Babeş-Bolyai University
Faculty of Matematics and Computer Science

GRADUATION EXAM
Written Test - September 2024
Mathematics Computer Science Study Programme

SUBJECT I. Algebra

1. **(4 points)** Is $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ a subgroup of the group $(M_2(\mathbb{R}), +)$? Is $\mathcal{A}$ a subring of the ring $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$? Is $\mathcal{A}$ a subspace of the $\mathbb{R}$-vector space $M_2(\mathbb{R})$? Motivate your answers.

2. **(5 points)** In the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^4$ we consider the vectors:

$$v_1 = (3, 0, 3, 6),\ v_2 = (0, 2, 2, 4),\ v_3 = (0, 2, 3, 5),\ v_4 = (3, 0, 2, 5).$$

   a) Show that the vectors v_1, v_2, v_3 and v_4 are linearly dependent in the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^4$ and find a linear dependency relation between them.

   b) Determine a basis and the dimension for the generated subspace $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ of ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

SUBJECT II. Calculus

1. **(3 puncte)** Study with discussion on the real parameter α the nature of the series of real numbers:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}{n^\alpha}.$$

2. **(3 puncte)** Write Taylor's polynomial of even rank $2n$ attached to the function $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ about the point $a = 0$, when

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

3. **(3 puncte)** Determine the value of the determinate integral:

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx.$$

SUBJECT III. Geometry

1. (**5 points**) Let ABC be a triangle which is right and isosceles. The hypotenuse BC is on the line with equation $3x - y - 3 = 0$ and the coordinates of the vertex A are $(4, -1)$.

   a) Determine the equation of the line that passes through A and is perpendicular on BC. Find the length of the height from A in the triangle ABC.

   b) Find the coordinates of the point O, the center of the circumscribed circle of triangle ABC.

   c) Determine the coordinates of all the vertices of the triangle ABC.

   d) Determine the equations of the lines AB and AC.

2. **(4 points)** Consider the circle given by the equation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$.

   a) Determine the coordinates of the center of the circle and find the radius of the circle.

   b) Find the equation of the line which is parallel to $d : 3x - y + 7 = 0$ and contains a diameter of the circle.

SUBJECT IV. Computer Science

Note for the Computer Science subject:
One of the programming languages C++, Python, Java or C# can be used to solve problem 1.
Please indicate the programming language used.
Existing libraries (from C++, Python, Java, C#) can be used in the provided solutions.

1. **(2 points)** Write a program that:
   a) Implements a class ***Article*** having a constructor with parameters and the following attributes:
   - ***title*** – protected attribute of type string, representing the title of the article;
   - ***pages*** – protected attribute of type integer, representing the number of pages for the article.

   b) Implements two classes derived from class ***Article***:
   - class ***JournalArticle*** has all the attributes of class ***Article*** and adds a private attribute ***name*** (of type string, representing the name of the journal);
   - class ***ConferenceArticle*** has all the attributes of class ***Article*** and adds the private attributes ***name*** (of type string, representing the name of the conference) and ***location*** (of type string, representing the conference location).

   All classes must implement ***get/set*** methods for all attributes and a method ***toString*** which returns a string value containing all attribute values, separated by commas. The method ***toString*** from the derived classes must use the method ***toString*** from class ***Article***.

2. **(2 points)** Give the code of the function ***counting*** provided below. This function returns the number of elements from a vector of ***Article*** objects having the number of pages between two given limits, *lmin* and *lmax* (where *1 <= lmin <= lmax*).

```
int counting(const vector<Article*>& v, int lmin, int lmax) {
   ....
}
```

3. **(2 points)** Fill in the missing lines of code from the following function which sorts a vector of ***Article*** objects alphabetically by title.

```
void sorting(vector<Article*>& v) {
   for(int i = 0; i < v.size()-1; i++) {
      int ind = i;
      for(int j = i + 1; j < v.size(); j++) {
        ...........
      }
      if (i < ind) {
         Article* aux = v[i];
         v[i] = v[ind];
         v[ind] = aux;
      }
   }
}
```

4. **(2 points)** Indicate what is the result of executing the code sequence given below, knowing that the function *push_back()* inserts an element at the end of the vector and the ***get*** methods from class ***Article*** are *getTitle* (for attribute ***title***) and *getPages* (for attribute ***pages***).

```
....
int main()
{
   vector<Article*> v;
   v.push_back(new JournalArticle("a1", 20, "Studia"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a2", 8, "KEPT", "Cluj-Napoca"));
   v.push_back(new ConferenceArticle("a3", 10, "FORM", "Cluj-Napoca"));
   Article* r = v[0];
   for(int i=1; i<v.size(); i++)
      if (v[i]->getPages() < r->getPages())
         r = v[i];
   cout << r->getTitle();
   return 0;
}
```

5. **(1 point)** Explain the programming method *divide et impera* (divide and conquer). Name an algorithm that uses this method.

NOTE.
All subjects are compulsory and full solutions are requested.
An initial score of **1 point** is awarded to each subject. The minimum passing grade is 5,00.
The working time is 3 hours.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. $\mathcal{A} \leq (M_2(\mathbb{R}), +)$ deoarece:

   Pentru $a = b = 0$ se obţine $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 0.5p

   Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & b' \end{pmatrix}$, atunci $A - A' = \begin{pmatrix} a - a' & 0 \\ b - b' & b - b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 1p

   Fiind subgrup în grupul aditiv $(M_2(\mathbb{R}), +)$, pentru a fi subinel al lui $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$,
   $\mathcal{A}$ trebuie să fie stabilă şi în raport cu înmulţirea matricelor 0.5p

   $AA' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + bb' & bb' \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$ pentru $ba' \neq 0$ (de ex. $a' = b = 1$), deci $\mathcal{A}$ nu e subinel în $M_2(\mathbb{R})$ 1p

   Fiind subgrup în grupul aditiv $(M_2(\mathbb{R}), +)$, pentru a fi subpaţiu în ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$,
   $\mathcal{A}$ trebuie să fie stabilă în raport cu înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ 0.5p

   Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, deci $\mathcal{A}$ este subspaţiu în ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$ 0.5p

2. a) Vectorii $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ sunt liniar dependenţi în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ dacă şi numai dacă
   $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0, 0, 0, 0)$ 0.5p

   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \ \Leftrightarrow \ (S) \begin{cases} 3\alpha_1 + + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases}$$ 0.5p

   prin urmare $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sistemul (S) este compatibil nedeterminat, adică rangul matricei sistemului (S) este strict mai mic decat 4 .... 1p

   Rangul matricei lui (S) este rang $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$, iar un minor nenul de ordinul 3 poate fi obţinut din primele 3 coloane (de exemplu, $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ şi aceasta ne permite să considerăm α_4 necunoscută secundară) 1p

   Pentru a obţine o relaţie de dependenţă dăm o valoare nenulă necunoscutei secundare (la noi α_4) şi determinăm valorile corespunzătoare necunoscutelor principale (la noi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) 1p

   De exemplu, pentru $\alpha_4 = -1$, din (S) deducem

   $$\begin{cases} 3\alpha_1 = 3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = (0, 0, 0, 0).$$

   b) $\dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ = rangul matricei formate cu vectorii v_1, v_2, v_3, v_4 (ca linii sau coloane) = rang $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$, iar cum un minor nenul de ordinul 3 poate fi obţinut din primele 3 coloane, care sunt chiar v_1, v_2, v_3, aceşti vectori sunt liniar independenţi în spaţiul $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ de dimensiune 3, prin urmare, formează o bază. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

.... (0.5p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a asfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. .... (0.5p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1.$$

.... (0.5p)

Deoarece

$$e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = e^0 = 1,$$

.... (0.5p)

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a = \alpha + 2.$$

.... (0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+2}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } \alpha > -1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } \alpha \leq -1 \end{cases}.$$

.... (0.5p)

2. • Se observă că funcţia f este indefinit derivabilă pe $(-1,1)$ ca o compunere de funcţii elementare, iar

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x).$$

.... (0.25p)

Deoarece

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} + (x-1)^{-1}, \quad \forall x \in (-1,1),$$

.... (0.25p)

$$f''(x) = (-1)(x+1)^{-2} + (-1)(x-1)^{-2}, \quad \forall x \in (-1,1),$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} + (-1)(-2)(x-1)^{-3}, \quad \forall x \in (-1,1),$$

se demonstrează prin inducţie matematică că pentru oricare $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!\Big[(x+1)^{-n} + (x-1)^{-n}\Big], \quad \forall x \in (-1,1).$$

.... (1p)

• Polinomul lui Taylor de rang $2n$ ataşat funcţiei f şi unui punct $a \in (-1,1)$ este funcţia polinomială $T_{2n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{2n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in (-1,1),$$

astfel, pentru $a = 0$

$$T_{2n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad \forall x \in (-1,1).$$

.... (0,5p)

Avem

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

.... (0.25p)

şi

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!\Big[1 + (-1)^n\Big] = \begin{cases} -2(n-1)! & : \ n \text{ par;} \\ 0 & : \ n \text{ impar,} \end{cases}$$

.... (0.25p)

astfel

$$T_{2n,0}f(x) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{-2(2k-1)!}{(2k)!}x^{2k} = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}x^{2k} = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + ... + \frac{x^{2n}}{n}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

3. Avem

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2} = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)'.$$

.... (1p)

Atunci

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' dx = \frac{e^x}{x+1}\Bigg|_0^1 =$$

.... (1p)

$$= \frac{e}{2} - 1 = \frac{e-2}{2}.$$

.... (1p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2024
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Fie h_A dreapta suport a înălţimii cerute. $h_A \perp BC$, deci panta dreptei h_A este $-\frac{1}{3}$. Ecuaţia acesteia este $h_A : y+1 = -\frac{1}{3}(x-4)$. 1p

Lungimea acestei înălţimi este

$$d(A, BC) = \frac{|3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) - 3)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

.... 1p

b) Cum ABC este dreptunghic isoscel, centrul cercului circumscris se află la mijlocul ipotenuzei. Înălţimea h_A este şi mediană, deci O se află la intersecţia dreptei h_A cu BC. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ obţinem $O(1, 0)$ 1p

c) B şi C sunt puncte situate pe dreapta BC la distanţă $\sqrt{10}$ faţă de punctul O. Obţinem aşadar sistemul

$$\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 10 \Rightarrow (x-1)^2 + (3x-3)^2 = 10 \Rightarrow x \in \{0, 2\} \end{cases}$$

Vârfurile sunt, într-o ordine oarecare, $B(0, -3)$ şi $C(2, 3)$.

.... 1p

d) Ecuaţia dreptei AB este $x - 2y - 6 = 0$, iar ecuaţia dreptei AC este $2x + y - 7 = 0$.

.... 1p

2. a) Ecuația cercului se poate scrie în forma $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$. 1p
   Centrul cercul este $M_0(4, -1)$, iar raza este $r = 3$. 1p
   b) Diametrul, fiind paralel cu dreapta dată, are ecuația $3x - y + c = 0, c \in \mathbb{R}$. 1p
   Centrul $M_0(4, -1)$ aparține diametrului, astfel $12+1+c = 0 \Rightarrow c = -13$. Deci ecuația diametrului este $3x - y - 13 = 0$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă septembrie 2024
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definitie clasa Article (constructor, metode, acces la date).. b) Definitie clase derivate JournalArticle si ConferenceArticle (mostenire, constructor, metode).........	**2p** 1 p 1 p
2. Filtrare vector.. Calcul numar articole	**2p** 1p 1p
3. Definire conditie if .... Modificare index	**2p** 1p 1p
4. Indicarea corecta a titlului ce se afiseaza...	**2p** 2p
5. Explicarea teoretica .... Exemplificare..	**1p** 0.5p 0.5p

Notă:
(1p) Oficiu