Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Informatikai matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(4 pont)** Részcsoport-e $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ az $(M_2(\mathbb{R}), +)$ csoportban? Részgyűrű-e $\mathcal{A}$ az $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ gyűrűben? Résztér-e $\mathcal{A}$ az $M_2(\mathbb{R})$ valós vektortérben? Indokoljuk meg a válaszokat!

2. **(5 pont)** Az $\mathbb{R}^4$ valós vektortérben tekintjük az alábbi vektorokat:
$$v_1 = (3, 0, 3, 6),\ v_2 = (0, 2, 2, 4),\ v_3 = (0, 2, 3, 5),\ v_4 = (3, 0, 2, 5).$$
   a) Igazoljuk, hogy a v_1, v_2, v_3 és v_4 vektorok lineárisan függőek és írjunk le egy lineáris függőségi relációt ezen vektorok között.
   b) Határozzuk meg a $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ generált résztér egy bázisát és dimenzióját.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tanulmányozzuk az α valós paraméter függvényében a következő valós számsor természetét:
$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\alpha}}.$$

2. **(3 pont)** Adott az $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1)$$
függvény. Írjuk fel a függvény $x_0 = 0$ pont körüli $2n$-ed rendű Taylor-féle polinomját.

3. **(3 pont)** Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$$
integrált.

III. TÉTEL. Geometria

1. (**5 pont**) Legyen ABC egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. A BC átfogó tartóegyenesének egyenlete $3x - y - 3 = 0$ és az A csúcs koordinátái $(4, -1)$.
   a) Írjuk fel az A csúcson áthaladó magasság tartóegyenesének egyenletét és határozzuk meg ennek a magasságnak a hosszát!
   b) Határozzuk meg az ABC háromszög köré írt kör O középpontjának koordinátáit!
   c) Határozzuk meg a háromszög csúcsainak a koordinátáit!
   d) Írjuk fel a befogók tartóegyeneseinek az egyenleteit!

2. **(4 pont)** Tekintsük az $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ egyenlettel megadott kört.
   a) Határozzuk meg a kör középpontját és sugarát!
   b) Határozzuk meg a $d : 3x - y + 7 = 0$ egyenessel párhuzamos átmérő tartóegyenesének egyenletét!

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:
Az 1. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.
Meg kell adni a használt programozási nyelvet.
A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 pont)** Írjunk programot, amelyben:
   a) bevezetjük az ***Article*** osztályt, amely rendelkezik egy paraméteres konstruktorral és az alábbi attribútumokkal, illetve metódusokkal:
   - ***title*** – string típusú védelemmel rendelkező attribútum, amely a folyóirat címét határozza meg;
   - ***pages*** – egész típusú védelemmel rendelkező attribútum, amely a folyóirat oldalainak a számát határozza meg.

   b) az ***Article*** osztályból származtatott alábbi két osztályt adjuk meg:
   - a ***JournalArticle*** osztály, amely az ***Article*** osztály összes attribútumával, valamint a ***name*** (string típusú, a folyóirat nevét határozza meg) privát attribútummal rendelkezik;
   - a ***ConferenceArticle*** osztály, amely az ***Article*** osztály összes attribútumával, valamint a ***name*** (string típusú, a konferencia nevét határozza meg) és ***location*** (string típusú, a konferencia helyszínét határozza meg) privát attribútumokkal rendelkezik;

   Az összes osztály kell rendelkezzen **get/set** metódusokkal az összes attribútumra vonatkozóan, valamint egy ***toString*** metódussal, amely egy olyan karakterláncot térít vissza, amely az összes attribútumot tartalmazza, vesszővel elválasztva. A származtatott osztályok ***toString*** metódusai meg kell hívják az ***Article*** osztály ***toString*** metódusát.

2. **(2 pont)** Írjuk meg az alábbi ***counting*** függvényt. A függvény egy ***Article*** típusú objektumokból álló vektor azon elemeinek a számát téríti vissza, amelyeknek az oldalszáma két megadott határ, *lmin* és *lmax* között van (ahol *1 <= lmin <= lmax*).

```
int counting(const vector<Article*>& v, int lmin, int lmax) {
   ....
}
```

3. **(2 pont)** Írjuk meg az alábbi függvényből hiányzó kódrészletet tudva, hogy a függvény egy ***Article*** típusú objektumokból álló vektort a folyóirat címe szerint ábécé sorrendbe rendez.

```
void sorting(vector<Article*>& v) {
   for(int i = 0; i < v.size()-1; i++) {
      int ind = i;
      for(int j = i + 1; j < v.size(); j++) {
        ...........
      }
      if (i < ind) {
         Article* aux = v[i];
         v[i] = v[ind];
         v[ind] = aux;
      }
   }
}
```

4. **(2 pont)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor, tudva, hogy a *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére, és az ***Article*** osztály get típusú metódusai *getTitle* (a ***title*** attribútumra), illetve *getPages* (a ***pages*** attribútumra).

```
....
int main()
{
   vector<Article*> v;
   v.push_back(new JournalArticle("a1", 20, "Studia"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a2", 8, "KEPT", "Cluj-Napoca"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a3", 10, "FORM", "Cluj-Napoca"));
   Article* r = v[0];
   for(int i=1; i<v.size(); i++)
      if (v[i]->getPages() < r->getPages())
         r = v[i];
   cout << r->getTitle();
   return 0;
}
```

5. **(1 pont)** Magyarázzuk meg a *divide et impera* (oszd meg és uralkodj) programozási módszert. Adjunk meg egy algoritmust, amely erre a módszerre alapszik.

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.
Munkaidő: 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. $\mathcal{A} \leq (M_2(\mathbb{R}), +)$ mivel:

Ha $a = b = 0$, akkor következik, hogy $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 0.5p

Ha $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & b' \end{pmatrix}$, akkor $A - A' = \begin{pmatrix} a - a' & 0 \\ b - b' & b - b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$........ 1p

Mivel $\mathcal{A}$ részcsoport az $(M_2(\mathbb{R}), +)$ csoportban, ahhoz hogy részgyűrű legyen az $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ gyűrűben, $\mathcal{A}$ zárt kell legyen a mátrixok szorzására nézve 0.5p

$AA' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + bb' & bb' \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$ ha $ba' \neq 0$ (pld. $a' = b = 1$ esetén),

tehát $\mathcal{A}$ nem részgyűrű a $M_2(\mathbb{R})$-ben 1p

Mivel $\mathcal{A}$ részcsoport az $(M_2(\mathbb{R}), +)$ csoportban, ahhoz hogy résztér legyen ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$-ben, $\mathcal{A}$ zárt kell legyen valós skalárral való szorzásra nézve 0.5p

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, tehát $\mathcal{A}$ résztér ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$-ben 0.5p

2. a) A $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ vektorok lineárisan függőek ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$-ben, akkor és csakis akkor ha $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nem mind nullák úgy, hogy $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0, 0, 0, 0)$ 0.5p

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \ \Leftrightarrow \ (S) \begin{cases} 3\alpha_1 + + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases}, \ldots\ldots\ldots\ldots 0.5\text{p}$$

tehát $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ lineárisan függőek akkor és csakis akkor ha az (S) lineáris homogén rendszernek van nem triviális megoldása, vagyis a rendszer határozatlan,
vagyis a rendszer mátrixának a rangja< 4 .... 1p

Az (S) rendszer mátrixának a rangja $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3 < 4$, egy nem nulla 3-ad rendű aldeterminááns például $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ (tehát α_4 mellékismeretlennek tekinthető) 1p

Egy lineáris függőségi relációt megkaphatunk egy partikuláris nem nulla α_4 értékre, megoldva az (S) rendszert 1p

Például $\alpha_4 = -1$-re az (S) rendszerből

$$\begin{cases} 3\alpha_1 = 3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = (0,0,0,0).$$

b) $\dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ = a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorokból (mint oszlopokból vagy sorokból) álló mátrix rangja= rang $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$, és mivel található egy nem nulla aldeterminááns az első három oszlopban, azt kapjuk, hogy a v_1, v_2, v_3, vektorok lineárisan függetlenek, azaz bázist képeznek a $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ 3 dimenziós generált térben 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. Jelölje x_n az adott sor általános tagját. Látható, hogy $\sum_{n\geq 1} x_n$ pozitív tagú sor, ezért felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó II. összehasonlítási kritériumot az adott sor konvergenciájának a tanulmányozására, kiindulva az általánosított harmonikus sorból:

$$\sum_{n\geq 1} y_n := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{konvergenes}, & \text{ha} \quad a > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad a \leq 1. \end{cases}$$

.... (0.5p)

Célunk meghatározni az a paraméter értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

mely esetben a $\sum_{n\geq 1} x_n$ és $\sum_{n\geq 1} y_n$ sorok azonos természetűek.

.... (0.5p)

Mivel

$$e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right),$$

ezért figyelembe véve, hogy ha az $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ sorozatra teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel, akkor

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 1, \quad \text{illetve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1,$$

.... (0.5p)

ahonnan következik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

miatt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1.$$

.... (0.5p)

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Ez a határérték csak akkor van a $(0, \infty)$ intervallumban, ha $a = \alpha + 2$.

.... (0.5p)

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, tehát a II. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} y_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ sorok azonos természetűek. Következésképp

$$\sum_{n\geq 1} x_n \begin{cases} \text{konvergens}, & \text{ha} \quad \alpha > -1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad \alpha \leq -1. \end{cases}$$

.... (0.5p)

2. • Látható, hogy az f függvény végtelen sokszor deriválható a $(-1,1)$ intervallumon, mint elemi függvények összetett függvénye, ahol

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x).$$

.... (0.25p)

Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} + (x-1)^{-1}, \quad \forall x \in (-1,1),$$

.... (0.25p)

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1)(x+1)^{-2} + (-1)(x-1)^{-2}, \quad \forall x \in (-1,1), \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(x+1)^{-3} + (-1)(-2)(x-1)^{-3}, \quad \forall x \in (-1,1), \end{aligned}$$

ezért indukcióval igazolható, hogy minden $n \geq 2$ esetén

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left[(x+1)^{-n} + (x-1)^{-n}\right], \quad \forall x \in (-1,1).$$

.... (1p)

• Az f függvényhez és az $a \in (-1,1)$ ponthoz rendelt $2n$-ed rendű Taylor-féle polinom a $T_{2n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomfüggvény, ahol

$$T_{2n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Így $a = 0$ esetén

$$T_{2n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad \forall x \in (-1,1).$$

.... (0,5p)

Mivel

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

.... (0.25p)

és

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left[1 + (-1)^n\right] = \begin{cases} -2(n-1)!\,, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

.... (0.25p)

ezért

$$T_{2n,0}f(x) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{-2(2k-1)!}{(2k)!}x^{2k} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}x^{2k} = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + ... + \frac{x^{2n}}{n}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

3. Mivel

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2} = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)',$$

.... (1p)

ezért

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' dx = \frac{e^x}{x+1}\Bigg|_0^1 =$$

.... (1p)

$$= \frac{e}{2} - 1 = \frac{e-2}{2}.$$

.... (1p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) Legyen h_A a kért magasság tartógyenese. $h_A \perp BC$, tehát a h_A egyenes iránytényezője $-\frac{1}{3}$, a magasság egyenlete pedig $h_A : y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 4)$. 1p

A magasság hossza:

$$d(A, BC) = \frac{|3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) - 3)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

.... 1p

b) Mivel ABC egy derékszögű, egyenlő szárú háromszög, a köré írt kör O középpontja az átfogó felezőpontja lesz. A h_A magasság egyben oldalfelező is, ezért az O középpont a h_A és BC egyenes metszéspontja. Megoldva az $\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ egyenletrendszert, kapjuk az O pont koordinátáit: $O(1, 0)$. 1p

c) A B és C pontok a BC egyenesen helyezkednek el $\sqrt{10}$ távolságra az O ponttól. Az alábbi egyenletrendszerhez jutunk

$$\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 10 \Rightarrow (x-1)^2 + (3x-3)^2 = 10 \Rightarrow x \in \{0, 2\} \end{cases}$$

A csúcsok tehát (tetszőleges sorrendben) $B(0, -3)$ és $C(2, 3)$.

.... 1p

d) Az AB egyenes egyenlete $x - 2y - 6 = 0$, az AC egyenes egyenlete pedig $2x + y - 7 = 0$.

.... 1p

2. a) A kör egyenlete átírható az $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ alakba. 1p
A kör középpontja $M_0(4, -1)$, a sugara pedig $r = 3$. 1p

b) Az átmérő párhuzamos az adott egyenessel, ezért egyenlete: $3x - y + c = 0, c \in \mathbb{R}$. 1p
Az $M_0(4, -1)$ középpont rajta van az átmérőn, így $12 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -13$. Tehát az átmérő tartóegyenesének egyenlete $3x - y - 13 = 0$. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel
1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2024 szeptember
Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1. a) Az Article osztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz) b) A JournalArticle és ConferenceArticle származtatott osztályok definiálása (öröklés, konstruktor, metódusok)	**2p** 1 p 1 p
2. A vektor elemeinek szűrése Az elemek számának a meghatározása	**2p** 1p 1p
3. Az if feltétel megadása Index módosítása	**2p** 1p 1p
4. A megjelenített cím helyes megadása	**2p** 2p
5. Elméleti magyarázat Példa	**1p** 0.5p 0.5p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból