Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Informatikai matematika szak

I TÉTEL. Algebra

1. **(4 pont)** Legyen $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Igazoljuk, hogy $(\mathcal{M}, \cdot)$ csoport. Kommutatív-e ez a csoport?

2. **(5 pont)** Az $\mathbb{R}^4$ valós vektortérben tekintjük az
$$a_1 = (2,1,1,1),\ a_2 = (1,0,1,1),\ b_1 = (0,1,2,1),\ b_2 = (0,0,1,1)$$
vektorokat és az $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ és $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ generált résztereket. Határozzuk meg az A, B, $A + B$ és $A \cap B$ valós vektorterek egy-egy bázisát illetve dimenzióját.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tanulmányozzuk az α valós paraméter függvényében a következő valós számsor természetét:
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(\sqrt{n}+1) - \frac{1}{2}\ln n}{n^{\alpha}}.$$

2. **(3 pont)** Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = (x^2 - 2x)\, e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
függvény. Írjuk fel a függvény $x_0 = 0$ pont körüli n-ed rendű Taylor-féle polinomját, ahol $n \geq 3$ (az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámításához fel lehet használni két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályt).

3. **(3 pont)** Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\, dx$$
integrált.

III. TÉTEL. Geometria

1. **(5 pont)** Tekintsük az $A(3,5)$ és $B(11,11)$ pontokat.

   a) Írjuk fel az $[AB]$ szakasz oldalfelező merőlegeének az egyenletét!

   b) Határozzuk meg azon C pont koordinátáit, amely az Ox tengelyen, annak pozitív részén található és amelyre az ABC háromszög területe 32.

   c) Írjuk fel az ABC háromszög A csúcsához tartozó oldalfelezőnek az egyenletét és igazoljuk, hogy ez az egyenes az ABC háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja!

   d) Számítsuk ki az $O(0,0)$ origó távolságát az A csúcshoz tartozó oldalfelezőtől!

2. **(4 pont)** Határozzuk meg a hiperbola kanonikus egyenletét, amely esetén a fókuszpontok közti távolság $2\sqrt{5}$ és az aszimptotáinak egyenletei $y = \pm\dfrac{1}{2}x$.

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:
Az 1. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.
Meg kell adni a használt programozási nyelvet.
A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 pont)** Írjunk programot, amelyben:
   a) bevezetjük a ***Meeting*** osztályt az alábbi védelemmel rendelkező attribútumokkal:

   - ***title*** – string típusú;
   - ***dateHour*** – string típusú (a "nn.hh.éééé óó:pp" formátumban). Az óra a [0, 23], a perc pedig a [0, 59] intervallumban lesz.

   Adjunk hozzá az osztályhoz:

   - egy paraméteres ***konstruktort***,
   - ***get/set*** metódusokat az összes attribútumra,
   - egy ***toString*** metódust, amely egy olyan karakterláncot térít vissza, amely a találkozó ***title*** és ***dateHour*** attribútumait tartalmazza vesszővel elválasztva.

   b) Hozzuk létre a ***Meeting*** osztály ***OnlineMeeting*** származtatott osztályát, amely a ***Meeting*** osztály összes attribútumát tartalmazza, valamint a string típusú ***url*** privát attribútumot. Vezessük be az új attribútumhoz hozzárendelt ***get/set*** metódusokat is. Az ***OnlineMeeting*** osztály esetén a ***toString*** metódus a ***Meeting*** osztály ***toString*** mertódusa által visszatérített karakterlánchoz hozzáfűzi az ***url*** attribútumot majd a kapott eredményt visszatéríti.

2. **(2 pont)** Hozzunk létre egy vektort, amely három objektumot tartalmaz: két ***Meeting*** típusút és egy ***OnlineMeeting*** típusút**.** Írjunk egy kódrészletet, amely a ***dateHour*** attribútum szerint időrendi sorrendbe rendezi a vektort.

3. **(2 pont)** Írjuk meg az alábbi függvényből hiányzó kódrészletet annak érdekében, hogy a ***meets*** vektor azon ***OnlineMeeting*** típusú objektumait határozzuk meg, amelyekre a ***dateHour*** nagyobb, mint a ***specificDateHour*** paraméter és a cím megegyezik a ***specificTitle*** paraméterrel. A *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére.

```
vector<OnlineMeeting> filter(const vector<OnlineMeeting>& meets, const string& specificDateHour, const string& specificTitle) {
    vector<OnlineMeeting> res;
    …
    return res;
}
```

4. **(2 pont)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor. A *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére, a *pop_back()* függvény kitörli a vektor utolsó elemét és a *back()* függvény egy referenciát térít vissza a vektor utolsó elemére.

```
vector<Meeting> v;
v.push_back(Meeting("Project discussion", "01.05.2024 12:00"));
v.push_back(OnlineMeeting("Team meeting", "02.05.2024 15:00", "https://meet.com/abc123"));
v.push_back(Meeting("Presentation", "03.05.2024 09:30"));
v.push_back(OnlineMeeting("Q & A Session", "04.05.2024 11:00", "https ://meet.com/def456"));
if(v.back().getDateHour() < "01.05.2024 11:00")
     v.pop_back();
v.pop_back();
cout << v.back().getDateHour() << endl;
```

5. **(1 pont)** Magyarázzuk el a bináris keresés algoritmusát és adjuk meg, hogy milyen időbonyolultsággal rendelkezik.

MEGJEGYZÉS.
Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.
Munkaidő: 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Informatikai Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det A = 1 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$, ahol $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ az általános lineáris csoport. Igazolni fogjuk, hogy $\mathcal{M}$ részcsoport $GL_2(\mathbb{R})$-ben 1p

   Ha $a = 1$ és $b = 0$, akkor következik, hogy $I_2 \in \mathcal{M}$ 0.5p

   Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ (tehát $\det A = a^2 + b^2 = \det A' = (a')^2 + (b')^2 = 1$), akkor:

   $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix}$ és $\det(AA)' = \det A \cdot \det A' = 1$, tehát $AA' \in \mathcal{M}$ 1p

   $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -(-b) & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, mivel $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = 1$ 1p

   A csoport kommutatív hiszen $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix} = A'A$ 0.5p

2. $\dim A$ = az a_1, a_2 vektorokból (mint oszlopokból vagy sorokból) álló mátrix rangja= rang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, tehát (a_1, a_2) bázis az A valós vektortérben 0.5p

   $\dim B =$ rang $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (b_1, b_2)$ bázis a B valós vektortérben 0.5p

   $A + B = \langle A \cup B \rangle = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle \Rightarrow \dim(A + B) =$ rang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$ 1.5p

   Valóban,

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_2 - 2l_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_3 - l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   és az utolsó mátrix determinánsa 1, tehát a rangja 4.

   Következik, hogy (a_1, a_2, b_1, b_2) bázis az $A + B$ valós vektortérben 0.5p

   $\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B)$ 1p

   $\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B) = 0$ 0.5p

   Következik, hogy $A \cap B = \{(0, 0, 0, 0)\}$ nulltér, tehát $\emptyset$ bázis az $A \cap B$ valós vektortérben 0.5p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. Jelölje x_n az adott sor általános tagját. Látható, hogy $\sum_{n\geq 1} x_n$ pozitív tagú sor, ezért felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó II. összehasonlítási kritériumot az adott sor konvergenciájának a tanulmányozására, kiindulva az általánosított harmonikus sorból:

$$\sum_{n\geq 1} y_n := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{konvergenes}, & \text{ha} \quad a > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad a \leq 1. \end{cases}$$

.... (0.5p)

Célunk meghatározni az a paraméter értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

mely esetben a $\sum_{n\geq 1} x_n$ és $\sum_{n\geq 1} y_n$ sorok azonos természetűek.

.... (0.5p)

Mivel

$$\ln(\sqrt{n}+1) - \frac{1}{2}\ln n = \ln(\sqrt{n}+1) - \ln\sqrt{n} = \ln\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ezért figyelembe véve, hogy ha az $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ sorozatra teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n+1)}{a_n} = 1,$$

.... (0.5p)

ahonnan következik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

miatt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

.... (0.5p)

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Ez a határérték csak akkor van a $(0,\infty)$ intervallumban, ha $a = \alpha + \frac{1}{2}$.

.... (0.5p)

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$, tehát a II. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} y_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ sorok azonos természetűek. Következésképp

$$\sum_{n\geq 1} x_n \begin{cases} \text{konvergens}, & \text{ha} \quad \alpha > \frac{1}{2} \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

.... (0.5p)

2. • Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a meghatározása $n \geq 2$ esetén (bármely más helyes megoldás 1 pontig lesz pontozva a javítókulcs alternatívájaként).

Az f függvény a $g(x) = x^2 - 2x$ polinomfüggvény és a $h(x) = e^x$ exponenciális függvény szorzata, így végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az f függvény n-ed rendű deriváltjának a kiszámítására két függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Leibniz-féle szabályát alkalmazzuk. Így, ha $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, akkor

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

.... (0.5 p)

$$g'(x) = 2x - 2, \quad g''(x) = 2 \quad \text{és} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq 3,$$

.... (0.25 p)

míg

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

.... (0.25 p)

Ezért

$$f^{(n)}(x) = C_n^n g(x) h^{(n)}(x) + C_n^{n-1} g'(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2} g''(x) h^{(n-2)}(x),$$

minden $n \geq 2$ esetén. Következésképp

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[x^2 - 2x + n(2x-2) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \right] = e^x \left[x^2 - 2x + n(2x-2) + n(n-1) \right],$$

minden $n \geq 2$ esetén.

.... (0.5p)

• Az f függvényhez és az $a \in \mathbb{R}$ ponthoz rendelt n-ed rendű Taylor-féle polinom a $T_{n,a} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomfüggvény, ahol

$$T_{n,a} f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Így $a = 0$ esetén

$$T_{n,0} f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

Mivel

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -2 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(0) = n(n-3), \quad \forall n \geq 2,$$

.... (0.5p)

ezért

$$T_{n,0} f(x) = -2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-3}{(k-1)!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

3. Mivel

$$\frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1},$$

.... (1p)

ezért a parciális integrálás alapján kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+2}\, dx = \ln(x+1)\ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx,$$

.... (1p) ahonnan

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1}\right) dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

Tehát

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

.... (1p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2024 július
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) Az AB szakasz felezőpontja $M(7,8)$. Az AB egyenes iránytényezője pedig $\frac{3}{4}$, így az oldalfelező merőleges iránytényezője $-\frac{4}{3}$ és ezért a keresett egyenlet $y-8=-\frac{4}{3}(x-7)$, vagyis $4x+3y-52=0$.
.... 1p

b) Legyen $C(x,0)$ a keresett pont. Az ABC háromszög területe:

$$\mathcal{T}[ABC]=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 11 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|-22-6x|$$

.... 1p

Abból, hogy $|-22-6x|=64$ és $x>0$, kapjuk, hogy $x=7$, tehát $C(7,0)$.
.... 1p

c) A $[BC]$ szakasz felezőpontja $N\left(9,\frac{11}{2}\right)$. Az AN egyenes egyenlete $x-12y+57=0$.

Mivel N a $[BC]$ szakasz felezőpontja, kapjuk, hogy

$\mathcal{T}[ABN]=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot d(A,BC)=\frac{1}{2}CN\cdot d(A,BC)=\mathcal{T}[ACN]$ 1p

d) Az $O(0,0)$ origó távolsága az AN egyenestől:

$$\frac{|1\cdot 0-12\cdot 0+57|}{\sqrt{1+144}}=\frac{57}{\sqrt{145}}$$

.... 1p

2. $FF'=2c=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}$. 1p

Az aszimptoták egyenletei alapján: $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2b$. 1p

$c^2=5=a^2+b^2$. 1p

Fugyelembe véve, hogy $a=2b$, az előbbi egyenlet alapján $b^2=1$ és $a^2=4$.

Tehát a hiperbola egyenlete $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel
1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2024 július
Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1. a) A Meeting osztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz) b) Az OnlineMeeting származtatott osztály definiálása (öröklés, konstruktor, toString)	**2p** 1 p 1 p
2. A vektor létrehozása Időrendi sorrendbe való rendezés a dateHour szerint	**2p** 1p 1p
3. A szűrést megvalósító kódrészlet (iterálás az elemeken, összehasonlítások, eredmény aktualizálása)	**2p** 2p
4. A megjelenítendő érték helyes megadása	**2p** 2p
5. A bináris keresés elmagyarázása Az időbonyolultság helyes megadása	**1p** 0.5p 0.5p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból