Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(7 puncte)** Fie
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   a) Să se arate că V este un subspaţiu al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $M_2(\mathbb{R})$.

   b) Fie
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Să se arate că $V = \langle A, B, C \rangle$ şi să se determine dimensiunea $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial V.

   c) Să se arate că funcţia
$$f : V \to \mathbb{R},\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = a$$
   este un morfism surjectiv de grupuri de la $(V, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

2. **(2 puncte)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numerele întregi $6n - 1$ şi $10n - 1$ sunt relativ prime, apoi să se determine un c.m.m.m.c. al lor.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(2 puncte)** Determinaţi limita şirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 2}$, având termenul general
$$x_n = \frac{\ln 2^2 + \ln 3^3 + \ldots + \ln n^n}{n^2}, \quad \forall n \geq 2.$$

2. **(2 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real $a > 0$, natura seriei de numere reale cu termeni pozitivi:
$$\sum_{n\geq 1} a^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. **(2 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de gradul $n \in \mathbb{N}$ ataşat funcţiei
$$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x - 2}$$
   în punctul $a = 3$.

4. **(3 puncte)** Să se calculeze valoarea integralei
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (e^x(\sin x + \cos x)) \ln\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right) dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(2 puncte)** Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M(-1,1,-2)$ şi este perpendiculară pe planul determinat de punctele $A(1,-1,1)$, $B(-2,1,3)$ şi $C(4,-5,-2)$.

2. **(3 puncte)** Demonstraţi că dreptele de ecuaţii

$$d_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$$

sunt paralele şi calculaţi distanţa de la punctul $P_1(-2,1,0)$ la dreapta d_2.

3. **(2 puncte)** Se dă hiperbola $x^2 - 4y^2 = 16$.

   a) Să se determine distanţa dintre focarele hiperbolei.

   b) Să se scrie ecuaţiile asimptotelor hiperbolei.

4. **(2 puncte)** Se dau punctele $A(1,6)$ şi $B(4,-3)$. Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul pe axa Ox şi care trece prin punctele A şi B.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) Se aplică teorema de caracterizare a subspaţiului:

$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$ 0.5p

Pentru orice $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ avem $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} \in V$ 1p

Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ 0 & \alpha \cdot a \end{pmatrix} \in V$ 1p

b) $V = \langle A, B, C \rangle \Leftrightarrow \forall X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}:\ X = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \beta - \gamma = b \end{cases}$ 1p

Sistemul (S) este compatibil $\left(\text{nedeterminat, } \begin{cases} \alpha = a - b - 2\gamma \\ \beta = b + \gamma \end{cases}\right)$, ceea ce demonstrează existenţa scalarilor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ şi completează demonstraţia faptului că $V = \langle A, B, C \rangle$ 0.5p

Calculul dimensiunii lui ${}_{\mathbb{R}}V$ 1p

Varianta 1 de calcul:

Observăm că $B + C = 2A$; rezultă A, B, C liniar dependente şi atunci $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$ 0.5p

Verificăm că A şi B sunt liniar liniar independente, deci $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ 0.5p

Varianta 2 de calcul:

În încercarea de a proba liniar independenţa vectorilor A, B, C, egalitatea $\alpha A + \beta B + \gamma C = O_2$ conduce la sistemul omogen $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$ care este compatibil nedeterminat. Cum scalarii α, β, γ nu sunt toţi nuli, vectorii A, B, C sunt liniar dependenţi, şi astfel $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$ 0.5p

Se justifică pentru oricare 2 vectori aleşi dintre vectorii A, B, C că sunt liniar independenţi şi atunci $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$. Deci $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ 0.5p

c) Verificarea faptului că f este omomorfism de grupuri 1p

Pentru orice $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ avem

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix}\right) = a + a' = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right)$

Justificarea faptului că f este surjectivă 1p

(**Exemplu:** $\forall y \in \mathbb{R}, \exists X = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ astfel încât $f(X) = y$.)

2. Fie $n \in \mathbb{N}$ arbitrar şi $d \in \mathbb{N}$ un divizor comun pentru $6n-1$ şi $10n-1$, adică $\begin{cases} d \mid 6n-1 \\ d \mid 10n-1 \end{cases}$. Atunci

$\begin{cases} d \mid 5(6n-1) \\ d \mid 3(10n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid 30n-5 \\ d \mid 30n-3 \end{cases} \Rightarrow d \mid 2[= (30n-3) - (30n-5)] \Rightarrow d = 1$ sau $d = 2$........1p

Cum $6n-1$ e impar (ca, de altfel, şi $10n-1$), d nu poate fi 2.

Prin urmare, $d = 1$ şi atunci, evident, $(6n-1, 10n-1) = 1$ 0.5p

$(6n-1, 10n-1)[6n-1, 10n-1] = (6n-1)(10n-1) \Rightarrow [6n-1, 10n-1] = (6n-1)(10n-1)$ 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Aplicăm lema lui Stolz-Cesàro pentru şirurile intermediare (a_n) şi (b_n) având termenii generali

$$a_n = \ln 2^2 + \ln 3^3 + \ldots + \ln n^n, \qquad b_n = n^2, \quad \forall n \geq 2,$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

.... (0,5p)

Verificăm existenţa limitei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \cdot \ln(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty.$$

.... (1p)

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty.$$

.... (0,5p)

2. Utilizăm criteriul rădăcinii:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2a.$$

.... (0,5p)

- Dacă $\ell = 2a < 1$, adică $a < \frac{1}{2}$, atunci seria este convergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = 2a > 1$, adică $a > \frac{1}{2}$, atunci seria este divergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = 2a = 1$, adică $a = \frac{1}{2}$, atunci termenul general al seriei nu tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

  deci seria este divergentă. .... (0,5p)

3. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ şi unui punct $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I = (2, \infty)$, iar $a = 3$.

Derivata de ordinul 1 a funcţiei f este

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}},$$

derivata de ordinul 2 a funţiei f este

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x-2)^{-\frac{3}{2}}.$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că pentru oricare $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (2n-3)!!(x-2)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

.... (0,5p)

Remarcăm faptul că

$$f(3) = 1, \quad f'(3) = \frac{1}{2},$$

iar

$$\begin{aligned} T_{n,3}f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot (2k-3)!!(x-3)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

.... (0,5p)

4. Observăm că $(e^x \sin x)' = e^x(\sin x + \cos x)$ .... (1,0p)

Aplicăm integrarea prin părți:

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x(\sin x + \cos x) \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (e^x \sin x)' \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) dx = \\ &= e^x \sin x \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \sin x \cdot \frac{\sin x}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \end{aligned}$$

.... (1,0p)

Obținem valoarea integralei:

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \, dx = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - e^x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \\ &= e^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - 1\right) + e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

.... (1,0p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. Ecuaţia planului ABC: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z - 11 = 0$, de unde $\vec{N}(2, -3, 6)$ [sau $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$] 1p

   Ecuaţiile dreptei perpendiculare pe (ABC): $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{x+2}{6}$ 1p

2. a) Un vector director al dreptei d_2 este $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2)$, unde $p_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -6$, $q_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4$, $r_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $\vec{d_2} = -2 \cdot \vec{d_1} \Rightarrow \vec{d_1}$ şi $\vec{d_2}$ coliniari 1p

   b) Un punct al dreptei d_2 este $P_2(4, -4, 0)$, $P_1(-2, 1, 0) \in d_1$, $\overrightarrow{P_1P_2}(6, -5, 0)$ 1p

   c) $d(P_1, d_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{d_2}||}{||\vec{d_2}||} = \sqrt{5}$ 1p

   Observaţie O altă soluţie posibilă:

   a) şi b) identic ca mai sus

   c) Coordonatele proiecţiei Q a lui P_1 pe d_2 sunt $(-2, 0, -2)$, $d(P_1, d_2) = d(P_1, Q) = \sqrt{5}$ 1p

3. Ecuaţia hiperbolei se poate scrie sub forma $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, de unde avem $a = 4,\ b = 2$ 0.5p

   a) $c^2 = a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow FF' = 4\sqrt{5}$ 0.5p

   b) Ecuaţiile asimptotelor: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$. 1p

4. **Varianta 1.** Centrul cercului are coordonatele $M_0(t, 0)$ 0.5p

   $r = |M_0A| = |M_0B| \Leftrightarrow r^2 = (t-1)^2 + 36 = (t-4)^2 + 9$ 0.5p

   $t = -2$, deci $M_0(-2, 0)$ şi $r^2 = 45$. Ecuaţia cercului este: $(x+2)^2 + y^2 = 45$ 1p

   Varianta 2. Centrul cercului se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$. Mijlocul segmentului AB este $P(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, panta mediatoarei este $m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Deci ecuaţia mediatoarei este $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{5}{2}) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$. 1p

   Centrul cercului $\{M\} = Ox \cap d$, deci $M(-2, 0)$. Raza este $r = |MA| = \sqrt{45}$. Astfel ecuaţia cercului este $(x+2)^2 + y^2 = 45$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.