Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)** Demonstraţi că
$$f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_6, \quad f(\bar{x}) = \widehat{3x}$$
este un morfism de grupuri între $(\mathbb{Z}_8, +)$ şi $(\mathbb{Z}_6, +)$. Este f morfism şi între inelele $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

2. **(6 puncte)** Fie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$
şi considerăm subspaţiul generat $T = \langle(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle$ în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.
   a) Demonstraţi că S este subspaţiu în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.
   b) Formează vectorii $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -2)$ o bază în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial S?
   c) Să se determine câte o bază în $\mathbb{R}$-spaţiile vectoriale $S + T$ şi $S \cap T$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$ și
$$x_{n+1} = \frac{x_n e^{x_n}(e^{x_n} - 1)}{e^{2x_n} - 1 - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
   a) Să se demonstreze că $e^x > 1 + x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
   c) Folosind eventual lema lui Stolz-Cesàro, să se calculeze limita: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

2. **(2 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real α natura seriei de numere reale:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}}{n^\alpha}.$$

3. **(2 puncte)** Scrieţi formula lui Maclaurin cu rest de tip Lagrange, de rang $n \geq 3$, ataşată funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde
$$f(x) = (4x^2 - 8x)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
În determinarea derivatei de ordinul n a funcţiei f se poate folosi formula lui Leibniz, privind derivata de ordinul n a produsului de funcţii.

4. **(2 puncte)** Calculaţi integrala:
$$\int_0^1 \frac{x + 2 - (x + 1)\ln(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)^2}\, dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(2 puncte)** Să se determine coordonatele proiecției ortogonale a punctului $A(-1,1)$ pe dreapta de ecuație $2x-4y+1=0$.
2. **(2 puncte)** Să se scrie ecuația parabolei cu vârful în origine și cu axa de simetrie pe axa Ox, care admite o tangentă de ecuație $x-y+1=0$.
3. **(2 puncte)** Să se determine ecuaţia planului care conţine dreapta d de ecuaţii $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ şi este perpendicular pe planul π determinat de punctele $A(0,0,-5)$, $B(1,1,0)$, $C(0,3,1)$.
4. **(3 puncte)** Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,3,5)$ la dreapta $d:\begin{cases}2x+y+z-1=0\\3x+y+2z-3=0\end{cases}$.

NOTĂ:

Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. f fiind definită pe clase de resturi, trebuie verificat faptul că e bine definită (independenţa de alegerea reprezentanţilor).

   Într-adevăr, dacă $\bar{x} = \bar{y}$, atunci $y = x + 8k$, deci $f(\bar{y}) = 3\widehat{(x+8k)} = \widehat{3x+24k} = \widehat{3x} = f(\bar{x})$ 1p

   f este un morfism de grupuri deoarece

   $f(\bar{x}+\bar{z}) = f(\overline{x+z}) = 3\widehat{(x+z)} = \widehat{3x+3z} = \widehat{3x} + \widehat{3z} = f(\bar{x}) + f(\bar{z})$ 1p

   f este un morfism de inele, căci

   $f(\bar{x}\bar{z}) = f(\overline{xz}) = \widehat{3xz} = \widehat{3} \cdot \widehat{xz} = \widehat{9} \cdot \widehat{xz} = \widehat{3x} \cdot \widehat{3z} = f(\bar{x})f(\bar{z})$ 1p

2. a) S este subspaţiu vectorial pentru că:
   $(0,0,0) \in S$, deoarece $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$ 0.5p
   Pentru orice $(x,y,z),(x',y',z') \in S$ (deci $x + 2y + z = x' + 2y' + z' = 0$) şi $a, a' \in \mathbb{R}$ avem
   $a(x,y,z) + a'(x',y',z') = (ax + a'x', ay + a'y', az + a'z') \in S$,
   căci $ax + a'x' + 2(ay + a'y') + az + a'z' = a(x + 2y + z) + a'(x' + 2y' + z') = 0$ 1.5p

   b) Vectorii $(1,0,-1)$, $(0,1,-2)$ formează o bază în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial S pentru că:
   • aparţin lui S, căci $1 + 2 \cdot 0 + (-1) = 0 + 2 \cdot 1 + (-2) = 0$ 0.5p
   • sunt liniar independenţi, deoarece
   $a(1,0,-1) + b(0,1,-2) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$ 0.5p
   • generează spaţiul S, căci
   pentru $(x,y,z) \in S$ arbitrar, din $x + 2y + z = 0$ rezultă $(x,y,z) = (x,y,-x-2y)$,
   şi se observă că $(x,y,-x-2y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-2)$ 0.5p

   c) Avem $S + T = \langle S \cup T \rangle = \langle (1,0,-1),(0,1,-2),(-1,1,0),(-2,0,1) \rangle$ şi
   $\dim_{\mathbb{R}}(S+T) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$ 1p
   iar din $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$, avem că vectorii $(1,0,-1),(0,1,-2),(-1,1,0)$ formează o bază pentru $S + T$ 0.5p
   Avem $\dim_{\mathbb{R}}(S \cap T) = \dim_{\mathbb{R}} S + \dim_{\mathbb{R}} T - \dim_{\mathbb{R}}(S+T) = 2 + 2 - 3 = 1$ şi căutăm un vector nenul în T care să satisfacă ecuaţia care determină pe S. Un vector din T au forma generală
   $a(-1,1,0) + b(-2,0,1) = (-a-2b, a, b)$
   şi din $(-a-2b, a, b) \in S$ obţinem
   $(-a-2b) + 2a + b = 0 \Rightarrow a = b.$
   Luând, de exemplu, $a = b = 1$, găsim vectorul $(-3,1,1)$ care aparţine lui $S \cap T$ şi care, fiind nenul, formează o bază în $S \cap T$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu ....(1p)

1. *a*) Se defineşte funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x - 1 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece ea este derivabilă iar derivata acesteia este negativă pe $(-\infty, 0)$ şi pozitivă pe $(0, \infty)$, anulându-se doar în 0, funcţia f are punctul $x = 0$ punct de minim global, astfel $f(x) > f(0) = 0$, deci

$$e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0.$$

.... (0,5p)

b)

- Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că $x_n > 0$.
  Dacă $x_n > 0$, atunci $e^{2x_n} > e^{x_n} > 1 + x_n$, deci $x_{n+1} > 0$ pentru orice $n \geq 0$...............(0,5p)
- Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că şirul (x_n) este strict descrescător. Avem $e^{2x_n} > 1 + x_n$, de unde

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n e^{x_n}(e^{x_n} - 1)}{e^{2x_n} - 1 - x_n} - x_n = \frac{x_n(1 + x_n - e^{x_n})}{e^{2x_n} - 1 - x_n} < 0,$$

  deci $x_{n+1} < x_n$ pentru orice $n \geq 0$. .... (0,5p)

- Deoarece şirul (x_n) este strict descrescător şi mărginit inferior, din teorema lui Weierstrass, rezultă că șirul (x_n) este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: l \in \mathbb{R}$.
  Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 0$. .... (0,5p)

c) Deoarece $\frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n} > 0$ pentru orice $n \geq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{0_+} = \infty$, putem aplica lema lui Stolz-Cesàro:

.... (0,5p)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} x_n}{x_n - x_{n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n^2 e^{x_n}(e^{x_n}-1)}{e^{2x_n}-1-x_n}}{\frac{x_n(e^{x_n}-1-x_n)}{e^{2x_n}-1-x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n e^{x_n}(e^{x_n} - 1)}{e^{x_n} - 1 - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n(e^{x_n} - 1)}{e^{x_n} - 1 - x_n} = \\
&= \lim_{x\searrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^x - 1 + x e^x}{e^x - 1} = 1 + \lim_{x\searrow 0} \frac{x e^x}{e^x - 1} = 1 + \lim_{x\searrow 0} \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}} = 2.
\end{aligned}$$

.... (0,5p)

2. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

. . . . (0.25p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. . . . . (0.25p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

. . . . (0.25p)

Deoarece

$$\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1} = 2\sin\frac{1}{n(n+1)}\cos\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \cos\frac{2n+1}{n(n+1)} = \cos 0 = 1,$$

. . . . (0.25p)

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\cos\frac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\cdot n^a = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^{\alpha+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a = \alpha + 2.$$

. . . . (0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 2$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+2}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } \alpha > -1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } \alpha \leq -1 \end{cases}.$$

. . . . (0.5p)

3. - Determinarea derivatei de ordinul n, $n \geq 2$ a funcţiei f (orice soluţie corectă, alternativă baremului va fi punctată corespunzător cu (1p))

   Observăm că funcţia f este un produs dintre o funcţie polinomială $g(x) = 4x^2 - 8x$ şi $h(x) = e^x$, astfel ea este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

   Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul x se va calcula cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n pentru produsul a două funcţii. Astfel, dacă $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, atunci

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

. . . . (0.25 p)

$$g'(x) = 8x - 8, \quad g''(x) = 8 \quad \text{şi} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq 3$$

. . . . (0.25 p)

iar

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

. . . . (0.25 p)

De aceea,

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = C_n^n g(x)h^{(n)}(x) + C_n^{n-1}g'(x)h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2}g''(x)h^{(n-2)}(x).$$

Astfel

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = e^x \left[4x^2 - 8x + n(8x-8) + \frac{n(n-1)}{2}8\right].$$

. . . . (0.25p)

- Formula lui Maclaurin implică utilizarea polinomului lui Taylor de rang n şi a restului de tip Lagrange, toate dezvoltate în jurul punctului $a = 0$. Astfel, deoarece funcţia f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, c \text{ între } x \text{ şi } 0 \text{ a. î.} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.5p)

Avem

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -8 \quad \text{şi} \quad \forall n \geq 2 \quad f^{(n)}(0) = 4n(n-3),$$

. . . . (0.25p)

astfel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, c \text{ între } x \text{ şi } 0 \text{ a. î.}$$

$$f(x) = -8x + \sum_{k=2}^{n} \frac{4(k-3)}{(k-1)!}x^k + \frac{e^c\left[4c^2 - 8c + (n+1)(8c-8) + 4(n+1)n\right]}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

. . . . (0.25p)

4. Avem

$$\frac{x+2-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{(\ln(x+1))'(x+2) - \ln(x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right)'.$$

. . . . (1p)

Atunci

$$\int_0^1 \frac{x+2-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right)' dx = \left.\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right|_0^1 = \frac{\ln 2}{3}.$$

. . . . (1p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. Fie e dreapta care este perpendiculară pe dreapta d și trece prin punctul $A(-1,1)$. Panta acestei drepte este $m_e = -\frac{1}{m_d} = -2$. Deci ecuația dreptei e este: $y-1=-2(x+1) \Leftrightarrow 2x+y+1=0$. ... 1p

   Proiecția punctului A pe dreapta d este intersecția dreptelor e și d, adică punctul $A'(-\frac{1}{2},0)$. 1p

2. Metoda 1. Axa Ox fiind axa de simetrie a parabolei cu vârful în orgine, deducem că ecuaţia parabolei are forma: $y^2=2px$. Ecuația tangentei la această parabolă într-un punct $M_0(x_0,y_0)$ a parabolei este $t: yy_0 = p(x+x_0) \Leftrightarrow t: px - yy_0 + px_0 = 0$. 1p

   Tangenta t coincide cu dreapta $x-y+1=0$, deci $\dfrac{p}{1} = \dfrac{-y_0}{-1} = \dfrac{px_0}{1} \Leftrightarrow y_0 = p$ şi $x_0 = 1$.

   Punctul de tangenţa $M_0(1,y_0)$ aparţine parabolei, deci $y_0^2 = 2p\cdot 1$. Dar $y_0=p$, de unde obţinem că $p^2=2p \Leftrightarrow p=2$, astfel ecuaţia parabolei este $y^2=4x$. 1p

   Metoda 2. Dreapta dată trebuie să intersecteze parabola într-un punct dublu, adică $(x+1)^2=2px$ are o soluţie dublă. Discriminantul ecuaţiei trebuie să fie 0, adică $\triangle = 4(1-p)^2-4=0 \Leftrightarrow p=2$.

3. Ecuaţia planului π este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z+5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3x+2y-z-5=0.$$

   Un vector normal al planului π este $\vec{n}(3,2,-1)$ 1p

   Ecuaţia planului cerut este $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x-8y-13z+9=0$ 1p

4. Determinăm coordonatele unui punct M al dreptei şi unui vector director $\vec{d}$.

   Fie $z=\alpha$.

$$\begin{cases} 2x+y=-\alpha+1 \\ 3x+y=-2\alpha+3 \end{cases}$$

   Soluţia sistemului este $S=\{(-\alpha+2,\alpha-3,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1,1)+(2,-3,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$. 1p

   Rezultă ecuaţiile dreptei d: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$, adică un vector director este $\vec{d}(-1,1,1)$ şi un punct M are coordonatele $(2,-3,0)$. 1p

   Distanţa de la A la d este $d(A,d) = \dfrac{\|\overrightarrow{MA}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, unde $\overrightarrow{MA}(-1,6,5)$

$$\overrightarrow{MA}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}.$$ Rezultă $d(A,d) = \frac{\sqrt{1+16+25}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.