Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(4 puncte)** Fie $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Demonstraţi că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este un grup. Este acesta comutativ?

2. **(5 puncte)** În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii:

$$a_1 = (2,1,1,1),\ a_2 = (1,0,1,1),\ b_1 = (0,1,2,1),\ b_2 = (0,0,1,1)$$

şi subspaţiile generate $A = \langle a_1, a_2\rangle$ şi $B = \langle b_1, b_2\rangle$. Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru fiecare dintre $\mathbb{R}$-spaţiile vectoriale A, B, $A + B$ şi $A \cap B$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real α natura seriei de numere reale:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(\sqrt{n}+1) - \frac{1}{2}\ln n}{n^\alpha}.$$

2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de rang $n \geq 3$ ataşat funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în jurul punctului $a = 0$, unde

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În determinarea derivatei de ordinul n a funcţiei f se poate folosi formula lui Leibniz, privind derivata de ordinul n a produsului de funcţii.

3. **(3 puncte)** Calculaţi integrala:

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\, dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(5 puncte)** Considerăm punctele $A(3,5)$ şi $B(11,11)$.

a) Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

b) Să se determine coordonatele punctului C dacă acesta se află pe axa $[Ox$, în partea pozitivă, ştiind că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

c) Să se scrie ecuaţia medianei care trece prin vârful A al triunghiului ABC şi să se arate că aceasta împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale.

d) Să se calculeze distanţa de la originea $O(0,0)$ la mediana care trece prin vârful A.

2. **(4 puncte)** Să se determine ecuația canonică a hiperbolei pentru care distanța dintre focare este $2\sqrt{5}$ și ale cărei asimptote sunt dreptele de ecuații $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Subiectul IV. Informatică

Notă pentru subiectul de Informatică:
Pentru rezolvarea problemei 1 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit.
Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 puncte)** Scrieți un program care:
   a) Implementează o clasă ***Meeting*** cu următoarele atribute protejate:

      - ***title*** de tip string;
      - ***dateHour*** de tip string (în formatul "zz.ll.aaaa hh:mm"). Ora va fi în intervalul [0, 23], iar minutele în intervalul [0, 59].

      Adăugaţi clasei:

      - un ***constructor*** cu parametri,
      - metodele ***get/set*** pentru toate atributele,
      - o metodă ***toString*** care returnează un string format din ***title*** și ***dateHour*** separate prin virgulă.

   b) Derivați clasa ***OnlineMeeting*** din clasa ***Meeting*** care are toate atributele clasei ***Meeting*** și adaugă atributul privat ***url*** de tip string. Adăugați metodele ***get/set*** pentru atributul nou adăugat. Metoda ***toString*** în cazul clasei ***OnlineMeeting*** va returna conținutul metodei ***toString*** din clasa ***Meeting*** la care va concatena atributul ***url***.

2. **(2 puncte)** Creați un vector cu trei obiecte: două de tip ***Meeting*** și unul de tip ***OnlineMeeting.*** Scrieți o secvență de cod care îl ordonează cronologic după atributul ***dateHour***.

3. **(2 puncte)** Scrieți liniile de cod lipsă din următoarea funcție pentru a determina obiectele de tip ***OnlineMeeting*** din vectorul ***meets*** care au ***dateHour*** mai mare decât parametrul ***specificDateHour*** și au titlul egal cu parametrul ***specificTitle***. Funcția *push_back()* inserează un element la finalul vectorului.

```
vector<OnlineMeeting> filter(const vector<OnlineMeeting>& meets, const string& specificDateHour, const string& specificTitle) {
    vector<OnlineMeeting> res;
    …
    return res;
}
```

4. **(2 puncte)** Precizați ce se afișează în urma executării secvenței de instrucțiuni de mai jos. Funcția *push_back*() inserează un element la finalul vectorului, funcția *pop_back*() șterge ultimul element al vectorului, iar funcția *back*() returnează o referință la ultimul element din vector.

```
vector<Meeting> v;
v.push_back(Meeting("Project discussion", "01.05.2024 12:00"));
v.push_back(OnlineMeeting("Team meeting", "02.05.2024 15:00", "https://meet.com/abc123"));
v.push_back(Meeting("Presentation", "03.05.2024 09:30"));
v.push_back(OnlineMeeting("Q & A Session", "04.05.2024 11:00", "https ://meet.com/def456"));
if(v.back().getDateHour() < "01.05.2024 11:00")
     v.pop_back();
v.pop_back();
cout << v.back().getDateHour() << endl;
```

5. **(1 punct)** Explicați algoritmul de căutare binară și specificați ce complexitate de timp are.

NOTĂ.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det A = 1 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$, unde $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ este grupul general liniar. Arătăm că $\mathcal{M}$ este subgrup în $GL_2(\mathbb{R})$ 1p

Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ se obţine $I_2 \in \mathcal{M}$ 0.5p

Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ (deci $\det A = a^2 + b^2 = \det A' = (a')^2 + (b')^2 = 1$) avem:

$AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix}$ cu $\det(AA)' = \det A \cdot \det A' = 1$, deci $AA' \in \mathcal{M}$ 1p

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -(-b) & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, deoarece $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = 1$ 1p

Grupul este comutativ deoarece $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix} = A'A$ 0.5p

2. $\dim A =$ rangul matricii formate cu vectorii a_1, a_2 (ca linii sau coloane) $=\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, prin urmare (a_1, a_2) este bază în A 0.5p

$\dim B = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (b_1, b_2)$ este bază în B 0.5p

$A + B = \langle A \cup B \rangle = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle \Rightarrow \dim(A + B) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$ 1.5p

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_2 - 2l_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_3 - l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

iar ultima matrice are determinantul 1, deci rangul său este 4.

Se deduce că (a_1, a_2, b_1, b_2) este o bază în $A + B$ 0.5p

$\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B)$ 1p

$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B) = 0$ 0.5p

Rezultă că $A \cap B = \{(0, 0, 0, 0)\}$ este subspaţiul nul şi $\emptyset$ este o bază în $A \cap B$ 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu ....(1p)

1. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

....(0.5p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a asfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. ....(0.5p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n + 1)}{a_n} = 1.$$

....(0.5p)

Avem

$$\ln(\sqrt{n} + 1) - \frac{1}{2}\ln n = \ln(\sqrt{n} + 1) - \ln\sqrt{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

....(0.5p)

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a = \alpha + \frac{1}{2}.$$

....(0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } \alpha > -\frac{1}{2} \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

....(0.5p)

2. • Determinarea derivatei de ordinul n, $n \geq 2$ a funcţiei f.

Observăm că funcţia f este un produs dintre o funcţie polinomială $g(x) = x^2 - 2x$ şi $h(x) = e^x$, astfel ea este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Derivata de ordinul n se va calcula cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n pentru produsul a două funcţii. Astfel, dacă $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, atunci

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

.... (0.5 p)

$$g'(x) = 2x - 2, \quad g''(x) = 2 \quad \text{şi} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq 3,$$

.... (0.25 p)

iar

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

.... (0.25 p)

De aceea,

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = C_n^n g(x) h^{(n)}(x) + C_n^{n-1} g'(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2} g''(x) h^{(n-2)}(x).$$

Astfel

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = e^x \left[x^2 - 2x + n(2x-2) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \right].$$

.... (0.5p)

• Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ şi unui punct $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

astfel, pentru $a = 0$

$$T_{n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Avem

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -2 \quad \text{şi} \quad \forall n \geq 2 \quad f^{(n)}(0) = n(n-3),$$

.... (0.5p)

astfel

$$T_{n,0}f(x) = -2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-3}{(k-1)!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

3. Avem

$$\frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1},$$

.... (1p)

iar prin integrarea prin părți obținem că

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+2}\, dx = \ln(x+1)\ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx,$$

.... (1p) de unde

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1} \right) dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

Deci

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)} dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

....(1p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Mijlocul segmentului este $M(7,8)$. Panta dreptei AB este $\frac{3}{4}$, aşadar panta mediatoarei este $-\frac{4}{3}$. Ecuaţia mediatoarei este $y-8=-\frac{4}{3}(x-7)$ care se rescrie $4x+3y-52=0$. 1p

   b) Fie $C(x,0)$ punctul cerut. Aria triunghiului ABC se poate scrie

$$\mathcal{A}[ABC]=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc}3 & 5 & 1\\ 11 & 11 & 1\\ x & 0 & 1\end{array}\right\|=\frac{1}{2}|-22-6x|$$

.... 1p

   Din $|-22-6x|=64$ şi $x>0$ se obţine $x=7$, deci $C(7,0)$.

.... 1p

   c) Mijlocul segmentului $[BC]$ este $N\left(9,\frac{11}{2}\right)$. Ecuaţia dreptei AN este $x-12y+57=0$.

   Cum N este mijlocul segmentului $[BC]$, avem că

   $\mathcal{A}[ABN]=\dfrac{1}{2}\cdot BN\cdot d(A,BC)=\dfrac{1}{2}CN\cdot d(A,BC)=\mathcal{A}[ACN]$ 1p

   d) Distanţa de la originea $O(0,0)$ la această dreaptă este

$$\frac{|1\cdot 0-12\cdot 0+57|}{\sqrt{1+144}}=\frac{57}{\sqrt{145}}$$

.... 1p

2. $FF'=2c=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}$. 1p

   Din ecuațiile asimptotelor avem că: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=2b$. 1p

   $c^2=5=a^2+b^2$. 1p

   Înlocuind $a=2b$ în ecuația precedentă, avem $b^2=1$ și $a^2=4$.

   Deci ecuația hiperbolei este $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definitie clasa Meeting (constructor, metode, acces la date) .... b) Definitie clasa derivata OnlineMeeting (mostenire, constructor, toString)	**2p** 1 p 1 p
2. Creare vector .... Ordonare cronologică după dateHour…..	**2p** 1p 1p
3. Secventa filtrare (iterare elemente, comparare , actualizare rezultat)	**2p** 2p
4. Indicarea corecta valorii afișate...	**2p** 2p
5. Explicarea căutării binare .... Indicarea corectă a complexității timp	**1p** 0.5p 0.5p

Notă:
(1p) Oficiu