*> v;
   v.push_back(new JournalArticle("a1", 20, "Studia"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a2", 8, "KEPT", "Cluj-Napoca"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a3", 10, "FORM", "Cluj-Napoca"));
   Article* r = v[0];
   for(int i=1; i<v.size(); i++)
      if (v[i]->getPages() < r->getPages())
         r = v[i];
   cout << r->getTitle();
   return 0;
}
```

5. **(1 punct)** Explicaţi metoda de programare *divide et impera*. Numiţi un algoritm care se bazează pe această metodă.

NOTĂ.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. $\mathcal{A} \leq (M_2(\mathbb{R}), +)$ deoarece:

Pentru $a = b = 0$ se obţine $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 0.5p

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & b' \end{pmatrix}$, atunci $A - A' = \begin{pmatrix} a-a' & 0 \\ b-b' & b-b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 1p

Fiind subgrup în grupul aditiv $(M_2(\mathbb{R}), +)$, pentru a fi subinel al lui $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$,
$\mathcal{A}$ trebuie să fie stabilă şi în raport cu înmulţirea matricelor 0.5p

$AA' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + bb' & bb' \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$ pentru $ba' \neq 0$ (de ex. $a' = b = 1$), deci $\mathcal{A}$ nu e subinel în $M_2(\mathbb{R})$ 1p

Fiind subgrup în grupul aditiv $(M_2(\mathbb{R}), +)$, pentru a fi subpaţiu în ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$,
$\mathcal{A}$ trebuie să fie stabilă în raport cu înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ 0.5p

Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, deci $\mathcal{A}$ este subspaţiu în ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$ 0.5p

2. a) Vectorii $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ sunt liniar dependenţi în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ dacă şi numai dacă
$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0)$ 0.5p

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \ \Leftrightarrow \ (S) \begin{cases} 3\alpha_1 + \qquad\qquad + 3\alpha_4 = 0 \\ \qquad 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \qquad = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases}, \text{............ 0.5p}$$

prin urmare $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sistemul (S) este compatibil nedeterminat, adică rangul matricei sistemului (S) este strict mai mic decat 4 .... 1p

Rangul matricei lui (S) este rang $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$, iar un minor nenul de ordinul 3 poate fi obţinut din primele 3 coloane (de exemplu, $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ şi aceasta ne permite să considerăm α_4 necunoscută secundară).. 1p

Pentru a obţine o relaţie de dependenţă dăm o valoare nenulă necunoscutei secundare (la noi α_4) şi determinăm valorile corespunzătoare necunoscutelor principale (la noi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) 1p

De exemplu, pentru $\alpha_4 = -1$, din (S) deducem

$$\begin{cases} 3\alpha_1 \qquad\qquad = 3 \\ \qquad 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = (0,0,0,0).$$

b) $\dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ = rangul matricei formate cu vectorii v_1, v_2, v_3, v_4 (ca linii sau coloane) = rang $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$, iar cum un minor nenul de ordinul 3 poate fi obţinut din primele 3 coloane, care sunt chiar v_1, v_2, v_3, aceşti vectori sunt liniar independenţi în spaţiul $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ de dimensiune 3, prin urmare, formează o bază. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

.... (0.5p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a asfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. .... (0.5p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1.$$

.... (0.5p)

Deoarece

$$e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = e^0 = 1,$$

.... (0.5p)

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a = \alpha + 2.$$

.... (0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+2}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } \alpha > -1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } \alpha \leq -1 \end{cases}.$$

.... (0.5p)

2. • Se observă că funcţia f este indefinit derivabilă pe $(-1,1)$ ca o compunere de funcţii elementare, iar

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x).$$

. . . . (0.25p)

Deoarece

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=(x+1)^{-1}+(x-1)^{-1},\quad \forall x\in(-1,1),$$

. . . . (0.25p)

$$f''(x)=(-1)(x+1)^{-2}+(-1)(x-1)^{-2},\quad \forall x\in(-1,1),$$

$$f^{(3)}(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}+(-1)(-2)(x-1)^{-3},\quad \forall x\in(-1,1),$$

se demonstrează prin inducţie matematică că pentru oricare $n\geq 2$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{(n-1)}(n-1)!\Big[(x+1)^{-n}+(x-1)^{-n}\Big],\quad \forall x\in(-1,1).$$

. . . . (1p)

• Polinomul lui Taylor de rang $2n$ ataşat funcţiei f şi unui punct $a\in(-1,1)$ este funcţia polinomială $T_{2n,a}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$T_{2n,a}f(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\quad \forall x\in(-1,1),$$

astfel, pentru $a=0$

$$T_{2n,0}f(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\quad \forall x\in(-1,1).$$

. . . . (0,5p)

Avem

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0$$

. . . . (0.25p)

şi

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{(n-1)}(n-1)!\Big[1+(-1)^n\Big]=\begin{cases}-2(n-1)! & : \ n \text{ par};\\ 0 & : \ n \text{ impar},\end{cases}$$

. . . . (0.25p)

astfel

$$T_{2n,0}f(x)=0+0+\sum_{k=1}^{n}\frac{-2(2k-1)!}{(2k)!}x^{2k}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}x^{2k}=-\left(x^2+\frac{x^4}{2}+...+\frac{x^{2n}}{n}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

. . . . (0.5p)

3. Avem

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2}=\frac{(x+1)e^x-e^x}{(x+1)^2}=\frac{(e^x)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'.$$

. . . . (1p)

Atunci

$$\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx=\int_0^1\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'dx=\frac{e^x}{x+1}\Bigg|_0^1=$$

. . . . (1p)

$$=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2}.$$

. . . . (1p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Fie h_A dreapta suport a înălţimii cerute. $h_A \perp BC$, deci panta dreptei h_A este $-\frac{1}{3}$. Ecuaţia acesteia este $h_A : y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 4)$. 1p

   Lungimea acestei înălţimi este

$$d(A, BC) = \frac{|3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) - 3)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

   .... 1p

   b) Cum ABC este dreptunghic isoscel, centrul cercului circumscris se află la mijlocul ipotenuzei. Înălţimea h_A este şi mediană, deci O se află la intersecţia dreptei h_A cu BC. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ obţinem $O(1, 0)$ 1p

   c) B şi C sunt puncte situate pe dreapta BC la distanţă $\sqrt{10}$ faţă de punctul O. Obţinem aşadar sistemul

$$\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 10 \Rightarrow (x-1)^2 + (3x-3)^2 = 10 \Rightarrow x \in \{0, 2\} \end{cases}$$

   Vârfurile sunt, într-o ordine oarecare, $B(0, -3)$ şi $C(2, 3)$.

   .... 1p

   d) Ecuaţia dreptei AB este $x - 2y - 6 = 0$, iar ecuaţia dreptei AC este $2x + y - 7 = 0$.

   .... 1p

2. a) Ecuația cercului se poate scrie în forma $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$. 1p
   Centrul cercul este $M_0(4, -1)$, iar raza este $r = 3$. 1p

   b) Diametrul, fiind paralel cu dreapta dată, are ecuația $3x - y + c = 0, c \in \mathbb{R}$. 1p
   Centrul $M_0(4, -1)$ aparține diametrului, astfel $12+1+c = 0 \Rightarrow c = -13$. Deci ecuația diametrului este $3x - y - 13 = 0$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă septembrie 2024
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definitie clasa Article (constructor, metode, acces la date).. b) Definitie clase derivate JournalArticle si ConferenceArticle (mostenire, constructor, metode).........	**2p** 1 p 1 p
2. Filtrare vector... Calcul numar articole	**2p** 1p 1p
3. Definire conditie if .... Modificare index	**2p** 1p 1p
4. Indicarea corecta a titlului ce se afiseaza..	**2p** 2p
5. Explicarea teoretica .... Exemplificare..	**1p** 0.5p 0.5p

Notă:
(1p) Oficiu