Babeş-Bolyai University
Faculty of Matematics and Computer Science

GRADUATION EXAM
Written Test - July 2024
Mathematics Computer Science Study Programme

SUBJECT I. Algebra

1. **(4 points)** Consider $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Prove that $(\mathcal{M}, \cdot)$ is a group. Is it a commutative group?

2. **(5 points)** In the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^4$ we consider the vectors:

$$a_1 = (2,1,1,1),\; a_2 = (1,0,1,1),\; b_1 = (0,1,2,1),\; b_2 = (0,0,1,1)$$

and the generated subspaces $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $B = \langle b_1, b_2 \rangle$. Determine a basis and the dimension for each of the $\mathbb{R}$-vector spaces A, B, $A + B$ and $A \cap B$.

SUBIECTUL II. Calculus

1. **(3 puncte)** Study with discussion on the real parameter α the nature of the series of real numbers:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(\sqrt{n} + 1) - \frac{1}{2} \ln n}{n^\alpha}.$$

2. **(3 puncte)** Write Taylor's polynomial of rank $n \geq 3$ attached to the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ about the point $a = 0$, for

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

When determining the n-th derivate of the function f you may use Leibniz's formular for the derivative of the product of functions.

3. **(3 puncte)** Determine the value of the determinate integral:

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\, dx.$$

SUBJECT III. Geometry

1. **(5 points)** Consider the points $A(3, 5)$ and $B(11, 11)$.

a) Write the equation of the perpendicular bisector of the segment $[AB]$.

b) Find the coordinates of the point C, knowing that this lies on the $[Ox$ axis, in its positive part, and that the area of the triangle ABC is equal to 32.

c) Write the equation of the median that passes through A in the triangle ABC and show that this median splits triangle ABC in two triangles of equal areas.

d) Compute the distance between the origin $O(0, 0)$ and the median that passes through A in the triangle ABC.

2. **(4 points)** Find the canonical equation of the hyperbola for which the distance between its focal points is $2\sqrt{5}$ and whose asymptotes are the lines $y = \pm \dfrac{1}{2} x$.

SUBJECT IV. Computer Science

Note for the Computer Science subject:
One of the programming languages C++, Python, Java or C# can be used to solve problem 1.
Please indicate the programming language used.
Existing libraries (from C++, Python, Java, C#) can be used in the provided solutions.

1. **(2 points)** Write a program that:
   a) Implements a ***Meeting*** class with the following protected attributes:

   - ***title*** of type string;
   - ***dateHour*** of type string (in the format "dd.mm.yyyy hh:mm"). The hour will be in the range [0, 23], and the minute in the range [0, 59].

   Add to the class:

   - a parameterized ***constructor***,
   - ***get/set*** methods for all the attributes,
   - a ***toString*** method that returns a string consisting of ***title*** and ***dateHour*** separated by a comma.

   b) Derive the class ***OnlineMeeting*** from the class ***Meeting*** which has all the attributes of the class ***Meeting*** and adds the private string attribute ***url***. Add ***get/set*** methods for the newly added attribute. The ***toString*** method for the ***OnlineMeeting*** class will return the content of the ***toString*** method of the ***Meeting*** class to which it will concatenate the ***url*** of the meeting.

2. **(2 points)** Create a vector with three objects: two of type ***Meeting*** and one of type ***OnlineMeeting***. Write a code sequence to order it chronologically by the ***dateHour*** attribute.

3. **(2 points)** Fill in the missing lines of code of the following function to determine objects of type ***OnlineMeeting*** from the vector ***meets*** that have a ***dateHour*** greater than the parameter ***specificDateHour*** and the title equal to the parameter ***specificTitle***. The *push_back*() function inserts an element at the end of the vector.

```
vector<OnlineMeeting> filter(const vector<OnlineMeeting>& meets, const string& specificDateHour, const string&
specificTitle) {
    vector<OnlineMeeting> res;
    …
    return res;
}
```

4. **(2 points)** Indicate what is the result of executing the code sequence given below. The *push_back*() function inserts an element at the end of the vector, the *pop_back*() function deletes the last element of the vector, and the *back*() function returns a reference to the last element in the vector.

```
vector<Meeting> v;
v.push_back(Meeting("Project discussion", "01.05.2024 12:00"));
v.push_back(OnlineMeeting("Team meeting", "02.05.2024 15:00", "https://meet.com/abc123"));
v.push_back(Meeting("Presentation", "03.05.2024 09:30"));
v.push_back(OnlineMeeting("Q & A Session", "04.05.2024 11:00", "https ://meet.com/def456"));
if(v.back().getDateHour() < "01.05.2024 11:00")
     v.pop_back();
v.pop_back();
cout << v.back().getDateHour() << endl;
```

5. **(1 point)** Explain the binary search algorithm and specify its time complexity.

NOTE.
All subjects are compulsory and full solutions are requested.
An initial score of **1 point** is awarded to each subject. The minimum passing grade is 5,00.
The working time is 3 hours.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det A = 1 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$, unde $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ este grupul general liniar. Arătăm că $\mathcal{M}$ este subgrup în $GL_2(\mathbb{R})$ 1p

Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ se obţine $I_2 \in \mathcal{M}$ 0.5p

Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ (deci $\det A = a^2 + b^2 = \det A' = (a')^2 + (b')^2 = 1$) avem:

$AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix}$ cu $\det(AA)' = \det A \cdot \det A' = 1$, deci $AA' \in \mathcal{M}$ 1p

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -(-b) & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, deoarece $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = 1$ 1p

Grupul este comutativ deoarece $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{pmatrix} = A'A$ 0.5p

2. $\dim A =$ rangul matricii formate cu vectorii a_1, a_2 (ca linii sau coloane) $= \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, prin urmare (a_1, a_2) este bază în A 0.5p

$\dim B = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (b_1, b_2)$ este bază în B 0.5p

$A + B = \langle A \cup B \rangle = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle \Rightarrow \dim(A + B) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$ 1.5p

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_2 - 2l_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_3 - l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

iar ultima matrice are determinantul 1, deci rangul său este 4.

Se deduce că (a_1, a_2, b_1, b_2) este o bază în $A + B$ 0.5p

$\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B)$ 1p

$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B) = 0$ 0.5p

Rezultă că $A \cap B = \{(0, 0, 0, 0)\}$ este subspaţiul nul şi $\emptyset$ este o bază în $A \cap B$ 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1.

2. Notăm prin x_n termenul general al seriei. Se constată că seria $\sum x_n$ este cu termeni pozitivi, şi se va încerca aplicarea criteriului II.b) de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, pornind de la seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } a > 1 \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } a \leq 1 \end{cases}.$$

.... (0.5p)

Scopul este determinarea unei valori a parametrului a asfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty),$$

caz în care cele două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. .... (0.5p)

Se va ţine cont de faptul că atunci când $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n+1)}{a_n} = 1.$$

.... (0.5p)

Avem

$$\ln(\sqrt{n}+1) - \frac{1}{2}\ln n = \ln(\sqrt{n}+1) - \ln\sqrt{n} = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

.... (0.5p)

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot n^a = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Această limită va fi în $(0, \infty)$ doar în cazul în care

$$a = \alpha + \frac{1}{2}.$$

.... (0.5p)

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ deci, conform criteriul de comparaţie II.b) seria $\sum x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

În concluzie,

$$\sum x_n \begin{cases} \text{convergentă} & : \text{ dacă } \alpha > -\frac{1}{2} \\ \text{divergentă} & : \text{ dacă } \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

.... (0.5p)

3. • Determinarea derivatei de ordinul n, $n \geq 2$ a funcţiei f.

Observăm că funcţia f este un produs dintre o funcţie polinomială $g(x) = x^2 - 2x$ şi $h(x) = e^x$, astfel ea este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Derivata de ordinul n se va calcula cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n pentru produsul a două funcţii. Astfel, dacă $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, atunci

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

.... (0.5 p)

$$g'(x) = 2x - 2, \quad g''(x) = 2 \quad \text{şi} \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq 3,$$

.... (0.25 p)

iar

$$h^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 0.$$

.... (0.25 p)

De aceea,

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = C_n^n g(x) h^{(n)}(x) + C_n^{n-1} g'(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^{n-2} g''(x) h^{(n-2)}(x).$$

Astfel

$$\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = e^x \left[x^2 - 2x + n(2x-2) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \right].$$

.... (0.5p)

• Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ şi unui punct $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

astfel, pentru $a = 0$

$$T_{n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Avem

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -2 \quad \text{şi} \quad \forall n \geq 2 \quad f^{(n)}(0) = n(n-3),$$

.... (0.5p)

astfel

$$T_{n,0}f(x) = -2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-3}{(k-1)!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0.5p)

4. Avem

$$\frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1},$$

.... (1p)

iar prin integrarea prin părți obținem că

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+2} dx = \ln(x+1)\ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1} dx = \ln 2 \cdot \ln 3 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1} dx,$$

.... (1p) de unde

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1} \right) dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

Deci

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

.... (1p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Mijlocul segmentului este $M(7,8)$. Panta dreptei AB este $\frac{3}{4}$, aşadar panta mediatoarei este $-\frac{4}{3}$. Ecuaţia mediatoarei este $y-8=-\frac{4}{3}(x-7)$ care se rescrie $4x+3y-52=0$. 1p

   b) Fie $C(x,0)$ punctul cerut. Aria triunghiului ABC se poate scrie

$$\mathcal{A}[ABC]=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 11 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-22-6x|$$

   .... 1p

   Din $|-22-6x|=64$ şi $x>0$ se obţine $x=7$, deci $C(7,0)$.

   .... 1p

   c) Mijlocul segmentului $[BC]$ este $N\left(9,\frac{11}{2}\right)$. Ecuaţia dreptei AN este $x-12y+57=0$.

   Cum N este mijlocul segmentului $[BC]$, avem că

   $\mathcal{A}[ABN]=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot d(A,BC)=\frac{1}{2}CN\cdot d(A,BC)=\mathcal{A}[ACN]$ 1p

   d) Distanţa de la originea $O(0,0)$ la această dreaptă este

$$\frac{|1\cdot 0-12\cdot 0+57|}{\sqrt{1+144}}=\frac{57}{\sqrt{145}}$$

   .... 1p

2. $FF'=2c=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}$. 1p

   Din ecuațiile asimptotelor avem că: $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2b$. 1p

   $c^2=5=a^2+b^2$. 1p

   Înlocuind $a=2b$ în ecuația precedentă, avem $b^2=1$ și $a^2=4$.

   Deci ecuația hiperbolei este $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă iulie 2024
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definitie clasa Meeting (constructor, metode, acces la date) .... b) Definitie clasa derivata OnlineMeeting (mostenire, constructor, toString)	**2p** 1 p 1 p
2. Creare vector .... Ordonare cronologică după dateHour…...	**2p** 1p 1p
3. Secventa filtrare (iterare elemente, comparare , actualizare rezultat)	**2p** 2p
4. Indicarea corecta valorii afișate..	**2p** 2p
5. Explicarea căutării binare .... Indicarea corectă a complexității timp	**1p** 0.5p 0.5p

Notă:
(1p) Oficiu