Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(3 pont)** Igazoljuk, hogy
$$f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_6, \quad f(\bar{x}) = \widehat{3x}$$
csoportmorfizmus a $(\mathbb{Z}_8, +)$ és $(\mathbb{Z}_6, +)$ csoportok között. Gyűrűmorfizmus-e f a $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ és $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ gyűrűk között?

2. **(6 pont)** Legyen
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$
és tekintjük a $T = \langle(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle$ generált résztert az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben.
   a) Igazoljuk, hogy S résztér az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben.
   b) Bázist alkotnak-e az $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -2)$ vektorok az S valós vektortérben?
   c) Határozzunk meg egy-egy bázist az $S + T$ és $S \cap T$ valós vektorterekben.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tekintsük az $(x_n)_{n\geq 0}$ számsorozatot, melyre $x_0 = 1$ és
$$x_{n+1} = \frac{x_n e^{x_n}(e^{x_n} - 1)}{e^{2x_n} - 1 - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   a) Igazoljuk, hogy $e^x > 1 + x$, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén.
   b) Igazoljuk, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
   c) Felhasználva esetleg a Stolz-Cesàro lemmát, számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ határértéket.

2. **(2 pont)** Tanulmányozzuk az α valós paraméter függvényében a következő valós számsor természetét:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}}{n^\alpha}.$$

3. **(2 pont)** Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = (4x^2 - 8x)\, e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
függvény. Írjuk fel ezen függvény n-ed rendű ($n \geq 3$) Maclaurin-féle képletét a Lagrange-féle maradéktaggal (az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámításához fel lehet használni két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályt).

4. **(2 pont)** Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{x + 2 - (x + 1)\ln(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)^2}\, dx$$
integrált.

III. TÉTEL. Geometria

1. **(2 pont)** Határozzuk meg az $A(-1, 1)$ pont merőleges vetületének koordinátáit a $2x - 4y + 1 = 0$ egyenlettel megadott egyenesre!

2. **(2 pont)** Határozzuk meg azon parabola egyenletét, amelynek csúcsa az origó, szimmetriatengelye az Ox tengely, valamint érinti az $x - y + 1 = 0$ egyenest.

3. **(2 pont)** Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

   egyenest és merőleges az $A(0, 0, -5)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 3, 1)$ pontok által meghatározott π síkra!

4. **(3 pont)** Számítsuk ki az $A(1, 3, 5)$ pont távolságát a $d : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ egyenestől!

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden feladathoz teljes megoldás megadása szükséges.
Minden tétel esetén jár **1 pont** hivatalból. A legkisebb átmenő jegy 5,00.
A munkaidő 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. Mivel f maradékosztályokon értelmezett, ellenőrizni kell, hogy jól értelmezett (vagyis független a reprezentánsok megválasztásától).

   Valóban, ha $\bar{x} = \bar{y}$, akkor $y = x + 8k$, tehát $f(\bar{y}) = 3\widehat{(x + 8k)} = \widehat{3x + 24k} = \widehat{3x} = f(\bar{x})$ 1p

   f csoportmorfizmus, mivel

   $f(\bar{x} + \bar{z}) = f(\overline{x + z}) = 3\widehat{(x + z)} = \widehat{3x + 3z} = \widehat{3x} + \widehat{3z} = f(\bar{x}) + f(\bar{z})$ 1p

   f gyűrűmorfizmus, mivel

   $f(\bar{x}\bar{z}) = f(\overline{xz}) = \widehat{3xz} = \widehat{3} \cdot \widehat{xz} = \widehat{9} \cdot \widehat{xz} = \widehat{3x} \cdot \widehat{3z} = f(\bar{x})f(\bar{z})$ 1p

2. a) S résztér, mivel:
   $(0, 0, 0) \in S$, hiszen $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$ 0.5p
   Ha $(x, y, z), (x', y', z') \in S$ (tehát $x + 2y + z = x' + 2y' + z' = 0$) és $a, a' \in \mathbb{R}$, akkor
   $a(x, y, z) + a'(x', y', z') = (ax + a'x', ay + a'y', az + a'z') \in S$,
   hiszen $ax + a'x' + 2(ay + a'y') + az + a'z' = a(x + 2y + z) + a'(x' + 2y' + z') = 0$ 1.5p

   b) Az $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -2)$ vektorok bázist alkotnak az S valós vektortérben, mivel:
   • elemei S-nek, hiszen $1 + 2 \cdot 0 + (-1) = 0 + 2 \cdot 1 + (-2) = 0$ 0.5p
   • lineárisan függetlenek, hiszen

   $$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0 \text{ .... } 0.5\text{p}$$

   • generálják az S teret, hiszen
   ha $(x, y, z) \in S$, akkor $x + 2y + z = 0$-ból $(x, y, z) = (x, y, -x - 2y)$,
   és észrevehető, hogy $(x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$ 0.5p

   c) $S + T = \langle S \cup T \rangle = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -2), (-1, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle$ és

   $$\dim_{\mathbb{R}}(S + T) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ .... } 1\text{p}$$

   valamint, mivel $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$ következik, hogy a $(1, 0, -1), (0, 1, -2), (-1, 1, 0)$ vektorok bázist képeznek $S + T$-ben 0.5p
   $\dim_{\mathbb{R}}(S \cap T) = \dim_{\mathbb{R}} S + \dim_{\mathbb{R}} T - \dim_{\mathbb{R}}(S + T) = 2 + 2 - 3 = 1$ és keresünk egy nem nulla vektort T-ben, mely teljesíti S egyenletét. Egy T-beli vektor általános alakja
   $a(-1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) = (-a - 2b, a, b)$
   ahonnan az $(-a - 2b, a, b) \in S$ feltétel alapján azt kapjuk, hogy
   $(-a - 2b) + 2a + b = 0$, vagyis $a = b$.
   Például $a = b = 1$-re a $(-3, 1, 1)$ vektort kapjuk, mely a fentiek alapján benne van $S \cap T$-ben és mivel nem nullvektor, bázist alkot az $S \cap T$ térben 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. *a*) Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-x$ függvényt. Ekkor f deriválható és $f'(x)=e^x-1<0$, ha $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0$, ha $x\in(0,\infty)$, illetve $f'(x)=0$, ha $x=0$. Következésképp $x=0$ az f függvény globális minimum pontja, ezért $f(x)>f(0)=0$, minden $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén.
.... (0,5p)

   b)

   - Indukcióval igazolható, hogy $x_n>0$, minden $n\geq 0$ esetén.
     Ha $x_n>0$, akkor $e^{2x_n}>e^{x_n}>1+x_n$, tehát $x_{n+1}>0$, bármely $n\geq 0$ esetén.
     .... (0,5p)
   - Indukcióval igazolható, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan csökkenő.
     Az $e^{2x_n}>1+x_n$ miatt
     $$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n e^{x_n}(e^{x_n}-1)}{e^{2x_n}-1-x_n}-x_n=\frac{x_n(1+x_n-e^{x_n})}{e^{2x_n}-1-x_n}<0,$$
     ezért $x_{n+1}<x_n$, minden $n\geq 0$ esetén.
     .... (0,5p)
   - Mivel az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, ezért az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens, tehát létezik $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=:x\in\mathbb{R}$. Áttérve határértékre a rekurrens összefüggésben azt kapjuk, hogy $x=0$.
     .... (0,5p)

   c) Mivel $\frac{1}{x_{n+1}}>\frac{1}{x_n}>0$, minden $n\geq 0$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty$, ezért alkalmazható a Stolz-Cesàro lemma:
.... (0,5p)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}=\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n^2e^{x_n}(e^{x_n}-1)}{e^{2x_n}-1-x_n}}{\frac{x_n(e^{x_n}-1-x_n)}{e^{2x_n}-1-x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_ne^{x_n}(e^{x_n}-1)}{e^{x_n}-1-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(e^{x_n}-1)}{e^{x_n}-1-x_n}=\\ &=\lim_{x\searrow 0}\frac{x(e^x-1)}{e^x-1-x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x-1+xe^x}{e^x-1}=1+\lim_{x\searrow 0}\frac{xe^x}{e^x-1}=1+\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}}=2.\end{aligned}$$

.... (0,5p)

2. Jelölje x_n az adott sor általános tagját. Látható, hogy $\sum_{n\geq 1}x_n$ pozitív tagú sor, ezért felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó II. összehasonlítási kritériumot az adott sor konvergenciájának a tanulmányozására, kiindulva az általánosított harmonikus sorból:

$$\sum_{n\geq 1}y_n:=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}\begin{cases}\text{konvergenes,} & \text{ha}\quad a>1\\ \text{divergens,} & \text{ha}\quad a\leq 1.\end{cases}$$

.... (0.25p)

Célunk meghatározni az a paraméter értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\in(0,\infty),$$

mely esetben a $\sum_{n\geq 1}x_n$ és $\sum_{n\geq 1}y_n$ sorok azonos természetűek.

.... (0.25p)

Mivel

$$\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}=2\sin\frac{1}{n(n+1)}\cos\frac{2n+1}{n(n+1)},$$

ezért figyelembe véve, hogy ha az $(a_n)\subseteq\mathbb{R}$ sorozatra teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ feltétel, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(a_n)}{a_n}=1,\quad\text{illetve}\quad\lim_{n\to\infty}\cos(a_n)=1,$$

.... (0.25p)

ahonnan következik a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

miatt, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1\quad\text{és}\quad\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{n(n+1)}=1.$$

.... (0.25p)

Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\cos\frac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\cdot n^a=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^{\alpha+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Ez a határérték csak akkor van a $(0,\infty)$ intervallumban, ha $a=\alpha+2$.

.... (0.5p)

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=2$, tehát a II. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1}y_n=\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha+2}}$ sorok azonos természetűek. Következésképp

$$\sum_{n\geq 1}x_n\begin{cases}\text{konvergens}, & \text{ha}\quad\alpha>-1\\ \text{divergens}, & \text{ha}\quad\alpha\leq -1.\end{cases}$$

.... (0.5p)

3. • Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a meghatározása $n\geq 2$ esetén (bármely más helyes megoldás 1 pontig lesz pontozva a javítókulcs alternatívájaként).

Az f függvény a $g(x)=4x^2-8x$ polinomfüggvény és a $h(x)=e^x$ exponenciális függvény szorzata, így végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

Legyen $x\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámítására két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályát alkalmazzuk. Így, ha $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, akkor

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x).$$

.... (0.25 p)

$$g'(x)=8x-8,\quad g''(x)=8\quad\text{és}\quad g^{(n)}(x)=0,\quad\forall n\geq 3,$$

.... (0.25 p)

míg

$$h^{(n)}(x)=e^x,\quad\forall n\geq 0.$$

. . . . (0.25 p)

Ezért

$$f^{(n)}(x) = C_n^n g(x)h^{(n)}(x) + C_n^{n-1} g'(x)h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2} g''(x)h^{(n-2)}(x),$$

minden $n \geq 2$ esetén. Következésképp

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[4x^2 - 8x + n(8x-8) + \frac{n(n-1)}{2} 8\right] = e^x \left[4x^2 - 8x + n(8x-8) + 4n(n-1)\right],$$

minden $n \geq 2$ esetén. . . . . (0.25p)

- A Maclaurin-féle képlethez az n-ed rendű Taylor polinomra és a Lagrange-féle maradéktagra van szükségünk az $a = 0$ pont környezetében. Mivel f végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, ezért

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists\, c \text{ az } x \text{ és } 0 \text{ között úgy, hogy } f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

. . . . (0.5p)

Mivel

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -8 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(0) = 4n(n-3), \quad \forall n \geq 2,$$

. . . . (0.25p)

ezért

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, c$ az x és 0 között úgy, hogy

$$f(x) = -8x + \sum_{k=2}^{n} \frac{4(k-3)}{(k-1)!} x^k + \frac{e^c\left[4c^2 - 8c + (n+1)(8c-8) + 4n(n+1)\right]}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

. . . . (0.25p)

4. Mivel

$$\frac{x+2-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{(\ln(x+1))'(x+2) - \ln(x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right)',$$

. . . . (1p)

ezért

$$\int_0^1 \frac{x+2-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right)' dx = \left.\frac{\ln(x+1)}{x+2}\right|_0^1 = \frac{\ln 2}{3}.$$

. . . . (1p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. Legyen az e egyenes az $A(-1,1)$ ponton áthaladó és d egyenesre merőleges egyenes. Ekkor iránytényezője $m_e = -\frac{1}{m_d} = -2$. Tehát az e egyenes egyenlete:
   $y - 1 = -2(x+1) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 0$. 1p
   Az A pont d egyenesre eső merőleges vetülete a d és e egyenesek metszéspontja lesz, vagyis az $A'(-\frac{1}{2}, 0)$ pont. 1p
2. 1. Módszer. Mivel tudjuk, hogy az origó csúcsú parabola szimmetriatengelye az Ox tengely, ezért a parabola egyenlete $y^2 = 2px$ alakba írható. Ennek a parabolának egy $M_0(x_0, y_0)$ pontjához tartozó erintője:
   $t : yy_0 = p(x + x_0) \Leftrightarrow t : px - yy_0 + px_0 = 0$. 1p
   A t érintő egybeesik az $x - y + 1 = 0$ egyenessel valamely M_0 pontban, tehát $\dfrac{p}{1} = \dfrac{-y_0}{-1} = \dfrac{px_0}{1} \Leftrightarrow y_0 = p$ és $x_0 = 1$.
   Az $M_0(1, y_0)$ érintési pont hozzátartozik a parabolához, így $y_0^2 = 2p \cdot 1$. De $y_0 = p$, ahonnan kapjuk, hogy $p^2 = 2p \Leftrightarrow p = 2$. Tehát a parabola egyenlete $y^2 = 4x$. 1p
   2 Módszer. Az adott egyenes egyetlen pontban kell metssze a parabolát, vagyis az $(x+1)^2 = 2px$ egyenletnek egyetlen kétszeres gyöke kell legyen. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis $\triangle = 4(1-p)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow p = 2$.
3. A π sík egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z+5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

   A π sík egy normálvektora $\vec{n}(3, 2, -1)$ 1p
   A kért sík egyenlete $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 8y - 13z + 9 = 0$ 1p
4. Meghatározzuk az egyenes egy M pontját és egy $\vec{d}$ irányvektorát.
   Legyen $z = \alpha$.
   $\begin{cases} 2x + y = -\alpha + 1 \\ 3x + y = -2\alpha + 3 \end{cases}$
   A rendszer megoldása $S = \{(-\alpha + 2, \alpha - 3, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, 1, 1) + (2, -3, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. 1p
   Innen a d egyenes kanonikus egyenletei $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$, tehát egy irányvektora $\vec{d}(-1, 1, 1)$ és egy M pontjának a koordinátái $(2, -3, 0)$. 1p
   Az A pont távolsága a d egyenestől $d(A, d) = \dfrac{\|\overrightarrow{MA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, ahol $\overrightarrow{MA}(-1, 6, 5)$
   $\overrightarrow{MA} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Tehát $d(A, d) = \frac{\sqrt{1+16+25}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$ 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.